

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜNDE
YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ
DEĞİŞMEZLİK ÖLÇENİ ENİYİLEMESİ**

**DOKTORA TEZİ
Nejla ALTAY**

Anabilim Dalı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Programı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

KASIM 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜNDE
YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ
DEĞİŞMEZLİK ÖLÇENİ ENİYİLEMESİ**

DOKTORA TEZİ

Nejla ALTAY

(702042004)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28 Ocak 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 04 Kasım 2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin DEMİRALP (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA (MÜ)
Prof. Dr. Yılmaz AKYILDIZ (BÜ)
Prof. Dr. Serdar ÇELEBİ (İTÜ)
Prof. Dr. Ayşe Hümeyra BİLGE (KHÜ)

KASIM 2010

ÖNSÖZ

Doktora çalışmamın her aşamasında bana deneyimini, sabrını ve emeğini gösteren, karşılaştığım her sorunda üstesinden gelmeme yardımcı olan, değerli hocam Sayın Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e, çalışmalarımı yönlendirmesi ve bilim yolunda ilerlemem konusundaki her türlü desteğinden ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam süresince, yapıcı eleştirilerinden ve yapmış olduğu değerli katkılarından ötürü Sayın Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA'ya ve Sayın Prof. Dr. Yılmaz AKYILDIZ'a teşekkür ederim.

İ.T.Ü. Bilişim Enstitüsü'nde doktora tezimi hazırlarken bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım değerli hocalarıma ve doktora çalışmalarım için gerekli koşulları sağlayan Sayın Prof. Dr. M. Serdar ÇELEBİ'ye teşekkür ederim.

Doktoram süresince ders, yeterlilik ve tez aşamasında gereksinim duyduğum her anda bana moral desteği veren sevgili hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Lale TÜKENMEZ ERGENE'ye teşekkür ederim.

Doktora eğitimim ve tez yazma süresince maddi manevi destek olan, doktora çalışmamın her anında beni en iyi şekilde motive eden sevgili eşim Dr. Gökmen ALTAY'a teşekkür ederim.

Son olarak eğitim hayatım boyunca hep ilerlememi isteyen anneme, babama ve kardeşlerime gereksinim duyduğum her anımda benim yanımda oldukları ve destek oldukları için teşekkür etmeyi bir borç sayıyorum.

Kasım 2010

Nejla ALTAY

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER	v
KISALTMALAR	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
2. YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ.....	5
2.1 İşlevlerin YBMG Kullanılarak İçdeğerbiçimsel Yaklaşımları	12
2.1.1 Birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım	12
2.1.2 İkinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım	20
2.1.3 Uygulama	26
2.2 Sıradan Türevli Denklemlerin Sayısal Çözümünde İçdeğerbiçimsel Yaklaşım Yöntemi	31
2.2.1 Birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım	31
2.2.2 İkinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım	33
2.2.3 Üçüncü dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım.....	35
2.2.4 Uygulama	38
3. SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMI	45
3.1 Sendelenimsizlik Durumunda Sıradan Türevli Denklemlerin Sayısal Çözümü	52
3.1.1 Birinci kereden doğrusal sağ yanlı sıradan türevli denklemler.....	52
3.1.1.1 Uygulama	55
3.1.2 İkinci kereden doğrusal sağ yanlı sıradan türevli denklemler.....	63
3.1.2.1 Uygulama	66
3.1.3 Sendelenimsizlik durumunda n. kereden bir sıradan türevli denklemin herhangi bir [a,b] aralığında sayısal çözümü	74
3.1.3.1 Uygulama	77
3.1.4 Sendelenimsizlik durumunda [0,1] aralığında ikinci kereden sağyanlı sınır değer sorununun sayısal çözümü	80
3.1.4.1 Uygulama	82
3.1.5 Sendelenimsizlik durumunda birim aralıkta ikinci kereden sağ yansız seçkisiz değerli bir değiştirge içeren sınır değer sorununun sayısal çözümü	86
3.1.5.1 Uygulama	89
4. GRÖBNER TABANI VE BUCHBERGER ALGORİTMASI.....	95
4.1 Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemlerin YBMG Ve Gröbner Tabanı İle Yaklaşık Çözümü	100
4.1.1 Uygulama	102

5. UZAY GENİŞLETME	109
5.1 Uzay Genişletme Ve Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi Kullanılarak Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemlerin Sayısal Çözümü.....	114
5.1.1 Uygulama	118
6. ÇOKLU DİZEY, ÇOKLU DOĞRUSAL CEBİR, YÜKSEK KERTEDEN TEKİL DEĞER AYRIŞTIRIM	125
6.1 Üç Kerteden Çoklu Dizelerin Bir Özdüzeyli Ayrıştırımında İlk Dışçarpımlarının Belirlenmesi.....	131
6.1.1 Uygulama	132
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	137
KAYNAKLAR	141
ÖZGEÇMİŞ	147

KISALTMALAR

YBMG	: Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi
ÇYBMG	: Çarpımsal Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
MYBMG	: Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
DYBMG	: Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	39
Çizelge 2.2 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	41
Çizelge 2.3 : Örnek 3 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	43
Çizelge 3.1 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	57
Çizelge 3.2 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	58
Çizelge 3.3 : Örnek 3 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	59
Çizelge 3.4 : Örnek 4 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	60
Çizelge 3.5 : Örnek 5 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	61
Çizelge 3.6 : Örnek 6 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	62
Çizelge 3.7 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	67
Çizelge 3.8 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	68
Çizelge 3.9 : Örnek 3 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri....	69
Çizelge 3.10 : Örnek 4 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri..	70
Çizelge 3.11 : Örnek 5 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri..	71
Çizelge 3.12 : Örnek 6 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri..	73
Çizelge 3.13 : Örnek 7 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri..	74
Çizelge 3.14 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri..	78
Çizelge 3.15 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri..	79
Çizelge 3.16 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri..	83
Çizelge 3.17 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri..	84
Çizelge 3.18 : Örnek 3 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri..	86
Çizelge 4.1 : Örnek 1 için deneysel sonuçlar.	105
Çizelge 4.2 : Örnek 2 için deneysel sonuçlar.	106
Çizelge 4.3 : Örnek 3 için deneysel sonuçlar.	107
Çizelge 5.1 : Değişmezlik ölçeni değerleri.	122
Çizelge 6.1 : Üçüncü kereden 2 boyutlu sistemin tekil değer ayrıştırımının sonuçları.	134
Çizelge 6.2 : Üçüncü kereden 3 boyutlu sistemin tekil değer ayrıştırımının sonuçları.	134
Çizelge 6.3 : Sonuçların özeti.	135

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	28
Şekil 2.2 : İkinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	31
Şekil 2.3 : Birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	40
Şekil 2.4 : İkinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	40
Şekil 2.5 : Üçüncü dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	40
Şekil 2.6 : Birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	41
Şekil 2.7 : İkinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	42
Şekil 2.8 : Üçüncü dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	42
Şekil 2.9 : Birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	43
Şekil 2.10 : İkinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	43
Şekil 2.11 : Üçüncü dereceden içdeğerbiçimsel yaklaştırım.	44
Şekil 3.1 : $y = e^x$, $[0,1]$ aralığı.	58
Şekil 3.2 : $y = e^{-2x}$, $[0,1]$ aralığı.	59
Şekil 3.3 : $y = e^{-x^2/2}$, $[0,1]$ aralığı.	60
Şekil 3.4 : $y = 2e^{\cos x - 1}$, $[0,1]$ aralığı.	61
Şekil 3.5 : $y(x) = 5 - 3e^{-4x}$, $[0,1]$ aralığı.	62
Şekil 3.6 : $y(x) = \frac{1}{17}(21e^{4x} - 4\cos x + \sin x)$, $[0,1]$ aralığı.	63
Şekil 3.7 : $y(x) = 3e^{-2x} + e^x$, $[0,1]$ aralığı.	67
Şekil 3.8 : $y(x) = e^{2x} \sin 2x$, $[0,1]$ aralığı.	68
Şekil 3.9 : $y(x) = \sqrt{x} J(1, 2\sqrt{x})$, $[0,1]$ aralığı.	69
Şekil 3.10 : $y(x) = -e^{x/2} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})$, $[0,1]$ aralığı.	71
Şekil 3.11 : $y(x) = \cos 3x + x \sin 3x$, $[0,1]$ aralığı.	72
Şekil 3.12 : $y(x) = 4e^{-2x} + x^4$, $[0,1]$ aralığı.	73
Şekil 3.13 : $y(x) = \frac{1}{6}(4e^{2x} - e^{8x})$, $[0,1]$ aralığı.	74
Şekil 3.14 : $y(x) = e^x + 3e^{-2x}$, $[-1,2]$ aralığı.	78
Şekil 3.15 : $y(x) = 2 + \cos x - 2 \sin x$, $[-\pi, \pi]$ aralığı.	80
Şekil 3.16 : $y(x) = x^3$, $[0,1]$ aralığı.	83
Şekil 3.17 : $y(x) = \frac{e^{\pi(2-x)} - e^{\pi x}}{e^{2\pi} - 1}$, $[0,1]$ aralığı.	85
Şekil 3.18 : $y(x) = \frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sin(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2})}$, $[0,1]$ aralığı.	86
Şekil 3.19 : 1. özişlev.	90
Şekil 3.20 : 2. özişlev.	91
Şekil 3.21 : 3. özişlev.	91
Şekil 3.22 : 4. özişlev.	91
Şekil 3.23 : 5. özişlev.	92
Şekil 3.24 : 6. özişlev.	92
Şekil 3.25 : 7. özişlev.	92
Şekil 3.26 : 8. özişlev.	93
Şekil 3.27 : 9. özişlev.	93

Şekil 4.1 : $y(x) = \frac{1}{x+1}$, $[0,1]$ aralığı.	106
Şekil 4.2 : $y(x) = x \tan(\ln x)$, $[0,1]$ aralığı.	107
Şekil 4.3 : $y(x) = (2+2x)^{-1/2}$, $[0,1]$ aralığı.	108
Şekil 5.1 : $z_1(x) = y/x$ işlevi.	119
Şekil 5.2 : $z_2(x) = 1/y$ işlevi.	119
Şekil 5.3 : $z_3(x) = 1/x$ işlevi.	120
Şekil 5.4 : $z_4(x) = 1/y^2$ işlevi.	120
Şekil 5.5 : $z_1(x) = y/x$ işlevi.	120
Şekil 5.6 : $z_2(x) = 1/y$ işlevi.	121
Şekil 5.7 : $z_3(x) = 1/x$ işlevi.	121
Şekil 5.8 : $z_4(x) = 1/y^2$ işlevi.	121
Şekil 5.9 : $z_1(x) = y/(0.1x+0.985)$ işlevi.	123
Şekil 5.10 : $z_2(x) = 1/y$ işlevi	123
Şekil 5.11 : $z_3(x) = 1/(0.1x+0.985)$ işlevi.	123
Şekil 5.12 : $z_4(x) = 1/y^2$ işlevi.	124

SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜNDE YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ DEĞİŞMEZLİK ÖLÇENİ ENİYİLEMESİ

ÖZET

Sıradan Türevli Denklemler (STD), birçok mühendislik ve fizik probleminde karşımıza en çok çıkan matematik modellemelerdendir. Bu denklemler, doğrusal ya da doğrusal olmayan denklemler olabilmektedir. Bu tez çalışmasında verilen Sıradan Türevli Denklemin sayısal olarak çözümü diğer bir deyişle çözümün yaklaştırımı için yöntemler geliştirilmiştir. Öncelikle doğrusal denklemler ele alınmış, daha sonrasında ise doğrusal olmayan denklemler için çözüm yolları geliştirilmeye çalışılmıştır.

İlk olarak geliştirilen yöntemde, Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi'nin (YBMG) etkinliğinden faydalanılmıştır. YBMG son 15 yıl içerisinde geliştirilmiş bir yöntem olup, çok değişkenli işlevlerin daha az sayıda değişken içeren işlevler kullanılarak yaklaştırılması düşüncesine dayanmaktadır. Bu amaçla ilgili STDin çözümü için uygun bir Hilbert Uzayından seçilen taban takımı aracılığı ile doğrusal birleştirimi olarak yazılmakta ve bu birleştirimdeki bilinmeyen katsayılar YBMG değişmezlik ölçenini en büyük yapacak biçimde seçilmektedir. Taban işlevleri çokterimli altkesimsel türündedir. Bu çalışmada sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü dereceden taban işlevleri ile elde edilen yaklaşımlar yapılmıştır. STDin gerçek çözümüne en yakın olabilecek bir yaklaşım işlevi elde edilmiştir. Ancak gözlemler, içdeğerbiçimsel yaklaşımın yakınsama için çok büyük çaba gerektireceğini göstermiştir.

Sendelenimsizlik Yaklaşımını bu aşamada kullanılarak, sayısal çözümün hem hızlı hem de oldukça iyi bir biçimde yakınsatılması başarılmıştır. Sendelenimsizlik Yaklaşımını son 2 yılda geliştirilen bir yöntemdir. Yöntem, yüksek kereden başlangıç koşullu denklemlere ve sınır değer koşullu denklemlere uygulanmıştır. Diğer sayısal yöntemlere göre az sayıda düğüm noktası kullanılarak oldukça iyi bir yaklaşım elde edilmiştir.

Tez çalışmasında ayrıca doğrusal olmayan sıradan türevli denklemlerin sayısal çözümü için de yöntem geliştirilmeye çalışılmıştır. Burada yalnızca birinci kereden denklemler ele alınmıştır. Yüksek kereden denklemler ise birinci kereden denklem sistemine dönüştürülerek sistemin çözümü gerçekleştirilebilir. Sayısal çözüm için YBMG'nden faydalanılmıştır. Ortaya çıkan doğrusal olmayan denklemler ise cebirsel olarak Gröbner Tabanı yöntemi ile çözülmüştür. Gröbner Tabanı yöntemi, var olan birçok doğrusal olmayan denklemlerin sayısal çözüm yöntemlerinden daha etkili ve daha tutarlı sonuçlar veren bir yöntemdir. Ancak Gröbner tabanı yöntemi, yüksek dereceden çokterimlilerin oluşturduğu doğrusalsızlıklarda kullanılabilen bir yöntem

olduğundan, bu çalışmada, çokterimli yapıdan dolayı doğrusal olmayan STD'in çözümü gerçekleştirilmiş ve gerçek çözüme oldukça yakın sonuçlar elde edilmiştir. STD'in, bağımlı değişkenin çokterimli yapısından kaynaklanmayan diğer doğrusal olmayan türevli denklemlerinin sayısal çözümü için Uzay Genişletme yönteminin etkinliğinden faydalanılmıştır. Bu yöntemde, sıradan türevli denklemin sağyanı, yani türevsiz kesimi, farklı bilinmeyen işlevlerin ikinci dereceden çokterimlileri türünden yazılarak, birinci kereden sıradan türevli denklem takımına dönüştürülmüştür. Bu denklem takımı, yöneysel yapıda yazılarak, sayısal çözümün Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi ile değişmezlik ölçenleri elde edilmiştir. Oluşan doğrusal olmayan denklemler Gröbner Tabanı ile çözülmüştür. Bu çalışmada geliştirilen bu yöntemin ileride yapılabilecek çalışmalara taban oluşturması amaçlanmıştır.

Türevli denklem takımının sağ yanında bulunan ikinci dereceden çokterimliler, alt sırasayısı üç olan diziler ile gösterilebilir. Bu durum, çoklu dizeylerin kullanımını gerektirmiştir. Bunun için Çoklu Doğrusal Cebir'de bulunan bazı temel kavramlar tanıtılmıştır. Çoklu Doğrusal Cebir'in en önemli konularından biri olan Yüksek Kereden Tekil Değer Ayrıştırımı kullanılarak verilen çoklu dizeyin, bir özdüzeyle yöneyler türünden anlatımı elde edilmiştir. Ayrıştırım sırasında oluşan doğrusal olmayan denklemlerin çözümü için Gröbner tabanından yararlanılmıştır.

OPTIMIZATION OF HIGH DIMENSIONAL MODEL REPRESENTATION CONSTANCY MEASURER IN THE NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Ordinary Differential Equations (ODE) are amongst the most commonly used mathematical models in physics and engineering. These equations may be linear or nonlinear. In this thesis, new methods are developed to obtain the numerical or the approximate of the solution for Ordinary Differential Equations. Linear equations are dealt at first and then nonlinear equations are studied.

The first method is based on the use of High Dimensional Model Representation (HDMR). HDMR is a new concept developed in last 15 years. It is basically depend on the idea of representing multivariate functions by using less number of variables including functions. Therefore the numerical solution is written as a linear combination of functions in the basis set of an appropriately chosen Hilbert Space for the solution of ODE. The unknown coefficients in this combination are calculated so that the HDMR constancy measurer becomes maximum. The functions in the basis set are polynomial splines. In this study, the approximation is achieved via the basis functions which are polynomials of degree first, second and third. An approximate function is obtained which is very close to the analytical solution of the problem. However, observations have shown that spline interpolation requires enormous efforts for convergence.

In this case, Fluctuationlessness Approximation is used so that the numerical solution is obtained rapidly and the approximation is quite satisfactorily. Fluctuationlessness Approximation has been developed in last two years. This approximation is applied on higher order initial and second order boundary value problems. This method has the advantage of good approximation although a few number of nodes are used comparing the other methods.

Furthermore, a method is developed for the solution of nonlinear ordinary differential equations in this study. However only first order equations are studied here. Even it seems simple, higher order equations can be transformed to a system of first order equations by defining some appropriate extra unknowns. HDMR is used for the numerical solution here. The nonlinear equations obtained during the process are solved by Gröbner Basis. Gröbner Basis gives more accurate results than many existing methods of solving nonlinear equations. Since Gröbner Basis is used in polynomials of any order, the method is developed for Nonlinear Ordinary Differential Equations where the nonlinearity comes from the higher degree in dependent variable. The results show very good approximations.

A method based on Space Extension is developed for the numerical solution of Nonlinear Ordinary Differential Equations where nonlinearities do not have polynomial structures. In this method, the right hand side of the equation, which contains the derivativeless terms, can be written as second degree polynomials of unknown functions, where appropriate new unknowns are defined in terms of the original ones as long as the relations of these unknowns to the original ones are closed under the action of the Lie operator with respect to original unknowns. Therefore the original problem is transformed to a system of first order differential equations. This system is expressed as vectors and constancy measurers of numerical solution are obtained by High Dimensional Model Representation. Nonlinear equations which occur during the process are solved by Gröbner Basis. The method that is developed in this thesis is aimed as a base for future studies.

The quadratic polynomials that are on the right hand side of the system of the differential equation can be represented by multiway arrays with three indices. This situation requires the use of tensors. Therefore basic concepts of Multilinear Algebra are introduced. Higher Order Singular Value Decomposition, which is one of the important subjects of Multilinear Algebra, is used to obtain a given tensor as the outer product of rank one vectors. The solution of nonlinear equations that occur in the decomposition is established via Gröbner Basis.

1. GİRİŞ

Bilgisayarlar olmaksızın sıradan türevli denklemlerin çözümü genellikle, çözümsel (ing: analytic) tümleme yöntemleriyle elde edilir. Günümüzde uygulamada önemli konumda olan birçok sıradan türevli denklemin kesin çözümü yoktur. Sayısal yöntemler bu gibi durumlar için güvenilebilecek tek seçenektir [1-4]. Bu sayısal yöntemler genellikle bilgisayar kullanımı gerektirdiği için, bilgisayar öncesi dönemde, mühendisler araştırmalarında bir bakıma sınırlanmıştı. Mühendislerin ve uygulamalı matematikçilerin bu zorluğu aşmak için geliştirdiği önemli bir yöntem doğrusallaştırma'dır. Doğrusal Sıradan Türevli Denklemlerin uygulamadaki önemi, çözümsel olarak çözülebilmeleridir. Buna karşılık, doğrusal olmayan denklemlerin çoğunun gerçek (ing: analytic) çözümü yapılamamaktadır. Bu nedenle bilgisayar öncesi dönemde, doğrusal olmayan denklemlerin çözümü için bir yol, onları doğrusallaştırmaktı (ing: linearization). Doğrusallaştırma, mühendislik problemlerinin çözümü için değerli bir araç olmasına karşın, bunun yapılamayacağı ya da yapılsa bile işe yarayamayacağı durumlar vardır. Bu gibi durumlarda sayısal yöntemler, çözümü elde etmek için tek güvenilir seçenek olacaktır. Doğrusal Sıradan Türevli Denklemlerin sayısal çözümleri arasında Euler Yöntemi, Heun Yöntemi ve Runge-Kutta Yöntemleri sıralanabilir. Ancak bu yöntemlerde adım büyüklüğü arttırıldığında yanılğı da (ing: error) artmaktadır. Eğer adım büyüklüğü küçültülürse yanılğı biraz daha azaltılabilir. Ancak bu kez de sindirilebilir bir yanılğı düzeyi elde etmek için büyük hesaplama çabası göstermek gerekmektedir. Dolayısı ile aynı hesaplama çabasında daha iyi duyarlılık sağlayan yüksek kerteli teknikler kullanmakta yarar vardır.

Birinci kereden Doğrusal Sıradan Türevli Denklem'in sayısal çözümü, uygun bir Hilbert uzayından seçilen belirli işlevlerin (ing: function) doğrusal birleştirilimi olarak yazılabilmektedir. Bu işlevler birbirine dik bir, iki, üç ya da daha yüksek dereceden çokterimliler (ing: polynomial) ya da dik çokterimli yapıda altkesimsel (ing: spline) işlevler olabilmektedir. Bu doğrusal birleştirmedeki bilinmeyen katsayılar, türevli denklemin başlangıç ya da sınır koşulu ile birlikte incelenen aralıktaki ara noktalarda çokterimlinin derecesine göre kendisinin ve türevlerinin

süreklilik koşulunu sağlayacak biçimde oluşturulmaktadır. Bu katsayıları belirlemek için Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminden (YBMG) yararlanılmaktadır. YBMG, belirli bir ağırlık işlevinde verilen çok değişkenli bir işlevin daha az sayıda değişkenin kullanıldığı işlevlerin toplamı olarak yazılması yöntemidir [5-16]. YBMG'nin işlevin yapısına bağlı olarak birçok türü bulunmaktadır [17-27]. Burada asıl işleve yaklaştırımın (ing: approximation) niteliği, kullanılan işlevlerin boy (ing: norm) karelerinin asıl işlevle olan oranları ile ölçülmektedir [28]. Bu oranlardan en önemlisi değişmezlik ölçeni olarak adlandırılan büyüklüktür. Değişmezlik ölçeni, asıl işlevin bir değişmez terim ile yaklaştırımının niteliğini ölçmektedir [29]. Bu değer istenilen duyarlılıkta 1'e yakın ise yaklaştırımın iyi olduğu söylenebilir. Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi ayrıntılı olarak Bölüm 2'de verilmektedir. Bu tez çalışmasında, elde edilen sayısal çözümlerin yaklaştırımlarının niteliğini gözlemlemek için gerçek çözümü bilinen örnekler üzerinde uygulaması yapılmıştır.

YBMG ile yapılan yaklaştırmada, taban işlevlerinin derecesi ve kullanılan nokta sayısı arttıkça istenilen yakınsamanın sağlanması için oldukça ederli bir hesaplama gerekmektedir. Bu durum, yeni bir yöntem geliştirilmesine neden olmuştur. Bu noktada yeni geliştirilen bir yaklaştırmaya olan Sendelenimsizlik Yaklaştırmayı (ing: Fluctuationlessness Approximation) kullanılmıştır. Sendelenimsizlik Kanıtına göre, sendelenimsizlik limitinde uygun bir Hilbert uzayından alınan bir işlevin cebirsel işlecinin (ing: operator) dizey gösterilimi, bağımsız değişkenin dizey gösteriliminin bu işlev altındaki görüntüsüne eşit olmaktadır [30-37]. Bu tez çalışmasında, işleneni (ing: operand) uygun Hilbert Uzayından alınan işlevlerin belirli noktalardaki değerleri ile çarpan işlemler ele alınmıştır. Bu işlemlerin dizey gösterimleri kullanılarak Sıradan Türevli Denklemlerin sayısal çözümü için yöntem geliştirilmesine gidilmiştir. Sendelenimsizlik Yaklaştırmayı ve Sıradan Türevli Denklemlerin bu yaklaştırmaya ile sayısal çözümleri ayrıntılı olarak Bölüm 3'te anlatılmaktadır. Burada hem başlangıç hem de sınır değer koşullarını içeren denklemler incelenmiştir. Yöntemin yaklaştırmaya niteliğini ölçmek ve karşılaştırma yapabilmek için gerçek çözümü bilinen denklemler alınmış ve gerçek çözümün Maclaurin seri açılımı yapıldığında katsayılarının, sendelenimsizlik yaklaştırmada elde edilen katsayılar ile karşılaştırılması yapılmıştır.

Türevli denklemlerin diğer önemli kolu olan ve fizik ve mühendislikte matematiksel modellemelerde karşımıza büyük bir oranda çıkan türü Doğrusal Olmayan Sıradan

Türevli Denklemlerdir [38]. Doğrusal olmayan denklemlerin gerçek çözümü bazı durumlarda oldukça güç olmakta, bunun da ötesinde bulunamayabilmektedir. Günümüzde hala çözümü gerçekleştirilememiş denklemler bulunmaktadır ve bilim ilerledikçe bu tür denklemlerin sayısının artacağı söylenebilir. Bu durumda gerçek çözüme yakınsama sağlayacak özellikte sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler arasında Riccati denklemleri, Bernoulli denklemleri, Tam denklemler (ing: Exact equations), Tam olmayan denklemleri tümlevleme çarpanları ile (ing: Integration Factors) tam denklemlere dönüştürme sayılabilir. Otonom denklemler ise değişkenlerine ayırma (ing: separation of variables) yöntemi ile doğrudan tümlevleme (ing: direct integration) ile çözülebilmektedir. Daha yüksek kereden denklemlerin ise bir kesiminin gerçek çözümü bulunmakta ve bu denklemler için daha çok nitel bir çözümleme (ing: qualitative analysis) yapılmaktadır. Bunlar arasında Hamilton sistemlerindeki korunan büyüklüklerin incelenmesi, Taylor açılımı ile doğrusallaştırma, çözümü kolaylaştırmak için değişken değiştirme yöntemi, Saptırım (ing: Perturbation) yöntemi sayılabilir. Sayısal çözümlerde ise karşımıza çıkan en önemli sorun, yakınsamayı sağlayabilmek adına işlem karmaşıklığının artmasıdır. Kimi zaman da kullanılan yöntem sadece belirli denklemler için çözüm sağlayabilir. Her yeni geliştirilen yöntem bu sorunların iyileştirilmesine yönelik veya bütünüyle değişik bir yol izlemektedir.

Bu tez çalışmasında Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemlerin sayısal çözümü için Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminin etkinliğinden yararlanılmıştır. Sayısal çözüm, uygun Hilbert Uzayının ikinci dereceden birbirine dik ve boyları bir olan taban işlevlerinin doğrusal birleştirilimi olarak öngörülmüştür. Bilinmeyen katsayılar ise değişmezlik ölçenini en büyük yapacak biçimde oluşturulmaktadır. Ancak bu katsayılar hesaplandığında sıradan türevli denklemin yapısından dolayı oluşan doğrusal olmayan denklemlerin çözümü Gröbner Taban Yöntemi ile gerçekleştirilmiştir [39-41]. Gröbner Tabanı, Buchberger Algoritması ile hesaplanmaktadır [42-44]. Bu tabandaki çokterimliler, değişken sayısı her denklemden birer artarak sürmektedir. Bu çokterimliler, ikili olarak buldukları taban kümesinin modülüne göre sıfıra eşit olmaktadır. Bu sistemdeki bilinmeyenler, bir önceki denklemden bulunan değişkenin bir sonrakinde yerine konmasıyla elde edilirler [45-51]. Buchberger Algoritması ve Gröbner Tabanı Bölüm 4'te ayrıntılı bir

biçimde anlatılmış olup bazı Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemlere uygulaması gerçekleştirilmiştir.

Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemler, sağ tarafı yani türevsiz kesimi, bilinmeyen bağımlı değişkenlerin ikinci dereceden çokterimlileri türünden yazılabilir. Bu yöntem Uzay Genişletme yöntemidir. Bu yöntemde yeni bilinmeyen işlevler ile önceki bilinmeyenler arasındaki bağıntı, eski bilinmeyenlere göre Lie işleci altında kapalı olduğu sürece, bu yeni işlevler tanımlanabilmektedir [52-55]. Uzay Genişletme Yönteminden elde edilen denklemler, birinci kereden doğrusal olmayan sıradan türevli denklem takımı oluşturmaktadır. Denklem takımının çözümü için YBMG ve Gröbner tabanından faydalanılmıştır. Bu yapılanlar Bölüm 5'te anlatılmıştır.

Bölüm 6'da Çoklu Doğrusal Cebir (ing: Multilinear Algebra) ve Yüksek Kereden Tekil Değer Ayrıştırımına (ing: Higher Order Singular Value Decomposition) yer verilmiştir. Çoklu Doğrusal Cebir, öğeleri ikiden fazla gösterilen çoklu dizelerin cebiridir [56-57]. Çoklu Dizeler (ing: Tensor), mühendisliğin birçok alanında kullanılmaktadır [58-63]. Özellikle de Yüksek Kereden Tekil Değer Ayrıştırımının son yıllarda kullanımı oldukça artmıştır [64-69]. Bu bölümde üçüncü kereden, iki ve üç boyutlu iki modelin ayrıştırımı yapılmıştır.

Tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak Sonuç ve Öneriler bölümünde verilmektedir.

2. YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ

Çok değişkenli işlevler, değişken sayıları 1000 ya da 1000000 gibi yüksek değerlere çıktığı zaman gereğinden çok sorun yaratmaktadır. Üstelik bazı durumlarda 10 bile değişken sayısı için yüksek bir değer olabilmektedir. Bu durum, günümüz bilgisayarlarının bellek ve hız sınırlamalarından kaynaklanmaktadır. Bilgisayar uygulamalarının (ing: technology) başdöndürücü hızda gelişmesine karşın, bellek ve çalışma zamanı her zaman üstten sınırlı kalacak gibi görünmektedir. Bu nedenle bilgisayarlara doğrudan buyruk dizileme (ing: programming) yapmaktansa, buyruk (ing: program) yazmadan önce matematiksel olarak iyi ve verimli bir çok değişkenli işlev gösterilimi yapılmalıdır. Bu durum biliminsanlarını, bağımsız değişkenlerin sayısı sonsuza gittiğinde verimliliği en yüksek olan bir çok değişkenli işlev gösterim yöntemi geliştirmeye itmektedir. Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) bu özellikleri taşımaktadır. Bu yöntem ilk olarak Sobol tarafından tasarlanmıştır [5].

$f(x_1, \dots, x_N)$ ile simgelenen çok değişkenli bir işlev ele alınırsa, bu işlevin Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) \equiv f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + f_{12 \dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (2.1)$$

Burada eşitliğin sol tarafındaki $f(x_1, \dots, x_N)$, N bağımsız değişkenli işlev, eşitliğin sağ yanındakiler ise f_0 değişmez terim, $f_i(x_i)$ 'ler tek bağımsız değişkene bağlı terimler, $f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ 'ler iki bağımsız değişkene bağlı terimler ve bu biçimde giderek artan sayıda bağımsız değişkene bağlı terimler olarak adlandırılmaktadırlar. Eşitliğin sağ yanında 2^N sayıda bilinmeyen terim bulunmaktadır. Yukarıdaki eşitlik değişmez terimin ardından kesilirse, verilen çok değişkenli işleve yaklaşımlar olarak ortalama bir değer üretilmiş olur. Eğer tek değişkene bağlı terimlerden sonra kesme yapılırsa, o zaman çok değişkenli işlevin değişkenlerin üzerindeki bağımlılığı, yaklaşık olarak, toplamsal bir biçimde ayrı ayrı anlatılmış olur. Dolayısıyla YBMG

aslında bir böl ve yönet algoritmasıdır. **(2.1)** eşitliğinin sağ yanındaki YBMG bileşenlerini belirlemek için bazı kuralların konulması gerekmektedir. Bunlar tümlevleme altında sıfırlanma durumlarıdır (ing: vanishing under integration) ve ilk olarak da Sobol'un yazısında verilmiştir. Burada tüm ağırlıklar birim ağırlık ve aralık da $[0,1]$ olarak alınmıştır. Bu eşitliklerin daha gelişmiş biçimleri ise ilk olarak Rabitz tarafından önerilmiş ve kullanılmıştır [6-16]. Bunlar aşağıda verilmektedir.

$$\int_{a_j}^{b_j} dx_j w_j(x_j) f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = 0, \quad x_j \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}, \quad 1 \leq j, k \leq N \quad (2.2)$$

Burada $w_j(x_j)$, aşağıda tanımlanan YBMG toplam ağırlık işlevinin j . çarpanı olmaktadır.

$$w(x_1, \dots, x_N) \equiv \prod_{j=1}^N w_j(x_j), \quad x_j \in [a_j, b_j], \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.3)$$

Herbir $w_j(x_j)$ ağırlık işlevi (ing: weight function), ilgili $[a_j, b_j]$ aralığında aşağıdaki biçimde olağanlaştırılmaktadır (ing: normalization).

$$\int_{a_j}^{b_j} dx_j w_j(x_j) = 1, \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.4)$$

(2.2), **(2.3)** ve **(2.4)** sırasayılı eşitliklerde verilen koşullar, **(2.1)** eşitliğinde yer alan $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevinin sağ yanındaki YBMG bileşenlerini eşsiz bir biçimde belirlemek için yeterlidir. Bunları kullanarak aşağıdaki değişmez, tek değişkenli ve iki değişkenli YBMG bileşenleri elde edilebilir.

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N w(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.5)$$

$$f_i(x_i) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 w_1(x_1) \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} w_{i-1}(x_{i-1}) \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} w_{i+1}(x_{i+1}) \dots \times \int_{a_N}^{b_N} dx_N w_N(x_N) f(x_1, \dots, x_N) - f_0, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.6)$$

$$f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 w_1(x_1) \dots \int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}} dx_{i_1-1} w_{i_1-1}(x_{i_1-1}) \times \int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}} dx_{i_1+1} w_{i_1+1}(x_{i_1+1}) \dots \int_{a_{i_2-1}}^{b_{i_2-1}} dx_{i_2-1} w_{i_2-1}(x_{i_2-1}) \times \int_{a_{i_2+1}}^{b_{i_2+1}} dx_{i_2+1} w_{i_2+1}(x_{i_2+1}) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N w_N(x_N) f(x_1, \dots, x_N) - f_i(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_0, \quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq N \quad (2.7)$$

Diğer YBMG bileşenleri de yukarıdaki yapılardan yararlanılarak oluşturulabilir. Tümlenme altında yok olma ya da sıfırlanma durumu, bileşenler arası dikliğe (ing: orthogonality) karşılık gelmektedir [28]. Bu durum ve aşağıda yer alan tümlenler ile diklik eşitlikleri yazılabilir.

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N w(x_1, \dots, x_N) f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) f_{j_1 j_2 \dots j_\ell}(x_{j_1}, \dots, x_{j_\ell}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_\ell\}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq N$$

Böylece iççarpım (ing: inner product),

$$(f_{i_1 i_2 \dots i_k}, f_{j_1 j_2 \dots j_\ell}) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N w(x_1, \dots, x_N) f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) f_{j_1 j_2 \dots j_\ell}(x_{j_1}, \dots, x_{j_\ell})$$

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq N, \quad 1 \leq k, \ell \leq N \quad (2.9)$$

yapısında tanımlanabilir. Buna göre boy (ing: norm) kare,

$$\|f_{i_1 i_2 \dots i_k}\|^2 = (f_{i_1 i_2 \dots i_k}, f_{i_1 i_2 \dots i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.10)$$

olarak verilebilir. Bu boy tanımı ve YBMG bileşenlerinin diklik özellikleri kullanılarak (2.1) sırasayılı eşitliğin her iki yanının boy karesi alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\|f\|^2 = \|f_0\|^2 + \sum_{i_1=1}^N \|f_{i_1}\|^2 + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \|f_{i_1 i_2}\|^2 + \dots + \|f_{12 \dots N}\|^2 \quad (2.11)$$

Bu eşitlik, bir YBMG kesme yaklaşımının niteliğinin ölçülebileceği anlamına gelmektedir. Eğer yaklaşım değişmez terimde kesilirse buna Değişmez Yaklaşım denir. Eğer yaklaşım, değişmez terimi ve YBMG'nin tek değişkenli bileşenlerini içeriyorsa buna Tek Değişkenli Yaklaşım, değişmez terim yanısıra tek değişkenli ve iki değişkenli bileşenleri de kapsarsa bu yaklaşıma İki Değişkenli Yaklaşım denilmektedir. Bu biçimde daha yüksek kereden yaklaşımlar da tanımlanabilir. Bu yaklaşım tanımları aşağıdaki Toplamsallık Ölçenlerini (ing: Additivity Measurers) tanımlanmasını sağlamaktadırlar.

$$\sigma_0 \equiv \frac{1}{\|f\|^2} \|f_0\|^2$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \|f_i\|^2 + \sigma_0 \\
&\vdots \\
\sigma_N &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12\dots N}\|^2 + \sigma_{N-1}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Burada σ_0 'a Değişmezlik Ölçeni (ing: constancy measurer) ya da Sıfırıncı Kerteden Toplamsallık Ölçeni (ing: zeroth order additivity measurer) adı verilir. Genel olarak σ_k 'ya, ($1 \leq k \leq N$) olmak üzere k . Kerteden Toplamsallık Ölçeni denir. Bu ölçenlerin tümü 0 ile 1 arasında değer alırlar ve aralarında aşağıdaki sıralama ilişkisini sağlarlar:

$$0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \cdots \leq \sigma_N = 1 \tag{2.13}$$

Yukarıda sözedilen YBMG kesmeleri daha açık bir biçimde aşağıdaki tanımlarla verilebilirler.

$$\begin{aligned}
s_0(x_1, \dots, x_N) &= f_0, \\
s_1(x_1, \dots, x_N) &= s_0(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i), \\
&\vdots \\
s_k(x_1, \dots, x_N) &= s_{k-1}(x_1, \dots, x_N) + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1, \\ i_1 < \dots < i_k}}^N f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \quad 1 \leq k \leq N
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Bu tanımlarla YBMG (2.1) eşitliği ile verilmiş $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevinin k . Kerteden Toplamsal YBMG Yaklaşırımı aşağıdaki biçimde anlatılabilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) \approx s_k(x_1, \dots, x_N) \tag{2.15}$$

Toplamsal YBMG yaklaşırının boyları aşağıdaki eşitliği sağlarlar.

$$\|s_k\|^2 = \sigma_k \|f\|^2, \quad 0 \leq k \leq N \tag{2.16}$$

Toplamsal YBMG Yaklaşırınları'nın niteliği, YBMG'ne taban olan çok değişkenli işlevin yapısına bağlıdır. Eğer asıl işlev bir değişmezse o zaman s_0 tam olarak o işleve eşit olur. Ama asıl işlev değişmez bir terim yanısıra her biri değişik bir değişkene bağlı işlevlerin toplamı ise, o zaman s_1 asıl işlevle tam olarak eşleşir.

Benzer durum yüksek kereden Toplamsal YBMG Yaklaştıranları için de geçerlidir. Bu durum aşağıdaki örnek işlev için de kanıtlanabilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = (x_1 + \dots + x_N)^m, \quad 0 \leq m < \infty \quad (2.17)$$

Burada $m=0$ durumunda işlevle tam olarak eşleşmektedir. $m=k$ olduğunda ise ancak s_k yaklaşıtıranı ve ondan daha yüksek kereden olan yaklaşıtıranlar asıl işlevle eşleşmektedir. Görüldüğü gibi m arttıkça asıl işlevle eşleşen toplamsal YBMG yaklaşıtıranının kertesisi de artmaktadır. Yani $m \geq N$ olduğunda yalnızca YBMG'nin bütünü asıl işlevle eşleşebilmektedir. Bu da YBMG'nin kendisi dışında tüm kesmelerin sayısal yanılığın içeren yaklaşıtıranlar oluşturacağı değişmez bileşen ile tek değişkenli ya da bir çok uygulamalarda devreye sokulması yeğlenebilen iki değişkenli yaklaşıtıranlarda yüksek duyarlılık beklenemeyeceği anlamına gelmektedir. Bu durum, kesme yaklaşıtıranları için YBMG'nin toplamsal yapısının yetersiz olduğu durumların gerçekten varolduğu yargısına götürmektedir.

Aşağıda her biri değişik tek değişkenli işlevlerin çarpımına eşit olan çok değişkenli bir işlev bulunmaktadır.

$$f(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N u_j(x_j) \quad (2.18)$$

Bu işlev için YBMG bileşenleri aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} f_0 &= \prod_{j=1}^N \bar{u}_j, \\ f_i(x_i) &= f_0 \left(\frac{u_i(x_i)}{\bar{u}_i} - 1 \right), \quad 1 \leq i \leq N \\ f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) &= f_0 \left(\frac{u_{i_1}(x_{i_1})}{\bar{u}_{i_1}} - 1 \right) \left(\frac{u_{i_2}(x_{i_2})}{\bar{u}_{i_2}} - 1 \right), \quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq N, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.19)$$

\bar{u}_i ise

$$\bar{u}_i \equiv \int_{a_i}^{b_i} dx_i u_i(x_i), \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.20)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Eğer, (2.19) ile verilen bileşenler özenle incelenecek olur ve de ölçenlerin sayısal değerleri örnekler üzerinde sınanacak olursa bu işlev için toplamsal kesmelerden etkin bir biçimde yararlanılamayacağı, iyi bir yaklaşıtım

için çok sayıda bileşenin, neredeyse YBMG'nin tümünün alınmasının gerekeceği ortaya çıkar. Eğer iyice düşünülürse bu durumun asıl işlevin bütünüyle çarpımsal yapıda olmasından ve arıçarpımsal bir yapının toplamsal bir gösterilimden kesmelerle yaklaştırılamayacağı doğallığından kaynaklandığı görülür. Dolayısıyla, toplamsal olan YBMG yerine çarpımsal nitelikleri olan başka bir gösterilim oluşturmanın yerinde olacağı ortaya çıkar. Böylece aşağıdaki yapı öngörülebilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = r_0 \left[\prod_{i=1}^N (1 + r_{i_1}(x_{i_1})) \right] \left[\prod_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N (1 + r_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})) \right] \times \dots \times [1 + r_{123\dots N}(x_1, \dots, x_N)] \quad (2.21)$$

Buradaki r bileşenleri, bu anlatımın, içerdiği çarpımların gerçekleştirilerek, toplamsal bir yapıya açılması ve elde edilen yapının YBMG ile karşılaştırılması sonucu YBMG'nin f bileşenleri türünden anlatımlarla yazılabilirler. Ayrıntılara girmemekle birlikte, burada, k değişkenli r bileşenlerinin en çok k değişkenli f bileşenlerine denk olan YBMG bileşenlerini içereceği söylenebilir. Bu nedenle eğer çok değişkenli bir işlev her biri değişik bir bağımsız değişkene bağlı tek değişkenli işlevlerin bir çarpımı ise, o zaman bu işlevin kesin anlatımı (2.21) anlatımındaki r_0 ve onu izleyen ilk N çarpan kullanılarak elde edilebilir. Bu da, değişmez ve tek değişkenli YBMG bileşenlerinin toplamsal gösterilimde çarpımsal bir işlevi tam olarak anlatmakta yetersiz olmalarına karşın, değişmez ve tek değişkenli r bileşenlerinin, asıl işlevi çarpımsal yaklaşıtımda anlatmakta yeterli olduğu anlamına gelir. Buradan toplamsal ya da toplamsallığı baskın olan işlevlerde toplamsal kesmelerle, çarpımsal ya da çarpımsallığı baskın olan işlevlerde ise çarpımsal kesmelerle iş görerek yaklaştırım etkinliği sağlanabileceği anlaşılmaktadır. (2.21) ile verilen anlatıma Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (ÇYBMG) (ing: Factorized HDMR) adı verilmektedir. Bu eşitlikteki k değişkenli çarpanlardan sonraki terimlerin yerine 1 alınarak oluşturulan kesme yaklaşıtırları, $p_k(x_1, \dots, x_N)$ olarak gösterilmektedir ve k . kereden ÇYBMG Yaklaşıtırmı denilmektedir. Eğer asıl işlev toplamsal ise o zaman YBMG, karşıt durumda çarpımsal bir yapıda ise işleve yaklaştırım oluşturmak için ÇYBMG kullanılmaktadır [17-20].

Yukarıda belirtildiği gibi YBMG ve ÇYBMG, tam ya da olabildiğince tama yakın, sırasıyla, toplamsal ve çarpımsal işlevlerde iyi çalışmaktadır. Ama bazı

uygulamalarda ne toplamsal ne de çarpımsal olmayan bir yapıya karşılık gelen ara düzeyde bulunan işlevler sözkonusu olabilir. Bu durumlardaki melez yapılar için de ayrı bir yüksek boyutlu model gösterilimi geliştirilmesi gerekmektedir. Bu yapı, aşağıdaki özdeşliğe dayanarak gerçekleştirilir [21-23].

$$f(x_1, \dots, x_N) \equiv \alpha f(x_1, \dots, x_N) + (1 - \alpha) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.22)$$

Burada sağ yanda yer alan ilk terimdeki $f(x_1, \dots, x_N)$ 'i bir toplamsal YBMG yaklaşıtıranıyla, son terimdeki $f(x_1, \dots, x_N)$ 'i ise bir ÇYBMG yaklaşıtıranı ile yer değiştirerek $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevine, aşağıda verilen, melez bir yaklaşıtırm oluşturulabilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) \approx h_{jk}, \quad 0 \leq j, k \leq N, \\ h_{jk} = \alpha s_j(x_1, \dots, x_N) + (1 - \alpha) p_k(x_1, \dots, x_N) \quad (2.23)$$

Buradaki h_{jk} büyüklüğüne $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevine (j, k) . kerteden Melez YBMG Yaklaşıtıranı (MYBMG) (ing: Hybrid HDMR) denir. Tanımda görünen α sayılıının (ing: scalar) değeri YBMG ve ÇYBMG'nin yaklaşıtırmına ne kadar katkısı olduğunu belirtmektedir. Bu nedenle α 'ya Bileşke Değiştirge (ing: parameter) ya da Melezlik (ing: hybridity) Değiştirgesi adı verilmektedir. α 'nın en iyi yaklaşıtırm verecek biçimde seçilmesi asıl işlevden yaklaşıtıranın çıkarılmasıyla elde edilen işlevin boy karesinin eniyilenmesiyle (ing: optimization) gerçekleştirilir.

YBMG ve onun türetilmiş uyarlamaları olan ÇYBMG ve MYBMG'de tümeyaygın (ing: global) ağırlık işlevi $w(x_1, \dots, x_N)$, herbiri değişik bir bağımsız değişkene bağımlı olan N ağırlık çarpan işlevinin çarpımı olarak alınmaktadır. Böyle yapılmazsa, bileşenlerin saptanmasında tutarsızlıklar oluşmakta ve eşsiz nitelikte bir saptama kuralı oluşturulamamaktadır. Bu gerçekten de büyük bir kısıtlamadır ve uygulamalarda karşılaşılan daha genel durumlar için de geçerli olabilecek bir YBMG türünün geliştirilmesini sağlamıştır. Bu durum Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminin (GYBMG) (ing: Generalized HDMR) ana düşüncesini oluşturmaktadır. Bu amaçla, çarpımsal olmayan asıl ağırlık işlevi, çarpımsal başka bir ağırlık işlevi aracılığıyla saptamalara sokulmakta ve tutarsızlık ortadan kaldırılmaktadır. Ancak buna karşın bileşenlerin saptanması için tümlev (ing: integral) denklemleri elde edilmektedir. GYBMG bileşenlerini oluşturduktan sonra

ÇYBMG ve MYBMG yaklaşımlarını bu bileşenlerden oluşturarak yaklaştırım çizemleri (ing: scheme) yapılandırılabilir [24].

Bazı denklemlerde bağımsız x_1, \dots, x_N değişkenlerinin yanında başka değişkenler de bulunabilmektedir. Yaklaştırılması istenen işlev $u(x_1, \dots, x_N, t)$ ile simgelenirse, o zaman buradaki t değeri YBMG değişkeni değil ama bir değiştirge olarak düşünülmektedir. Burada yine $u(x_1, \dots, x_N, t)$ işlevi için YBMG bileşenlerini t -bağımlı olarak saptanabilmektedir. Bu yöntem Değiştirgesel Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi ya da (DeYBMG) (ing: Parametric HDMR) denilmektedir [28].

Göretürevli (ing: Partial Differential) denklemlerde, çözümlerinin YBMG açılımlarında, bilinmeyen YBMG bileşenlerinin sıradan ve tümlev-türevli (ing: integral-differential) denklemleri elde edilir. Eğer YBMG'de t gibi bir değiştirge bulunursa o zaman tek değişkenli ağırlık işlevlerinin göretürevli (ing: Partial Differential) denklemlerinde evrimsel yapılar doğmaktadır. Bu biçimde oluşan YBMG türüne de Evrimsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (EYBMG) (ing: Evolutionary HDMR) denilmektedir [28]. Ayrıca Trigonometrik Dönüşümlü YBMG (ing: Trigonometric Transformation HDMR [25] ve Logaritmik YBMG (ing: Logarithmic HDMR) [26,27] diğer YBMG türleri arasında sayılmaktadır.

2.1 İşlevlerin YBMG Kullanılarak İçdeğerbiçimsel Yaklaşımları

Burada Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminden yararlanarak, sınırlı sayıda noktada değerleri verilen işlevler için içdeğerbiçimsel yaklaşımları gerçekleştirilecektir.

2.1.1 Birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım

Verilen n farklı düğüm noktası $x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$ için, her bir $I_k = [x_k, x_{k+1})$, ($1 \leq k < n-1$) aralığında aşağıdaki doğrusal taban işlevleri oluşturulabilir. Burada, $k = n-1$ olduğunda $I_{n-1} = [x_{n-1}, x_n]$ olacağı öngörülmektedir.

$$u_{2k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \gamma_k(x - x_k), & x \in I_k \end{cases}, \quad (2.24)$$

$$u_{2k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \alpha_k(x - x_k) + \beta_k, & x \in I_k \end{cases}, \quad (2.25)$$

Burada tanımlanan doğrusal taban işlevleri birbirlerine dik olup boyları 1 olacak biçimde yapılandırılmaları gerekmektedir. Yani,

$$(u_{2k-1}, u_{2k-1}) = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.26)$$

$$(u_{2k-1}, u_{2k}) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.27)$$

$$(u_{2k}, u_{2k}) = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.28)$$

eşitlikleri sağlanmaktadır. İki işlevin iç çarpımı bilindiği üzere

$$(f, g) = \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) f(x) g(x) \quad (2.29)$$

anlatımıyla verilir. Burada $w(x)$, ağırlık işlevini göstermektedir. Bu ağırlığa göre beklemler (ing: moment), aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$m_0^{(k)} \equiv \int_{I_k} dx w(x) (x - x_k)^0,$$

$$m_1^{(k)} \equiv \int_{I_k} dx w(x) (x - x_k)^1,$$

$$m_2^{(k)} \equiv \int_{I_k} dx w(x) (x - x_k)^2 \quad (2.30)$$

$u_{2k-1}(x)$ ve $u_{2k}(x)$ işlevlerindeki γ_k , α_k ve β_k katsayıları sırasıyla (2.26), (2.27) ve (2.28) sırasayılı eşitlikler kullanılarak bulunur. Buna göre

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx w(x) (u_{2k-1}(x))^2 = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.31)$$

özelliliği kullanılarak

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx w(x) (\gamma_k (x - x_k))^2 = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.32)$$

yazılabilir. γ_k^2 değişmez bir değer olduğu için tümlev dışına alınabilir.

$$\gamma_k^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx w(x) (x - x_k)^2 = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.33)$$

Burada $\int_{x_1}^{x_n} dx w(x) (x - x_k)^2 = m_2^{(k)}$ olduğundan

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{1}{m_2^{(k)}}}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.34)$$

sonucuna varılır. Dolayısıyla, $u_{2k-1}(x)$ taban işlevleri

$$u_{2k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \sqrt{\frac{1}{m_2^{(k)}}}(x - x_k), & x \in I_k \end{cases} \quad (2.35)$$

yapısında elde edilmiş olurlar.

$u_{2k}(x)$ işlevlerinin yapısındaki α_k ve β_k katsayılarının hesaplanması için (2.27) ve (2.28) sırasayılı eşitlikler kullanılmaktadır. (2.27) sırasayılı eşitlikten

$$\begin{aligned} (u_{2k-1}, u_{2k}) &= \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) u_{2k-1}(x) u_{2k}(x) = 0 \\ &= \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) \sqrt{\frac{1}{m_2^{(k)}}}(x - x_k) (\alpha_k (x - x_k) + \beta_k) = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

(2.28) sırasayılı eşitlikten ise

$$\begin{aligned} (u_{2k}, u_{2k}) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx w(x) (\alpha_k (x - x_k) + \beta_k)^2 = 1 \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx w(x) u_{2k}(x) u_{2k}(x), \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

elde edilir. Bu oluşan iki eşitlik ve daha önceden tanımlanan beklemler (ing: moment) kullanılarak

$$\alpha_k = \frac{m_1^{(k)}}{\sqrt{m_2^{(k)}} \sqrt{m_0^{(k)} m_2^{(k)} - (m_1^{(k)})^2}} \quad (2.38)$$

$$\beta_k = \frac{-m_2^{(k)}}{\sqrt{m_2^{(k)}} \sqrt{m_0^{(k)} m_2^{(k)} - (m_1^{(k)})^2}} \quad (2.39)$$

sonuçlarına ve dolayısıyla

$$u_{2k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{m_1^{(k)}(x - x_k) - m_2^{(k)}}{\sqrt{m_2^{(k)}} \sqrt{m_0^{(k)} m_2^{(k)} - (m_1^{(k)})^2}}, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.40)$$

sonucuna varılmaktadır. I_k aralığındaki $s_k(x)$ ile simgelenen doğrusal içdeğerbiçimsel (ing: interpolation) yaklaşımı (ing: approximant)

$$s_k(x) = c_{2k-1} u_{2k-1}(x) + c_{2k} u_{2k}(x) \quad (2.41)$$

doğrusal birleştirmesiyle verilebilir. Bu durumda, I_k 'ların birleşimi olan tüm aralıkta, n tane düğüm noktasından geçen doğrusal içdeğerbiçimseli $s(x)$ olarak gösterilirse,

$$s(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_{2n-3} u_{2n-3}(x) + c_{2n-2} u_{2n-2}(x) \quad (2.42)$$

yazılabilir. (2.41) denklemindeki c_{2k-1} ve c_{2k} bu an için belirsiz değişmez katsayıları simgelemektedir. Bu katsayıları bulmak için ise içdeğerbiçimsel yaklaşımın yapısında bulundurması gereken özellikleri olan

$$s_k(x_k) = f(x_k) = y_k,$$

$$s_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) = y_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.43)$$

eşitlikleri kullanılır. Bu eşitliklerden c_k , ($1 \leq k \leq 2n-2$) katsayıları çözülecek olursa

$$c_{2k-1} = \frac{m_1^{(k)}(x_k - x_{k+1})y_k + m_2^{(k)}(y_k - y_{k+1})}{\sqrt{m_2^{(k)}}(x_k - x_{k+1})} \quad (2.44)$$

$$c_{2k} = -\frac{\sqrt{m_0^{(k)}m_2^{(k)} - (m_1^{(k)})^2}}{\%_0\sqrt{m_2^{(k)}}} y_k \quad (2.45)$$

sonuçlarına varılmaktadır. Buna göre altkesimsel içdeğerbiçimsellerin de aşağıdaki anlatımlarla verilebileceği ortaya çıkar.

$$s_k(x) = \frac{m_1^{(k)}(x_k - x_{k+1})y_k + m_2^{(k)}(y_k - y_{k+1})}{\sqrt{m_2^{(k)}}(x_k - x_{k+1})} u_{2k-1}(x) - \frac{\sqrt{m_0^{(k)}m_2^{(k)} - (m_1^{(k)})^2}}{\sqrt{m_2^{(k)}}} y_k u_{2k}(x) \quad (2.46)$$

$s(x)$ işlevinin YBMG bileşenleri, $s(x)$ yalnızca tek bir bağımsız değişkene bağlı olduğu için, değişmez terimi f_0 ve tek değişkenli işlev olan $f_1(x)$ ile belirlenecektir.

Değişmez bileşen

$$f_0 = \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) s(x) \quad (2.47)$$

anlatımıyla verilmekte, $f_1(x)$ ise

$$f_1(x) = s(x) - f_0 \quad (2.48)$$

yapısında bulunmaktadır. f_0 ve f_1 'in boy kareleri aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned}\|f_0\|^2 &= (f_0, f_0) = \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) (f_0)^2, \\ \|f_1\|^2 &= (f_1, f_1) = \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) (f_1(x))^2\end{aligned}\tag{2.49}$$

Böylece $s(x)$ işlevinin boy karesi de

$$\|s\|^2 = \|f_0\|^2 + \|f_1\|^2\tag{2.50}$$

olarak elde edilir. $s(x)$ işlevi, tek bağımsız değişkene bağlı olduğu için toplamsallık ölçenleri sıfırcı ve birinci keredendir (ing: order).

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{1}{\|s\|^2} \|f_0\|^2, \\ \sigma_1 &= \frac{1}{\|s\|^2} \|f_1\|^2 + \sigma_0\end{aligned}\tag{2.51}$$

Buna göre $\sigma_1 = 1$ olmaktadır.

Bir önceki anlatımda $s(x)$ işlevinde bulunan c_k katsayıları, beklemler (ing: moment) ile elde edilmişti. Bu bölümde ise ağırlık işlevi açık bir biçimde hesaplanarak c_k katsayılarının hesaplaması yapılacaktır.

Verilen n ögeli $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ dizisinin bu noktalardan geçen doğrusal altkesimlerini oluşturmak için her bir $I_k = [x_k, x_{k+1})$, $(1 \leq k < n-1)$ aralığında aşağıda doğrusal, birbirlerine dik ve birimboylu taban işlevleri tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}u_{2k-1}(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \gamma_k(x - x_k), & x \in I_k \end{cases}, \\ u_{2k}(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \alpha_k(x - x_k) + \beta_k, & x \in I_k \end{cases}\end{aligned}\tag{2.52}$$

Aralıklarda, $k = n-1$ olduğunda $I_{n-1} = [x_{n-1}, x_n]$ tanımının geçerli olduğu gözardı edilmemelidir. γ_k , α_k ve β_k değerleri bir önceki anlatımda elde edilmiştir.

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{1}{m_2^{(k)}}},$$

$$\alpha_k = \frac{m_1^{(k)}}{\sqrt{m_2^{(k)} \sqrt{m_0^{(k)} m_2^{(k)} - (m_1^{(k)})^2}},$$

$$\beta_k = \frac{-m_2^{(k)}}{\sqrt{m_2^{(k)} \sqrt{m_0^{(k)} m_2^{(k)} - (m_1^{(k)})^2}}$$
(2.53)

Burada yer alan beklemleri (ing: moment) belirlemek için ilk olarak ağırlık işlevi olan $w(x)$ değerinin tanımlanması gerekmektedir. Ağırlık işlevi, kolaylık açısından, değişmez seçilmekte, yani

$$w(x) \equiv \frac{1}{x_n - x_1}$$
(2.54)

anlatımıyla verilmektedir. Bu seçime göre beklemler (ing: moment),

$$m_0^{(k)} \equiv \int_{I_k} dx w(x) (x - x_k)^0 = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_n - x_1},$$

$$m_1^{(k)} \equiv \int_{I_k} dx w(x) (x - x_k)^1 = \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2(x_n - x_1)},$$

$$m_2^{(k)} \equiv \int_{I_k} dx w(x) (x - x_k)^2 = \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{3(x_n - x_1)}$$
(2.55)

anlatımlarına eşdeğer olmaktadır. Buradan

$$\gamma_k = \frac{\sqrt{3} \sqrt{x_n - x_1}}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^3}},$$

$$\alpha_k = \frac{-3 \sqrt{x_n - x_1}}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^3}},$$

$$\beta_k = \frac{2 \sqrt{x_n - x_1}}{\sqrt{x_{k+1} - x_k}}$$
(2.56)

sonuçlarına da ulaşılmaktadır. Yukarıda verilen noktalardan geçen doğrusal işlev,

$$f_{YBMG}(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_{2n-2} u_{2n-2}(x)$$
(2.57)

anlatımıyla tanımlanıp, bu işlevin YBMG bileşenleri belirlenecektir. Değişmez terim

$$f_0 = \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) f_{YBMG}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx w(x) (c_{2k-1} u_{2k-1}(x) + c_{2k} u_{2k}(x))$$
(2.58)

anlatımıyla verilmektedir. f_0 'in boy karesi ise

$$\|f_0\|^2 = \int_{x_1}^{x_n} dxw(x)(f_0)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x)(c_{2k-1}u_{2k-1}(x) + c_{2k}u_{2k}(x)) \right)^2 \quad (2.59)$$

biçimindedir. $f_1(x)$

$$f_1(x) = f_{YBMG}(x) - f_0 \quad (2.60)$$

olarak tanımlanırsa, önce $f_1(x)$ 'in daha sonra da f_{YBMG} 'nin boy kareleri aşağıdaki eşitliklerle verilebilir.

$$\|f_1\|^2 = (f_1, f_1) = \int_{x_1}^{x_n} dxw(x)(f_1(x))^2 \quad (2.61)$$

$$\|f_{YBMG}\|^2 = \|f_0\|^2 + \|f_1\|^2 \quad (2.62)$$

Sıfıncı kerteden toplamsallık ölçeni σ_0 aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\sigma_0 = \frac{\|f_0\|^2}{\|f_{YBMG}\|^2} \quad (2.63)$$

Bu anlatım daha açık bir biçimde

$$\sigma_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^{2n-2} c_k v_k \right)^2}{\sum_{k=1}^{2n-2} c_k^2} \quad (2.64)$$

olarak yazılabilir. v_k değeri, $u_k(x)$ işlevinin, verilen aralıkta ve ağırlık altında tümlevinin (ing: integral) değeri olarak hesaplanmaktadır. Aşağıda boyutu $(2n-2)$ olan \mathbf{v} ve \mathbf{c} yöneyleri (ing: vector) tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{2n-2}]^T, \quad \mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2n-2}]^T \quad (2.65)$$

Değişmezlik ölçeni bu yöneyler türünden,

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} \quad (2.66)$$

eşitliğiyle yazılabilir. Bir sonraki adım, amaç işlevimsisini (ing: cost functional) yazmaktır. Bunun için aşağıdaki yapı ele alınmaktadır.

$$J(\mathbf{c}, \lambda) = \sigma_0(\mathbf{c}) + \lambda^T (\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{r}) \quad (2.67)$$

Burada $m = 2n - 2$ olmak üzere; \mathbf{A} , $m \times m$ boyutlu bir dizeyi (ing: matrix), \mathbf{c} , \mathbf{r} ve $\boldsymbol{\lambda}$, m öğeli yöneyleri (ing: vector) simgelemekte olup aşağıdaki eşitliklerle açık yapıları verilmektedir.

$$\mathbf{c}^T \equiv [c_1 \dots c_m], \quad \mathbf{r}^T \equiv [r_1 \dots r_m], \quad \boldsymbol{\lambda}^T \equiv [\lambda_1 \dots \lambda_m],$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(x_1)^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}(x_{k^-})^T \\ \mathbf{u}(x_{k^+})^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}(x_n)^T \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

\mathbf{r} yöneyi boyutu m olan ve

$$\mathbf{r} = [y_1 \dots y_k \quad y_k \dots y_{n-1} \quad y_{n-1} \quad y_n]^T \quad (2.69)$$

biçiminde tanımlanan bir yöneydir. \mathbf{A} dizeyi tanımlarken kullanılan $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ yöneyi,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u_1(x) \quad u_2(x) \quad \dots \quad u_{2n-2}(x)] \quad (2.70)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. (2.67) denklemindeki anlatımda $\sigma_0(c)$ yerine (2.66) eşitliğinde yer alan anlatım yerleştirilirse

$$J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{r}) \quad (2.71)$$

sonucu elde edilir. Amaç işlevimsisinin $\boldsymbol{\lambda}$ ve \mathbf{c} yöneylerine göre türevleri alınıp her biri m öğeli $\mathbf{0}$ yöneyine eşitlendiğinde aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (2.72)$$

$$\nabla_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{2}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} (\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I}) \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (2.73)$$

\mathbf{A} evirtilebilir (ing: invertible) bir dizey olduğundan, \mathbf{c} yöneyi

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \quad (2.74)$$

olarak bulunur. Bulunan bu \mathbf{c} yöneyi (2.73) denkleminde yerine konursa, $\boldsymbol{\lambda}$ değerleri elde edilmiş olur. Buna göre,

$$\boldsymbol{\lambda} = - \frac{2}{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})} (\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I}) (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}) \quad (2.75)$$

sonucuna varılır. Eniyilenmiş sıfırcı kereden toplamsallık ölçeni için

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} = \frac{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})}{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})} \quad (2.76)$$

bağıntısı yazılabilmektedir.

2.1.2 İkinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım

Burada daha önce kullanılan doğrusal taban işlevlerinin yerine, ikinci dereceden, aralarında dik ve birimboylu olan taban işlevleri oluşturulmuştur. Tek değişken ile çalışıldığından, eniyileştirilmiş toplamsallık ölçeni sıfırcı ve birinci keredendir.

Verilen n tane noktadan geçen ikinci dereceden taban işlevleri aşağıdaki biçimde oluşturulabilir.

$$u_{3k-2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \alpha_k (x - x_k)^2, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.77)$$

$$u_{3k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \beta_k (x - x_k)^2 + \gamma_k (x - x_k), & x \in I_k \end{cases} \quad (2.78)$$

$$u_{3k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \eta_k (x - x_k)^2 + \mu_k (x - x_k) + \zeta_k, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.79)$$

Bu taban işlevleri birbirlerine dik olup boyları 1 olacak biçimde yapılandırılmaları gerekmektedir.

$$(u_{3k-2}, u_{3k-2}) = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.80)$$

$$(u_{3k-2}, u_{3k-1}) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.81)$$

$$(u_{3k-2}, u_{3k}) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.82)$$

$$(u_{3k-1}, u_{3k-1}) = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.83)$$

$$(u_{3k-1}, u_{3k}) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.84)$$

$$(u_{3k}, u_{3k}) = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.85)$$

Bu bölümde kullanılacak beklemler (ing: moment) ise, aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$p_0^{(k)} \equiv \int_{I_k} dx w(x) (x - x_k)^0,$$

$$\begin{aligned}
p_1^{(k)} &\equiv \int_{I_k} dxw(x)(x-x_k)^1, \\
p_2^{(k)} &\equiv \int_{I_k} dxw(x)(x-x_k)^2, \\
p_3^{(k)} &\equiv \int_{I_k} dxw(x)(x-x_k)^3, \\
p_4^{(k)} &\equiv \int_{I_k} dxw(x)(x-x_k)^4.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

$u_{3k-2}(x)$, $u_{3k-1}(x)$ ve $u_{3k}(x)$ işlevlerindeki $\sigma_k, \beta_k, \gamma_k, \eta_k, \mu_k$ ve ζ_k katsayıları sırasıyla (2.80), (2.81), (2.83), (2.84), (2.85) ve (2.86) sırasayılı eşitlikler kullanılarak bulunur. Buna göre

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x)(u_{3k-2}(x))^2 = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \tag{2.87}$$

eşitliği kullanılarak

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x)(\alpha_k(x-x_k)^2)^2 = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \tag{2.88}$$

biçiminde yazılabilir. α_k^2 değişmez bir değer olduğu için tümlev dışına alınabilir.

$$\alpha_k^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x)(x-x_k)^4 = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \tag{2.89}$$

Burada $p_4^{(k)} = \int_{x_1}^{x_n} dxw(x)(x-x_k)^4$ olduğundan

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{1}{p_4^{(k)}}} \tag{2.90}$$

olarak elde edilir. Dolayısı ile $u_{3k-2}(x)$,

$$u_{3k-2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \sqrt{\frac{1}{p_4^{(k)}}}(x-x_k)^2, & x \in I_k \end{cases} \tag{2.91}$$

biçiminde yazılabilmektedir.

u_{3k-1} denklemindeki β_k ve γ_k katsayıları (2.81) ve (2.83) sırasayılı eşitliklerden hesaplanmaktadır. (2.81) sırasayılı eşitlikten

$$(u_{3k-2}, u_{3k-1}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x)u_{3k-2}(x)u_{3k-1}(x) = 0 \quad (2.92)$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x) \sqrt{\frac{1}{p_4^{(k)}}} (x-x_k)^2 (\beta_k (x-x_k)^2 + \gamma_k (x-x_k)) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

(2.83) sırasayılı eşitlikten ise

$$(u_{3k-1}, u_{3k-1}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x)u_{3k-1}(x)u_{3k-1}(x) = 1$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x)(\beta_k (x-x_k)^2 + \gamma_k (x-x_k))^2 = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.93)$$

elde edilmektedir. Bu oluşan iki eşitlik ve beklemler (ing: moment) kullanılarak β_k ve γ_k değerleri,

$$\beta_k = \frac{-p_3^{(k)}}{\sqrt{p_4^{(k)}} \sqrt{p_4^{(k)} p_2^{(k)} - (m_3^{(k)})^2}} \quad (2.94)$$

ve

$$\gamma_k = \frac{p_4^{(k)}}{\sqrt{p_4^{(k)}} \sqrt{p_4^{(k)} p_2^{(k)} - (m_3^{(k)})^2}} \quad (2.95)$$

biçiminde hesaplanır. Dolayısı ile

$$u_{3k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{-p_3^{(k)} (x-x_k)^2 + p_4^{(k)} (x-x_k)}{\sqrt{p_4^{(k)}} \sqrt{p_4^{(k)} p_2^{(k)} - (m_3^{(k)})^2}}, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.96)$$

olmaktadır.

$u_{3k}(x)$ denklemindeki η_k, μ_k ve ζ_k katsayıları, (2.82), (2.84) ve (2.86) sırasayılı eşitlikler ile hesaplanabilir. (2.82) sırasayılı eşitlikten

$$(u_{3k-2}, u_{3k}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x)u_{3k-2}(x)u_{3k}(x) = 0 \quad (2.97)$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x) \sqrt{\frac{1}{p_4^{(k)}}} (x-x_k)^2 (\eta_k (x-x_k)^2 + \mu_k (x-x_k) + \zeta_k)$$

$$= 0, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

(2.84) sırasayılı eşitlikten

$$(u_{3k-1}, u_{3k}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x)u_{3k-1}(x)u_{3k}(x) = 0 \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x) \left(\beta_k (x-x_k)^2 + \gamma_k (x-x_k) \right) \left(\eta_k (x-x_k)^2 + \mu_k (x-x_k) + \zeta_k \right) \\
&= 0, \quad 1 \leq k \leq n-1
\end{aligned}$$

(2.85) sırasayılı eşitlikten ise

$$\begin{aligned}
(u_{3k}, u_{3k}) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x) u_{3k}(x) u_{3k}(x) = 1 \\
&= \int_{x_k}^{x_{k+1}} dxw(x) \left(\eta_k (x-x_k)^2 + \mu_k (x-x_k) + \zeta_k \right)^2 = 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.99)
\end{aligned}$$

elde edilmektedir. Bu oluşan üç eşitlik ve beklemler (ing: moment) kullanılarak η_k , μ_k ve ζ_k değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\eta_k = \frac{p_1^{(k)} p_3^{(k)} - (p_2^{(k)})^2}{\rho} \quad (2.100)$$

$$\mu_k = \frac{p_2^{(k)} p_3^{(k)} - p_1^{(k)} p_4^{(k)}}{\rho} \quad (2.101)$$

$$\zeta_k = \frac{p_2^{(k)} p_4^{(k)} - (p_3^{(k)})^2}{\rho} \quad (2.102)$$

Burada ρ değeri,

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{p_2^{(k)} p_4^{(k)} - (p_3^{(k)})^2} \\
&\quad \times \sqrt{-\left(p_2^{(k)}\right)^3 + 2p_1^{(k)} p_2^{(k)} p_3^{(k)} - p_0^{(k)} \left(p_3^{(k)}\right)^3 - \left(p_1^{(k)}\right)^2 p_4^{(k)} + p_0^{(k)} p_2^{(k)} p_4^{(k)}} \quad (2.103)
\end{aligned}$$

anlatımına eşittir. Dolayısı ile

$$u_{3k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{p_1^{(k)} p_3^{(k)} - (p_2^{(k)})^2}{\rho} (x-x_k)^2 + \\ \frac{p_2^{(k)} p_3^{(k)} - p_1^{(k)} p_4^{(k)}}{\rho} (x-x_k) + \frac{p_2^{(k)} p_4^{(k)} - (p_3^{(k)})^2}{\rho}, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.104)$$

biçiminde elde edilmektedir.

Verilen n noktadan geçen işlev aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$f_{YBMG}(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_k u_k(x) + \dots + c_{3n-3} u_{3n-3}(x) \quad (2.105)$$

Bu işlevin YBMG bileşenleri hesaplanacaktır. Daha önce doğrusal altkesimler kullanarak elde edilen bağıntılar burada da kullanılacaktır. Değişmez terim f_0

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) f_{YBMG}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx w(x) (c_{3k-2} u_{3k-2}(x) + c_{3k-1} u_{3k-1}(x) + c_{3k} u_{3k}(x)) \end{aligned} \quad (2.106)$$

olmaktadır. f_0 'in boy karesi ise

$$\begin{aligned} \|f_0\|^2 &= \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) (f_0)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx w(x) (c_{3k-2} u_{3k-2}(x) + c_{3k-1} u_{3k-1}(x) + c_{3k} u_{3k}(x)) \right)^2 \end{aligned} \quad (2.107)$$

olarak hesaplanmaktadır. $f_1(x)$

$$f_1(x) = f_{YBMG}(x) - f_0 \quad (2.108)$$

olarak tanımlanırsa, önce $f_1(x)$ 'in daha sonra da $f_{YBMG}(x)$ 'nin boy kareleri aşağıdaki yapıda yazılabilmektedir.

$$\|f_1\|^2 = (f_1, f_1) = \int_{x_1}^{x_n} dx w(x) (f_1(x))^2 \quad (2.109)$$

$$\|f_{YBMG}\|^2 = \|f_0\|^2 + \|f_1\|^2 \quad (2.110)$$

Sıfırncı kerteden toplamsallık ölçeni σ_0 aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

$$\sigma_0 = \frac{\|f_0\|^2}{\|f_{YBMG}\|^2} \quad (2.111)$$

Bu anlatım daha açık olarak

$$\sigma_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^{3(n-1)} c_k v_k \right)^2}{\sum_{k=1}^{3n-3} c_k^2} \quad (2.112)$$

biçiminde yazılabilir. Burada boyutu $3n-3$ olan v ve c yöneyleri tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{3n-3}]^T \quad (2.113)$$

$$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{3n-3}]^T \quad (2.114)$$

Böylece değişmezlik ölçeni,

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} \quad (2.115)$$

biçiminde yöneyler türünden yazılabilir. Burada \mathbf{v} yöneyi, daha önceden belirlenmiş olan taban işlevlerinin tümlevlerini göstermektedir. Amaç işlevimsisi, aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma_0(\mathbf{c}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{r}) \quad (2.116)$$

\mathbf{A} dizeyi birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşıtımda kullanılan dizeyden biraz değişiklik göstermektedir. Burada ek olarak taban işlevlerinin birinci türevlerinin ara noktalarda süreklilik koşuluna bakılmaktadır. $m=3n-3$ olmak üzere, \mathbf{A} dizeyi boyutu $m \times m$ olan kare bir dizeyi, \mathbf{c} , \mathbf{v} ve $\boldsymbol{\lambda}$, m öğeli yöneyleri simgelemekte olup aşağıdaki eşitliklerle açık yapıları verilmektedir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(x_1)^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}(x_k^-)^T \\ \mathbf{u}(x_k^+)^T \\ \mathbf{u}'(x_k^-)^T - \mathbf{u}'(x_k^+)^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}(x_n)^T \\ \mathbf{u}'(x_1)^T - \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} \mathbf{u}(x_1)^T \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

\mathbf{r} ise boyutu m olan ve

$$\mathbf{r} = [y_1 \ \dots \ y_k \ y_k \ 0 \ \dots \ y_{n-1} \ y_{n-1} \ 0 \ y_n \ 0]^T \quad (2.118)$$

biçiminde bir yöneydir. \mathbf{A} dizeyini tanımlarken kullanılan $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ yöneyi

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u_1(x) \ u_2(x) \ \dots \ u_{3n-3}(x)] \quad (2.119)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $\boldsymbol{\lambda}$ yöneyi ise boyutu m olan bir yöneydir. Birinci

bölümde elde edilen tüm sonuçlar burada da kullanılacaktır. Amaç işlevimsisi,

$$J(\mathbf{c}, \lambda) = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} + \lambda (\mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{r}) \quad (2.120)$$

olarak tanımlanmıştı. Amaç işlevimsisinin λ ve \mathbf{c} yöneylerine göre türevleri

$$\nabla_{\lambda} J(\mathbf{c}, \lambda) = \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (2.121)$$

$$\nabla_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c}, \lambda) = \frac{2}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} (\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I}) \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \lambda = \mathbf{0} \quad (2.122)$$

olarak elde edilmişti. \mathbf{A} dizeyi kare ve evriği (ing: inverse) alınabilir bir dizey olduğundan \mathbf{c} yöneyi,

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \quad (2.123)$$

olarak bulunur. Eniyilenmiş sıfırcı kerteden (ing: order) toplamsallık ölçeni ise

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} = \frac{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})}{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})} \quad (2.124)$$

biçiminde hesaplanır.

2.1.3 Uygulama

Bu bölümde, daha önce bağıntıları elde edilen YBMG değişmez terimi ve sıfırcı kerteden toplamsallık ölçeni hesaplanmakta ve işleve ait altkesimler bulunup asıl işlemlerle çizimleri (ing: figure) karşılaştırılmaktadır. İlk olarak birinci daha sonrasında ise ikinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım yapılacaktır. Bu amaçla,

$$F(x) = \exp(-x^2) \quad (2.125)$$

işlevinin $[-1, 1.5]$ aralığındaki noktalar dizisi $\left\{(-1, e^{-1}), \left(-\frac{1}{2}, e^{-1/4}\right), (0, 1), \right.$

$\left. \left(\frac{1}{2}, e^{-1/4}\right), (1, e^{-1}), \left(\frac{3}{2}, e^{-9/4}\right)\right\}$ kullanılacaktır. Burada nokta sayısı $n = 6$ 'dır. Her bir

aralıkta elde edilen taban işlevleri aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 2\sqrt{15}(1+x), & u_2(x) &= 2\sqrt{5}(2+3x), & u_3(x) &= 2\sqrt{15}(1/2+x), \\ u_4(x) &= 2\sqrt{5}(1/2+3x), & u_5(x) &= 2\sqrt{15}x, & u_6(x) &= 2\sqrt{5}(-1+3x), \\ u_7(x) &= 2\sqrt{15}(-1/2+x), & u_8(x) &= 2\sqrt{5}(-5/2+3x), & u_9(x) &= 2\sqrt{15}(-1+x), \\ u_{10}(x) &= 2\sqrt{5}(-4+3x). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Buna göre YBMG bileşenleri hesaplanacak işlev,

$$f(x) = \sum_{k=1}^5 c_{2k-1} u_{2k-1}(x) + c_{2k} u_{2k}(x) \quad (2.127)$$

olarak tanımlanmaktadır. Ağırlık işlevi $w(x)$

$$w(x) = \frac{1}{x_6 - x_1} = \frac{2}{5} \quad (2.128)$$

olmaktadır. f_0 değişmez terimi aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_{x_1}^{x_6} dx w(x) f(x) = \sum_{k=1}^5 \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \left(\frac{2}{5} \right) (c_{2k-1} u_{2k-1}(x) + c_{2k} u_{2k}(x)) \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{\sqrt{3} c_{2k-1} - c_{2k}}{2\sqrt{5}} \end{aligned} \quad (2.129)$$

Bundan sonraki adım, σ_0 değerini bulmaktır. Bu amaçla ilk olarak f_0 'ın boy karesi hesaplanacaktır.

$$\|f_0\|^2 = \left(\sum_{k=1}^5 \frac{\sqrt{3} c_{2k-1} - c_{2k}}{2\sqrt{5}} \right)^2 \quad (2.130)$$

f 'nin boy karesi ise

$$\|f\|^2 = \int_{x_1}^{x_6} dx w(x) f(x)^2 = \sum_{k=1}^{10} c_k^2 \quad (2.131)$$

olmaktadır. σ_0 değeri ise

$$\sigma_0 = \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\left(\sum_{k=1}^5 \frac{\sqrt{3} c_{2k-1} - c_{2k}}{2\sqrt{5}} \right)^2}{\sum_{k=1}^5 (c_{2k-1}^2 + c_{2k}^2)} \quad (2.132)$$

biçiminde olur. σ_0 yöneyler türünden

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} \quad (2.133)$$

olarak yazıldığında, burada bulunan \mathbf{v} yöneyi, k . ögesi $u_k(x)$, ($1 \leq k \leq 10$) işlevinin

$[x_1, x_6]$ aralığında ve $w(x)$ ağırlık işlevi altında tümlevinin (ing: integral) değeri

olmaktadır. Buna göre \mathbf{v} yöneyi aşağıdaki biçimde oluşturulmaktadır.

$$\mathbf{v} \equiv [\mathbf{v}_{sub} \quad \mathbf{v}_{sub} \quad \mathbf{v}_{sub} \quad \mathbf{v}_{sub} \quad \mathbf{v}_{sub}]^T$$

$$\mathbf{v}_{sub} \equiv \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

\mathbf{A} dizeyi köşegen üzerinde aşağıda tanımlanmış olan blok dizey, diğer öğeleri ise 0 olan bir dizeydir.

$1 \leq k \leq 5$ için

$$\mathbf{A}_{(2k-1,2k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{5} \\ \sqrt{15} & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

\mathbf{r} yöneyi ise

$$\mathbf{r} = [e^{-1} \quad e^{-1/4} \quad e^{-1/4} \quad 1 \quad 1 \quad e^{-1/4} \quad e^{-1/4} \quad e^{-1} \quad e^{-1} \quad e^{-9/4}]^T \quad (2.136)$$

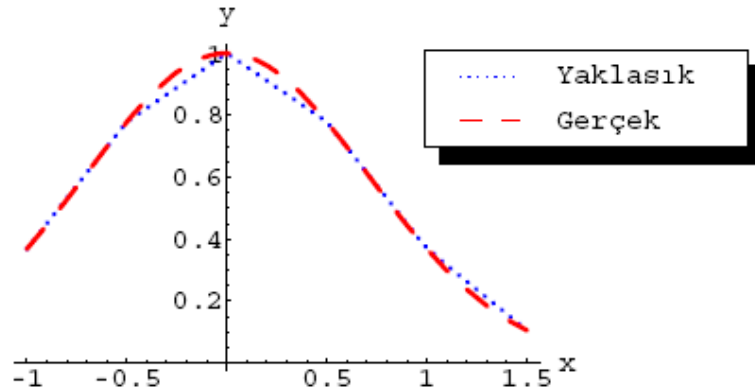
olmaktadır. Daha önce amaç işlevimsinin λ 'ya göre türevi alınıp sifıra eşitlendiğinde

$$\nabla_{\lambda} J(\mathbf{c}, \lambda) = \mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.137)$$

eşitliği elde edilmiştir. Burada \mathbf{A} dizeyinin evriğinin \mathbf{r} yöneyi ile çarpımından \mathbf{c} yöneyi hesaplanmaktadır. Eniyilenmiş sıfırcı kereden toplamsallık ölçeni

$$\sigma_0 = 0.855515 \quad (2.138)$$

olmaktadır. $F(x)$ işlevinin birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım ile elde edilen işlevinin karşılaştırmalı çizimi aşağıda gösterilmektedir.



Şekil 2.1 : Birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım.

İkinci dereceden yaklaştırım için kullanılacak taban işlevleri aşağıda yer almaktadır.

$$u_{3k-2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{\sqrt{5}\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}(x-x_k)^2, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.139)$$

$$u_{3k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{5\sqrt{3}\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}(x-x_k)^2 + \frac{4\sqrt{3}\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{3/2}}(x-x_k), & x \in I_k \end{cases} \quad (2.140)$$

$$u_{3k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{10\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}(x-x_k)^2 + \frac{12\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{3/2}}(x-x_k) \\ + \frac{3\sqrt{x_1-x_n}}{\sqrt{(x_k-x_{k+1})}}, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.141)$$

YBMG bileşenleri hesaplanacak işlev,

$$f(x) = \sum_{k=1}^5 (c_{3k-2}u_{3k-2}(x) + c_{3k-1}u_{3k-1}(x) + c_{3k}u_{3k}(x)) \quad (2.142)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Ağırlık işlevi $w(x) = \frac{2}{5}$ olarak daha önce elde edilmişti.

f_0 değişmez terimi

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_{x_1}^{x_6} dx w(x) f(x) = \sum_{k=1}^5 \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \left(\frac{2}{5} \right) (c_{3k-2}u_{3k-2}(x) + c_{3k-1}u_{3k-1}(x) + c_{3k}u_{3k}(x)) \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{5c_{3k-2} + \sqrt{5}(-\sqrt{3}c_{3k-1} + c_{3k})}{15} \end{aligned} \quad (2.143)$$

olarak hesaplanır. σ_0 değerini bulmak için önce f_0 'ın boy karesi hesaplanmalıdır.

$$\|f_0\|^2 = \left(\sum_{k=1}^5 \frac{5c_{3k-2} + \sqrt{5}(-\sqrt{3}c_{3k-1} + c_{3k})}{15} \right)^2 \quad (2.144)$$

f 'nin boy karesi ise

$$\|f\|^2 = \int_{x_1}^{x_6} dx w(x) f(x)^2 = \sum_{k=1}^{15} c_k^2 \quad (2.145)$$

olmaktadır. σ_0 değeri ise

$$\sigma_0 = \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\left(\sum_{k=1}^5 \frac{5c_{3k-2} + \sqrt{5}(-\sqrt{3}c_{3k-1} + c_{3k})}{15} \right)^2}{\sum_{k=1}^5 (c_{3k-2}^2 + c_{3k-1}^2 + c_{3k}^2)} \quad (2.146)$$

biçiminde olur. σ_0 aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} \quad (2.147)$$

Burada \mathbf{v} yöneyi,

$$\mathbf{v} \equiv [\mathbf{v}_{sub} \quad \mathbf{v}_{sub} \quad \mathbf{v}_{sub} \quad \mathbf{v}_{sub} \quad \mathbf{v}_{sub}]^T \quad (2.148)$$

$$\mathbf{v}_{sub} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmaktadır. \mathbf{A} dizeyi,

$1 \leq k \leq 5$ için

$$\mathbf{A}_{(3k-3,3k)} = [3\sqrt{5}]$$

$$\mathbf{A}_{(3k-1,3k-2)} = [5 \quad \sqrt{15} \quad \sqrt{5}]$$

$1 \leq k \leq 4$ için

$$\mathbf{A}_{(3k+1,3k-1)} = [20 \quad 12\sqrt{15} \quad 16\sqrt{5}]$$

$$\mathbf{A}_{(3k+1,3k+2)} = [8\sqrt{15} \quad 24\sqrt{5}]$$

$$\mathbf{A}_{(15,2)} = [-8\sqrt{15} \quad -30\sqrt{5}]$$

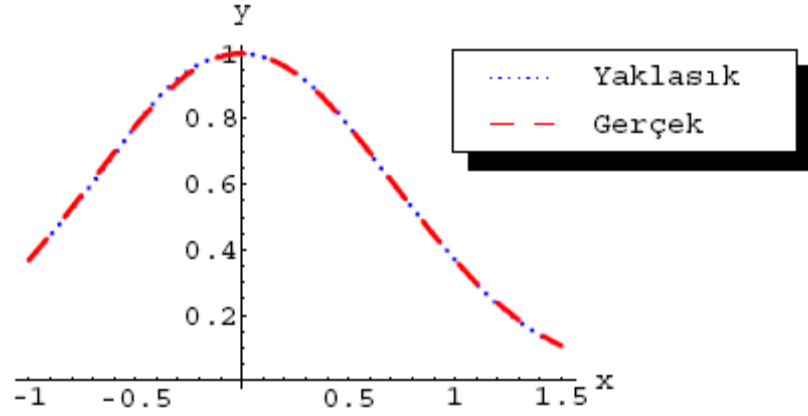
yapısında olup diğer öğeleri 0 olan bir dizeydir. \mathbf{r} yöneyi ise

$$\mathbf{r} = [e^{-1} \quad e^{-1/4} \quad e^{-1/4} \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad e^{-1/4} \quad e^{-1/4} \quad 0 \quad e^{-1} \quad e^{-1} \quad 0 \quad e^{-9/4} \quad 0]^T$$

biçimindedir. \mathbf{c} yöneyi, \mathbf{A} dizeyinin evriği ile \mathbf{r} yöneyinin çarpımı sonucu oluşmaktadır. Elde edilen \mathbf{c} yöneyi, (2.147) eşitliğinde yerine yazıldığında σ_0 değeri

$$\sigma_0 = 0.837833 \quad (2.149)$$

olarak hesaplanır. $F(x)$ işlevinin ikinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım ile oluşturulan karşılaştırmalı çizimi aşağıda yer almaktadır.



Şekil 2.2 : İkinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım.

2.2 Sıradan Türevli Denklemlerin Sayısal Çözümünde İçdeğerbiçimsel Yaklaşım Yöntemi

Sıradan türevli denklemlerin çözümleri için bir çok sayısal yöntem geliştirilmiştir [1-4]. Bu bölümde Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi ile denklemlerin gerçek çözümlerine yaklaşım yapılmıştır. Bu yaklaşım çokterimli yapıda olup, içdeğerbiçimsel yaklaşım niteliğindedir.

2.2.1 Birinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım

Bu bölümde, başlangıç değerli (ing: initial value) birinci kereden doğrusal sıradan türevli bir denklemin sayısal çözümü için Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi kullanılacaktır. Genel olarak bu denklem aşağıdaki yapıda verilmektedir.

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(a) = y_0 \quad (2.150)$$

Çözüm genel olarak herhangi bir $[a, b]$ aralığında aranacaktır. Bu aralık n sayıda düğüm noktası (ing: node) kullanılarak alt aralıklara bölünmektedir. Her bir $I_k = [x_k, x_{k+1})$, $(1 \leq k < n-1)$ ve $I_{n-1} = [x_{n-1}, x_n]$ aralığı için daha önce elde edilmiş olan aşağıdaki taban işlevleri kullanılacaktır.

$$u_{2k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{\sqrt{3(x_n - x_1)}}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^3}} (x - x_k) & x \in I_k \end{cases} \quad (2.151)$$

$$u_{2k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{-3\sqrt{x_n - x_1}}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^3}} (x - x_k) + \frac{2\sqrt{x_n - x_1}}{\sqrt{x_{k+1} - x_k}} & x \in I_k \end{cases} \quad (2.152)$$

Bu işlevler, karesi tümlemlenebilir işlevlerin Hilbert uzayında birbirine dik ve birimboylu özellikte bir taban kümesi oluşturmaktadır. (2.150) denkleminin sayısal çözümü aşağıdaki biçimde yazılmaktadır.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(x) \quad (2.153)$$

Burada $s_k(x)$ işlevi (2.151) ve (2.152) eşitliklerindeki taban işlevlerinin doğrusal birleştirmesi olarak tanımlanmaktadır.

$$s_k(x) = c_{2k-1}u_{2k-1}(x) + c_{2k}u_{2k}(x), \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.154)$$

c_k değerleri bilinmeyen katsayılardır. $s_k(x)$ işlevleri aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

$$s_1(x_1) = y_0,$$

$$s_{k-1}(x_k) - s_k(x_k) = 0, \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$s'(x_k) + p(x_k)s(x_k) = q(x_k), \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (2.155)$$

$f(x)$ işlevi tek değişkenli olduğu için, işlevin YBMG bileşenleri bir değişmez ve x' e bağlı tek değişkenli işlevler olmaktadır. Değişmezlik ölçeni

$$\sigma_0 = \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{2n-2} c_k v_k \right)^2}{\sum_{k=1}^{2n-2} c_k^2} \quad (2.156)$$

şeklinde bulunur. Burada v_k değeri, $u_k(x)$ işlevlerinin $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında ve $w(x)$ ağırlık işlevi ile olan tümlevinin değeridir. σ_0 değişmezlik ölçeni, boyları $2n-2$ olan yöneyler tarafından daha kapalı bir anlatımla yazılabilir. Buna göre

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{2n-2}]^T, \quad \mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2n-2}]^T \quad (2.157)$$

olarak tanımlanan yöneyler, (2.156) denkleminde kullanılırsa, değişmezlik ölçeni aşağıdaki gibi hesaplanmış olur.

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{2n-2}]^T, \quad \mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2n-2}]^T \quad (2.157)$$

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} \quad (2.158)$$

Amaç işlevimsisi yeniden yazılabilir.

$$J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma_0(\mathbf{c}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{r}) \quad (2.159)$$

Burada \mathbf{A} katsayılar dizeyi $(2n-2) \times (2n-2)$ boyutlu ve (2.155) denklemindeki koşullarda bulunan bilinmeyen c_k değerlerinin katsayılarının oluşturduğu kare bir dizeydir. \mathbf{r} yöneyi ise koşul denklemlerinin sağ yan yöneyidir. Amaç işlevimsisinin \mathbf{c} ve λ yöneylerine göre türevleri hesaplanıp $(2n-2)$ boyutlu $\mathbf{0}$ yöneyine eşitlendiğinde aşağıdaki bağıntılar elde edilmektedir.

$$\nabla_{\lambda} J(\mathbf{c}, \lambda) = \mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (2.160)$$

$$\nabla_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c}, \lambda) = \frac{2}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} (\mathbf{v}\mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I}) \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \lambda = \mathbf{0} \quad (2.161)$$

\mathbf{A} dizeyi kare ve evirtilebilir bir dizey olduğundan (2.160) denkleminden \mathbf{c} yöneyi,

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \quad (2.162)$$

olarak hesaplanır. Buna göre değişmezlik ölçeni

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v}\mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} = \frac{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})^T \mathbf{v}\mathbf{v}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})}{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r})} \quad (2.163)$$

olarak bulunur [29].

2.2.2 İkinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım

Bu bölümde ikinci dereceden birbirine dik ve boyları 1 olan aşağıdaki taban işlevleri kullanılacaktır.

$$u_{3k-2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{\sqrt{5}\sqrt{x_1 - x_n}}{(x_k - x_{k+1})^{5/2}} (x - x_k)^2, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.164)$$

$$u_{3k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{5\sqrt{3}\sqrt{x_1 - x_n}}{(x_k - x_{k+1})^{5/2}} (x - x_k)^2 + \frac{4\sqrt{3}\sqrt{x_1 - x_n}}{(x_k - x_{k+1})^{3/2}} (x - x_k), & x \in I_k \end{cases} \quad (2.165)$$

$$u_{3k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{10\sqrt{x_1 - x_n}}{(x_k - x_{k+1})^{5/2}} (x - x_k)^2 + \frac{12\sqrt{x_1 - x_n}}{(x_k - x_{k+1})^{3/2}} (x - x_k) + \frac{3\sqrt{x_1 - x_n}}{(x_k - x_{k+1})^{5/2}}, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.166)$$

(2.150) denkleminin sayısal çözümü, $f(x)$ ile simgelenirse, $f(x)$ aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(x) \quad (2.167)$$

Burada $s_k(x)$ işlevi (2.164), (2.165) ve (2.166) eşitliklerindeki taban işlevlerinin doğrusal birleştirimi olarak tanımlanmaktadır.

$$s_k(x) = c_{3k-2}u_{3k-2}(x) + c_{3k-1}u_{3k-1}(x) + c_{3k}u_{3k}(x), \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.168)$$

c_k değerleri bilinmeyen katsayılardır. $s_k(x)$ işlevleri aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

$$s_1(x_1) = y_0,$$

$$s_{k-1}(x_k) - s_k(x_k) = 0, \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$s'_{k-1}(x_k) - s'_k(x_k) = 0, \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$s'(x_k) + p(x_k)s(x_k) = q(x_k), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.169)$$

Bu yaklaşık çözümün değişmezlik ölçeni,

$$\sigma_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^{3n-3} c_k v_k \right)^2}{\sum_{k=1}^{3n-3} c_k^2} \quad (2.170)$$

biçiminde hesaplanır. v_k değeri, $u_k(x)$ işlevlerinin $[x_k, x_{k+1}]$ aralığında ve $w(x)$ ağırlık işlevi ile olan tümlevinin değeridir. Burada boyutu $(3n-3)$ olan \mathbf{v} ve \mathbf{c} yöneyleri tanımlanabilir. Daha önce kullanılan (2.159) denklemindeki Amaç işlevimsisi kullanılacaktır. Burada \mathbf{A} dizeyi boyutu $(3n-3)$ olan kare ve evirtilebilir bir dizeydir ve (2.169) sırasayılı eşitlikte bulunan koşullarda c_k bilinmeyen değerlerinin katsayılarından oluşmaktadır. Amaç İşlevimsisinin \mathbf{c} ve λ yöneylerine göre türevleri hesaplanıp $(3n-3)$ boyutlu $\mathbf{0}$ yöneyine eşitlendiğinde, \mathbf{c} yöneyi

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \quad (2.171)$$

olmaktadır. Bu durumda değişmezlik ölçeni

$$\sigma_0 = \frac{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r})^T \mathbf{v}\mathbf{v}^T (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r})}{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r})^T (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r})} \quad (2.172)$$

olarak hesaplanmaktadır [29].

2.2.3 Üçüncü dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım

Bu bölümde kullanılacak olan taban işlevleri aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

$$u_{4k-3}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{\sqrt{7(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{7/2}} (x - x_k)^3, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.173)$$

$$u_{4k-2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{7\sqrt{5(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{7/2}} (x - x_k)^3 - \frac{6\sqrt{5(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{5/2}} (x - x_k)^2, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.174)$$

$$u_{4k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{21\sqrt{3(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{7/2}} (x - x_k)^3 - \frac{30\sqrt{3(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{5/2}} (x - x_k)^2 \\ + \frac{10\sqrt{3(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{3/2}} (x - x_k), & x \in I_k \end{cases} \quad (2.175)$$

$$u_{4k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ -\frac{35\sqrt{(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{7/2}} (x - x_k)^3 + \frac{60\sqrt{(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{5/2}} (x - x_k)^2 \\ -\frac{30\sqrt{(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{3/2}} (x - x_k) + \frac{4\sqrt{(x_n - x_1)}}{(x_{k+1} - x_k)^{1/2}}, & x \in I_k \end{cases} \quad (2.176)$$

Bu işlevler birbirleri ile dik ve boyları 1 olacak biçimde yapılandırılmışlardır. (2.150) denkleminin sayısal çözümü $f(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(x) \quad (2.177)$$

Burada $s_k(x)$ işlevi (2.173), (2.174), (2.175) ve (2.176) denklemlerinde bulunan taban işlevleri türünden aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$s_k(x) = c_{4k-3}u_{4k-3}(x) + c_{4k-2}u_{4k-2}(x) + c_{4k-1}u_{4k-1}(x) + c_{4k}u_{4k}(x) \quad (2.178)$$

$s_k(x)$ işlevleri aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

$$s_1(x_1) = y_0,$$

$$s_k(x_k) - s_{k-1}(x_k) = 0, \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$s'_k(x_k) - s'_{k-1}(x_k) = 0, \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$s''_k(x_k) - s''_{k-1}(x_k) = 0, \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$s'(x_k) + p(x_k)s(x_k) = q(x_k), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.179)$$

Amaç İşlevimsisi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{r}) \quad (2.180)$$

Amaç İşlevimsisinin $\boldsymbol{\lambda}$ ve \mathbf{c} yöneylerine göre türevleri alındığında aşağıdaki bağıntılar elde edilmektedir.

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (2.181)$$

$$\nabla_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{2}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} (\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I}) \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (2.182)$$

Burada \mathbf{A} dizeyi (2.179) denkleminde bulunan c_k bilinmeyenlerinin katsayılarının oluşturduğu, $(4n-5) \times (4n-4)$ boyutlu bir dizeydir. Yani \mathbf{A} dizeyi, kare bir dizey değildir. (2.182) numaralı eşitlikten \mathbf{c} yöneyi,

$$\mathbf{c} = -\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}{2} (\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.183)$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{v} \mathbf{v}^T$ bir dışçarpım dizeyi olduğundan, $(\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I})^{-1}$ dizeyinin evriği için aşağıdaki yapı öngörülür.

$$(\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I})^{-1} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (2.184)$$

$(\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I})^{-1}$ ve $(\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I})$ dizeylerinin çarpımının birim matrisi vermesinden dolayı α ve β katsayıları,

$$\alpha = -\frac{1}{\sigma_0}, \quad \beta = \frac{1}{\sigma_0(\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)} \quad (2.185)$$

olarak bulunur. Bu katsayılar (2.184) eşitliğinde yerine yazılırsa, $(\mathbf{v}\mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I})$ dizeyinin evriği,

$$(\mathbf{v}\mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I})^{-1} = -\frac{1}{\sigma_0} \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_0(\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)} \mathbf{v}\mathbf{v}^T \quad (2.186)$$

olmaktadır. Bu bağıntı (2.183) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathbf{c} = -\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}{2} \left(-\frac{1}{\sigma_0} \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_0(\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)} \mathbf{v}\mathbf{v}^T \right) \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.187)$$

Bu denklem düzenlendiğinde \mathbf{c} yöneyi için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}{2} \left(\frac{1}{\sigma_0} \mathbf{I} - \frac{1}{\sigma_0(\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)} \mathbf{v}\mathbf{v}^T \right) \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.188)$$

(2.181) numaralı denklemden $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{r}$ eşitliği yazılabilir. Burada \mathbf{c} yöneyi için (2.188) eşitliğindeki denklem yazıldığında,

$$\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}{2} \mathbf{A} \left(\frac{1}{\sigma_0} \mathbf{I} - \frac{1}{\sigma_0(\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)} \mathbf{v}\mathbf{v}^T \right) \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{r} \quad (2.189)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $\boldsymbol{\lambda}$ için aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{2}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} \left(\frac{1}{\sigma_0} \mathbf{A}\mathbf{A}^T - \frac{1}{\sigma_0(\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)} \mathbf{A}\mathbf{v}\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{r} \quad (2.190)$$

$\boldsymbol{\lambda}$ yöneyinin hesaplanabilmesi için $\left(\frac{1}{\sigma_0} \mathbf{A}\mathbf{A}^T - \frac{1}{\sigma_0(\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)} \mathbf{A}\mathbf{v}\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T \right)$ dizeyinin

evriğinin bulunması gerekmektedir. (2.184) denklemindeki yöntem kullanıldığında bu dizeyin evriği aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left(\frac{1}{\sigma_0} \mathbf{A}\mathbf{A}^T - \frac{1}{\sigma_0(\mathbf{v}^T\mathbf{v} - \sigma_0)} \mathbf{A}\mathbf{v}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^T \right)^{-1} = \sigma_0 (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} + \frac{\sigma_0}{\mathbf{v}^T\mathbf{v} - \sigma_0 - (\mathbf{A}\mathbf{v})^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{v})}$$

$$= (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{v})(\mathbf{A}\mathbf{v})^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (2.191)$$

Böylece \mathbf{c} yöneyi

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{(\mathbf{v}^T\mathbf{v} - \sigma_0)} \mathbf{v}\mathbf{v}^T \right) \mathbf{A}^T \left((\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} + \frac{(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{v})(\mathbf{A}\mathbf{v})^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v} - \sigma_0 - \mathbf{v}^T\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \quad (2.192)$$

olarak hesaplanır. Bulunan bu \mathbf{c} yöneyi

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v}\mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} \quad (2.193)$$

denkleminde yerine konulduğunda

$$\sigma_0 = \sigma_0^2 \left(\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{r} \right)^2 \left[\frac{\left(\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{r} \right)^2 \left(\mathbf{v}^T \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{v} \right) + \mathbf{v}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{r} \left(-\mathbf{v}^T \mathbf{v} + \sigma_0 - \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{v} \right)^2}{\mathbf{v}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{r} \left(-\mathbf{v}^T \mathbf{v} + \sigma_0 - \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{v} \right)^2} \right]^{-1}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde değişmezlik ölçeni için aşağıdaki 2 değişik değer bulunur.

$$\sigma_0^{(1)} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (2.194)$$

$$\sigma_0^{(2)} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{v} + \frac{\left(\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{r} \right)^2}{\mathbf{r}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{r}} \quad (2.195)$$

σ_0 'ın en büyük değeri, eniyilenmiş sonuç olduğu için (2.195) denklemindeki bağıntı kullanılacaktır.

2.2.4 Uygulama

Burada bazı Birinci Kerteden Sıradan Türevli Denklemler'in sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşımlar yapılarak elde edilen sayısal çözümlerinin denklemin gerçek çözümle karşılaştırılması gerçekleştirilecektir.

Örnek 1

Sayısal çözümü hesaplanacak ilk örnek aşağıda verilmektedir.

$$y' + \frac{4x}{x^2 + 1}y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad y(2) = 1 \quad (2.196)$$

Bu denklemin gerçek çözümü,

$$y(x) = \frac{76 + 2x^2 + x^4}{4(1 + x^2)^2} \quad (2.197)$$

biçimindedir. Burada sayısal çözüm $[2, 5]$ aralığında 10 düğüm noktası kullanılarak elde edilmiştir.

Sayısal çözümlerin gerçek çözüm ile karşılaştırmalı değerleri **Çizelge 2.1**'de yer almaktadır.

Çizelge 2.1 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

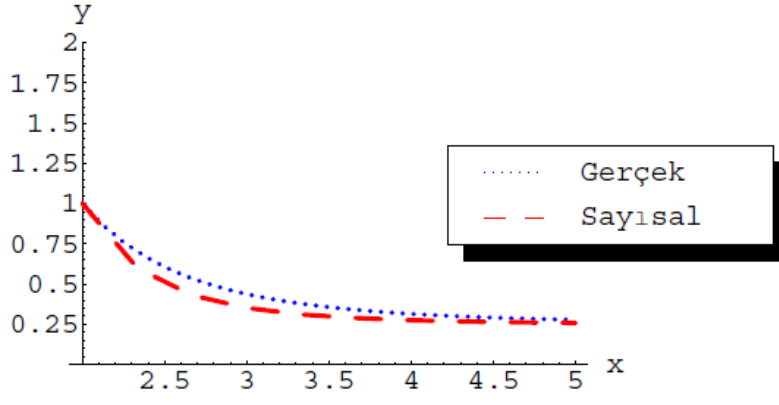
x_i	1. Der. Yak	2. Der. Yak	3. Der. Yak	Gerçek çözüm
2.00	1.000	1.000	1.000	1.000
2.33	0.599	0.693	0.683	0.701
2.67	0.431	0.526	0.545	0.535
3.00	0.352	0.429	0.419	0.438
3.33	0.311	0.371	0.394	0.378
3.67	0.289	0.335	0.318	0.340
4.00	0.276	0.311	0.337	0.315
4.33	0.268	0.295	0.272	0.298
4.67	0.262	0.284	0.314	0.286
5.00	0.259	0.276	0.274	0.277

Burada yanılğı (ing: error) hesaplaması için aşağıdaki bağıntı kullanılabilir.

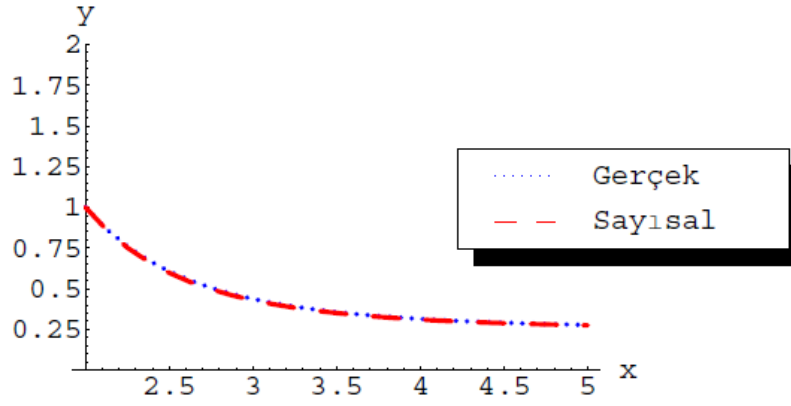
$$\rho = \frac{\int_{x_1}^{x_n} [y(x) - f(x)]^2 dx}{\int_{x_1}^{x_n} [y(x)]^2 dx} \quad (2.198)$$

$y(x)$ gerçek, $f(x)$ ise sayısal çözümü simgelemektedir. Buna göre (2.196) denkleminin sayısal yanılğı değerleri sırasıyla 0.0165925, 0.000163015 ve 0.00102905 olarak hesaplanmaktadır. Bu denklem için ikinci dereceden içdeğerbiçimsel yaklaşım daha iyi sonuç vermiştir.

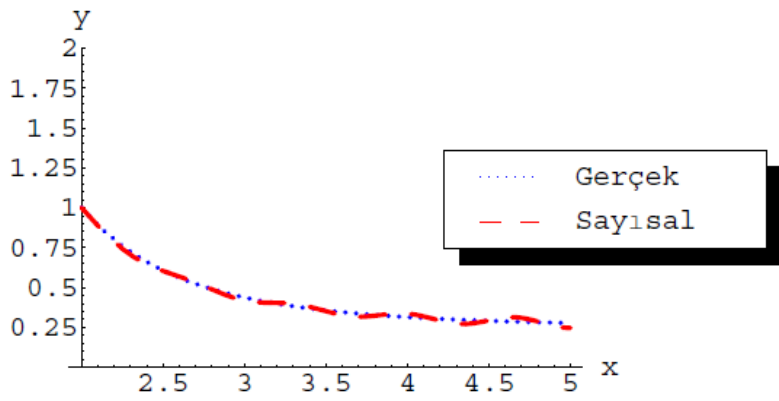
Gerçek çözüm ile sayısal çözümlerin karşılaştırmalı çizimleri **Şekil 2.3**, **Şekil 2.4** ve **Şekil 2.5**'te yer almaktadır.



Şekil 2.3 : Birinci dereceden yaklaştırım.



Şekil 2.4 : İkinci dereceden yaklaştırım.



Şekil 2.5 : Üçüncü dereceden yaklaştırım.

Örnek 2

İncelenecek ikinci örnek, trigonometrik bir işlev içermektedir.

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 0. \quad (2.199)$$

Burada gerçek çözüm,

$$y = \frac{\sin x}{x^2} \quad (2.200)$$

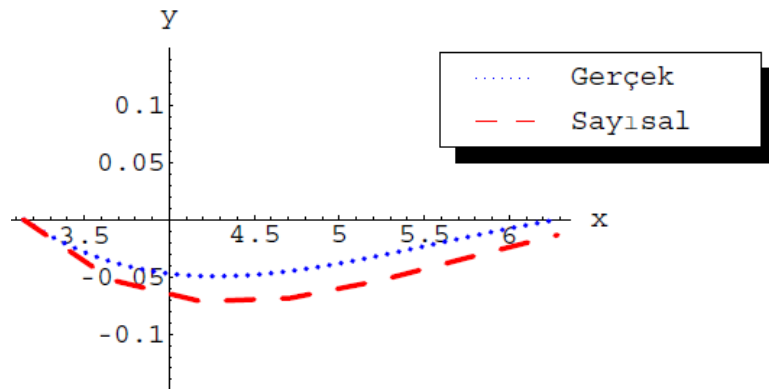
yapısındadır. Sayısal çözüm, $[\pi, 2\pi]$ aralığında 7 düğüm noktası kullanılarak bulunmuştur.

Gerçek çözümün, sayısal çözüm ile karşılaştırmalı değerleri **Çizelge 2.2** 'de yer almaktadır.

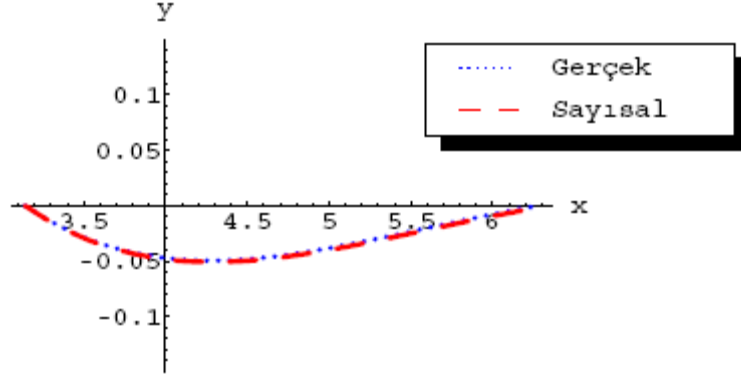
Çizelge 2.2 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	1. Der. Yak	2. Der. Yak	3. Der. Yak	Gerçek çözüm
3.1416	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.6652	-0.0531	-0.0380	-0.0418	-0.0372
4.1888	-0.0716	-0.0506	-0.0478	-0.0494
4.7124	-0.0687	-0.0465	-0.0494	-0.0450
5.2360	-0.0534	-0.0333	-0.0290	-0.0316
5.7596	-0.0332	-0.0168	-0.0195	-0.0151
6.2832	-0.0135	-0.0017	0.0033	0.0000

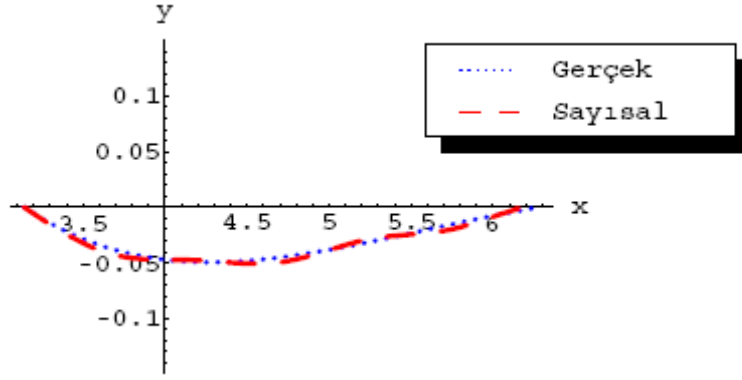
Sayısal çözümlerin yanılığın değerleri ise sırasıyla 0.280611, 0.00161656 ve 0.000805163 olarak hesaplanmaktadır. Buradan gözlemlendiği gibi üçüncü dereceden yaklaşımların daha iyi bir sonuç vermektedir. Birinci, ikinci ve üçüncü dereceden yaklaşımlardan elde edilen sayısal çözümlerin gerçek çözümlerle karşılaştırmalı çizimleri **Şekil 2.6**, **Şekil 2.7** ve **Şekil 2.8**'de bulunmaktadır.



Şekil 2.6 : Birinci dereceden yaklaşım.



Şekil 2.7 : İkinci dereceden yaklaşıım.



Şekil 2.8 : Üçüncü dereceden yaklaşıım.

Örnek 3

Bu bölümdeki son denklem ise üstel işlev içermektedir ve açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$y' + 2y = xe^{-2x}, \quad y(1) = 0 \quad (2.201)$$

Denklemin gerçek çözümü,

$$y = \frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 - 1) \quad (2.202)$$

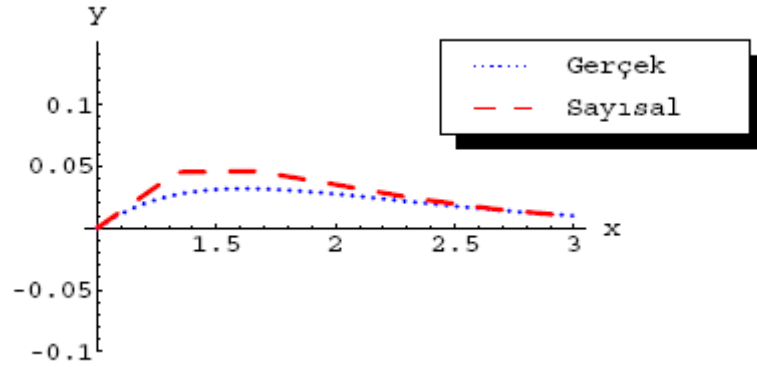
biçimindedir. Bu denklemin sayısal çözümü, $[1,3]$ aralığı 6 eşit alt aralığa bölünerek elde edilmiştir. Çizelge 2.3'te gerçek çözümün, sayısal çözüm ile karşılaştırmalı değerleri bulunmaktadır.

Çizelge 2.3 : Örnek 3 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

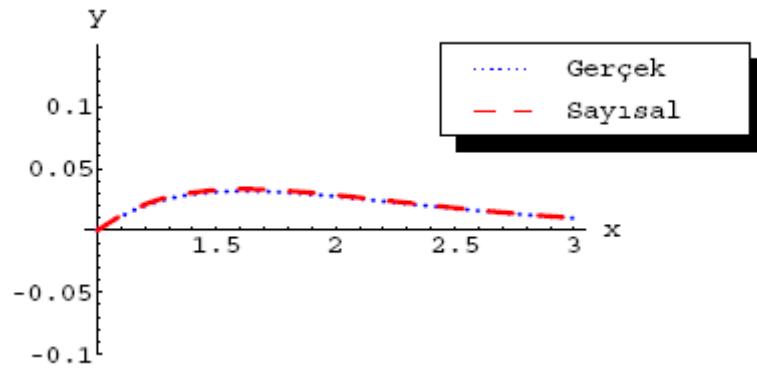
x_i	1. Der. Yak	2. Der. Yak	3. Der. Yak	Gerçek çözüm
1.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.333	0.0451	0.0285	0.0265	0.0270
1.667	0.0459	0.0333	0.0321	0.0317
2.000	0.0351	0.0286	0.0269	0.0275
2.333	0.0239	0.0216	0.0216	0.0209
2.667	0.0153	0.0152	0.0139	0.0148
3.000	0.0094	0.0101	0.0110	0.0099

Sayısal çözümlerin yanılğı değerleri ise sırasıyla 0.138284, 0.0020154, 0.000426732 olarak hesaplanmaktadır. Görüldüğü üzere üçüncü dereceden yaklaşıım en iyi sonucu vermiştir.

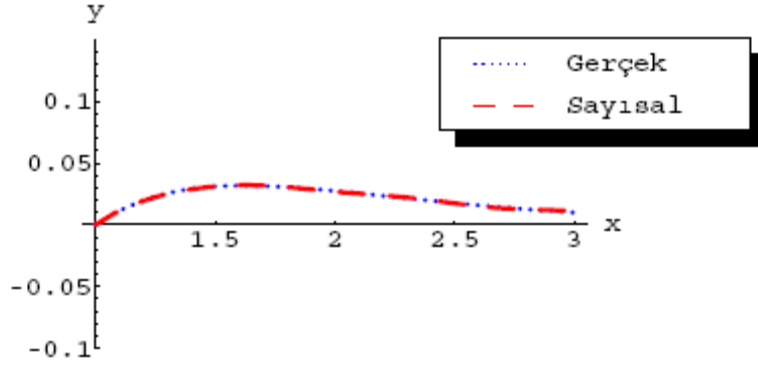
Sayısal çözümlerin gerçek çözüm ile karşılaştırmalı çizimleri **Şekil 2.9**, **Şekil 2.10** ve **Şekil 2.11**'de yer almaktadır.



Şekil 2.9 : Birinci dereceden yaklaşım.



Şekil 2.10 : İkinci dereceden yaklaşım.



Şekil 2.11 : Üçüncü dereceden yaklaşım.

Buradan da görüldüğü üzere sayısal çözümlerden en yaklaşık çözüm, üçüncü dereceden yaklaşım ile elde edilmiştir.

3. SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMI

Sendelenim, olasılık (ing: probability) olaylarında ortaya çıkan bir olgu olup ortalama değerden (ing: mean) artı ve eksi değerler arasında dalgalanmalar olarak tanımlanmaktadır. Bu durumlarda herbir bileşenin davranışı nedensellik (ing: causality) çerçevesinde belirlenmemektedir. Bunun yerine, olasılığın oluşumu saptanabilmektedir. Kuantum Mekanik, Kararlı olmayan İstatiksel Mekanikte ve Kuantum Kimyasında, sendelenimin çok önemi bulunmaktadır. Tez çalışmasında sendelenim olayının ve bilimdeki rolünün ayrıntıları yerine matematiksel olarak sendelenimsizlik kavramı üzerinde durulacaktır.

\mathcal{H} ile simgelenen Hilbert Uzayı, kapalı bir aralıkta çözümcül (ing: analytical) ve karesi tümlelenebilir (ing: integrable) tek değişkenli işlevlerin oluşturduğu bir uzay ve \mathcal{H}_n bu uzayın n sayıda birbirine dik ve boyları 1 olan $u_1(x), \dots, u_n(x)$ taban işlevlerinin örttüğü bir altuzayı olsun. Bu uzayda bulunan, $f(x)$ ve $g(x)$ ile simgelenen herhangi iki işlev arasındaki iççarpım, $a < b$ özelliğindeki iki gerçel sayı için ve $w(x)$ verilen bir ağırlık işlevi olmak üzere

$$(f, g) \equiv \int_a^b dx w(x) f(x) g(x), \quad (3.1)$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu uzayda bulunan herhangi bir $g(x)$ işlevi, yukarıdaki taban işlevlerinin bir doğrusal birleştirimi olarak aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^n g_i u_i(x) \quad (3.2)$$

Burada g_i katsayıları ($1 \leq i \leq n$) gerçel değişmezlerdir (ing: real constant) ve $g(x)$ işlevinin yapısına bağlıdır. Bu bağımlılık, taban işlevlerinin diklik ve birimboyluluk özelliklerinden yararlanılarak belirlenebilir. Bu nedenle u_k ve g işlevlerinin iççarpımları aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$(u_k, g) \equiv \left(u_k, \sum_{i=1}^n g_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n g_i (u_k, u_i) = \sum_{i=1}^n g_i \delta_{k,i} = g_k, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.3)$$

Bu sonuç (3.2) denkleminde yerine konulduğunda g işlevi için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$g(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)(u_i, g) \equiv \sum_{i=1}^n P_i g(x) \equiv P^{(n)} g(x) \quad (3.4)$$

Burada P_i ile gösterilen kavram, bir tümlev işleci (ing: integral operator) olup $u_i(x)$ tarafından örtülen altuzaya izdüşürür. $P^{(n)}$ ile simgelenen işleç ise $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ taban yöneylerince örtülen n boyutlu uzaya izdüşürür. $P^{(n)}$ işleci bu n boyutlu uzay üzerinde birim işleç, onun dışında ise bu uzaya izdüşüren bir işleçtir.

Şimdi yeni bir işleç olan \hat{x} işleci tanımlanacaktır. Bu işlecin tanım bölgesi \mathcal{H} olup, işlenenini (ing: operand) bağımsız değişken olan x ile çarpılmaktadır. Bu işlecin n boyutlu bir \mathcal{H}_n uzayındaki işleve olan etkisi aşağıdaki biçimde anlatılabilir.

$$\hat{x}g(x) = xg(x) \quad (3.5)$$

\hat{x} , cebirsel bir işleçtir [30]. \hat{x} işlecinin dizey gösterilimi elde edilecektir. (3.2) denkleminde verilen $g(x)$ işlevi için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\hat{x}g(x) = \sum_{i=1}^n g_i \hat{x}u_i(x) = \hat{x}P^{(n)}g(x) \quad (3.6)$$

Görüldüğü üzere, her ne kadar $P^{(n)}g(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ taban yöneylerince örtülen uzay içinde kalsa da onun x ile çarpılmasıyla elde edilen işlev bu uzay içinde kalmayabilir. Bu durumda, \hat{x} işleci bir uzay genişletmesine neden olacaktır. Bu durumdan kaçınmak için, x yerine $P^{(n)}\hat{x}$ işleci yani \hat{x} işlecinin bu n boyutlu uzaya izdüşümü olan işleç ile çalışmak gerekmektedir. Buradan aşağıdaki denklem edilir.

$$P^{(n)}\hat{x}g(x) = \sum_{i=1}^n g_i P^{(n)}\hat{x}u_i(x) = P^{(n)}\hat{x}P^{(n)}g(x) \quad (3.7)$$

Bu durumda \hat{x} işleci yerine n boyutlu \mathcal{H}_n uzayından yine \mathcal{H}_n uzayına tanımlı ve \hat{x}_{yak} ile gösterilen yaklaşık işleci kullanmak gerekmektedir. Buna göre \hat{x}_{yak} işleci, aşağıdaki biçimde tanımlanırsa,

$$\hat{x}_{yak} \equiv P^{(n)}\hat{x}P^{(n)} \quad (3.8)$$

bu işlecin dizey gösterilimi aşağıda anlatılan standart işlemlerle oluşturulmaktadır. $h(x)$ işlevi aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$h(x) \equiv P^{(n)} \hat{x} P^{(n)} = \sum_{i=1}^n g_i P^{(n)} \hat{x} P^{(n)} u_i(x) \quad (3.9)$$

Bu işlev, $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ taban işlevleri tarafından örtülen uzay içerisinde yer almaktadır. Dolayısı ile, aşağıdaki anlatımlar (ing: expression) yazılabilir.

$$h(x) = \sum_{k=1}^n h_k u_k(x) \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=1}^n h_k u_k(x) = \sum_{i=1}^n g_i P^{(n)} \hat{x} P^{(n)} u_i(x) \quad (3.11)$$

(3.11) denkleminde her iki yanının $u_i(x)$, ($1 \leq i \leq n$) ile iççarpımı alınır ve taban işlevlerinin diklik ve birimboyluluk özellikleri de kullanılırsa,

$$h_i = \sum_{j=1}^n (u_i, P^{(n)} \hat{x} P^{(n)} u_j) g_j, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.12)$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitliği Kartezyen yöneyleri türünden yazmak daha iyi olacaktır. Bu amaçla aşağıda n boyutlu \mathbf{g} ve \mathbf{h} yöneyleri ile, genel terimi $X_{i,j}^{(n)}$ olarak verilen \mathbf{X} dizeyi tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{g} = [g_1 \dots g_n]^T, \quad \mathbf{h} = [h_1 \dots h_n]^T, \quad (3.13)$$

$$X_{i,j}^{(n)} = (u_i, P^{(n)} \hat{x} P^{(n)} u_j), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.14)$$

Dolayısı ile (3.12) denklemini, yukarıdaki dizey ve yöneyler türünden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{h} = \mathbf{X}^{(n)} \mathbf{g} \quad (3.15)$$

Burada $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyi \mathcal{H}_n uzayından \mathcal{H}_n uzayına tanımlanan \hat{x}_{yak} işlecinin dizey gösterilimidir. \hat{x} işleci için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} \hat{x} &\equiv \left(P^{(n)} + [\hat{I} - P^{(n)}] \right) \hat{x} \left(P^{(n)} + [\hat{I} - P^{(n)}] \right) \\ \hat{x} &= P^{(n)} \hat{x} P^{(n)} + [\hat{I} - P^{(n)}] \hat{x} P^{(n)} + P^{(n)} \hat{x} [\hat{I} - P^{(n)}] + [\hat{I} - P^{(n)}] \hat{x} [\hat{I} - P^{(n)}] \end{aligned} \quad (3.16)$$

\hat{x}_{sen} için

$$\hat{x}_{sen} \equiv [\hat{I} - P^{(n)}] \hat{x} P^{(n)} + P^{(n)} \hat{x} [\hat{I} - P^{(n)}] + [\hat{I} - P^{(n)}] \hat{x} [\hat{I} - P^{(n)}] \quad (3.17)$$

tanımlaması yapılırsa, \hat{x} işleci

$$\hat{x} \equiv \hat{x}_{yak} + \hat{x}_{sen} \quad (3.18)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $[\hat{I} - P^{(n)}]$ işleci bir izdüşüm işleci olup, n sonsuza gittikçe $\hat{0}$ işlecine gitmektedir. Bu işlecin, $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ taban yöneyleri tarafından örtülen uzaydaki dizey gösterilimi ise $\mathbf{0}$ dizeyidir. Ancak bu işlecin \mathcal{H} Hilbert uzayında n büyüdükçe boyu (ing: norm) küçüldüğü halde sonsuz boyuttaki dizey gösterilimi, sonsuz boyutlu sıfır dizeyi değildir. Bu sıfır olmayan durum \hat{x} işleci üzerinde \mathcal{H}_n ve onun tümler eşi (ing: complement) olan $\mathcal{H} - \mathcal{H}_n$ arasındaki etkileşimi olarak açıklanabilir. $[\hat{I} - P^{(n)}]$ işlecinde bulunan taban işlevlerinin dizinleri (ing: indices) n 'den daha büyüktür. Taban işlevlerinin birimboyluluk ve diklik özellikleri bu taban işlevlerinin değişkenlerinde salınımlar oluşturmaktadır. Gerçekte, u_n işlevinin diklik tanım bölgesinde tam olarak n sayıda sıfırı bulunmaktadır. Bu da artı ve eksi tanımlı değerlerde salınımlar demektir. Bu salınımların sıklığı n büyüdükçe artmaktadır ve bu durum $[\hat{I} - P^{(n)}]$ işlecinin \mathcal{H} uzayındaki herhangi bir işleve olan etkisi altında olan çıkış terimlerinde büyük sayısal giderimler (ing: cancellation) meydana getirmektedir. Diğer bir deyişle, \mathcal{H} uzayındaki bir işlevin bu işleç altındaki görüntüsü, sıfır etrafında dalgalanmakta ve bir şekilde sıfır yöresindeki salınımları ölçmektedir. Dolayısı ile bu işleç, “ n kerteli Sendelenim İşleci” olarak adlandırılmaktadır.

Yukarıda yapılan işlemler, \hat{x} işlecinin karesi olan \hat{x}^2 işlecine de uygulanabilir. Bu durumda \mathcal{H}_n uzayındaki \hat{x}_{yak}^2 işlecinin dizey gösterilimi, sıfır dizeyi değildir. Aslında bu dizey, $P^{(n)} \hat{x} [\hat{I} - P^{(n)}] \hat{x} P^{(n)}$ işlecinin dizey gösterilimine eşittir. Bu durum aşağıda yer alan eşitlikler ile kanıtlanabilir.

$$P^{(n)^2} = P^{(n)}, \quad P^{(n)} [\hat{I} - P^{(n)}] = \hat{0}_n, \quad (3.19)$$

$$[\hat{I} - P^{(n)}] P^{(n)} = \hat{0}_n, \quad [\hat{I} - P^{(n)}]^2 = [\hat{I} - P^{(n)}] \quad (3.20)$$

$P^{(n)}\hat{x}\left[\hat{I}-P^{(n)}\right]\hat{x}P^{(n)}$ işlecinin n boyutlu uzayda dizey gösterilimi, $P^{(n)}\hat{x}^2P^{(n)}$ işlecinin dizey gösteriliminden $P^{(n)}\hat{x}P^{(n)}$ işlecinin dizey gösteriliminin karesinin çıkarımına eşittir. Bu yüzden bu büyüklük artı tanımlıdır. Bu terim salınımlardan gelen baskın katkıyı tanımlamaktadır. $P^{(n)}\hat{x}\left[\hat{I}-P^{(n)}\right]\hat{x}P^{(n)}$ terimine, $\left[\hat{I}-P^{(n)}\right]$ sendelenim işlecinin birinci üslüsü bulunmasından dolayı “Bağımsız Değişkenin Birinci Kerteden Sendelenim İşleci” adı verilmektedir. Sendelenim işlecini içeren terimlerin yok sayılmasıyla elde edilen yaklaşıma da **Sendelenimsizlik Yaklaşımı** denir. Bu durumda \hat{x} işleci sendelenimsizlik limitinde,

$$\hat{x} \approx \hat{x}_{yak} \equiv P^{(n)}\hat{x}P^{(n)} \quad (3.21)$$

olarak anlatılabilir.

\hat{f} işleci, işlev türünden bir işleç olup, işleneni (ing: operand) $[a, b]$ aralığı üzerinde çözümcül (ing: analytic) olan bir $f(x)$ işlevi ile çarpılmaktadır. İşlecini tanım aralığı, $[a, b]$ aralığında sürekli ve karesi tümlevlenebilir işlevlerin oluşturduğu Hilbert Uzayıdır. Bu işleç cebirsel bir işleçtir ve bu uzaydan alınan herhangi bir $g(x)$ işlevine etkisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{f}g(x) = f(x)g(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.22)$$

\hat{f} cebirsel işleci, \hat{x} türünden aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$\hat{f} \equiv f(\hat{x}) \quad (3.23)$$

Bu işlecini sendelenimsizlik yaklaşımı da

$$\hat{f} \approx f(\hat{x}_{yak}) \equiv f(P^{(n)}\hat{x}P^{(n)}) \quad (3.24)$$

anlatımıyla verilir.

Daha önce \hat{x}_{yak} işlecini $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ taban yöneylerince örtülen uzaydaki dizey gösteriliminin $\mathbf{X}^{(n)}$ olduğu gösterilmişti. Bu durumda \hat{x}_{yak}^m işlecini yine bu uzayda dizey gösteriliminin $\mathbf{X}^{(n)^m}$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) olacağı tümevarımla kanıtlanabilir [30]. Bu durumda \hat{f} ile gösterilen işlecini $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ taban yöneylerince örtülen uzaydaki dizey gösterilimi $\mathbf{F}^{(n)}$ ile gösterilirse, $\mathbf{F}^{(n)}$ için

sendelenimsizlik yaklaştırımı

$$\mathbf{F}^{(n)} \approx f(\mathbf{X}^{(n)}) \quad (3.25)$$

olarak verilir. Bu yaklaştırıma **Sendelenimsizlik Kanıtı** denir ve aşağıda açıkça belirtilmektedir [30].

Kanıt Sendelenimsizlik varsayımı altında, $[a, b]$ aralığında çözümcül olan bir işlevle çarpma işlecinin \mathcal{H}_n uzayı üzerindeki dizey gösterilimi, bağımsız değişkenle çarpma işlecinin aynı uzay üzerindeki dizey gösteriliminin bu işlev altındaki görüntüsüne eşittir.

Bu yaklaştırım ile bir bağımsız değişkenli bir işlevin dizey gösterilimi $\mathbf{X}^{(n)}$ üzerinden belirlenebilir [30-32,34,35]. Bu işlemi gerçekteştirmek için önce aşağıda verilen denklem ele alınacaktır.

$$\mathbf{X}^{(n)} \mathbf{x}_j = \xi_j \mathbf{x}_j, \quad 1 \leq j \leq n \quad (3.26)$$

Burada \mathbf{x}_j yöneyleri boyları 1 olan özyöneyle (ing: eigenvector), ξ_j terimleri ise bu özyöneyle karşılık gelen özdeğerleri (ing: eigenvalue) göstermektedir. $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyi bakışık (ing: symmetric) olduğundan özyöneyle, n boyutlu Kartezyen yöneylerden oluşan \mathcal{K}_n uzayında birbirine dik ve boyları 1 olan bir taban takımı oluşturur. Bu yöneylerin her biri aşağıda tanımlanan \mathbf{Q} dizeyinin sütun yöneylerini oluşturmaktadır.

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] \quad (3.27)$$

\mathbf{Q} dizeyinin evriği (ing: inverse) devriğine (ing: transpose) eşittir. $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin \mathbf{Q} dizeyi ile sağdan çarpımı alındığında, \mathbf{Q} dizeyi ile köşegenleri ξ_j , ($j = 1, \dots, n$) özdeğerleri olan bir dizeyin sağdan çarpımını sonuç vermektedir. $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin izgesel gösterilimi (ing: spectral representation), bu denklemden \mathbf{Q}^T ile sağdan çarpma yolu ile oluşturulabilir.

$$\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{Q} [\xi_1 \mathbf{x}_1 \dots \xi_n \mathbf{x}_n] \mathbf{Q}^T \quad (3.28)$$

$$\mathbf{X}^{(n)} = \sum_{j=1}^n \xi_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \quad (3.29)$$

(3.29) eşitliğinin her iki yanının karesi alındığında $\mathbf{X}^{(n)^2}$ için aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(n)^2} &= \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \right)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j \xi_k \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j \xi_k \delta_{jk} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k^T = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T\end{aligned}\quad (3.30)$$

Bu durum genelleştirildiğinde ise tümevarımla (ing:induction)

$$\mathbf{X}^{(n)^k} = \sum_{j=1}^n \xi_j^k \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T, \quad k \geq 1 \quad (3.31)$$

sonucu yazılabilir. Burada $\mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T$ büyüklüğü bir dış çarpım olup izdüşüm özelliği taşımaktadır ve \mathcal{K}_n Kartezyen uzayından \mathbf{x}_j yöneyi tarafından örtülen uzaya izdüşürüm yapmaktadır. Bu \mathbf{x}_j ($j=1,2,\dots,n$) yöneylerince örtülen bir boyutlu altuzaylar birbirine dik olup onların birleşimi \mathcal{K}_n uzayını vermektedir. Dolayısı ile her biri birer izdüşüm dizeyi olan bu n dış çarpımın toplamı \mathcal{K}_n kartezyen uzayının birim dizeyidir.

$$\mathbf{I}_n = \sum_{j=1}^n \xi_j^0 \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \quad (3.32)$$

Bu durumda (3.31) denklemini yeniden

$$\mathbf{X}^{(n)^k} = \sum_{j=1}^n \xi_j^k \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T, \quad k \geq 0 \quad (3.33)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ise

$$f(\mathbf{X}^{(n)}) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T, \quad k \geq 0 \quad (3.34)$$

anlamına gelmektedir. Burada $f(\mathbf{X}^{(n)})$, bağımsız değişkenin dizey gösteriliminin görüntüsüdür. Sendelenimsizlik Kanıtına göre bu terim, çözümcül ve karesi tümlemlenebilir işlevlerin n boyutlu \mathcal{H}_n Hilbert uzayında tanımlanan \hat{f} işlecinin dizey gösterilimine eşittir. \hat{f} işlecinin dizey gösterilimi $\mathbf{M}^n(\hat{f})$ ile simgelenirse, aşağıdaki eşitlik yazılabilir [33].

$$\mathbf{M}^n(\hat{f}) = f(\mathbf{X}^{(n)}) \quad (3.35)$$

3.1 Sendelenimsizlik Durumunda Sıradan Türevli Denklemlerin Sayısal Çözümü

Bu bölümde Doğrusal Sıradan Türevli Denklemlerin hem başlangıç hem de sınır değer koşullarını içeren durumlarında Sendelenimsizlik Yaklaşımını kullanılarak sayısal çözümü yapılacaktır. Elde edilen sonuçlar, çizelge ve şekillerde karşılaştırmalı olarak yer almaktadır.

3.1.1 Birinci kereden doğrusal sağ yanlı sıradan türevli denklemler

Aşağıda birinci kereden doğrusal sağyanlı sıradan türevli denklemi ve ona eşlik eden başlangıç koşulu bulunmaktadır.

$$f'(x) + a_0(x)f(x) = q(x), \quad f(0) = f_0 \quad (3.36)$$

Denklemin çözümü $[0,1]$ aralığında hesaplanacaktır. Bu aralık üzerinde karesi tümlelenebilir işlevlerin \mathcal{H} Hilbert Uzayında çalışılacaktır. $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ bu uzaydan alınan herhangi iki işlevi göstermek üzere iççarpım

$$(g_1, g_2) \equiv \int_0^1 dx w(x) g_1(x) g_2(x) \quad (3.37)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $w(x)$ ağırlık işlevi olup, aşağıdaki biçimde olağanlaştırılmıştır (ing: normalized).

$$\int_0^1 dx w(x) = 1 \quad (3.38)$$

Yukarıdaki iççarpıma göre birbirine dik ve boyları 1 olan taban takımının öğeleri $u_i(x)$, $(1 \leq i < \infty)$ ile gösterilirse, buradaki her bir işlev sırasıyla $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ taban takımının öğelerinden üretilmektedir. Burada ilk işlev ağırlık tümlevinin 1 olması nedeniyle, $u_1(x) = 1$ olmaktadır. Bu çalışmada x bağımsız değişkeni yerine \hat{x} ile gösterilen ve üzerine uygulandığı işlevi x değeri ile çarpan cebirsel işleç ile çalışılacaktır. Bu işlecin izgesi (ing: spectrum) $[0,1]$ aralığıdır. Dolayısı ile sürekli bir izgesi vardır ve katlı özdeğeri yoktur. $a_0(x)$, $f(x)$ ve $q(x)$ işlevleri yerine, sırasıyla \hat{a}_0 , \hat{f} ve \hat{q} ile simgelenen ve üzerine uygulandıkları işlevi sırasıyla $a_0(x)$, $f(x)$ ve $q(x)$ işlevleri ile çarpan cebirsel çarpma işleçleri ile çalışılacaktır.

Bu işleçlerin izgeleri, sırasıyla, $[a_0(x)_{\min}, a_0(x)_{\max}]$, $[f(x)_{\min}, f(x)_{\max}]$ ve $[q(x)_{\min}, q(x)_{\max}]$ aralıklarıdır. İzgeler salt sürekli kesimlerden oluşmaktadır ve ilgili işlevin yapısına göre (inişli çıkışlı) katlı özdeğerleri olabilir. $f(x)$ işlevinin türevi olan işlev de, etki ettiği işlevi $f'(x)$ ile çarpan bir işleç olarak tanımlanıp \hat{f}' ile gösterilebilir. (3.36)'da bulunan sıradan türevli denklemin bu işleçler türünden bir işlecin $u_1(x)$ işlevi üzerine etkisi,

$$\left(\hat{f}' + \hat{a}_0 \hat{f}\right)u_1(x) = \hat{q}u_1 \quad (3.39)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemin kartezyen uzayındaki karşılığı, her bir işleci kendi dizey gösterilimi ile, $u_1(x)$ işlevi ise \mathbf{e}_1 ile yani ilk elemanı 1, diğer elemanları 0 olan yöneyle değiştirilerek oluşturulabilir. Diğer bir deyişle, $\mathbf{M}(\hat{f})$, f işlecinin dizey gösterilimini simgelemek üzere aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\left[\mathbf{M}(\hat{f}') + \mathbf{M}(\hat{a}_0)\mathbf{M}(\hat{f})\right]\mathbf{e}_1 = \mathbf{M}(\hat{q})\mathbf{e}_1 \quad (3.40)$$

Burada yöney ve dizeyler sonsuz boyutludur. Bu yöney ve dizeyler yerine yaklaştırım amaçlı olarak sonlu boyutta işlem yapabilmek için $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ işlevleri tarafından örtülen ve \mathcal{H}_n ile gösterilen \mathcal{H} uzayının n boyutlu bir altuzayında çalışılacaktır. Bu durumda, yukarıdaki dizeylerin sol üst köşelerindeki $n \times n$ kesimleri alınarak boyut indirgemesi yapılmalıdır. Yani, (3.40) denklemi

$$\left[\mathbf{M}^{(n)}(\hat{f}') + \mathbf{M}^{(n)}(\hat{a}_0)\mathbf{M}^{(n)}(\hat{f})\right]\mathbf{e}_1^{(n)} = \mathbf{M}^{(n)}(\hat{q})\mathbf{e}_1^{(n)} \quad (3.41)$$

biçiminde yazılabilir.

\mathcal{H}_n uzayında \hat{x} işlecinin dizey gösterilimi $\mathbf{X}^{(n)}$ olarak gösterilirse, Sendelenimsizlik Kanıtı kullanılarak aşağıdaki yaklaştırım anlatımları yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(n)}(\hat{f}) &\approx f(\mathbf{X}^{(n)}), & \mathbf{M}^{(n)}(\hat{a}_0) &\approx a_0(\mathbf{X}^{(n)}), \\ \mathbf{M}^{(n)}(\hat{f}') &\approx f'(\mathbf{X}^{(n)}), & \mathbf{M}^{(n)}(\hat{q}) &\approx q(\mathbf{X}^{(n)}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyi bakışık olduğundan izgesel gösterilimi, \mathbf{x}_i , i . özdeğer olan ξ_i 'ye karşılık gelen birim boyulu özyöneş olmak üzere,

$$\mathbf{X}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T, \quad (3.43)$$

anlatımıyla verilir. Bu anlatım ile aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{X}^{(n)}) &= \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T, & q(\mathbf{X}^{(n)}) &= \sum_{i=1}^n q(\xi_i) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \\ a_0(\mathbf{X}^{(n)}) &= \sum_{i=1}^n a_0(\xi_i) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T, & f(\mathbf{X}^{(n)}) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \end{aligned} \quad (3.44)$$

(3.44) denkleminde tanımlanan bağıntılar (3.41) denkleminde yerine konulduğunda aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\sum_{i=1}^n [f'(\xi_i) + a_0(\xi_i) f(\xi_i) - q(\xi_i)] (\mathbf{x}_i^T \mathbf{e}_1^{(n)}) \mathbf{x}_i = 0 \quad (3.45)$$

Yukarıdaki denkleminde, özyöneşlerin doğrusal bağımsız olmasından dolayı, $(\mathbf{x}_i^T \mathbf{e}_1^{(n)})$ sayılının (ing: scalar) 0 olmaması durumunda, özyöneşlerin katsayısı olan sayılar, ayrı ayrı 0'a eşit olmaktadır. Böylece, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$f'(\xi_i) + a_0(\xi_i) f(\xi_i) - q(\xi_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.46)$$

(3.46) sırasayılı eşitlikte n tane denklem bulunmaktadır. Bununla birlikte başlangıç koşuluyla beraber toplamda $(n+1)$ koşul bulunmaktadır. Bu koşulları sağlayacak biçimde en yüksek üslü terimi x^n olan bir çokterimli oluşturulabilir ve $f(x)$ için n . kerteden bir yaklaşımı olarak düşünülebilir. Bu amaçla, sıradan türevli denklemin sayısal çözümü için değişmez terimi bilinen f_0 olan, diğer terimlerin katsayıları ise, şimdilik bilinmeyen f_1, \dots, f_n simgeleriyle gösterilen aşağıdaki yapı önerilebilir.

$$p(x) \equiv \sum_{i=0}^n f_i x^i \quad (3.47)$$

Bu eşitlikteki $p(x)$ çözümü (3.46) sırasayılı denkleminde yerine konulduğunda aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$[f_1 + 2f_2 x + \dots + n f_n x^{n-1}] + a_0(x) [f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n] - q(x) = 0 \quad (3.48)$$

$p(x)$ çözümü, $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin özdeğerleri olan düğüm noktalarında (ing: node) aranacaktır. Burada bilinmeyen f_i , ($1 \leq i \leq n$) katsayıları için oluşturulan (3.46)'daki denklem takımı dizey ve yöneyler yapısında aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{f}^T \equiv [f_1 \quad \dots \quad f_n], \quad \mathbf{a}^T \equiv [a_0(\xi_1) \quad \dots \quad a_0(\xi_n)], \quad \mathbf{q}^T \equiv [q(\xi_1) \quad \dots \quad q(\xi_n)]$$

$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_n & \dots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 \equiv \begin{bmatrix} a_0(\xi_1)\xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0(\xi_2)\xi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0(\xi_n)\xi_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Buna göre (3.46) denklemi aşağıdaki biçimde dizey ve yöneyler türünden yazılabilir.

$$(\mathbf{K}_1\mathbf{V} + \mathbf{VK}_2)\mathbf{f} + \mathbf{a} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

(3.50) sırasayılı denklemde özdeğerler ayırık olduğundan \mathbf{V} dizeyi evirtilebilir niteliktedir. $(\mathbf{K}_1\mathbf{V} + \mathbf{VK}_2)$ dizeyinin de evirtilebilir olması için $a_0(x)$ işlevinin uygun yapıda olması gerekir. Eğer bu uygunluk varsa (3.50) denkleminin çözümü eşsiz olup

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K}_1\mathbf{V} + \mathbf{VK}_2)^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{a}) \quad (3.51)$$

anlatımıyla verilir.

Son bağıntının sağ yanında herşey bilinmektedir. Dolayısı ile, f_i katsayıları hesaplanabilir. Bu katsayıların, asıl işlevin Maclaurin katsayıları ile karşılaştırılması yaklaşırtırımın niteliğini belirleyecektir.

3.1.1.1 Uygulama

Bu bölümde doğrusal birinci kerteden sıradan türevli başlangıç koşullu denklemlerin Sendelenimsizlik yaklaşımı kullanılarak sayısal çözümleri elde edilecektir. Hesaplamalar için örgü noktaları, genel terimi $u_i(x)$ ile $xu_j(x)$, ($1 \leq i, j \leq n$)

işlevlerinin iççarpımı olarak oluşturulan $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin $[0,1]$ aralığındaki özdeğerleri olarak alınmıştır. Türevli denklemlerin çözümleri için sonuçlar, 5 düğüm noktasında (ing: node) gösterilecektir.

Aşağıdaki biçimde tanımlanan birbirine dik ve boyları 1 olan taban yöneyleri tarafından örtülen \mathcal{H}_5 uzayında çalışılacaktır.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1, & u_2(x) &= \sqrt{3}(2x-1), & u_3(x) &= \sqrt{5}(6x^2-6x+1), \\ u_4(x) &= \sqrt{7}(20x^3-30x^2+12x-1), & u_5(x) &= 210x^4-420x^3+270x^2-60x+3 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Bu uzayda \hat{x} işlecinin dizey gösterilimi $\mathbf{X}^{(5)}$ ile simgelenirse, dizeyin öğeleri, $u_i(x)$ ile $xu_j(x)$, $(1 \leq i, j \leq 5)$ işlevlerinin iççarpımı olarak oluşturulmuştur. Buna göre $\mathbf{X}^{(5)}$ dizeyinin açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{X}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.288675 & 0 & 0 & 0 \\ 0.288675 & 0.5 & 0.258199 & 0 & 0 \\ 0 & 0.258199 & 0.5 & 0.253546 & 0 \\ 0 & 0 & 0.253546 & 0.5 & 0.251976 \\ 0 & 0 & 0 & 0.251976 & 0.5 \end{bmatrix}_{5 \times 5} \quad (3.53)$$

$\mathbf{X}^{(5)}$ dizeyi, bakışık, artı tanımlı ve 3-köşegenli bir dizeydir. Bu dizeyin özdeğerleri, 0.0469, 0.2307, 0.5000, 0.7692 ve 0.9531'dir.

Örnek 1

İlk denklem birinci kereden, doğrusal, sağyansız, değişmez katsayılı, başlangıç koşullu bir STD olup açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$y'(x) - y(x) = 0, \quad y(0) = 1 \quad (3.54)$$

Bu denklemin gerçek çözümü $y(x) = e^x$ biçimindedir. Burada $a_0(x) = -1$, $q(x) = 0$ ve $f_0 = 1$ 'dir. Bu denklemin sayısal çözümü için

$$p(x) = \sum_{i=0}^5 f_i x^i \quad (3.55)$$

yapısı önerilmektedir. \mathbf{V} , \mathbf{K}_1 , ve \mathbf{K}_2 dizeyleri aşağıdaki biçimde oluşturulur.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0469 & 0.0022 & 0.0001 & 4.84 \times 10^{-6} \\ 1 & 0.2307 & 0.0532 & 0.0122 & 0.002835 \\ 1 & 0.5000 & 0.2500 & 0.1250 & 0.062500 \\ 1 & 0.7692 & 0.5917 & 0.4551 & 0.350134 \\ 1 & 0.9531 & 0.9083 & 0.8657 & 0.825154 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -0.0469 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2307 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7692 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9531 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

Buna göre sayısal çözümün katsayıları olan f_i , ($1 \leq i \leq 5$) değerleri

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K}_1 \mathbf{V} + \mathbf{V} \mathbf{K}_2)^{-1} (-\mathbf{a}) \tag{3.57}$$

eşitliğinden

$$\mathbf{f} = [1.00005 \quad 0.49919 \quad 0.17027 \quad 0.03483 \quad 0.01393]^T$$

olarak bulunur. Böylece sayısal çözüm

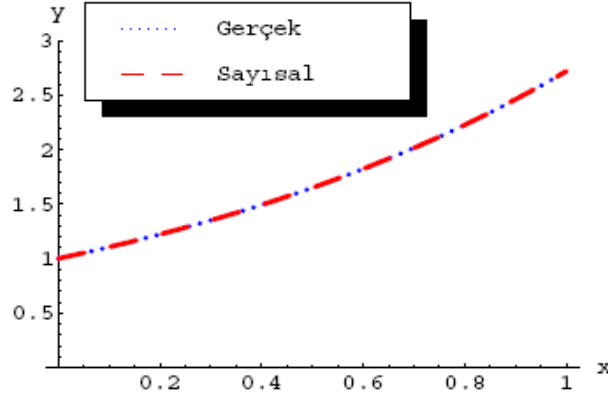
$$p(x) = (1 + 1.00005x + 0.49919x^2 + 0.17027x^3 + 0.03483x^4 + 0.01393x^5) \tag{3.58}$$

biçiminde yazılabilir. **Çizelge 3.1**'de sayısal ve gerçek çözümün karşılaştırmalı olarak değerleri verilmektedir.

Çizelge 3.1 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm
0.0469	1.0480277	1.0480289
0.2307	1.2595636	1.2595603
0.5000	1.6487212	1.6487229
0.7692	2.1581139	2.1581123
0.9531	2.5937116	2.5937127

Çizelgeden görüldüğü üzere sayısal ve gerçek çözüm değerleri birbirine oldukça yakındır. Sonuçlar 6 basamak doğruluk sağlamaktadır. Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi **Şekil 3.1**'de yer almaktadır.



Şekil 3.1 : $y = e^x$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 2

İkinci denklem, yine sağ yansız ve değişmez katsayılı olan

$$y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1 \quad (3.59)$$

denklemdir. Bu denklemin gerçek çözümü aşağıda verilmektedir.

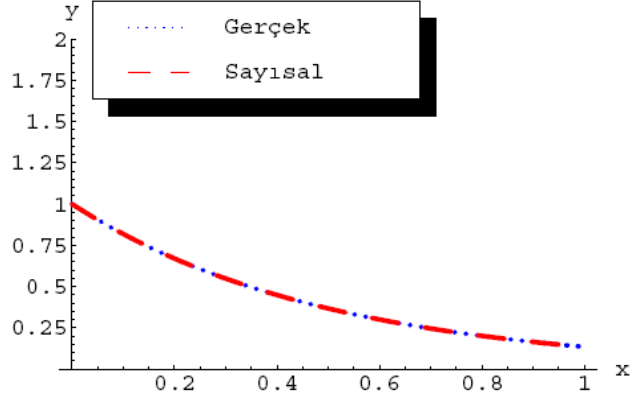
$$y(x) = e^{-2x} \quad (3.60)$$

Çizelge 3.2'de gerçek ve sayısal çözüm için elde edilen değerler yer almaktadır.

Çizelge 3.2 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm
0.0469	0.910446	0.910462
0.2307	0.630318	0.630296
0.5000	0.367879	0.367904
0.7692	0.214710	0.214686
0.9531	0.148647	0.148665

Bu çizelgeden görüldüğü üzere, sayısal çözüm 4 basamağa kadar tutarlıdır. Bu çözüm ile bir önceki örnekteki çözüm karşılaştırıldığında türevli denklemler ve çözümler birbirine benzer olsalar da çözümlerin doğruluğu biraz farklılık göstermektedir. Bunun nedeni, üstel işlevin yapısından kaynaklanmaktadır. Üstel işlevdeki x değişkeninin katsayı değeri arttıkça, işlevin çiziminin eğriliği (ing: curvature) de artmaktadır. Dolayısıyla sayısal çözüm üstel işlevin yapısına göre gerçek çözümden uzaklaşmaktadır. Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi Şekil 3.2'de bulunmaktadır.



Şekil 3.2 : $y = e^{-2x}$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 3

Bu örnekte aşağıda açık yapısı verilen değişken katsayılı, sağyansız bir sıradan türevli denklem incelenecektir.

$$y'(x) + xy(x) = 0, \quad y(0) = 1 \quad (3.61)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = e^{-x^2/2} \quad (3.62)$$

biçimindedir.

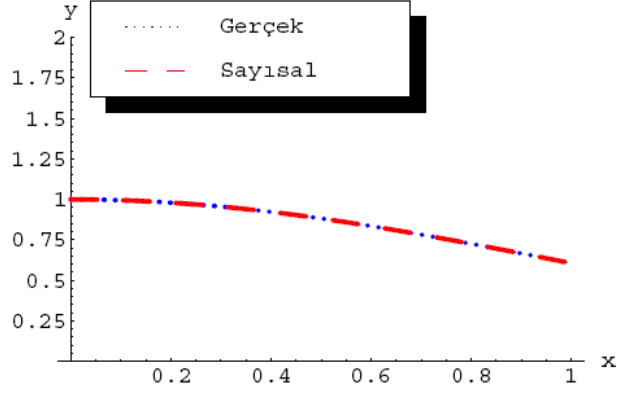
Bu denklemin gerçek ve sayısal çözümlerinin karşılaştırmalı çizelgesi Çizelge 3.3'te yer almaktadır.

Çizelge 3.3 : Örnek 3 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm
0.0469	0.998900	0.998896
0.2307	0.973725	0.973730
0.5000	0.882497	0.882493
0.7692	0.743891	0.743893
0.9531	0.634962	0.634961

Çizelgeden yaklaşımın kertesinin 5 olduğunu gözlemlenmektedir. Dolayısıyla değişken katsayılı bir denklem için de iyi bir sonuç elde edilmiştir.

Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi Şekil 3.3'te bulunmaktadır.



Şekil 3.3 : $y(x) = e^{-x^2/2}$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 4

Değişken katsayılı bir başka denklemin açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$y'(x) + \sin(x)y(x) = 0, \quad y(0) = 2 \quad (3.63)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = 2e^{\cos x - 1} \quad (3.64)$$

işlevidir.

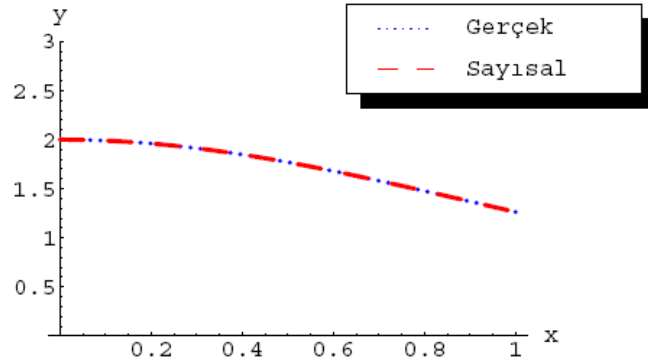
Gerçek ve sayısal çözümlerin karşılaştırmalı değerleri Çizelge 3.4'te verilmektedir.

Çizelge 3.4 : Örnek 4 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm
0.0469	1.997801058	1.9977937
0.2307	1.947679782	1.9476848
0.5000	1.769557902	1.7695603
0.7692	1.509216170	1.5092068
0.9531	1.312999357	1.3130095

Çizelgeden yaklaşımın anlamlı basamak sayısının 4 olduğu görülmektedir. Bundan sonraki örneklemler, sağyanlı türevli denklemler için olacaktır.

Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi Şekil 3.4'te yer almaktadır.



Şekil 3.4 : $y(x) = 2e^{\cos x - 1}$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 5

Aşağıda yer alan sıradan türevli denklem, değişmez katsayılı, sağ yanlı bir başlangıç sorunudur (ing: problem).

$$y'(x) + 4y(x) = 20, \quad y(0) = 2 \quad (3.65)$$

Bu problemin gerçek çözümü,

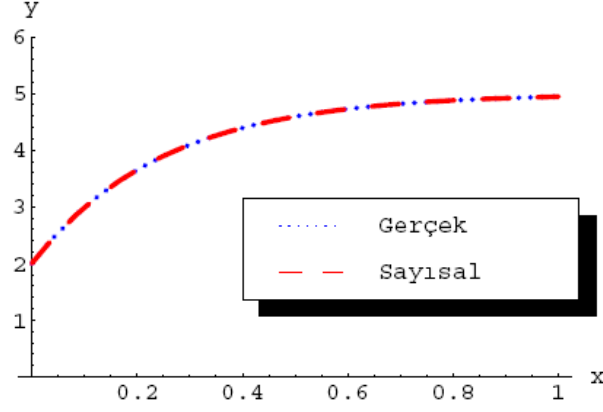
$$y(x) = 5 - 3e^{-4x} \quad (3.66)$$

olarak hesaplanmaktadır. Sayısal ve gerçek çözümün sonuçları Çizelge 3.5'te gösterilmektedir.

Çizelge 3.5 : Örnek 5 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm
0.0469	2.51326	2.51203
0.2307	3.80810	3.80978
0.5000	4.59399	4.59215
0.7692	4.86170	4.86356
0.9531	4.93371	4.93216

Çizelgeden (3.65) denkleminin yaklaşık çözümünün, gerçek çözümle ondalık kesiminde 2 basamak kadar tutarlı olduğu gözlemlenmektedir. Buradaki doğruluğun diğer çözümlere göre az olmasının nedeni, gerçek çözümde yer alan üstel işlevin yapısındaki x değişkeninin katsayısında 4 değerinin bulunmasıdır. Dolayısıyla, yaklaşık çözüm, gerçek çözümden çok az bir değişiklik göstermektedir. Ancak bu çizimler birlikte çizildiğinde, işlevlerin çizimleri eşleşmektedir. Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi Şekil 3.5'te yer almaktadır.



Şekil 3.5 : $y(x) = 5 - 3e^{-4x}$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 6

Son denklem değişmez katsayılı bir denklem olup, sağ yanı x 'e bağlı bir işlemdir.

$$y'(x) - 4y(x) = \cos x, \quad y(0) = 1 \quad (3.67)$$

Denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = \frac{1}{17}(21e^{4x} - 4\cos x + \sin x) \quad (3.68)$$

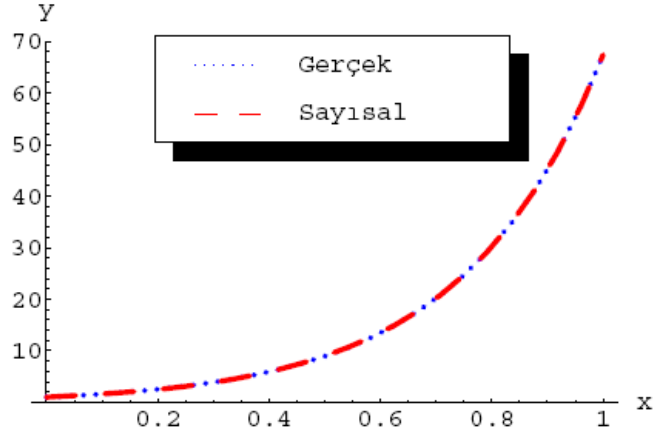
olmaktadır. Bu denklemin sayısal ve gerçek çözümlerinin karşılaştırmalı çizelgesi Çizelge 3.6'da yer almaktadır.

Çizelge 3.6 : Örnek 6 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm
0.0469	1.25798	1.29379
0.2307	2.89361	2.85366
0.5000	8.94937	8.99647
0.7692	26.6677	26.6461
0.9531	55.8175	55.8789

Burada, sayısal çözümün doğruluğu 1 basamak düzeyindedir. Buradaki yaklaşımın derecesinin az olmasının nedeni, yine üstel işlevde bulunan x değişkeninin katsayı değerinden kaynaklanmaktadır.

Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi Şekil 3.6'da bulunmaktadır.



Şekil 3.6 : $y(x) = \frac{1}{17}(21e^{4x} - 4\cos x + \sin x)$, $[0,1]$ aralığı.

3.1.2 İkinci kereden doğrusal sağ yanlı sıradan türevli denklemler

Bu bölümde, ikinci kereden, doğrusal, sağyanlı, başlangıç koşullu ve genel yapısı aşağıda verilen sıradan türevli denklemin $[0,1]$ aralığında sayısal çözümü sendelenimsizlik yaklaşımını ile hesaplanacaktır.

$$f''(x) + a_1(x)f'(x) + a_2(x)f(x) = q(x), \quad f(0) = f_0, \quad f'(0) = f_1 \quad (3.69)$$

Bir önceki bölümde olduğu gibi, bu aralık üzerinde karesi tümlevlenebilir işlevlerin \mathcal{H} Hilbert Uzayında çalışılacaktır. \mathcal{H} uzayı sonsuz boyutlu olduğundan, birbirine dik ve boyları 1 olan n elemanlı $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ işlevlerince örtülen ve \mathcal{H}_n ile gösterilen \mathcal{H} uzayının n boyutlu alt uzayında çalışılacaktır. Burada $u_1(x) = 1$ olup, bu uzaydaki her bir işlev sırasıyla $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ taban takımının öğelerinden üretilmektedir. Bu bölümde $a_1(x), a_2(x), f(x), f'(x), f''(x)$ ve $q(x)$ işlevleri yerine, sırasıyla, $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{f}, \hat{f}', \hat{f}''$ ve \hat{q} ile gösterilen ve üzerine uygulandıkları işlevi sırasıyla $a_1(x), a_2(x), f(x), f'(x), f''(x)$ ve $q(x)$ değerleri ile çarpan cebirsel çarpma işlemleri kullanılacaktır. Burada yine x bağımsız değişkeni yerine \hat{x} ile gösterilen ve üzerine uygulandığı işlevi x değeri ile çarpan cebirsel çarpma işlemi ile çalışılacaktır. Bu işlemin izgesi $[0,1]$ aralığıdır. Dolayısı ile sürekli bir izgesi vardır ve katlı özdeğer yoktur. Diğer işlemlerin izgeleri ise sürekli alt kesimlerde oluşmaktadır ve işlevin yapısına bağlı olarak katlı özdeğerleri bulunabilir. (3.69) denklemindeki sıradan türevli denklemin, $u_1(x)$ işlevi üzerine etkisi kullanılan işlemler türünden aşağıdaki biçimde anlatılabilir.

$$\left(\widehat{f}'' + \widehat{a}_1 \widehat{f}' + \widehat{a}_2 \widehat{f}\right)u_1(x) = \widehat{q}u_1 \quad (3.70)$$

Bu denklemin n boyutlu \mathcal{K}_n kartezyen uzayındaki karşılığı

$$\left[\mathbf{M}^{(n)}\left(\widehat{f}''\right) + \mathbf{M}^{(n)}\left(\widehat{a}_1\right)\mathbf{M}^{(n)}\left(\widehat{f}'\right) + \mathbf{M}^{(n)}\left(\widehat{a}_2\right)\mathbf{M}^{(n)}\left(\widehat{f}\right)\right]\mathbf{e}_1^{(n)} = \mathbf{M}^{(n)}\left(\widehat{q}\right)\mathbf{e}_1^{(n)} \quad (3.71)$$

biçiminde yazılabilir. \mathcal{H}_n uzayındaki \widehat{x} işlecinin düzey gösterilimi olarak gösterilirse $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyi, aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{X}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T, \quad (3.72)$$

Burada \mathbf{x}_i , i . özdeğer olan ξ_i 'ye karşılık gelen birim boylu özyöneüdür. (3.44) denklemindeki işlemlere ek olarak Sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak aşağıdaki anlatımlar yazılabilir.

$$\begin{aligned} a_1\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) &= \sum_{i=1}^n a_1\left(\xi_i\right)\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \\ a_2\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) &= \sum_{i=1}^n a_2\left(\xi_i\right)\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \\ f''\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) &= \sum_{i=1}^n f''\left(\xi_i\right)\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \end{aligned} \quad (3.73)$$

(3.44) ve (3.73) denklemlerinde tanımlanan anlatımlar (3.71) denkleminde yerine konulduğunda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\sum_{i=1}^n \left[f''\left(\xi_i\right) + a_1\left(\xi_i\right)f'\left(\xi_i\right) + a_2\left(\xi_i\right)f\left(\xi_i\right) - q\left(\xi_i\right) \right] \left(\mathbf{x}_i^T \mathbf{e}_1^{(n)}\right)\mathbf{x}_i = 0 \quad (3.74)$$

Bu denklemde özyöneyleler doğrusal bağımsız olduğundan $\left(\mathbf{x}_i^T \mathbf{e}_1^{(n)}\right)$ sayılıının (ing: scalar) 0 olmaması durumunda, özyöneylelerin katsayısı olan sayıllar, ayrı ayrı 0'a eşit olmaktadır. Böylece, aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$f''\left(\xi_i\right) + a_1\left(\xi_i\right)f'\left(\xi_i\right) + a_2\left(\xi_i\right)f\left(\xi_i\right) - q\left(\xi_i\right) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.75)$$

(3.69) denkleminin sayısal çözümü için aşağıdaki yapı önerilebilir.

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f_i x^i \quad (3.76)$$

Bu eşitlikteki $p(x)$ çözümü (3.69) sırasayılı denklemde yerine konup düzenlendiğinde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$q(x) = a_2(x)f_0 + (a_1(x) + a_2(x)x)f_1 + (2 + 2a_1(x)x + a_2(x)x^2)f_2 + \dots + (n(n-1)x^{n-2} + na_1(x)x^{n-1} + a_2(x)x^n)f_n \quad (3.77)$$

Burada f_0 ve f_1 değerleri bilinmektedir. Diğer bilinmeyen $(n-1)$ tane terimi bulmak için (3.77) denkleminde bulunan denklem takımını dizey ve yöneyler türünden açıklamak gerekir. Buna göre $(1 \leq i \leq n-1)$ olmak üzere aşağıdaki dizey ve yöneyler tanımlanabilir.

$$\mathbf{K}_{1(i,j)} = \begin{cases} a_2(\xi_{i+1})\xi_{i+1} & i = j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{2(i,j)} = \begin{cases} a_1(\xi_{i+1}) & i = j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{3(i,j)} = \begin{cases} i+1 & i = j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{4(i,j)} = \begin{cases} i(i+1) & i = j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{n-1} \\ \xi_3 & \xi_3^2 & \dots & \xi_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{n-2} \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 & \dots & \xi_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^{n-2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_{(i,1)} = [f_0 a_2(\xi_{i+1}) + f_1 (a_1(\xi_{i+1}) + a_2(\xi_{i+1})\xi_{i+1})],$$

$$\mathbf{q}^T = [q(\xi_2) \quad \dots \quad q(\xi_n)] \quad (3.78)$$

(3.75) sırasayılı denklemde özdeğerler ayrık olduğundan \mathbf{V}_1 ve \mathbf{V}_2 dizeyleri evirtilebilir niteliktedir. $\mathbf{K}_1\mathbf{V}_1 + \mathbf{K}_2\mathbf{V}_1\mathbf{K}_3 + \mathbf{V}_2\mathbf{K}_4$ dizeyinin de evirtilebilir olması, $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ işlevlerinin yapısına bağlıdır. Dizeyin evirtilebilir olması durumunda bilinmeyen f_i değerlerini içeren f yöneyi

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K}_1\mathbf{V}_1 + \mathbf{K}_2\mathbf{V}_1\mathbf{K}_3 + \mathbf{V}_2\mathbf{K}_4)^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{a}) \quad (3.79)$$

bağıntısı ile bulunur.

3.1.2.1 Uygulama

Bu bölümde aşağıdaki biçimde tanımlanan birbirine dik ve boyları 1 olan taban yöneyleri tarafından örtülen \mathcal{H}_7 uzayında çalışılacaktır.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1, & u_2(x) &= \sqrt{3}(2x-1), & u_3(x) &= \sqrt{5}(6x^2-6x+1), \\ u_4(x) &= \sqrt{7}(20x^3-30x^2+12x-1), & u_5(x) &= 30\left(7x^4-14x^3+9x^2-2x+\frac{1}{10}\right), \\ u_6(x) &= 30\sqrt{11}\left(\frac{42}{5}x^6-21x^5+\frac{56}{3}x^4-7x^3+x-\frac{1}{30}\right), \\ u_7(x) &= 42\sqrt{13}\left(22x^6-66x^5-75x^4-40x^3+10x^2-x+\frac{1}{42}\right) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Burada \hat{x} işlecinin düzey gösterilimi olan ve $(1 \leq i, j \leq 7)$ olmak üzere genel terimi $u_i(x)$ ile $xu_j(x)$ işlevlerinin iççarpımı olarak oluşturulan bakışık $\mathbf{X}^{(7)}$ dizeyinin açık yapısı aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{X}^{(7)} = 0 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.289 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.289 & 0.5 & 0.258 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.258 & 0.5 & 0.254 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.254 & 0.5 & 0.252 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.252 & 0.5 & 0.251 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.251 & 0.5 & 0.250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.250 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$\mathbf{X}^{(7)}$ dizeyi artı tanımlı ve 3-köşegenli bir dizeydir. Bu dizeyin özdeğerleri, 0.0254, 0.1292, 0.2970, 0.5, 0.703, 0.8707 ve 0.9745'dir.

Örnek 1

İlk denklem, 2. kereden değişmez katsayılı, sağ yansız, başlangıç koşullu

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -5 \quad (3.82)$$

denklemdir. Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = 3e^{-2x} + e^x \quad (3.83)$$

olarak hesaplanmaktadır. Gerçek çözümün Maclaurin serisi açılımı

$$y(x) = 4 - 5x + 6.5x^2 - 3.83333x^3 + 2.04167x^4 - 0.791667x^5 + 0.268056x^6 - 0.0759921x^7 + O(x^8) \quad (3.84)$$

olmaktadır. Sendelenimsizlik Kanıtı kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ise

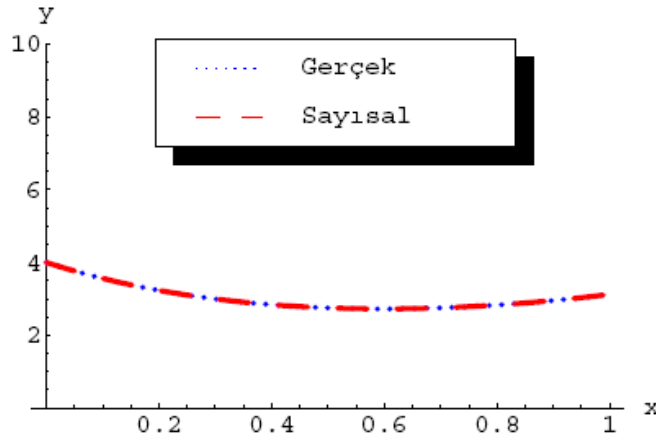
$$f(x) = 4 - 5x + 6.49992x^2 - 3.83192x^3 + 2.0324x^4 - 0.762653x^5 + 0.220082x^6 - 0.0335483x^7 \quad (3.85)$$

olmaktadır. **Çizelge 3.7**'de (3.82) denklemi için elde edilen gerçek ve yaklaşık işlevlerin $X^{(7)}$ dizeyinin özdeğerlerinde aldığı değerler karşılaştırmalı olarak yer almaktadır.

Çizelge 3.7 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
0.0254	3.87691622	3.87691619	2.92×10^{-8}
0.1292	3.45465617	3.45465622	4.93×10^{-8}
0.2970	3.00200625	3.00200617	7.39×10^{-8}
0.5000	2.75235959	2.75235970	1.09×10^{-7}
0.7030	2.75512597	2.75512580	1.69×10^{-7}
0.8707	2.91449451	2.91449482	3.17×10^{-7}
0.9745	3.07718665	3.07718808	1.42×10^{-6}

Çizelgeden görüldüğü üzere yaklaşık çözüm neredeyse 6 basamağa kadar doğruluk sağlamaktadır. Sayısal ve gerçek çözümün çizimleri **Şekil 3.7**'de bulunmaktadır.



Şekil 3.7 : $y(x) = 3e^{-2x} + e^x$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 2

Buradaki denklem yine 2. kereden değişmez katsayılı, sağ yansız, başlangıç koşullu

$$y'' - 4y' + 8y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad (3.86)$$

denklemdir. Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = e^{2x} \sin 2x \quad (3.87)$$

olarak hesaplanmaktadır. Gerçek çözümün Maclaurin serisi açılımı

$$y(x) = 2x + 4x^2 + 2.67x^3 + 0x^4 - 1.067x^5 - 0.711x^6 - 0.2032x^7 + O(x^8) \quad (3.88)$$

olmaktadır. Sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ise

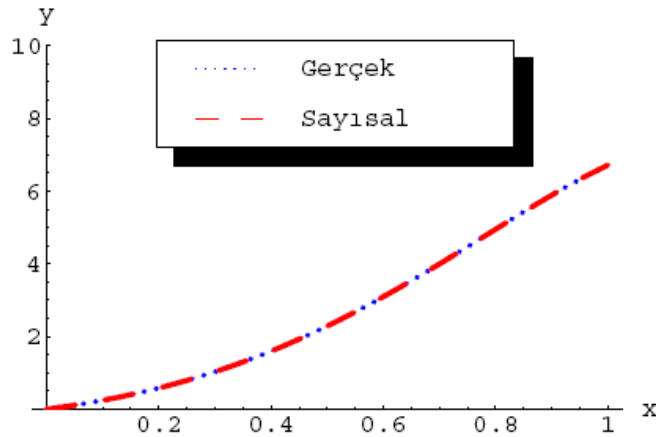
$$f(x) = 2x + 3.99x^2 + 2.69x^3 - 0.161x^4 - 0.636147x^5 - 1.26x^6 + 0.088x^7 \quad (3.89)$$

biçimindedir. **Çizelge 3.8**'de (3.86) denklemi için elde edilen gerçek ve yaklaşık değerler karşılaştırmalı bir biçimde yer almaktadır.

Çizelge 3.8 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
0.0254	0.053526	0.053525	6.56×10^{-7}
0.1292	0.330988	0.330989	6.03×10^{-7}
0.2970	1.014092	1.014092	1.66×10^{-7}
0.5000	2.287355	2.287355	1.34×10^{-7}
0.7030	4.023606	4.023605	4.91×10^{-7}
0.8707	5.623108	5.623112	3.93×10^{-6}
0.9745	6.525861	6.525830	3.14×10^{-5}

Çizelge incelendiğinde yaklaşık sonuç neredeyse 10^{-7} kertesinde tutarlıdır. Buradan yaklaşımın gerçekten de çok iyi olduğu gözlemlenebilmektedir. Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi **Şekil 3.8**'de bulunmaktadır.



Şekil 3.8 : $y(x) = e^{2x} \sin 2x$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 3

İncelenilecek denklem, 2. kereden değişken katsayılı, sağyansız, başlangıç koşullu

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (3.90)$$

denklemdir. Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = \sqrt{x}J(1, 2\sqrt{x}) \quad (3.91)$$

biçimindedir. Gerçek çözümün Maclaurin serisi açılımı

$$y(x) = x - 0.5x^2 + 0.0833333x^3 - 0.00694444x^4 + 0.000347222x^5 - 0.0000115741x^6 + 2.75573 \times 10^{-7}x^7 + O(x^8) \quad (3.92)$$

olmaktadır. Sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ise

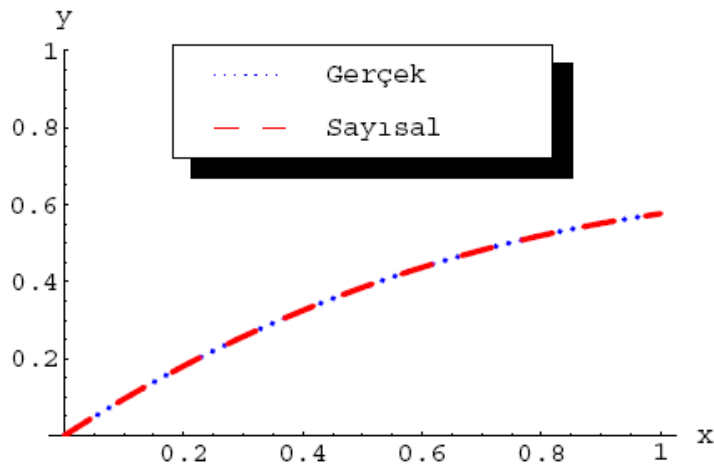
$$f(x) = x - 0.5x^2 + 0.0833333x^3 - 0.00694444x^4 + 0.000347208x^5 - 0.000011553x^6 + 2.59469 \times 10^{-7}x^7 \quad (3.93)$$

biçimindedir. **Çizelge 3.9**'da (3.90) denklemini için elde edilen gerçek ve yaklaşık değerler karşılaştırmalı bir biçimde yer almaktadır.

Çizelge 3.9 : Örnek 3 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
0.0254	0.0251236633761	0.0251236633760	1.50×10^{-14}
0.1292	0.1210615842854	0.1210615842854	2.83×10^{-14}
0.2970	0.2550815125219	0.2550815125219	2.99×10^{-14}
0.5000	0.3849933108722	0.3849933108721	6.26×10^{-14}
0.7030	0.4831781790645	0.4831781790646	7.36×10^{-14}
0.8707	0.5428458859107	0.5428458859105	1.86×10^{-13}
0.9745	0.5708399870329	0.5708399870337	8.21×10^{-13}

Çizelgeden görüldüğü üzere yaklaşık çözümün doğruluğu 10^{-14} düzeyindedir. Bu da yaklaşık çözümün gerçek sonuca oldukça yakın olduğunu göstermektedir. Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi **Şekil 3.9**'da yer almaktadır.



Şekil 3.9 : $y(x) = \sqrt{x}J(1, 2\sqrt{x})$, $[0, 1]$ aralığı.

Örnek 4

Aşağıda 2. kereden değişmez katsayılı, sağyansız, başlangıç koşullu türevli denklem bulunmaktadır.

$$y'' - y' + \frac{1}{2}y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0 \quad (3.94)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = -e^{x/2} (\cos(x/2) - \sin(x/2)) \quad (3.95)$$

olarak hesaplanmaktadır. Gerçek çözümün Maclaurin serisi açılımı

$$y(x) = -1 + 0.25x^2 + 0.083333x^3 + 0.0104167x^4 - 2.71051 \times 10^{-19}x^5 - 0.000173611x^6 - 0.0000248016x^7 + O(x^8) \quad (3.96)$$

olmaktadır. Sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm

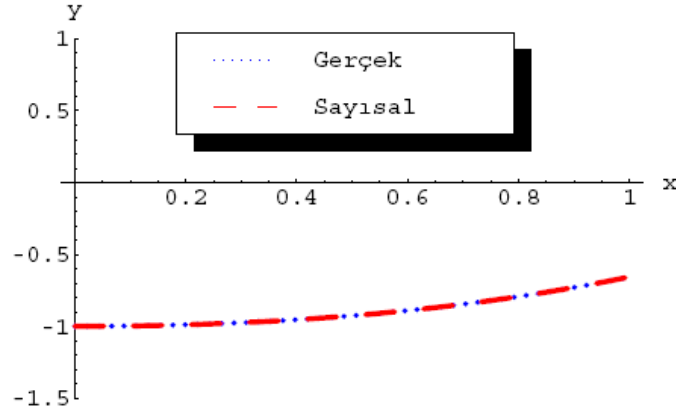
$$f(x) = -1 + 0.25x^2 + 0.0833331x^3 + 0.0104182x^4 - 4.451428 \times 10^{-6}x^5 - 0.000166832x^6 - 0.000029945x^7 \quad (3.97)$$

biçimindedir. Çizelge 3.10'da (3.94) denklemini için elde edilen gerçek ve yaklaşık yer almaktadır.

Çizelge 3.10 : Örnek 4 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
0.0254	-0.999836747317	-0.999836747312	5.21×10^{-12}
0.1292	-0.995641844469	-0.995641844477	7.21×10^{-12}
0.2970	-0.975670360080	-0.975670360072	8.42×10^{-12}
0.5000	-0.926435204148	-0.926435204159	1.09×10^{-11}
0.7030	-0.845012182293	-0.845012182275	1.84×10^{-11}
0.8707	-0.749518461563	-0.749518461606	4.31×10^{-11}
0.9745	-0.676203316530	-0.676203316296	2.34×10^{-10}

Çizelgeden görüldüğü üzere yaklaşık çözümün 10^{-11} kertesinde doğruluğu vardır. Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi Şekil 3.10'da yer almaktadır.



Şekil 3.10 : $y(x) = -e^{x/2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)$, $[0, 1]$ aralığı.

Örnek 5

Sıradaki denklem, 2. kereden değişmez katsayılı, sağ yanlı, başlangıç koşullu

$$y'' + 9y = 6 \cos 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3.98)$$

denklemdir. Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = \cos 3x + x \sin 3x \quad (3.99)$$

biçimindedir. Gerçek çözümün Maclaurin serisi açılımı aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = 1 - 1.5x^2 - 1.125x^4 + 1.0125x^6 + O(x^8) \quad (3.100)$$

Sendelenimsizlik Kanıtı kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ise

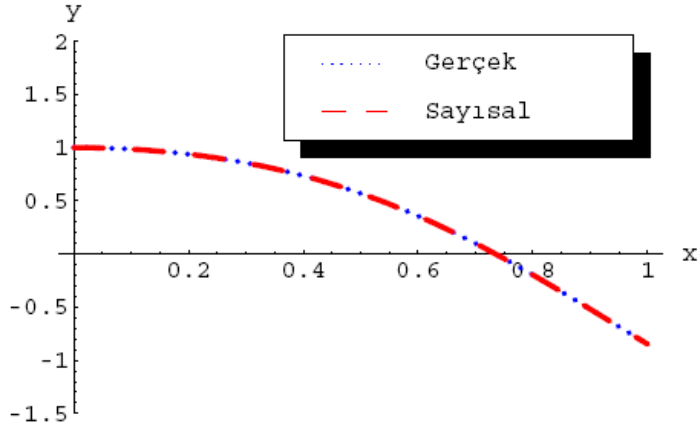
$$f(x) = 1 - 1.49942x^2 - 0.0109467x^3 - 1.04841x^4 - 0.269334x^5 + 1.53618x^6 - 0.556977x^7 \quad (3.101)$$

biçimindedir. Çizelge 3.11'de (3.98) denklemini için elde edilen gerçek ve yaklaşık değerler bulunmaktadır.

Çizelge 3.11 : Örnek 5 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
0.0254	0.9990282	0.9990285	2.23×10^{-7}
0.1292	0.9746385	0.9746384	1.88×10^{-7}
0.2970	0.8595346	0.8595345	1.24×10^{-7}
0.5000	0.5694846	0.5694854	7.25×10^{-7}
0.7030	0.0912396	0.0912381	1.51×10^{-6}
0.8707	-0.4234908	-0.4234881	2.74×10^{-6}
0.9745	-0.7656387	-0.7656498	1.10×10^{-5}

Çizelgeden görüldüğü üzere yaklaşık çözüm 6 basamak doğruluk sağlamaktadır. Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi Şekil 3.11’de yer almaktadır.



Şekil 3.11 : $y(x) = \cos 3x + x \sin 3x$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 6

Aşağıda 2. kereden değişmez katsayılı, sağ yanlı, başlangıç koşullu denklem verilmektedir.

$$y'' + 1.5y' - y = 12x^2 + 6x^3 - x^4, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -8 \quad (3.102)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = 4e^{-2x} + x^4 \quad (3.103)$$

olarak hesaplanmaktadır. Gerçek çözümün Maclaurin serisi açılımı

$$y(x) = 4 - 8x + 8x^2 - 5.33333x^3 + 3.66667x^4 - 1.06667x^5 + 0.35555x^6 - 0.101587x^7 + O(x^8) \quad (3.104)$$

olmaktadır. Sendelenimsizlik Kanıtı kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm

$$f(x) = 4 - 8x + 7.9999x^2 - 5.33149x^3 + 3.65452x^4 - 1.02847x^5 + 0.29212x^6 - 0.0452514x^7 \quad (3.105)$$

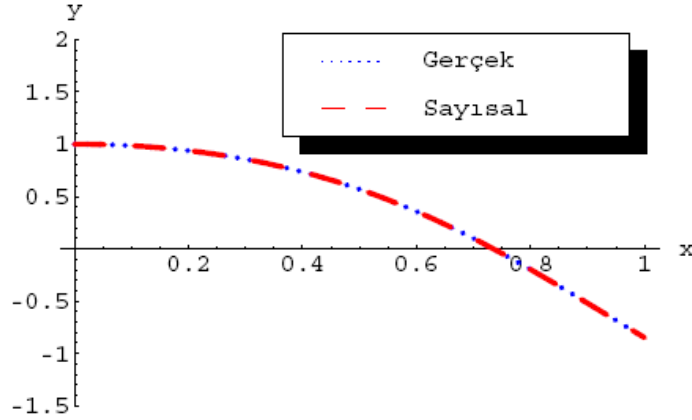
biçimindedir.

Çizelge 3.12’de (3.102) denklemi için elde edilen gerçek ve yaklaşık değerler karşılaştırmalı olarak yer almaktadır.

Çizelge 3.12 : Örnek 6 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
0.0254	3.8015253	3.8015252	3.75×10^{-8}
0.1292	3.0892113	3.0892114	6.74×10^{-8}
0.2970	2.2159046	2.2159045	1.07×10^{-7}
0.5000	1.5340177	1.5340179	1.64×10^{-7}
0.7030	1.2247740	1.2247737	2.55×10^{-7}
0.8707	1.2759242	1.2759247	4.62×10^{-7}
0.9745	1.4716395	1.4716375	1.98×10^{-6}

Çizelgeden görüldüğü üzere yaklaşık çözüm 6 basamağa kadar doğruluk sağlamaktadır. Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi **Şekil 3.12**'de yer almaktadır.



Şekil 3.12 : $y(x) = 4e^{-2x} + x^4$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 7

Bir önceki bölümde birinci kereden sıradan türevli denklemlerde analitik çözümde üstel işlevde bulunan x değişkeninin katsayısı büyük olduğunda, yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsamasının daha az olduğu gözlemlenmişti. Bu durum aşağıda yer alan ikinci kereden değişmez katsayılı, sağyansız, başlangıç koşullu denklem üzerinde incelenecektir.

$$y'' - 10y' + 16y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0 \quad (3.106)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = \frac{1}{6}(4e^{2x} - e^{8x}) \quad (3.107)$$

biçimindedir. Gerçek çözümün Maclaurin serisi açılımı aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$y(x) = 0.5 - 4x^2 - 13.33x^3 - 28x^4 - 45.33x^5 - 60.62x^6 - 69.33x^7 + O(x^8) \quad (3.108)$$

Sendelenimsizlik Kanıtı kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm

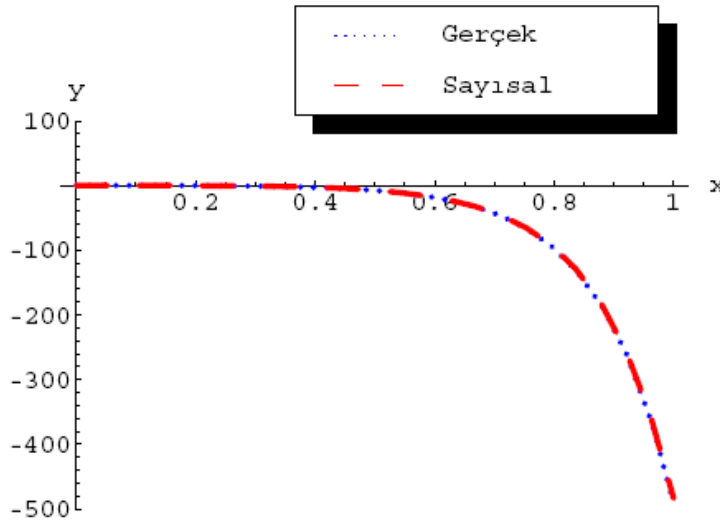
$$f(x) = 0.5 + 31.2x^2 - 544.9x^3 + 2789.1x^4 - 6887.8x^5 + 7853.1x^6 - 3724.8x^7$$

biçimindedir. **Çizelge 3.13**'te (3.106) denklemini için elde edilen gerçek ve yaklaşık değerler karşılaştırmalı olarak yer almaktadır.

Çizelge 3.13 : Örnek 7 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
0.0254	0.49717	0.5123	0.0151
0.1292	0.39464	0.4099	0.0153
0.2970	-0.5870	-0.6039	-0.0168
0.5000	-7.2875	-7.1188	0.1686
0.7030	-43.4179	-42.9253	0.4926
0.8707	-172.880	-170.762	2.1187
0.9745	-400.636	-395.257	5.3793

Çizelgeden de görüldüğü gibi yaklaşık çözüm, gerçek çözüme yakınsamıştır. Ancak bu yakınsama diğer denklemlerdeki gibi çok hızlı değildir. Bunun nedeni üstel işlevin yapısından kaynaklanmaktadır. Sayısal çözüm ile gerçek çözümün karşılaştırmalı çizimi **Şekil 3.13**'te yer almaktadır.



Şekil 3.13 : $y(x) = \frac{1}{6}(4e^{2x} - e^{8x})$, $[0,1]$ aralığı.

3.1.3 Sendelenimsizlik durumunda n. kereden bir sıradan türevli denklemin herhangi bir $[a,b]$ aralığında sayısal çözümü

Bu bölümde Sendelenimsizlik Yaklaşımını kullanılarak n. kereden doğrusal sıradan türevli denklemin sadece birim aralıkta değil, genel bir $[a,b]$ aralığında sayısal çözümü gerçekleştirilecektir.

Aşağıda n . kereden başlangıç koşullu doğrusal sağyanlı Sıradan Türevli Denklem bulunmaktadır.

$$y^{(n)}(x) + b_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + b_{n-1}(x)y'(x) + b_n y(x) = r(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.109)$$

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}.$$

Burada $m > n$ olmak üzere, m boyutlu ve \mathcal{H}_m ile gösterilen \mathcal{H} Hilbert uzayının bir alt uzayında çalışılacaktır. Çözüm için bağımsız değişkende öteleme ve ölçekleme yapılacaktır. Burada x değişkeni yerine t bağımsız değişkeni kullanılacaktır. Bu iki değişken arasında aşağıdaki bağıntı bulunmaktadır.

$$t = \frac{x-a}{b-a}, \quad (3.110)$$

$$x = (b-a)t + a \quad (3.111)$$

(3.109) denklemi t değişkenine göre düzenlenip yeniden yazılabilir ve y işlevi yerine z işlevi kullanılabilir. Burada her işlevin $[0,1]$ aralığında t türünden dönüşümü yazılmalıdır.

$$z^{(n)}(t) + a_1(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)z'(t) + a_n z(t) = q(t), \quad t \in [0,1] \quad (3.112)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_1, \quad \dots \quad z^{(n-1)}(0) = z_{n-1}.$$

Burada kullanılan işlevler aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$a_k(t) = (b-a)^k b_k((b-a)t + a), \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.113)$$

$$q(t) = (b-a)^n r((b-a)t + a) \quad (3.114)$$

(3.112) denklemindeki başlangıç koşulları ise

$$z_k = \frac{(b-a)^k}{k!} y_k, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (3.115)$$

biçiminde olmaktadır. (3.112) denkleminin sayısal çözümü $f(t)$ ile gösterilirse, çözüm için aşağıdaki yapı kullanılabilir.

$$f(t) = z_0 + z_1 t + \dots + z_{n-1} t^{n-1} + \sum_{k=1}^{m-n+1} f_k t^{k+n-1} \quad (3.116)$$

Burada bilinmeyen $(m-n+1)$ tane f_k terimlerinin hesaplanması için $(m-n+1)$ boyutlu dizey ve yöneyler kullanılacaktır. Bu dizey ve yöneyler aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{K}^{(i,j)} = \begin{cases} a_n(\xi_{n-1+i})\xi_{n-1+i}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

$$\mathbf{K}_r^{(i,j)} = \begin{cases} a_{n-r}(\xi_{n-1+i}), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

$$\mathbf{S}_r^{(i,j)} = \begin{cases} \prod_{k=1}^r (n+i-k), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

$$\mathbf{V}_r = \begin{bmatrix} \xi_n^{n-r} & \xi_n^{n-r+1} & \dots & \xi_n^{m-r} \\ \xi_{n+1}^{n-r} & \xi_{n+1}^{n-r+1} & \dots & \xi_{n+1}^{m-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_m^{n-r} & \xi_m^{n-r+1} & \dots & \xi_m^{m-r} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_n^T = [a_n(\xi_n) \quad \dots \quad a_n(\xi_m)],$$

$$\mathbf{u}^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0],$$

$$\mathbf{q}^T = [q(\xi_n) \quad \dots \quad q(\xi_m)],$$

$$\mathbf{a} = z_0 \mathbf{a}_n + \sum_{i=1}^{n-1} z_i \left[\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_{n-i+1} + i \mathbf{K}_1 \mathbf{V}_{n-i+1} + i(i-1) \mathbf{K}_2 \mathbf{V}_{n-i+2} \right. \\ \left. + i(i-1)(i-2) \mathbf{K}_3 \mathbf{V}_{n-i+3} + \dots + i! \mathbf{K}_i \mathbf{V}_n \right] \cdot \mathbf{u} \quad (3.117)$$

f_k terimlerini içeren $(m-n+1)$ boyutlu \mathbf{f} yöneyi,

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{K} \mathbf{V}_1 + \sum_{r=1}^{n-1} \mathbf{K}_r \mathbf{V}_r \mathbf{S}_r + \mathbf{V}_n \mathbf{S}_n \right)^{-1} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{a}) \quad (3.118)$$

bağıntısından bulunur [36]. Böylece (3.116) denkleminde tanımlanan $f(t)$ sayısal işlevi elde edilir. Burada (3.111) denklemindeki dönüşüm yapılarak, sayısal çözüm, x bağımsız değişkenine bağlı olarak $[a,b]$ aralığında hesaplanır. Bu çözümün katsayıları, gerçek çözümün Maclaurin katsayıları ile karşılaştırıldığında yaklaşımın niteliği ölçülebilmektedir.

3.1.3.1 Uygulama

Örnek 1

İncelenecek ilk örnek ikinci kereden değişmez katsayılı, sağyansız bir Sıradan Türevli Denklem olup, açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0, \quad x \in [-1, 2] \quad (3.119)$$
$$y(-1) = e^{-1} + 3e^2, \quad y'(-1) = e^{-1} - 6e^2$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y = e^x + 3e^{-2x} \quad (3.120)$$

biçimindedir. Bu denklemin çözümü \mathcal{H}_{10} uzayında yapılacaktır. İlk olarak (3.119) denklemini $[0,1]$ aralığına kaydırılıp yeniden yazılabilir ve yeni denklemin bağımlı değişkeni z , bağımsız değişkeni ise t olarak simgelenebilir. t ile x arasında aşağıdaki bağıntı bulunmaktadır.

$$t = \frac{x+1}{3} \quad (3.121)$$

Buna göre (3.119) denklemini yeniden aşağıdaki biçimde yazılır.

$$z''(t) + 3z'(t) - 18z(t) = 0, \quad (3.122)$$
$$z(0) = e^{-1} + 3e^2, \quad z'(0) = 3(e^{-1} + 6e^2)$$

Bu denkleme $[0,1]$ aralığında Sendelenimsizlik yaklaşımını uygulandığında ve t yerine (3.121) denklemindeki x dönüşümü yazıldığında aşağıdaki sayısal çözüm elde edilir.

$$f(x) = 4.0 - 4.9x + 6.4998x^2 - 3.8335x^3 + 2.042x^4 - 0.7912x^5 + 0.266x^6 - 0.0761x^7 + 0.020x^8 - 0.0044x^9 + 5.2 \times 10^{-4}x^{10} \quad (3.123)$$

Maclaurin katsayıları aşağıda verilmektedir.

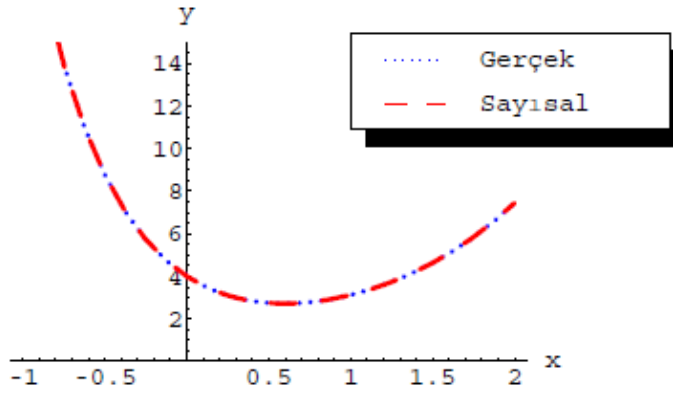
$$y(x) = 3.99 - 5.x + 6.4999x^2 - 3.8333x^3 + 2.0416x^4 - 0.7916x^5 + 0.268x^6 - 0.0759x^7 + 0.019x^8 - 0.0042x^9 + 8.4 \times 10^{-4}x^{10} + O(x^{11}) \quad (3.124)$$

Çizelge 3.14'te sayısal ve gerçek çözümlerin $[-1,2]$ aralığındaki karşılaştırmalı değerleri gösterilmektedir.

Çizelge 3.14 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
x_1	7.1648546	7.1649035	4.89×10^{-5}
x_2	6.1174822	6.1174707	1.14×10^{-5}
x_3	4.7119366	4.7119432	6.58×10^{-6}
x_4	3.4592074	3.4592028	4.65×10^{-6}
x_5	2.7673390	2.7673425	3.51×10^{-6}
x_6	3.0437697	3.0437670	2.67×10^{-6}
x_7	4.9109583	4.9109603	1.99×10^{-6}
x_8	9.0676775	9.0676760	1.44×10^{-6}
x_9	15.2382089	15.2382099	9.87×10^{-7}
x_{10}	20.8806571	20.8806565	5.89×10^{-7}

Çizelgeden görüldüğü üzere sayısal çözüm, gerçek çözümün ondalık kesiminde 6 basamak kadar tutarlılık göstermiştir. Bu iki işlevin çizimi ise **Şekil 3.14**'te yer almaktadır.



Şekil 3.14 : $y = e^x + 3e^{-2x}$, $[-1,2]$ aralığı.

Örnek 2

İncelenecek ikinci denklem, üçüncü kereden değişmez katsayılı, sağ yanlı bir denklem olup açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$y'''(x) - 4y'(x) = 10 \cos x + 5 \sin x, \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (3.125)$$

$$y(-\pi) = 1, \quad y'(-\pi) = 2, \quad y''(-\pi) = 1$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = 2 + \cos x - 2 \sin x \quad (3.126)$$

biçimindedir. Burada x bağımsız değişkeni yerine kullanılan t değişkeni aşağıda tanımlanmaktadır.

$$t = \frac{x + \pi}{2\pi} \quad (3.127)$$

Buna göre (3.125) denklemi yeniden aşağıdaki biçimde yazılır.

$$\begin{aligned} z'''(t) - 16\pi^2 z'(t) &= -8\pi^3 (10 \cos 2\pi x + 5 \sin 2\pi x), \\ z(0) = 1, \quad z'(0) = 2, \quad z''(0) &= 2\pi^2 \end{aligned} \quad (3.128)$$

Bu denkleme $[0,1]$ aralığında Sendelenimsizlik Yaklaşırımı uygulanıp t yerine (3.127) denklemdeki dönüşümü yazıldığında aşağıdaki sayısal çözüm elde edilir.

$$\begin{aligned} f(x) = 3 - 2x - 0.5x^2 + 0.33x^3 + 0.04168x^4 - 0.0167x^5 - 0.0014x^6 \\ + 3.99 \times 10^{-4} x^7 + 2.8 \times 10^{-5} x^8 - 5.2 \times 10^{-6} x^9 - 4.7 \times 10^{-7} x^{10} \end{aligned} \quad (3.129)$$

Gerçek çözümün Maclaurin katsayıları ise aşağıdaki biçimde yazılır.

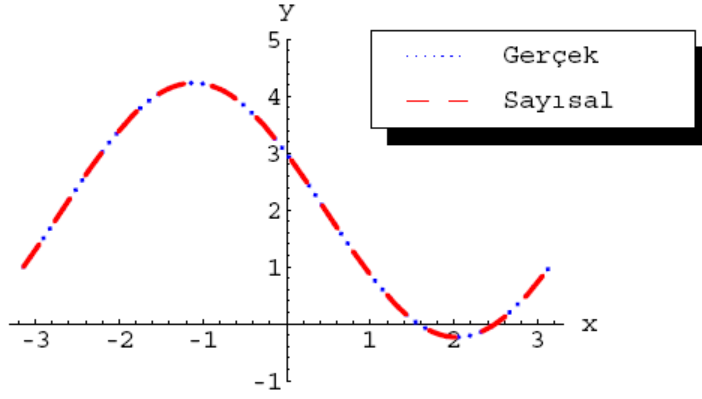
$$\begin{aligned} y(x) = 3 - 2x - 0.5x^2 + 0.33x^3 + 0.04166x^4 - 0.0166x^5 - 0.00138x^6 \\ + 3.9610^{-4} x^7 + 2.4810^{-5} x^8 - 5.5 \times 10^{-6} x^9 - 2.76 \times 10^{-7} x^{10} + O(x^{11}) \end{aligned} \quad (3.130)$$

Sayısal ve gerçek işlevlerin $[-\pi, \pi]$ aralığına kaydırılmış olan özdeğer noktalarındaki karşılaştırmalı değerleri aşağıdaki Çizelge 3.15'te verilmektedir.

Çizelge 3.15 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
x_1	7.1648546	7.1649035	4.89×10^{-5}
x_2	6.1174822	6.1174707	1.14×10^{-5}
x_3	4.7119366	4.7119432	6.58×10^{-6}
x_4	3.4592074	3.4592028	4.65×10^{-6}
x_5	2.7673390	2.7673425	3.51×10^{-6}
x_6	3.0437697	3.0437670	2.67×10^{-6}
x_7	4.9109583	4.9109603	1.99×10^{-6}
x_8	9.0676775	9.0676760	1.44×10^{-6}
x_9	15.2382089	15.2382099	9.87×10^{-7}
x_{10}	20.8806571	20.8806565	5.89×10^{-7}

Çizelgeden görüldüğü üzere sayısal çözüm genel olarak 10^{-6} hata düzeyindedir. Bu iki işlevin çizimi ise Şekil 3.15'te yer almaktadır.



Şekil 3.15 : $y(x) = 2 + \cos x - 2 \sin x$, $[-\pi, \pi]$ aralığı.

3.1.4 Sendelenimsizlik durumunda $[0,1]$ aralığında ikinci kerteden sağyanlı sınır değer sorununun sayısal çözümü

İkinci kerteden sınır değer sorunu olan sıradan türevli denklemin genel yapısı aşağıdaki biçimdedir.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.131)$$

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = c, \quad (3.132)$$

$$b_1 y(1) + b_2 y'(1) = d \quad (3.133)$$

Burada $r(x)$, c ve d değerleri 0 olduğu durumda sınır değer sorunu, doğrusal sağyansız bir Sınır Değer Sorunu olmaktadır. Bütün sağyansız denklemlerin $y=0$ biçiminde apaçık (ing: trivial) çözümü vardır. Bu çözüm genel olarak çok ilgi uyandırmamaktadır ve burada asıl önemli olan durum, bu denklemin başka apaçık olmayan (ing: nontrivial) çözümlerin olup olmadığıdır. $y = \phi(x)$ 'in bu tür bir çözüm olduğunu varsayılırsa, (3.131) denkleminin doğrusal sağyansız yapısından dolayı k herhangi bir değişmez sayı olmak üzere $y = k\phi(x)$ de bir çözüm olmaktadır. Dolayısıyla, ϕ çözümüne ilişkin bu tür denklemlerin sonsuz çözüm kümesi bulunmakta ve bu çözümlerin her biri ϕ ile orantılı olmaktadır. (3.131), (3.132) ve (3.133) biçimindeki denklemlerin en çok bir apaçık olmayan çözüm kümesinin olduğunu göstermek olanaklıdır. Ancak daha genel ikinci kerteden sınır değer sorunlarının iki doğrusal bağımsız çözümleri olan ϕ_1 ve ϕ_2 işlevleri ile ilişkin iki çözüm kümesi olabilir [38].

Bu bölümde ilk olarak değişmez katsayılı, sağ yanlı, tek bir çözümü olan ve genel yapısı (3.131), (3.132) ve (3.133) denklemlerinde verilen bir Sınır Değer Sorunu ele alınacaktır.

Bu denklemin sayısal çözümü için aşağıdaki yapı önerilmektedir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k \quad (3.134)$$

Bu çözüm, (3.131), (3.132) ve (3.133) denklemlerinde yerine konulduğunda aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned} r(x) = & q(x)f_0 + (q(x)x + p(x))f_1 + (q(x)x^2 + 2p(x)x + 2)f_2 \\ & + (q(x)x^3 + 3p(x)x^2 + 6x)f_3 \\ & + \dots + (q(x)x^n + np(x)x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2})f_n \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$c = a_1 f_0 + a_2 f_1 \quad (3.136)$$

$$d = b_1 f_0 + (b_1 + b_2)f_1 + \sum_{k=2}^n (b_1 + kb_2)f_k \quad (3.137)$$

Sayısal çözüm için, denkleme $[0,1]$ aralığında Sendelenimsizlik Yaklaşırımı uygulanacaktır. Dolayısıyla 2. kereden başlangıç koşullu STD çözümünde kullanılan dizeler ve yöneyler burada da kullanılacaktır.

$$\mathbf{K}_{1(i,j)} = \begin{cases} q(\xi_{i+1})\xi_{i+1} & i = j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{2(i,j)} = \begin{cases} p(\xi_{i+1}) & i = j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{3(i,j)} = \begin{cases} i+1 & i = j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{4(i,j)} = \begin{cases} i(i+1) & i = j \text{ için} \\ 0, & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{n-1} \\ \xi_3 & \xi_3^2 & \dots & \xi_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{n-2} \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 & \dots & \xi_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^{n-2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}^T = [f_0 q(\xi_2) + (p(\xi_2) + q(\xi_2)\xi_2)f_1 \quad \dots \quad f_0 q(\xi_n) + (p(\xi_n) + q(\xi_n)\xi_n)f_1],$$

$$\mathbf{r}^T = [r(\xi_2) \quad \dots \quad r(\xi_n)],$$

$$\mathbf{f}^T = [f_2 \quad \dots \quad f_n] \quad (3.138)$$

(3.135) denklemi bu dizey ve yöneyler türünden aşağıdaki biçimde yazılabilir

$$\mathbf{r} = (\mathbf{K}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{V}_1 \mathbf{K}_3 + \mathbf{V}_2 \mathbf{K}_4) \mathbf{f} + \mathbf{a} \quad (3.139)$$

Burada özdeğerler ayrı olduğundan \mathbf{V}_1 ve \mathbf{V}_2 dizeyleri evirtilebilir (ing: invertible) niteliktedir. p ve q işlevleri de birer sayıl (ing: scalar) olduğundan, \mathbf{f} yöneyi aşağıdaki biçimde bulunur.

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{V}_1 \mathbf{K}_3 + \mathbf{V}_2 \mathbf{K}_4)^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \quad (3.140)$$

\mathbf{f} yöneyindeki değerler (3.134) denklemine yerine konulduğunda aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \sum_{k=2}^n f_k x^k \quad (3.141)$$

Burada f_0 ve f_1 değerleri dışındaki diğer f_k ($k = 2, \dots, n$) değerleri bilinmektedir. (3.136), (3.137) ve (3.138) denklemleri birlikte çözüldüğünde f_0 ve f_1 değerleri de bulunabilir. Böylece sayısal çözüm elde edilir. Sayısal çözümün, gerçek çözümün Maclaurin katsayıları ile karşılaştırması yapılarak yaklaşımın niteliği ölçülebilir [37].

3.1.4.1 Uygulama

Örnek 1

Burada incelenecek ilk sıradan türevli denklem ve ona eşlik eden sınır değer koşulu aşağıda verilmektedir.

$$y''(x) = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (3.142)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = x^3 \quad (3.143)$$

biçimindedir. Sayısal çözüm $f(x)$ ile simgenelip aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k \quad (3.144)$$

Sayısal çözüm, (3.142) denkleminde uygulandığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)f_k x^{k-2} = 6x, \quad f_0 = 0, \quad \sum_{k=1}^n f_k = 1 \quad (3.145)$$

Burada Sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak f_k ($k = 2, \dots, n$) değerleri bulunur. (3.145) denklemi kullanılarak f_1 değeri de hesaplanır. Böylece sayısal çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

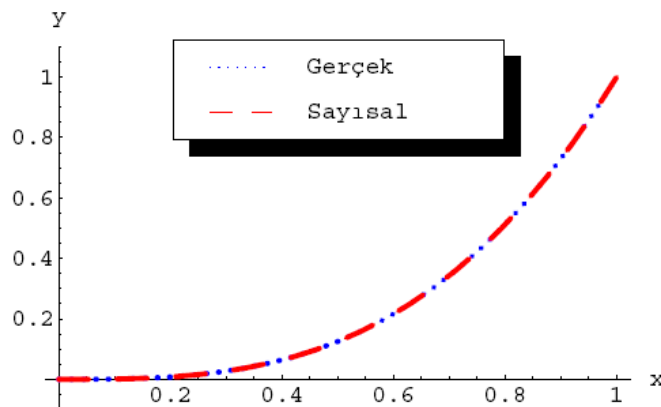
$$f(x) = 0.0x - 2.07 \times 10^{-16} x^2 + 1.0x^3 + 1.0 \times 10^{-16} x^4 + 8.5 \times 10^{-17} x^5 \quad (3.146)$$

Gerçek çözüm, bir çokterimli olduğundan Maclaurin serisi kendisine eşit olur. Burada özenli bir inceleme yapıldığında sayısal çözümün katsayılarının gerçek çözüm ile iyi bir biçimde eşleştiği gözlemlenmektedir. Sayısal ve gerçek çözümlerin özdeğer noktalarındaki karşılaştırmalı çizelgesi Çizelge 3.16'da yer almaktadır.

Çizelge 3.16 : Örnek 1 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
x_1	0.86576	0.86576	0.
x_2	0.45517	0.45517	5.5×10^{-17}
x_3	0.12500	0.12499	5.5×10^{-17}
x_4	0.01228	0.01228	1.04×10^{-17}
x_5	1.03×10^{-4}	1.03×10^{-4}	4.6×10^{-19}

Çizelgeden görüldüğü üzere sayısal çözüm gerçek çözümle 6 ondalık basamak tutarlılık sağlamaktadır. Bu iki işlevin çizimi ise Şekil 3.16'da yer almaktadır.



Şekil 3.16 : $y(x) = x^3$, $[0,1]$ aralığı.

Burada az sayıda düğüm noktası kullanıldığı durumda bile Sendelenimsizlik Yaklaşımının tutarlılığı gözlemlenebilmektedir.

Örnek 2

İncelenecek sıradan türevli denklem ve ona eşlik eden sınır değer koşulları açık bir biçimde aşağıda yer almaktadır.

$$y''(x) - \pi^2 y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \quad (3.147)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = \frac{e^{\pi(2-x)} - e^{\pi x}}{e^{2\pi} - 1} \quad (3.148)$$

biçimindedir. Sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak elde edilen sayısal çözüm

$$f(x) = 1 - 3.1533481x + 4.9348015x^2 - 5.18702x^3 + 4.0583x^4 - 2.557x^5 \\ + 1.32x^6 - 0.58x^7 + 0.20x^8 - 0.05x^9 + 0.006x^{10} \quad (3.149)$$

olarak hesaplanmaktadır. Gerçek çözümün Maclaurin katsayıları ise,

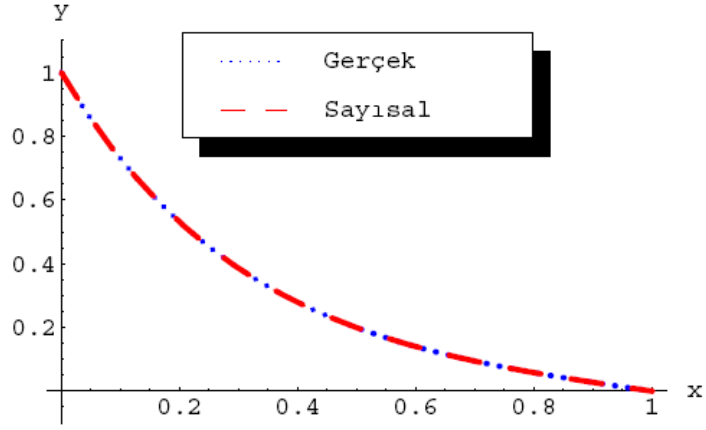
$$y(x) = 1 - 3.15334809x + 4.934802x^2 - 5.18704x^3 + 4.0587x^4 - 2.559x^5 \\ + 1.33x^6 - 0.60x^7 + 0.23x^8 - 0.08x^9 + 0.02x^{10} + O(x^{11}) \quad (3.150)$$

biçimindedir. Burada katsayıların gerçek çözümle eşleşmesi görülebilmektedir. Sayısal ve gerçek çözümlerin düğüm noktalarındaki değerlerinin karşılaştırmalı çizelgesi ise **Çizelge 3.17**'de yer almaktadır.

Çizelge 3.17 : Örnek 2 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
x_1	0.003550080	0.0035500700	1.45×10^{-8}
x_2	0.018491075	0.0184910570	1.81×10^{-8}
x_3	0.045471460	0.0454714500	1.21×10^{-8}
x_4	0.087651640	0.0876516300	8.89×10^{-9}
x_5	0.153469025	0.1534690200	5.14×10^{-9}
x_6	0.256014816	0.2560148120	3.40×10^{-9}
x_7	0.406859590	0.4068595800	1.69×10^{-9}
x_8	0.602396788	0.6023967870	1.08×10^{-9}
x_9	0.8081996288	0.8081996285	2.86×10^{-10}
x_{10}	0.959687680	0.9596876867	1.44×10^{-10}

Çizelgeden görüldüğü üzere sayısal çözüm gerçek çözüme 9 ondalık basamak tutarlılık sağlamaktadır. Bu iki işlevin çizimi ise **Şekil 3.17**'de yer almaktadır.



Şekil 3.17 : $y(x) = \frac{e^{\pi(2-x)} - e^{\pi x}}{e^{2\pi} - 1}$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 3

Burada incelenecek son denklem ve ona eşlik eden sınır değer koşulları aşağıda yer almaktadır.

$$y''(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) + y'(1) = 0 \quad (3.151)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = \frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sin(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2})} - \frac{x}{2} \quad (3.152)$$

biçimindedir. Sendelenimsizlik yaklaşımını kullanarak elde edilen sayısal çözüm

$$f(x) = 0.670412404x - 2 \times 10^{-10}x^2 - 0.390137459x^3 - 1.12 \times 10^{-7}x^4 + 0.039014x^5 \\ - 2 \times 10^{-6}x^6 - 0.001851x^7 - 9 \times 10^{-6}x^8 + 6.01 \times 10^{-6}x^9 - 4 \times 10^{-6}x^{10}$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Gerçek çözümün Maclaurin katsayıları ise,

$$y(x) = 0.670412405x - 0.390137468x^3 + 0.039013x^5 - 0.001857x^7 + 10^{-6}x^9 + O(x^{11})$$

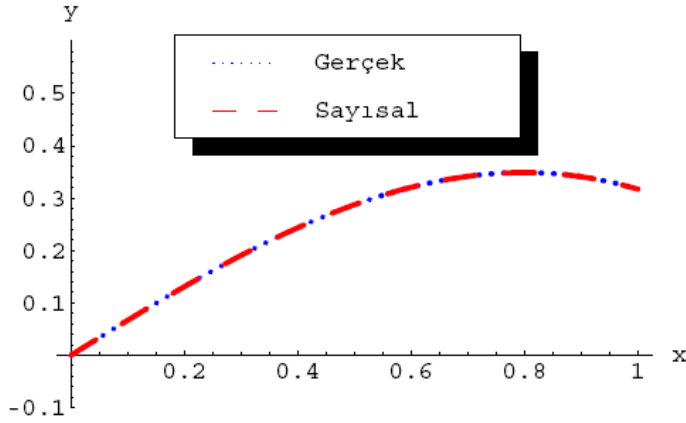
olmaktadır.

Sayısal ve gerçek çözümlerin değerleri Çizelge 3.18'de yer almaktadır.

Çizelge 3.18 : Örnek 3 için sayısal ve gerçek çözümlerin karşılaştırmalı değerleri.

x_i	Gerçek çözüm	Sayısal çözüm	Yanılğı
x_1	0.3214846527	0.3214846522	5.5×10^{-10}
x_2	0.3352018557	0.3352018551	5.5×10^{-10}
x_3	0.3477072501	0.3477072496	5.2×10^{-10}
x_4	0.3440588743	0.3440588738	4.8×10^{-10}
x_5	0.3135608311	0.3135608307	4.1×10^{-10}
x_6	0.2557741861	0.2557741858	3.2×10^{-10}
x_7	0.1811293988	0.1811293985	2.2×10^{-10}
x_8	0.1058611600	0.1058611599	1.2×10^{-10}
x_9	0.0451118342	0.0451118342	5.4×10^{-11}
x_{10}	0.0087458271	0.0087458271	1.0×10^{-11}

Çizelgeden görüldüğü üzere sayısal çözüm gerçek çözüme 10 basamak doğruluk sağlamaktadır. Bu iki işlevin grafiği Şekil 3.18’de yer almaktadır.



Şekil 3.18 : $y(x) = \frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sin(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2})} - \frac{x}{2}$, $[0,1]$ aralığı.

3.1.5 Sendelenimsizlik durumunda birim aralıkta ikinci kereden sağ yansız seçkisiz değerli bir değiştirge içeren sınır değer sorununun sayısal çözümü

Seçkisiz olarak (ing: random) seçilmiş bir λ değiştirgesi (ing: parameter) içeren sınır değer sorunlarının çözümü λ ’nın aldığı değerlere bağlı olarak elde edilmektedir.

Örneğin,

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (3.153)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (3.154)$$

denklemleri bu yapıda bir denklem olmaktadır. (3.153) ve (3.154) denklemlerinin gerçek çözümü λ ’ya bağlı olarak 3 ayrı çözüm vermektedir. $\lambda = 0$ olduğunda çözüm yalnızca $\phi(x) = 0$ olmaktadır. $\lambda < 0$ olduğunda ise yine çözüm yalnızca $\phi(x) = 0$ olur. Son olasılık olan $\lambda > 0$ durumunda ise türevli denklemin özümü,

λ 'nın yalnızca belli değerleri için vardır yani,

$$\lambda = k^2 \pi^2, k = 1, \dots, n, \dots \quad (3.155)$$

λ özdeğerlerine karşılık gelen çözümler ise $\phi_n(x) = \sin n\pi x$ işlevleridir.

Yukarıda gerçek çözümleri $\phi_n(x) = \sin n\pi x$ olarak verilen (3.153) ve (3.154) sırasayılı denklemlerin sayısal çözümü için Sendelenimsizlik yaklaşımından yararlanılacaktır. Sayısal çözüm için aşağıdaki yapı kullanılacaktır.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k \quad (3.156)$$

Bu çözüm (3.153) ve (3.154) denklemlerine uygulandığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\lambda f_0 + (\lambda x) f_1 + (2 + \lambda x^2) f_2 + \dots + (n(n-1)x^{n-2} + \lambda x^n) f_n = 0 \quad (3.157)$$

$$f(0) = f_0 = 0 \quad (3.158)$$

$$f(1) = \sum_{k=1}^n f_k = 0 \quad (3.159)$$

(3.159) denklemini kullanarak f_1 için aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$f_1 = -\sum_{k=2}^n f_k \quad (3.160)$$

(3.160) ve (3.157) denklemlerinden aşağıdaki denklem oluşturulur.

$$0 = (2 + \lambda x^2 - \lambda x) f_2 + ((3)(2)x + \lambda x^3 - \lambda x) f_3 + ((4)(3)x^2 + \lambda x^4 - \lambda x) f_4 + \dots \\ + (n(n-1)x^{n-2} + \lambda x^n - \lambda x) f_n \quad (3.161)$$

Sendelenimsizlik yaklaşımını kullanarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$(2 + \lambda \xi_1^2 - \lambda \xi_1) f_2 + \dots + (n(n-1) \xi_1^{n-2} + \lambda \xi_1^n - \lambda \xi_1) f_n = 0 \\ (2 + \lambda \xi_2^2 - \lambda \xi_2) f_2 + \dots + (n(n-1) \xi_2^{n-2} + \lambda \xi_2^n - \lambda \xi_2) f_n = 0 \\ \vdots \\ (2 + \lambda \xi_n^2 - \lambda \xi_n) f_2 + \dots + (n(n-1) \xi_n^{n-2} + \lambda \xi_n^n - \lambda \xi_n) f_n = 0 \quad (3.162)$$

Burada bilinmeyen f_k , $k = 2, \dots, n$ katsayıları için aşağıdaki yöney ve dizeyler kullanılacaktır.

$$\mathbf{f}^T = [f_2 \quad \dots \quad f_n]_{(n-1 \times 1)}$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 6\xi_1 & 12\xi_1^2 & \dots & n(n-1)\xi_1^{n-2} \\ 2 & 6\xi_2 & 12\xi_2^2 & \dots & n(n-1)\xi_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 6\xi_n & 12\xi_n^2 & \dots & n(n-1)\xi_n^{n-2} \end{bmatrix}_{(n \times n-1)}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\xi_1 + \xi_1^2 & -\xi_1 + \xi_1^3 & \dots & -\xi_1 + \xi_1^n \\ -\xi_2 + \xi_2^2 & -\xi_2 + \xi_2^3 & \dots & -\xi_2 + \xi_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\xi_n + \xi_n^2 & -\xi_n + \xi_n^3 & \dots & -\xi_n + \xi_n^n \end{bmatrix}_{(n \times n-1)} \quad (3.163)$$

Bu büyüklükler kullanılarak (3.161) denklemi aşağıdaki biçimde yazılır.

$$(\mathbf{A}_0 + \lambda \mathbf{A}_1) \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.164)$$

Bu sistemde $(n-1)$ bilinmeyen f_i değerlerine karşılık n tane denklem bulunmaktadır. Ayrıca \mathbf{A}_0 ve \mathbf{A}_1 dizeyleri dikdörtgen dizeylerdir. Sistemi eşit sayıda bilinmeyen ve denklem durumuna getirebilmek için (3.164) denkleminin her iki yanını soldan \mathbf{A}_1^T dizeyi ile çarpımı alınır. Buna göre oluşan yeni denklem sistemi

$$(\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_0 + \lambda \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1) \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.165)$$

biçiminde olmaktadır. Burada işlem kolaylığı açısından yeni bir adlandırım yapılmalıdır. $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1$. Bu durumda yeni denklem sistemi

$$(\mathbf{B}_0 + \lambda \mathbf{B}_1) \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.166)$$

olmaktadır. Aşağıda \mathbf{g} yöneyi tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}_1 \mathbf{f} \quad (3.167)$$

\mathcal{H}_n uzayında tanımlanan $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin özdeğerleri ayrık olduğundan \mathbf{B}_1 dizeyi evirtilebilir niteliktedir. Böylece \mathbf{f} yöneyi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{g} \quad (3.168)$$

(3.168) denklemi (3.164) denklemine yerine konulduğunda aşağıdaki yapı elde edilir.

$$(-\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1^{-1} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (3.169)$$

Burada λ değerleri $-\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1^{-1}$ dizeyinin özdeğerleri, \mathbf{g} yöneyi ise özyöneyledir. \mathbf{g} yöneyi elde edildikten sonra (3.168) denklemi kullanılarak \mathbf{f} yöneyi hesaplanır [33].

3.1.5.1 Uygulama

Bu bölümde (3.153) denklemi ve ona eşlik eden (3.154) denkleminde bulunan koşulları içeren sınır değer sorununun \mathcal{H}_{10} uzayında sayısal çözümü hesaplanacaktır. Bu uzay içerisinde (3.169) denklemindeki özdeğerler aşağıdaki gibi bulunur.

$$\lambda_1 = 9.87, \quad \lambda_2 = 39.48, \quad \lambda_3 = 88.83, \quad \lambda_4 = 158.12, \quad \lambda_5 = 248.45$$

$$\lambda_6 = 398.22, \quad \lambda_7 = 618.841, \quad \lambda_8 = 2302.17, \quad \lambda_9 = 4974.02 \quad (3.170)$$

Gerçek değerler ise

$$\lambda_1 = 9.8696, \quad \lambda_2 = 39.4784, \quad \lambda_3 = 88.8264, \quad \lambda_4 = 157.914, \quad \lambda_5 = 246.74,$$

$$\lambda_6 = 355.306, \quad \lambda_7 = 483.611, \quad \lambda_8 = 631.655, \quad \lambda_9 = 799.438 \quad (3.171)$$

biçimindedir. Sayısal olarak elde edilen özdeğerlere karşılık gelen özyöneyleler \mathbf{u}_k , ($k=1, \dots, 9$) ve her bir λ_k özdeğerine karşılık gelen özişlevlerin katsayılarından oluşan yöneyler \mathbf{v}_k simgelenirse, (3.168) denklemi kullanılarak \mathbf{v}_k yöneyleri aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{u}_k, \quad k = 1, \dots, 9. \quad (3.172)$$

Her bir özişlev ϕ_k ve bu işlevin katsayıları $h_j^{(k)}$ olarak gösterilirse, (3.160) sırasayılı denklemden h_1 katsayısı

$$h_1^{(k)} = -\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{v}_k^{(j,1)} \quad (3.173)$$

olarak bulunur. Diğer katsayılar ise

$$h_j^{(k)} = \mathbf{v}_k^{(j,1)} \quad (3.174)$$

olarak hesaplanır. Bu katsayılar kullanılarak özişlevler yani sayısal çözüm,

$$\phi_k(x) = h_1^{(k)}x + \sum_{j=1}^{n-1} h_j^{(k)}x^{j+1} \quad (3.175)$$

biçiminde elde edilir. Gerçek çözüm yeniden aşağıdaki gibi yazılır.

$$y_n(x) = c_n \sin(n\pi x), \quad n = 1, \dots, 9 \quad (3.176)$$

Burada yer alan c_n katsayıları, her bir özdeşlemede farklı bir değer alabilir ya da bazı işlemlerde aynı değere eşit olabilir. Bu değerlerin hesaplanması için her bir özdeşleme birim aralıkta aşağıdaki gibi olağanlaştırılır (ing: normalize).

$$\int_0^1 (c_n \sin[n\pi x])^2 dx = 1 \quad (3.177)$$

Bu durumda c_n katsayıları, $-\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}$ olarak bulunur. Aynı işlem sayısal çözüm için de gerçekleştirilirse

$$\int_0^1 (s_k \phi_k(x))^2 dx = 1, \quad k = 1, \dots, 9 \quad (3.178)$$

biçiminde yazılabilir. Bu katsayılar her işlemede değişik çıkmaktadır. Örneğin $\phi_1(x)$ işlevi için $s_1 = -7.9915$ olarak hesaplanmaktadır. Her bir özdeşlemin sayısal çözümü ve gerçek çözümlerinin Maclaurin serisi açılımları aşağıda verilmektedir. Burada yalnızca ilk işlev açık bir biçimde verilecektir.

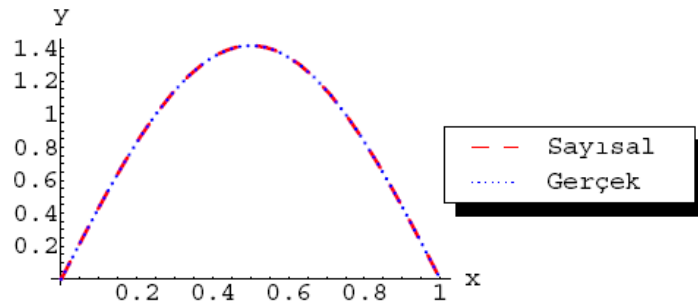
$\lambda_1 = \pi$ özdeşleme karşılık gelen özdeşleme,

$$s_1 \phi_1(x) = 4.44288x - 9.133 \times 10^{-7} x^2 - 7.30822x^3 - 4.51 \times 10^{-4} x^4 + 3.60959x^5 \\ - 1.2 \times 10^{-2} x^6 - 0.815309x^7 - 5.2 \times 10^{-2} x^8 + 0.170967x^9 - 3.4 \times 10^{-2} x^{10}$$

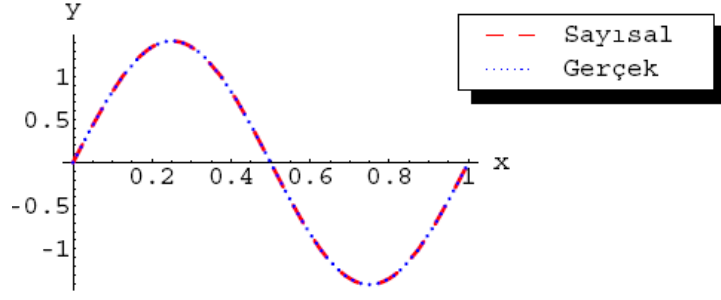
olarak hesaplanmaktadır. Gerçek çözümün Maclaurin katsayıları ise

$$y_1(x) = 4.44288x - 7.30825x^3 + 3.60648x^5 - 0.847488x^7 + 0.116172x^9 + O(x^{11})$$

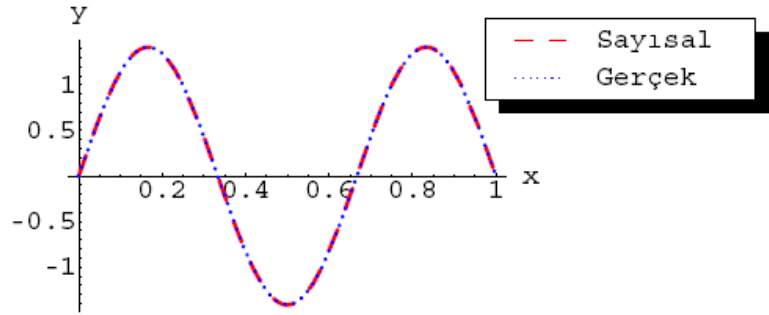
biçimindedir. Sayısal ve gerçek çözümlerin birlikte yer aldığı işlevlerin çizimleri ise aşağıda yer almaktadır.



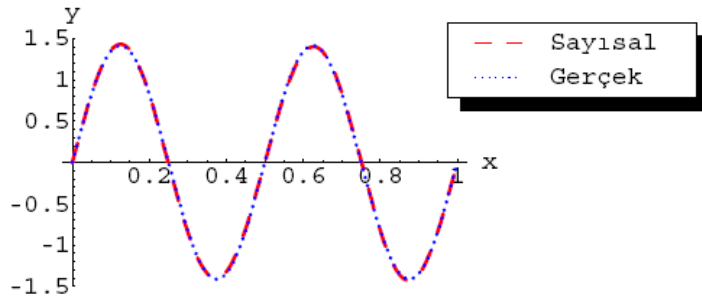
Şekil 3.19 : 1. özdeşleme



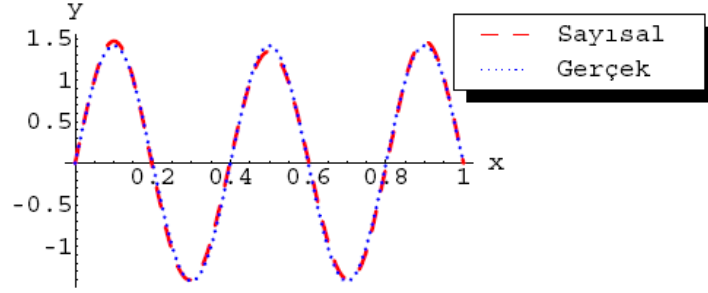
Şekil 3.20 : 2. özişlev



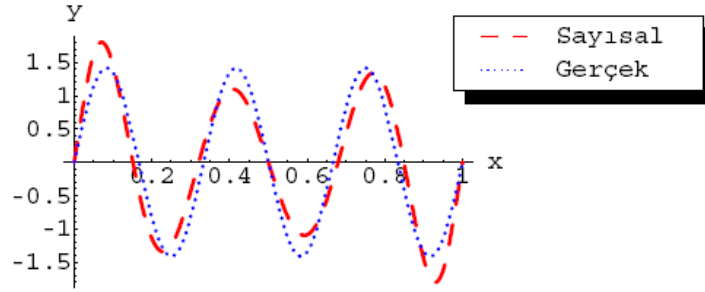
Şekil 3.21 : 3. özişlev



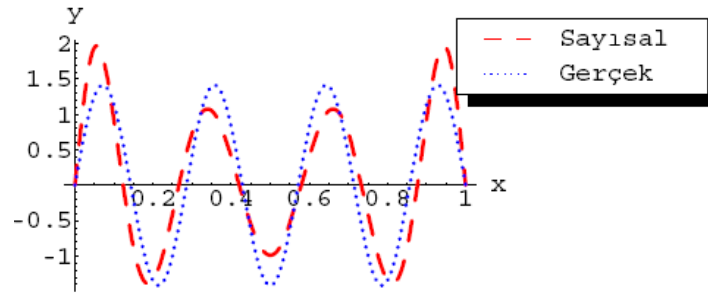
Şekil 3.22 : 4. özişlev



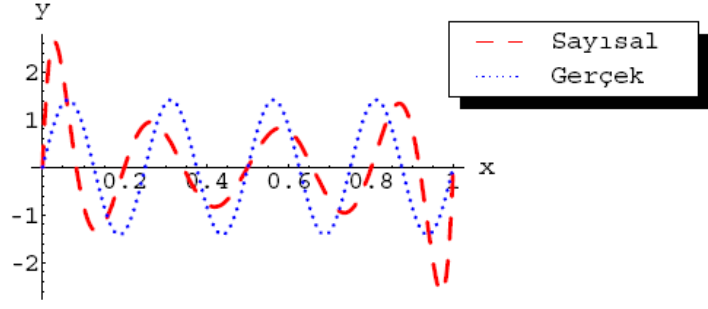
Şekil 3.23 : 5. özişlev



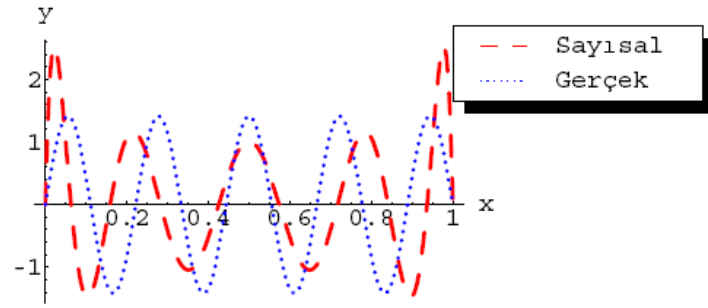
Şekil 3.24 : 6. özişlev



Şekil 3.25 : 7. özişlev



Şekil 3.26 : 8. özişlev



Şekil 3.27 : 9. özişlev

Bu çizimlerden de görüldüğü üzere sayısal çözüm, gerçek çözüme oldukça iyi bir biçimde yakınsamıştır. Böylece Sendelenimsizlik yaklaşımı, genel bir değiştirge içeren bir sınır değer sorununa da uygulanabilmektedir. Ancak özdeğerler büyüdükçe, sayısal çözüm ile gerçek çözüm arasında bir ayrıklaşma gözlemlenmiştir.

4. GRÖBNER TABANI VE BUCHBERGER ALGORİTMASI

Gröbner tabanı, çokterimli halkaların (ing: polynomial ring) kuramında kullanılan önemli bir araçtır. Gröbner tabanı, 1965 yılında Bruno Buchberger tarafından doktora tezinde tanıtılmıştır [39]. Ancak, Gröbner tabanının soyut tanımlaması için çalışmalar Buchberger'den daha önceye dayanmaktadır. Gröbner tabanı, Hironaka tarafından 1964 yılında üslü (ing: power) seri halkalarının kuramsal olarak çalışılmasında kullanılmıştır [40]. Hironaka'dan önce Gordon, Gröbner tabanı kavramını 1899 yılında kullanmıştır [41]. Gröbner tabanının hesaplanacağı düşüncesini Buchberger getirmiştir [42-44]. Buchberger, bu yapılara doktora tez danışmanı olan Wolfgang Gröbner (1899-1980)'in adını vermiştir. Buchberger'in özellikle ilgilendiği konu, Gröbner tabanını oluşturmak için algoritma geliştirmektir. Gröbner tabanını hesaplamak için kullanılan algoritma, Buchberger algoritmasıdır. Buchberger'in ilk algoritması, kullandığı değişkenlerin üstel olarak (ing: exponential) iki katı gibi bir zaman karmaşıklığına (ing: time complexity) sahiptir. Daha sonra bu yapıya bir çok düzenleme getirdi. Algoritmanın en çok zaman tüketen kesimi; gittikçe artan S -çokterimlilerin (ing: polynomials) hesaplanması, S -çokterimlilerin indirgenmesinin denetimi ve S -çokterimlilerindeki katsayı artışıdır. Yapılan düzenlemeler daha çok bu sorunların yerlerinin belirlenmesine yöneliktir.

Sıfır olmayan her halka idealinin (ing: ideal of a ring) Gröbner tabanı bulunmaktadır [45]. Gröbner tabanını oluşturmak için öncelikle S -çokterimlilerini oluşturmak gerekmektedir.

f ve g , $K[x_1, \dots, x_n]$ sıfır olmayan iki çokterimlisi olmak üzere

$$L = \text{okek}(lp(f), lp(g)) \quad (4.1)$$

tanımı yapılsın. Burada $lp(f)$, f çokterimlisinin en yüksek dereceli teriminin katsayısız biçimidir (ing: leading power product). Bu durumda f ve g çokterimlilerin S -çokterimlisi,

$$S(f, g) = \frac{L}{lt(f)} f - \frac{L}{lt(g)} g \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $lt(f)$, f çokterimlisinin baş terimi yani en yüksek dereceli terimidir (ing: leading term). S -çokterimlisi, karmaşık gözükmesine karşın aslında f ve g 'den daha basit bir yapıdadır. lt ve lp terimlerini belirlemek için çokterimlilerin terimleri arasında bir sıralama (ing: ordering) yapmak gerekmektedir. En sık kullanılan sıralama çeşitleri aşağıdaki gibi açıklanmaktadır:

1. Abecesel sıralama (ing: lexicographical order): Çokterimliler arasındaki sıralama, sözlük sıralamasıdır. Sözlükte önce gelen simge (ing: letter), sonrakinden küçüktür. Matematiksel olarak eğer $(i-a, j-b)$ ikilisinin ilk sıfır olmayan ögesi, ancak ve ancak $x^a y^b < x^i y^j$ eşitsizliği sağlanıyorsa, artı değerlidir.

Örneğin; $x < y$ olmak üzere aşağıdaki sıralama abecesel sıralamadır.

$$1 < x^2 < x^3 < \dots < y < xy < x^2 y < \dots < y^2 < xy^2 < x^2 y^2 < \dots \quad (4.3)$$

2. Dereceli abecesel sıralama (ing: degree lexicographical order): Burada en büyük dereceli terim en büyüktür. Derecesi aynı olan terimler arasında ise sözlük sıralaması büyük olan büyüktür.

Örneğin; $x < y$ olmak üzere dereceli abecesel sıralama

$$1 < x < y < x^2 < xy < y^2 < x^3 < x^2 y < xy^2 < y^3 < \dots \quad (4.4)$$

olarak yazılmaktadır.

3. Dereceli ters abecesel sıralama (ing: degree reverse lexicographical order): Burada terimler ilk olarak derecelerine göre, daha sonra ise abecesel olarak ters bir biçimde sıralanmaktadır. Eğer iki terimin derecesi aynı ise, sözlük sıralamasına göre önce gelen sonrakinden büyüktür.

Örneğin; $x < y$ olmak üzere dereceli ters abecesel sıralama

$$1 < y < x < y^2 < xy < x^2 < \dots \quad (4.5)$$

olarak yazılmaktadır.

Örnek: Aşağıda üç değişkenli bir çokterimli bulunmaktadır:

$$f(x, y, z) = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \quad (4.6)$$

Bu çokterimli, $x > y > z$ olarak verilmek üzere bu üç sıralamaya göre sıralanırsa;

Abecesel sıralamaya göre:

$$f = -5x^3 + 7x^2z^2 + 4xy^2z + 4z^2,$$

Dereceli abecesel sıralamaya göre:

$$f = 7x^2z^2 + 4xy^2z - 5x^3 + 4z^2,$$

Dereceli ters abecesel sıralamaya göre:

$$f = 4xy^2z + 7x^2z^2 - 5x^3 + 4z^2$$

olmaktadır. f çokterimlisinin Abecesel sıralamasına göre lp terimi $lp(f) = x^3$, lt terimi ise $lt(f) = -5x^3$ olarak hesaplanır [46].

S -çokterimlilerinin en önemli özelliği, çokterimli ikililerinin baş terimlerinin yalınlaşmasıdır. Değişkenler, seçilen çokterimli sıralamasına göre elenmektedir [47]. Buchberger algoritması için sözde kod (ing: pseudo code) aşağıdaki gibi oluşturulur.

```
Giriş:  $F = f_1, \dots, f_s$   
Çıkış: Gröbner tabanı  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$   
 $G := F$  olsun  
Yineleme  
 $G' := G$  olsun  
Her  $p \neq q \in G$  olan  $\{p, q\}$  ikilileri için  
Yap  
 $S := S(p, q)$  olsun  
Eğer  $S \neq 0 \pmod{G'}$  varsa  
O zaman  $G := G \cup S$  olacak  
 $G = G'$  oluncaya dek
```

Bu algorithmada ilk olarak S -çokterimlileri hesaplanmaktadır. Daha sonra G modülüne göre sıfır olup olmadığına bakılmaktadır. Eğer bu çokterimliler sıfıra eşit değilse o zaman G kümesine eklenmektedir. Bu işlem, G kümesinin tüm S -çokterimlileri, G kümesinin çokterimlileri türünden yazılıncaya ya da başka bir deyişle tüm S -çokterimlileri G modülüne göre sıfır oluncaya dek sürdürülür. Bu algorithmada G kümesi, G' (eski G) kümesinin öğelerinin sıfır olmayan S -çokterimlilerinin kalanları ile G' kümesini içermektedir. Eğer f tarafından oluşturulan ideal $\langle f \rangle$ ile gösterilirse, $G' \subset G$ olmasından dolayı $\langle lt(G') \rangle \subset \langle lt(G) \rangle$ bağıntısı sağlanır. $\langle lt(G') \rangle$ idealleri, her yinelemede ortaya çıkar. Bir sonraki yinelemede elde edilen ideal bir öncekinde elde edilen ideali kapsar. Sonunda bu

idealler, $K[x_1, \dots, x_n]$ halkasında bir zincir meydana getirirler. Sonlu sayıdaki yineleme sonrasında $\langle lt(G') \rangle$ ideallerinin hiç bir katkısı olmayacak ve sonunda $\langle lt(G') \rangle = \langle lt(G) \rangle$ eşitliği sağlanacaktır. Bu durum $G' = G$ anlamına gelmektedir ve algoritma sonlu sayıdaki adımdan sonra son bulacaktır [46].

Gröbner Tabanı, Mathematica ve Maple gibi simgesel yazılımlar ile hesaplanabilmektedir. Mathematica'da Gröbner Tabanını oluşturmak için `GroebnerBasis[{poly1, poly2, ..., polyn}, {x1, x2, ..., xn}]` buyruğu (ing: command) kullanılmaktadır.

Örnek: $f_1 = y^2 + yx + x^2, f_2 = y + x, f_3 = y$ çokterimlileri tarafından $\mathbb{Q}[x, y]$ 'de oluşturulan idealin Gröbner tabanı abecesel sıralamaya göre $y > x$ olacak biçimde hesaplanacaktır.

Adım 0:

$$G = \{y^2 + yx + x^2, y + x, y\}$$

$$\mathcal{G} = \{\{f_1, f_2\}, \{f_1, f_3\}, \{f_2, f_3\}\}$$

Adım 1:

$\{f_1, f_2\} \in \mathcal{G}$ olsun. f_1 ve f_2 'nin S -çokterimlisi,

$$S(f_1, f_2) = \frac{y^2}{y^2}(y^2 + yx + x^2) - \frac{y^2}{y}(y + x) = x^2$$

$lt(f_i)$ ($i = 1, 2, 3$), $lt(x^2)$ terimini bölmediği için G modülüne göre $h = x^2$ olarak indirgenmektedir. Bu durumda yeni kümeler, $f_4 = x^2$ olmak üzere aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$G = \{y^2 + yx + x^2, y + x, y, x^2\}$$

$$\mathcal{G} = \{\{f_1, f_3\}, \{f_2, f_3\}, \{f_1, f_4\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}\}$$

Adım 2:

$\{f_1, f_3\} \in \mathcal{G}$ olsun. f_1 ve f_3 'ün S -çokterimlisi,

$$S(f_1, f_3) = \frac{y^2}{y^2}(y^2 + yx + x^2) - \frac{y^2}{y}(y) = yx + x^2$$

$yx + x^2$ çokterimlisi, G kümesinde bulunan f_2 çokterimlisinin modülüne göre 0'a indirgenmektedir. Yeni oluşan kümeler aşağıda yer almaktadır.

$$G = \{y^2 + yx + x^2, y + x, y, x^2\}$$

$$\mathcal{G} = \{\{f_2, f_3\}, \{f_1, f_4\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}\}$$

Adım 3:

$\{f_2, f_3\} \in \mathcal{G}$ olsun. f_2 ve f_3 'ün S -çokterimlisi,

$$S(f_1, f_3) = \frac{y}{y}(y + x) - \frac{y}{y}y = x$$

olarak hesaplanır. Dolayısı ile $S(f_1, f_3)$ çokterimlisi G modülünde indirgenebilmektedir. Yeni oluşan kümeler $f_5 = x$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$G = \{y^2 + yx + x^2, y + x, y, x^2, x\}$$

$$\mathcal{G} = \{\{f_1, f_4\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}, \{f_1, f_5\}, \{f_2, f_5\}, \{f_3, f_5\}, \{f_4, f_5\}\}$$

Adım 4:

x ve y , G kümesinde bulduklarından, $S(f_i, f_j)$ çokterimlileri bütün $(f_i, f_j) \in \mathcal{G}$ ikilileri için G modülüne göre 0'a indirgenmektedir. Böylece algoritma sona ermektedir. İdeal için Gröbner tabanı aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$G = \{y^2 + yx + x^2, y + x, y, x^2, x\}$$

G kümesindeki çokterimlilerin herbiri, bir değere eşitlenerek x ve y değişkenlerine bağlı denklemler elde edilmektedir. Bu denklem takımı

$$G_1 = \{y^2 + yx + x^2 = d_1, y + x = d_2, y = d_3, x^2 = d_4, x = d_5\}$$

biçiminde oluşturulmaktadır. Burada, d_i , ($i=1, \dots, 5$) değerleri değişmez sayıları (ing: constant) simgelemektedir. Özenli bir inceleme yapıldığında G_1 kümesinde bulunan beşinci denklemden x bilinmeyişi, üçüncü denklemden ise y bilinmeyişi hesaplanabilir. Sonuçların tutarlılığı diğer denklemlerde yerine konularak bakılabilir. Böylece, doğrusal olmayan bir denklem takımının verilen sıralamaya göre Gröbner Tabanı elde edildikten sonra sırasıyla bilinmeyen değişkenleri hesaplanabilmektedir [48-51].

4.1 Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemlerin YBMG Ve Gröbner Tabanı İle Yaklaşık Çözümü

Bu bölümde açık yapısı aşağıda verilen birinci kereden doğrusal olmayan sıradan türevli denklemin yaklaşık çözümü hesaplanacaktır.

$$y' = F(x, y), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a, b] \quad (4.7)$$

Bu denklemin çözümü için $[a, b]$ aralığı n düğüm noktası kullanılarak $(n-1)$ alt aralığa bölünmektedir. Bu noktalar aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$x_k = a + (k-1) \frac{b-a}{n-1}, \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.8)$$

Denklemin yaklaşık çözümü olan $f(x)$ işlevi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(x), \quad (4.9)$$

$s_k(x)$ işlevi aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$s_k(x) = c_{3k-2} u_{3k-2}(x) + c_{3k-1} u_{3k-1}(x) + c_{3k} u_{3k}(x) \quad (4.10)$$

Burada u_k ($1 \leq k \leq 3n-3$) işlevleri, karesi tümlevlenebilir işlevlerin Hilbert Uzayının birbirine dik ve birimboylu taban işlevleri olmaktadır. Bu işlevler, $I_k = [x_k, x_{k+1})$, ($1 \leq k \leq n-2$) ve $I_{n-1} = [x_{n-1}, x_n]$ } aralıklarında aşağıdaki biçimde oluşturulmaktadır.

$$u_{3k-2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{\sqrt{5}\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}(x-x_k)^2, & x \in I_k \end{cases} \quad (4.11)$$

$$u_{3k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{5\sqrt{3}\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}(x-x_k)^2 + \frac{4\sqrt{3}\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{3/2}}(x-x_k), & x \in I_k \end{cases} \quad (4.12)$$

$$u_{3k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{10\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}(x-x_k)^2 + \frac{12\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{3/2}}(x-x_k) + \frac{3\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}, & x \in I_k \end{cases} \quad (4.13)$$

$s_k(x)$ işlevleri aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

$$s_1(x_1) = y_0$$

$$s_{k-1}(x_k) - s_k(x_k) = 0, \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$s'_{k-1}(x_k) - s'_k(x_k) = 0, \quad k = 2, \dots, n-1$$

$$f'(x_k) = F(x_k, f(x_k)), \quad k = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

Buradaki ilk koşul, türevli denklemin başlangıç koşuludur. İkinci ve üçüncü koşullar, sırasıyla yaklaşık çözümün ve birinci türevinin ara noktadaki süreklilik koşullarıdır. Son koşul ise türevli denklemin tüm düğüm noktalarında sağlanma koşulu olmaktadır. f işlevi, tek değişkenli bir işlev olduğundan bu işlevin YBMG bileşenleri bir değişmez ve tek değişkenli x 'e bağlı işlevdir. Sayısal çözümün değişmezlik ölçeni aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

$$\sigma_0 = \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{3n-3} c_k v_k \right)^2}{\sum_{k=1}^{3n-3} (c_k)^2} \quad (4.15)$$

Burada v_k değeri, u_k işlevinin $[a, b]$ aralığında YBMG ağırlık işlevi altındaki tümlevinin değeridir. Boyutu $(3n-3)$ olan, k . ögesi sırasıyla v_k ve c_k olan \mathbf{v} ve \mathbf{c} yöneyleri tanımlanarak, değişmezlik ölçeninin bu yöneyler türünden anlatımı aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} \quad (4.16)$$

Bir sonraki aşama, değişmezlik ölçenini eniyileştirmek için Amaç İşlevimsisini oluşturmaktır. Bu amaçla aşağıdaki yapı kullanılacaktır.

$$J(\mathbf{c}, \lambda) = \sigma_0(\mathbf{c}) + \lambda^T (\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{r}) \quad (4.17)$$

Burada \mathbf{A} dizeyi, (4.14) sırasayılı koşul denklemlerinde bulunan bilinmeyen c_k değerlerinin katsayı dizeyi olup $(3n-3) \times (3n-3)$ boyutlu ve evriği (ing: inverse) bulunan bir dizeydir. \mathbf{r} yöneyi ise ögeleri (4.14)'te sağ yanda bulunan değerlerdir. λ yöneyi bu an için bilinmeyen ve (4.14)'te bulunan koşulları eniyileme denklemine

getiren bir yöneydir (Lagrange değiştirgesi). Eniyileme için Amaç İşlevimsisinin \mathbf{c} ve λ yöneylerine göre türevleri hesaplanıp, $(3n-3)$ boyutlu sıfır yöneyine eşitlendiğinde aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\nabla_{\lambda} J(\mathbf{c}, \lambda) = \mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (4.18)$$

$$\nabla_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c}, \lambda) = \frac{2}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} (\mathbf{v}\mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I}) \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \lambda = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

\mathbf{A} dizeyi, kare ve evriği olan bir dizey olduğundan \mathbf{c} yöneyi aşağıdaki biçimde bulunur.

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \quad (4.20)$$

Burada $(3n-3)$ sayıda denklem yer almaktadır. Bu denklemlerin bir kesimi doğrusal, diğer kesimi ise doğrusal olmayan denklemlerdir. Dolayısıyla c_k değerlerini bulmak için cebirsel bir yöntem gerekmektedir. Burada Gröbner tabanı kullanılacaktır. Bu yöntem ilk baştaki sistemi, aynı çözüm kümesini veren ancak daha kolay çözülebilen bir denklem takımına dönüştürmektedir. Gröbner tabanı yöntemiyle bulunan değerler, σ_0 değişmezlik ölçeninde yerine konulduğunda gerçel ve karmaşık σ_0 değerleri elde edilmektedir. Burada yalnızca gerçel değerler ile çalışılmakta ve bilinmeyen c_k değerlerini hesaplamak için gerçel olan değerlerden en büyük olan σ_0 değeri kullanılmaktadır. Bu yöntemle elde edilen yaklaşık çözümün oluşturduğu yanılğı değeri (ing: error), aşağıdaki bağıntı ile hesaplanmaktadır.

$$\text{yanılğı} = \int_a^b [f(x) - y(x)]^2 dx \quad (4.21)$$

Burada $y(x)$ işlevi, türevli denklemin gerçel çözümü olmaktadır.

4.1.1 Uygulama

Bu bölümde bazı uygulamalı örnekler gösterilmektedir. Bu örnekler, Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemler'in yaklaşık çözümlerinde Gröbner tabanının ve Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi'nin kullanılmasına yöneliktir.

Örnek 1

İncelenecek ilk örnek bir başlangıç değer sorunu (ing: initial value problem) olup açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$y' = -y^2, \quad y_0 = 1, \quad x \in [0,1] \quad (4.22)$$

Denklemin gerçek çözümü

$$y(x) = \frac{1}{x+1} \quad (4.23)$$

biçimindedir. Bu denklemin çözümünü daha açık bir biçimde inceleyebilmek için $[0,1]$ aralığı 3 nokta kullanılarak 2 eşit uzunlukta alt aralığa bölünmektedir. Yaklaşık çözüm, aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f(x) = s_1(x) + s_2(x), \quad (4.24)$$

Buradaki $s_1(x)$ ve $s_2(x)$ işlevleri (4.11), (4.12) ve (4.13) denklemlerinde bulunan taban işlevlerinin doğrusal birleştirilmesi olup açık bir biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} s_1(x) &= c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x) \\ s_2(x) &= c_4 u_4(x) + c_5 u_5(x) + c_6 u_6(x) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$s_1(x)$ ve $s_2(x)$ işlevleri, aşağıdaki koşulları sağlamaktadır.

$$s_1(x_1) = 4.24c_3 = 1$$

$$s_1(x_2) - s_2(x_2) = 3.16c_1 + 2.45c_2 + 1.41c_3 - 4.24c_6 = 0$$

$$s_1'(x_2) - s_2'(x_2) = 12.65c_1 + 29.4c_2 + 22.63c_3 - 19.6c_5 + 33.9c_6 = 0$$

$$s_1'(x_1) + s_2'(x_1) = -19.6c_2 - 33.94c_3 = -18c_3^2$$

$$s_1'(x_2) + s_2'(x_2) = -19.6c_5 - 33.9c_6 = -18c_6^2$$

$$s_1'(x_3) + s_2'(x_3) = 12.65c_4 + 29.4c_5 + 22.62c_6 = -(3.16c_4 + 2.45c_5 + 1.41c_6)^2 \quad (4.26)$$

A katsayılar dizeyi ve **r** sağyan yöneyi, (4.26)'da bulunan denklemlerden aşağıdaki biçimde oluşturulmaktadır.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4.24 & 0 & 0 & 0 \\ 3.16 & 2.45 & 1.41 & 0 & 0 & -4.24 \\ 12.65 & 29.4 & 22.63 & 0 & -19.6 & 33.9 \\ 0 & -19.6 & -33.94 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19.6 & -33.9 \\ 0 & 0 & 0 & 12.65 & 29.4 & 22.62 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r} = \left[1, 0, 0, -18c_3^2, -18c_6^2, -(3.16c_4 + 2.45c_5 + 1.41c_6)^2 \right]^T \quad (4.27)$$

Burada \mathbf{A} diziyi, evriği (ing: inverse) olan bir dizeydir. Bilinmeyen c_k değerleri,

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \quad (4.28)$$

bağıntısı ile hesaplanmaktadır. (4.28) sırasayılı bağıntıdan aşağıdaki denklemler oluşturulmaktadır.

$$c_1 - 0.52 + 2.13c_3^2 + 1.42c_6^2 = 0$$

$$c_2 + 0.41 - 0.92c_3^2 = 0$$

$$c_3 - 0.24 = 0$$

$$c_4 - 0.53 + 2.37c_3^2 + 4.51c_6^2 + 0.08(3.16c_4 + 2.45c_5 + 1.41c_6)^2 = 0$$

$$c_5 + 0.41 - 1.84c_3^2 - 2.76c_6^2 = 0$$

$$c_6 - 0.24 + 1.06c_3^2 + 1.06c_6^2 = 0 \quad (4.29)$$

Burada doğrusal olmayan denklemler bulunmaktadır. Bu denklem takımının Gröbner tabanı oluşturulup, bilinmeyen c_k , ($k = 1, \dots, 6$) değerleri hesaplanacaktır. Denklem takımının Gröbner Tabanı aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır.

$$G = \left\{ \begin{array}{l} -2.12 + 12c_6 + 12.73c_6^2, \\ -1.73 + 11.31c_5 + 29.39c_6, \\ 1589.04 + 2736c_4 + 1821.47c_4^2 - 14672.2c_6 - 5702.11c_4c_6, \\ -0.71 + 3c_3, \\ 8.57 + 24c_2, \\ -5.81 + 33.94c_1 - 45.54c_6 \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

Gröbner tabanında bulunan çokterimlilerin herbirinin 0'a eşitlenmesiyle elde edilen denklem takımının çözüm kümesi, (4.29) denklem takımı ile aynıdır. Ancak Gröbner tabanı ile elde edilen denklem takımı daha kolay bir biçimde çözülmektedir. Buradaki ilk denklem, yalnızca tek bir bilinmeyene bağlı bir denklem; ikinci denklem, bir bilinmeyeni ilk denklemde elde edilen değişken olmak üzere iki bilinmeyene bağlı bir denklem ve bu yolla süren denklemler olmaktadır. Bu denklem takımı dört ayrı c yöneyini vermektedir. Bu yöneyler, (4.16) sırasayılı denklemde bulunan değişmezlik ölçeninde yerine konulduğunda aşağıdaki değerler elde edilmektedir.

$$\sigma_0 = \{0.674472 + 0.015097i, 0.674472 - 0.015097i, 0.0107639, 0.956254\} \quad (4.31)$$

Burada yalnızca gerçel olan σ_0 değerleri ile çalışılacaktır. Değişmezlik ölçeni için en büyük değer 0.956254 olmaktadır. Karmaşık σ_0 değerlerinin boyu (ing: modulus), 0.674641 olarak hesaplanmaktadır. En büyük gerçel σ_0 değerini veren yaklaşık çözümün sayısal yanılığı 2.7×10^{-4} olmaktadır. Çizelge 4.1'de değişik sayıda düğüm noktası kullanılarak elde edilen deneysel sonuçlar verilmektedir.

Çizelge 4.1 : Örnek 1 için deneysel sonuçlar.

n	m	ds	çz	$n-\sigma_0$	$\sigma_0^{(1)}$ değeri	$\sigma_0^{(2)}$ değeri	Yanılı
3	6	6	4	2	0.0107639	0.956254	2.7×10^{-4}
4	9	9	8	2	0.0027477	0.959167	5.3×10^{-5}
5	12	12	16	2	0.0009578	0.959996	1.6×10^{-5}
6	15	15	32	2	0.0003912	0.960344	6.7×10^{-6}
7	18	18	64	2	0.0001738	0.960523	3.2×10^{-6}

Çizelgede kullanılan kısaltmalar aşağıda açıklanmaktadır:

n: düğüm nokta sayısı

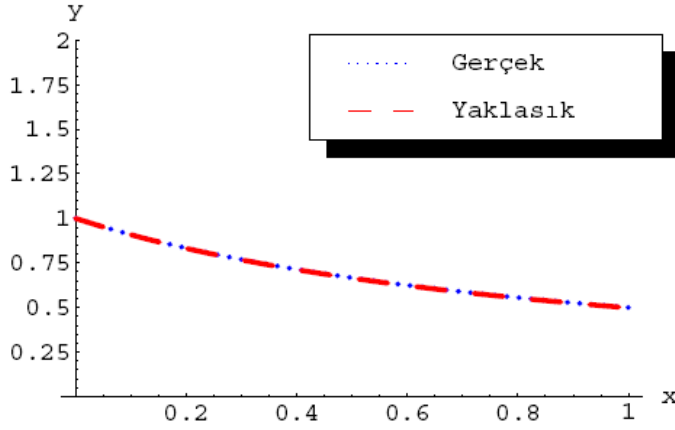
m: c yöneyinin boyutu

ds: Gröbner tabanından elde edilen denklem sayısı

çz: çözüm sayısı

$n-\sigma_0$: gerçel değişmezlik ölçeni değerlerinin sayısı

Çizelgeden gözlemlendiği üzere, c yöneyinin boyutu ve Gröbner tabanından elde edilen denklem sayısı $3(n-1)$, çözüm sayısı ise 2^{n-1} sayıdadır. Gerçek çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırmalı çizimi ise Şekil 4.1'de yer almaktadır.



Şekil 4.1 : $y(x) = \frac{1}{x+1}$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 2

Bu örnekte yaklaşık çözümü elde edilecek ikinci denklem aşağıda verilmektedir.

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad x \in [1, 2] \quad (4.32)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

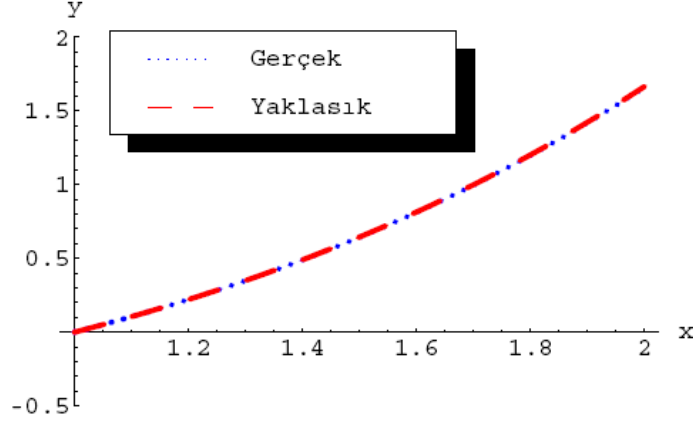
$$y(x) = x \tan(\ln x) \quad (4.33)$$

olarak hesaplanmaktadır. Burada (4.32) denkleminin çözümünün tüm ayrıntıları yerine, değişik sayıda nokta kullanılarak elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.2 : Örnek 2 için deneysel sonuçlar.

n	m	ds	çz	$n-\sigma_0$	$\sigma_0^{(1)}$ değeri	$\sigma_0^{(2)}$ değeri	Yanılğı
3	6	6	4	2	0.683934	0.365163	5.5×10^{-4}
4	9	9	8	2	0.685339	0.258091	9.6×10^{-5}
5	12	12	16	2	0.685744	0.199732	2.9×10^{-5}
6	15	15	32	2	0.685913	0.162958	1.1×10^{-5}
7	18	18	64	2	0.686001	0.137644	5.6×10^{-6}

Çizelgeden, c yöneyinin boyutunun ve Gröbner tabanından elde edilen denklem sayısının $3(n-1)$, çözüm sayısının ise 2^{n-1} olarak elde edildiği gözlemlenmektedir. Gerçek çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırmalı çizimi Şekil 4.2'de bulunmaktadır.



Şekil 4.2 : $y(x) = x \tan(\ln x)$, $[0,1]$ aralığı.

Örnek 3

Bu örnekte incelenecek son denklem aşağıda verilmektedir.

$$y' = -y^3, \quad y(1) = 1/2, \quad x \in [1,2] \quad (4.34)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

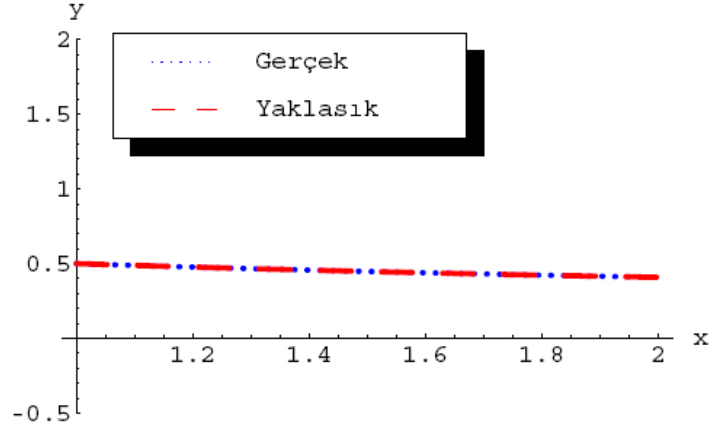
$$y = (2 + 2x)^{-1/2} \quad (4.35)$$

biçimindedir. Çizelge 4.3'te bu denklemin değişik sayıda düğüm noktası kullanılarak elde edilen sonuçları verilmektedir.

Çizelge 4.3 : Örnek 3 için deneysel sonuçlar.

n	m	ds	çz	$n-\sigma_0$	$\sigma_0^{(1)}$ değeri	Yanılgı
3	6	6	9	1	0.996508	4.4×10^{-7}
4	9	9	27	1	0.996555	8.7×10^{-8}
5	12	12	81	1	0.996571	2.8×10^{-8}

Çizelgeden, c yöneyinin boyutunun ve Gröbner tabanından elde edilen denklem sayısının $3(n-1)$, çözüm sayısının ise 3^{n-1} olarak elde edildiği gözlemlenmektedir. Gerçek çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırmalı çizimi ise Şekil 4.3'te yer almaktadır.



Şekil 4.3 : $y = (2 + 2x)^{-1/2}$, $[0,1]$ aralığı.

Bu çizelge ve şekillerden de görülebileceği üzere az sayıda nokta kullanılmasına karşın, yaklaşık çözüm gerçek çözüme oldukça iyi bir biçimde yaklaşmıştır.

5. UZAY GENİŞLETME

Doğrusal Sıradan Türevli Denklemlerin sayısal çözümü, YBMG değişmezlik ölçeninin eniyilenmesi ile gerçekleştirilmiştir. Doğrusal olmayan türevli denklemler için ise Gröbner tabanı yöntemi uygulanmıştır. Ancak Gröbner tabanı, çokterimli yapıdaki doğrusal olmayan denklemlerin çözümünün hesaplanmasında kullanılabildiğinden, çokterimli yapıda olmayan türevli denklemler, Uzay Genişletme yöntemi ile çokterimli yapıya dönüştürülüp Gröbner tabanı ve YBMG ile çözülebilmektedir.

Aşağıda Doğrusal Olmayan Birinci Kerteden Sıradan Türevli denklem takımının genel gösterilimi bulunmaktadır.

$$y'_i = f_i(y_1, \dots, y_N), \quad y_i(x_0) = a_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (5.1)$$

Burada, f_i işlevlerine denklem takımının tanımsal işlevleri (ing: descriptive functions) denmektedir. Bu denklem takımı otonom (ing: autonomous) denklem takımıdır. Otonom olmayan denklemler, bağımsız değişkene yeni bir değişken tanımlaması yapılarak otonom durumuna getirilebilirler. (5.1) denklem takımındaki tanımsal işlevler, genel olarak y_1, \dots, y_N değişkenlerinin bilinen işlevlerinin çokterimlileri olarak yazılabilmektedir. Matematiksel olarak tanımsal işlevler için,

$$f_i = \sum \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_{m_i}}^{(i)} \phi_1^{k_1} \dots \phi_{m_i}^{k_{m_i}}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (5.2)$$

anlatımı yapılabilir. Burada toplam, $k_1 + k_2 + \dots + k_{m_i} \leq D_i$ eşitsizliğini sağlayan k değerleri üzerinden hesaplanmakta ve D_i , f_i çokterimlisinin derecesi olmaktadır. (5.2) denklemde bulunan ϕ işlevleri, çokterimli, trigonometrik, hiperbolik, logaritmik ya da hipergeometrik gibi bilinen işlevlerdir. Bu işlevlerden herhangi biri uygun olabilmekte ancak hangisinin seçileceği tam olarak isteğe bağlı (ing: arbitrary) değildir. ϕ işlevleri kümesinin sonlu sayıda ögesi bulunmalı ve y_1, \dots, y_N değişkenlerine göre aşağıda tanımlanan Lie işleci altında kapalı olmalıdır [52-55].

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N f_i(y_1, \dots, y_N) \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (5.3)$$

Diğer bir deyişle, ϕ işlevlerinin y_1, \dots, y_N değişkenlerine göre olan türev işlevleri, yine aynı kümede yer almalıdır. Bu kümenin öge sayısı M ile gösterilirse, aşağıda yeni bir değişkenin tanımı yapılabilir.

$$w_k = \phi_k, \quad k = 1, \dots, M \quad (5.4)$$

Burada y konaçları (ing: coordinate) tarafından örtülen uzay, yeni tanımlanan w konaçları ile değiştirilmektedir. Dolayısı ile $M \neq N$ ise uzayın boyutu değişmektedir. Bir çok uygulamada $M > N$ olmaktadır. Bu şekilde uzayın değişimine Uzay Genişletme Dönüştürümü denilmektedir.

(5.2) denkleminde bulunan tanımsal işlevler, aşağıdaki biçimde çokterimli olarak yazılabilir.

$$f_i = \sum_{k=1}^{D_s} \sum_{j=1}^{n_k} \beta_k^{(j)} P_k^{(j)}, \quad i = 1, \dots, M \quad (5.5)$$

Burada D_s , genişletilmiş uzayda bulunan yeni tanımsal işlevlerdeki çokterimlilerin en büyük derecesi, β – katsayıları başta verilen denklem takımı tarafından belirlenen değerler ve $P_k^{(j)}$ ise w değişkenleri türünden bir çokterimli olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$P_k^{(j)} = w_1^{j_1} w_2^{j_2} \dots w_M^{j_M} \quad (5.6)$$

Burada $j_1 + j_2 + \dots + j_M = k$ olmaktadır. Dolayısıyla, tanımsal işlevleri belirlemek için kullanılan değiştirgelerin (ing: parameter) sayısı, sonlu bir sayıya indirgenmiştir. Fakat tanımsal işlevlerin yapısında daha da yalınlaştırma yapma olanağı bulunmaktadır. Bunun için aşağıdaki yeni değişkenler tanımlanmaktadır.

$$\overline{w}_S = P_k^{(j)}, \quad S = j + \sum_{i=1}^{k-1} n_i, \quad 1 \leq S \leq \overline{M} = \sum_{i=1}^{D_s} n_i \quad (5.7)$$

Bu durumda, tanımsal işlevler w değişkenlerine doğrusal bağımlı olmaktadır. Ayrıca w değişkenlerine göre Lie işlecinin herhangi bir $P_k^{(j)}$ ile gösterilen homojen bir çokterimli üzerindeki etkisi, çeşitli homojen çokterimlilerin bir doğrusal birleştirimini oluşturmaktır. Böylece, üzerinde çalışılan denklem takımının yeni

tanımsal işlevleri, \bar{w} değişkenlerinin ikinci dereceden işlevleri olacaktır. Eğer bu işlevler w değişkenlerinde doğrusal değilirse, bu derece tanımsal işlevlerin alabileceği en küçük derece olacaktır.

Özetle, verilen bir denklem takımının tanımsal işlevleri, Lie işleci altında kapalı olan işlevler kümesinin öğeleri türünden çokterimli olarak yazılabilirse, o zaman verilen sistemi yeni değişkenler türünden ikinci dereceden tanımsal işlevlerin olduğu başka bir denklem takımına dönüştüren uygun bir uzay genişletme dönüştürümü bulunmaktadır.

Dolayısı ile, bir denklem takımının tanımsal işlevleri, aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$f_j = \alpha_j^{(0)} + \sum_{k=1}^N \alpha_{jk}^{(1)} w_k + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \alpha_{jkl}^{(2)} w_k w_l \quad j = 1, \dots, M \quad (5.8)$$

Burada α sayıları, denklem takımı ile birlikte verilmektedir [52].

Örnek 1

İlk örnek, Doğrusal Olmayan Türevli Denklemler türünden Tam (ing: Exact) Denklem olmaktadır.

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0 \quad (5.9)$$

Bu denklem düzenlenerek aşağıdaki biçimde yazabilir.

$$y' = -\frac{1}{y} - \frac{y}{2x} \quad (5.10)$$

Uzay Genişletme yapmak için aşağıdaki yeni işlevler tanımlanmaktadır.

$$z_1(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad z_2(x) = \frac{1}{y(x)}, \quad z_3(x) = \frac{1}{x}, \quad z_4(x) = z_2^2(x) = \frac{1}{y^2(x)} \quad (5.11)$$

Bu işlevlerin oluşturduğu türevli denklem takımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$z_1'(x) = -z_2(x)z_3(x) - \frac{3}{2}z_1(x)z_3(x)$$

$$z_2'(x) = z_2(x)z_4(x) + \frac{1}{2}z_2(x)z_3(x)$$

$$z_3'(x) = -z_3^2(x)$$

$$z_4'(x) = 2z_4^2(x) + z_4(x)z_3(x) \quad (5.12)$$

Buradan görüleceği üzere denklem takımı, sağ yanı en çok ikinci dereceden olan çokterimliler türünden elde edilmiştir.

Örnek 2

İncelenecek ikinci denklem İntegral Çarpanı (ing: Integrated Factors) türünden bir denklem olup açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad (5.13)$$

Denklem düzenlenirse,

$$y' = -\frac{3xy + y^2}{x^2 + xy} = -2\frac{y}{x+y} - \frac{y}{x} \quad (5.14)$$

biçimine dönüşür. Aşağıda yer alan işlevler tanımlanarak Uzay Genişletme işlemi gerçekleştirilir.

$$z_1(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad z_2(x) = \frac{y(x)}{y(x)+x}, \quad z_3(x) = \frac{1}{x}, \quad (5.15)$$

$$z_4(x) = \frac{1}{y(x)+x}, \quad z_5(x) = \frac{y(x)}{(y(x)+x)^2}, \quad z_6(x) = \frac{y(x)}{x(y(x)+x)}$$

Bu işlevler kullanılarak elde edilen denklem takımı aşağıda yer almaktadır.

$$z_1'(x) = -2z_1(x)z_3(x) - 2z_2(x)z_3(x)$$

$$z_2'(x) = -z_1(x)z_4(x) - 3z_5(x) + z_1(x)z_5(x) + 2z_2(x)z_5(x)$$

$$z_3'(x) = -z_3^2(x)$$

$$z_4'(x) = -z_4^2(x) + z_5(x)z_3(x) + 2z_5(x)z_4(x)$$

$$z_5'(x) = -z_5(x)z_3(x) - 4z_5(x)z_4(x) + 2z_5(x)z_6(x) + 4z_5^2(x)$$

$$z_6'(x) = -2z_6(x)z_3(x) - 3z_5(x)z_3(x) + z_6^2(x) + 2z_6(x)z_5(x) \quad (5.16)$$

Dolayısı ile (5.14) denklemi, Uzay Genişletme yöntemi ile sağ yanı derecesi en yüksek 2 olan çokterimliler türünden yazılabilen bir denklem takımına dönüştürülmüştür.

Örnek 3

Aşağıda Değişkenlere Ayrılabilir (ing: seperable) türünden bir Türevli Denklem yer almaktadır.

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \quad (5.17)$$

Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$y' = \frac{3}{2} \frac{x^2}{y-1} + 2 \frac{x}{y-1} + \frac{1}{y-1} \quad (5.18)$$

denklemi elde edilir. Aşağıdaki işlevler kullanılarak (5.18) denklemi, türevli denklem takımına dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned} z_1(x) &= \frac{x^2}{y(x)-1}, & z_2(x) &= \frac{x}{y(x)-1}, & z_3(x) &= \frac{1}{y(x)-1}, \\ z_4(x) &= \frac{x^2}{(y(x)-1)^2}, & z_5(x) &= \frac{x}{(y(x)-1)^2}, & z_6(x) &= \frac{1}{(y(x)-1)^2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Bu işlevlerin oluşturduğu denklem sistemi aşağıdaki biçimde oluşmaktadır.

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= 2z_2(x) - \frac{3}{2}z_1(x)z_4(x) - 2z_2(x)z_4(x) - z_3(x)z_4(x) \\ z_2'(x) &= z_3(x) - \frac{3}{2}z_1(x)z_5(x) - 2z_2(x)z_5(x) - z_3(x)z_5(x) \\ z_3'(x) &= -\frac{3}{2}z_1(x)z_6(x) - 2z_2(x)z_6(x) - z_3(x)z_6(x) \\ z_4'(x) &= 2z_5(x) - 3z_4^2(x) - 4z_4(x)z_5(x) - 2z_5^2(x) \\ z_5'(x) &= z_3^2(x) - 2z_5^2(x) - 2z_6(x)z_5(x) - 3z_4(x)z_5(x) - 2z_4(x)z_6(x) \\ z_6'(x) &= -3z_4(x)z_6(x) - 4z_5(x)z_6(x) - 2z_6^2(x) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Örnek 4

Son örnek Bernoulli türünden bir denklem olup açık yapısı aşağıda verilmektedir.

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (5.21)$$

Bu denklem için kullanılacak işlevler aşağıda bulunmaktadır.

$$z_1(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad z_2(x) = \frac{y^3(x)}{x^2}, \quad z_3(x) = \frac{1}{x}, \quad z_4(x) = \frac{y^2(x)}{x^2} \quad (5.22)$$

Bu işlevlerin oluşturduğu türevli tenklem takımı ise aşağıda yer almaktadır.

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= -3z_1(x)z_3(x) - z_2(x)z_3(x) \\ z_2'(x) &= -8z_2(x)z_3(x) + 3z_4(x)z_2(x) \\ z_3'(x) &= -z_3^2(x) \\ z_4'(x) &= 6z_4(x)z_3(x) - 2z_4^2(x) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Bu örneklerden de görüleceği üzere, Uzay Genişletme yöntemi ile değişik türden Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemler, sağ yanı en çok ikinci derece olan çokterimliler olarak yazılabilmektedir.

5.1 Uzay Genişletme Ve Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi Kullanılarak Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemlerin Sayısal Çözümü

Genel yapısı

$$y' = F(x, y), \quad y(x_1) = y_0 \quad (5.24)$$

olan birinci kereden doğrusal olmayan başlangıç değerli bir türevli denklemi ele alınırsa; bu denklemin sağ yanı, derecesi en yüksek 2 olan yeni tanımlanan işlevlerin çokterimlileri türünden yazılabilmektedir. $z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)$ açık yapısı bilinmeyen işlevler olmak üzere, bu işlevler Lie işleci (ing: operator) altında kapalı olmalıdırlar. Yani,

$$z_i' = \alpha_i + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} z_k + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ikj} z_k z_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.25)$$

(5.24) denklemi, yöneysel bir biçimde yazılabilmektedir.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}(x_1) = \mathbf{q}_0 \quad (5.26)$$

Burada \mathbf{p}' yöneyi,

$$\mathbf{p} = [z_1(x) \quad z_2(x) \quad \cdots \quad z_m(x)] \quad (5.27)$$

olarak tanımlanan yöneyin x bağımsız değişkenine göre türevi olan yöney, \mathbf{q} yöneyi öğeleri (5.25) denkleminde bulunan sağyan işlevleri olan yöney, \mathbf{q}_0 yöneyi ise \mathbf{p} yöneyinin x_1 noktasındaki değerleri olan yöneydir. Bu durumda (5.24) denklemi, yöneysel bir biçimde yazılabilmektedir. Bu aşamada (5.26) denkleminin yaklaşık çözümü için Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminden faydalanılacaktır. Bunun için x_1 değerini başlangıç noktası olarak alan $I = [a, b]$ aralığında çalışılacaktır. Bu aralık n sayıda nokta kullanılarak eşit uzunlukta alt aralıklara bölünür. Herbir aralıkta aşağıda birbirine dik ve birimboylu taban işlevleri tanımlanmaktadır.

$$u_{3k-2}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{\sqrt{5}\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}(x-x_k)^2, & x \in I_k \end{cases} \quad (5.28)$$

$$u_{3k-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{5\sqrt{3}\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}(x-x_k)^2 + \frac{4\sqrt{3}\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{3/2}}(x-x_k), & x \in I_k \end{cases}$$

$$u_{3k}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_k \\ \frac{10\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{5/2}}(x-x_k)^2 + \frac{12\sqrt{x_1-x_n}}{(x_k-x_{k+1})^{3/2}}(x-x_k) + \frac{3\sqrt{x_1-x_n}}{\sqrt{(x_k-x_{k+1})}}, & x \in I_k \end{cases}$$

(5.26) denkleminin sayısal çözümü \mathbf{f} ile gösterilirse; \mathbf{f} yöneyi,

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{s}_k(x) \quad (5.29)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada $\mathbf{s}_k(x)$ yöneyi herbir aralıkta tanımlanan taban işlevlerinin doğrusal birleştirilimidir. Yani,

$$\mathbf{s}_k(x) = u_{3k-2}(x)\mathbf{c}_{3k-2} + u_{3k-1}(x)\mathbf{c}_{3k-1} + u_{3k}(x)\mathbf{c}_{3k}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (5.30)$$

Burada \mathbf{c}_k , ($1 \leq k \leq 3n-3$) yöneyleri doğrusal birleştirilimin bilinmeyen katsayı yöneyleri olmaktadır. $\mathbf{s}_k(x)$ yöneyleri, aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

$$\mathbf{s}_1(x_1) = \mathbf{q}_0$$

$$\mathbf{s}_k(x_{k+1}) - \mathbf{s}_{k+1}(x_{k+1}) = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$\mathbf{s}'_k(x_{k+1}) - \mathbf{s}'_{k+1}(x_{k+1}) = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$\mathbf{f}'(x_k) = \mathbf{q}(x_k), \quad k = 1, \dots, n \quad (5.31)$$

\mathbf{f} yöney değerli işlevi, tek bağımsız değişkene bağlı olduğundan, bu işlevin Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1(x) \quad (5.32)$$

Burada sağ yanda yöney değerli iki YBMG bileşeni bulunmakta olup bu durum YBMG kuramının belirttiği 2^1 bileşen sayısı ile tutarlıdır. Sağ yandaki \mathbf{f}_0 ve $\mathbf{f}_1(x)$ ile simgelenen büyüklükler, sırasıyla, değişmez (ing: constant) ve bir değişkenli (ing: univariate), yöney değerli, YBMG bileşenlerini göstermektedir. YBMG tanımının iki temel ögesi olan aralık ve ağırlık sırasıyla $[a, b]$ ve $w(x)$ olarak düşünülürse aşağıdaki tanım eşitlikleri yazılabilir.

$$\mathbf{f}_0 \equiv \int_a^b dxw(x)\mathbf{f}(x), \quad \mathbf{f}_1(x) \equiv \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_0 \quad (5.33)$$

\mathbf{f}_0 ve $\mathbf{f}_1(x)$ YBMG bileşenlerinin iççarpımı aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1) \equiv \int_a^b dxw(x)\mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_1(x) = \mathbf{f}_0^T \int_a^b dxw(x)\mathbf{f}_1(x) = 0 \quad (5.34)$$

Bu iki bileşenin iççarpım tanımı, birinci bileşenin devriği (ing: transpose) ile ikinci bileşenin çarpımının YBMG ağırlığı ile verilen aralıkta tümlevinin (ing: integral) değeri olmaktadır. Bileşenlerin birbirine dik olduğu gözlemlenmektedir. Bu durum YBMG kuramında olması gereken bir olgudur.

YBMG tanımı için değişmezlik ölçeni ise aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$\sigma_0 \equiv \frac{(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0)}{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} = \frac{\mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0}{\int_a^b dxw(x)\mathbf{f}(x)^T \mathbf{f}(x)} \quad (5.35)$$

Burada \mathbf{f} ve \mathbf{c} yöneyleri m boyutludur. \mathbf{f} yöneyinin boy karesi aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|^2 &\equiv \int_a^b dxw(x) \left(\sum_{i=1}^{3n-3} u_i(x)\mathbf{c}_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^{3n-3} u_i(x)\mathbf{c}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{3n-3} \sum_{j=1}^{3n-3} \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j \int_a^b dxw(x)u_i(x)u_j(x) = \sum_{i=1}^{3n-3} \sum_{j=1}^{3n-3} \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{3n-3} \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i = \mathbf{c}^T \mathbf{c} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Burada

$$\mathbf{c} \equiv \left[\mathbf{c}_1^T \dots \mathbf{c}_{3n-3}^T \right]^T \quad (5.37)$$

tanımı yapılmaktadır. Öte yandan,

$$v_i \equiv \int_a^b dx w(x) u_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, 3n-3 \quad (5.38)$$

tanımı yapılarak

$$\mathbf{f}_0 = \sum_{i=1}^{3n-3} v_i \mathbf{c}_i \quad (5.39)$$

ve buradan

$$\|\mathbf{f}_0\|^2 \equiv \mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0 = \sum_{i=1}^{3n-3} \sum_{j=1}^{3n-3} v_i v_j \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = \mathbf{c}^T \mathbf{V} \mathbf{c} \quad (5.40)$$

yazılabilmektedir. Buradaki \mathbf{V} dizeyinin (i,j) . bloğu, \mathbf{I}_m , $m \times m$ türünde birim dizeyi göstermek üzere, $v_i v_j \mathbf{I}_m$ yapısındadır. Buna göre değişmezlik ölçeni,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{V} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} \quad (5.41)$$

biçiminde yazılmaktadır. Değişmezlik ölçeninin en büyük değerinin elde edilmesi için aşağıdaki Amaç İşlevimsisi ele alınacaktır.

$$J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma_0(\mathbf{c}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{r}) \quad (5.42)$$

Burada \mathbf{A} dizeyi (5.31) denkleminde bulunan koşullarda \mathbf{c} yöneyinin katsayıları olan kare ve evirtilebilir bir dizey, \mathbf{r} yöneyi ise bu koşulların sağ yan yöneyi olmaktadır.

Amaç İşlevimsisinin \mathbf{c} ve $\boldsymbol{\lambda}$ yöneylerine göre türevleri hesaplanıp $(3mn-3m)$ boyutlu $\mathbf{0}$ yöneyine eşitlendiğinde aşağıdaki bağıntılar elde edilmektedir.

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (5.43)$$

$$\nabla_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{2}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} (\mathbf{v} \mathbf{v}^T - \sigma_0 \mathbf{I}) \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (5.44)$$

\mathbf{A} dizeyi kare ve evirtilebilir bir dizey olduğundan (5.43) denkleminde \mathbf{c} yöneyi

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} \quad (5.45)$$

olarak hesaplanır. Bu eşitlikte $(3mn-3m)$ sayıda denklem yer almaktadır. Burada doğrusal olmayan denklemler de bulunmaktadır. Bu denklemlerin çözümü Gröbner Tabanı ile gerçekleştirilmektedir. Bulunan \mathbf{c} yöneyinin değerleri (5.41) denkleminde yerine konulduğunda gerçel ve karmaşık değerli σ_0 değerleri elde edilmektedir. Burada gerçel olan değerlerden en büyük değeri veren \mathbf{c} yöneyi, sayısal çözümün bilinmeyen katsayılarını vermektedir. Böylece, gerçek çözüme yakınsayan sayısal çözüm oluşturulmaktadır.

5.1.1 Uygulama

Bu bölümde, gerçek çözümü bilinen aşağıdaki denklemin Uzay Genişletme yöntemi ile yaklaşık çözümü hesaplanacaktır.

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0, \quad y(0.5) = 1.22474 \quad (5.46)$$

Denklemin gerçek çözümü

$$y = \left(\frac{1-x^2}{x} \right)^{1/2}$$

olmaktadır. Bu denklem, aşağıdaki biçimde yeniden düzenlenebilir.

$$y' = -\frac{1}{y} - \frac{y}{2x} \quad (5.47)$$

Bu denklemin Uzay Genişletme Dönüştürümü için aşağıdaki yeni bilinmeyen işlevler tanımlanmaktadır.

$$z_1(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad z_2(x) = \frac{1}{y(x)}, \quad z_3(x) = \frac{1}{x}, \quad z_4(x) = z_2^2(x) = \frac{1}{y^2(x)} \quad (5.48)$$

Bu işlevlerin oluşturduğu türevli denklem takımı aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$z_1' = -z_2z_3 - \frac{3}{2}z_1z_3, \quad z_1(0.5) = 2.44949$$

$$z_2' = z_2z_4 + \frac{1}{2}z_2z_3, \quad z_2(0.5) = 0.816497$$

$$z_3' = -z_3^2, \quad z_3(0.5) = 2$$

$$z_4' = 2z_4^2 + z_4z_3, \quad z_4(0.5) = 0.666667 \quad (5.49)$$

Burada denklemin sayısal çözümü, $[0.5,0.9]$ aralığında $n=3$ düğüm noktası kullanılarak hesaplanacaktır. Bu durumda sayısal çözüm yöneysel yapıdadır. Sayısal çözüm \mathbf{f} ile simgelenirse, \mathbf{f} yöneyi aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{f} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T \quad (5.50)$$

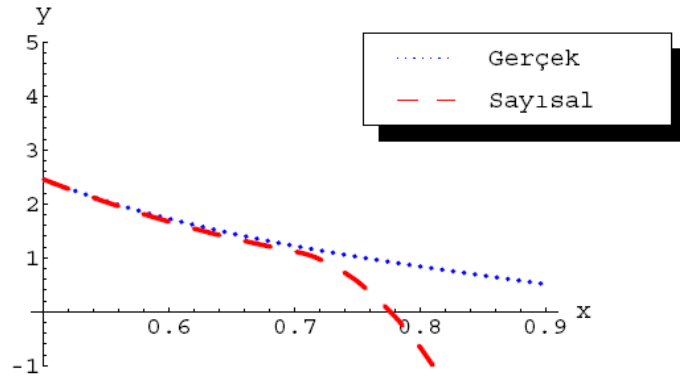
\mathbf{f} yöneyi, taban işlevleri türünden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{f} = u_1(x)\mathbf{c}_1 + u_2(x)\mathbf{c}_2 + u_3(x)\mathbf{c}_3 + u_4(x)\mathbf{c}_4 + u_5(x)\mathbf{c}_5 + u_6(x)\mathbf{c}_6 \quad (5.51)$$

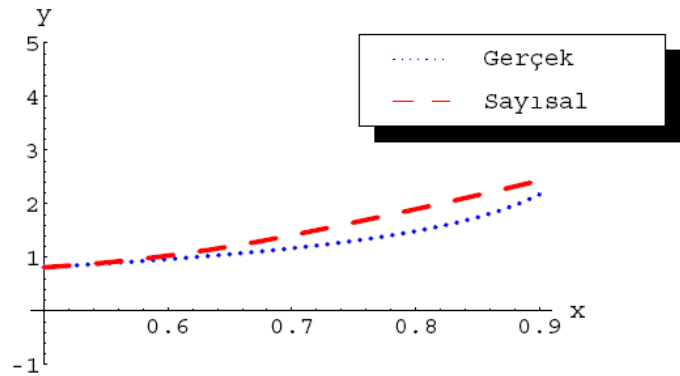
\mathbf{c}_k , ($1 \leq k \leq 6$) yöneyleri açık olarak

$$\mathbf{c}_k = [c_{k1} \quad c_{k2} \quad c_{k3} \quad c_{k4}]^T \quad (5.52)$$

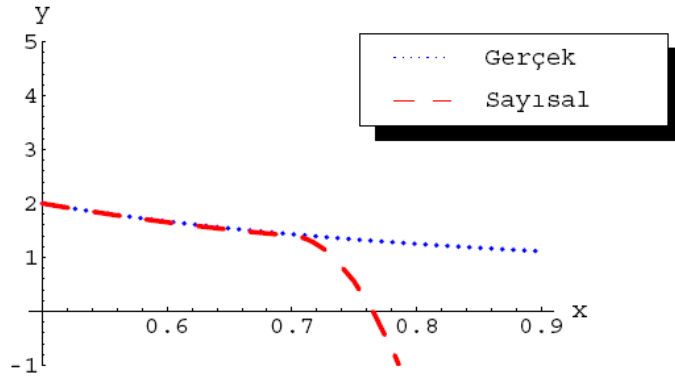
biçiminde tanımlanmaktadır. Bir önceki bölümde anlatılan yöntem uygulandığında değişmezlik ölçeni $\sigma_0 = 0.379064$ olarak hesaplanmaktadır. Aşağıda $z_k(x)$, ($1 \leq k \leq 6$) işlevlerinin (5.48) denkleminde tanımlanan yapıları ile sayısal olarak elde edilen çözümlerinin karşılaştırmalı çizimleri aşağıda yer almaktadır.



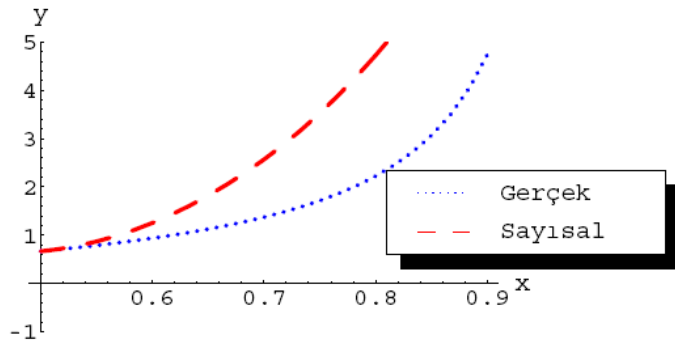
Şekil 5.1 : $z_1(x) = y/x$ işlevi.



Şekil 5.2 : $z_2(x) = 1/y$ işlevi.

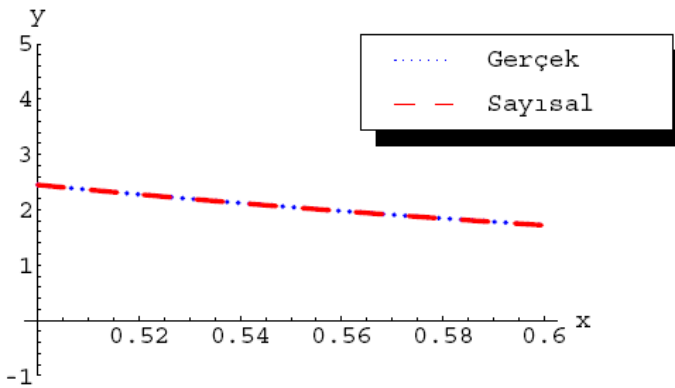


Şekil 5.3 : $z_3(x) = 1/x$ işlevi.

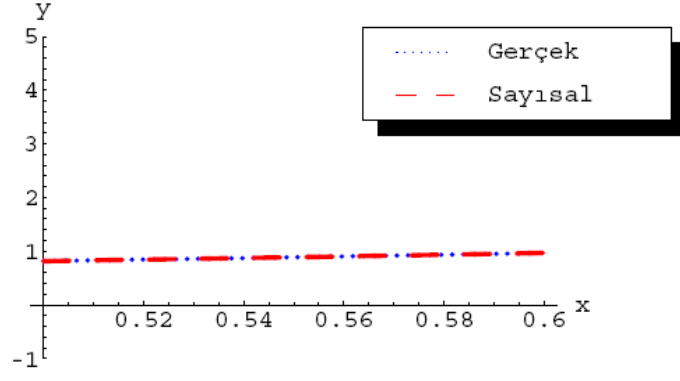


Şekil 5.4 : $z_4(x) = 1/y^2$ işlevi.

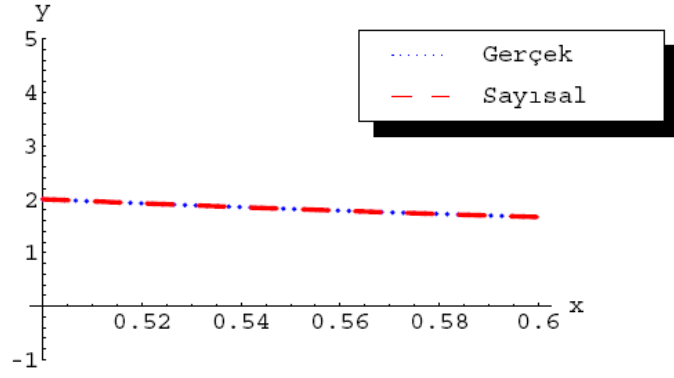
Burada özenli bir inceleme yapıldığında bazı işlevlerde yakınsama sorunu olduğu gözlemlenmiştir. Bu sorunu ortadan kaldırmak ya da yaklaşımın niteliğini artırmak için nokta sayısının artırılması veya aralığın daraltılması denenebilir. Ancak nokta sayısı arttırıldığında oluşan denklemlerin sayısı da artmaktadır. Bu durumun Gröbner tabanının hesaplamasında oldukça zorluk getirdiği gözlemlenmiştir. Bunun için aralık $[0.5,0.6]$ olarak daraltıldığında değişmezlik ölçeni $\sigma_0 = 0.993171$ olarak hesaplanmaktadır. Bu durumda elde edilen çizimler aşağıda yer almaktadır.



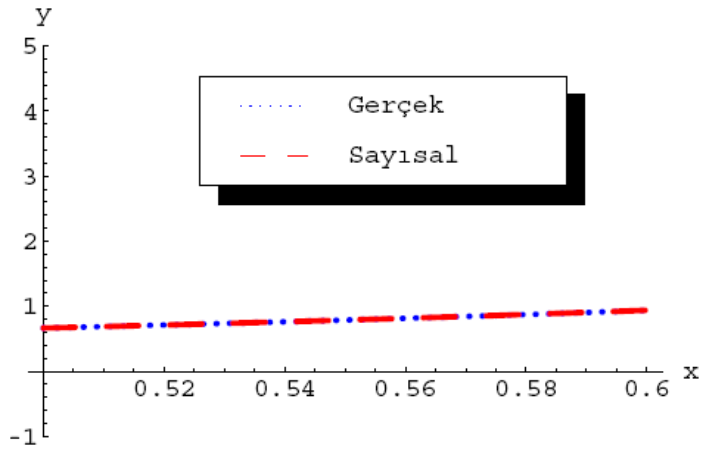
Şekil 5.5 : $z_1(x) = y/x$ işlevi.



Şekil 5.6 : $z_2(x) = 1/y$ işlevi.



Şekil 5.7 : $z_3(x) = 1/x$ işlevi.



Şekil 5.8 : $z_4(x) = 1/y^2$ işlevi.

Çizimlerden de görüleceği üzere aralık daraltılınca, değişmezlik ölçeni 1'e yaklaşmış ve sayısal çözüm gerçek çözüme yakınsamıştır. Daha genel bir gözlem yapabilmek için aşağıdaki yapıda bulunan türevli denklem incelenecektir.

$$y' = -\frac{\beta_1}{y} - \beta_1 \frac{y}{2(\beta_1 x + \beta_2)}, \quad y(0) = \left(\frac{c - \beta_2^2}{\beta_2} \right)^{1/2}, \quad x \in [0,1] \quad (5.53)$$

Bu denklemin gerçek çözümü

$$y = \left(\frac{c - (\beta_1 x + \beta_2)^2}{(\beta_1 x + \beta_2)} \right)^{1/2} \quad (5.54)$$

biçimindedir. Uzay genişletme için kullanılan işlevler aşağıda yer almaktadır.

$$z_1(x) = \frac{y(x)}{\beta_1 x + \beta_2}, \quad z_2(x) = \frac{1}{y(x)}, \quad z_3(x) = \frac{1}{\beta_1 x + \beta_2}, \quad z_4(x) = \frac{1}{y^2(x)} \quad (5.55)$$

Burada c , β_1 ve β_2 değişkenlerinin alacakları değerlere göre (5.53) denkleminin yaklaşık çözümü yapılacaktır. Bu değişkenler aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

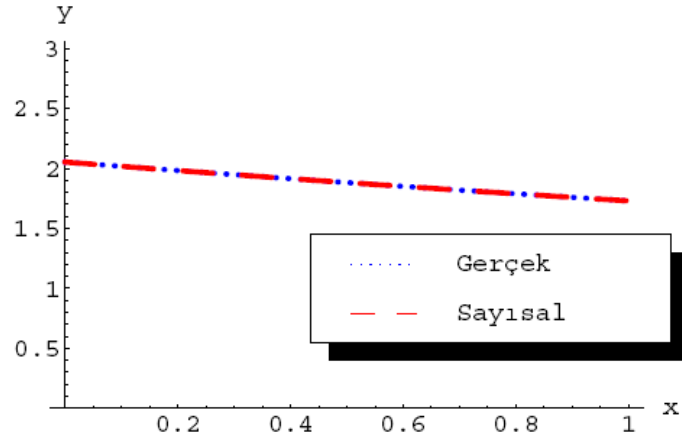
$$\beta_2 \neq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 \neq 0, \quad c, \beta_1, \beta_2 > 0, \quad c - \beta_2^2 > 0, \quad c - (\beta_1 + \beta_2)^2 > 0 \quad (5.56)$$

c , β_1 ve β_2 değişkenlerinin aldığı değerlere göre elde edilen σ_0 değişmezlik ölçenleri Çizelge 5.1'de verilmektedir.

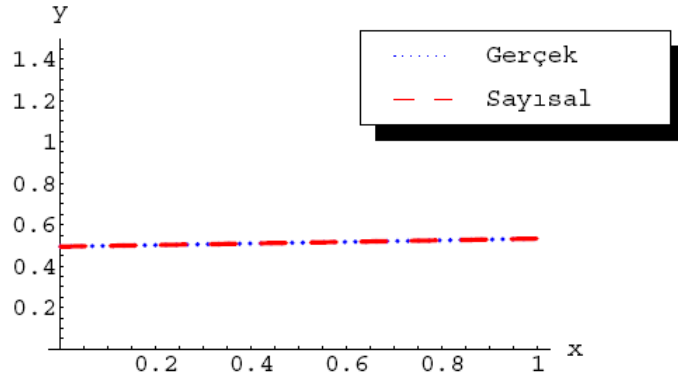
Çizelge 5.1 : Değişmezlik ölçeni değerleri.

β_1	β_2	c	σ_0	β_1	β_2	c	σ_0
0.5	0.5	1	karmaşık	0.1	0.9	4	0.997624
0.5	0.5	5	0.89353	0.1	0.9	5	0.997675
0.5	0.5	10	0.895147	0.1	0.9	6	0.266011
0.3	0.5	5	0.955041	0.1	0.9	10	0.234326
0.3	0.5	10	0.955632	0.1	0.9	20	karmaşık
0.3	0.7	10	0.974374	0.01	0.9	5	karmaşık
0.2	0.8	1	karmaşık	0.2	0.9	5	0.991396
0.2	0.8	5	0.98965	0.3	0.9	5	0.981915
0.2	0.8	10	0.990057	0.1	0.985	5	0.997990
0.2	0.8	20	0.261616	0.1	0.3	5	0.151206
0.1	0.9	3	0.997509	0.9	0.9	5	0.257611

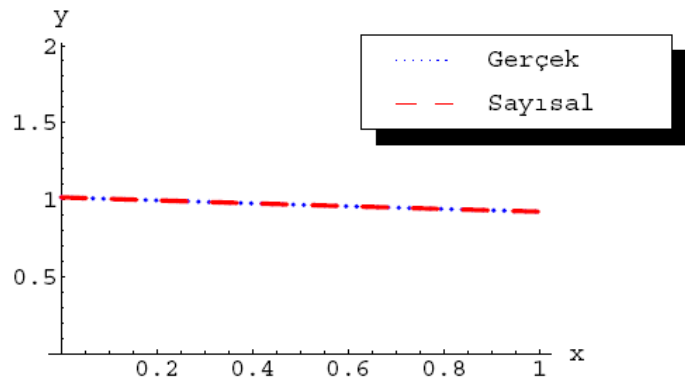
Çizelgeden gözlemlendiği üzere en iyi sonuç, $\beta_1=0.1$, $\beta_2=0.985$, $c=5$ değerlerinde elde edilmiştir. Bu sonucu veren yaklaşık çözümlerin, oluşan denklem takımının gerçek çözümleri ile karşılaştırmalı çizimleri aşağıda yer almaktadır.



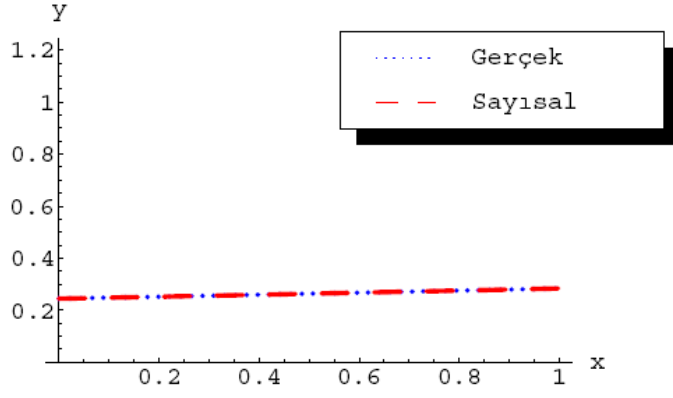
Şekil 5.9 : $z_1(x) = y / (0.1x + 0.985)$ işlevi.



Şekil 5.10 : $z_2(x) = 1/y$ işlevi.



Şekil 5.11 : $z_3(x) = 1 / (0.1x + 0.985)$ işlevi.



Şekil 5.12 : $z_4(x) = 1/y^2$ işlevi.

Bu çizimlerden β_1 ve β_2 değerlerinin denklemin çözümünün tekliği olan değerlerde yakınsamayı etkilediği gözlemlenmiştir.

6. ÇOKLU DİZEY, ÇOKLU OĞRUSAL CEBİR, YÜKSEK KERTEDEN TEKİL DEĞER AYRIŞTIRIM

Çoklu Doğrusal Cebir (ing: Multilinear Algebra), öğeleri ikiden fazla indisle gösterilen yüksek kereden çoklu dizeler (ing: tensor) cebiridir. Bazı mühendislik uygulamalarında, ikiden fazla indisle gösterilen öğelerin kullanılması gerekebilir. Dizeler ve yöneyler bu isteği tam olarak karşılayamayabilir. Bu durum, çoklu dizeleri, Çoklu Doğrusal Cebir'e kazandırmıştır. Çoklu Doğrusal Cebir, birçok uygulamada kullanılmakta ve ünü de son zamanlarda gittikçe artmaktadır. Yüksek Kereden Tekil Değer Ayrıştırımı (ing: Higher Order Singular Value Decomposition), Çoklu Doğrusal Cebir'de son zamanlarda geliştirilmiş en önemli kavramdır. Yüksek Kereden Tekil Değer Ayrıştırımı, dizeler için kullanılan Tekil Değer Ayrıştırımının yüksek kereden bir genellemesi olup mühendisliğin birçok bilimsel uygulamasında kullanılmaktadır. Çoklu Doğrusal Cebir ve Çoklu Dizelerin kullanıldığı alanlar Sinyal İşleme (ing: Signal Processing) [56,67], Kemometri (ing: Chemometric) [58], Görüntü Sıkıştırma (ing: Image Compression) [59,60], Veri Madenciliği (ing: Data Mining) [61], Psikometri (ing: Psychometrics) [62] ve Uziletişim (ing: Telecommunication) [63] olarak sıralanabilir. Yüksek Kereden Tekil Değer Ayrıştırımı, yeni bir kavram değildir. L. Tucker 1966 yılında Etken Çözümlemesinin (ing: Factor Analysis) bir uzantısı olarak 3-kipli (ing: mode) ayrıştırım yöntemi önermiştir [64]. Tucker3, Tucker3ALS, 3-kipli Tekil Değer Ayrıştırım ve 3-kipli PCA terimlerini adlandıran P. Kroonenberg, 1980'lerde Tucker'ın ayrıştırımını geliştirmiştir [65]. Daha sonra birçok biliminsanı, N-kipli dizelerin ayrıştırımı için algoritmalar ve yöntemler geliştirmiştir. En son, L. De Lathauwer ve arkadaşları N-kipli Tekil Değer Ayrıştırımı, Çoklu Doğrusal Tekil Değer Ayrıştırımı ve Yüksek Kereden Tekil Değer Ayrıştırımı olarak anılacak ayrıştırım üzerine çalışmıştır [66,68]. Bir çoklu dizelerin kertesisi (ing: order), onun boyut sayısıdır. $(a,b,\dots,\alpha,\beta,\dots)$ gibi küçük harflerle gösterilen sayılar 0. kereden çoklu dizeler, $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\dots,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\dots)$ gibi kalın küçük harflerle gösterilen yöneyler 1. kereden çoklu dizeler ve $(\mathbf{A},\mathbf{B},\dots)$ gibi kalın büyük harflerle gösterilen dizeler ise 2. kereden çoklu dizeleri

simgelemektedir. Çoklu dizeler ise $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots)$ biçiminde süslü büyük harfler ile gösterilecektir. \mathcal{A} çoklu dizeyinin ijk . ögesi a_{ijk} olarak betimlenmektedir.

Çoklu Dizeler, dizeler ile de gösterilebilir. Bu işlemi yapmanın birkaç yolu vardır. Ancak burada, Lathauwer'in ve Kolda'nın çalışmalarında kullandığı belirli bir tip dizey açılımı (ing: matrix unfolding) türü kullanılacaktır. Çoklu Dizelerin dizey açılımı döngüsel bir biçimde olmaktadır. Genel bir gösterilim için aşağıdaki tanım kullanılabilir [66,67]:

Tanım: \mathcal{A} , N . kereden $\mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ uzayından seçilen bir çoklu dizey olmak üzere, $\mathbf{A}_{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times (I_{n+1} I_{n+2} \dots I_N I_1 I_2 \dots I_{n-1})}$ dizey açılımı, i_n satırında ve j sütununda yer alan $a_{i_1 i_2 \dots i_N}$ ögesini içermektedir. Buradaki j değeri ise aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır [67]:

$$j = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N (i_k - 1) J_k, \quad J_k = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \quad (6.1)$$

Örnek:

\mathcal{A} , $\mathbb{R}^{3 \times 4 \times 2}$ uzayında, ögeleri

$$a_{111} = 1, \quad a_{211} = 2, \quad a_{311} = 3, \quad a_{121} = 4, \quad a_{221} = 5, \quad a_{321} = 6,$$

$$a_{131} = 7, \quad a_{231} = 8, \quad a_{331} = 9, \quad a_{141} = 10, \quad a_{241} = 11, \quad a_{341} = 12,$$

$$a_{112} = 13, \quad a_{212} = 14, \quad a_{312} = 15, \quad a_{122} = 16, \quad a_{222} = 17, \quad a_{322} = 18,$$

$$a_{132} = 19, \quad a_{232} = 20, \quad a_{332} = 21, \quad a_{142} = 22, \quad a_{242} = 23, \quad a_{342} = 24.$$

biçiminde tanımlanan bir çoklu dizey olsun. Bu çoklu dizeyin 3-kipli dizey açılımı aşağıdaki biçimdedir.

$$\mathbf{A}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 \end{pmatrix}_{(3 \times 8)}$$

$$\mathbf{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 & 14 & 15 \\ 4 & 5 & 6 & 16 & 17 & 18 \\ 7 & 8 & 9 & 19 & 20 & 21 \\ 10 & 11 & 12 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}_{(4 \times 6)}$$

$$\mathbf{A}_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & \dots & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}_{(2 \times 12)}$$

Doğrusal Cebirde ise dizelerin Tekil Değer Ayrıştırımı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$m \times n$ boyutlu ve öğeleri, Gerçel veya Karmaşık sayılardan oluşan K cisminde (ing: field) seçilmiş \mathbf{M} dizeyi ele alınırsa, bu dizeyin Tekil Değer Ayrıştırımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^* \quad (6.2)$$

Burada \mathbf{U} dizeyi, $m \times m$ boyutlu bir üniter (ing: unitary) dizey, \mathbf{D} dizeyi $m \times n$ boyutlu ve köşegenlerinde eksi olmayan gerçel değerler olan bir dizey, \mathbf{V}^* dizeyi ise $n \times n$ boyutlu \mathbf{V} dizeyinin devrik eşleniği (ing: conjugate transpose) olmaktadır. Bu ayrıştırıma \mathbf{M} dizeyinin Tekil Değer Ayrıştırımı denmektedir. Eğer \mathbf{D} dizeyinin köşegen öğeleri azalan bir biçimde sıralanırsa, \mathbf{D} köşegen dizeyi \mathbf{M} dizeyi tarafından eşsiz (ing: unique) bir biçimde belirlenebilmektedir. \mathbf{D} dizeyinin köşegen öğeleri, \mathbf{M} dizeyinin tekil değerleri olarak bilinmektedir [69].

Yüksek Kerteden Tekil Değer Ayrıştırımı için aşağıdaki kanıtsav yazılabilir [66].

Kanıtsav \mathcal{A} , $\mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ uzayında N . kereden bir çoklu dizey olsun. \mathcal{A} çoklu dizeyi aşağıdaki biçimde çarpımsal olarak yazılabilir.

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)}, \quad (6.3)$$

Burada $\mathbf{U}^{(n)} = \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)}$ dizeyi $(I_n \times I_n)$ boyutlu üniter bir dizey, \mathcal{S} ise, n . dizini α 'ya eşitlenerek elde edilen $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$ alt çoklu dizeylerinin $(I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N)$ boyutlu aşağıdaki özellikleri olan bir çoklu dizeyi olmaktadır.

- (i) Tüm diklik (ing: all-orthogonality): $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$ ve $\mathcal{S}_{i_n=\beta}$ alt çoklu dizeyleri $\alpha \neq \beta$ olmak üzere n , α ve β 'nin tüm olası değerlerinde aşağıdaki denklemi sağlarlar.

$$\langle \mathcal{S}_{i_n=\alpha}, \mathcal{S}_{i_n=\beta} \rangle = 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (6.4)$$

Burada, $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ simgesi, $\mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ uzayından alınan \mathcal{A} ve \mathcal{B} çoklu dizeylerin iççarpımı (ing: scalar product) olup aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \equiv \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} b_{i_1 i_2 \dots i_N}^* a_{i_1 i_2 \dots i_N}$$

* simgesi, karmaşık eşleniği (ing: complex conjugate) göstermektedir.

- (ii) Sıralama (ing: ordering): \mathcal{A} 'nın tüm alt çoklu dizeyleri, n 'nin tüm olası değerleri için aşağıdaki sıralama bağıntısını sağlarlar.

$$\|\mathcal{S}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{S}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{S}_{i_n=I_n}\| \geq 0, \quad (6.5)$$

Burada bulunan $\sigma_i^{(n)}$ ile gösterilen $\|\mathcal{S}_{i_n=i}\|$ Frobenius-boyu, \mathcal{A} çoklu dizeyinin n -kipli tekil değerleri, $\mathbf{U}_i^{(n)}$ yöneyi ise i . n -kipli tekil değer yöneyi olmaktadır [66].

(6.3) denkleminde \mathcal{S} bir çekirdek (ing: core) çoklu dizeyi olup \times_n simgesi, bir çoklu dizey ile bir dizeyin n -kipli çarpımı anlamına gelmektedir.

Genel olarak C , $(I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N)$ boyutlu bir çoklu dizey, \mathbf{M} ise $J_n \times I_n$ boyutlu bir dizey olmak üzere C çoklu dizeyi ile \mathbf{M} dizeyinin n -kipli çarpımı, $(I_1 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_N)$ boyutlu bir çoklu dizeyi sonuç vermektedir. Bu çoklu dizeyin genel terimi, $b_{i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N}$ ile simgelenirse, bu terimin açık yapısı aşağıdaki gibi verilebilir.

$$b_{i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} c_{i_1, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{n+1}, \dots, i_N} m_{j_n, i_n}, \quad j_n = 1, 2, \dots, J_n \quad (6.6)$$

Bu bağlamda (6.3) denkleminin açık yapısı aşağıdaki biçimde gösterilebilir.

$$a_{i_1, \dots, i_N} = \sum_{j_1=1}^{I_1} \sum_{j_2=1}^{I_2} \dots \sum_{j_N=1}^{I_N} s_{i_1, \dots, i_N} u_{i_1, j_1}^{(1)} \dots u_{i_N, j_N}^{(N)} \quad (6.7)$$

(6.3) denkleminde $\mathbf{U}^{(i)}$, ($i=1, \dots, N$) dizeyleri, dik yapıda (ing: orthogonal) yani evriği (ing: inverse) devriğine (ing: transpose) eşit olan dizeylerdir. (6.3) denklemi dizey türünden

$$\mathbf{A}_{(n)} = \mathbf{U}^{(n)} \cdot \mathbf{S}_{(n)} \left(\mathbf{U}^{(n+1)} \otimes \mathbf{U}^{(n+2)} \dots \otimes \mathbf{U}^{(N)} \otimes \mathbf{U}^{(1)} \otimes \mathbf{U}^{(2)} \dots \otimes \mathbf{U}^{(n-1)} \right)^T \quad (6.8)$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $(I_n \times I_1 I_2 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N)$ boyutunda $\mathbf{A}_{(n)}$ dizeyi, \mathcal{A} çoklu dizeyinin n -kipli dizey açılımıdır. \otimes ise Kronecker çarpımı simgelemektedir. \mathbf{F} ve \mathbf{G} sırasıyla, $I_1 \times I_2$ ve $J_1 \times J_2$ boyutlu dizeyler olmak üzere, \mathbf{F} ve \mathbf{G} 'nin Kronecker çarpımı aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{F} \otimes \mathbf{G} = \left(f_{i_1, i_2} \mathbf{G} \right)_{1 \leq i_1 \leq I_1; 1 \leq i_2 \leq I_2} \quad (6.9)$$

Bu bağıntı, dizeyler türünden aşağıdaki biçimde gösterilebilir.

$$\mathbf{F} \otimes \mathbf{G} = \begin{bmatrix} f_{11} \mathbf{G} & f_{12} \mathbf{G} & \dots & f_{1I_2} \mathbf{G} \\ f_{21} \mathbf{G} & f_{22} \mathbf{G} & \dots & f_{2I_2} \mathbf{G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{I_1 1} \mathbf{G} & f_{I_1 2} \mathbf{G} & \dots & f_{I_1 I_2} \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

(6.3) denkleminde $\mathbf{U}^{(n)}$ dizeyleri sol tarafa alındığında \mathcal{S} çoklu dizeyi, \mathcal{A} türünden

$$\mathcal{S} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}^{(1)H} \times_2 \mathbf{U}^{(2)H} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)H} \quad (6.11)$$

olarak hesaplanır. Bu bağıntı, dizey açılımı olarak ise

$$\mathbf{S}_{(n)} = \mathbf{U}^{(n)H} \cdot \mathbf{A}_{(n)} \left(\mathbf{U}^{(n+1)} \otimes \mathbf{U}^{(n+2)} \dots \otimes \mathbf{U}^{(N)} \otimes \mathbf{U}^{(1)} \otimes \mathbf{U}^{(2)} \dots \otimes \mathbf{U}^{(n-1)} \right) \quad (6.12)$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{S}_{(n)}$ dizeyinde satır yöneyleri birbirine diktir. Bu yöneylerin Frobenius boyu, \mathcal{A} çoklu dizeyinin n -kipli tekil değerlerini vermektedir. Bu bağıntı daha açık bir biçimde $\sigma_k^{(n)}$, n -kipli k . tekil değeri, $\mathbf{S}_{(n)(k)}$ ise $\mathbf{S}_{(n)}$ dizeyinin k . satır yöneyini göstermek üzere, \mathcal{A} çoklu dizeyinin n -kipli tekil değerleri

$$\sigma_k^{(n)} = \left\| \mathbf{S}_{(n)(k)} \right\|_F = \sqrt{\text{iz} \left(\mathbf{S}_{(n)(k)}, \mathbf{S}_{(n)(k)}^T \right)} \quad (6.13)$$

olarak hesaplanır. Bu hesaplama, aşağıdaki örnek üzerinde uygulanmıştır.

Örnek

$3 \times 3 \times 3$ boyutlu $\mathbf{A}_{(1)}$ dizey açılımına göre yazılmış olan bir \mathcal{A} çoklu dizeyi aşağıda yer almaktadır.

$$\begin{pmatrix} 0.907 & 0.715 & -0.369 & 1.784 & 1.697 & 0.015 & 2.123 & -0.074 & 1.442 \\ 0.892 & -0.489 & 2.428 & 1.775 & -1.507 & 4.033 & -0.663 & 1.910 & -1.749 \\ 2.148 & 0.305 & 2.375 & 4.249 & 0.320 & 4.714 & 1.826 & 2.133 & -0.271 \end{pmatrix}$$

1-kipli tekil yöneyle, $\mathbf{A}_{(1)}$ dizeyinin sol tekil dizeyinin (ing: left singular matrix) sütunları olmaktadır. Daha açık bir biçimde, $\mathbf{U}^{(1)}$ dizeyinin sütun yöneyleri, $\mathbf{A}_{(1)}\mathbf{A}_{(1)}^T$ dizeyinin özyöneyle (ing: eigenvector) olmaktadır. Buna göre $\mathbf{U}^{(1)}$ dizeyi ve aynı biçimde $\mathbf{U}^{(2)}$ ve $\mathbf{U}^{(3)}$ dizeyleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mathbf{U}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1121 & -0.7739 & -0.6233 \\ 0.5771 & 0.5613 & -0.5932 \\ 0.8090 & -0.2932 & 0.5095 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.4624 & 0.0102 & 0.8866 \\ 0.8866 & -0.0135 & -0.4623 \\ -0.0072 & -0.9999 & 0.0152 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.6208 & -0.4986 & 0.6050 \\ -0.0575 & -0.7986 & -0.5992 \\ 0.7819 & 0.3371 & -0.5244 \end{pmatrix}$$

(6.12) bağıntısı kullanılarak, Yüksek Kerteden Tekil Değer Ayırıştırımının çekirdek çoklu dizeyi, $\mathbf{S}_{(1)}$ dizey açılımına göre aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

$$\mathbf{S}_{(1)} = \mathbf{U}^{(1)H} \cdot \mathbf{A}_{(1)} \cdot (\mathbf{U}^{(2)} \otimes \mathbf{U}^{(3)}) \quad (6.14)$$

$$= \begin{pmatrix} 8.708 & 0.048 & -0.279 & 0.106 & 3.273 & 0.322 & -0.003 & -0.179 & -0.222 \\ -0.025 & 3.254 & -0.285 & 3.196 & -0.213 & 0.782 & 0.294 & -0.037 & 0.370 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$$

\mathcal{S} çekirdek çoklu dizeyi, tüm diklik özelliğini sağlamaktadır. Yani, $\mathbf{S}_{(1)}$ dizey açılımının satır yöneyleri, birbirleriyle karşılıklı olarak diktir. Aynı biçimde $\mathbf{S}_{(1)}$

dizeyinin 1/2/3, 4/5/6, 7/8/9 sütunları ve 1/4/7, 2/5/8, 3/6/9 sütunları ile oluşan dizeylerinin de satır yöneyleri birbirleri ile dikdir. Özenli bir inceleme yapıldığında, bu biçimde oluşturulan dizeylerin aslında \mathcal{S} çoklu dizeyinin $\mathbf{S}_{(2)}$ ve $\mathbf{S}_{(3)}$ dizey açılımları olduğu görülmektedir. $\mathbf{S}_{(1)}$, $\mathbf{S}_{(2)}$ ve $\mathbf{S}_{(3)}$ dizeylerinin Frobenius boyları, \mathcal{A} çoklu dizeyinin tekil değerlerini vermektedir. Bu değerler aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

1-kipli tekil değerler: 9.3187, 4.6664, 0

2-kipli tekil değerler: 9.3058, 4.6592, 0.5543

3-kipli tekil değerler: 9.2822, 4.6250, 1.0310

$\mathbf{U}^{(n)}$ dizeyinin özel olarak $\mathbf{A}_{(n)}$ dizeyinin Dizey Tekil Ayrıştırımından elde edildiği durum incelenirse; $\mathbf{A}_{(n)}$ dizeyi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\mathbf{A}_{(n)} = \mathbf{U}^{(n)} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{V}^{(n)T} \quad (6.15)$$

Burada $\mathbf{V}^{(n)}$ dik bir dizey ve $\Sigma^{(n)} = \text{diag}(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_k^{(n)})$ biçiminde tanımlanan bir köşegen dizeyi olup, köşegen öğeleri artı tanımlı ve büyükten küçüğe doğru sıralanmaktadır. (6.8) denkleminde bulunan Kronecker çarpımının dik bir dizey olması ve (6.8) ile (6.15) denklemlerinin karşılaştırılması sonucunda aşağıdaki bağıntı yazılabilir [66].

$$\mathbf{S}_{(n)} = \Sigma^{(n)} \cdot \mathbf{V}^{(n)T} \cdot (\mathbf{U}^{(n+1)} \otimes \mathbf{U}^{(n+2)} \dots \mathbf{U}^{(N)} \otimes \mathbf{U}^{(1)} \otimes \mathbf{U}^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{U}^{(n-1)}) \quad (6.16)$$

6.1 Üçüncü Kerteden Çoklu Dizeylerin Bir Özdüzeyli Ayrıştırımında İlk Dışçarpımlarının Belirlenmesi

a_{ijk} , $(I_1 \times I_2 \times I_3)$ boyutlu bir \mathcal{A} çoklu dizeyinin genel ögesini simgelemek üzere, bu çoklu dizeyi herbiri sırasıyla I_1, I_2, I_3 boyutlu, boyu 1 olan \mathbf{u} , \mathbf{v} ve \mathbf{w} yöneylerinin dışçarpımları türünden yazmak olanaklıdır. Bu yöneyleri bulmak için aşağıdaki amaç işlevimsisi tanımlanmaktadır.

$$J = \sum_{i=1}^{I_1} \sum_{j=1}^{I_2} \sum_{k=1}^{I_3} (a_{ijk} - \sigma u_i v_j w_k)^2 \quad (6.17)$$

Burada σ değeri, \mathbf{u} , \mathbf{v} ve \mathbf{w} yöneylerinin Öklit boyu olmaktadır. Amaç işlevimsinin σ değerine göre türevi alınıp 0'a eşitlendiğinde aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma} = 2 \left(\sum_{i=1}^{I_1} \sum_{j=1}^{I_2} \sum_{k=1}^{I_3} (a_{ijk} - \sigma u_i v_j w_k) \right) (-u_i v_j w_k) = 0 \quad (6.18)$$

Buradan σ aşağıdaki biçimde hesaplanabilir.

$$\sigma = \sum_{i=1}^{I_1} \sum_{j=1}^{I_2} \sum_{k=1}^{I_3} a_{ijk} u_i v_j w_k \quad (6.19)$$

Amaç işlevimsinin u_i , v_j ve w_k değişkenlerine göre türevleri alındığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 2 \sum_{j=1}^{I_2} \sum_{k=1}^{I_3} (a_{ijk} - \sigma u_i v_j w_k) (-\sigma v_j w_k) = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial J}{\partial v_j} = 2 \sum_{i=1}^{I_1} \sum_{k=1}^{I_3} (a_{ijk} - \sigma u_i v_j w_k) (-\sigma u_i w_k) = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_k} = 2 \sum_{i=1}^{I_1} \sum_{j=1}^{I_2} (a_{ijk} - \sigma u_i v_j w_k) (-\sigma u_i v_j) = 0 \quad (6.22)$$

Bu denklemlerden u_i , v_j ve w_k değerleri aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

$$u_i = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{I_2} \sum_{k=1}^{I_3} a_{ijk} v_j w_k, \quad 1 \leq i \leq I_1 \quad (6.23)$$

$$v_j = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{I_1} \sum_{k=1}^{I_3} a_{ijk} u_i w_k, \quad 1 \leq j \leq I_2 \quad (6.24)$$

$$w_k = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{I_1} \sum_{j=1}^{I_2} a_{ijk} u_i v_j, \quad 1 \leq k \leq I_3 \quad (6.25)$$

6.1.1 Uygulama

Bu bölümde, 3. kereden bir çoklu dizeyin boyları 1 olan, 2 boyutlu yöneyler ile ayrıştırımı yapılacaktır. Daha sonra, yöneylerden herhangi birinin boyutu 3 yapıp oluşan denklemler ve çözümleri incelenecektir. (6.19), (6.23), (6.24) ve (6.25) denklemlerinde $I_1 = I_2 = I_3 = 2$ yazıldığında aşağıdaki denklem takımı elde edilmektedir.

$$\sigma u_1 = a_{111} v_1 w_1 + a_{112} v_1 w_2 + a_{121} v_2 w_1 + a_{122} v_2 w_2 = d_1$$

$$\sigma u_2 = a_{211} v_1 w_1 + a_{212} v_1 w_2 + a_{221} v_2 w_1 + a_{222} v_2 w_2 = d_2$$

$$\sigma v_1 = a_{111} u_1 w_1 + a_{112} u_1 w_2 + a_{211} u_2 w_1 + a_{212} u_2 w_2 = d_3$$

$$\sigma v_2 = a_{121} u_1 w_1 + a_{122} u_1 w_2 + a_{221} u_2 w_1 + a_{222} u_2 w_2 = d_4$$

$$\begin{aligned}
\sigma w_1 &= a_{111}u_1v_1 + a_{121}u_1v_2 + a_{211}u_2v_1 + a_{221}u_2v_2 = d_5 \\
\sigma w_2 &= a_{112}u_1v_1 + a_{122}u_1v_2 + a_{212}u_2v_1 + a_{222}u_2v_2 = d_6 \\
\sigma &= a_{111}u_1v_1w_1 + a_{112}u_1v_1w_2 + a_{121}u_1v_2w_1 + a_{122}u_1v_2w_2 + a_{211}u_2v_1w_1 \\
&\quad + a_{212}u_2v_1w_2 + a_{221}u_2v_2w_1 + a_{222}u_2v_2w_2 = d_7
\end{aligned} \tag{6.26}$$

\mathbf{u} , \mathbf{v} ve \mathbf{w} yöneylerinin boyları 1 olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, \quad v_1^2 + v_2^2 = 1, \quad w_1^2 + w_2^2 = 1 \tag{6.27}$$

Burada \mathcal{A} çoklu dizeyinin öğeleri $[0,1]$ aralığından seçkisiz olarak seçilen sayılardan oluşmaktadır. Bu durum genellikle bir şey yitirmez, çünkü herhangi bir dizey, uygun bir katsayı ile çarpılarak öğeleri $[0,1]$ aralığından üretilebilir. Buna göre çokterimli kümesi $\{\sigma u_1 - d_1, \sigma u_2 - d_2, \sigma v_1 - d_3, \sigma v_2 - d_4, \sigma w_1 - d_5, \sigma w_2 - d_6, \sigma - d_7, u_1^2 + u_2^2 - 1, v_1^2 + v_2^2 - 1, w_1^2 + w_2^2 - 1\}$ değişkenler ise $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2, \sigma\}$ biçimindedir. Gröbner tabanını hesaplamak için kullanılan Mathematica buyruğu `GroebnerBasis[çokterimpliler,değişkenler]` biçimindedir ve oluşan tabanda 18 tane çokterimli bulunmaktadır. Bu çokterimpliler sağyanı 0'a eşitlenerek denklemler elde edilmektedir. İlk denklem 13. dereceden σ 'ya bağlı bir çokterimplidir. İkinci çokterimli denklemde ise σ ve w_2 değişkenleri yer almaktadır. İlk denklem çözüldükten sonra σ değerleri ikinci denklemde yerine konulur ve w_2 değeri hesaplanır. Bu işlem tüm değişkenler bulununcaya dek devam eder. İlk denklemde σ için elde edilen değerlerin 4 tanesi karmaşık, 8 tanesi gerçel değerlerdir. Burada yalnızca gerçel değerler ile çalışılmaktadır. Elde edilen 8 tane gerçel değer, daha sonraki denklemlerde yerine konulması ile Gröbner tabanındaki sıraya göre tüm denklemler çözülmektedir. $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ değişkenleri için bulunan değerler, (6.27) denkleminde yerine yazılarak yöneylerin boylarının 1 olduğu denetlenmektedir. Çizelge 6.1'de bu model için elde edilen sonuçlar yer almaktadır. Çizelgede tüm sonuçlar artı değerli olarak gösterilmiştir.

İlk denklemde elde edilen σ değerinin 8 tane gerçel değeri ikili olarak birbirlerinin eksili ve artılı değerleri olmaktadır. Dolayısı ile çizelgede 4 değişik σ değerine karşılık gelen değişkenlerin değerleri artı değerli olarak yer almaktadır.

Çizelge 6.1 : Üçüncü kereden 2 boyutlu sistemin tekil değer ayrıştırımının sonuçları.

değişkenler	1. çözüm	2. çözüm	3. çözüm	4. çözüm
σ	1.14	0.58	0.30	0.09
u_1	0.88	0.43	0.97	0.33
u_2	0.47	0.90	0.24	0.94
v_1	0.76	0.86	0.61	0.59
v_2	0.66	0.51	0.79	0.81
w_1	0.69	0.77	0.82	0.45
w_2	0.73	0.63	0.57	0.89
$u_1^2 + u_2^2$	1.00	1.00	1.00	1.00
$v_1^2 + v_2^2$	1.00	1.00	1.00	1.00
$w_1^2 + w_2^2$	1.00	1.00	1.00	1.00

İkinci denemede, yöneylerden herhangi birinin boyutu 3 alınmaktadır. Bu sistemde boyutlar seçkisiz bir biçimde $I_1=2$, $I_2=2$, $I_3=3$ olarak seçilmiştir. Burada 8 tane çokterimli denklemi yer almaktadır ve 8. denklem aşağıdaki biçimde yazılmaktadır.

$$\sigma w_3 = a_{113}u_1v_1 + a_{123}u_1v_2 + a_{213}u_2v_1 + a_{223}u_2v_2 = d_8 \quad (6.28)$$

Bu sistemin 8 tane doğrusal olmayan çokterimlisi, 8 tane bilinmeyen değişkeni ve Gröbner tabanında 22 tane çokterimli bulunmaktadır. Bu çokterimlilerin sağyanı 0'a eşitlenerek denklem takımı elde edilmektedir. İlk denklem σ türünden 17. dereceden bir çokterimlidir. Burada çözümlerin 8 tanesi gerçel çözüm olup ikili olarak birbirlerinin eksili ve artılı değerleri biçimindedir. Bu σ değerleri sırasıyla taban kümesinde yer alan diğer denklemlerde yerine konulup bilinmeyen değişkenlerin değerleri elde edilir. Bu sonuçlar, **Çizelge 6.2'**de gösterilmektedir.

Çizelge 6.2 : Üçüncü kereden 3 boyutlu sistemin tekil değer ayrıştırımının sonuçları.

değişkenler	1. çözüm	2. çözüm	3. çözüm	4. çözüm
σ	1.79	0.46	0.44	0.16
u_1	0.32	0.98	0.98	0.85
u_2	0.95	0.18	0.15	0.53
v_1	0.66	0.77	0.99	0.18
v_2	0.75	0.64	0.09	0.98
w_1	0.73	0.68	0.41	0.43
w_2	0.64	0.37	0.29	0.58
$u_1^2 + u_2^2$	0.24	0.63	0.95	0.69
$v_1^2 + v_2^2$	1.00	1.00	1.00	1.00
$w_1^2 + w_2^2$	1.00	1.00	1.00	1.00

Böylece, üçüncü kereden 2 ve 3 boyutlu sistemlerin $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ve σ değerleri elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar ise **Çizelge 6.3'**te özet olarak yer almaktadır.

Çizelge 6.3 : Sonuçların özeti.

(n_1, n_2, n_3) değerleri	değişken sayısı	Gröbner taban boyutu	$p(\sigma)$ 'nin derecesi	gerçel σ sayısı	toplam çözüm
(2,2,2)	7	18	13	8	32
(2,2,3)	8	22	17	8	32

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında doğrusal ve doğrusal olmayan Sıradan Türevli Denklemlerin sayısal çözümüne yakınsamayı sağlayacak yöntemler geliştirilmiştir. İlk olarak doğrusal Sıradan Türevli Denklemlerin sayısal çözümü üzerinde çalışılmıştır. Bunun için Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminden yararlanılmıştır. Geliştirilen yöntemin işlevliliğinin daha iyi gözlemlenebilmesi amacı ile yalnızca birinci kereden denklemler üzerinde odaklanılmıştır. Yapılan uygulamalar incelendiğinde, YBMG değişmezlik ölçeninin (ing: constancy measurer) eniyilemesi (ing: optimization) ile geliştirilen yöntem, az sayıda nokta kullanıldığı durumda bile gerçek çözüme yakınsamıştır. Burada yöntem, türevli denklemlerin başlangıç koşullu sorunlarında (ing: initial value problems) uygulanmıştır; ancak uygun tanımlamalar yapıldığında yöntem, sınır değer sorunlarında (ing: boundary value problems) veya ikisinin birlikte olduğu denklemlerde de uygulanabilmektedir. Yapılması gereken, yalnızca başlangıç koşulundan gelen cebirsel koşulları sınır koşulları ile değiştirmek olacaktır. Sayısal çözüm, uygun Hilbert uzayından seçilen birbirine dik ve birimboylu işlevlerin (ing: orthonormal function) doğrusal birleştirimi (ing: linear combination) olarak seçilmiştir. Ancak yapılan uygulamalar sonucunda, taban işlevlerinin derecesi arttırıldığında yaklaşıtımanın niteliği artmasına karşın, hesaplama ederinin de arttığı gözlemlenmiştir. Bu yüzden en çok üçüncü dereceden taban işlevleri kullanılarak birinci, ikinci, üçüncü dereceden elde edilen sayısal çözümlerin karşılaştırılması yapılmıştır.

Doğrusal sıradan türevli denklemlerin sayısal çözümü için geliştirilen diğer bir yöntem, Sendelenimsizlik Yaklaşıtırımı'na (ing: Fluctuationlessness Approximation) dayanmaktadır. Sendelenimsizlik yaklaşıtırımı, son yıllarda geliştirilmiş ve bu yöntem ilk olarak birim aralıkta birinci kereden başlangıç koşullu denklemlerde uygulanmıştır. Sonuç olarak sayısal çözüm, gerçek çözüme oldukça hızlı bir biçimde yakınsamaktadır. Yöntem daha da geliştirilerek herhangi bir $[a,b]$ aralığında n . kereden başlangıç koşullu denklemlere de uygulanmıştır. Bu tez çalışmasında sınır değer sorunlarının iki türü incelenmiştir. Birincisinin yapısında herhangi bir

bilinmeyen değiştirge (ing: parameter) bulunmamaktadır. Bu durumda denklemin çözüümü için STD'in türev işlecinin evirtimi (ing: inversion) gerekmektedir. Dolayısı ile bu bir evirtim sorunu olmaktadır. İkinci tür denklemler ise seçkisiz değerli (ing: random) bir değiştirge içeren denklemlerdir. Bu tür denklemler sonsuz sayıda özdeğer (ing: eigenvalue) ve özyönev (ing: eigenvector) üretmektedirler. Sendelenimsizlik yaklaştırımı bu iki tür sınır değer sorunlarına uygulanmıştır ve gerçek çözüme oldukça yakın sayısal çözümler elde edilmiştir. İncelenen örnekler, karşılaştırma yapılabilmesi için gerçek çözüümü bilinen denklemlerden seçilmiştir. Böylece sayısal çözümlerin, gerçek çözümlerinin Maclaurin serisinin katsayıları ile karşılaştırılması yapılmıştır. Sayısal çözümler ile Maclaurin seri açılımının gerçek çözümlerle mutlak yanılığ değerleri (ing: absolute error) karşılaştırıldığında Sendelenimsizlik yaklaştırımının yakınsama niteliği gözlemlenebilmektedir.

Doğrusal olmayan sıradan türevli denklemlerin sayısal çözüümü için Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminden yararlanılmıştır. Sayısal çözümlerin YBMG değişmezlik ölçeninin eniyilemesi koşulu, yöntemin temel düşüncesini oluşturmaktadır. Burada ortaya çıkan doğrusal olmayan denklemler, Gröbner tabanı ile çözülmüştür. Yapılan uygulamalarda sayısal çözümler gerçek çözümlerle karşılaştırıldığında yaklaştırımın oldukça iyi olduğu gözlemlenmiştir. Gröbner tabanı, çokterimli yapıdaki doğrusal olmayan denklemlere uygulanabildiğinden bağımlı değişkenin çokterimli yapısından kaynaklanan doğrusal olmayan türevli denklemlerde etkili olmuştur. Diğer türdeki doğrusal olmayan denklemler uygun değişken dönüşümü yapılarak denklem çokterimli yapıya dönüştürüldükten sonra sayısal olarak çözülebilmektedir.

Yukarıda sözü geçen uygun değişken dönüşümü, türevli denklemlerin bilinmeyen bağımlı değişken sayısının artışına, dolayısı ile Uzay Genişlemesine neden olmaktadır. Uzay Genişlemesi ile herhangi bir türde doğrusal olmayan denklemler, sağ yanı en çok ikinci dereceden bilinmeyen işlevlerin çokterimlileri türünden yazılabilmektedir. Burada oluşan denklem takımının çözüümü için Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi ve Gröbner tabanından yararlanılmıştır.

Bu tez çalışmasında, özgün olarak yapılan ve yukarıda da ayrıntılı olarak belirtilen çalışmalar özetlenirse:

- Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi değişmezlik ölçeninin eniyilemesi ile Doğrusal Sıradan Türevli Denklemlerin gerçek çözüme yakınsayan,

çokterimli yapıda taban işlevlerinin doğrusal birleştirilimi olarak oluşturulan sayısal çözümü elde edilmiştir.

- Bilimsel yazında yeni sayılabilecek bir geçmişi olan Sendelenimsizlik yaklaşımını, başlangıç ve sınır değer koşullu doğrusal Sıradan Türevli Denklemlerin sayısal çözümüne uygulanmış, oldukça başarılı sonuçlar gözlemlenmiştir.
- Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemlerin sayısal çözümü için Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi değişmezlik ölçeninin eniyilemesinden yararlanılmıştır. Burada doğrusal olmayan cebirsel denklemlerin çözümünde Gröbner tabanı kullanılmıştır. Sayısal çözüm, gerçek çözüme yakınsamıştır. Ancak burada doğrusal olmayan yapı, denklemin bağımlı değişkeninin çokterimli olmasından kaynaklanmaktadır.
- Sıradan Türevli Denklemlerin çokterimli yapıda olmayan doğrusal olmayan denklemleri, uygun değişken dönüştürümü yapılarak çokterimli yapıya dönüştürülmüştür. Ancak bu durum Uzay Genişlemesi'ne neden olmuştur. Sayısal çözüm yöney değerli bir işlev olarak tanımlanarak, işlevin Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi değişmezlik ölçeni eniyilemesi sonucunda oluşturulmuştur. Doğrusal olmayan denklemlerin çözümü Gröbner tabanı ile sağlanmıştır.

Bu tez çalışmasında tek değişkenli yöney değerli işlev için yöneysel Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi geliştirilmiştir. Daha önce yalnızca çok değişkenli işlevlerin Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi bulunmaktaydı. Bu çalışma ile öğeleri çok değişkenli işlevlerden oluşan yöneylerin YBMG bileşenlerini oluşturmanın da gündeme getirilebileceğinin olanaklı olduğu böylece kanıtlanmıştır.

Uzay genişletme yöntemi ile yeni değişkenler tanımlanarak birinci kereden türevli denklemler kümesi oluşturulmuştu. Eğer bu değişkenlerin türevleri oransal olarak yazılırsa, yeni elde edilecek uzayda bağımlı değişken, x değişkeni yerine bu işlevler olacaktır. Oransal yapıdan dolayı verilen aralıkta işlevlerin başlangıç koşullarının aldığı değerler, yeni tanımlanan uzayda tekillik bölgesi oluşturabilir. Bu tekilliklerin giderilmesi için çalışmalar geliştirilebilir.

Gerçek çözümü belirli bir türdeki değiştirge (ing: parameter) içeren denklemlerde, değişmezlik ölçeninin bu değiştirgeler türünden yazılması bir eniyileme sorunudur ve

değiştirgelerin değişmezlik ölçenini en büyük yapacak biçimde seçilmesi için hesaplamalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Burden, R.L. and Faires, J.D.**, 2005. *Numerical Analysis*, Thomson.
- [2] **Chapra, S.C. and Canale, R.P.**, 1989. *Numerical Methods For Engineers* McGraw-Hill, New York.
- [3] **Gerald, C.F. and Wheatley, P.O.**, 1994. *Applied Numerical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [4] **Kreyszig, E.F.**, 1998. *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley and Sons Inc.
- [5] **Sobol, I.M.**, 1993. Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, **1**, 407–414.
- [6] **Rabitz, H. and Alis, O.F.**, 1999. General Foundations of High Dimensional Model Representations, *Journal of Mathematical Chemistry*, **25**, 197–233.
- [7] **Rabitz, H., Alis, O.F., Shorter, J. and Shim, K.**, 1999. Efficient Input-Output Model Representations, *Computer Phys. Comm.*, **117**, 11–20.
- [8] **Rabitz, H. and Alis, O.F.**, 2000. Managing the Tyranny of Parameters in Mathematical Modelling of Physical Systems, *Sensitivity Analysis, A. Saltelli and K. Chan and M. Scott and eds.*, 199–223.
- [9] **Li, G., Wang, S.W., Rosenthal, C. and Rabitz, H.**, 2001. High Dimensional Model Representations Generated from Low Dimensional Data Samples.
- [10] **Li, G., Artamonov, M., Rabitz, H., Wang, S.W., Georgopoulos, P. and Demiralp, M.**, 2003. High Dimensional Model Representations Generated from Low Order Terms-1p-RS-HDMR, *Journal of Computational Chemistry*, **24**, 647–656.
- [11] **Li, G., Wang, S.W. and Rabitz, H.**, 2002. Practical Approaches To Construct RS-HDMR Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, **106**, 8721–8733.
- [12] **Li, G., Schoendorf, J., Ho, T. and Rabitz, H.**, 2004. Multicut-HDMR with an Application to an Ionospheric Model, *Journal of Computational Chemistry*, **25**, 1149–1156.
- [13] **Hayes, M.Y., Li, B. and Rabitz, H.**, 2006. Estimation of Molecular Properties by High Dimensional Model Representation, *J. Phys. Chem. A*, **110**, 264–272.
- [14] **Li, G., Wang, S.W., Georgopoulos, P.G., Schoendorf, J.H. and Rabitz, H.**, 2006. Random Sampling High Dimensional Model Representation (RS-DMR) and Orthogonality of Its Different Order Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, **110**, 2474–2485.

- [15] **Rabitz, H. and Alis, O.**, 2001. Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, **29**, 127–142.
- [16] **Li, G., Rosenthal, C. and Rabitz, H.**, 2001. High Dimensional Model Representations, *J. Phys. Chem. A*, **105**, 7765–7777.
- [17] **Demiralp, M.**, 2002. Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi; Gösterilim Çarpanlarının Belirlenmesi, *12. Ulusal Mekanik Kongresi Bildirileri, (10-14 Eylül 2001, Konya)*, 261–268.
- [18] **Demiralp, M.**, 2002. Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi: Değişmezlik ve Toplamsallık Ölçenleri, Çarpımsal Gösterilim ve Çarpımsallık Ölçenleri, *12. Ulusal Mekanik Kongresi Bildirileri, (10-14 Eylül 2001, Konya)*, 269–276.
- [19] **Tunga, M.A. and Demiralp, M.**, 2004. A Factorized High Dimensional Model Representation on the Partitioned Random Discrete Data, *ANACM*, **1**, 231–241.
- [20] **Tunga, M.A. and Demiralp, M.**, 2005. A Factorized High Dimensional Model Representation on the Nodes of a Finite Hyperprismatic Regular Grid, *Applied Mathematics and Computation*, **164**, 865–883.
- [21] **Tunga, B. and Demiralp, M.**, 2003. Hybrid High Dimensional Model Representation Approximants And Their Utilization in Applications, *Mathematical Research*, **9**, 438–446.
- [22] **Tunga, M.A. and Demiralp, M.**, 2006. Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) on the Partitioned Data, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **185**, 107–132.
- [23] **Tunga, B. and Demiralp, M.**, 2007. A Novel Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) Based on the Combination of Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representations, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Applied Mathematics*, 157–161.
- [24] **Tunga, M.A. and Demiralp, M.**, 2003. Data Partitioning via Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR) And Multivariate Interpolative Applications, *The Fourth International Conference on Tools For Mathematical Modelling*, **9**, 447–462.
- [25] **Sen, N., Baykara, N.A. and Demiralp, M.**, 2008. High Dimensional Model Representation (HDMR) and Trigonometric Transformational HDMR, *Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE'08)*, 209–215.
- [26] **Demiralp, M.**, 2006. Illustrative Implementations to Show How Logarithm Based High Dimensional Model Representation Works For Various Function Structures, *WSEAS Transactions on Computers*, **5**, 1339–1344.
- [27] **Demiralp, M.**, 2006. Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representation And The Effect On Their Types On Univariance Level, *WSEAS Transactions on Computers*, **5**, 582–588.

- [28] **Demiralp, M.**, 2003. High Dimensional Model Representation And Its Applications, *Tools For Mathematical Modelling*, **9**, 146–159.
- [29] **Altay, N. and Demiralp, M.**, 2008. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations via Splines, *Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE08), Istanbul, Turkey, 27-30 May*, 141–145.
- [30] **Demiralp, M.**, 2010. No Fluctuation Approximation In Any Desired Precision For Univariate Function Matrix Representations, *Journal of Mathematical Chemistry*, **47**, 99–110.
- [31] **Demiralp, M.**, 2009. Fluctuationlessness Theorem to Approximate Univariate functions' Matrix Representations, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **6**, 258–267.
- [32] **Demiralp, M.**, 2005. A Fluctuation Expansion Method for the Evaluation of a Function's Expectation Value, *Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math., Wiley, Rhodes, Greece, Sept. 16-20*, 711–714.
- [33] **Altay, N. and Demiralp, M.**, 2010. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations by Fluctuationlessness Theorem, *Journal of Mathematical Chemistry*, **47**, 1323–1343.
- [34] **Altay, N. and Demiralp, M.**, 2008. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations in Fluctuationlessness Theorem Perspective, *Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE08), Istanbul, Turkey, 27-30 May*, 162–167.
- [35] **Tunga, B. and Demiralp, M.**, 2008. Fluctuationlessness Approximation Towards Orthogonal Hyperprismatic Grid Construction, *Proceedings of First WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering, Istanbul, Turkey, 27-30 May*, 193–197.
- [36] **Altay, N. and Demiralp, M.**, 2008. Application of Fluctuationlessness Theorem on the Numerical Solution of Higher Order Linear Ordinary Differential Equations, *Proceedings of the 6th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2008), September 16-20, Kos, Greece*, 52–55.
- [37] **Altay, N. and Demiralp, M.**, 2009. Fluctuationlessness Theorem and Its Application To Boundary Value Problems of ODEs, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8**, 199–204.
- [38] **Boyce, W.E. and DiPrima, R.C.**, 1997. *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons Inc., 625-628.
- [39] **Buchberger, B.**, 1965. An Algorithm for Finding the Bases Elements of the Residue Class Ring Modulo a Zero Dimensional Polynomial Ideal (German), *Ph.D. Thesis*, Univ. of Innsbruck, Austria.
- [40] **Hironaka, H.**, 1964. Resolution Of Singularities Of An Algebraic Variety Over A Field Of Characteristic Zero: I, II., *The Ann. Math.*, **79**, 109–203.

- [41] **Gordon, P.**, 1899. Ein neuer beweis des hilbertschen satzes über homogene funktionen (A new proof of hilbert's theorem on homogeneous functions), *Nachr. der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen*, **3**, 240–242.
- [42] **Buchberger, B.**, 1985. An algorithmic method in polynomial ideal theory, *Multidimensional Systems Theory-Progress, Directions and Open Problems in Multidimensional Systems*. N. K. Bose eds.
- [43] **Buchberger, B.**, 2006. Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal, *J. Symb. Comput*, **41**, 475–511.
- [44] **Buchberger, B. and Winkler, F.**, 1998. *Gröbner Bases and Applications*, London Mathematical Society Lecture Note 251, Cambridge University Press.
- [45] **Prasolov, V.V.**, 2004. *Polynomials*, Springer, New York, 236.
- [46] **Cox, D.A., Little, J.B. and Shea, D.O.**, 2007. Ideals, Varieties, and Algorithms: *An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer, New York, 54-90.
- [47] **Awang, J.L.**, 2002. Gröbner bases, multipolynomial resultants and the gauss-jacobi combinatorial algorithms-adjustment of nonlinear gps/lps observations, *PhD Dissertation*, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart, Germany, 19.
- [48] **Adams, W.W. and Loustaunau, P.**, 1994. Introduction to Gröbner Bases, Graduate Studies in Mathematics, *American Mathematical Society*, Providence, R.I.
- [49] **Becker, T. and Weispfenning, V.**, 1993. Gröbner Bases: *A Computational Approach to Commutative Algebra*, Springer, New York.
- [50] **Buchberger, B.**, 1976. A Theoretical Basis For The Reduction Of Polynomials To Canonical Forms, *ACM SIGSAM Bulletin Archive*, **10**, 19–29.
- [51] **Just, W. and Stigler, B.**, 2006. Computing Groebner Bases of Ideals of Few Points In High Dimension, *ACM Commun. Comput. Algebr.*, **40**, 67–78.
- [52] **Demiralp, M. and Rabitz, H.**, 1993. Lie Algebraic Factorization of Multivariable Evolution Operators: Definition and the Solution of the Canonical Problem, *International Journal of Engineering Science*, **31**, 307–331.
- [53] **Demiralp, M. and Rabitz, H.**, 1993. Lie Algebraic Factorization of Multivariable Evolution Operators: Convergence Theorems for the Canonical Case, *International Journal of Engineering Science*, **31**, 333–346.
- [54] **Demiralp, M. and Rabitz, H.**, 1991. Factorization of Certain Evolution Operators Using Lie Algebra: Formulation of the method, *Journal of Mathematical Chemistry*, **6**, 165–191.

- [55] **Demiralp, M. and Rabitz, H.**, 1991. Factorization of Certain Evolution Operators Using Lie Algebra: Convergence Theorems, *Journal of Mathematical Chemistry*, **6**, 193–204.
- [56] **Lathauwer, L.D.**, 2007. Joséphine Castaing, Tensor-based techniques for the blind separation of DS-CDMA signals, *Signal Processing*, **87**, 322–336.
- [57] **Nion, D. and Lathauwer, L.D.**, 2008. An enhanced line search scheme for complex-valued tensor decompositions. Application in DS-CDMA, *Signal Processing*, **88**, 749–755.
- [58] **Bro, R.**, 1997. PARAFAC. Tutorial and applications, *Chemom. Intell. Lab. Syst., Special Issue 2nd Internet Conf. in Chemometrics (INCINC'96)*, **38**, 149–171.
- [59] **Vos, M.D., Vergult, A., Lathauwer, L.D., Clercq, W.D., Huffel, S.V., Dupont, P., Palmi, A., and Paesschend, W.V.**, 2007. Canonical decomposition of ictal scalp EEG reliably detects the seizure onset zone, *NeuroImag*, **37**, 844–854
- [60] **Alex, M., Vasilescu, O. and Terzopoulos, D.**, 2002. Multilinear Analysis of Image Ensembles: TensorFaces, *Proc. of the European Conf. on Computer Vision (ECCV '02), Copenhagen, Denmark, May*, 447–460.
- [61] **Kolda, T.G., Bader, B.W. and Kenny, J.P.**, 2005. Higher-order Web link analysis using multilinear algebra, *Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on Data Mining*, 242–249.
- [62] **Carroll, J.D. and Chang, J.**, 1970. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of Eckart-Young decomposition, *Psychometrika*, **35**, 283–319.
- [63] **Giannakis, N.S.G. and Bro, R.**, 2000. Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems, *IEEE Trans. Signal Process.*, **48**, 810–823.
- [64] **Tucker, L.R.**, 1966. Some Mathematical Notes Of Three-Mode Factor Analysis, *Psychometrika*, **31**, 279–311.
- [65] **Kroonenberg, P.M.**, 1966. Three-mode principal component analysis: Theory and application, *Psychometrika*, **31**, 279–311.
- [66] **Lathauwer, L.D., Moor, B.D. and Vandewalle, J.**, 2000. A multilinear singular value decomposition, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **21**, 1253–1278.
- [67] **Kolda, T.G. and Bader, B.W.**, 2009. Tensor Decompositions and Applications, *SIAM Review*, **51(3)**, 455–500.
- [68] **Lathauwer, L.D. and Vandewalle, J.**, 2004. Dimensionality reduction in higher order signal processing and rank- (R_1, R_2, \dots, R_N) reduction in multilinear algebra, *Linear Algebra and its Applications*, **391**, 31–55.
- [69] **Lay, D.C.**, 1996. *Linear algebra and its applications*, Addison-Wesley, Reading, MA

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Nejla ALTAY

Doğum Yeri ve Tarihi: Erzincan 01.03.1979

Adres: İTÜ Bilişim Enstitüsü, Ayazağa Kampüsü, 34469, Maslak, İstanbul

Lisans Üniversitesi: Boğaziçi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yayın Listesi:

- **Altay, N.**, Demiralp, M., Numerical Solution of Ordinary Differential Equations by Fluctuationlessness Theorem, Journal of Mathematical Chemistry, Vol. 47, 2010, pp.1323-1343.
- **Altay, N.**, Demiralp, M., A High Dimensional Model Representation Based Numerical Method for Solving Ordinary Differential Equations, Journal of Mathematical Chemistry, 2010, DOI: 10.1007/s10910-010-9768-1.
- Ashyralyev, A., **Altay, N.**, A Note On The Well-Posedness Of The Nonlocal Boundary Value Problem For Elliptic Difference Equations", Applied Mathematics and Computation, Vol. 175, Mar. 2006, pp. 49--60.
- **Altay, N.**, Demiralp, M., Fluctuationlessness theorem and its application to boundary value problems of ODEs, WSEAS Transactions on Mathematics, Vol.8, No. 5, May 2009, pp.199-204.
- **Altay, N.**, Demiralp, M., Fluctuationlessness Theorem and its Application to Boundary Value Problems of ODEs , Proceedings of the 2nd WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE'00), May 30-June 1, 2009, Istanbul, Turkey, pp.87-92.
- **Altay, N.**, Demiralp, M., Application of Fluctuationlessness Theorem on the Numerical Solution of Higher Order Linear Ordinary Differential Equations, Proceedings of the 6 th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2008), September16-20, 2008, Kos, Greece, pp.52-55.
- **Altay, N.**, Demiralp, M., Numerical Solution of Ordinary Differential Equations in Fluctuationlessness Theorem Perspective , Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE'08), May 27-30, 2008, Istanbul, Turkey, pp.162-167.
- **Altay, N.**, Demiralp, M., Numerical Solution of Ordinary Differential Equations via Splines , Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE'08), May 27-30, 2008, Istanbul, Turkey, pp.141-145.

- Altay, G., Ucan, O.N., **Altay, N.**, Yalcin, S., On the Trellis Structures of Geometric Augmented Product Codes, Proceedings of First NASA/ESA Conference on Adaptive Hardware and Systems (AHS-2006), June 15-18 ,2006, Istanbul, Turkey, pp. 442- 450.
- Altay, G., Ucan, O.N., **Altay, N.**, Full-Information Rate Distance-4 Block Codes, Proceedings of the Third International Symposium on Wireless Communications Systems (ISWCS'06), pp. 759-760, Valencia, Spain, September 5-8, 2006.
- Ashyralyev, A., Sobolevskii, P.E., **Yenial-Altay, N.**, Well-Posedness of the Nonlocal Boundary Value Problem for Elliptic Difference Equations, Eleventh International Congress on Computational and Applied Mathematics, Belgium, July 26-30, 2004, Abstracts of Eleventh International Congress on Computational and Applied Mathematics, pp. 8.
- Ashyralyev, A., **Yenial-Altay, N.**, Positivity of Difference Operators Generated by the Nonlocal Boundary Conditions, Proceedings of International Conference: 2004 - Dynamical Systems and Applications, Antalya, Turkey, July 5-10, 2004, pp.113-135.