





**YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİNDE  
SENDELENİMSİZ MATRİS GÖSTERİLİMİ TABANLI  
AĞIRLIK ENİYİLEMESİ**

**DOKTORA TEZİ  
Burcu Tunga**

**Anabilim Dalı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik**

**Programı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik**

**NİSAN 2010**



**YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİNDE  
SENDELENİMSİZ MATRİS GÖSTERİLİMİ TABANLI  
AĞIRLIK ENİYİLEMESİ**

**DOKTORA TEZİ**  
**Burcu Tunga**  
**(702032012)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09 Aralık 2009**  
**Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Nisan 2010**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin DEMİRALP (İ.T.Ü.)**  
**Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. M. Mithat İDEMEN (Y.Ü.)**  
**Prof. Dr. İbrahim EKSİN (İ.T.Ü.)**  
**Prof. Dr. M. Serdar Çelebi (İ.T.Ü.)**  
**Prof. Dr. Yılmaz Akyıldız (B.Ü.)**

**NİSAN 2010**



## ÖNSÖZ

Lisans eğitimimin ilk günlerinden başlayarak, yüksek lisans ve doktora çalışmamın her aşamasında beni her zaman destekleyen, tüm bilgi birikimini gereksinim duyduğumuz her anda bizlere aktaran değerli hocam, Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması sürecinde bana zaman ayırarak yapıcı yorumlarda bulunan ve yönlendirmeler yapan değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Mithat İDEMEN ve sayın Prof. Dr. İbrahim EKSİN'e çok teşekkür ederim.

Yine gerek tez çalışması gerekse diğer çalışmalar sırasında bana her zaman yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca gerek yüksek lisans gerekse doktora çalışmam sırasında araştırmalarım için gerekli ortamı sağlayan Bilişim Enstitüsü Müdürlüğü'ne ve çalışanlarına teşekkür ederim.

Değerli hocam Metin Demiralp'in kurmuş olduğu ve gerçek bir paylaşım ve üretim ortamı olan, benim de üyesi bulunduğum İTÜ BEBYYT (Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu) içerisindeki tüm arkadaşlarıma, özellikle Evrim KORKMAZ ÖZAY'a yardımlarından dolayı çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimimiz süresince hep yanyana çalıştığımız, sıkıntı, zorluk, mutluluk anlarını kol kola yaşadığımız arkadaşlarım İrem YAMAN ve Sevda ÜSKÜPLÜ ALTINBAŞAK'a katkılarından dolayı çok teşekkür ederim.

Ayrıca, bu çalışma sırasında bana destek olan, yapıcı yorumlarını hiç eksik etmeyen sevgili arkadaşım Birkan TUNÇ'a, sıkıntılarımı paylaşıp bana her an destek olan arkadaşım Yasemin DÖNMEZER'e ayrıca burada ismini saymadığım tüm dostlarım ve sevgili çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması da dahil olmak üzere en zor anlarımda yanımda olan ve desteğini hiç esirgemeyen annem Şenay SARISOY, babam Cihangir SARISOY ve kardeşim Giray SARISOY'a teşekkür ederim.

Hayatımın her anında yanımda olan çok sevgili eşim M. Alper TUNGA'ya hem tez aşamasındaki yardımlarından hem de göstermiş olduğu sabırdan dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Canımın içi çok sevgili kızım Cemre Yağmur'a da annesi çalışırken gösterdiği anlayıştan dolayı çok çok teşekkür ediyorum. Her ikinize de ne kadar teşekkür etsem yine de az kalır biliyorum ve bu tezi ikinize adıyorum.

NİSAN 2010

Burcu Tunga





## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ .....	iii
İÇİNDEKİLER .....	v
KISALTMALAR.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
SEMBOL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET .....	xv
SUMMARY .....	xvii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEZDE KULLANILAN YÖNTEMLER.....</b>	<b>7</b>
2.1 Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) Yöntemleri.....	7
2.1.1 Yalın YBMG yöntemi.....	9
2.1.2 Logaritmik YBMG yöntemi .....	15
2.2 Sendelenim Açılımı Yöntemi .....	16
2.2.1 Tek değişkenli işlevler için sendelenimsizlik yaklaşımı .....	17
2.2.2 Çok değişkenli işlevler için sendelenimsizlik yaklaşımı .....	22
2.2.2.1 Sayısal uygulama	25
2.3 Saptırım Açılımı Yöntemi .....	28
2.3.1 Yöntemin özdeğer problemlerinin çözümünde kullanılması .....	29
<b>3. SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMI İLE AĞIRLIK ENİYİLEMESİ..</b>	<b>35</b>
3.1 Tek Değişkenli İşlevler İçin Ağırlık Eniyilemesi .....	36
3.1.1 Hesaplama algoritması .....	41
3.1.1.1 Sayısal uygulama	43
3.1.2 Sayısal uygulamalar.....	44
3.2 Çok Değişkenli İşlevler İçin Ağırlık Eniyilemesi.....	52
3.2.1 Sayısal uygulamalar.....	54
3.2.1.1 Uygulama – 1	54
3.2.1.2 Uygulama – 2	56
3.2.1.3 Uygulama – 3	57
3.2.1.4 Uygulama – 4	59
<b>4. SAPTIRIM AÇILIMI YÖNTEMİ İLE AĞIRLIK ENİYİLEMESİ.....</b>	<b>61</b>
4.1 Sayısal Uygulamalar .....	69
4.1.1 Uygulama – 1.....	69
4.1.2 Uygulama – 2.....	72
<b>5. SENDELENİMSİZ İNTEGRASYON İLE YBMG YÖNTEMİ.....</b>	<b>75</b>
5.1 Sendelenimsiz İntegrasyon .....	75
5.2 Sendelenimsiz İntegrasyonun YBMG Yöntemine Uygulanması .....	78

5.2.1	Hata analizi .....	79
5.3	Sayısal Uygulamalar .....	80
5.3.1	Uygulama – 1 .....	80
5.3.2	Uygulama – 2 .....	81
5.3.3	Uygulama – 3 .....	82
5.3.4	Uygulama – 4 .....	82
<b>6.</b>	<b>AYRIK VERİ BÖLÜNTÜLENDİRİMİ .....</b>	<b>85</b>
6.1	Dirac Delta Ağırlıklı YBMG Yöntemi ile Veri Bölüntülendirimi .....	86
6.2	Ağırlık Eniyilemeli YBMG Yöntemi ile Veri Bölüntülendirimi .....	87
6.3	Sayısal Uygulamalar .....	92
6.3.1	Uygulama – 1 .....	95
6.3.2	Uygulama – 2 .....	96
6.3.3	Uygulama – 3 .....	98
6.3.4	Uygulama – 4 .....	99
<b>7.</b>	<b>SONUÇLAR .....</b>	<b>103</b>
	<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>107</b>
	<b>EKLER .....</b>	<b>113</b>
	<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>132</b>

## **KISALTMALAR**

- YBMG** : Yüksek Boyutlu Model Gösterilim  
**ÇYBMG** : Çarpımsal Yüksek Boyutlu Model Gösterilim  
**LYBMG** : Logaritmik Yüksek Boyutlu Model Gösterilim  
**MYBMG** : Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilim  
**DYBMG** : Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

<b>Çizelge 3.1</b>	Eniyilenmiş ve eniyilenmemiş ağırlık işlevleri için $\sigma_0$ değerleri ( $n = 9$ ).....	51
<b>Çizelge 3.2</b>	Farklı işlevler ve boyutlar için elde edilmiş eniyilenmiş ağırlık işlevleri ile bulunmuş $\sigma_0$ değerleri.....	52
<b>Çizelge 3.3</b>	$e^{(x_1+x_2)}$ için sendelenimsizlik yaklaşımını ile $\sigma_0$ ve değişmez YBMG terimi ( $f_0$ ) değerleri.....	56
<b>Çizelge 3.4</b>	$e^{x_1} + e^{x_2}$ için sendelenimsizlik yaklaşımını ile $\sigma_0$ ve değişmez YBMG terimi ( $f_0$ ) değerleri.....	57
<b>Çizelge 4.1</b>	Farklı özvektörler için elde edilen $\sigma_{0,0}$ , $\sigma_{0,1}$ , $\sigma_{0,2}$ değerleri.....	72
<b>Çizelge 5.1</b>	$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ işlevi için bağıl hata analizi sonuçları. ....	81
<b>Çizelge 5.2</b>	$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ işlevi için bağıl hata analizi sonuçları. ....	81
<b>Çizelge 5.3</b>	$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$ işlevi için bağıl hata analizi sonuçları. ....	82
<b>Çizelge 5.4</b>	$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ işlevi için bağıl hata analizi sonuçları. ....	83



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

<b>Şekil 3.1</b>	: Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri $n = 2$ . ....	45
<b>Şekil 3.2</b>	: Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri $n = 3$ . ....	46
<b>Şekil 3.3</b>	: Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri $n = 5$ . ....	46
<b>Şekil 3.4</b>	: Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri $n = 7$ . ....	47
<b>Şekil 3.5</b>	: Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri $n = 9$ . ....	47
<b>Şekil 3.6</b>	: $1 - x^2$ işlevi için eniyilenmiş ağırlık işlevleri. ....	48
<b>Şekil 3.7</b>	: $(1 + x)^2 e^x$ işlevi için eniyilenmiş ağırlık işlevleri. ....	49
<b>Şekil 3.8</b>	: $(1 + x)^2 e^x$ işlevine ait çizim. ....	49
<b>Şekil 3.9</b>	: $\sin(x)$ işlevi için eniyilenmiş ağırlık işlevleri. ....	50
<b>Şekil 3.10</b>	: $\sqrt{1 + x}$ işlevi için eniyilenmiş ağırlık işlevleri. ....	50
<b>Şekil 3.11</b>	: $\ln\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ işlevi için eniyilenmiş ağırlık işlevleri. ....	51
<b>Şekil 3.12</b>	: $e^{(x_1+x_2)}$ işlevi ve elde edilen YBMG yaklaşımı ( $s_1(x_1, x_2)$ ). ....	56
<b>Şekil 6.1</b>	: $g_1, g_2, g_3, g_5$ ve $g_6$ çokterimlilerine ait çizim. ....	94
<b>Şekil 6.2</b>	: $g_4$ çokterimlisine ait çizim. ....	95
<b>Şekil 6.3</b>	: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ve $s_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ işlevlerinin veri kümesinin düğüm noktalarındaki değerleri. ....	97
<b>Şekil 6.4</b>	: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ve $s_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ işlevlerinin veri kümesinin düğüm noktalarındaki değerleri. ....	98
<b>Şekil 6.5</b>	: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ve $s_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ işlevlerinin veri kümesinin düğüm noktalarındaki değerleri. ....	99
<b>Şekil 6.6</b>	: $e^{(x_1+x_2)}$ işlevi ve elde edilen YBMG yaklaşımı ( $s_1(x_1, x_2)$ ). ....	100
<b>Şekil 6.7</b>	: $e^{(x_1+x_2)}$ işlevinin ve elde edilen YBMG yaklaşımının ( $s_1(x_1, x_2)$ ) veri kümesinin düğüm noktalarındaki değerleri. ....	101
<b>Şekil 6.8</b>	: $e^{(x_1+x_2)}$ işlevi ve elde edilen YBMG yaklaşımı ( $s_1$ ) arasındaki bağıl hata. ....	101





## SEMBOL LİSTESİ

$\hat{I}$	: Birim Operator
$\mathcal{H}$	: Sürekli ve karesi integrallenebilir işlevlerin örttüğü Hilbert uzayı
$f_0$	: YBMG'nin değişmez terimi
$s_k$	: k. basamaktan YBMG yaklaşırını
$\lambda_k$	: k. basamaktan LYBMG yaklaşırını
$\sigma_0$	: birinci basamaktan değişmezlik ölçeni
$\sigma_k$	: k. basamaktan toplamsallık ölçeni
$\mu_k$	: k. basamaktan LYBMG nitelik ölçeni
$W$	: Ağırlık işlevi
$\delta$	: Kronecker Delta simgesi
$P^{(n)}$	: $n$ boyutlu altuzaya izdüşüren operatör
$\mathbf{X}$	: $x$ bağımsız değişkenin matris gösterilimi
$[\hat{I} - P^{(n)}]$	: Sendelenim operatörü



## YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİNDE SENDELENİMSİZ MATRİS GÖSTERİLİMİ TABANLI AĞIRLIK ENİYİLEMESİ

### ÖZET

Bu çalışmada, ilk olarak Sobol tarafından tasarlanan ve artık günümüzde oldukça yaygın olarak kullanılan Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG) yönteminin etkinliğinin arttırılabilmesi için ağırlık eniyilemesi yapılmaktadır. YBMG yöntemi,  $N$  bağımsız değişkene bağlı çok değişkenli bir işlevi; bir değişmez işlev,  $N$  sayıda tek değişkene bağlı işlevler,  $N(N - 1)/2$  sayıda iki değişkene bağlı işlevler ve bu şekilde giderek artan sayıda değişkene bağlı olan işlevlerin toplamı şeklinde anlatabilmek için kullanılan bir açılım yöntemidir.

Bu açılım toplam  $2^N$  sayıda işlev içermektedir ve bu işlevlerin hepsinin birden açılımda yer alması durumunda çok değişkenli işlev tam olarak anlatılır. Ancak hem açılımda yer alan işlevlerin belirlenmesi sırasında integral işlemlerinin bulunması hem de  $N$  sayısı çok yukarılara tırmandığında çok fazla sayıda işlevin hesaplanma gerekliliği, açılımdan baştan belli sayıda işlev alınarak verilen işlevi anlatabilme zorunluluğunu getirmektedir. YBMG açılımını kullanırken eğilim, hesaplama karmaşıklığını yükseltmemek adına, açılımın en fazla iki değişkene bağlı olan işlevlerinin içerildiği halinin kullanılmasıdır. Bu durumda verilen çok değişkenli işlev yaklaşık olarak temsil edilir. Yaklaşımın başarısının arttırılması için açılımın bilimsel yazında varolan yapısında bir eniyileme yapılması gündeme getirilebilir. Bunu başarabilmenin yollarından bir tanesi, bu tez çalışmasının da konusu olan, YBMG yönteminin kendi yapısında bulunan ve yöntemin bir parçası olan ağırlık işlevinin daha etkinleştirilmesi için ağırlık eniyilemesinin yapılmasıdır.

Tez çalışması içerisinde YBMG yönteminde ağırlık eniyilenmesi iki ana bölüme ayrılarak anlatılmıştır. İlk ana bölümde, analitik yapısı bilinen bir çok değişkenli işlevi temsil edebilmek üzere, yapısı daha az karmaşık olan yaklaşık bir işlev elde edilmesi sırasında ağırlık eniyileme denklemlerinin elde edilerek çözülmesi anlatılırken, ikinci ana bölümde ise, analitik yapısı bilinmeyen işlevlerin çok değişkenli bir veri kümesi üzerinde kümenin her bir düğüm noktasındaki değerleri verildiğinde ilgili işleve uygun bir analitik yapının ortaya çıkarılması sırasında ağırlık eniyilemesinin nasıl yapılabileceği anlatılmaktadır.

Analitik yapısı bilinen bir çok değişkenli işlevin YBMG yöntemine açılması sırasında ağırlık eniyilemesi için elde edilen denklemler iki farklı yol kullanılarak çözülmeye çalışılmıştır. Bunlardan ilki saptırım açılımları yöntemi diğeri ise tez danışmanı tarafından geliştirilmiş olan sendelenim açılımları yöntemidir.

Analitik yapısı bilinmeyen ancak hiperprizmatik düzgün bir ızgaranın tüm düğüm noktalarında değerleri verilmiş olan işlev için YBMG yöntemi kullanılarak bir analitik yapı belirlenmesi ağırlık eniyilemesi altında gündeme getirilmiş ve bu eniyilemenin oluşabilmesi için sendelenimsiz integrasyon yönteminden yararlanılmıştır.



# FLUCTUATION FREE MATRIX REPRESENTATION BASED WEIGHT OPTIMIZATION IN HIGH DIMENSIONAL MODEL REPRESENTATION

## SUMMARY

In this work, a weight function optimization is developed to increase the efficiency of the High Dimensional Model Representation (HDMR) method, a widely used method, which was first proposed by Sobol. HDMR is constructed as an expansion for a given multivariate function having  $N$  independent variables such that its components are ordered starting from a constant component and continuing in ascending multivariance, that is,  $N$  number of univariate, and  $N(N - 1)/2$  number of bivariate components and so on.

The total number of HDMR expansion's components is  $2^N$  and all of these components must be used in the expansion to have the ability of exactly representing the given multivariate function. However, the requirement of evaluating both the integrals appearing in the relations obtained for the HDMR components and huge number of HDMR components depending on the rapid increase of  $N$  brings us to take only first few HDMR components into account to represent the given multivariate function.

The tendency in the HDMR expansion utilization is to go to at most the bivariate components not to increase the computational complexity. Using a few components of the HDMR expansion corresponds to the approximate representation of the given multivariate function. An optimization in the structure of the method can be brought up to increase the efficiency of this approximation. One way to achieve this is the optimization of the HDMR's weight function. This is the main subject of this work.

The optimization of the weight function in the HDMR method is explained in two main sections of this thesis. In the first part, the weight function is tried to be optimized in such a problem that the analytical structure of the multivariate function is known and the task is to represent that function in terms of less-variate more simple functions. In the second part, an algorithm to optimize the weight function of the HDMR method is given under the assumption that the analytical structure of the function to be represented through the HDMR method is not known, instead, the values of the function at the nodes of the given multivariate data set are known to determine an analytical structure.

The equations obtained for the optimization of the weight function in the representation of a multivariate function through the HDMR method whose analytical structure is known are tried to be solved by using two different ways. One of these methods is perturbation expansion method and the other is fluctuation expansion method which was first proposed by the supervisor of this thesis.

Fluctuationlessness integration method is used to optimize the HDMR's weight function in problems such that the values of the multivariate function at the nodes of a hyperprismatic regular grid are given instead of the analytical structure of the function and is asked to determine an analytical structure for the sought function.



## 1. GİRİŞ

Verilen çok değişkenli bir  $f(x_1, \dots, x_N)$  işlevini (ing: function) böl-ve-yönet felsefesini kullanarak, daha az sayıda değişkene bağlı işlevlerin sonlu sayıdaki toplamı şeklinde yazarak, verilen orijinal işlevi en iyi biçimde temsil edebilmek için bilimsel yazında birçok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemlere örnek olarak Taylor serileri, Laurent serileri, kuvvet serileri, Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) yöntemi ve bu yöntemin taban oluşturduğu diğer gösterilim yöntemleri sayılabilir.

Bu çalışma temel olarak Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (ing: High Dimensional Model Representation) yöntemi ile ilgilenmektedir. Yöntem, ilk olarak I.M. Sobol isimli bir bilim adamı tarafından Monte Carlo ve Monte Carlo benzeri algoritmaların uygulandığı problemlerde çok değişkenli işlevlerin değişik bağımsız değişkenlere göre duyarlılığını tahmin etme amaçlı geliştirilmiş ve 1993 yılında bilimsel yazına girmiştir [1]. Sobol, çalışmasında  $[0, 1]$  aralığında integrallenebilen bir çok değişkenli işlevin verilen diklik koşulları ve birim ağırlık altında daha az değişkenli işlevlerin toplamı olarak aşağıdaki şekliyle yazılabileceğini göstermiştir [1].

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + f_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (1.1)$$

Bu yöntem, matematiksel anlatımdan da kolayca anlaşılacağı gibi sonlu bir toplamı içermektedir ve verilen çok değişkenli işlevi sağ taraftaki tüm terimler toplandığında tam olarak ifade edebilmektedir. Yöntem öncelikle yukarıda verilen açılımın sağ tarafındaki bileşenlerin belirlenmesine yönelik adımları içermekte ve bu adımlar tezin 2. bölümünde ayrıntılı olarak verilmektedir.

Sobol'un bu çalışmasından sonra YBMG yöntemi Princeton Üniversitesi'nde bulunan Herschel Rabitz ve grubu [2–18] tarafından daha ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Değişik mühendislik problemlerinin çözümlerini elde etmek amacıyla çeşitli yeni YBMG tabanlı algoritmalar geliştirilmiştir. İstatistik alanındaki varyansların analizi ile ilgili uygulamalara yönelik ANOVA-HDMR [2, 3] isimli bir algoritma oluşturulmuştur. Bu grubun diğer bir YBMG tabanlı yöntemi cut-HDMR [7–9] ismini almıştır. Bu yöntem çok değişkenli bir işlevin, işlevin doğru veya düzlem

üzerinde bulunan noktalardaki değerlerinin aynı doğru veya düzlem üzerindeki bir kesme noktasından geçiş bilgisinin kullanılmasıyla yeniden daha az değişkenli işlevler cinsinden gösterilimine dayanmaktadır. Aynı gruba ait bir diğer yöntem ise RS-HDMR (Random Sampling-HDMR) [10–16] şeklinde isimlendirilerek geliştirilmiştir. Bu yöntem, seçkisiz olarak oluşturulmuş bir veri kümesinin modellenmesine yöneliktir. Burada kısaca bahsedilen YBMG tabanlı algoritmalar çeşitli alanlardaki problemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Bu alanlar; atmosferik hareketlerin modellenmesi, risk analizleri, finansal ve ekonomik uygulamalar, stratosferik kimyasal kinetikleri gibi çalışma konularını içerir.

Yöntemin önericisi Sobol tarafından bir diğer çalışma 2003 yılında gerçekleştirilmiştir [19]. Bu çalışmada birinci mertebeden sonlu fark operatörünün YBMG açılımı üzerindeki etkileri ANOVA-HDMR ve cut-HDMR yöntemleri aracılığıyla incelenmiştir.

Herschel Rabitz ve grubuna paralel olarak Metin Demiralp ve grubu da YBMG açılımını temel alarak yeni yöntemler geliştirmiştir [20–37]. Bu yöntemler de çeşitli mühendislik problemlerine yeni çözüm önerileri getiren matematik tabanlı güçlü algoritmalar olarak bilimsel yazına girmiştir. Sobol tarafından geliştirilen Yalın YBMG yönteminin kullanıldığı algoritmaların [20–30] yanısıra bu yöntemin felsefesinden yola çıkılarak yeni açılımların da oluşturulduğu algoritmalar bu çalışmaların içinde bulunmaktadır. Bunlar; Genelleştirilmiş YBMG [31, 32], Çarpımsallaştırılmış YBMG [33–35], Melez YBMG [36–39], Logaritmik YBMG [40,41], Dönüşümsel YBMG [42], Bütünleştirilmiş küçük ölçekli YBMG [43] şeklinde sıralanabilir.

Yukarıda bahsedilen YBMG tabanlı yöntemler; çok boyutlu veri bölüntülenmesinde ve modellenmesinde, Schrödinger denkleminin çeşitli problemler için çözülmesinde, optimal kontrol problemlerinde, özdeğer-özvektör problem modellenmesinde, Laplace dönüşüm uygulamalarında, üstel matris hesaplamalarında, sayısal integrasyon hesaplamalarında, parametrik duyarlılık analizi problemlerinde, evrim operatörü uygulamalarının içerildiği problemlerde, diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılmak amacıyla geliştirilmiştir.

Bilimsel yazında burada belirtilen iki grup dışında başka bilim insanları da YBMG yöntemi ile ilgili çalışmaları sürdürmektedirler. Kimyasal tepkimelerin modellenmesinde YBMG yönteminin uygulanmasına yönelik bir çalışma Ziehn ve Tomlin tarafından gerçekleştirilmiştir [44]. Yine aynı bilim insanları YBMG yöntemine özel



duyarlılık analizi konularında kullanılmak üzere bir grafik tabanlı arayüzü geliştirme çalışmasında bulunmuştur [45]. Sridharan ve Chen, CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor) teknolojisinde çipler üzerindeki mantık kapılarının gecikme sürelerinin modellenmesinde YBMG yöntemini kullanmışlardır [46].

Mekaniksel sistemlerin bileşen güvenilirliği tahmini ve bu tür sistemlerin arıza olasılığının tahmin edilmesi konularında YBMG tabanlı etkin bir olasılıksal analiz yöntemi Rao ve Chowdhury tarafından geliştirilmiştir [47,48].

Bir başka çalışmada ise, bilim adamları hava kalitesi ile ilgili modellemelerde hesaplama zamanlarını azaltmaya yönelik yine YBMG tabanlı bir algoritma oluşturmuşlardır [49].

Ayrıca, doğrusal olmayan modellerde ve kara-kutu modellerinde belirsizliğin yayılımı hakkında bilgi üretmeye yönelik YBMG tabanlı uygulamalar Banerjee ve Ierapetritou tarafından ortaya atılmıştır [50–52].

YBMG yöntemi (1.1) ile verilen açılım dikkatlice incelendiğinde, açılımın sağ yanındaki tüm terimlerin kullanılması durumunda  $2^N$  tane terimin hesaplanması sorununun ortaya çıktığı görülmektedir. Bu durum ise, bu yöntemin doğasından kaynaklanan ve bölüm 2’de verilen birçok integralin hesabının yapılması anlamına gelmektedir ki, integral hesaplamasının her ne kadar günümüz teknolojisindeki bilgisayarlar çok gelişmiş olsa da, oldukça pahalı bir yöntem olduğu açıktır. Bu yüzden yöntemde YBMG açılımından çok fazla terim almak yeğlenmez. Dolayısıyla, şu ana kadar bilimsel yazında varolan çalışmalar da incelendiğinde bu yöntem aslında bir yaklaşıtırm olarak düşünülmektedir. Yani, eldeki problemlerde ortaya çıkan gereksinimlere göre yöntemin açılımından baştan belirli sayıda terim alınarak çok değişkenli işlevlerin yaklaşık olarak temsil edilmesi amaçlanmaktadır. Genellikle de açılımın en fazla iki değişkene bağlı olan işlevleri içerecek şekildeki kısmından yararlanmak hesaplama karmaşıklığını yükseltmemek adına önem kazanmaktadır.

Bu durumda yaklaşıtırmın kalitesini arttırmak önemli bir amaç haline gelmektedir. Bu noktada en akılcı yollardan biri, bu çalışmaya kadar bilimsel yazına girmiş yukarıda bahsedilen çalışmalarda gündeme getirilmeyen önemli bir nokta olan YBMG yönteminin kendi bünyesinde bulunan, yöntemin bir parçası olan ağırlık işlevinin etkinliğinin artırılması ve bu amaçla bir ağırlık eniyilemesinin (ing: optimization)

yapılmasıdır. Bu tez çalışmasının temel hedefi bu eniyilemeyi gerçekleştirecek bir yöntem geliştirmektir.

Bu amacı gerçekleştirebilmek amacıyla çalışma içerisinde öncelikle eniyileme denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen bu denklemler doğrusal olmayan yapı taşımakta olduğundan yüksek boyutlara genelleştirmede kapsamı artan zorluklar getirmektedir. Bu zorlukların aşılabilmesi amacı ile iki farklı yöntem; sendelenim açılımı (ing: fluctuation expansion) ve saptırım açılımı (ing: perturbation expansion) yöntemlerinden yararlanılmıştır.

Sendelenim açılımı yöntemi, Demiralp ve İTÜ BEBBYT (İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu) tarafından geliştirilmiş ve geliştirilmekte olan yeni bir yöntemdir. Sendelenim açılımı, operatörlerin matris gösterilimi (ing: matrix representation) esasına dayanmaktadır. Operatörlerin matris gösterilimi, farklı problemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesi için oluşturulan cebirsel yöntemlerin gelişmesinde önemli rol oynar. Özellikle doğrusal operatörler içeren problemlerin yaklaşık çözümlerini elde edebilmek için, sonlu sayıda baz işlevi ile örtülen (ing: span) doğrusal vektör uzayları üzerinde operatörlerin matris gösterimleri kullanılabilir. Böylece doğrusal vektör uzayının boyutu artırılarak istenilen yaklaştırım kalitesine ulaşılabilir. Bu türden sorunlar arasında kuvantum optimal kontrol, sayısal integrasyon, taylor açılımları, sıradan türevli ve göretürevli denklem çözümleri, istatistiksel mekanik sayılabilir. Bu alanlarda, argümanlarını işlevlerin belli değerleri ile çarpan cebirsel operatörler ile sıkça karşılaşılır. Bu operatörlerin matris gösterilimindeki elemanlar, Hilbert uzayında integral yardımı ile tanımlanan iççarpımlarla verilmektedir. Bu integrallerin hesabı elde edilebilecek her durum için kolay değildir ve bu durum yaklaşık çözümlerin gereksinimine yol açar. Böylece bu operatörlerin matris gösterimlerininin yaklaştırmaları sadece teoride değil pratik uygulamalarda da oldukça önem taşımaktadır.

Saptırım açılımı (ing: perturbation expansion) yöntemi ise daha çok matematiksel modelleme sonrasında ortaya çıkan denklemlerin çözülebilmesi için kullanılmaktadır. Çoğu denklemlerin matematiksel yapısı açık ve kesin bir analitik çözüm üretmeye olanak vermediğinden bu yöntem probleme yaklaşık bir çözüm bulabilmek için kullanılmaktadır. Uygulamada karşılaşılan problemlerin birçoğunda, ortaya çıkan denklemlerdeki bazı parametrelerin özel bir değer alması durumunda problemin

çözümü kolay hale gelebilir. Bu tür durumlarda, parametrenin bir saptırma neden olduğu düşünülerek saptırım olmadığı durum taban alınır ve saptırım etkileri ardışık bir biçimde yansıtılacak şekilde bir yöntem oluşturulur. Bazı durumlarda denklem içinde bir parametre bulunmayabilir. Bu durumda denklem içine yapay olarak bir parametre eklenerek saptırım açılımı yöntemi gündeme getirilebilir.

Tez işlenişi itibarı ile iki ana bölümden oluşmaktadır. İlki analitik yapısı bilinen bir çok değişkenli  $f(x_1, \dots, x_N)$  işlevini YBMG bileşenlerini kullanarak ve ağırlık eniyilemesi ile en iyi biçimde yaklaştırmaktır ki bu yöntem bilimsel yazında iki şekilde kullanılabilir: Bunlardan ilki, verilen bir işlevi bilgisayarda ifade edebilmek için bu işlevi toplama, çıkarma, çarpma ya da bölme işlemlerini kullanarak yazma gerekliliği, diğeri ise verilen çok değişkenli işlevdeki değişken sayısının çok yukarılara tırmandığı durumda bu işlev ile matematiksel bir işlem yapmanın oldukça zor bir duruma gelmesidir.

İkinci ana bölümde ise, analitik yapısı bilinmeyen işlevlerin çok değişkenli bir veri kümesi üzerinde kümenin her bir düğüm noktasındaki değerleri verildiğinde ilgili işleve uygun bir analitik yapının ortaya çıkarılmasına yönelik bir yaklaşımlar yöntemi anlatılmaktadır. Bu problemde bahsedilen veri kümesi problemin bağımsız değişkenlerinin tanım kümelerinden oluşturulmuş bir kartezyen çarpım kümesidir ve problemde ilgili kartezyen çarpım kümesinin bütün düğüm noktalarında analitik yapısı aranılan işlevin değerlerinin verildiği varsayılmaktadır. Yani, ilgilenilen ızgara (ing: grid) dolu bir ızgaradır ve dik bir geometri sağlamaktadır.

Tez içerisinde, 2. bölümde tez açısından özgünlüğü olmayan fakat tez içerisinde kullanılan yöntemler anlatılmıştır. Daha sonraki bölümlerde ise tez çalışması sırasında elde edilen ve tez açısından tamamen özgün olan bilgiler içerilmektedir.

Çalışma sırasında elde edilen eniyileme denklemleri ve bu denklemlerin sendelenimsizlik yaklaşımlarını kullanarak elde edilen çözümleri tek ve çok değişkenli işlevler için ayrı ayrı alt başlıklar altında ve örneklemelerle birlikte 3. bölümde verilmektedir.

Yine elde edilen eniyileme denklemlerinin bir başka yöntem olan saptırım açılımı yöntemi kullanılarak çözümü 4. bölümde verilmektedir. Yine bu bölüm yöntem ile ilgili aydınlatıcı örnekler de içermektedir.

5. bölümde ise, bu tez çalışmasının temelini oluşturan YBMG yönteminde bulunan integrallerin analitik olarak hesaplanmasında ortaya çıkan matematiksel yöntem, yazılım, donanım ve zaman kısıtlarının önüne geçilmesinde önemli bir rol oynayacak ve tez danışmanı tarafından geliştirilmiş olan sendelenimsiz integrasyon (ing: fluctuation free integration) yöntemine değinilmiştir. Bu yöntem, konunun daha iyi anlaşılabilmesi açısından bilimsel yazında var olan YBMG ve Logaritmik YBMG yöntemlerine uygulanmış ve sonuçları verilmiştir. Sonuçlar ayrıca bir bildiri olarak da sunulmuştur [53].

6. bölümde bu tez çalışması sırasında geliştirilen ağırlık eniyilemeli YBMG yöntemi ile analitik yapısı bilinmeyen, ancak kartezyen bir küme üzerinde her noktada değeri verilen bir işleve uygun bir analitik işlev yapısının bulunması konusu işlenmektedir. Ayrıca yöntemin etkinliğini gösteren çeşitli örneklerle ilgili bölüm zenginleştirilmiştir.

Son bölümde ise tez içerisinde yapılan tüm çalışmalara ait elde edilen sonuçlar ve bu sonuçlar hakkındaki tartışmalar sunulmuştur.

## 2. TEZDE KULLANILAN YÖNTEMLER

Bu bölümde tez çalışması içerisinde kullanılacak olan yöntemler hakkında kısaca bilgi verilmesi ve yöntemlerin algoritmalarının anlatılması hedeflenmiştir.

Bu çalışmada, Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (ing: High Dimensional Model Representation) yöntemi içerisinde toplamsallık ölçenleri üzerinden ağırlık yapısı eniyilenmeye ve olabildiğince az sayıda YBMG bileşeni ile asıl işleve yeterince yaklaşabilmek için uygun bir ağırlık işlevi saptanmaya çalışılmaktadır. Bu bağlamda, tezde üç farklı yöntem üzerinde durulacaktır. Bunlardan ilki tezin bel kemiğini oluşturan Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) yöntemidir. Bu yöntemin çeşitleri üzerinde durulacak ve tarihsel gelişim süreci hakkında bilgi verilecektir.

İkinci yöntem, Demiralp ve İTÜ BEBBYT (İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu) tarafından geliştirilmekte olan sendelenim açılımı (ing: fluctuation expansion) yöntemidir. Bu tez çalışması içerisinde yalnızca sendelenim açılımı yönteminin ilk adımı olan sendelenimsizlik yaklaşımını (ing: fluctuationlessness approximation) üzerinde durulacaktır. Yöntemin oldukça verimli çalışması ve yakınsama gücünün yüksek olması nedeni ile daha üst basamaktan sendelenim açılımlarına, örneğin birinci mertebeden sendelenim yaklaşım terimlerine, gereksinim duyulmamıştır.

Üçüncü ve son olarak, saptırım açılımı (ing: perturbation expansion) kullanılarak istenilen amaca ulaşılmaya çalışılmıştır.

### 2.1 Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) Yöntemleri

Bilgisayar teknolojisinin oldukça ilerlediği günümüzde, çok değişkenli bir işlev ile ilgilenmek bellek ve hız sınırlamaları yüzünden yine de oldukça zordur. Bu zorluğu aşabilmek amacı ile bilim insanları birçok yöntem geliştirmekte ya da geliştirmeye çalışmaktadır. Burada verilecek olan yöntemler de bu zorlukları aşabilmek için kullanılan bir yöntemler topluluğu olarak gündeme gelmektedir.

Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi tabanlı yöntemlerin genel amacı, çok değişkenli analitik bir işlevi daha az sayıda bağımsız değişken içeren bir takım başka işlevlere ayırarak çok boyutlu işlev yerine bu yeni işlevlerle ilgilenmeyi amaçlar. Bir başka deyişle bu yöntem böl-ve-yönet felsefesini kullanarak çok değişkenli bir  $f(x_1, \dots, x_N)$  işlevini değişmez terim, tek değişkene bağlı birli terimler, iki değişkene bağlı ikili terimler ve bu şekilde giderek artan sayıda değişkene bağlı olan terimler şeklinde yazılan bir açılım olarak gündeme getirebilmektedir. Bu açılımın bileşenleri ise integral altında yok olma koşulu kullanılarak belirlenebilir. Bu koşul Yalın YBMG (ing: Plain HDMR) bileşenlerinin verilen bir ağırlık işlevi altında eşsiz olarak bulunmasını sağlar. Belirtilen koşul, Yalın YBMG ya da kısaca YBMG yönteminin adım adım ilerleme şeması ile birlikte bir sonraki alt bölümde verilecektir.

YBMG yöntemi ilk olarak Sobol tarafından tasarlanmıştır [1]. Bu yöntemin bir yaklaşımlar yöntemi olduğu dikkate alınacak olursa verilen çok değişkenli bir işlevin değişmez terim, birli terimler ya da en çok ikili terimlerle çok iyi bir şekilde temsil edilebilmesi yani, yakınsamanın daha iyi olabilmesi için, şu ana kadar yapılan incelemeler göstermiştir ki, ele alınan işlevin yapısı önem kazanmaktadır. Eğer temsil edilecek olan işlev toplamsal bir yapıda ise, Yalın YBMG yeterince iyi yakınsarken işlev çarpımsal bir yapıda ise, YBMG işlevi yeterince iyi temsil edememektedir. Bunun için yeni bir yöntem arayışına gidilmiş ve çarpımsal YBMG (ing: Factorized HDMR) yöntemi Demiralp ve grubu tarafından geliştirilmiştir. Bu yeni YBMG yöntemi, verilen çok değişkenli çarpımsal yapıya sahip bir işlevi oldukça güçlü bir yakınsama ile temsil edebilmektedir. Yalnız, bu yöntem için tanımlanan çarpımsallık ölçenleri Yalın YBMG yöntemi için tanımlanan toplamsallık ölçenleri gibi tekdüze (ing: monotonous) artan bir dizi yapısı göstermemektedir. Bu da bu yöntem için önemli bir eksiklik oluşturmaktadır. Bu olumsuzluğu ortadan kaldırabilmek için yeni bir YBMG tabanlı yöntem gereksinim duyulmuş ve bu gereksinim Logaritmik YBMG (ing: Logarithmic HDMR) yönteminin doğmasına neden olmuştur.

Bu çalışma içerisinde, çarpımsallık ile ilgili olarak Logaritmik YBMG ile ilgilenilmiş çarpımsal YBMG ile çalışılmamıştır. Dolayısı ile yalnızca Logaritmik YBMG yönteminden söz edilecektir. Bölümün geri kalan kısmında Yalın YBMG ile Logaritmik YBMG yöntemleri alt bölümler halinde verilmektedir.

### 2.1.1 Yalın YBMG yöntemi

Sobol 1993 yılında yayınlanan yazısında, verilen bir analitik  $f(x_1, \dots, x_N)$  işlevi için çok değişkenliliği artarak giden (1.1) ile verilen açılımı önermiştir.

Bu açılımdaki eşitliğin sol tarafındaki  $f(x_1, \dots, x_N)$ ,  $N$  bağımsız değişkenli karesi integrallenebilir (ing: square integrable) bir işlev; eşitliğin sağ tarafındaki işlevlerse, sırasıyla,  $f_0$  ile simgelenen bir değişmez (ing: constant) işlev; sonraki  $N$  bileşen,  $f_1(x_1), \dots, f_N(x_N)$  ile simgelenen ve bir tek bağımsız değişkene bağlı olan işlevler; daha sonraki  $N(N-1)/2$  bileşen, yalnızca iki bağımsız değişkene bağlı olan işlevler; ve diğer bileşenlerin de, sayıları binom katsayıları olacak biçimde, gittikçe artan sayıda bağımsız değişkene bağlı işlevler olduğu varsayılmaktadır.

Burada verilen açılımın sağ yanında bulunan bileşenler yok olma koşulu altında belirlenebilirler. Yok olma koşulu kısaca şu biçimde verilebilir: YBMG bileşenlerinden değişmez terim dışındakilerden herhangi biri bağımsız değişkenlerden biri üzerinde verilen aralıkta integre edilirse sonuç sıfır olmalıdır. Yok olma koşulunun matematiksel anlatımı aşağıda verilen şekilde ifade edilebilir.

$$\int_{a_{i_s}}^{b_{i_s}} dx_{i_s} W_{i_s}(x_{i_s}) f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = 0, \quad i_1 \leq i_s \leq i_k \quad (2.1)$$

Sobol önermiş olduğu yöntemde tüm ağırlıkları birim ağırlık ve aralığı da  $[0, 1]$  olarak almıştır. Daha sonra yöntem, Rabitz tarafından integral sınırları herhangi iki gerçel sayı olacağı varsayılarak ve integranda değişik bağımsız değişkenlere bağlı tek değişkenli çarpanların çarpımından oluşan bir ağırlık işlevi sokularak genelleştirilmiştir [2–12]. YBMG' nin tüme yaygın ağırlık işlevi aşağıdaki eşitlikle verilebilir.

$$W(x_1, \dots, x_N) \equiv \prod_{i=1}^N W_i(x_i), \quad x_i \in [a_i, b_i], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.2)$$

Yok olma koşulu aynı zamanda YBMG bileşenlerinin verilen ağırlık işlevi altında ve YBMG geometrisi üzerinde tanımlanan bir Hilbert uzayı içerisinde birbirlerine dik olması ile aynı anlama gelmektedir. Diklik koşulu aşağıdaki anlatımla verilebilir.

$$\begin{aligned} (f_{i_1 \dots i_k}, f_{i_1 \dots i_l}) &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \\ &\quad \times f_{i_1 \dots i_l}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}), \quad \{i_1, \dots, i_k\} \neq \{i_1, \dots, i_l\}, \quad 1 \leq k, l \leq N \end{aligned} \quad (2.3)$$

Diklik koşulu bir iççarpım üzerinden tanımlanmakta ve hem  $f(x_1, \dots, x_N)$  işlevinin hem de bileşen işlevlerin karesi integre edilebilen işlevlerden yani Hilbert uzayından seçildiği varsayılmaktadır. Hilbert uzayında iççarpım,  $u(x_1, \dots, x_N)$  ve  $v(x_1, \dots, x_N)$  Hilbert uzayından seçilmiş herhangi iki işlev olmak üzere

$$(u, v) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) u(x_1, \dots, x_N) v(x_1, \dots, x_N) \quad (2.4)$$

olarak tanımlanabilir. Burada verilen  $W_i(x_i)$  ( $1 \leq i \leq N$ ) anlatımları her bir bağımsız değişkene bağlı ağırlık işlevi çarpanlarını temsil eder anlatımların yalın oluşması açısından, verilen aralıkta ilgili bağımsız değişken altındaki integrali 1 olarak kabul edilir.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.5)$$

Bu eşitlik YBMG yönteminde ağırlık işlevi üzerinde normalizasyon koşulu olarak yorumlanır. Bu koşul YBMG bileşenlerinin rahat bir şekilde bulunabilmesi için yapılan bir kabuldür ve her ne kadar, burada çarpımsal olarak varsayılan, YBMG ağırlık işlevi üzerinde de tanımlanabilse de herhangi bir belirsizliğe neden olmaması açısından ağırlık işlevi çarpanları üzerinden tanımlanmıştır.

Verilen normalizasyon koşulu ve yok olma koşulu kullanılırsa YBMG bileşenleri eşsiz bir şekilde bulunabilir. Bu amaçla bir takım izdüşüm (ing: projection) operatörleri tanımlanabilir. Aşağıda tanımı verilen  $\mathcal{P}_0$  operatörü

$$\mathcal{P}_0 g(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) g(x_1, \dots, x_N) \quad (2.6)$$

değişmez terim,  $f_0$ 'ın belirlenmesi için kullanılır. Eğer  $\mathcal{P}_0$  izdüşüm operatörü (1.1) ile verilen denklemin her iki tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 f(x_1, \dots, x_N) &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) f_0 \\ &+ \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \dots \\ &+ \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) f_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (2.7)$$

anlatımı elde edilir. Bu anlatımda değişmez terim dışındaki YBMG terimleri yani birli ve daha üst basamaktan bileşenler (2.1) ile verilen yok olma koşulundan dolayı sıfırlanacak, yalnızca değişmez terim yaşayacaktır. Tüm bunlar ve ağırlık işlevi



üzerindeki normalizasyon koşulu gözönünde bulundurulduğunda YBMG açılımının değişmez terimi için

$$f_0 = \mathcal{P}_0 f(x_1, \dots, x_N) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.8)$$

anlatımı yazılabilir. Böylece değişmez terim bu anlatım kullanılarak eşsiz bir biçimde elde edilmiş olur. Aynı koşulları kullanarak birli terimleri,  $f_i(x_i)$ , belirleyebilmek için aşağıda tanımı verilen  $\mathcal{P}_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) izdüşüm operatörlerinden yararlanılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i g(x_1, \dots, x_N) &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \\ &\times \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) g(x_1, \dots, x_N), \\ &1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bu operatörler,  $\mathcal{P}_0$  operatörünün  $x_i$  bağımsız değişkenine bağlı olan integralinin ve yine aynı bağımsız değişkene bağlı  $W_i(x_i)$  ağırlık çarpanının dışlanmasıyla oluşan yeni formuna eşdeğerdir. Eğer  $\mathcal{P}_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) izdüşüm operatörü yine (1.1)'de verilen denklemin her iki tarafına uygulanırsa ve yok olma koşulu ile normalizasyon koşulundan yararlanılırsa, birli terimler

$$\begin{aligned} f_i(x_i) = \mathcal{P}_i f(x_1, \dots, x_N) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \\ &\times \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) f(x_1, \dots, x_N) - f_0 \\ &1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (2.10)$$

şeklinde elde edilir. İkili terimlerin yapısını belirleyebilmek için yine aynı yol izlenir ve bu adımda  $x_{i_1}$  ile  $x_{i_2}$  bağımsız değişkenlerine bağlı olan integraller ve yine aynı bağımsız değişkenlere bağlı  $W_{i_1}(x_{i_1})$  ile  $W_{i_2}(x_{i_2})$  ağırlık çarpanları dışlanarak aşağıda verilen  $\mathcal{P}_{i_1 i_2}$  ( $1 \leq i_1 < i_2 \leq N$ ) izdüşüm operatörü tanımlanır.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{i_1 i_2} g(x_1, \dots, x_N) &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}} dx_{i_1-1} W_{i_1-1}(x_{i_1-1}) \\ &\times \int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}} dx_{i_1+1} W_{i_1+1}(x_{i_1+1}) \cdots \int_{a_{i_2-1}}^{b_{i_2-1}} dx_{i_2-1} W_{i_2-1}(x_{i_2-1}) \\ &\times \int_{a_{i_2+1}}^{b_{i_2+1}} dx_{i_2+1} W_{i_2+1}(x_{i_2+1}) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) g(x_1, \dots, x_N), \\ &1 \leq i_1 < i_2 \leq N \end{aligned} \quad (2.11)$$

Bu operatör (1.1) ile verilen denklemin her iki yanına uygulanırsa, yok olma koşulu ve normalizasyon koşulu altında ikili terimler

$$\begin{aligned}
f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) &= \mathcal{P}_{i_1 i_2} f(x_1, \dots, x_N) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}} dx_{i_1-1} W_{i_1-1}(x_{i_1-1}) \\
&\times \int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}} dx_{i_1+1} W_{i_1+1}(x_{i_1+1}) \cdots \int_{a_{i_2-1}}^{b_{i_2-1}} dx_{i_2-1} W_{i_2-1}(x_{i_2-1}) \int_{a_{i_2+1}}^{b_{i_2+1}} dx_{i_2+1} W_{i_2+1}(x_{i_2+1}) \\
&\cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) f(x_1, \dots, x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_0, \\
&1 \leq i_1 < i_2 \leq N
\end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde elde edilir.

Artık kolayca görülmektedir ki, daha yüksek mertebeden YBMG terimlerinin yapısı  $\mathcal{P}_{i_1 \dots i_k}$  ( $1 \leq k \leq N$ ) izdüşüm operatörleri tanımlanarak bulunabilir. Burada özellikle vurgulanmalıdır ki, YBMG tabanlı yöntemlerin genel amacı en fazla ikili terimleri kullanarak verilen işleve yaklaştırmada bulunmaktır. YBMG yöntemleri her ne kadar sonlu sayıda işlem gerektiren yöntemler olsa da, daha üst basamaktan YBMG terimlerini hesaplamak oldukça zordur. Bunun nedeni, üst basamaktan YBMG terimlerinin hesabının, işlevin bağımsız değişken sayısı arttıkça, yani  $N$  sayısı yukarılara tırmandıkça, daha fazla sayıda işlem yapma zorunluluğu getirmesinden kaynaklanmaktadır.

Bir örnek verilecek olursa,  $N$  sayısı 20 sayısına eşit olduğunda, 20 bağımsız değişkene bağlı  $2^{20}$  terimle yani yaklaşık olarak bir milyon YBMG bileşenin toplamı ile işlev tam olarak anlatılabilir. Bu sayı, mühendislik problemleri açısından tercih edilmeyecek bir düzeydedir. Bu yüzden (1.1) ile verilen YBMG açılımının sağ yanındaki YBMG terimleri üzerinde kesme uygulanır.

YBMG açılımı değişmez terimden hemen sonra kesilirse, bu yaklaşıma “Değişmez Yaklaşım” olarak adlandırılır ve  $s_0$  simgesi ile gösterilir.  $s_1$  ile gösterilen “Birinci Basamaktan YBMG Yaklaşımı” ise, YBMG açılımının birinci terimden hemen sonra kesilmesi ile tanımlanmaktadır. Daha önce belirtildiği gibi YBMG yönteminde en fazla ikili terimlerin bulunduğu bir yaklaşım yeğlenmekle birlikte yöntem için genel yaklaşım tanımı  $s_k$  ile verilebilir ve “ $k$ . Basamaktan YBMG Yaklaşımı” olarak

adlandırılır. Bu yaklaşıtlara ait matematiksel anlatımlar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
s_0(x_1, \dots, x_N) &= f_0 \\
s_1(x_1, \dots, x_N) &= s_0(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) \\
s_2(x_1, \dots, x_N) &= s_0(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \\
&\vdots \\
s_k(x_1, \dots, x_N) &= s_{k-1}(x_1, \dots, x_N) + \sum_{\substack{i_1 \dots i_k=1 \\ i_1 < \dots < i_k}}^N f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.13)
\end{aligned}$$

YBMG açılımı üzerinde kesme yapıldıktan sonraki asıl sorun, bu yaklaşıtların çok değişkenli işlevi istenilen duyarlılık çerçevesinde ne kadar iyi temsil edebileceği sorunudur. Diğer bir deyişle,  $k$ . ( $1 \leq k \leq N$ ) basamaktan YBMG yaklaşımının işleve oldukça iyi yakınsaması gerekir.

Bu yakınsamayı ölçebilmek amacıyla bir takım ölçenler gündeme getirilmiştir. Bu ölçenlerin tanımını verebilmek için norm tanımına gereksinim duyulur. YBMG bileşenlerinin herhangi biri üzerindeki norm tanımı

$$\|f_{i_1 i_2 \dots i_k}\|^2 = (f_{i_1 i_2 \dots i_k}, f_{i_1 i_2 \dots i_k}) \quad (2.14)$$

şeklinde verilebilir. Bu tanım göz önünde bulundurularak (1.1) ile verilen denklemin her iki yanında bulunan terimlerin kareleri ilgili ağırlık altında tüm  $x_1, \dots, x_N$  bağımsız değişkenlerine göre integre edilirse

$$\|f\|^2 = \|f_0\|^2 + \sum_{i=1}^N \|f_i\|^2 + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \|f_{i_1 i_2}\|^2 + \dots + \|f_{12 \dots N}\|^2 \quad (2.15)$$

anlatımı elde edilir. Burada eşitliğin sağ tarafında bulunan tüm YBMG bileşenleri birbirine dik olduğundan karışık iççarpım terimleri düşecektir. Bundan sonraki adım her iki tarafı  $\|f\|^2$  ile bölmektir. Bu bölme işlemi yapılırsa,

$$1 = \frac{1}{\|f\|^2} \|f_0\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \|f_i\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \|f_{i_1 i_2}\|^2 + \dots + \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12 \dots N}\|^2 \quad (2.16)$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafına belli sayıda kesme uygulayarak aşağıda verilen ölçenleri, yani “Toplamsallık Ölçenlerini” tanımlamak olanaklıdır.

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \|f_0\|^2 \\
\sigma_1 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \|f_i\|^2 + \sigma_0 \\
\sigma_1 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \|f_{i_1 i_2}\|^2 + \sigma_1 \\
&\vdots \\
\sigma_N &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12\dots N}\|^2 + \sigma_{N-1}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Burada  $\sigma_0$  “Değişmezlik Ölçeni” ya da “Sıfırıncı Basamaktan Toplamsallık Ölçeni” adını alır ve değişmez terimin YBMG açılımının tamamına olan katkısını belirler. (2.15) ile verilen denklemden de anlaşılacağı gibi  $\sigma_0$  ve tüm diğer toplamsallık ölçenleri sıfır ile bir arasında kalacaktır. Yalnız vurgulanmalıdır ki,  $\sigma_0$  değerinin 1’e eşit olabilmesi ancak ve ancak verilen çok değişkenli işlevin sabit olması durumunda olanaklıdır.  $\sigma_1$  ise YBMG açılımına değişmez terimin yanı sıra birli terimlerin de eklenmesi ile oluşan katkının belirlenmesi amacıyla tanımlanmıştır ve “Birinci Basamaktan Toplamsallık Ölçeni” olarak adlandırılır. Bu ölçenin 1 değerine eşit olabilmesi ise verilen çok değişkenli işlevin tek değişkenli işlevlerin toplamı olarak yazılmış olması koşulu ile mümkündür. Diğer bir anlatım ile  $f(x_1, \dots, x_N)$  işlevi tamamen toplamsal olmalıdır. Sonuç olarak, bu anlatımda bir genelleme yapılmak istenirse,  $\sigma_k$  ile “ $k$ . Basamaktan Toplamsallık Ölçeni” simgelenir ve bu ölçen değişmez terimden başlayarak  $k$ . terim de dahil olmak üzere tüm terimlerin YBMG açılımına olan katkısını belirlemektedir. Burada YBMG açılımının nerede kesileceği ya da yapılan kesme işlemi ile elde edilen YBMG açılımının verilen işlevi ne kadar iyi temsil ettiği toplamsallık ölçenlerinin 1’e yakın olması ile ölçülmektedir. Dolayısı ile ölçenler üzerinde istenilen yakınsama sağlanana kadar açılıma YBMG terimleri eklenmeye devam edilir.

Ayrıca çok rahat bir şekilde gösterilebilir ki toplamsallık ölçenleri aşağıda verilen biçimde tekdüze artan bir dizi yapısı gösterir.

$$0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \cdots \leq \sigma_N = 1 \tag{2.18}$$

Ölçenlerin bu yapıda olması, her yeni eklenen YBMG terimi ile, açılımın verilen işlevi daha iyi temsil edilebileceğini garanti altına alır.

### 2.1.2 Logaritmik YBMG yöntemi

Logaritmik Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (LYBMG) yöntemi negatif olmayan çok boyutlu bir işlevin kendisinin yerine doğal logaritmasının YBMG'ye açılması düşüncesine dayanmaktadır. Verilen bir çok boyutlu işlev için çarpımsal bir gösterilimi ifade eden LYBMG formülü aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\ln[f(x_1, \dots, x_N) - \phi(x_1, \dots, x_N)] = \varphi_0 + \sum_{i_1=1}^N \varphi_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \varphi_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots \quad (2.19)$$

Burada  $\phi(x_1, \dots, x_N)$  işlevi, verilen asıl işlev olan  $f(x_1, \dots, x_N)$  işlevine alttan sınırlayıcı işlev (minorant function) olarak görev yapmaktadır ki, Asıl işlev negatif sayılar ürettiğinde bu sayıların pozitif olması sağlar. Dolayısıyla bu işlev referans işlevi (Reference Function) olarak adlandırılabilir.

(2.19) denkleminin sağ yanındaki bileşenler birbirine diktir ve YBMG yöntemindeki temel kurallar uygulanarak bulunabilir.

(2.19)'de verilen denklem tekrar düzenlenirse Logaritmik YBMG için aşağıdaki gösterilim elde edilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = \phi(x_1, \dots, x_N) + e^{\varphi_0} \left[ \prod_{i_1=1}^N e^{\varphi_{i_1}(x_{i_1})} \right] \left[ \prod_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N e^{\varphi_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})} \right] \times \dots \quad (2.20)$$

Yardımcı (minorant) işlev kolaylık açısından yok varsayıldığında (aksi halde özinyeli bir yapı elde edilebilecekse de ifadeler çok karmaşık olacaktır) diğer bir deyişle, YBMG'ne açılacak olan asıl işlevin pozitif sayılar ürettiği düşünüldüğünde LYBMG kesme yaklaşımının açık ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \lambda_0(x_1, \dots, x_N) &= e^{\varphi_0} \\ \lambda_1(x_1, \dots, x_N) &= \lambda_0(x_1, \dots, x_N) \prod_{i_1=1}^N e^{\varphi_{i_1}(x_{i_1})} \\ &\vdots \\ \lambda_k(x_1, \dots, x_N) &= \lambda_{k-1}(x_1, \dots, x_N) \prod_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ i_1 < \dots < i_k}}^N e^{\varphi_{i_1, \dots, i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} \quad 1 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (2.21)$$

Burada indisli  $\lambda$  ifadeleri kesme yaklaşımına karşılık gelmektedir. Verilen çarpımsal yapıdaki işlev, LYBMG yöntemi kullanılarak logaritma işlevi yardımı ile toplamsal bir yapıya kavuşturulduğu için Yalın YBMG yöntemindeki toplamsallık

ölçenlerine benzer ölçenler aşağıdaki gibi tanımlanabilir ve bunlar nitelik ölçenleri olarak adlandırılırlar.

$$\begin{aligned}
v_0 &\equiv \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|ln(f - \phi)\|^2} \\
v_1 &\equiv \frac{\|\varphi_0\|^2 + \sum_{i_1=1}^N \|\varphi_{i_1}\|^2}{\|ln(f - \phi)\|^2} \\
v_2 &\equiv \frac{\|\varphi_0\|^2 + \sum_{i_1=1}^N \|\varphi_{i_1}\|^2 + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \|\varphi_{i_1, i_2}\|^2}{\|ln(f - \phi)\|^2} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Burada tanımlanan nitelik ölçenleri aşağıda verilen biçimde düzgün sıralı bir dizi yapısı gösterirler.

$$0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_N \leq 1 \tag{2.23}$$

## 2.2 Sendelenim Açılımı Yöntemi

Bu bölümde, Demiralp ve İTÜ BEBBYT (İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü Bilgisayar Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu) tarafından geliştirilmiş ve geliştirilmekte olan sendelenim açılımı (ing: fluctuation expansion) kavramından söz edilecektir.

Sendelenim açılımı temel olarak ilk terimi sendelenimsiz olan terim daha sonra birinci dereceden sendelenim terimlerinin içerildiği terimler ve bu şekilde giderek artan sayıda sendelenim terimlerinin içerildiği bir açılım olarak düşünülebilir. Bu çalışma içerisinde sendelenim açılımının ilk adımı olan sendelenimsizlik yaklaşımını üzerinde durulmuş ve ona ait olan sendelenimsizlik kanıtı (ing: theorem) verilmiştir. Bu yaklaşım, kolay anlaşılabilir olması açısından öncelikle tek değişkenli işlevler için, kuramsal incelemelerle anlatılmış ve farklı yapılarıdaki işlevler için örnekleri sunulmuştur. Hemen devamında ise sendelenim açılımının yine tümü değil, sadece sendelenimsiz terimleri alınarak çok değişkenli işlevler için yöntem kuramsal olarak geliştirilmiş ve örneklendirilmiştir. Yöntemin etkinliğini sınavacak sayısal uygulamaların sonuçlarının elde edilebilmesi amacıyla yazılan programlar için, istenildiği düzeyde yüksek sayısal

duyarlıklı işlem gerçekleştirebilen, MuPAD sayısal ve simgesel yorumlayıcı kullanılmış ve böylece hesaplamaların istenilen duyarlılıkta olması sağlanmıştır.

### 2.2.1 Tek değişkenli işlevler için sendelenimsizlik yaklaşımı

$w_1(x), \dots, w_n(x), \dots$ , ile simgelenen birbirine dik ve birimboylu olan taban vektörlerinin örttüğü sayılabilir sonsuz boyutta bir Hilbert uzayı gözönüne alınsın. Verilen aralık üzerinde sürekli ve karesi integrallenebilir işlevlerin örttüğü bu Hilbert uzayı  $\mathcal{H}$  ile simgelensin. Bu uzayda bulunan,  $f(x)$  ve  $g(x)$  ile simgelenen herhangi iki işlev arasındaki iççarpım  $a < b$  özelliğindeki iki gerçel sayı için,  $\omega(x)$  verilen bir ağırlık işlevi olmak üzere,

$$(f, g) \equiv \int_a^b dx \omega(x) f(x) g(x) \quad (2.24)$$

şeklinde verilebilir. Bu uzay içinden seçilen  $n$  taban vektörü ile oluşturulmuş  $n$ -boyutlu bir altuzay tanımlanırsa ve  $\mathcal{H}_n$  olarak adlandırılırsa bu altuzayın  $w_1(x), \dots, w_n(x)$  taban vektörlerince örtüleceği (ing: span) açıktır. Bu taban takımının birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluşmasının garanti edilmesi beklenmemekle birlikte, hangi takım olursa olsun, doğrusal bağımsız öğelerden oluştuğu sürece Gram–Schmidt dikleştirme işlemiyle birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluşan bir taban takımına dönüştürülebileceği açıktır. Burada kolaylık açısından bu işlemin yapıldığı,  $w_1(x), \dots, w_n(x)$  taban vektörlerinin birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluştuğu yani,

$$(w_i, w_j) = \delta_{j,k}, \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (2.25)$$

eşitliklerinin geçerli olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım genellik yitimine neden olmaksızın yapılabilir.

Hilbert uzayı içerisinde tanımlanmış bir  $\hat{x}$  operatörü ele alalım. Bu operatörün yine aynı uzay içerisinde tanımlanmış olan bir  $g(x)$  işlevine etkisi

$$\hat{x}g(x) = xg(x), \quad x \in [a, b], \quad g(x) \in \mathcal{H} \quad (2.26)$$

şeklinde işlevin kendi bağımsız değişkeni ile çarpımı olarak tanımlanır.

$\mathcal{H}$  Hilbert uzayının içinde kalan ve  $w_j$  ile örtülen bir boyutlu altuzaya izdüşüren izdüşüm operatörü ise

$$P_j g(x) = w_j(x)(w_j, g), \quad 1 \leq j \leq n \quad (2.27)$$

şeklinde integral operatörü olarak tanımlanabilir. Bu tanımdan yola çıkılarak,  $w_1(x)$ , ...,  $w_n(x)$  taban vektörlerince örtülen  $n$  boyutlu altuzaya izdüşüren operatör ise  $P^{(n)}$  ile simgelenir ve

$$P^{(n)} \equiv \sum_{j=1}^n P_j \quad (2.28)$$

biçiminde  $P_j$  operatörlerinin toplamı olarak ifade edilebilir. Hilbert uzayındaki birim operatörün tanımı ise

$$\widehat{I} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} P_j \quad (2.29)$$

şeklinde verilebilir.  $\mathcal{H}_n$  Hilbert altuzayında bulunan herhangi bir  $g(x)$  işlevi verilen taban vektörleri üzerinde bir doğrusal birleştirim (ing: linear combination) olarak aşağıdaki biçimde anlatılabilir.

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i w_i(x) \quad (2.30)$$

Burada görünen ve  $g_i$ 'lerle simgelenen büyüklükler bir takım gerçel değişmezleri simgelemektedir ve, kuşkusuz,  $g(x)$  işlevinin yapısına bağlıdır. Bu bağımlılık, taban vektörlerinin diklik ve birimboyluluk özelliklerinden yararlanarak, açık biçimde, saptanabilir. Bu amaçla,  $k$ , ilk  $n$  artı tamsayının oluşturduğu küme içinde kalmak üzere, (2.30) eşitliğinin her iki yanının  $w_k(x)$  ile iççarpımı alınır ve (2.25) ile verilen özellik de kullanılırsa,

$$(w_k, g) = \left( w_k, \sum_{i=1}^n g_i w_i \right) = \sum_{i=1}^n g_i (w_k, w_i) = \sum_{i=1}^n g_i \delta_{k,i} = g_k, \quad 1 \leq k \leq n \quad (2.31)$$

yazılabilir. Bu sonuç, (2.30) eşitliğinde yerine konulursa

$$g(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) (w_i, g) \equiv \sum_{i=1}^n P_i g(x) \equiv P^{(n)} g(x) \quad (2.32)$$

sonucuna ulaşılır.  $g(x)$  işlevi bu  $n$  boyutlu altuzayda öngörüldüğü için yukarıdaki eşitlik elde edilmiştir. Bu eşitlikten  $P^{(n)}$  operatörünün bu  $n$  boyutlu uzay üzerinde birim operatöre özdeş olduğunu çıkarmak olanaklıdır. Eğer  $g(x)$  bu uzayın içinde olmasaydı yukarıdaki eşitlik geçerli olmayacak ve dolayısıyla  $P^{(n)}$  birim operatör olamayacaktı. Özetle,  $P^{(n)}$  operatörlerinin  $w_1(x)$ , ...,  $w_n(x)$  taban vektörlerince örtülen altuzay üzerinde birim operatör olduğu onun dışında ise salt bu uzaya izdüşüren bir operatör olduğu söylenebilir.



(2.26) ile verilen ve herhangi bir  $g(x)$  işlevine etkisi o işlevin bağımsız değişkenle çarpımı olan  $\hat{x}$  operatörü aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$h(x) \equiv \hat{x}g(x) \equiv xg(x), \quad g(x), h(x) \in \mathcal{H} \quad (2.33)$$

Verilen eşitlikte  $h(x)$  işlevinin de Hilbert uzayı içerisinde kalacağı açıktır. Diğer bir deyişle  $\hat{x}$  operatörü

$$\hat{x}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad (2.34)$$

şeklinde verilebilir. Hilbert uzayından seçilen iki işlev,  $g_i$  ve  $h_i$  doğrusal birleştirim katsayılarını göstermek üzere

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i w_i(x), \quad h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i w_i(x) \quad (2.35)$$

şeklinde yazılabilir.  $g_i$  ve  $h_i$  katsayılarını bulabilmek için eşitliklerin her iki tarafının  $w_k$  ile iççarpımı alınır, iççarpımın doğrusallık özelliklerinden yararlanılarak

$$(w_k, g) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i (w_k, w_i), \quad (w_k, h) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i (w_k, w_i) \quad (2.36)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada Hilbert uzayına ait taban takımının dik ve birim boyluluk özellikleri gözönüne alınacak olursa  $\delta_{ij}$ , Kroenecker delta simgesini göstermek üzere

$$(w_k, g) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \delta_{ki}, \quad (w_k, h) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \delta_{ki} \quad (2.37)$$

sonuçları elde edilir ve böylece

$$g_i = (w_i, g), \quad h_i = (w_i, h), \quad 1 \leq i < \infty \quad (2.38)$$

$g_i$  ve  $h_i$  doğrusal birleştirim katsayılarına ulaşılmış olur. Bu aşamadan sonra bu iki katsayı arasında bir ilişki kurulmak istenirse (2.33) eşitliği ile verilen denklemden ve elde edilen son denklemden yararlanılarak

$$h_i = (w_i, h) = (w_i, \hat{x}g) = \left( w_i, \hat{x} \sum_{j=1}^{\infty} g_j w_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (w_i, \hat{x} w_j) g_j, \quad 1 \leq i < \infty \quad (2.39)$$

anlatımı yazılabilir. Böylece sonsuz sayıda eşitlik elde edilmiş olur. Bu anlatımı tek bir cebirsel anlatımla verebilmek için kuantum fiziğinde sıkça kullanılan sonsuz boyutlu vektörlerden yararlanılırsa,

$$\mathbf{g}^T \equiv [g_1 \dots g_n \dots], \quad \mathbf{h}^T \equiv [h_1 \dots h_n \dots] \quad (2.40)$$

verilen tanımlamalar yapılabilir. Bu tanımlamalar gözönüne alınarak bu iki vektör arasındaki ilişki aşağıda açık yapısı verilen matris yardımıyla kurulabilir.

$$\mathbf{X} \equiv \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$\mathbf{X}$  matrisi sonsuz sayıda yatay ve düşey sıraya sahiptir ve matris elemanlarının genel yapısı

$$\mathbf{h} = \mathbf{X}\mathbf{g} \quad (2.42)$$

eşitliğini verecek şekilde (2.39) denklemi de gözönünde bulundurularak

$$X_{ij} \equiv (u_i, \hat{x}u_j) = \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x u_j(x), \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece Hilbert uzayından seçilen iki işlev ( $\mathbf{h}$  ve  $\mathbf{g}$ ) arasındaki ilişki sonsuz boyutlu vektör uzaylarına taşınarak sonsuz boyutlu matris gösterilimi aracılığıyla ilişkilendirilmiştir.

Sayısal yöntemlerde sonsuz boyutlu öğelerle uğraşmak yerine belli sayıda öğenin alıkonulduğu sonlu sayıda öğeyle uğraşmak yani yaklaştırım yapmak her zaman yeğlendiğinden burada sonsuz boyut üzerinde kesme yapılarak bir yaklaştırıma gitmek amaçlanmaktadır. Bu amaçla taban takımı üzerinde bir kesme yaparak yani ilk  $n$  terimi alıkoyarak bir Hilbert altuzayında,  $\mathcal{H}_n$ , çalışılmaktadır.

Bu durumda,  $\hat{T}$  ile Hilbert uzayında tanımlanan birim operatörün ve  $P^{(n)}$  ile de  $n$ -boyutlu altuzaya izdüştüren bir operatörün simgelandığı varsayıldığında,  $[\hat{T} - P^{(n)}]$  operatörü Sendelenim operatörü olarak adlandırılır ve yöntem adını buradan almaktadır. M. Demiralp [54, 55] tarafından ortaya konulan ve geliştirilen yöntemle ait kanıtsav (ing: theorem) ve özgün İngilizcesi aşağıda verilmektedir.

**Kanıtsav :** *Belli bir aralıkta analitik olan bir işlevle çarpma operatörünün, ilgili Hilbert uzayının bir alt uzayı üzerindeki matris gösterilimi, o işlevin bağımsız değişkeninin aynı uzay üzerindeki matris gösteriliminin sözkonusu işlev altındaki görüntüsüne, sendelenimsizlik varsayımı altında, eşittir.*

**Theorem :** *The matrix representation of an algebraic multiplication operator multiplying its operand by  $f(x)$ , a univariate function which is analytic on the interval*

$[a, b]$ , over  $H_n$  is the image of the matrix representation of the independent variable over  $H_n$  under the function  $f$  at the fluctuationlessness limit.

Kanıtın matematiksel anlatımı

$$\mathbf{F}^{(n)} \approx f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \quad (2.44)$$

olarak verilir. Burada  $\mathbf{X}^{(n)}$  bağımsız değişkenin matris gösterilimi olup aşağıda verilen şekilde hesaplanabilir.

$$\mathbf{X}^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{11}^{(n)} & \cdots & X_{1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}^{(n)} & \cdots & X_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad X_{jk}^{(n)} \equiv (w_j, \hat{x} w_k), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (2.45)$$

Burada görüldüğü gibi matris elemanları  $w_j$ 'ler ( $1 < j < n$ )  $n$ -boyutlu Hilbert uzayının taban vektörleri olmak üzere bir iççarpım üzerinden hesaplanmaktadır. Bu matris evrenseldir çünkü  $f(x)$  işlevinin yapısından bağımsızdır ve herhangi bir  $n$  değeri için bir defa hesaplanması yeterlidir. (2.44) ile verilen kanıtta  $\mathbf{F}^{(n)}$  verilen  $f(x)$  analitik işlevin matris gösterilimi olup

$$\mathbf{F}^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} F_{11}^{(n)} & \cdots & F_{1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}^{(n)} & \cdots & F_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad F_{jk}^{(n)} \equiv (w_j, f(\hat{x}) w_k), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (2.46)$$

biçiminde hesaplanabilir. Kanıtın, herhangi bir tek değişkenli  $f(x)$  işlevinin matris gösterilimini elde etmektense çok daha basit bir biçimde bağımsız değişkenin yani  $x$ 'in matris gösterilimini elde ederek bu gösterilimi işlevde  $x$  bağımsız değişkeninin yerine koymak suretiyle yaklaşık bir sonuca varmayı hedefler. Böylece amaç  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin bulunmasından sonra  $f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$  anlatımına ulaşmaktır. Bunun için  $\lambda_i$ ,  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin  $i$ . özdeğerini ve  $\xi_i$  ona karşı gelen birimboyutlu özvektörünü göstermek üzere, aşağıdaki izgesel ayrıştırım (ing: spectral decomposition),

$$\mathbf{X}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \xi_i^T \quad (2.47)$$

gözönüne alındığında  $f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$  anlatımının da

$$f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \xi_i \xi_i^T \quad (2.48)$$

biçiminde verilebileceği açıktır. Yani,  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin  $n$  sayıdaki tüm özdeğerleri saptanarak işlev altındaki değerlerinin elde edilmesi işleve bağlı olan tek hesaplamadır.

Bu yaklaşım için  $n$  sayısının önemi büyük olmakla birlikte, sayısal incelemeler göstermiştir ki,  $n$  sayısı çok yukarılara tırmanmadan üstelik  $n = 3$ ,  $n = 5$  gibi sayılarda oldukça yaklaşık sonuçlar vermektedir. İşlevin yapısına göre bu sayı çok yukarılara tırmanacak olsa bile bunu yapmak yerine yaklaşıma birinci ya da ikinci dereceden sendelenim terimleri eklenerek yöntem yine verimli duruma getirilebilir. Bu bulgular göstermektedir ki, kullanılan yöntemin gücü ve verimi oldukça yüksektir.

### 2.2.2 Çok değişkenli işlevler için sendelenimsizlik yaklaşımı

Çok değişkenli işlevler Sendelenimsizlik kanıtı (ing: theorem) ve matematiksel anlatımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

**Kanıtı :** *Belli bir aralıkta analitik olan bir çok değişkenli işlevle çarpma işlevinin, ilgili Hilbert uzayının bir alt uzayı üzerindeki matris gösterilimi, o işlevin bağımsız değişkenlerinin aynı uzay üzerindeki matris gösterimlerinin sözkonusu işlev altındaki görüntüsüne, sendelenimsizlik varsayımı altında, eşittir.*

$$\mathbf{F}^{(n)} \approx f \left( \mathbf{X}_1^{(n_1)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(n_N)} \right) \quad (2.49)$$

Kanıtı şu biçimde ispatlanabilir.  $f(x_1, \dots, x_N)$ ,  $N$  bağımsız değişkenli bir işlev,  $w$ ,  $n$ -boyutlu çok terimli taban vektörleri olmak üzere

$$\mathbf{F}^{(n)} = (\mathbf{w}, f\mathbf{w}^T), \quad \mathbf{w}^T = [w_1 \ w_2 \dots \ w_N] \quad (2.50)$$

biçiminde yazılabilir.  $f(x_1, \dots, x_N)$  çok değişkenli işlevi kuvvet serisine açılırsa

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j_1, \dots, j_N=0}^{\infty} f_{j_1 \dots j_N} \prod_{k=1}^N (x_k - c_k)^{j_k} \quad (2.51)$$

anlatımı elde edilir. Burada yer alan  $j_1 \dots j_N$  doğal sayılardır.  $f_{j_1 \dots j_N}$  katsayıları gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşur.  $c_1, \dots, c_N$  değerleri serinin açılım noktasını betimler ve genellikle sıfır olarak alınır. Burada da  $c_1 = \dots = c_N = 0$  olarak alınırsa açılım

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j_1, \dots, j_N=0}^{\infty} f_{j_1 \dots j_N} \prod_{k=1}^N x_k^{j_k} \quad (2.52)$$

biçimine gelir. Bu açılımı kullanarak  $\mathbf{F}^{(n)}$  matrisini

$$\mathbf{F}^{(n)} = (\mathbf{w}, f\mathbf{w}^T) = \sum_{j_1, \dots, j_N=0}^{\infty} f_{j_1 \dots j_N} \left( \mathbf{w}, \prod_{k=1}^N x_k^{j_k} \mathbf{w}^T \right) \quad (2.53)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki her bir  $x_k$  bir operatör olarak düşünülür ve  $\hat{x}_k$  ile simgelenirse, bu eşitlik Hilbert uzayı üzerindeki operatörlerden yararlanılarak aşağıdaki biçime getirilebilir.

$$\mathbf{F}^{(n)} = \left( \mathbf{w}, \hat{f} \mathbf{w}^T \right) \approx \sum_{j_1, \dots, j_N=0}^{\infty} f_{j_1 \dots j_N} \left( \prod_{k=1}^N (\mathbf{w}, \hat{x}_k \mathbf{w}^T)^{j_k} \right) \quad (2.54)$$

Burada  $\hat{f} = f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N)$  olarak alınmıştır ve cebirsel nitelikli işlevle çarpma operatörü olarak düşünülmektedir. Açılımın yukarıda verilen şekle gelebilmesi için aşağıda anlatılacak olan yol izlenmiştir.

$\mathcal{L}_1$  ve  $\mathcal{L}_2$  Hilbert uzayında tanımlanan iki operatör,  $P^{(n)}$  ve  $I$  aşağıda tanımı verilen operatörler olmak üzere

$$P^{(n)} g = \sum_{k=1}^n w_k(w_k, g), \quad I g = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(w_k, g) \quad (2.55)$$

aşağıda verilen eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}, \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T) &= \left( \mathbf{w}, \mathcal{L}_1 \left[ P^{(n)} + (I - P^{(n)}) \right] \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T \right) \\ &= \left( \mathbf{w}, \mathcal{L}_1 P^{(n)} \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T \right) + \left( \mathbf{w}, \mathcal{L}_1 [I - P^{(n)}] \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Bu eşitlikte  $\left( \mathbf{w}, \mathcal{L}_1 [I - P^{(n)}] \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T \right)$  ile verilen anlatım  $n$  büyüdükçe  $P^{(n)}$  ve  $I$  operatörlerinin tanımı gereği sifıra yaklaşır. Ayrıca bu anlatım  $[I - P^{(n)}]$  yapısını yani, daha önce belirtildiği gibi sendelenim operatörünü içermektedir. Burada sendelenimsizlik durumu incelendiğinden bu anlatım yok sayılırsa son eşitlik

$$(\mathbf{w}, \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T) \approx \left( \mathbf{w}, \mathcal{L}_1 P^{(n)} \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T \right) \quad (2.57)$$

biçimine gelir. Eşitliğin sağ yanı  $P^{(n)}$  operatörünün tanımından yararlanılarak

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{w}, \mathcal{L}_1 P^{(n)} \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T \right) &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{w}, \mathcal{L}_1 w_j) (w_j, \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T) \\ &= (\mathbf{w}, \mathcal{L}_1 \mathbf{w}^T) (\mathbf{w}, \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T) \end{aligned} \quad (2.58)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (2.57) eşitliği

$$(\mathbf{w}, \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T) \approx (\mathbf{w}, \mathcal{L}_1 \mathbf{w}^T) (\mathbf{w}, \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T) \quad (2.59)$$

halini alır.  $\mathcal{L}_1$  ve  $\mathcal{L}_2$  operatörü için gösterilen son eşitlik  $N$  sayıda operatör için de yazılabilir.

$$(\mathbf{w}, \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_N \mathbf{w}^T) \approx (\mathbf{w}, \mathcal{L}_1 \mathbf{w}^T) (\mathbf{w}, \mathcal{L}_2 \mathbf{w}^T) \dots (\mathbf{w}, \mathcal{L}_N \mathbf{w}^T) \quad (2.60)$$

Böylece (2.53) ile verilen eşitliğin (2.54) ile verilen biçime getirilmesi gösterilmiş olmaktadır. Burada (2.54) ile verilen yaklaşımın sağ yanı kuvvet serisine açılmış gibi yani,

$$f((\mathbf{w}, \hat{x}_1 \mathbf{w}^T), \dots, (\mathbf{w}, \hat{x}_N \mathbf{w}^T)) = \sum_{j_1, \dots, j_N=0}^{\infty} f_{j_1 \dots j_N} \left( \prod_{k=1}^N (\mathbf{w}, \hat{x}_k \mathbf{w}^T)^{j_k} \right) \quad (2.61)$$

şeklinde düşünülürse (2.54) bağıntısı

$$\mathbf{F}^{(n)} = (\mathbf{w}, f \mathbf{w}^T) \approx f((\mathbf{w}, \hat{x}_1 \mathbf{w}^T), \dots, (\mathbf{w}, \hat{x}_N \mathbf{w}^T)) \quad (2.62)$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki her bir  $\hat{x}_k$ 'nin ( $1 < k < N$ ) bir operatör olduğu ve görevinin de bir bağımsız değişkenle çarpma olduğu gözönüne alınır ayrıca matris gösterimlerinin de  $n$  boyut olmak üzere  $\mathbf{X}_k^{(n)} = (\mathbf{w}, \hat{x}_k \mathbf{w}^T)$ , ( $1 < k < N$ ) tanımı ile verildiği hatırlanacak olursa son anlatım

$$\mathbf{F}^{(n)} \approx f(\mathbf{X}_1^{(n_1)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(n_N)}) \quad (2.63)$$

olarak yazılabilir. Böylece çok değişkenli işlevler için sendelenimsizlik kanıtı ispatlanmış olur.

Yalnız özellikle belirtmek gerekir ki,  $\mathbf{X}_k^{(n)}$  matrislerinin tanımındaki  $\mathbf{w}$  çok değişkenli vektörleri  $n$  boyutlu olup,  $n = n_1 \times n_2 \cdots \times n_N$  olmak üzere,  $n_k$  boyutlu ve  $x_k$  değişkenine bağlı  $\mathbf{w}_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) taban vektörlerinin dolaysız çarpımlarından (direct product) oluşmaktadır.

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_N \quad (2.64)$$

Dolaysız çarpımın özelliği kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılırsa

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}, \hat{x}_k \mathbf{w}^T) &= \left( (\mathbf{w}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_k \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_N), \hat{x}_k (\mathbf{w}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_k \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_N)^T \right) \\ &= (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1^T) \otimes \cdots \otimes (\mathbf{w}_k, \hat{x}_k \mathbf{w}_k^T) \otimes \cdots \otimes (\mathbf{w}_N, \mathbf{w}_N^T) \\ &= \mathbf{I}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{M}_k \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_{n_N} = \mathbf{X}_k \end{aligned} \quad (2.65)$$

$\mathbf{I}_{n_k}$ 'ler ( $1 \leq k \leq N$ )  $n_k \times n_k$ 'lik birim matrisler,  $\mathbf{M}_k$  ise  $n_k \times n_k$ 'lik kare matrisi yani aslında  $\hat{x}_k$ 'nin  $w_k$  üzerindeki matris gösterimini göstermektedir.

Kanıtın sağ tarafı izgesel ayrıştırım kullanılarak yazılacak olursa (2.48) formülü de gözönüne alınarak

$$f(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} f(\lambda_{i_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{i_N}^{(N)}) \alpha_{i_1 \dots i_N} \alpha_{i_1 \dots i_N}^T \quad (2.66)$$

biçiminde elde edilebilir. Burada  $\lambda_{i_j}^{(k)}$  ( $1 < j < N$ )  $\mathbf{X}_k$  matrisinin  $i_j$ . özdeğerine karşılık gelmektedir.  $\alpha_{i_1, \dots, i_N}$  vektörünün tanımı ise,

$$\alpha_{i_1 \dots i_N} = \alpha_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \alpha_{i_N}^{(N)} \quad (2.67)$$

biçimindedir. Bu eşitlikteki  $\alpha_{i_j}^{(k)}$  vektörleri ise  $\mathbf{X}_k$  matrisinin  $i_j$ . özvektörüne karşılık gelmektedir. Böylece daha basit bir anlatımla  $N$  bağımsız değişkene bağlı bir  $f(x_1, \dots, x_N)$  analitik işlevinin  $\mathbf{F}^{(n)}$  ile verilen matris gösterilimini hesaplarken  $N$  katlı integral almak yerine çok değişkenli işlevler için verilen sendelenimsizlik kanıtsavını kullanarak bağımsız değişkenlerin matris gösterilimi olan  $X_i$  matrislerinin özikililerini (ing: eigenpairs) bulup bunların dolaysız çarpımı ile çalışmak bizi hem çok büyük bir hesaplama karmaşıklığından hem de yapıları son derece zor olabilecek çok değişkenli işlevlerin integrallerini hesaplamaktan kurtarmış olur.

Çok değişkenli işlevler için sendelenimsizlik kanıtsavına ait bir sayısal uygulama ve sonuçları aşağıdaki alt başlık altında verilmektedir.

### 2.2.2.1 Sayısal uygulama

Bu kısımda çokdeğişkenli işlevler için sendelenimsizlik kanıtsavının etkinliğinin gösterilebilmesi amacıyla bir uygulama gündeme getirilmiştir.

Oluşturulacak sayısal uygulama için 3 adet bağımsız değişkenli aşağıdaki işlev ele alınmaktadır.

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 + x_2 + x_3} \quad (2.68)$$

$f(\mathbf{X}_1^{(n_1)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(n_N)})$  anlatımının hesaplanabilmesi için  $\mathbf{X}_1^{(n_1)}$ ,  $\mathbf{X}_2^{(n_2)}$  ve  $\mathbf{X}_3^{(n_3)}$  ile verilen matris gösterilimlerinin ve bu matrislerin özikililerinin elde edilmesi gerekir. Burada taban vektörü sayıları  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 2$  olarak alınırsa  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  ve  $\hat{x}_3$ 'ün matris gösterilimleri olan  $\mathbf{M}_1$  matrisi 2,  $\mathbf{M}_2$  matrisi 3 ve  $\mathbf{M}_3$  matrisi de 2 boyutlu kare matrisler olacağından sırasıyla 2, 3 ve 2 özdeğer ve karşı gelen özvektörlere sahip olacaktır. Aşağıda bu matrislerin  $w_1 = 0.7071067812$ ,  $w_2 = 1.224744871x$ ,  $w_3 = 2.371708245x^2 - 0.790569415$  işlevlerinden oluşan taban vektörleri için sonuçları verilmektedir.

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.58 \\ 0.58 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{I}_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 \\ 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Burada  $\mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{I}_3$  matrisleri sırasıyla 2 ve 3 boyutlu birim matrisleri göstermektedir.

$\mathbf{X}_2 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{I}_2$  ve  $\mathbf{X}_3 = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{M}_3$  matrisleri de yukarıda verilen şekilde elde edilir. Elde edilen bu matrislerin özdeğerleri bulunur ve verilen işlemden yararlanılırsa  $f(\mathbf{X}_1^{(n_1)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(n_N)})$  matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(\mathbf{X}_1^{(2)}, \mathbf{X}_2^{(3)}, \mathbf{X}_3^{(2)}) =$$

$$\begin{bmatrix} 0.61 & 0.84 & 0.87 & 0.46 & 0.22 & 0.11 & 0.84 & 0.44 & 0.46 & 0.24 & 0.11 & 0.06 \\ 0.84 & 1.61 & 0.46 & 0.87 & 0.11 & 0.22 & 0.44 & 0.84 & 0.24 & 0.46 & 0.06 & 0.11 \\ 0.87 & 0.46 & 1.81 & 0.94 & 0.78 & 0.41 & 0.46 & 0.24 & 0.94 & 0.49 & 0.41 & 0.21 \\ 0.46 & 0.87 & 0.94 & 1.81 & 0.41 & 0.78 & 0.24 & 0.46 & 0.49 & 0.94 & 0.21 & 0.41 \\ 0.22 & 0.11 & 0.78 & 0.41 & 1.56 & 0.82 & 0.11 & 0.06 & 0.41 & 0.21 & 0.82 & 0.42 \\ 0.11 & 0.22 & 0.41 & 0.78 & 0.82 & 1.56 & 0.06 & 0.11 & 0.21 & 0.41 & 0.42 & 0.82 \\ 0.84 & 0.44 & 0.46 & 0.24 & 0.11 & 0.06 & 1.61 & 0.84 & 0.87 & 0.46 & 0.22 & 0.11 \\ 0.44 & 0.84 & 0.24 & 0.46 & 0.06 & 0.11 & 0.84 & 1.61 & 0.46 & 0.87 & 0.11 & 0.22 \\ 0.46 & 0.24 & 0.94 & 0.49 & 0.41 & 0.21 & 0.87 & 0.46 & 1.81 & 0.94 & 0.78 & 0.41 \\ 0.24 & 0.46 & 0.49 & 0.94 & 0.21 & 0.41 & 0.46 & 0.87 & 0.94 & 1.81 & 0.41 & 0.78 \\ 0.11 & 0.06 & 0.41 & 0.21 & 0.82 & 0.42 & 0.22 & 0.11 & 0.78 & 0.41 & 1.56 & 0.82 \\ 0.06 & 0.11 & 0.21 & 0.41 & 0.42 & 1.82 & 0.11 & 0.22 & 0.41 & 0.78 & 0.82 & 1.56 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$



Yine bu işlevin aynı taban vektörleri kullanıldığındaki matris gösterilimi  $\mathbf{F}^{(n)}$  ise aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{F}^{(12)} = \begin{bmatrix} 1.62 & 0.88 & 0.88 & 0.48 & 0.22 & 0.12 & 0.88 & 0.48 & 0.48 & 0.26 & 0.12 & 0.07 \\ 0.88 & 1.82 & 0.48 & 0.99 & 0.12 & 0.25 & 0.48 & 0.99 & 0.26 & 0.54 & 0.07 & 0.13 \\ 0.88 & 0.48 & 1.82 & 0.99 & 0.82 & 0.44 & 0.48 & 0.26 & 0.99 & 0.54 & 0.44 & 0.24 \\ 0.48 & 0.99 & 0.99 & 2.04 & 0.44 & 0.92 & 0.26 & 0.54 & 0.54 & 1.11 & 0.24 & 0.50 \\ 0.22 & 0.12 & 0.82 & 0.44 & 1.77 & 0.96 & 0.12 & 0.07 & 0.44 & 0.24 & 0.96 & 0.52 \\ 0.12 & 0.25 & 0.44 & 0.92 & 0.96 & 1.98 & 0.07 & 0.13 & 0.24 & 0.50 & 0.52 & 1.08 \\ 0.88 & 0.48 & 0.48 & 0.26 & 0.12 & 0.07 & 1.82 & 0.99 & 0.99 & 0.54 & 0.25 & 0.13 \\ 0.48 & 0.99 & 0.26 & 0.54 & 0.07 & 0.13 & 0.99 & 2.04 & 0.54 & 1.11 & 0.13 & 0.28 \\ 0.48 & 0.26 & 0.99 & 0.54 & 0.44 & 0.24 & 0.99 & 0.54 & 2.04 & 1.11 & 0.92 & 0.50 \\ 0.26 & 0.54 & 0.54 & 1.11 & 0.24 & 0.50 & 0.54 & 1.11 & 1.11 & 2.29 & 0.50 & 1.03 \\ 0.12 & 0.07 & 0.44 & 0.24 & 0.96 & 0.52 & 0.25 & 0.13 & 0.92 & 0.50 & 1.98 & 1.08 \\ 0.07 & 0.13 & 0.24 & 0.50 & 0.52 & 1.08 & 0.13 & 0.28 & 0.50 & 1.03 & 1.08 & 2.23 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Bu iki matrisin birbirine ne kadar yaklaştığını incelemek için karşılaştırma öge öge yapılabileceği gibi boylarına da (ing: norm) bakılabilir. Burada çok sayıda karşılaştırma yapmaktan kaçınmak amacıyla karşılaştırma boyca yapılmıştır. Yukarıda verilen matrislerin Frobenius normları aşağıdaki gibidir.

$$Boy(\mathbf{F}^{(12)}) = 9.89 \quad Boy\left(f\left(\mathbf{X}_1^{(2)}, \mathbf{X}_2^{(3)}, \mathbf{X}_3^{(2)}\right)\right) = 8.49 \quad (2.73)$$

Sayısal örnekten de açıkça görülmektedir ki sendelenimsizlik kanıtsavı oldukça güçlüdür. Taban vektörü sayıları  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$  ve  $n_3 = 2$  gibi oldukça küçük sayılar alındığında bile sonuçlar son derece yakın çıkabilmektedir.  $n_i$  sayıları çok fazla tır mandırılmadan yukarılara çekildiğinde ise sonuçlar daha da iyileşmektedir. örneğin yine yukarıda verilen örnek için  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 5$  ve  $n_3 = 4$  olarak alınırsa normlar

$$Boy(\mathbf{F}^{(12)}) = 19.300225 \quad Boy\left(f\left(\mathbf{X}_1^{(2)}, \mathbf{X}_2^{(3)}, \mathbf{X}_3^{(2)}\right)\right) = 17.442938 \quad (2.74)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada, bağıl (ing: relative) karşılaştırma yapmak taban vektörü sayıları arttıkça durumun iyileşeceğini anlayabilmek açısından daha sağlıklıdır.

$$\frac{9.89 - 8.49}{9.89} = 0.1415571284 \quad \frac{19.300225 - 17.442038}{19.300225} = 0.096231 \quad (2.75)$$

Bu sonuçlardan da açıkça görülebileceği gibi taban vektörü sayıları ne kadar arttırılırsa, yaklaştırımın kalitesi de o kadar artmaktadır.

### 2.3 Saptırım Açılımı Yöntemi

Bu bölümde tez çalışması sırasında özgün olarak elde edilmiş olan denklemlerin çözümünde kullanılacak olan saptırım açılımı yöntemi üzerinde durulacaktır. Saptırım açılımı yöntemi tam olarak çözümlenemeyen bir problemin, bu probleme bağlı başka bir problemden yola çıkılarak yaklaşık bir çözüm elde etmek için matematiksel yöntemler içeren bir kuramdır [56]. Kesin olarak çözümlenebilen problemin matematiksel tanımına oldukça küçük bir parametre ile çarpılmış bir terim eklenerek elde edilen problem yeniden yapılandırılabilir, bu probleme saptırım açılımı yöntemi uygulanabilir. Burada saptırım açılımı parametresi olarak problemin içinden bir değişken seçilebileceği gibi, problem içinden bir değişken seçmeden yapay olarak bir saptırım parametresi de oluşturulabilir. Problem bu parametre yardımı ile saptırım açılımı yöntemi kullanılarak açılımda bulunan terimler elde edildikten sonra aranan çözüme ulaşabilmek için sonucun içerisinde yer alan saptırım parametresi 1'e eşit olarak alınmaktadır.

Saptırım açılımı genel olarak

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k = \varepsilon^0 A_0 + \varepsilon^1 A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots \quad (2.76)$$

bağıntısı ile verilebilir. Burada  $\varepsilon$  saptırım parametresi olarak adlandırılır.  $A_0$  terimi, kesin çözümü bulunan sorunu anlatırken,  $\varepsilon$  saptırım parametresinin tam sayı üslüleri sorunun kesin çözümlü problemden sapmasının miktarını belirleyen diğer terimlerin elde edilmesine öncülük eder. Diğer bir deyişle sapma terimleri olan  $A_1, A_2, \dots$  terimleri yöntem içinde oluşturulan özyineli ilişkiler kullanılarak saptırım parametresinin tam sayı üslüleri yardımıyla bulunabilir.

Saptırım açılımı yöntemi ile sonuç elde edilirken belli bir noktada kesme yapılır. Genellikle çözümün ilk iki ya da üç terimi, yani  $A_0 + \varepsilon A_1$  ya da  $A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2$  anlatımını içerecek şekilde bulunması yeğlenir. Çözümün bulunması sürecinde, serinin yüksek basamaktan saptırım terimlerinin bulunması istenen bir durum değildir. Çünkü bu durum hesaplama karmaşıklığının çok fazla artmasına neden olacaktır. Bu durumda az sayıda terim kullanarak sağlıklı bir çözümün bulunabilmesi için yakınsamanın sağlanabilmesi gerekmektedir. Bu amaçla yöntemin uygulanması esnasında yakınsaklık

incelemesinin de yapılması problemin çözümünün elde edilmesi sırasında önem kazanmaktadır.

Saptırım açılımı yöntemi bir çok alandaki probleme uygulanabilmektedir. Ancak tez çalışması içerisinde bu yöntem elde edilen özdeğer denkleminin çözümü sırasında kullanılmış olduğundan saptırım açılımı yönteminin özdeğer problemlerinde kullanımı ile ilgili genel bilgi burada verilen alt bölümde kısaca anlatılmaktadır.

### 2.3.1 Yöntemin özdeğer problemlerinin çözümünde kullanılması

Bu bölümde verilen  $m$  boyutlu bakışık (simetrik) ve katlı özdeğer içermeyen herhangi bir  $\mathbf{A}$  matrisi için saptırım açılımı yöntemi kullanılarak özdeğer probleminin nasıl çözülebileceğinin anlatılması hedeflenmiştir. Bu yöntem daha sonra Bölüm 4'te verilen ve tez içinde özgün olarak elde edilmiş olan denklemlerin çözülmesi sırasında kullanılacaktır.

$\mathbf{A}$  matrisi aşağıdaki şekilde  $\varepsilon$ 'un eksi olmayan tam sayı üsleri türünden bir serisel açılım ile anlatılabiliyor olsun.

$$\mathbf{A}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{A}_n \quad (2.77)$$

Buradaki tüm  $\mathbf{A}_i$  matrisleri ( $i = 0, \dots$ ) bilinen matrisler olmak üzere  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  izgesel (ing: spectral) denkleminin çözümünün gerçekleştirilmesi için  $\lambda$  özdeğerleri ve karşılık gelen  $\mathbf{u}$  özvektörleri  $\varepsilon$ 'a bağlı olarak

$$\mathbf{u}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{u}_n, \quad \lambda(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \lambda_n \quad (2.78)$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu yeni yapı izgesel denkleminde yerine konulursa

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{A}_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{u}_n \right) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \lambda_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{u}_n \right) \quad (2.79)$$

ve Cauchy çarpımından yararlanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \mathbf{A}_k \mathbf{u}_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \lambda_k \mathbf{u}_{n-k} \quad (2.80)$$

denkleminde ulaşılır. Burada  $\lambda_n$  ve  $\mathbf{u}_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) büyüklüklerinin  $\varepsilon$ 'dan bağımsız olmaları, tek bir denklem olan bu eşitlikten sonsuz sayıda eşitliğin yazılabilmesine olanak sağlar. Bu denklemde,  $n$  yerine 0, 1, 2 değerleri konulur ve her iki yanda  $\varepsilon^n$ 'in

katsayıları birbirine eşitlenirse, aşağıdaki üç denklem elde edilir.

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 = \lambda_0 \mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_0 = \lambda_0 \mathbf{u}_1 + \lambda_1 \mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_0 = \lambda_0 \mathbf{u}_2 + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_0 \quad (2.81)$$

Burada  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ve  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  bilinmeyenlerdir ve bu bilinmeyenlerin bulunabilmesi için yukarıdaki denklemlerin ayrı ayrı çözülmesi gerekmektedir.

Bu denklemlerden ilki saptırimsız matrisin özdeğer problemidir ve bilimsel yazında bilinen yöntemlerden biri ile rahatça çözülebilir. Eğer, bakışık olduğu varsayılan  $\mathbf{A}_0$  matrisinin özdeğerlerinin ayrık olduğu, katlı özdeğeri olmadığı  $k$ . özdeğer ve birim boylu özvektörünün sırasıyla  $\gamma_k$  ve  $\varphi_k$  (burada  $k$ ' 1 ile  $\mathbf{A}$  matrisinin boyutu olan  $m$  arasında değişmektedir) ile simgelendiği varsayılırsa ilk denklemin çözümü

$$\lambda_0 = \gamma_k \quad \mathbf{u}_0 = \varphi_k \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.82)$$

olarak yazılabilir. Bu aşamadan sonra ikinci denklemin çözümüne geçilebilir. Bunun için ikinci denklem, (2.82) denklemini gözönüne alınır ve bilinmeyen vektör olan  $\mathbf{u}_1$  vektörünün yalnızca sol yanda içerileceği biçimde yeniden düzenlenirse denklem

$$(\mathbf{A}_0 - \gamma_k \mathbf{I}) \mathbf{u}_1 = (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \varphi_k \quad (2.83)$$

$\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{A}$  matrisi ile aynı boyutta olan birim matrisi simgelemek üzere, biçimine gelir. Bu denklemin sağ yanındaki katsayı matrisinin  $\varphi_k$  vektörü ile örtülen sıfır uzayı boş olmadığından denklemin sağ yanı bu katsayı matrisinin sol sıfır uzayına dik olmalıdır. Katsayı matrisi bakışık (simetrik) olduğundan sol ve sağ sıfır uzayları aynıdır ve dolayısı ile  $\varphi_k$  vektörünce örtülürler. Bu nedenle bu ortak sıfır uzayına diklik demek onu örten tek vektör olan  $\varphi_k$ 'ya diklik demektir. Bu ise (2.83) denkleminin sağ yanının  $\varphi_k$  vektörüne dik olmasını gerektirir. Bu gereksinim aşağıdaki denklemi yazmamıza olanak sağlar.

$$\varphi_k^T (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \varphi_k = \mathbf{0} \quad (2.84)$$

Bu denklem biraz daha açık olarak yazılırsa

$$\lambda_1 \varphi_k^T \varphi_k - \varphi_k^T \mathbf{A}_1 \varphi_k = \mathbf{0} \quad (2.85)$$

durumuna gelir. Burada  $\varphi_k^T \varphi_k = 1$  olduğu gözönünde bulundurulursa  $\lambda_1$  değeri

$$\lambda_1 = \varphi_k^T \mathbf{A}_1 \varphi_k \quad (2.86)$$

olarak elde edilir.  $\mathbf{u}_1$  vektörünü bulabilmek için ise (2.83) denkleminin sol yanındaki  $(\mathbf{A}_0 - \gamma_k \mathbf{I})$  matrisinin tersinin alınması gerekir fakat bu matris sıfır uzayı dolu bir matristir. Dolayısı ile değer uzayındaki tersi bulunarak denklem çözülebilir. Burada bir matris için kullanılan değer uzayı ya da değer bölgesi kavramı matris altında görüntüleri doğrusal bağımsız olan belli sayıda vektörün doğrusal birleşimi olarak tanımlanmaktadır ve bu uzay içinde  $\mathbf{0}$  vektörü de bulunmaktadır.

$(\mathbf{A}_0 - \gamma_k \mathbf{I})$  matrisinin değer uzayındaki tersinin bulunabilmesi için aşağıdaki yol izlenebilir:

$m$  boyutlu  $\mathbf{A}_0$  ve  $\mathbf{I}$  matrislerinin izgesel gösterimleri

$$\mathbf{A}_0 = \sum_{i=1}^m \gamma_i \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \quad \mathbf{I} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \quad (2.87)$$

olmak üzere  $(\mathbf{A}_0 - \gamma_k \mathbf{I})$  matrisinin izgesel gösterilimi

$$(\mathbf{A}_0 - \gamma_k \mathbf{I}) = \sum_{i=1}^m (\gamma_i - \gamma_k) \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m (\gamma_i - \gamma_k) \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.88)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda bu matrisin değer uzayındaki tersi için de aşağıdaki anlatım geçerlidir.

$$(\mathbf{A}_0 - \gamma_k \mathbf{I})_d^{-1} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)} \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.89)$$

Verilen uzayda  $\mathbf{u}_1$  vektörü  $c_i$  belirsiz katsayılar olmak üzere

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{i=1}^m c_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (2.90)$$

şeklinde yazılabilir. Buraya kadar bulunan tüm ilişkiler (2.83) ile verilen denklemde yerine konulursa

$$\left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m (\gamma_i - \gamma_k) \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \right) \left( \sum_{i=1}^m c_i \boldsymbol{\varphi}_i \right) = (\boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T - \mathbf{I}) \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varphi}_k \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.91)$$

anlatımı elde edilir. Bu anlatım gereken işlemler yapıldıktan sonra

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m c_i (\gamma_i - \gamma_k) \boldsymbol{\varphi}_i = (\boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T - \mathbf{I}) \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varphi}_k \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.92)$$

şekline gelir. Bundan sonra  $c_i$  katsayılarının belirlenmesine geçilebilir. Bunun için elde edilen son denklem sol yandan  $\boldsymbol{\varphi}_n^T$ , ( $1 \leq n \leq m$ ) ile çarpılırsa simetrik matrislerin

farklı özdeğerlere karşı gelen özvektörleri birbirine diktir [57] teoremi de anımsanarak  $c_n$  katsayısı

$$c_n = \frac{1}{(\gamma_n - \gamma_k)} \varphi_n^T \mathbf{A}_1 \varphi_k \quad n \neq k \quad 1 \leq n \leq m \quad (2.93)$$

biçiminde elde edilir. Bulunan sonuç (2.90) denkleminde yerine konulursa  $\mathbf{u}_1$  vektörü

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)} \varphi_i^T \mathbf{A}_1 \varphi_k \varphi_i \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.94)$$

olarak elde edilir. Burada  $\varphi_i \varphi_i^T$  anlatımı bir izdüşüm matrisidir ve bu izdüşüm matrisi kısaca  $\mathbf{P}_i$  anlatımı ile verilirse  $\mathbf{u}_1$  vektörü

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)} \mathbf{P}_i \mathbf{A}_1 \varphi_k \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.95)$$

şeklinde bulunur. Bundan sonra  $\lambda_2$  ve  $\mathbf{u}_2$  bilinmeyenlerinin bulunmasına geçilebilir. Bunun için (2.81) ile verilen denklemlerden sonuncusu  $\mathbf{u}_2$  vektörü yalnızca sol yanda içerileceği biçimde yeniden düzenlenirse denklem

$$(\mathbf{A}_0 - \gamma_k \mathbf{I}) \mathbf{u}_2 = (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \mathbf{u}_1 + (\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}_2) \varphi_k \quad (2.96)$$

Bu denklemden çözüm elde edilebilmesi için yukarıda ikinci denklem için verilen çözüm yolu yinelenirse sağ yandaki katsayı matrisinin  $\varphi_k$  vektörü ile örtülen sıfır uzayı boş olmadığından denklemin sağ yanı bu katsayı matrisinin sıfır uzayına dik olmalıdır gerçeğinden yararlanılabilir. Dolayısı ile (2.96) denkleminin sağ yanı  $\varphi_k$  vektörüne diktir. Bu ise aşağıdaki denklemi yazmamıza olanak sağlar.

$$\varphi_k^T (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \varphi_k^T \varphi_k - \varphi_k^T \mathbf{A}_2 \varphi_k = 0 \quad (2.97)$$

Burada açıkça görülmektedir ki  $\lambda_2$  değeri

$$\lambda_2 = \varphi_k^T \mathbf{A}_2 \varphi_k + \varphi_k^T (\mathbf{A}_1 - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{u}_1 \quad (2.98)$$

olarak elde edilir.  $\mathbf{u}_2$  vektörünü bulabilmek için yine (2.96) denkleminin sol yanındaki  $(\mathbf{A}_0 - \gamma_k \mathbf{I})$  matrisinin tersine gereksinim duyulmaktadır. Yukarıda bu matrisin değer uzayındaki tersinin nasıl bulunduğu ayrıntılı olarak anlatıldığı için burada sonucu kullanılarak  $\mathbf{u}_2$  vektörü

$$\mathbf{u}_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)} \mathbf{P}_i [(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \mathbf{u}_1 + (\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}_2) \varphi_k] \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.99)$$

olarak bulunur. Tüm bu anlatılanlar ışığında genelleme yapılırsa  $\lambda_t$  ve  $\mathbf{u}_t$ 'nin genel ifadesi  $t=0$  ile  $\infty$  arasında olmak üzere sırasıyla aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\lambda_t = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{A}_t \boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{j=1}^{t-1} \boldsymbol{\varphi}_k^T (\mathbf{A}_j - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{u}_{t-j} \quad (2.100)$$

$$\mathbf{u}_t = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)} \mathbf{P}_i \left[ \sum_{j=1}^t (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}_j) \mathbf{u}_{t-j} \right] \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.101)$$

Elde edilen bu genel bağıntı kullanılarak  $\lambda_t$  ve  $\mathbf{u}_t$ 'nin değerleri istenilen bir sayıya kadar bulunur ve (2.78) ile verilen denklemde yerlerine konularak  $\lambda$  özdeğeri ve  $\mathbf{u}$  özvektörü bulunmuş böylece özdeğer problemi çözülmüş olur.

Bu bölümle ilgili ayrıntılı bilgi ve yakınsaklık incelemesi tez danışmanı tarafından BEBBYT (Bilgisayar Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu) yazıları kapsamında bir yönlendirim yazısı olarak hazırlanmış ve bu yazı Ek-A'da verilmiştir.





### 3. SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMI İLE AĞIRLIK ENİYİLEMESİ

Bu bölümde verilen çok değişkenli işlevleri daha az sayıda değişken içeren birtakım yeni işlevlerin toplamı olarak anlatıp, asıl işlev yerine bu yeni bileşenlerle çalışmayı taban alan YBMG yönteminin ilk terimlerinin baskınlığını arttırarak verilen bir işlevi daha az sayıda YBMG bileşeni kullanarak yeterince duyarlıklı yaklaştırabilmek amaçlanmaktadır. Bu amaca ulaşabilmek için, değişmezlik ölçeni üzerinden ağırlık yapısı eniyilenmeye ve uygun bir ağırlık işlevi saptanmaya çalışılmaktadır.

Bunun için ağırlık işlevi aşağıdaki gibi Hilbert uzayı içerisinde kalan bir altuzay ve bu uzayı örten dik bir taban takımından oluşturulan işlevlerin doğrusal birleştirimi olarak seçilmiştir.

$$W(x) = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j(x) \right)^2 \quad (3.1)$$

Dik bir taban oluşturan işlevlerin tümü birden, aynı bağımsız değişken değerinde artı olmayabilir. Fakat YBMG yönteminde kullanılan ağırlık işlevlerinin artı olması gerekliliğinden ağırlık işlevleri bir doğrusal birleşimin karesi yapısında alınmıştır.

Burada eniyilenmiş ağırlık işlevinin değişmezlik ölçeni eniyilemesi üzerinden bulunabilmesi için  $\alpha_j$ , ( $1 < j < n$ ) parametreleri keyfi olarak bırakılmıştır. Bu sabitler eniyileme işleminin temel bilinmeyenleri olarak kullanılacaktır.

Tez çalışması sırasında sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak ağırlık eniyilemesi kavramının iki bölüm halinde incelenmesi öngörülmüştür. İlk bölüm içerisinde bilimsel yazında da bir makale [58] olarak yer almış olan tek değişkenli işlevler için sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak ağırlık eniyilemesinin nasıl yapıldığı anlatılırken, ikinci bölüm içerisinde aynı yöntemin çok değişkenli işlevler için de geçerliliğinin anlatılması gerçekleştirilmiş ve her iki bölümde de konuya ilişkin çeşitli sayısal uygulamalar verilmiştir. Böylece konunun daha anlaşılır bir biçimde verilmesi hedeflenmiştir.

### 3.1 Tek Değişkenli İşlevler İçin Ağırlık Eniyilemesi

Bu bölümde, ele alınan işlev tek bağımsız değişkene bağlı olan bir işlev olduğundan YBMG yöntemi için yapılmak istenen ağırlık eniyilemesine ait etki yalnızca değişmez terimin üzerine yansiyacaktır. Bir başka deyişle, YBMG yöntemi tek bağımsız değişkene bağlı olan işlevleri birinci basamaktan YBMG yaklaşımını ile tam olarak temsil edebildiğinden yapılan ağırlık eniyilemesi birli terimlerin bulunmasında rol oynamayacaktır.

Bu bölümde yalnızca konunun anlatılabilmesini ve kavranmasını kolaylaştırabilmek amacı güdülmüş ve her ne kadar işlevselliği olmasa da tek değişkenli işlevlerin YBMG yöntemine açılması sırasında ağırlık eniyilenmesi çabasına girişilmiştir.

Bunun için değişmez YBMG terimin bulunabilmesi amacıyla kullanılan (2.8) bağıntısı içerisine (3.1) ile verilen ağırlık işlevi yerleştirilirse

$$f_0 = \int_a^b dx \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j(x) \right)^2 f(x) = \int_a^b dx \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k w_j(x) w_k(x) f(x) \quad (3.2)$$

anlatımı elde edilir. Burada işlevin analitik olmasından yararlanılarak değişmez YBMG terimi

$$f_0 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k \int_a^b dx w_j(x) w_k(x) f(x) \quad (3.3)$$

biçiminde bulunur. Sıfırinci basamaktan toplamsallık ölçeninin ( $\sigma_0$ ) belirlenebilmesi için  $\|f_0\|^2$  ve  $\|f\|^2$  anlatımlarının belirlenmesi gerekmektedir. Bu büyüklükler sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\|f_0\|^2 = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k \int_a^b dx w_j(x) w_k(x) f(x) \right)^2 \quad (3.4)$$

$$\|f\|^2 = \int_a^b dx \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k w_j(x) w_k(x) f(x)^2 \quad (3.5)$$

Bulunan bu sonuçlardan yola çıkarak,  $\sigma_0$ , sıfırinci basamaktan toplamsallık ölçeninin anlatımı

$$\sigma_0 = \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \alpha_k \int_a^b dx W(x) w_j(x) w_k(x) f(x) \right)^2}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \alpha_k \int_a^b dx W(x) w_j(x) w_k(x) f(x)^2} \quad (3.6)$$

biçiminde elde edilir. Bu eşitliğin sağ yanı Rayleigh oranının karesi yapısındadır. Bu yapının matris gösterilimi yazılırsa matrisin her bir elemanı

$$F_{jk}^{(1,n)} \equiv (w_j, fw_k), \quad F_{jk}^{(2,n)} \equiv (w_j, f^2 w_k), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (3.7)$$

şeklinde verilmek üzere değişmezlik ölçeni

$$\sigma_0 = \frac{(\alpha^T \mathbf{F}^{(1,n)} \alpha)^2}{\alpha^T \mathbf{F}^{(2,n)} \alpha} \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir. Bu yapıya (2.44) bağıntısı ile verilen sendelenimsizlik yaklaşımını uygulanacak olursa aşağıdaki yaklaşım elde edilir.

$$\sigma_0 \approx \frac{(\alpha^T f(\mathbf{X}^{(n)}) \alpha)^2}{\alpha^T f(\mathbf{X}^{(n)})^2 \alpha} \quad (3.9)$$

Burada sendelenimsizlik yaklaşımını uygulamakla denklemin doğrusal olmayan yapısı değişmez ama  $\sigma_0$ 'ı 1'e yaklaştıran  $\alpha$  vektörlerini kesin olarak bulabilmek için bize önemli bir kolaylık sağlar. Bunun nasıl olacağını görebilmek için  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin izgesel (ing: spectral) denklemini yazalım.

$$\mathbf{X}^{(n)} \mathbf{x}_i = \xi_i \mathbf{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.10)$$

Burada  $\xi_i$  ve  $\mathbf{x}_i$  sırasıyla  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin  $i$ . özdeğeri ve karşı gelen birim boylu özvektörü olsun. Matris kuramına göre bir kare matrisin işlevini aldığımızda aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$f(\mathbf{X}^{(n)}) \mathbf{x}_i = f(\xi_i) \mathbf{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.11)$$

$$f(\mathbf{X}^{(n)})^2 \mathbf{x}_i = f(\xi_i)^2 \mathbf{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.12)$$

Buradaki  $f$  işlevi sendelenimsizlik kanıtsavındaki gereksinim nedeniyle argümanının tanım bölgesinde analitiktir ve bağımsız değişkenin matris gösteriliminin izgesini (ing: spectrum) içerir. Dolayısı ile yukarıdaki denklemler soldan  $\mathbf{x}_i^T$  ile çarpılırsa

$$\mathbf{x}_i^T f(\mathbf{X}) \mathbf{x}_i = f(\xi_i), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.13)$$

$$\mathbf{x}_i^T f(\mathbf{X})^2 \mathbf{x}_i = f(\xi_i)^2, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.14)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da açıkça görülebilir ki

$$\frac{\left(\mathbf{x}_i^T f(\mathbf{X}^{(n)}) \mathbf{x}_i\right)^2}{\mathbf{x}_i^T f(\mathbf{X}^{(n)})^2 \mathbf{x}_i} = 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.15)$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$\sigma_0 \approx \frac{[f(\xi_i)]^2}{f(\xi_i)^2} = 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.16)$$

$\sigma_0$  değişmezlik ölçeni zorunlu olarak 1'e yaklaştırılmış olur. Bir başka deyişle, bu yaklaştırımın 1 değerini alabilmesinin  $\alpha$  vektörünün ancak ve ancak  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin özvektörü olması durumunda sendelenimsizlik limitinde gerçekleşeceğini gösterir. Bu durumda değişmezlik ölçenini 1'e yaklaştıran  $n$  sayıda birbirlerine dik ve birim boylu doğrusal bağımsız vektör elde edilmiş olur. Bu durum ele alınan problemin doğrusal olması durumunda yeterlidir. Bununla birlikte burada ele alınan problem doğrusal olmayan bir yapıdadır. Dolayısıyla bu problem için tam bir çözümün bulunduğu söylenemez. Çünkü burada  $\sigma_0$ 'ı sendelenimsizlik limitinde 1'e yaklaştıran  $n$  sayıda özvektör dışında başka bazı vektörlerin varlığı şüphe yaratacaktır. Böylece  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin özvektörlerinin  $\sigma_0$ 'ı sendelenimsizlik limitinde 1'e yaklaştırabilecek olası vektörler olduğunun gösterilmesine gereksinim vardır.

Bu amaçla, sendelenimsizlik kabulü altında değişmezlik ölçeninin yaklaşık yapısı olan aşağıdaki tanımlama ile başlanabilir.

$$\sigma_0^{(\text{app})} \equiv \frac{\left(\alpha^T f(\mathbf{X}^{(n)}) \alpha\right)^2}{\alpha^T f(\mathbf{X}^{(n)})^2 \alpha} \quad (3.17)$$

$\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin özdeğerleri  $\mathcal{H}_n$  Hilbert alt uzayını örttüğü sürece  $\alpha$  vektörü bu özvektörler cinsinden aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$\alpha \equiv \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{x}_i \quad (3.18)$$

Burada  $v$ 'ler eniyileme ile belirlenecek olan keyfi sabitleri anlatmaktadır. Yukarıda verilen eşitlik kullanılarak (3.17) yeniden yazılırsa

$$\sigma_0^{(\text{app})} = \rho(v_1, \dots, v_n)^2 s(v_1, \dots, v_n) \quad (3.19)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $s$  ve  $\rho$  sırasıyla aşağıda verilen kuvadratik formu ve Rayleigh oranını göstermektedir.

$$s(v_1, \dots, v_n) \equiv \sum_{i=1}^n v_i^2 f(\xi_i)^2 \quad (3.20)$$

$$\rho(v_1, \dots, v_n) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n v_i^2 f(\xi_i) \quad (3.21)$$

Daha önce belirtildiği gibi ağırlık işlevi normalizasyonu yapılması nedeniyle  $\alpha$  vektörünün boyu 1 olmalıdır. Burada  $v$  ve  $\alpha$  vektörleri arasındaki ilişki ortonormal matris transformasyonu üzerinden yapıldığı için  $v$  vektörünün boyu da 1'e eşittir. Bu nedenle değişmezlik ölçeni eniyilemesi bu kısıt altında yapılmalıdır. Bunun anlamı, değişmezlik ölçeni için verilen bağıntı yerine aşağıdaki amaç işlevimsisi (ing: cost functional) kullanılmalıdır.

$$\mathcal{J}(v, \lambda) \equiv \frac{(v^T \mathbf{F} v)^2}{v^T \mathbf{F}^2 v} + \lambda (v^T v - 1) \quad (3.22)$$

burada  $\lambda$  Lagrange parametresi olarak adlandırılır ve eniyileme aracılığı ile belirlenebilir. Ayrıca,  $v$  vektörünün  $i$ . elemanı yukarıda belirtilen  $v_i$  parametresiyken,  $\mathbf{F}$  sıfır olmayan aşağıya doğru artan indisli elemanları  $f(\xi_i)$  değerleri olan köşegen (ing: diagonal) matristir.

Bu aşamadan sonra amaç işlevimsisinin  $v$  ve  $\lambda$ ' ya göre gradyanları alınarak bulunan anlatımlar sıfıra eşitlenirse, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$v^T v = 1$$

$$4 \frac{v^T \mathbf{F} v}{v^T \mathbf{F}^2 v} \mathbf{F} v - 2 \frac{(v^T \mathbf{F} v)^2}{(v^T \mathbf{F}^2 v)^2} \mathbf{F}^2 v + 2\lambda v = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

Bulunan son anlatımın  $v$  vektörü ile iççarpımı  $\lambda$  için aşağıdaki değeri üretir

$$\lambda = - \frac{(v^T \mathbf{F} v)^2}{v^T \mathbf{F}^2 v} \quad (3.24)$$

ve (3.23) ile verilen eşitlik aşağıdaki şekle gelir.

$$v^T v = 1$$

$$4 \frac{v^T \mathbf{F} v}{v^T \mathbf{F}^2 v} \mathbf{F} v - 2 \frac{(v^T \mathbf{F} v)^2}{(v^T \mathbf{F}^2 v)^2} \mathbf{F}^2 v - 2 \frac{(v^T \mathbf{F} v)^2}{v^T \mathbf{F}^2 v} v = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

Bu ifadenin olası çözümleri

$$v = \mathbf{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.26)$$

şeklindedir. Burada  $\mathbf{e}_i$ ,  $i$ . elemanı 1 olan kartezyen birim vektörü göstermektedir. Bu sonuç ile bilinmeyen  $\alpha$  vektörlerinin  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin birim boylu özdeğerleri olarak alınabileceği, yani  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin özvektörlerinin  $\sigma_0$ 'ı sendelenimsizlik limitinde 1' e yaklaştırabilecek olan olası tek vektörler olduğu kanıtlanmış olur. Buraya kadar anlatılanlar aşağıda özgün İngilizcesi ile verilen kanıtsavı doğrulamış olmaktadır.

**Kanıtısav :** *Birim boy kısıtı altında değişmezlik ölçeninin eniyileme çözümleri bağımsız değişkenin matris gösteriliminin birim boylu özvektörlerinden biri olabilir ve sendelenimsizlik varsayımı altında değişmezlik ölçenini yaklaşık olarak 1 yapar.*

**Theorem :** *The solutions of the optimization of the constancy measurer under unit norm constraint can be one of the eigenvectors of the matrix representation of the independent variable with unit norm and make the approximate constancy measurer 1 within the fluctuationlessness limit.*

Buraya kadar verilenler göz önünde bulundurulduğunda değişmezlik ölçeni üzerinden ağırlık eniyilemesi problemi, problem doğrusal olmayan bir yapıda olsa da, sendelenimsizlik yaklaşıtımları kullanılarak rahatça çözülebilir. Problemin çözülmesi sırasında  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin özdeğer ve özvektörlerine gereksinim duyulmaktadır.  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisi,  $\hat{x}$  ile verilen ve görevi  $\mathcal{H}_n$  üzerinde operandını bağımsız değişkeni ile çarpma olarak tanımlanan operatörün matris gösterilimidir. Bu matrisin özdeğerleri,  $\hat{x}$  operatörünün spektrum aralığı olan  $[a, b]$  aralığı içinde kalmaktadır. Ayrıca bu özdeğerler katlı özdeğer içermemektedir. Bu konuya ilişkin daha geniş açıklama ilgili tezden [59] alındığı haliyle Ek-C'de verilmektedir.

Burada yapılan analiz henüz sendelenimsizlik kanıtsavı kullanılarak değişmezlik ölçeni üzerinden ağırlık eniyilemesi probleminin eşsiz bir çözümünü bulabilmek için yeterli değildir. Aslında  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin tüm birim boylu özvektörleri arasından  $\sigma_0$ 'ı 1' en yakın yapan birinin bulunması gerekmektedir. Bunun için aşağıda verilen bağıntıdan yararlanılabilir.

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\left( \mathbf{x}_i^T \mathbf{F}^{(1,n)} \mathbf{x}_i \right)^2}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{F}^{(2,n)} \mathbf{x}_i}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.27)$$

Bu terimlerin her biri 0 ve 1 arasında değerler alır. Burada verilen  $f$  işlevi tekdüze (ing: monotonous) artan ya da azalan bir işlev olduğu sürece  $\bar{\sigma}_i$  değerlerinin aynı değeri alabilme olasılığı yoktur. Böylece bu değerlerin içerisinde yalnızca bir tanesi tekdüze bir işlev için en büyük olacaktır. Ancak burada verilen  $f$  işlevinin tekdüze olması

eniyileme probleminin eşsiz çözümünde gerek şart değildir. Bu çalışma içerisinde yapılan bir çok araştırma göstermiştir ki, değişmezlik ölçenini en büyük yapan sadece bir özdeğer özvektör ikilisi bulunmaktadır. Birim boylu bu özvektör belirlendikten sonra  $\mathbf{x}_{\text{opt}}$  ile gösterilirse, aşağıda verilen bağıntı kullanılarak eniyilenmiş ağırlık işlevi kolayca bulunabilir.

$$W_{\text{opt}}(x) \equiv (\mathbf{w}(x)^T \mathbf{x}_{\text{opt}})^2 \quad (3.28)$$

Burada  $\mathbf{w}(x)^T$  vektörü

$$\mathbf{w}(x)^T \equiv [w_1(x) \dots w_n(x)] \quad (3.29)$$

şeklindedir.

Buraya kadar olan kesimde tek değişkenli işlevler için ağırlık eniyilemesi probleminin sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak çözülme yöntemi teorik olarak verilmiştir. Bundan sonra yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla yönteme ait bir hesaplama algoritması oluşturularak bir sonraki alt bölümde sunulmuştur. Daha sonraki alt bölümde ise yönteme ait sayısal örnekler verilecektir.

### 3.1.1 Hesaplama algoritması

Bu bölümde yöntemin baştan sona adım adım algoritması verilerek olabildiğince daha açık ve anlaşılabilir bir duruma getirilmesi öngörülmüştür.

Algoritmanın girdileri olarak işlevin analitik yapısına ve işleve ait bağımsız değişkenlerin tanım aralığına gereksinim duyulmaktadır.

Algoritmanın çıktısı verilen işlev yerine kullanılacak olan yaklaşık işlevin analitik yapısıdır. Burada elde edilen işlev eniyilenmiş ağırlık işlevi altında YBMG yöntemi kullanılarak bulunan işlevdir.

Algoritmanın tüm adımları aşağıda sırasıyla verilmektedir.

1. İlk adım olarak (2.45) ile verilen  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin boyutunun belirlenmesi gerekmektedir. Burada  $n$  matrisin boyutuna karşılık gelmektedir ve en küçük 1 değerini alabilir.  $n$  sayısı büyüdükçe sendelenimsizlik yaklaşımına göre yakınsama başarısı artmaktadır. Bu çalışma içerisinde yapılan çalışmalar göstermiştir ki, bu yaklaşım için  $n$  sayısının önemi büyük olmakla birlikte  $n$  sayısı çok fazla

yukarılara tırmanmadan hatta  $n = 3$ ,  $n = 5$  gibi sayılarda oldukça yaklaşık sonuçlar elde edilmiştir. Yalnız burada özellikle vurgulanmalıdır ki, yöntemin oldukça etkin çalışması nedeni ile  $n$  sayısının çok yukarılara tırmanmadığından eniyileme sırasında çok fazla bir çabaya gereksinim duyulmamaktadır.

2. İkinci adım olarak (3.1) ile verilen denklemdaki  $w_j(x)$ , taban işlevlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için çalışma içerisinde  $\{1, x, x^2, \dots\}$  şeklinde çok terimli (ing: polynomial) taban takımı seçilmiştir. Bundan sonra Gram-Schmidt Ortonormalizasyon [60] yöntemi kullanılarak taban takımının tüm elemanları birbirine dik ve birim boylu hale getirilmiştir. Aşağıda örnek olarak  $n = 3$  için belirlenen birim boylu ve herbiri birbirine dik olan taban takımı elemanları verilmiştir.

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{b-a}}, & w_2(x) &= \frac{2\sqrt{3}}{(b-a)^{\frac{3}{2}}} \left( x - \frac{b+a}{2} \right), \\ w_3(x) &= \frac{6\sqrt{5}}{(b-a)^{\frac{5}{2}}} \left( x^2 - (a+b)x + \frac{a^2 + 4ab + b^2}{6} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Buradaki taban işlevi sayısı birinci adımda verilen matris boyutu ile yani,  $n$  sayısı ile aynı olmalıdır.

3. (2.45) bağıntısı ile verilen  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin hesaplanması gerekmektedir.
4. Sonraki adımda (3.10) ile verilen denklem kullanılarak  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin tüm özdeğer ve ona karşılık gelen özvektör ikilileri belirlenir.
5. (3.7) ile verilen bağıntılar gözönüne alınarak  $\mathbf{F}^{(1,n)}$  ve  $\mathbf{F}^{(2,n)}$  matrisleri hesaplanır.
6. (3.27) ile verilen denklem kullanılarak daha önce bulunmuş olan her bir özvektör için değişmezlik ölçeni hesaplanır. Toplam olarak  $n$  farklı sayıda değer elde edilir. Bunlardan bir tanesi en büyük olacaktır. Değişmezlik ölçenini en büyük yapan özvektör  $\mathbf{x}_{\text{opt}}$  olarak adlandırılır.
7. Eniyilenmiş olan ağırlığı bulabilmek için son adım olarak (3.28) ile verilen denklemden yararlanılır. Bu denklemde bir önceki adımda bulunan  $\mathbf{x}_{\text{opt}}$  vektörü yerine konularak YBMG'de kullanılacak olan ağırlığın belirlenmesi sağlanır.
8. En son adım olarak bir önceki adımda bulunan ağırlık işlevi (2.8) denkleminde kullanılarak YBMG bileşeni olan  $f_0$ , değişmez terimi belirlenir.



### 3.1.1.1 Sayısal uygulama

Bu bölümde aşağıda verilen işlev seçilerek yukarıda adım adım verilmiş olan algoritma bir sayısal uygulama olarak yine adım adım anlatılmaya çalışılmıştır.

$$f = \sqrt{x+1}, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.31)$$

Burada aralık  $[-1, 1]$  olarak alınmış yani,  $a$  ve  $b$  sırası ile  $-1$  ve  $1$  olarak alınmıştır.

Hesaplama algoritmasına ait her adım için elde edilmiş çözümler aşağıda verilmiştir.

1. Matrisin boyutu 3 olarak seçilmiştir.

2. Elde edilen taban işlevleri aşağıdaki gibidir.

$$w_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad w_2(x) = \frac{\sqrt{6}x}{2}, \quad w_3(x) = \frac{3\sqrt{10}(x^2 - \frac{1}{3})}{4} \quad (3.32)$$

3.  $\mathbf{X}^{(3)}$  matrisi

$$\mathbf{X}^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0.5774 & 0 \\ 0.5774 & 0 & 0.5164 \\ 0 & 0.5164 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

şeklinde elde edilir.

4.  $\mathbf{X}^{(3)}$  matrisinin özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\xi_1 = -0.7746, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0.7746 \quad (3.34)$$

$$\mathbf{x}_1 \equiv \begin{bmatrix} -0.6667 \\ 0 \\ 0.7454 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 \equiv \begin{bmatrix} 0.5270 \\ 0.7071 \\ 0.4714 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 \equiv \begin{bmatrix} 0.5270 \\ 0.7071 \\ 0.4714 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

5.  $\mathbf{F}^{(1,n)}$  ve  $\mathbf{F}^{(2,n)}$  matrisleri ise

$$\mathbf{F}^{(1,n)} \equiv \begin{bmatrix} 0.9428 & 0.3266 & -0.0602 \\ 0.3266 & 0.8889 & 0.3130 \\ -0.0602 & 0.3130 & 0.8938 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{F}^{(2,n)} \equiv \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5774 & 0 \\ 0.5774 & 1.0000 & 0.5164 \\ 0 & 0.5164 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

olarak bulunur.

6. Değişmezlik ölçeninin yukarıda bulunan 3 farklı özvektör için elde edilen değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\sigma_0^{(1)} = 0.7937 \quad \sigma_0^{(2)} = 0.9515 \quad \sigma_0^{(3)} = 0.9925 \quad (3.38)$$

Bulunan bu sonuçlar gözönünde bulundurulduğunda en büyük değişmezlik ölçeni değeri  $\sigma_0^{(3)} = 0.9925$  olarak bulunduğundan  $x_{opt}$  vektörü  $x_3$  ile verilen özvektör olarak alınır.

7. Yukarıda bulunan  $x_{opt}$  vektörü kullanılarak aşağıdaki ağırlık işlevi elde edilir.

$$W_{opt} = (1.1180x^2 + 0.86602x - 0.1 \times 10^{-4})^2 \quad (3.39)$$

8. Bulunan eniyilenmiş ağırlık işlevi YBMG yöntemi içerisinde kullanılarak değişmez terim

$$f_0 = 1.3271 \quad (3.40)$$

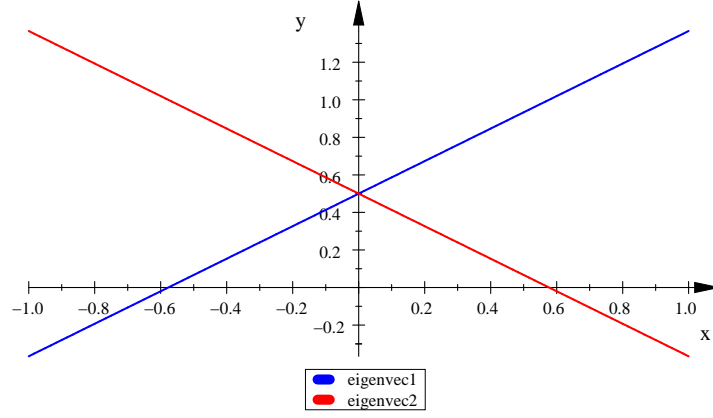
olarak elde edilir.

### 3.1.2 Sayısal uygulamalar

Bu bölümde yöntemin verimini ölçebilmek için farklı yapılardaki işlevler içerisinde seçilen çeşitli uygulamalar sunulmuştur. Burada amaç, farklı yapıda verilen işlevler yerine bu işlev ile aynı görevi görebilecek yeni yaklaşım işlevleri elde edebilmektir. Bu amaç temel olarak YBMG yöntemi ile yerine getirilmiş ancak bunun yanında problemin çözümü sırasında oldukça kolaylık sağlamış olan sendelenimsizlik yöntemi de kullanılmıştır.

Bu bölümde verilen örnekler tek bağımsız değişkenli işlevler olarak verildiğinden bulunan yaklaşım işlevleri sabit işlev olarak bulunmuştur yani, YBMG değişmez terimden kesilmiştir. Eğer YBMG birli bileşenlerden kesilecek olursa yöntem verilen tek değişkenli bir işlevin kendisini verecektir. Bu durumda, bulunan işlev yaklaşım işlevi değil asıl işlevin kendisi olacaktır. Bunun için bu bölümde yalnızca yaklaşım işlevi olan sabit işlev bulunmuştur. Ancak bundan sonra verilecek olan ve çok değişkenli işlevler için ağırlık eniyilemesi başlığını taşıyan bölümde çok değişkenli işlevler için birli terimlerin de içerileceği yaklaşım işlevleri hesaplanacaktır.

Eniyilenmiş olan ağırlık işlevini bulabilmek için yukarıda verilen adımları aynen izleyerek  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin özdeğer ve karşı gelen özvektörlerinin bulunması gerekmektedir.



**Şekil 3.1:** Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri  $n = 2$ .

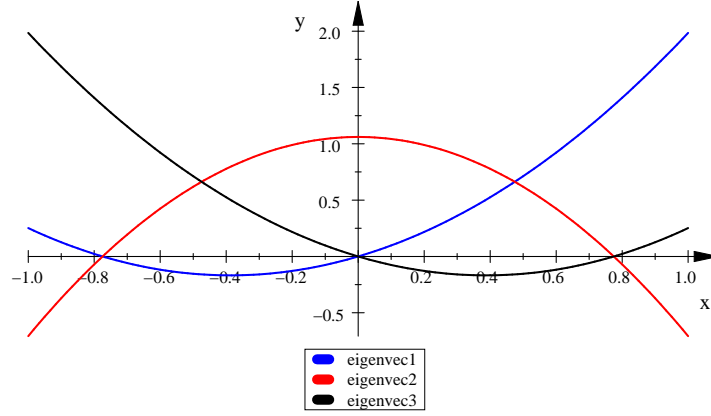
Bilindiği gibi bu özvektörler değişmezlik ölçenini eniyileyecek olan olası vektörlerdir ki, bu da sendelenimsizlik kanıtsavı yardımı ile rahatlıkla gösterilebilmektedir. Burada matrisin boyutu  $n$  olarak alındığında  $n$  tane özdeğer ve ona karşı gelen  $n$  tane özvektör bulunacağı açıktır. Bu özvektörlerden yalnızca bir tanesi  $\sigma_0$  değişmezlik ölçenini en büyükleyecek yani 1'e yaklaştıracaktır ki, işte bu özvektör eniyilenmiş ağırlık işlevini belirler.

Burada verilecek olan tüm örneklerde aralık  $[-1, 1]$  aralığı ve ağırlık birim ağırlık olarak alınmıştır. Burada elde edilen  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin özdeğerleri katlı değildir ve  $n$  adet özvektör  $[-1, 1]$  aralığı içerisinde yuvalanmış durumdadır.

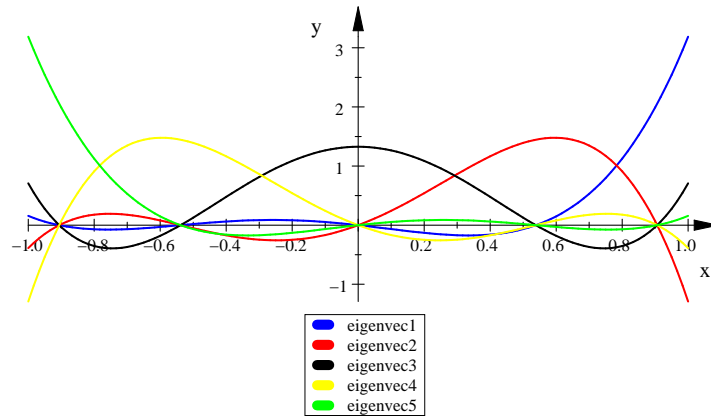
Bu çalışma için yapılan sayısal ve simgesel hesaplamalar son zamanlarda serbest yazılım olmaktan çıkan MuPAD Computer Algebra System [61] kullanılarak yapılmıştır. Sonuçlar 10 basamak duyarlılık ile elde edilmiş ve program kodları Linux (Ubuntu 7.10) işletim sistemi üzerinde koşurulmuştur.

Bu bölümde on tane şekil yer almaktadır. Bu şekillerden ilk beşi herhangi bir eniyileme içermemektedir. Bu şekiller verilen farklı boyutlardaki sendelenim matrislerinden elde edilen özdeğerlere karşı gelen özvektörler kullanılarak elde edilmiş olası ağırlık işlevlerini göstermektedir.

Şekillerden ilki yani, Şekil 3.1 iki boyutlu Hilbert alt uzayını örten taban takımı yani, (3.32) bağıntısında verilen  $w_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$  ve  $w_2(x) = \frac{\sqrt{6}x}{2}$  işlevleri ile oluşturulmuş  $\mathbf{X}^{(2)}$  matrisinden elde edilen 2 farklı özvektör ile oluşturulmuş olası 2 ağırlık işlevine ait çizimdir.



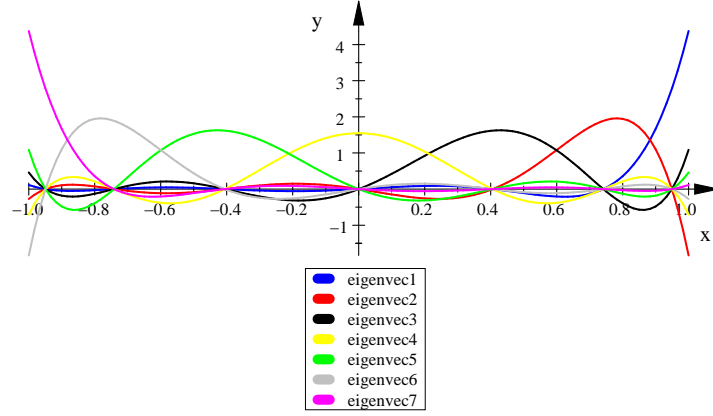
**Şekil 3.2:** Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri  $n = 3$ .



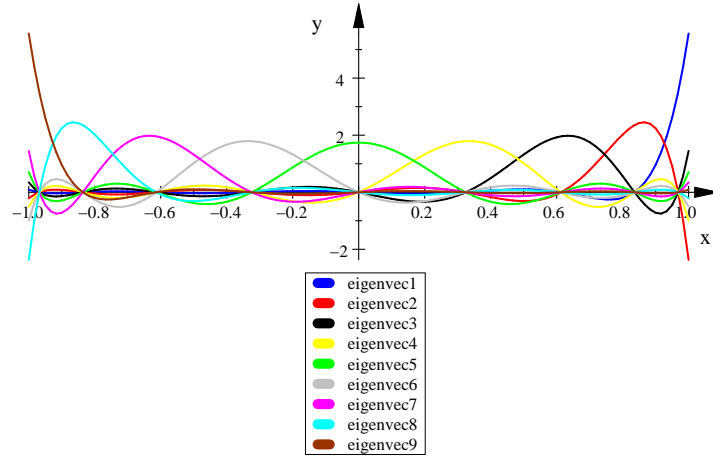
**Şekil 3.3:** Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri  $n = 5$ .

Şekil 3.2’de ise üç boyutlu Hilbert uzayına ait taban takımları, yani  $w_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ,  $w_2(x) = \frac{\sqrt{6}x}{2}$  ve  $w_3(x) = \frac{3\sqrt{10}(x^2 - \frac{1}{3})}{4}$  ile oluşturulan üç boyutlu sendelenim matrisinden elde edilen 3 farklı özvektör kullanılarak oluşturulmuş olan olası ağırlık işlevlerini gösteren çizimdir.

Şekil 3.3’ de ise kullanılan taban takımı sayısı diğer bir deyişle sendelenim matrisinin boyutu biraz daha arttırılmış ve  $n = 5$  için aynı işlemler sürdürülerek elde edilen 5 tane olası ağırlık işlevi değişik renkler kullanılarak çizilmiştir. Burada taban takım sayısını 5’e çıkarabilmek için daha önceden bahsedildiği gibi  $1, x, x^2, x^3, x^4$  şeklindeki çokterimli taban takımı ele alınmış ve Gram-Schmidt ortonormalizasyon yöntemi kullanılarak bu taban takımı dik ve birimboylu hale getirilmiştir. Burada sendelenim matrisinin değişik boyutlarda seçilerek çizimlerin yapılmasının nedeni ağırlık işlevlerinin davranışını inceleyebilmektir. Verilen şekiller dikkatlice ince-



Şekil 3.4: Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri  $n = 7$ .



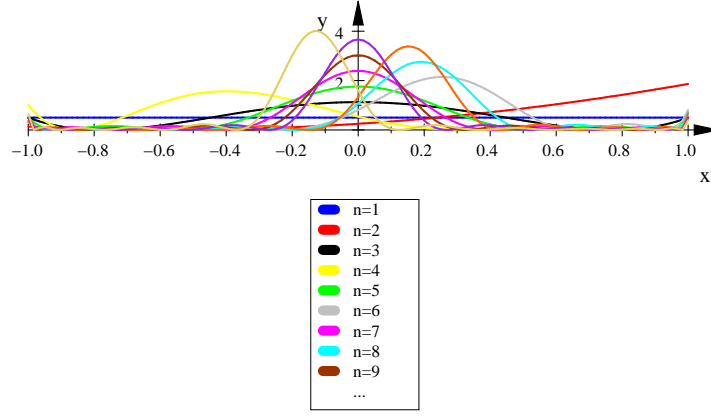
Şekil 3.5: Sendelenimsizlik yaklaşımı ile olası ağırlık işlevleri  $n = 9$ .

lendiğinde görülecektir ki,  $n$  değeri çok fazla yukarılara tırmandığında eniyilenmiş ağırlık işlevlerinin davranışı Dirac delta işlevinin davranışına benzemekte hatta  $n$  sonsuza götürüldüğünde Dirac delta işlevi ile aynı olmaktadır.

Şekil 3.4' de ise 7 tane taban takımının kullanılarak sendelenim matrisinin oluşturulması ile gündeme gelen 7 farklı olası ağırlık işlevinin çizimleri 7 farklı renkte gösterilmektedir.

Burada son olarak şekil 3.5 ise boyutun 9 olarak seçilmesiyle bulunan 9 farklı olası ağırlığa ilişkin çizim bulunmaktadır.

Buraya kadar verilen çizimlerin tümünde ağırlıklar işlevden bağımsız olarak verilmektedir. Yani, istenilen bir  $n$  değeri için  $n$  sayıda taban takımı kullanılarak evrensel olan



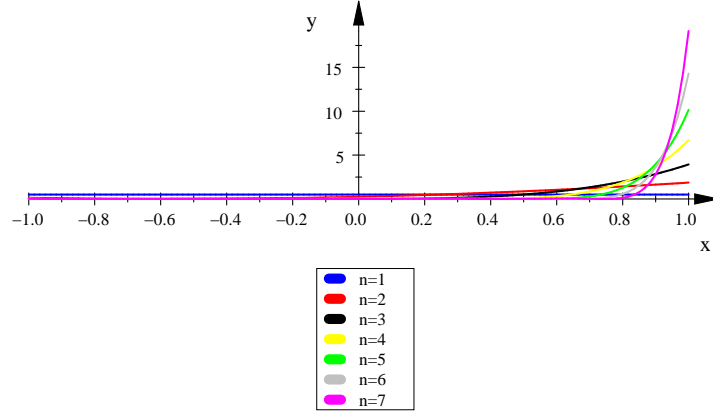
**Şekil 3.6:**  $1 - x^2$  işlevi için eniyelenmiş ağırlık işlevleri.

sendelenim matrisleri oluşturulmuş ve bu matrislerin tüm özdeğerlerine karşı gelen özvektörler kullanılarak ağırlıklar çizilmiştir.

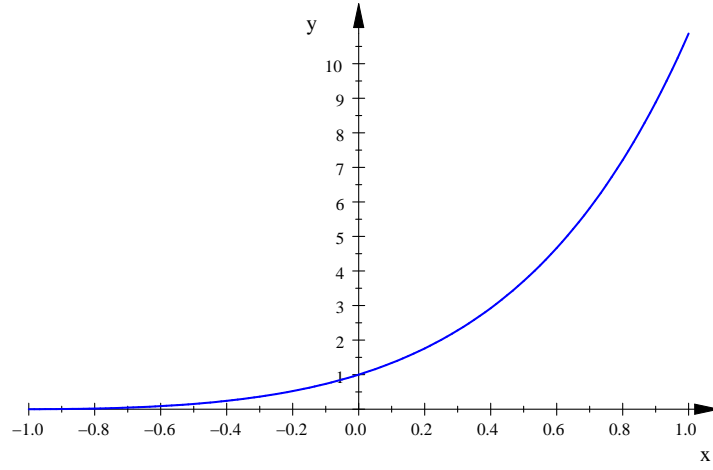
Bundan sonraki 5 şekil ise işleve bağımlıdır. Çünkü bu çizimlerin tümünde bulunan olası ağırlık işlevleri değil verilen işlev için  $\sigma_0$  değişmezlik ölçenini eniyileyen ağırlık işlevleri farklı  $n$  değerleri için çizilmiştir. Örnek olarak 5 farklı işlevin alınmasının nedeni değişmezlik ölçenini eniyileyen özvektörler kullanılarak bulunmuş olan ağırlık işlevinin davranışını her bir örnek için ayrı ayrı inceleyebilmektir.

Şekil 3.6'da  $1 - x^2$  işlevi sınaama işlevi olarak seçilmiştir. Şekilde oniki farklı  $n$  değeri için değişmezlik ölçenini eniyileyen ağırlık işlevlerinin çizimi verilmektedir. Örneğin burada  $n = 5$  için 5 tane özdeğer ve ona karşı gelen özvektör elde edilmiş daha sonra bu özdeğerin her birinden  $\sigma_0$  değeri elde edilmiştir. Böylece toplam 5 tane  $\sigma_0$  değeri bulunmaktadır ve bu değerlerin hepsi  $[0, 1]$  aralığındadır. Bunlardan en büyüğü tespit edilir ve işaretlenir. İşaretlenen bu  $\sigma_0$  değerini bulmak için kullanılmış olan özvektör ki, bu özvektörün (3.28) ile verilen bağıntıda  $\mathbf{x}_{opt}$  vektörüdür, kullanılarak eniyelenmiş ağırlık belirlenir. Kısaca bulunabilecek olan 5 farklı ağırlık işlevinden  $\sigma_0$  değerini eniyileyen birisi bu şekilde yeşil olarak verilen işlevdir.

Şekil 3.6'da her ne kadar  $n$  sayısı 12'ye kadar çıkarılmışsa da tez çalışması içerisinde yaptığımız gözlemler bu sayının bu kadar yukarılara tırmandırılmadan  $n = 3, n = 4$  gibi sayılar için oldukça iyi yaklaşımlar verdiği gözlemlenmiştir. Bu şekil için  $n$  sayısının bu kadar yukarılara çekilerek çizilmesinin nedeni eniyelenmiş ağırlık işlevlerinin  $n$  yukarılara çıktığındaki davranışını yansıtabilmek amaçlıdır.



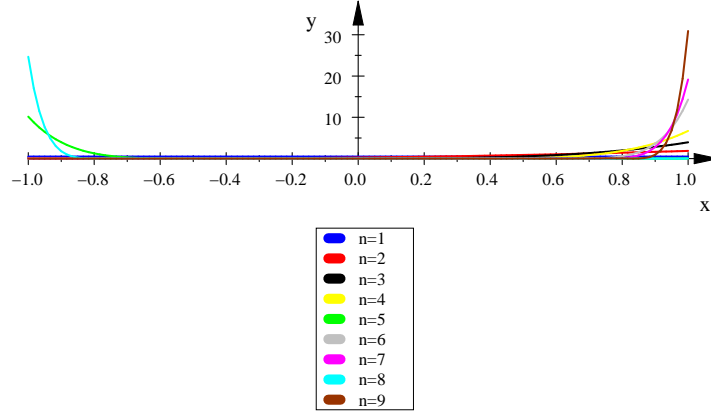
**Şekil 3.7:**  $(1+x)^2e^x$  işlevi için eniyelenmiş ağırlık işlevleri.



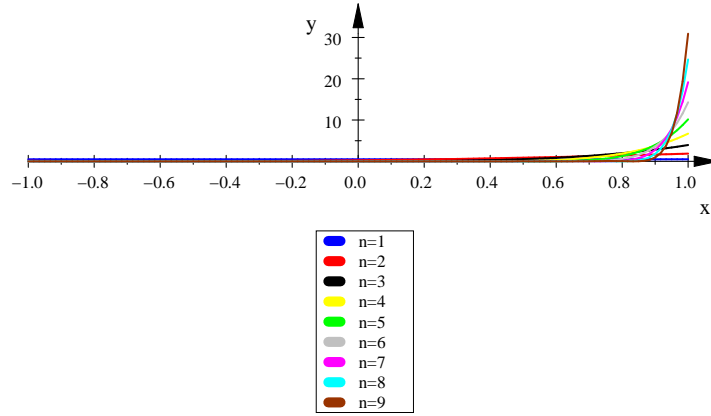
**Şekil 3.8:**  $(1+x)^2e^x$  işlevine ait çizim.

Ayrıca dikkat edilirse, Şekil 3.6'da verilen  $1-x^2$  işlevi için  $[-1,1]$  aralığında bulunmuş olan eniyelenmiş ağırlık işlevlerinin maksimum minimum noktaları ile aynı aralıkta  $1-x^2$  işlevine ait maksimum minimum noktaları aynıdır.

Şekil 3.7'de  $(1+x)^2e^x$  işlevi için  $n$  değerleri 7'ye kadar çıkarılmış ve bu değerler için elde edilmiş değişmezlik ölçenini eniyileyen ağırlık işlevlerine ait çizimler farklı renklerle verilmiştir. Şekil 3.7'de verilen eniyelenmiş ağırlık işlevlerine ait çizimler Şekil 3.8'de verilen  $(1+x)^2e^x$  işlevinin  $[-1,1]$  aralığındaki çizimi göz önünde bulundurulursa, ağırlık işlevlerinin verilen aralıktaki maksimum minimum noktaları ile  $(1+x)^2e^x$  işlevine ait maksimum minimum noktalarının aynı noktalarda olduğu görülmektedir. Aslında bir önceki şekil, (şekil 3.6), için de belirtilen bu durum bir rastlantı değildir. Burada verilen tüm işlevler başka başka yapılara sahip olan işlevler



**Şekil 3.9:**  $\sin(x)$  işlevi için eniyilenmiş ağırlık işlevleri.



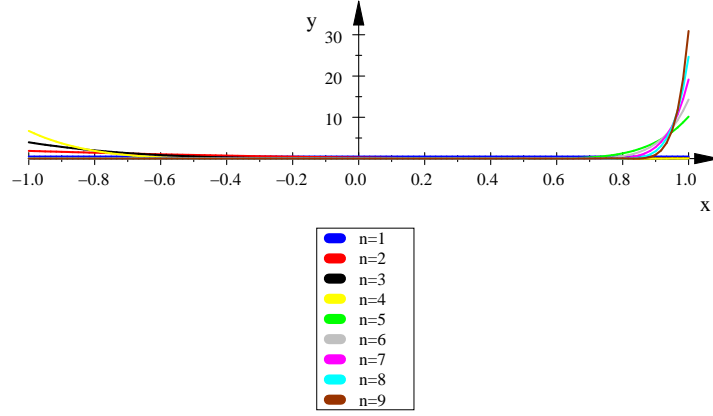
**Şekil 3.10:**  $\sqrt{1+x}$  işlevi için eniyilenmiş ağırlık işlevleri.

olarak seçilmesine rağmen verilen tüm işlevlere ilişkin şekiller incelendiğinde aynı durumun bu şekiller için de geçerli olduğu görülecektir.

Bundan sonra verilen üç şeklin hepsinde  $n$  sayısı 9 olarak alınmış ve en iyilenmiş ağırlıklar 9 farklı renkte çizilmiştir. Şekil 3.9  $\sin(x)$  işlevi için eniyilenmiş ağırlık işlevlerini farklı renklerde göstermektedir.  $\sin(x)$ 'in  $[-1, 1]$  aralığında grafiği çizilirse  $-1$  ve  $1$  noktalarında minimum ve maksimumu olduğu görülecektir ve Şekil 3.9'dan da rahatça görülebileceği gibi aynı noktalar eniyilenmiş ağırlık işlevleri için de minimum ve maksimum noktalarıdır.

Şekil 3.10  $\sqrt{1+x}$  işlevi için  $n$ 'nin 9 farklı değeri kullanılarak oluşturulmuş 9 tane eniyilenmiş ağırlık işlevini değişik renklerde göstermektedir.





**Şekil 3.11:**  $\ln(\frac{x}{2} + 1)$  işlevi için eniyelenmiş ağırlık işlevleri.

**Çizelge 3.1:** Eniyelenmiş ve eniyelenmemiş ağırlık işlevleri için  $\sigma_0$  değerleri ( $n = 9$ ).

İncelenen işlevler	$1 - x^2$	$(1 + x)^2 e^x$	$\sin(x)$	$\sqrt{1 + x}$	$\ln(1 + \frac{x}{2})$
$\sigma_0 (W := \frac{1}{2})$	0.8333	0.4002	0	0.8888	0.0211
$\sigma_0$ (Eniyelenmiş ağırlık işlevi)	0.9743	0.9950	0.9970	0.9996	0.9960

Şekil 3.11 ise son olarak  $\ln(1 + \frac{x}{2})$  işlevi için elde edilen eniyelenmiş ağırlık işlevlerini göstermektedir.

Ayrıca bu bölümde iki tane çizelge bulunmaktadır. Çizelge 3.1’de şu ana kadar incelenen farklı yapılarıdaki işlevler için değişmezlik ölçenleri hesaplanmıştır. Çizelge 3.1’in ilk satırında değişmezlik ölçenleri sabit ağırlık altında hesaplanmıştır. İşlevlere ait aralık  $[-1, 1]$  aralığı olduğundan ve ağırlık işlevi verilen aralıkta normalizasyon şartını sağlaması gerektiğinden ilk satırdaki sabit olarak kabul edilen bu ağırlık işlevinin değeri  $\frac{1}{2}$  olur. Çizelge 3.1’in ikinci satırında ise değişmezlik ölçenleri  $n = 9$  alınarak hesaplanan eniyelenmiş ağırlık işlevi altında bulunmuştur.

Sabit ağırlık işlevinin kullanılmasıyla edilen sonuçlar ile bu çalışmada geliştirilen algoritma aracılığıyla eniyelenen ağırlık işlevinin kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında eniyileme yönteminin oldukça etkin çalıştığı açık bir şekilde görülmektedir. Özellikle  $\sin(x)$  ve  $\ln(1 + \frac{x}{2})$  işlevleri için bulunan sonuçlar incelendiğinde ve değişmezlik ölçeninin değeri 1’e ne kadar yakınsa o kadar iyi bir yaklaşım elde edildiği düşünüldüğünde yöntemin gücü daha net bir şekilde ortaya çıkmaktadır.

**Çizelge 3.2:** Farklı işlevler ve boyutlar için elde edilmiş eniyilenmiş ağırlık işlevleri ile bulunmuş  $\sigma_0$  değerleri.

işlevler	n=2	n=3	n=5	n=7	n=9
$1 - x^2$	0.7466	0.9331	0.9565	0.9677	0.9743
$(1 + x)^2 e^x$	0.7651	0.9017	0.9739	0.9898	0.9950
$\sin(x)$	0.7316	0.9231	0.9833	0.9937	0.9970
$\sqrt{1 + x}$	0.9786	0.9925	0.9981	0.9992	0.9996
$\ln(1 + \frac{x}{2})$	0.7195	0.9062	0.9781	0.9918	0.9960

Çizelge 3.2 ise yine verilen örnek işlevler için biraz daha detaylandırılmış sonuçlar içermektedir. Her bir örnek işlev için farklı  $n$  değerlerinde elde edilmiş eniyilenmiş ağırlık işlevleri kullanılarak bulunmuş  $\sigma_0$  değerleri ayrı ayrı verilmektedir.

Buradan rahatça görüleceği gibi  $n$  değeri arttıkça  $\sigma_0$  değeri 1' e çok yaklaşmaktadır. Bu da bizim asıl işlevi oldukça iyi temsil edebileceğimiz yaklaşık işlevler elde edebildiğimiz anlamına gelmektedir. Burada özellikle vurgulanması gereken noktalardan biri, çizelgeden kolayca anlaşılacağı gibi yöntemin çok etkin çalışması nedeniyle  $n$  sayısının çok yukarılara tırmanmadan iyi bir sonuç elde edilebilmesidir. Sözelimi burada  $n = 9$  için  $\sigma_0$  değerleri son derece tatmin edici olarak bulunmuştur.

### 3.2 Çok Değişkenli İşlevler İçin Ağırlık Eniyilemesi

Bu bölümde bir önceki bölümde tek değişkenli işlevler için verilmiş olan teori çok değişkenli işlevler için anlatılarak genişletilecek ve çeşitli örneklemelerle zenginleştirilecektir. Bunun için ağırlık işlevi yine Hilbert uzayı içerisinde kalan bir altuzay ve bu uzayı örten dik bir taban takımından oluşturulan işlevlerin doğrusal birleştirimi olarak aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$W(x_1, \dots, x_N) = \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j(x_1, \dots, x_N) \right)^2 \quad (3.41)$$

Bu ağırlık kullanılarak bir önceki bölümde verilen yol izlenirse değişmez terim

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j(x_1, \dots, x_N) \right)^2 f(x_1, \dots, x_N) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k w_j(x_1, \dots, x_N) w_k(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (3.42)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem bir aşama daha ileriye gidilerek düzenlenirse,

$$f_0 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N w_j(x_1, \dots, x_N) w_k(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \quad (3.43)$$

haline gelecektir.  $\sigma_0$  değişmezlik ölçeninin elde edilebilmesi için yine  $\|f_0\|^2$  ve  $\|f\|^2$  anlatımlarının belirlenmesi gerekmektedir. Bu anlatımlar da aşağıda verilmektedir.

$$\|f_0\|^2 = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N w_j(x_1, \dots, x_N) w_k(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \right)^2 \quad (3.44)$$

$$\|f\|^2 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k w_j(x_1, \dots, x_N) w_k(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N)^2 \quad (3.45)$$

Bu anlatımlar gözönünde bulundurularak değişmezlik ölçeninin anlatımı ise

$$\sigma_0 = \frac{\left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N w_j(x_1, \dots, x_N) w_k(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \right)^2}{\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k w_j(x_1, \dots, x_N) w_k(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N)^2} \quad (3.46)$$

olarak verilir. Bu eşitliğin sağ yanı yine Rayleigh oranının karesi yapısındadır. Burada yine tek değişkenli işlevler için izlenen yol izlenmeye devam edilir ve Bu yapının matris gösterilimi yazılırsa matrisin her elemanı

$$F_{jk}^{(1,n)} \equiv (w_j, f w_k), \quad F_{jk}^{(2,n)} \equiv (w_j, f^2 w_k), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (3.47)$$

olarak verilebilir. Burada içarpımın içinde yer alan  $f$  işlevi çok değişkenli bir işlevi göstermekte,  $w_j$  ve  $w_k$  ise bölüm 2' de anlatılan ve (2.64) ile verilen eşitlikteki taban vektörlerinin dolaysız çarpımlarından oluşmaktadır. Bu durumda değişmezlik ölçeni

$$\sigma_0 = \frac{(\alpha^T \mathbf{F}^{(1,n)} \alpha)^2}{\alpha^T \mathbf{F}^{(2,n)} \alpha} \quad (3.48)$$

olarak yazılabilir ve bu yapıya sendelenimsizlik yaklaşırımı uygulanacak olursa (2.49) bağıntısı kullanılarak aşağıdaki yaklaşırım elde edilir.

$$\sigma_0 \approx \frac{(\alpha^T f(\mathbf{X}_1^{(n_1)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(n_N)}) \alpha)^2}{\alpha^T f(\mathbf{X}_1^{(n_1)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(n_N)})^2 \alpha} \quad (3.49)$$

Bundan sonra izgesel ayrıştırım (ing: Spectral Decomposion) kullanılarak yola devam edilecektir. Bunun için bölüm 2'de çok değişkenli işlevler için sendelenimsizlik yaklaşırımı konusu içerisinde (2.66) ile verilen denklem gözönünde bulundurulursa değişmezlik ölçeni  $\sigma_0$  elde edilebilecektir. Kısaca izlenecek yol şöyle özetlenebilir:

$N$  bağımsız değişkene bağlı bir  $f(x_1, \dots, x_N)$  analitik işlevi ile çalışıldığı düşünülürse, her birinin boyutu  $n_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) olan ve  $X_k$  ile gösterilen ve her bir bağımsız değişkenin matris gösterilimi olan,  $N$  tane matrise ait özdeğer özvektör probleminin çözülmesi gerekmektedir. Bu halde değişmezlik ölçenini sendelenimsizlik limitinde 1'e yaklaştıran  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N$  tane özvektör elde edilmiş olur. Bundan sonra eniyilenmiş ağırlık işlevinin bulunabilmesi için yapılması gereken işlem bu özvektörlerin seçimidir ki bu da yine bir önceki bölümde verildiği gibi sınama yoluyla gerçekleştirilecektir.

Bu yöntemin çok değişkenli işlevler için de oldukça etkin çalıştığının gösterilebilmesi amacıyla sayısal örnekler oluşturulmuştur. Bu örnekler bir sonraki alt bölümde sunulmaktadır.

### 3.2.1 Sayısal uygulamalar

Bu bölümde, çok değişkenli işlevler için YBMG yöntemine ait eniyilenmiş ağırlık işlevini belirlemek ve yöntemin çok değişkenli işlevler için de etkin bir biçimde çalıştığını gösterebilmek amacıyla birtakım sayısal örnekler verilmektedir.

Aşağıda verilen ilk işlev için eniyilenmiş ağırlık işlevinin nasıl bulunduğu ayrıntılı olarak anlatılacak daha sonraki uygulamalarda ise doğrudan sonuçlar verilecektir.

#### 3.2.1.1 Uygulama – 1

Burada seçilen ilk uygulama 2 değişkene bağlı çarpımsal yapıda olan aşağıda verilen işlevdir.

$$f(x_1, x_2) = e^{(x_1 + x_2)} \quad (3.50)$$

Bu örnek için  $[-1, 1]$  aralığı kullanılmıştır. Burada amaç, verilen aralıkta işlevi en iyi biçimde temsil edebilecek olan yaklaşıtırm işlevini bulmaktır. Bunun için de değişmezlik ölçenini enbüyükleyen, eniyilenmiş ağırlık işlevini bulmak gerekmektedir. Bu amaçla verilen işlev için eniyilenmiş ağırlık işlevini bulmaya yönelik adımlar aşağıda verilmektedir.

Burada eniyilenmiş ağırlık işlevini elde edebilmek için öncelikle her bir bağımsız değişkenin matris gösterilimini bulmak gerekmektedir. Bu nedenle bu örnekte  $\mathbf{X}_1^{(n_1)}$  ve  $\mathbf{X}_2^{(n_2)}$  matrislerinin hesaplanması gerekmektedir. Burada  $n_1$  ve  $n_2$  sırasıyla  $x_1$  bağımsız değişkeninin matris gösterilimi olan  $\mathbf{X}_1$  ve  $x_2$  bağımsız değişkeninin matris gösterilimi

olan  $\mathbf{X}_2$  matrislerinin boyutunu göstermektedir. Boyutların eşit alınması gerekmemekle birlikte eşit alınmasında sakınca da yoktur.

Bu matrislerin bulunmasından sonra her bir matrise ait özdeğer ve onlara karşı gelen özvektörler hesaplanır. Dolayısıyla birinci matris için  $n_1$  sayıda, ikinci matris için  $n_2$  sayıda özdeğer ve karşı gelen özvektör elde edilmiş olur. Bu aşamadan sonra (2.66) ile verilen bağıntıyı hesaplayabilmek amacıyla (2.67)'de verilen ve özvektörlerin dolaysız çarpımının bulunması işlemine geçilir. Bu işlemin sonunda  $n_1 * n_2$  sayıda  $n_1 * n_2$  boyutlu vektör elde edilir.

Bir sonraki aşama  $\sigma_0$  değişmezlik ölçeninin değerlerinin bu vektörler kullanılarak hesaplanmasıdır ki, bu şekilde  $n_1 * n_2$  sayıda  $\sigma_0$  değerleri elde edilir. Bu değerlerden en büyüğü işaretlenir ve işaretlenen değeri oluşturan  $n_1 * n_2$  boyutlu vektör kullanılarak ağırlık işlevi oluşturulur. Ancak tek değişkenli işlevler için kullanılan yöntemden farklı olarak  $\sigma_0$  değerini enbüyükleyen  $n_1 * n_2$  boyutlu vektörü dolaysız çarpım yoluyla oluşturmuş olan özvektörler dikkate alınır. Bu özvektörlerden ilki  $\mathbf{X}_1$  matrisine, ikincisi ise  $\mathbf{X}_2$  matrisine aittir.  $\mathbf{X}_1$  matrisine ait olan özvektör kullanılarak ağırlık işlevinin  $W_1(x_1)$  bileşeni,  $\mathbf{X}_2$  matrisine ait olan özvektör kullanılarak ağırlık işlevinin  $W_2(x_2)$  bileşeni (3.1) bağıntısı kullanılarak bulunur. Burada  $W_1(x_1)$  ve  $W_2(x_2)$  bileşenleri (2.2) ile verilmiş bağıntı kullanılarak YBMG'nin ağırlık işlevini oluştururlar ve yapılan hesaplamalar sonucunda eniyilenmiş ağırlık işlevi bileşenleri  $n_1 = 8$ ,  $n_2 = 8$  için aşağıdaki gibi elde edilir.

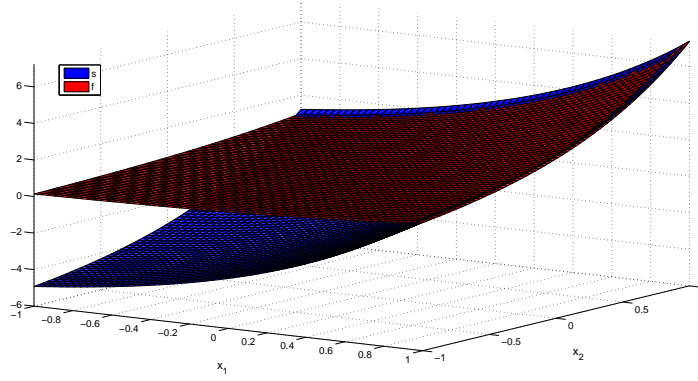
$$\begin{aligned}
 W_1(x_1) = & (9.918237879 x_1^7 + 9.524382432 x_1^6 - 9.367876187 x_1^5 \\
 & - 8.995875217 x_1^4 + 2.042531522 x_1^3 + 1.96142175 x_1^2 \\
 & - 0.05849917961 x_1 - 0.05617611115)^2 \\
 W_2(x_2) = & (9.918237879 x_2^7 + 9.524382432 x_2^6 - 9.367876187 x_2^5 \\
 & - 8.995875217 x_2^4 + 2.042531522 x_2^3 + 1.96142175 x_2^2 \\
 & - 0.05849917961 x_2 - 0.05617611115)^2
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Bulunan bu ağırlık işlevleri kullanılarak değişmez YBMG terimi ve birli YBMG terimleri hesaplanabilir. Yukarıda verilen ağırlık işlevleri için elde edilmiş sıfıncı ve birinci basamaktan YBMG yaklaşımları hesaplanırsa

$$s_0 = 6.848953285 \tag{3.52}$$

**Çizelge 3.3:**  $e^{(x_1+x_2)}$  için sendelenimsizlik yaklaşımı ile  $\sigma_0$  ve değişmez YBMG terimi ( $f_0$ ) değerleri.

Boyut	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 4$	$n_1 = 5$	$n_1 = 8$
	$n_2 = 4$	$n_2 = 4$	$n_2 = 5$	$n_2 = 6$	$n_2 = 8$
$\sigma_0$	0.953311261	0.969417882	0.976188742	0.98631914	0.9953495042
$f_0$	5.312109611	5.72519444	5.959262874	6.352573376	6.848953285



**Şekil 3.12:**  $e^{(x_1+x_2)}$  işlevi ve elde edilen YBMG yaklaşımını ( $s_1(x_1, x_2)$ ).

ve

$$s_1(x_1, x_2) = 2.617049694 e^{x_1} + 2.617049694 e^{x_2} - 6.848953285 \quad (3.53)$$

şeklinde elde edilirler.

Çizelge 3.3 sayısal uygulamanın sınama işlevi olan  $e^{(x_1+x_2)}$  işlevinin farklı  $n_1$  ve  $n_2$  değerinde değişmezlik ölçeni,  $\sigma_0$  ve sabit terim,  $f_0$ 'ın aldığı değerleri göstermektedir. Çizelgeden açıkça görüldüğü gibi  $n_1$  ve  $n_2$  değerleri arttıkça  $\sigma_0$  değeri 1'e yaklaşmaktadır. Dolayısıyla yaklaşımın niteliği artmaktadır.

Şekil 3.12, bu yaklaşım ile sınama işlevinin yapılarının karşılaştırılmasını sağlamaktadır. Şekilde de görüldüğü gibi sınama işlevi her ne kadar çarpımsal yapıda olsa da elde edilen yaklaşım oldukça başarılıdır. Ağırlık işlevinin eniyilenmesi ile YBMG yönteminin etkinliği artırılabilmiş ve en çok tek değişkenli YBMG terimleri kullanılarak etkin bir yaklaşıma ulaşılması gerçekleştirilmiştir.

### 3.2.1.2 Uygulama – 2

Bölümün ikinci sayısal uygulamasını oluşturmak üzere sınama işlevi olarak

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2} \quad (3.54)$$

**Çizelge 3.4:**  $e^{x_1} + e^{x_2}$  için sendelenimsizlik yaklaşımını ile  $\sigma_0$  ve değişmez YBMG terimi ( $f_0$ ) değerleri.

Boyut	$n_1 = 3$ $n_2 = 4$	$n_1 = 3$ $n_2 = 5$	$n_1 = 4$ $n_2 = 4$	$n_1 = 5$ $n_2 = 6$	$n_1 = 8$ $n_2 = 8$
$\sigma_0$	0.9883265697	0.9903994766	0.9922352793	0.9965750437	0.9988346708
$f_0$	4.612834637	4.710659159	4.78547571	5.041220587	5.234101008

seçilmiş ve her bir bağımsız değişken için tanım aralığı da yine  $[-1,1]$  şeklinde belirlenmiştir. Uygulama – 1’de ayrıntılı olarak anlatılan işlemler bu uygulama için de yinelenmiş ve eniyilenen ağırlık işlevinin bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
 W_1(x_1) &= 1.572702218 x_1^3 + 1.354310987 x_1^2 - 0.1817841048 x_1 - 0.156540893 \\
 W_2(x_2) &= 1.572702218 x_2^3 + 1.354310987 x_2^2 - 0.1817841048 x_2 - 0.156540893
 \end{aligned}
 \tag{3.55}$$

Bu ağırlık işlevi bileşenleri  $n_1 = 4$  ve  $n_2 = 4$  değerleri için elde edilmiştir. Sınama işlevinin yapısı tam toplamsallık özelliği taşıdığından aslında ağırlık işlevinin yapısı ne olursa olsun birinci mertebeden YBMG yaklaşımını aracılığıyla kesin gösterilime ulaşılacağı açıktır. Bu uygulama böyle durumlar için de eniyileme algoritmasının nasıl davrandığı hakkında okuyuculara bir fikir vermesi açısından hazırlanmıştır.

Dolayısıyla eniyileme sonucunda elde edilen YBMG yaklaşımının yapısı

$$s_1(x_1, x_2) = 1.0 e^{x_1} + 1.0 e^{x_2}
 \tag{3.56}$$

şeklinde elde edilebilmektedir.

Gerçekleştirilen eniyileme sonucunda elde edilen değişmezlik ölçeni ve değişmez YBMG terimi değerleri ise Çizelge 3.4 ile verilmiştir. Bu çizelgede bulunan herhangi bir değişmez YBMG terimi kullanılarak yöntemin ilerleyen adımlarında elde edilecek olan birli YBMG terimleri ile birleştirilerek (3.56) ile verilen ve kesin sonuca karşılık gelen birinci basamaktan YBMG yaklaşımına ulaşılır.

Bu bölüm için hazırlanan sayısal uygulamalar yöntemin işleyişinin rahat gözlemlenebilmesi açısından 2 bağımsız değişkene sahip sınama işlevlerini kapsıyordu. Bölümün son örneği olarak ise, 3 bağımsız değişkenli bir sınama işlevi seçilecektir.

### 3.2.1.3 Uygulama – 3

Üçüncü sayısal uygulamaya ait sınama işlevi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) e^{(x_1 + x_2 + x_3)}
 \tag{3.57}$$

şeklinde seçilmiş ve her bir bağımsız değişken için tanım aralığı da yine [-1,1] şeklinde belirlenmiştir.

Bu uygulamada işlevin bağımsız değişkenleri için oluşturulan sendelenim matrislerinin boyutları sırasıyla  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 3$  ve  $n_3 = 3$  olarak kullanılmıştır.

Bu matrisler aracılığıyla eniyilenen ağırlık işlevinin bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned} W_1(x_1) &= 1.25 x_1^4 - 1.936491673 x_1^3 + 0.75 x_1^2 \\ W_2(x_2) &= 1.25 x_2^4 - 1.936491673 x_2^3 + 0.75 x_2^2 \\ W_3(x_3) &= 1.25 x_3^4 - 1.936491673 x_3^3 + 0.75 x_3^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Gerçekleştirilen eniyileme sonucunda elde edilen değişmezlik ölçeni

$$\sigma_0 = 0.9208855991 \quad (3.59)$$

ve değişmez YBMG terimi

$$f_0 = -0.2253462794 \quad (3.60)$$

olarak hesaplanmıştır.

Eniyileme sonucu oluşturulan ağırlık işlevinin kullanılması ile beraber birinci mertebeden YBMG yaklaşımının bu uygulamada verilen sınama işlevi için elde edilen yapısı ise,

$$\begin{aligned} s_1(x_1, x_2, x_3) &= (0.2295963195 x_1 - 0.3135282455) e^{x_1} \\ &+ (0.2295963195 x_2 - 0.3135282455) e^{x_2} \\ &+ (0.2295963195 x_3 - 0.3135282455) e^{x_3} \end{aligned} \quad (3.61)$$

şeklindedir. Bu yaklaşımın başarısını ölçmek amacıyla ilk iki örneğin aksine burada aşağıdaki gibi bir bağıl hata analizi yapılmış ve

$$\frac{\|f - s_1\|}{\|f\|} = 0.050 \quad (3.62)$$

sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç gerçek analitik yapıya %5'lik bir hata oranıyla yaklaşım yapılabildiğini göstermektedir.



### 3.2.1.4 Uygulama – 4

Dördüncü ve son uygulamaya ait işlev aşağıda verilmektedir.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3) \quad (3.63)$$

Bağımsız değişkenler için tanım aralığı  $[-1, 1]$  şeklinde belirlenmiştir.

Bu uygulamada işlevin bağımsız değişkenleri için oluşturulan sendelenim matrislerinin boyutları sırasıyla  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 2$  ve  $n_3 = 2$  olarak kullanılmıştır.

Bu matrisler aracılığıyla eniyilenen ağırlık işlevinin bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned} W_1(x_1) &= 0.75 x_1^2 - 0.8660254038 x_1 + 0.25 \\ W_2(x_2) &= 0.75 x_2^2 - 0.8660254038 x_2 + 0.25 \\ W_3(x_3) &= 0.75 x_3^2 - 0.8660254038 x_3 + 0.25 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Gerçekleştirilen eniyileme sonucunda elde edilen değişmezlik ölçeni ve değişmez YBMG terimi

$$\sigma_0 = 0.921104377 \quad (3.65)$$

ve değişmez YBMG terimi

$$f_0 = -0.8087776646 \quad (3.66)$$

ile birinci mertebeden YBMG yaklaşımı

$$\begin{aligned} s_1(x_1, x_2, x_3) &= 0.3354126538 (\sin(x_1) + \sin(x_2) + \sin(x_3)) \\ &\quad - 0.8131690683 (\cos(x_1) + \cos(x_2) + \cos(x_3)) + 1.617555329 \end{aligned} \quad (3.67)$$

olarak hesaplanmıştır.

Bu yaklaşımın başarısı yine bağıl hata analizi yapılarak ölçülmüş ve

$$\frac{\|f - s_1\|}{\|f\|} = 0.042 \quad (3.68)$$

sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç YBMG yaklaşımındaki hatanın yaklaşık %4 olduğunu göstermektedir.



#### 4. SAPTIRIM AÇILIMI YÖNTEMİ İLE AĞIRLIK ENİYİLEMESİ

Bilindiği gibi bu tez çalışması YBMG yöntemlerinin etkin bir biçimde çalışabilmesi için eniyilenmiş ağırlık işlevinin bulunabilmesini ve bu ağırlık işlevi kullanılarak YBMG terimlerinin ve buna bağlı olarak YBMG yaklaşımlarının elde edilmesini amaçlamaktadır. Bu amaçla bu bölümde eniyileme denklemlerinin elde edilmesi ve elde edilen eniyileme denklemlerinin saptırım açılımı yöntemi kullanılarak çözülmesi hedeflenmektedir.

Bir önceki bölümde de verildiği gibi elde edilen eniyileme denklemleri doğrusal olmayan yapı taşımakta olduğundan yüksek boyutlara genelleştirmede kapsamı artan zorluklar getirmektedir. Bu zorlukların aşılabilmesi amacı ile saptırım açılımı yöntemi kullanılarak 3 farklı yol izlenilmiş ancak bunların sonucunda istenilen hedefe ulaşılabilmektedir.

Bu bölüm içerisinde, başarılı olan son yol anlatılacak, ancak başarısız olan ilk ikisinde nasıl yollar izlendiği ve neden başarısız olduğu konusunda sözel olarak bir anlatım gerçekleştirilecektir.

Bunlardan birincisinde, özdeğer sorusunda gözüken ve ayrı bir bağıntı ile bir Rayleigh oranı üzerinden tanımlanan bir büyüklüğün öngörülen bir değeri baskın değer olarak seçilmiş ve bu büyüklüğün bu değerden sapmasının başına bir saptırım parametresi konularak parametrelili bir denklem takımı üretilmiştir. Bundan sonra, bilinmeyen tüm büyüklükler bu parametrenin üslüleri üzerinden sonsuz doğrusal birleştirmeler ile yani Maclaurin serileri ile anlatılmıştır. Böyle yapılmakla, bilinmeyenlerin parametrenin 0 değerinde sonlu değerler aldığı ve, değişkenin karmaşık düzleminde, onun merkez olarak alındığı ve 1'den büyük yarıçaplı bir disk içinde yakınsak oldukları varsayılmaktadır. Yarıçapın 1'den büyük seçilmesinin nedeni yapay olarak denklemlere yerleştirilen parametrenin 1 değerini aldığı eldeki asıl denkleme dönülmesinin istenmesi ve bunun için de 1'de yakınsaklık gereksinimidir. Bu tür saptırım açılımları Neumann açılımları olarak da bilinir. Bu serisel açılımlar ilgili denklemlerde yerine konulduktan sonra, her bir denklem saptırım parametresinin üslüleri türünden tek bir

serinin sıfıra eşitlendiği yapıya getirilmektedir. Daha sonra, bu eşitlikler, katsayıların saptırım parametresine bağlı olmadıkları öngörüldüğünden, saptırım parametresinin her bir üslüsünün katsayısının ayrı ayrı sıfıra eşit kılınmasıyla, saptırım açılımları katsayıları olan büyüklükler arasında özyineli (ing: recursive) ilişkiler kurulmaktadır. Daha sonra, bunlar, uygun eşsizleştirme (ing: normalization, unification) işlemleriyle çözülmeye çalışılmaktadırlar. Ancak, burada, doğrusal olmamanın getirdiği tüm olumsuzluklarla karşılaşmış, yakınsaklık tam olarak güvence altına alınamamıştır. Yani, saptırım parametresinin gündemde olan tüm değerlerini kapsayacak düzeyde bir yakınsaklık elde edilemediği gibi kısıtlı değer kümeleri üzerinde elde edildiğinde de çok sayıda saptırım katsayısının devreye sokulmasının gerekebileceği anlaşılmıştır. Oysa ki, bir çok alandaki saptırım açılımı uygulamalarında, ilk bir kaç terimle yetinilmek istenilir. Bütün bunlar, bu yol kullanılarak ilerlemek için gösterilen çabaların durdurulmasının ve baska arayışlara girişilmesinin daha yerinde olacağı kararının alınmasına neden olmuştur.

İkinci yolda ise, yapay bir saptırım parametresi kullanılmamaktadır. Özdeğer sorununa parametre olarak giren ve aslında, özdeğer sorununun bilinmeyen vektörüyle kurulmuş bir Rayleigh oranı olarak tanımlanan parametrenin öngörülen bir değerden sapması saptırım parametresi olarak kullanılmaktadır. Bu durumda, Rayleigh oranıyla tanımlanan o parametrenin tanım denklemi gözönüne alınmamakta ve bilinmeyen özdeğer ve özvektörler bu parametreye bağlı saptırım serileri olarak elde edilmektedirler. Bu işlem sona erdiğinde, özvektör için elde edilen anlatım saptırım parametresine taban olan ve sözü edilen Rayleigh oranı olarak tanımlanan yapıda yerine konularak bir yanda parametrenin kendisi, diğer yanda ona bağımlı olan bir Rayleigh oranının içerildiği bir denklem elde edilir. Bu denklem, oransal bir işlevle doğrusal, ya da duruma göre çokterimli olabilen bir işlevin keşif noktasını belirleme sorunu gibi de yorumlanabilir ve birden çok çözüm üretebilecek yapıdadır. Ancak, özdeğer sorununun saptırım açılımıyla burada kullanılacak olan çözümün serisel olması işleri çok zorlaştırmaktadır ve bir anlamda özdeğer sorununda analitik çözüm bulunmasını gerektirmektedir. Öyle yapılmazsa, sayısal yinelemeli işlemler hem çok kapsamlı işlem gerektirmekte, hem güvenilir sonuç üretmeyebilmekte, hem de olayın kuramsal tabanını iyice anlamamızı zorlaştırabilmektedir. Özdeğer sorununa analitik çözüm getirebilmek yani özdeğer ve özvektörün parametreye olan bağımlılığının analitik yapısını bir atakla elde edebilmek neredeyse olanaksızdır. Bu durum, aslında,

olabildiğince kolay yapıda tasarlanmak istenen ağırlık eniyileme işleminin tüm albenisini yok edebilecek nitelik taşımaktadır. Bununla birlikte, saptırım açılımının da, bütünsel bir yakınsaklık elde edilmesine olanak vermeyeceği, yani, parametrenin (belirlenebilen) değişim aralığı içinde her yerde yakınsak olan tek bir saptırım açılımı oluşturulmasının pek olanaklı görünmediği anlaşılmıştır. Söz konusu parametrenin değişim aralığının değişik alt kesimlerinde ayrı ayrı geçerli olan açılımların ise, işlemlerin çokluk düzeyini çok çok arttıracacağı ve bunun da geliştirilmekte olan yöntemin tüm çekiciliğini yok edebileceği tasasına kapılmıştır. Böylece, bu amaçla birinci yol için olduğu gibi bu ikinci yol için de uğraşların durdurulmasının yerinde olacağı yargısına varılmıştır.

Üçüncü ve son yol olarak Rayleigh oranı üzerinden tanımlanan bir sendelenim matrisi bir saptırım parametresi ile çarpılarak bir denklem takımı üretilmiş ve üretilen bu denklem takımı çözülmüştür. Bu yol kullanılarak ilk bir kaç terimde oldukça iyi sonuçlar elde edilmiş ve iyi bir başarı yakalanabilmiştir. Bu yöntemin izlenmesi gereken adımları ve yöntemin veriminin ölçülebilmesi için yapılan sayısal uygulama bu bölümde verilmektedir.

Bu yolu izleyebilmek için ağırlık işlevi (3.1) ile verilen ve Hilbert uzayı içerisinde kalan bir altuzay ve bu uzayı örten dik bir taban takımından oluşturulan işlevlerin doğrusal birleştirimi olarak seçilmiştir.

Eğer yukarıda verilen ağırlık işlevi daha önce yapıldığı gibi değişmezlik ölçeninin hesaplanmasında kullanılacak olursa

$$\sigma_0 = \frac{\left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \alpha_k \int_a^b dx w_j(x) w_k(x) f(x) \right)^2}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \alpha_k \int_a^b dx w_j(x) w_k(x) f(x)^2} \quad (4.1)$$

anlatımı elde edilir. Bu aşamada ağırlıkların verilen aralıkta integralinin 1 olma koşulu yani integral birimleme (ing: normalization) koşulu kullanılmalıdır. Yalnız burada vurgulanması gereken önemli nokta ağırlık işlevlerinin dik bir taban oluşturan işlevlerden oluşmuş olması nedeniyle ağırlıkların iççarpımlarının Kronecker deltası ( $\delta_{jk}$ ) olması sağlanacaktır. İntegral birimleme koşulunu kullanırsak,

$$\int_a^b dx \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k w_j(x) w_k(x) = 1 \quad (4.2)$$

ve yukarıda belirtilen

$$\int_a^b dx w_j(x) w_k(x) = \delta_{jk} \quad 1 \leq j, k \leq m \quad (4.3)$$

diklik özelliği kullanılırsa,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 = 1 \quad (4.4)$$

sonucuna ulaşırız. Buradan yine ağırlıkların eniyilenmesi amacıyla amaç işlevimsisi (ing: cost functional) yazılmalıdır. Bu işlevsiyi yazabilmek için (4.1) ile verilen denklemde

$$a_{jk}^{(1)} = \int_a^b dx w_j(x) w_k(x) f(x) \quad a_{jk}^{(2)} = \int_a^b dx w_j(x) w_k(x) f(x)^2 \quad (4.5)$$

kısaltmaları yapılarak amaç işlevsisi

$$J(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \lambda) = \frac{\left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k a_{jk}^{(1)} \right)^2}{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k a_{jk}^{(2)}} + \lambda \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 - 1 \right) \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır. Eniyileme denklemlerinin elde edilebilmesi için bu işlevsinin  $\lambda$  ve  $\alpha_i$  bağımsız değişkenlerine göre türevleri alınmalıdır.

$$\frac{\partial J(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 - 1 \quad (4.7)$$

$\lambda$  bağımsız değişkenine göre türev yukarıdaki gibi elde edilir.  $\alpha_i$  bağımsız değişkenlerine göre türevler bir takım ara işlemlerden sonra

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \lambda)}{\partial \alpha_i} &= \frac{4 \sum_{k=1}^m \alpha_k a_{ik}^{(1)} \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k a_{jk}^{(1)} \right)}{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k a_{jk}^{(2)}} \\ &\quad - \frac{2 \alpha_k a_{ik}^{(2)} \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k a_{jk}^{(1)} \right)^2}{\left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k a_{jk}^{(2)} \right)^2} + 2 \lambda \alpha_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

olarak anlatılabilirler. Burada, daha önceden yapıldığı gibi, daha sonra yapılacak olan işlemleri kısaltmak amacıyla, aşağıda verilen simgeleme ya da tanım yapılabilir.

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k a_{jk}^{(1)}}{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k a_{jk}^{(2)}} \quad (4.9)$$

Bu kısaltma gözönüne alınarak amaç işlevimsisinin  $\lambda$  ve  $\alpha_i$  bağımsız değişkenlerine göre türevleri sıfıra eşitlenirse,

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j^2 = 1 \quad (4.10)$$

$$-2\mu \sum_{k=1}^m \alpha_k a_{ik}^{(1)} + \mu^2 \sum_{k=1}^m \alpha_k a_{ik}^{(2)} = \lambda \alpha_i \quad (4.11)$$

denklemleri elde edilir. (4.9) ve (4.11) matris türünden ifade etmek istenirse,

$$\mathbf{M}_n(\hat{f})_{jk} = (w_j, f w_k), \quad \mathbf{M}_n(\hat{f}^2)_{jk} = (w_j, f^2 w_k), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (4.12)$$

olmak üzere değişmezlik ölçeni

$$\sigma_0 = \frac{(\alpha^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) \alpha)^2}{\alpha^T \mathbf{M}_n(\hat{f}^2) \alpha} \quad (4.13)$$

ve  $\mu$  ise

$$\mu = \frac{\alpha^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) \alpha}{\alpha^T \mathbf{M}_n(\hat{f}^2) \alpha} \quad (4.14)$$

olarak yazılabilir. (4.11) ile verilen ana denklem de (4.12) ile verilen ilişkiden yararlanılarak matris türünden ifade edilirse,

$$-2\mu \mathbf{M}_n(\hat{f}) \alpha + \mu^2 \mathbf{M}_n(\hat{f}^2) \alpha = \lambda \alpha \quad (4.15)$$

biçimine gelecektir. Bu denklem bir özdeğer problemidir. Buradan ilerleyebilmek için bu özdeğer denkleminin çözümüne geçilmelidir. Bu amaçla denklem  $\mu$ 'ye bölünür ve  $\frac{\lambda}{\mu}$  ifadesi yerine  $\bar{\lambda}$  ifadesi kullanılırsa

$$-2\mathbf{M}_n(\hat{f}) \alpha + \mu \mathbf{M}_n(\hat{f}^2) \alpha = \bar{\lambda} \alpha \quad (4.16)$$

anlatımı elde edilir.  $\mu$  anlatımı elde edilen son denklemde yerine konulur ve sol taraftan  $\alpha^T$  ile çarpılarak yeniden düzenlenirse, denklem

$$-\alpha^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) \alpha = \bar{\lambda} \alpha^T \alpha \quad (4.17)$$

şekline gelir. Burada  $\alpha^T \alpha = 1$  olduğu dikkate alınır ve  $\bar{\lambda}$  anlatımı yerine konulursa  $\lambda$  değeri

$$\lambda = -\frac{(\alpha^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) \alpha)^2}{\alpha^T \mathbf{M}_n(\hat{f}^2) \alpha} = -\sigma_0 \quad (4.18)$$

olarak bulunur. Bu sonuç da gözönünde bulundurularak aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$\mathbf{M}_n \left( \widehat{f}[\mathbf{I} - \mathbf{P}^{(n)}] \widehat{f} \right) = \mathbf{M}_n(\widehat{f}^2) - \mathbf{M}_n(\widehat{f})^2 \quad (4.19)$$

$n$ -boyutlu alt uzay içerisindeki sendelenim matrisi bir  $\varepsilon$  parametresi ile çarpılarak işin içine sokulur ve (4.15) denklemi yeniden yazılırsa,

$$-2\mu \mathbf{M}_n(\widehat{f}) \alpha + \mu^2 \mathbf{M}_n(\widehat{f})^2 \alpha + \varepsilon \mu^2 \mathbf{M}_n \left( \widehat{f}[\mathbf{I} - \mathbf{P}^{(n)}] \widehat{f} \right) \alpha = \lambda \alpha \quad (4.20)$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem saptırım açılımı uygulanacak şekilde yeniden yapılandırılırsa

$$\begin{aligned} 2\mu(\varepsilon) \mathbf{M}_n(\widehat{f}) \alpha(\varepsilon) - \mu(\varepsilon)^2 \mathbf{M}_n(\widehat{f})^2 \alpha(\varepsilon) - \varepsilon \mu(\varepsilon)^2 \mathbf{M}_n \left( \widehat{f}[\mathbf{I} - \mathbf{P}^{(n)}] \widehat{f} \right) \alpha(\varepsilon) \\ = \sigma_0(\varepsilon) \alpha(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.21)$$

şeklini alır. Yine (4.14) ile verilen denklem de aynı şekilde sendelenim matrisi, bir  $\varepsilon$  saptırım parametresi ile çarpılarak denkleme eklenecek biçimde yeniden yazılırsa

$$\mu(\varepsilon) = \frac{\alpha(\varepsilon)^T \mathbf{M}_n(\widehat{f}) \alpha(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)^T \mathbf{M}_n(\widehat{f})^2 \alpha(\varepsilon) + \varepsilon \alpha(\varepsilon)^T \mathbf{M}_n(\widehat{f}[\mathbf{I} - \mathbf{P}^{(n)}] \widehat{f}) \alpha(\varepsilon)} \quad (4.22)$$

denklemine ulaşılır. Denklem düzenlenerek yeniden yapılandırılırsa

$$\mu(\varepsilon) \alpha(\varepsilon)^T \mathbf{M}_n(\widehat{f})^2 \alpha(\varepsilon) + \varepsilon \alpha(\varepsilon)^T \mathbf{M}_n(\widehat{f}[\mathbf{I} - \mathbf{P}^{(n)}] \widehat{f}) \alpha(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon)^T \mathbf{M}_n(\widehat{f}) \alpha(\varepsilon) \quad (4.23)$$

şekline gelir. Son olarak  $\alpha$ ,  $\mu$  ve  $\sigma_0$  anlatımları saptırım açılımı yöntemi kullanılarak

$$\alpha(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon^i, \quad \mu(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \varepsilon^i, \quad \sigma_0(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_0^{(i)} \varepsilon^i \quad (4.24)$$

şeklinde yazılır ve (4.21) ile (4.23) denklemlerinde yerine yerleştirilirse bu denklemler için bir saptırım açılımı elde edilmiş olur. Hemen yukarıda (4.24) ile  $\varepsilon'$  a bağlı olarak verilen anlatımlar sonlu bir  $m$  değerinde kesilirse  $m + 1$  sayıda denklem elde edilir. Burada yapılan kesme aynı zamanda saptırım açılımının derecesi belirler. Yani  $m$ . basamaktan saptırım açılımı yapılmış olur. Bu durumda (4.24)

$$\alpha^{(m)}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \varepsilon^i, \quad \mu^{(m)}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^m \mu_i \varepsilon^i, \quad \sigma_{0,m}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^m \sigma_0^{(i)} \varepsilon^i \quad (4.25)$$

biçiminde simgelenebilir. Burada verilen anlatımlar (4.21) ve (4.23) denklemlerine yerleştirilirse her bir denklem için ayrı ayrı  $m + 1$  sayıda denklem oluşacaktır.

Saptırım açılımı yapılırken genel eğilim  $m$  sayısını çok yukarılara tırmandırmadan 2, 3 ya da 4 gibi küçük sayılar almaktır. Aksi durumda hesaplama karmaşıklığının çok fazla



artmasına neden olunabilir ki, bu mühendislik problemlerinde istenmeyen bir durumdur. Bu durumda, (4.21) ile verilen özdeğer denkleminde (4.25) yerine yerleştirilir ve  $m = 2$  olarak alınırsa

$$2\mu_0\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_0 - \mu_0^2\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 = \sigma_0^{(0)}\alpha_0 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} &2\mu_0\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_1 + \mu_1\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_0 - \mu_0^2\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_1 - 2\mu_0\mu_1\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 - \mu_0^2\mathbf{M}_n(\hat{F})\alpha_0 \\ &= \sigma_0^{(0)}\alpha_1 + \sigma_0^{(1)}\alpha_0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} &2\mu_0\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_2 + \mu_1\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_1 + 2\mu_2\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_0 - \mu_0^2\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_2 - 2\mu_0\mu_1\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_1 \\ &- \mu_1^2\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 - 2\mu_0\mu_2\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 - \mu_0^2\mathbf{M}_n(\hat{F})\alpha_1 - 2\mu_0\mu_1\mathbf{M}_n(\hat{F})\alpha_0 \\ &= \sigma_0^{(0)}\alpha_2 + \sigma_0^{(1)}\alpha_1 + \sigma_0^{(2)}\alpha_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

ifadelerine ulaşılır. Bu denklemlerde kısaltma amacıyla  $\mathbf{M}_n(\hat{f}[\mathbf{I} - \mathbf{P}^{(n)}]\hat{f})$  anlatımı  $\mathbf{M}_n(\hat{F})$  olarak yazılmıştır. Aynı işlemler (4.23) ile verilen denklem için de tekrarlanırsa elde edilen denklemler ise

$$\mu_0\alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 = \alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_0 \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} &\mu_0\alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_1 + \mu_0\alpha_1^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 + \mu_1\alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 + \alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{F})\alpha_0 \\ &= \alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_1 + \alpha_1^T\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} &\mu_0\alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_2 + \mu_0\alpha_1^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_1 + \mu_0\alpha_2^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 + \mu_1\alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_1 \\ &+ \mu_1\alpha_1^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 + \mu_2\alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{f})^2\alpha_0 + \alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{F})\alpha_1 + \alpha_1^T\mathbf{M}_n(\hat{F})\alpha_0 \\ &= \alpha_0^T\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_2 + \alpha_1^T\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_1 + \alpha_2^T\mathbf{M}_n(\hat{f})\alpha_0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

olarak yazılabilir. Bu aşamadan sonra bu denklemlerin çözümüne geçilmeli ve  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \sigma_0^{(0)}, \sigma_0^{(1)}$  ve  $\sigma_0^{(2)}$  değerlerine ulaşılmalıdır.

İlk olarak (4.26) ve (4.29) ile verilen denklemlerin çözümü için  $n$  boyutlu  $\mathbf{M}_n$  matrisinin

$$\mathbf{M}_n(\hat{f})g_i = \gamma_i g_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.32)$$

denklemini sağladığını bir başka deyişle  $\gamma_i$ 'lerin bu matrisin özdeğerleri  $g_i$ 'lerin ise bu özdeğerlere karşı gelen özvektörler olduğu ve  $\alpha_0$  vektörünün bir önceki bölümde

verildiği gibi sendelenim matrisinin özdeğerlerinden birine eşit olduğu yani burada  $g_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) özvektörlerinden birine eşit olduğu varsayılırsa (4.29) ile verilen denklem

$$\mu_0 g_i^T \gamma_i^2 g_i = g_i^T \gamma_i g_i \quad (4.33)$$

biçimine gelir  $g_i^T g_i = 1$  olduğu gözönüne alınarak ilerlenirse

$$\mu_0 \gamma_i^2 = \gamma_i \rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\gamma_i} \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.34)$$

şeklinde  $\mu_0$ ,  $\mathbf{M}_n(\hat{f})$  matrisinin özdeğerlerinden birinin çarpmaya göre tersine eşit olarak bulunur. Yine (4.32) ile verilen denklemden ve  $\mu_0$  için bulunan sonuçtan yararlanılarak (4.26) ile verilen denklem yeniden yazılırsa

$$2 \frac{1}{\gamma_i} \gamma_i g_i - \frac{1}{\gamma_i^2} \gamma_i^2 g_i = \sigma_0^{(0)} g_i \rightarrow \sigma_0^{(0)} = 1 \quad (4.35)$$

$\sigma_0^{(0)}$  değeri de 1'e eşit olarak bulunur. Bundan sonra diğer bilinmeyenlerinde bulunması amacıyla (4.27) ve (4.30) ile verilen denklemlerin çözümüne geçilir ve yukarıda verilen yol bu denklemlerin çözümü içinde uygulanırsa, (4.27)'dan

$$\sigma_0^{(1)} = -\frac{1}{\gamma_i^2} g_i^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) g_i \quad (4.36)$$

ve (4.30)'den

$$\mu_1 = -\frac{1}{\gamma_i^2} g_i^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) g_i \quad (4.37)$$

olarak bulunur. Bundan sonra  $\alpha_1$ 'e ulaşabilmek için (4.27) kullanılır ve tüm  $\alpha_1$  bilinmeyenleri sol yanda toplanacak ve yukarıda bulunan tüm bilinmeyen değerleri yerine konulacak şekilde denklem yeniden yazılırsa

$$\left( \frac{2}{\gamma_i} \mathbf{M}_n(\hat{f}) - \frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{M}_n(\hat{f})^2 - \mathbf{I} \right) \alpha_1 = \frac{2}{\gamma_i^2} g_i^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) g_i \gamma_i g_i - \frac{2}{\gamma_i^3} g_i^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) g_i \gamma_i^2 g_i + \frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{M}_n(\hat{f}) g_i - \frac{1}{\gamma_i^2} g_i^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) g_i g_i \quad (4.38)$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirme işlemleri yapıldıktan sonra anlatım

$$\alpha_1 = \left( \frac{2}{\gamma_i} \mathbf{M}_n(\hat{f}) - \frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{M}_n(\hat{f})^2 - \mathbf{I} \right)^{-1} \left( \frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{M}_n(\hat{f}) g_i - \frac{1}{\gamma_i^2} g_i^T \mathbf{M}_n(\hat{f}) g_i g_i \right) \quad (4.39)$$

biçimine gelir. Buradan ilerleyebilmek için  $\left( \frac{2}{\gamma_i} \mathbf{M}_n(\hat{f}) - \frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{M}_n(\hat{f})^2 - \sigma_0^{(0)} \mathbf{I} \right)$  anlatımının tersinin bulunması gerekir ki, bu da Bölüm 2.3.1 içerisinde verilen yöntem kullanılarak başarılabilir. Bunun için

$$\left( \frac{2}{\gamma_i} \mathbf{M}_n(\hat{f}) - \frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{M}_n(\hat{f})^2 \right) g_k = \beta_k g_k \quad k = 1..n, \quad \mathbf{I} = \sum_{k=1}^n g_k g_k^T, \quad g_k^T g_k = 1 \quad (4.40)$$

ilişkilerinden yararlanılarak  $\left(\frac{2}{\gamma_i} \mathbf{M}_n(\hat{f}) - \frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{M}_n(\hat{f})^2 - \sigma_0^{(0)} \mathbf{I}\right)$  anlatımının değer uzayındaki tersi

$$\left(\frac{2}{\gamma_i} \mathbf{M}_n(\hat{f}) - \frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{M}_n(\hat{f})^2 - \sigma_0^{(0)} \mathbf{I}\right)_d^{-1} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(\beta_j - 1)} \left[ \frac{1}{\gamma_i^2} g_j^T \mathbf{M}_n(\hat{F}) g_i \right] g_j g_j^T \quad (4.41)$$

olarak bulunur. Bulunan bu anlatım (4.39) ile verilen denklemde kullanılırsa

$$\alpha_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{(\beta_j - 1) \gamma_i^2} \left( g_j^T \mathbf{M}_n(\hat{F}) g_i \right)^2 g_j \quad (4.42)$$

olarak bulunur. (4.31) denklemi çözüldüğünde ise  $\sigma_0^{(2)}$ , değeri

$$\sigma_0^{(2)} = 3\mu_1^2 \gamma_i - \frac{1}{\gamma_i^2} g_i^T \mathbf{M}_n(\hat{F}) \alpha_1 - \sigma_0^{(1)} g_i^T \alpha_1 \quad (4.43)$$

olarak elde edilir.  $\alpha_2$  değerleri ise yine (4.31) denklemi kullanılarak

$$\alpha_2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{(\beta_j - 1) \gamma_i^2} \left( g_j^T \mathbf{M}_n(\hat{F}) g_i \right) g_j \left[ \frac{1}{\gamma_i^2} g_j^T \mathbf{M}_n(\hat{F}) \alpha_1 + \frac{2}{\gamma_i} \mu_1 g_j^T \mathbf{M}_n(\hat{F}) g_i + \sigma_0^{(1)} g_j^T \alpha_1 \right] \quad (4.44)$$

şeklinde bulunacaktır. Burada bulunan değerler (4.25) ile verilen denklem kullanılarak ve  $\varepsilon$  değeri 1'e eşit alınarak verilen doğrusal olmayan problemin sonucuna ulaşılabilir.

Bir sonraki bölüm burada anlatılan kuramın uygulanabilirliğinin sayısal bir örnek üzerinde görülebilmesi için hazırlanmıştır.

## 4.1 Sayısal Uygulamalar

Verilen yöntemin etkinliğinin sayısal olarak da gösterilebilmesi için bu bölümde iki adet sayısal uygulama yapılmıştır. Bu uygulamalardan ilki bölüm 3.1.1.1 içerisinde verilen örnekle aynı seçilmiş böylece yöntemden elde edilen sonuçların bir önceki bölümde verilen yöntemde elde edilen sonuçlarla da karşılaştırılabilmesi sağlanmıştır.

### 4.1.1 Uygulama – 1

Bu uygulamada bölüm 3.1.1.1 içerisinde verilen

$$f = \sqrt{x+1}, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.45)$$

işlevi örnek olarak ele alınmıştır. Burada aralık karşılaştırma yapılabilmesi açısından  $[-1, 1]$  olarak alınmıştır.

Bu örneğe ilişkin hesaplama algoritmasına ait her adım aşağıda ayrıntılı olarak verilmiştir.

1. İlk olarak  $n = 3$  olarak seçilmiş ve taban işlevleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$w_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad w_2(x) = \frac{\sqrt{6}x}{2}, \quad w_3(x) = \frac{3\sqrt{10}(x^2 - \frac{1}{3})}{4} \quad (4.46)$$

2. (4.32) ile verilen denklem kullanılarak  $\gamma_i$  özdeğerleri ve onlara karşılık gelen  $g_i$  özvektörleri  $i = 1, 2, 3$  değerleri için aşağıda verilmiştir.

$$\gamma_1 = 1.327669153, \quad \gamma_2 = 0.9771259876, \quad \gamma_3 = 0.4207800884 \quad (4.47)$$

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 0.539066018 \\ 0.7167974794 \\ 0.4422772905 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 0.6816365406 \\ -0.06282368898 \\ -0.7289888961 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} 0.4947519123 \\ -0.6944455037 \\ 0.52246147 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

3. (4.36) ile verilen denklemden de görüldüğü gibi her üç özdeğer ve özvektöre karşı gelen  $\sigma_0^{(0)}$  değerleri 1'e eşit olarak bulunur.  $\sigma_0^{(1)}$  değerleri de (4.36) ile verilen şekilde hesaplanırsa her biri aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\sigma_0^{(1)}[1] = -0.00617939432, \quad \sigma_0^{(1)}[2] = -0.04511730997,$$

$$\sigma_0^{(1)}[3] = -0.2908358637 \quad (4.49)$$

4. Değişmezlik ölçeninin birinci dereceden saptırım kullanılarak bulunan değerleri,  $(\sigma_{0,1})$ , (4.25) denklemini kullanılarak hesaplanabilir. Bu değerler aşağıda verilmektedir.

$$\sigma_{0,1}[1] = 0.9938206057, \quad \sigma_{0,1}[2] = 0.95488269, \quad \sigma_{0,1}[3] = 0.7091641363 \quad (4.50)$$

5. Bu aşamadan sonra  $\alpha_1$  vektörlerini hesaplayabilmek amacıyla (4.40) ile verilen denklemden yararlanılarak  $\beta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) değerleri elde edilir. Yalnız burada her bir  $\gamma_i$  değeri ile oluşturulan  $\left(\frac{2}{\gamma_i} \mathbf{M}_n(\hat{f}) - \frac{1}{\gamma_i^2} \mathbf{M}_n(\hat{f})^2\right)$  matrisi için 3 tane  $\beta_i$  değeri bulunacağı açıktır. Dolayısıyla 9 adet  $\beta$  değeri hesaplanır. Bu değerler kullanılarak

ve (4.42)'den yararlanılarak üç adet  $\alpha_1$  vektörü

$$\alpha_1[1] = \begin{bmatrix} -0.002928938227 \\ 0.0007020365019 \\ 0.002432123682 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1[2] = \begin{bmatrix} -0.01378934274 \\ 0.005855699862 \\ 0.007316711143 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1[3] = \begin{bmatrix} -0.006411619398 \\ 0.002682877239 \\ 0.003466618179 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

şeklinde bulunur.

6. Bir sonraki adımda  $\alpha_1$  vektörlerini kullanarak  $\sigma_0^{(2)}$  değerlerini (4.43) ile verilen ilişkiden hesaplayabilme olanağı vardır. Bu işlem yapıldığında aşağıda verilen değerlere ulaşılır.

$$\sigma_0^{(2)}[1] = 0.0001140984405, \quad \sigma_0^{(2)}[2] = 0.005620922789$$

$$\sigma_0^{(2)}[3] = 0.1049092968 \quad (4.52)$$

7. Bu değerler de elde edildikten sonra yapılması gereken (4.25) ile verilen denklemi kullanarak  $\sigma_{0,2}$  değerini hesaplamaktır ki, bu bize ikinci dereceden saptırım yöntemi kullanılarak bulunmuş olan değişmezlik ölçenini verir. Ancak yine üç adet  $\sigma_{0,2}$  değeri bulunacaktır. Bu değerler aşağıda verilmektedir.

$$\sigma_{0,2}[1] = 0.9939347041, \quad \sigma_{0,2}[2] = 0.9605036128, \quad \sigma_{0,2}[3] = 0.8140734331 \quad (4.53)$$

8. Son olarak (4.44) denklemi kullanılarak  $\alpha_2$  vektörü

$$\alpha_2[1] = \begin{bmatrix} 0.000134137577 \\ -0.0001672080584 \\ 0.0001075011229 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2[2] = \begin{bmatrix} 0.0008996021449 \\ -0.001178910148 \\ 0.0008141835096 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_2[3] = \begin{bmatrix} 0.002345385423 \\ -0.003032173772 \\ 0.002055581319 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

şeklinde elde edilir.

9. (4.53) ile verilen değerlere bakıldığında değişmezlik ölçenini en büyük yapan özvektör kullanılarak bulunan  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  vektörleri toplanarak (4.25) ile verilen

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.5362712174 \\ 0.7173323079 \\ 0.4448169153 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

vektörüne ulaşılır.

10. Elde edilen bu vektör eniyilenmiş ağırlık işlevinin bulunabilmesi amacıyla verilen (3.1) bağıntısında kullanılırsa eniyilenmiş ağırlık işlevi

$$W_{opt} = (1.054975946x^2 + 0.878549065x + 0.02754236584)^2 \quad (4.56)$$

olarak bulunur.

11. Bulunan eniyilenmiş ağırlık işlevi kullanılarak YBMG'nin değişmez terimi

$$f_0 = 1.327683266 \quad (4.57)$$

olarak elde edilir.

Burada bulunan değer bir önceki bölümde sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılarak ağırlık işlevinin eniyilenmesi konusunda (3.40) ile verilen sonuçla çok yakın olduğu görülmektedir.

Böylece YBMG yönteminin ağırlık işlevinin eniyilenebilmesine yönelik elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için birbirine benzer etkinlikte çalışabilen iki farklı yöntem geliştirilmiştir.

#### 4.1.2 Uygulama – 2

Verilecek olan ikinci uygulama için

$$f(x) = e^x, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.58)$$

işlevi seçilmiş ve taban işlevlerinin sayısı  $n = 10$  olarak alınmıştır.

Bu örnek için bir önceki uygulamada verilen adımlar izlenir. Ancak bu adımlar ayrıntılı olarak verilmeyecektir. Çizelge 4.1'de taban vektörü sayısının 10 olması nedeniyle bulunmuş olan 10 özdeğer ve ona karşı gelen özvektör için değişmezlik ölçeninin sıfırcı basamaktan saptırım açılımı,  $\sigma_{0,0}$ , birinci basamaktan saptırım açılımı,  $\sigma_{0,1}$  ve ikinci basamaktan saptırım açılımı,  $\sigma_{0,2}$  değerleri verilmektedir.

**Çizelge 4.1:** Farklı özvektörler için elde edilen  $\sigma_{0,0}$ ,  $\sigma_{0,1}$ ,  $\sigma_{0,2}$  değerleri.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_{0,0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\sigma_{0,1}$	0.9984	0.9919	0.9810	0.9675	0.9542	0.9455	0.9459	0.9578	0.9775	0.9950
$\sigma_{0,2}$	0.9985	0.9922	0.9827	0.9719	0.9610	0.9540	0.9496	0.9651	0.9746	0.9955

Burada  $\sigma_{0,2}$  için en büyük değer ilk özvektör için bulunmuştur. Dolayısı ile bu özvektör kullanılarak  $\alpha^{(2)}$  vektörünün değeri hesaplanır ve daha sonra hesaplanan bu vektör, (3.1) ile verilen anlatımda yerine konularak eniyilenmiş ağırlık

$$\begin{aligned} W_{opt} = & (35.14911413x^9 + 30.53700573x^8 - 53.38744191x^7 - 44.16006669x^6 \\ & + 25.33028634x^5 + 19.18029593x^4 - 4.048023674x^3 - 2.533398576x^2 \\ & + 0.1476361084x + 0.04821945896^2) \end{aligned} \quad (4.59)$$

biçiminde elde edilir.





## 5. SENDELENİMSİZ İNTEGRASYON İLE YBMG YÖNTEMİ

Bu tez çalışmasının temel amaçlarından ilki, ağırlık eniyilemesi aracılığıyla YBMG bileşenlerinin etkinliğinin artırılmasıdır. Böylece analitik yapısı bilinen bir çok değişkenli işlevinin daha az değişkenli işlevlerin toplamı şeklinde yeniden gösteriliminin etkin bir yaklaşıtırm olması sağlanmaktadır.

Çok değişkenli işlevler ile ilgili karşılaşılabilecek diğerk önemli bir sorun ise, analitik yapısı bilinmeyen işlevlerin çok değişkenli bir veri kümesinde kümenin her bir düğüm noktasındaki değerleri verildiğinde ilgili işleve uygun bir analitik yapının ortaya çıkarılması gereksinimidir. Bu bağlamda, çalışmanın ikinci temel amacı ise, bilimsel yazında varolan YBMG tabanlı yöntemin [21, 62] etkinliğinin yine yapılacak bir ağırlık eniyilemesi uygulaması ile artırılması ve bu tür sorunlar için daha kabul edilebilir yaklaşıtırmalar elde edilmesidir. YBMG yönteminin bu yeni yapısının ortaya çıkarılabilmesi için tez danışmanınca geliştirilmiş olan sendelenimsiz integrasyon (ing: fluctuation free integration) yönteminden yararlanılacaktır. Bir sonraki bölümde anlatılacak olan ve “Ayrık Verilerin Bölüntülendirimi” olarak isimlendirilen konuya taban olması açısından sendelenimsiz integrasyon ile YBMG yönteminin yeniden yapılandırılma şekli ve çeşitli sayısal uygulamalar ile YBMG ve Logaritmik YBMG yöntemlerine uygulanması bu bölümde verilmektedir.

### 5.1 Sendelenimsiz İntegrasyon

Bu yöntem bir işlevin integralini analitik olarak almak yerine, bu integrale sendelenim matrislerini ve sendelenimsizlik kanıtsavını kullanarak yaklaşıtırm yapmaktadır. Bu yaklaşıtırm için izlenen yol tek değişkenli işlevler için bu bölüm içerisinde ayrıntılı olarak anlatılmış, çok değişkenli işlevler için “Sendelenimsiz İntegrasyonun YBMG Yöntemine Uygulanması ” alt başlığı altında verilmiştir.

Burada  $f(x)$  tek değişkene bağlı ve analitik bir işlev olmak üzere  $\mathcal{I}$ , bu işlevin  $[0, 1]$  aralığındaki integralini gösterebilir.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx f(x) \quad (5.1)$$

Bu integrale yaklaştırım yapabilmek için öncelikle sendelenim matrislerinin oluşturulması gerekmektedir. Bunun için Bölüm 2.2.1’de verilen bilgiler kullanılacak ve sendelenim matrisleri oluşturulacaktır. Yalnız, burada özellikle vurgulanması gereken konu, sendelenim matrisleri oluşturulurken kullanılan taban vektörlerinin üzerinde yapılan bir kısıtlamadır. Hatırlanacak olursa bölüm 2.2.1’de  $w_1(x)$ , ...,  $w_n(x)$  taban takımının Hilbert uzayı içinde kalan sayılabilir sonsuz boyutta taban vektörlerinden seçilebileceği üstelik bu taban takımının birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluşmasının beklenmediği, hangi takım olursa olsun, doğrusal bağımsız öğelerden oluştuğu sürece birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluşan bir taban takımına dönüştürülebileceği konusu üzerinde durulmuş ve taban takımı üzerinde bir kısıtlama yapılmamıştır. Burada ise integrale bir yaklaştırım yapabilmek için taban takımının ilk ögesinin 1 olması zorunluluğu gelmekte, bu da sendelenim matrislerinin oluşturulabilmesi için kullanılacak olan taban takımlarına bir kısıt getirmektedir.

$w_1 = 1$  olarak alma zorunluluğun nedeni (5.1) ile verilen integrali sendelenimsizlik kanıtını uygulayabilmek için aşağıdaki biçimde yeniden yazabilmek içindir.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx f(x) \equiv \int_0^1 dx w_1(x) f(x) w_1(x) \quad (5.2)$$

Bu durumda  $w_1 = 1$  olarak alındığından integralin değeri değişmeyecek aynı zamanda aşağıda verilen anlatım da geçerli olacaktır.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx f(x) \equiv \int_0^1 dx w_1(x) f(x) w_1(x) = (w_1, f(\hat{x}) w_1) \quad (5.3)$$

Burada  $(w_1, f(\hat{x}) w_1)$  anlatımının bir iççarpım olduğu hatırlanarak ve  $f(x)$  analitik işlevinin  $n$  boyutlu matris gösteriliminin de  $\mathbf{F}_{jk}^{(n)} = (w_j, f(\hat{x}) w_k)$   $1 \leq j, k \leq n$  iççarpımı ile verildiği gözönünde bulundurularak  $\mathbf{e}_1^{(n)}$  kartezyen vektör uzayındaki birinci ögesi 1 diğer öğeleri 0 olan  $n$  boyutlu vektör olmak üzere

$$(w_1, f(\hat{x}) w_1) = \mathbf{e}_1^{(n)T} \mathbf{F}^{(n)} \mathbf{e}_1^{(n)} \quad (5.4)$$

eşitliğinin yazılabileceği açıktır. Bu durumda (5.3)

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx f(x) \equiv \int_0^1 dx w_1(x) f(x) w_1(x) = (w_1, f(\hat{x}) w_1) = \mathbf{e}_1^{(n)T} \mathbf{F}^{(n)} \mathbf{e}_1^{(n)} \quad (5.5)$$

haline gelir. Eğer, burada, (2.44) ile verilen sendelenimsizlik yaklaştırımı gündeme getirilecek olursa

$$\mathbf{e}_1^{(n)T} \mathbf{F}^{(n)} \mathbf{e}_1^{(n)} \approx \mathbf{e}_1^{(n)T} f(\mathbf{X}^{(n)}) \mathbf{e}_1^{(n)} \quad (5.6)$$

yazılabilir. Böylece verilen integral bağımsız değişken olan  $x$ 'in matris gösteriliminin verilen işlev altındaki görüntüsünün  $\mathbf{e}_1$  vektörü ve onun devriği (ing: transpose) ile çarpımı durumunu almış olur.  $\mathbf{X}^{(n)}$  matrisinin (2.47) ile verilen izgesel ayrıştırımını (ing: spectral decomposition) kullanarak bunun  $f$  işlevi altındaki görüntüsünün

$$f(\mathbf{X}^{(n)}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \alpha_i \alpha_i^T \quad (5.7)$$

ile verildiği hatırlanırsa integralin yaklaşık sonucu

$$\mathcal{J} \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mathbf{e}_1^{(n)T} \alpha_i \alpha_i^T \mathbf{e}_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \left( \mathbf{e}_1^{(n)T} \alpha_i \right)^2 \quad (5.8)$$

bağıntısı kullanılarak elde edilir. Böylece yöntem integralin sonucunu analitik olarak bulmak yerine, ilgili bağımsız değişkenin  $n$  boyutlu matris gösteriliminden elde edilen her bir özdeğerin verilen işlev altındaki görüntüsü bulunarak bu değer ile özdeğere karşı gelen özvektörün ilk elemanının karesini ile çarpıp toplamlarını almakla yaklaşık bir sonuç elde edilir.

(5.8) ile verilen bağıntıda sol yanda bir integral işlemi bulunurken sağ yanda integral işlemi görünmemektedir. Aslında bu bütünüyle integral işleminden kurtulduğu anlamına gelmemektedir. Çünkü integral sendelenim matrisleri oluşturulurken bu yöntemin doğası gereği ortaya çıkmaktadır. Yalnız burada vurgulanması gereken çok önemli nokta sendelenim matrislerinin evrensel olduğudur. Yani, istenilen tüm  $n$  değerleri için bu matrisler ve matrislere ait özdeğer ve karşı gelen özvektörler yalnızca bir defa hesaplanarak bir veri bankasına (ing: database) yazılabilir. Böylece farklı problemler için her defasında bu özdeğer ve karşı gelen özvektörleri tekrar tekrar hesaplamak yerine oluşturulan bu veri bankasından çağırarak olanağıdır. Bu şekilde yapıldığında da bir anlamda integrallerden kurtulunmuş olunur.

Açıktır ki, bu yöntem bilgisayar tabanlı uygulamalarda integral hesaplama zorluğunu aşabilmek için geliştirilmiş olan bir sayısal yöntemdir. Aslında bu yöntem için taban takımı olarak çok terimli (polynomial) taban takımı kullanıldığında Gauss kuvadratür [63] (ing: Gauss quadrature) yöntemi ile eş değerdir. Fakat bu yöntemde Gauss kuvadratürden farklı olarak yalnızca çok terimli taban takımları ile değil farklı taban takımları ile de çalışmak olanağıdır. Yani, Gauss kuvadratür yönteminde olduğu gibi bir taban takımı sınırlaması bulunmamaktadır.

## 5.2 Sendelenimsiz İntegrasyonun YBMG Yöntemine Uygulanması

Bölüm 2’de (2.8) ile verilen ve YBMG yönteminin değişmez teriminin bulunması için kullanılan bağıntı  $[0, 1]$  aralığında ve 1 ağırlığı altında yazılırsa

$$f_0 = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_N f(x_1, \dots, x_N) \quad (5.9)$$

elde edilir. Her sonlu aralık  $[0, 1]$  aralığına getirilebileceğinden YBMG terimlerinin hesaplanmasında genellikle birşey kaybedilmez.

Buradaki integraller sendelenimsiz integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanırken her bir bağımsız değişkenin matris gösteriliminden yararlanılmaktadır. Bu durumda  $N$  bağımsız değişkene bağlı bir işlevin  $N$ -katlı integralini hesaplayabilmek için  $N$  sayıda matris gösterilimi elde edilecektir. Bu matrislerin boyutu  $n_k$ , ( $1 \leq k \leq N$ ) ile gösterilir ve birbirine eşit olmak zorunda değildir.  $\lambda_N^{(k_N)}$ ,  $x_N$  bağımsız değişkeninin matris gösterilimi olan  $n_N$  boyutlu  $X_N$  matrisinin özdeğerlerini,  $\xi_{k_N}^{(N)}$  ise bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri göstermek üzere  $dx_N$ ’e bağlı sonuncu integrali (5.8) bağıntısı dikkate alınarak

$$f_0 \approx \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{N-1} \mathbf{e}_1^{(n_N)T} \sum_{k_n=1}^{n_N} f(x_1, \dots, \lambda_N^{(k_N)}) \xi_{k_N}^{(N)} \xi_{k_N}^{(N)T} \mathbf{e}_1^{(n_N)} \quad (5.10)$$

şeklinde yazmak olanaklıdır. Burada,  $\mathbf{e}_1^{(n_N)}$  vektörü ise kartezyen vektör uzayındaki birinci ögesi 1, diğer ögeleri 0 olan  $n_N$  boyutlu vektördür. Yukarıda verilen integral yapısının hesaplanmasında bir adım daha ileriye gidilirse integrallerin içerisindeki toplam sembolü çok değişkenli işlevin analitik olması nedeniyle dışarıya çıkarılabilir ve

$$f_0 \approx \sum_{k_n=1}^{n_N} \left( \mathbf{e}_1^{(n_N)T} \xi_{k_N}^{(N)} \right)^2 \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{N-1} f(x_1, \dots, x_{N-1}, \lambda_N^{(k_N)}) \quad (5.11)$$

sonucuna ulaşılır. Benzer işlemler tüm integraller için tekrarlanırsa sabit YBMG teriminin sendelenimsiz integrasyon yardımıyla elde edilen genel yapısı

$$f_0 \approx \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{n_N} \left[ \prod_{i=1}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_i)T} \xi_{k_i}^{(i)} \right)^2 \right] f(\lambda_1^{(k_1)}, \dots, \lambda_N^{(k_N)}) \quad (5.12)$$

olarak ortaya çıkar.

Bir sonraki adım ise, (2.10) ile verilen birli YBMG terimlerinin genel yapılarının da aynı şekilde sendelenimsiz integrasyon yardımıyla elde edilmesidir. Birli YBMG terimlerinin bu ifadesi de  $[0, 1]$  aralığında ve 1 ağırlığı altında yazılırsa

$$f_i(x_i) = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{i-1} \int_0^1 dx_{i+1} \cdots \int_0^1 dx_N f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) - f_0 \quad (5.13)$$

elde edilir ve sabit terim için yukarıda sözü edilen hesaplamalar bu bağıntıya da uygulanırsa

$$f_i(x_i) \approx \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{n_{i-1}} \sum_{k_{i+1}=1}^{n_{i+1}} \cdots \sum_{k_n=1}^{n_N} \left[ \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_m)T} \xi_{k_m}^{(m)} \right)^2 \right] f \left( \lambda_1^{(k_1)}, \dots, \lambda_N^{(k_N)} \right) - f_0 \quad (5.14)$$

ifadesi birli YBMG terimleri için yazılabilir.

YBMG açılımına ait daha yüksek basamaktan terimler, sendelenimsiz integrasyon yöntemi kullanılarak ve aynı yol izlenerek kolaylıkla belirlenebilir.

### 5.2.1 Hata analizi

YBMG yöntemi aracılığıyla elde edilen yaklaşımların gerçek sonuca ne kadar yakın olduğunun belirlenmesi amacıyla (2.17) ile verilen toplamsallık ölçenlerinden yararlanılacağı gibi aşağıda verilen bağıl hata analizi bağıntısı da kullanılabilir.

$$\mathcal{N}_{s_k} = \frac{\|f - s_k\|}{\|f\|}, \quad 1 \leq k \leq N \quad (5.15)$$

Burada  $s_k$  birinci mertebeden YBMG yaklaşımına karşılık gelmektedir. Bu bağıntı ile yapılacak hata analizlerinde sonuç sifra yaklaştıkça yaklaşımda oluşan hatanın en alt düzeyde olduğu yorumu yapılacaktır. Hatanın sıfır değerine ulaşması kullanılan yaklaşım ile gerçek sonucun elde edildiği anlamını ortaya çıkaracaktır.

Çalışmanın bundan sonraki kesiminde verilecek olan sayısal uygulamalarda elde edilecek sonuçların bilimsel yazında aynı amaçlar için geliştirilen YBMG tabanlı yöntemlerin sayısal sonuçları ile rahatça karşılaştırılabilmesi bu bağıl hata analizi ile olanaklı olacaktır.

### 5.3 Sayısal Uygulamalar

Bu bölümde, YBMG ve Logaritmik YBMG yöntemlerinin hesaplama karmaşıklığını azaltabilmek ve bilgisayar belleği sınırlaması yüzünden hesaplanamayan integral yapılarını rahatça hesaplayabilmek amacı ile yöntemin içerdiği integraller analitik olarak değil sendelenimsiz integral olarak adlandırılan sayısal integrasyon tabanlı bir yaklaşım yöntemi ile hesaplanmış ve bu yapının etkinliğini araştırmaya yönelik bir takım sayısal uygulamalar verilmiştir.

Bu araştırma için dört değişik yapıda işlev seçilmiştir. Bunlardan ilki tam toplamsal yapıda, ikincisi ne toplamsal ne çarpımsal yapıda, üçüncüsü tam çarpımsal yapıdadır. Sonuncu uygulama olarak ise, bilgisayar tabanlı geliştirilen uygulamalar aracılığıyla yazılım ve donanım kısıtlamaları nedeniyle analitik olarak integrali alınamayan bir işlev seçilmiştir. Sınama işlevlerinin bağımsız değişkenleri için tanım aralıkları ise  $[0, 1]$  olarak seçilmiştir.

Bu sınama için verilen işlevler 2.1.1 ve 2.1.2 bölümlerinde verilen bağıntılar kullanılarak sırasıyla YBMG ve Logaritmik YBMG yöntemlerine açılmaktadır. Değişmez YBMG ve Logaritmik YBMG terimleri ile birinci ve ikinci mertebeden YBMG ve Logaritmik YBMG terimleri oluşturulmaktadır. Elde edilen yaklaşımların etkinliklerinin ölçülmesi amacıyla da (5.15) ile verilen bağıntı kullanılarak bağıl hata analizi yapılmaktadır.

Bu amaçla bilgisayar ortamındaki programlama tabanlı uygulamalar için MuPAD sayısal ve simgesel yorumlayıcısı kullanılmaktadır. Geliştirilen bu program kodları Linux (Ubuntu 7.10) İşletim Sistemi'nde çalıştırılmaktadır. Bilgisayar ortamındaki tüm hesaplamalar 10 basamak duyarlılıkla yapılmakla birlikte yer sıkıntısı nedeniyle elde edilen sonuçlar çizelgelerde 5 basamak duyarlılıkla verilmiştir.

#### 5.3.1 Uygulama – 1

Bu bölümdeki birinci sayısal uygulama için aşağıdaki işlev seçilmiştir.

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^4 x_i \quad (5.16)$$

Bu işlev 4 bağımsız değişkene bağlıdır ve tam toplamsal yapıda olan bir işlevdir. Bu işlev için YBMG ve Logaritmik YBMG yaklaşımları bulunduğu anda bu yak-

**Çizelge 5.1:**  $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$  işlevi için bağıl hata analizi sonuçları.

$\mathcal{N}_{s_0}$	$\mathcal{N}_{s_1}$	$\mathcal{N}_{s_2}$	$\mathcal{N}_{\pi_0}$	$\mathcal{N}_{\pi_1}$	$\mathcal{N}_{\pi_2}$
0.27735	0.0	0.0	0.28091	0.06173	0.01612

**Çizelge 5.2:**  $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$  işlevi için bağıl hata analizi sonuçları.

$\mathcal{N}_{s_0}$	$\mathcal{N}_{s_1}$	$\mathcal{N}_{s_2}$	$\mathcal{N}_{\pi_0}$	$\mathcal{N}_{\pi_1}$	$\mathcal{N}_{\pi_2}$
0.71798	0.30744	0.06656	0.78481	0.48729	0.08736

laştıranların gerçek analitik yapıya ne kadar yakın oldukları (5.15) ile verilen bağıntı yardımıyla hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar Çizelge 5.1 içerisinde verilmiştir. İncelenen yapı tam toplamsal olduğundan birinci basamaktan YBMG yaklaşımına ait bağıl hata değeri 0.0 olarak çıkmakta ve gerçek analitik yapıyı tam olarak karşıladığı görülmektedir. Buna karşılık Logaritmik YBMG yaklaşımını çarpımsal yapılarda daha etkin olduğundan beklenildiği gibi YBMG yaklaşımını kadar başarılı sonuçlar üretememektedir.

### 5.3.2 Uygulama – 2

Bölümün ikinci sayısal uygulamasının oluşturulmasında aşağıdaki gibi yine 4 bağımsız değişkene sahip ne toplamsal ne de çarpımsal yapıda olan bir işlev seçilmiştir.

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left[ \sum_{i=1}^4 x_i \right]^4 \quad (5.17)$$

Bu sayısal uygulama için elde edilen YBMG ve Logaritmik YBMG yaklaşımına karşılık bulunan bağıl hata analizi sonuçları Çizelge 5.2 ile verilmiştir. Toplamsallık özelliğinin veya çarpımsallık özelliğinin baskın olmadığı bu işleve ait elde edilen hata analizi sonuçlarına göre en iyi yaklaşımın ikinci mertebeden YBMG ve Logaritmik YBMG yaklaşımını aracılığıyla elde edildiği gözlemlenmektedir.

Ancak bu sonuçlar da göstermektedir ki, hata değerinin 10 basamak duyarlılıkta yapılan hesaplamalarda sıfıra yaklaşabilmesi için daha üst mertebeden yaklaşımına gereksinim duyulmaktadır. Öte yandan, bazı okuyucular için bu sonuçlar kabul edilebilir olabilir. İkinci mertebeden YBMG ve Logaritmik YBMG yaklaşımını ile yetinmek veya her ne kadar bilimsel yazındaki uygulamalarda pek tercih edilmese de üçlü ve daha yukarı YBMG terimlerinin hesaplanmasına geçme yorumu burada okuyucunun görüşüne bırakılmaktadır.

**Çizelge 5.3:**  $f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$  işlevi için bağıl hata analizi sonuçları.

$\mathcal{N}_{s_0}$	$\mathcal{N}_{s_1}$	$\mathcal{N}_{s_2}$	$\mathcal{N}_{\pi_0}$	$\mathcal{N}_{\pi_1}$	$\mathcal{N}_{\pi_2}$
0.82680	0.51159	0.22535	0.89288	0.0	0.0

### 5.3.3 Uygulama – 3

Üçüncü sayısal uygulama olarak yine 4 bağımsız değişkene sahip tam çarpımsal yapıda olan bir işlev seçilmiştir.

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{i=1}^4 x_i \quad (5.18)$$

Bu sayısal uygulama için elde edilen YBMG ve Logaritmik YBMG yaklaşıtlarına karşılık bulunan bağıl hata analizi sonuçları Çizelge 5.3’de verilmiştir. Uygulamada incelenen sınaıa işlevinin yapısının çarpımsallık özelliği tam baskın olduğundan ikinci mertebeden YBMG yaklaşıtınının bile %22 oranında bir bağıl hata ile bir yaklaşım sağlayabildiği görölmektedir. Öte yandan, Logaritmik YBMG yaklaşıtınının daha etkili sonuçlar verdiği ve birinci mertebeden Logaritmik YBMG yaklaşıtını ile gerçek sonuca ulaşılabilđi gözlemlenmektedir.

### 5.3.4 Uygulama – 4

Dördüncü ve son sayısal uygulama olarak bilgisayar tabanlı uygulamalarda karşılaşılabilecek yazılım ve donanım kısıtları sonucunda hesaplanamama olasılığı olan bir işlev seçilmiştir.

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \sin(x_2 x_3) \quad (5.19)$$

Burada unutulmamalıdır ki, Logaritmik YBMG yönteminin bu işleve uygulanması sırasında işlevin doğal logaritmasının alınması gereksinimi ortaya çıkacaktır. Bunun sonucunda oluşan  $\ln(x_1 x_2 \sin(x_2 x_3))$  şeklindeki yapının analitik olarak üç katlı integralinin hesaplanması sırasında bilgisayar ortamında bulunan yazılım paketlerinde sorunlar çıkmaktadır. Logaritmik YBMG yönteminin sendelenimsiz integrasyon yöntemi ile birlikte kullanıldığında böyle bir soruna getirdiği çözüm, sayısal olarak istenilen sonuçların alınmasını sağlamaktadır. Bu bağlamda YBMG ve Logaritmik YBMG yaklaşıtınları sayesinde verilen işleve karşılık bir yaklaşım elde edilebilmektedir. Sendelenimsiz integrasyonun uygulanmadığı Logaritmik YBMG yöntemi için böyle bir işlevin bir yaklaşıtın ile temsil edilebilme olasılığı bulunmamaktadır.



**Çizelge 5.4:**  $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  işlevi için bağıl hata analizi sonuçları.

$\mathcal{N}_{s_0}$	$\mathcal{N}_{s_1}$	$\mathcal{N}_{s_2}$	$\mathcal{N}_{\pi_0}$	$\mathcal{N}_{\pi_1}$	$\mathcal{N}_{\pi_2}$
0.82100	0.46416	0.15716	0.91450	0.02661	0.0

Bu uygulamada elde edilen yaklaşımlar için bulunan bağıl hata analizi sonuçları Çizelge 5.4 ile verilmiştir. İşlevin yapısı tam çarpımsal olduğundan Logaritmik YBMG yaklaşımları daha iyi sonuç vermektedir. İşlevin yapısında bulunan trigonometrik işlev gerçek sonuca ancak ikinci basamaktan Logaritmik YBMG yaklaşımı ile ulaşılabilmesine neden olmaktadır.



## 6. AYRIK VERİ BÖLÜNTÜLENDİRİMİ

Yaygın olarak karşılaşılan problemlerden biri de ayrık bir veri kümesinin düğüm noktalarından geçen bir işlevin analitik yapısının sorgulanmasıdır.  $N$  boyutlu böyle bir interpolasyon problemi ile uğraşmak hem varolan sayısal yöntemlerin uygulanabilmesi açısından hem de bilgisayar ortamında uygulama geliştirilmesinde bellek ve hesaplama süreleri açısından sorunlar çıkarmaktadır.

Bu nedenlerle, bu çalışma içerisinde  $N + 1$  boyutlu veri kümesinin verildiği ( $N$  adet parametreye bağlı nokta kümesi ve işlevin bu noktadaki değeri) ve bu veri kümesine karşılık gelen çok boyutlu işlevin analitik yapısının istendiği interpolasyon problemleri için veri bölüntülendirilmesi (ing: data partitioning) yolu izlenmiştir. Bu yöntem ile  $N$  parametrelili veri kümesi bölüntülendirilerek tek parametrelili veri kümeleri, iki parametrelili veri kümeleri gibi daha az parametreye bağlı verilerden yararlanılarak istenilen analitik yapının elde edilmesi sağlanmaktadır.

Sözü edilen veri kümesi problemin bağımsız değişkenlerinin tanım kümelerinden oluşturulmuş bir kartezyen çarpım kümesidir ve problemde ilgili kartezyen çarpım kümesinin bütün düğüm noktalarında analitik yapısı aranılan işlevin değerlerinin verildiği varsayılmaktadır. Yani, ilgilenilen ızgara dolu bir ızgaradır ve dik bir geometri sağlamaktadır.

Yalın YBMG yöntemi uygun ağırlık işlevi seçimiyle dik bir geometride verilen verinin bölüntülendirilmesi amacıyla kullanılabilir. Kullanım şekillerinden biri, ağırlık işlevinin Dirac delta işlevlerinin bir doğrusal birleşiminden oluşturularak yapılandırılmasına dayanmaktadır [21].

Diğer yöntem ise, bu tez çalışmasında geliştirilen şeklidir ki, sendelenimsizlik yöntemi kullanılarak ağırlık eniyilemesinin yapılması ve elde edilen ağırlık işlevinin YBMG yöntemi içerisinde kullanılmasıdır. Bölümün ilk kısmında bilimsel yazına daha önce yerleşmiş olan yöntemden kısaca sözedilecek; ikinci kısmında ise, bu çalışmaya özgü geliştirilen yöntem anlatılacaktır.

## 6.1 Dirac Delta Ağırlıklı YBMG Yöntemi ile Veri Bölüntülendirimi

Bu alt bölümde YBMG yönteminin veri bölüntülendirimi amacıyla kullanım şekli bünyesinde bulunan ağırlık işlevinin seçimi bakımından bilimsel yazına daha önce girmiş haliyle verilmektedir [21].

$$W(x_1, \dots, x_N) \equiv \prod_{j=1}^N \left[ \sum_{k_j=1}^{n_j} \alpha_{k_j}^{(j)} \delta(x_j - \mu_j^{(k_j)}) \right], \quad x_j \in [a_j, b_j] \quad (6.1)$$

Kullanılan bu ağırlık işlevinde bulunan  $\mu_j^{(k_j)}$  değerleri  $N$  boyutlu bir interpolasyon problemi için verilen veri kümesinin içerisinde bulunan elemanlardır. Bu veri kümesini oluşturan ve her bir bağımsız değişkene ait olan tanım kümelerinin genel yapısı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$D_j \equiv \left\{ \mu_j^{(k_j)} \right\}_{k_j=1}^{k_j=n_j} = \left\{ \mu_j^{(1)}, \dots, \mu_j^{(n_j)} \right\}, \quad 1 \leq j \leq N \quad (6.2)$$

Yukarıdaki ifadeden kartezyen çarpım kümesinin tanımı

$$D \equiv D_1 \times D_2 \times \dots \times D_N \quad (6.3)$$

şeklinde yazılabilir.

(2.8) ve (2.10) ile verilen YBMG terimlerinin genel yapıları (6.1) ile verilen ağırlık işlevi altında kullanılarak, (6.3) ile verilen ayrık veri kümesindeki çok boyutlu yapı bölüntülendirilebilmektedir. Bu bağlamda gerçekleştirilecek ilk adım (6.1) ile verilen ağırlık işlevinde bulunan  $\alpha_{k_j}^{(j)}$  katsayılarının hesaplanmasıdır. Bu hesaplama (2.5) ile verilen normalizasyon koşulu yardımıyla yapılır ve aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\sum_{k_j=1}^{n_j} \alpha_{k_j}^{(j)} = 1, \quad 1 \leq j \leq N \quad (6.4)$$

Değişmez YBMG teriminin ifadesi bu sonuçlardan sonra

$$\tau = \left( \mu_1^{(k_1)}, \dots, \mu_N^{(k_N)} \right), \quad \zeta(\tau) = \alpha_1^{(k_1)} \dots \alpha_N^{(k_N)}, \quad 1 \leq k_j \leq n_j, \quad 1 \leq j \leq N \quad (6.5)$$

olmak üzere

$$f_0 \equiv \sum_{\tau \in D} \zeta(\tau) f(\tau) \quad (6.6)$$

şeklinde elde edilir.

Benzer sonuçlar birli YBMG terimlerinin genel yapısı için de

$$\begin{aligned}
D^{(m)} &\equiv \{ \tau_m | \tau_m = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_N), x_j \in D_j, 1 \leq j \leq N, j \neq m \}, \\
\tau_m &= \left( \mu_1^{(k_1)}, \dots, \mu_{m-1}^{(k_{m-1})}, \mu_{m+1}^{(k_{m+1})}, \dots, \mu_N^{(k_N)} \right), \\
\zeta_m(\tau_m) &= \alpha_1^{(k_1)} \dots \alpha_{m-1}^{(k_{m-1})} \alpha_{m+1}^{(k_{m+1})} \dots \alpha_N^{(k_N)}, \\
\mu_m^{(k_m)} &\in D_m, \quad 1 \leq k_m \leq n_m, \quad 1 \leq m \leq N
\end{aligned} \tag{6.7}$$

olmak üzere

$$f_m(\mu_m^{(k_m)}) = \sum_{\tau_m \in D^{(m)}} \zeta_m(\tau_m) f(\tau_m, \mu_m^{(k_m)}) - \sum_{\tau \in D} \zeta(\tau) f(\tau) \tag{6.8}$$

biçiminde yazılabilir.

Böylece,  $N$  sayıda veri kümesi elde edilmiş olur. Her bir küme tanım kümesindeki eleman sayısı ( $n_j, 1 \leq j \leq N$ ) kadar sıralı ikiliden oluşmaktadır. Örneğin,  $m$ . küme  $1 \leq k_m \leq n_m$  olmak üzere  $(\mu_m^{(k_m)}, f_m(\mu_m^{(k_m)}))$  şeklindeki sıralı ikililerden oluşur.

Burada, ikinci ve daha yüksek mertebeden YBMG terimlerinin genel yapılarına ait sonuçlar verilmemiştir. Analitik yapısı aranılan işleve ne kadar az sayıda YBMG terimi ile yaklaşırsa hesaplama karmaşıklığının ve hesaplama sürelerinin artması engellenmiş olur. Ancak birli YBMG terimleri aracılığıyla elde edilen analitik yapının istenilen yaklaşıklıkta olmaması durumunda daha yüksek mertebeden YBMG terimleri hesaplanabilir ve kabul edilebilir sonuçların elde edilmesi sağlanabilir.

Bu bölümde verilen sonuçlara ait tüm ara işlemler ilgili makale [21] ve tezde [62] verilmiştir.

## 6.2 Ağırlık Eniyilemeli YBMG Yöntemi ile Veri Bölüntülendirimi

YBMG yönteminin veri bölüntülendirimi amacıyla kullanılması sırasında en önemli unsur ağırlık işlevinin sahip olduğu roldür. Ağırlık işlevinin YBMG yönteminin yapısını ve verimini oldukça etkilediği bilindiğinden Dirac delta işlevlerinin doğrusal birleşiminden oluşturulan işlevden başka ağırlık işlevleri bulunma çabasına girilmiş ve çalışmanın bu bölümü, yukarıda verilen ağırlık işlevi yerine daha etkin bir ağırlık işlevi yapısının elde edilmesine ayrılmıştır. Bu amaçla bağımsız değişkenlerin tanım bölgelerinde bulunan düğüm noktalarından oluşturulacak bir kartezyen çarpım kümesinin tüm elemanlarının kullanıldığı, yani analitik yapısı aranılan çok boyutlu

işlevin bu kümenin tüm noktalarındaki değerlerinin verildiği problemler için YBMG yönteminin Sendelenimsizlik Kanıtı ile desteklenmesi gündeme getirilmiştir.

Bu yöntemin etkinliği, daha önceki yöntemden farklı olarak ağırlık işlevi için Dirac delta işlevinin kullanılması yerine her bir bağımsız değişkene ait sendelenimsizlik matrisinin kullanılmasına dayanmaktadır. Geliştirilen yönteme ait adımlar aşağıda açık bir şekilde verilmektedir.

$N$  sayıda verilen veri kümesi için  $\mu_1^{(1)}$  birinci kümeden alınan birinci nokta,  $\mu_1^{(2)}$  yine birinci kümeden alınan ikinci nokta, ve bu şekilde devam edilirse  $n_1$  sayıda nokta içeren birinci küme için  $\mu_1^{(n_1)}$  birinci kümeden alınan  $n_1$ . nokta olmaktadır. Tüm verilen veri kümeleri için aynı sınıflandırma devam edecek olursa  $\mu_N^{(1)}$   $N$ . kümeden alınan birinci nokta,  $\mu_N^{(2)}$   $N$ . kümeden alınan ikinci nokta ve  $\mu_N^{(n_N)}$  ise  $N$ . kümeden alınan  $n_N$ . nokta olarak düşünülmelidir. Burada her bir bağımsız değişkene ait tanım kümesinin eleman sayısı sırasıyla  $n_1, n_2, \dots, n_N$  şeklindedir ve bu eleman sayılarının eşit olarak alınması gerekmemektedir.

Bu yöntem için etkin bir ağırlık bulunabilmesi için sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılmakta olduğundan Bölüm 2'de anlatılan şekilde her bir kümeyle ait olan sendelenim matrislerinin oluşturulması ve daha sonra bu matrislere ait özdeğerlerin belirlenmesi gerekmektedir. Bu özdeğerlerin sınıflandırması da yukarıda tanım kümesi elemanları için yapılan sınıflandırma ile benzer özellikler taşımaktadır.  $\lambda_1^{(1)}$  birinci matrise ait birinci özdeğer,  $\lambda_2^{(1)}$  birinci matrise ait ikinci özdeğer ve böyle sürdürülürse  $\lambda_{n_1}^{(1)}$  birinci matrise ait  $n_1$ . özdeğer, aradaki özdeğerler için de bu şekilde ilerlenirse  $\lambda_1^{(N)}$   $N$ . matrise ait birinci özdeğer,  $\lambda_2^{(N)}$   $N$ . matrise ait ikinci özdeğer ve böyle sürdürülürse  $\lambda_{n_N}^{(N)}$   $N$ . matrise ait  $n_N$ . özdeğer olarak yazılabilir. Bir örnek vermek gerekirse, üç bağımsız değişkene bağlı verilen veri kümesi için birinci bağımsız değişkene ait tanım kümesinin eleman sayısı  $n_1 = 3$ , ikinciye ait eleman sayısı  $n_2 = 4$  ve üçüncüye ait  $n_3 = 5$  olsun. Bu durumda,  $\mathbf{X}_1$  olarak adlandırılan sendelenim matrisi 3,  $\mathbf{X}_2$  olarak adlandırılan sendelenim matrisi 4 ve  $\mathbf{X}_3$  olarak adlandırılan sendelenim matrisi 5 boyutlu olacak ve birinci matrise ait 3, ikinci matrise ait 4 ve üçüncü matrise ait 5 tane özdeğer bulunacaktır. Bu özdeğerler  $\lambda_1^{(1)}$  birinci matrise ait birinci özdeğer,  $\lambda_2^{(1)}$  birinci matrise ait ikinci özdeğer,  $\lambda_3^{(1)}$  birinci matrise ait üçüncü özdeğer,  $\lambda_1^{(2)}$  ikinci matrise ait birinci özdeğer,  $\lambda_2^{(2)}$  ikinci matrise ait ikinci özdeğer,  $\lambda_3^{(2)}$  ikinci matrise ait üçüncü özdeğer,  $\lambda_4^{(2)}$  ikinci matrise ait dördüncü özdeğer,  $\lambda_1^{(3)}$  üçüncü matrise ait birinci özdeğer,

$\lambda_2^{(3)}$  üçüncü matrise ait ikinci özdeğer,  $\lambda_3^{(3)}$  üçüncü matrise ait üçüncü özdeğer,  $\lambda_4^{(3)}$  üçüncü matrise ait dördüncü özdeğer,  $\lambda_5^{(3)}$  üçüncü matrise ait beşinci özdeğer, olacak ve böylece her kümede verilen nokta sayısı kadar özdeğer elde edilmiş olacaktır. Burada özdeğerlerin nokta sayısı kadar olması önemlidir. Çünkü burada yapılan temel şey her bir küme için verilen bu noktaların oluşturulacak olan bir  $g_j(x_j)$ , ( $1 \leq j \leq N$ ) işlevi yardımı ile özdeğerlerin bulunduğu noktalara kaydırılması dolayısıyla sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılırken bu özdeğerler kullanılarak etkin bir ağırlık bulunması yoluna gidilmektedir.

Burada sözü edilen  $g_j(x_j)$ , ( $1 \leq j \leq N$ ) işlevleri aşağıda verilen ilişkileri sağlayacak şekilde Lagrange interpolasyonu [64] kullanılarak elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \mu_1^{(1)} &= g_1(\lambda_1^{(1)}), \dots, \mu_1^{(n_1)} = g_1(\lambda_{n_1}^{(1)}) \\ \mu_2^{(1)} &= g_2(\lambda_1^{(2)}), \dots, \mu_2^{(n_2)} = g_2(\lambda_{n_2}^{(2)}) \\ &\dots\dots\dots \\ \mu_N^{(1)} &= g_N(\lambda_1^{(N)}), \dots, \mu_N^{(n_N)} = g_N(\lambda_{n_N}^{(N)}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Bu  $g_j(x_j)$  işlevleri ile ilgili olarak, yapılan çalışmalar göstermiştir ki, elde edilen bu işlevler çok salınımlı olmadığı sürece yöntem oldukça etkin olarak çalışmaktadır.

Bu işlevlerin elde edilmesinden sonra YBMG yöntemi kullanılarak değişmez YBMG terimin bulunmasına geçilebilir. Bunun için (2.8) ile verilen denklemden rahatça görülebileceği gibi değişmez terim,  $f(x_1, \dots, x_N)$  çok değişkenli işlevinin her bir bağımsız değişkene göre integralinin alınmasıyla bulunmaktadır. Burada değişmez terim bulunurken  $f(x_1, \dots, x_N)$  çok değişkenli işlevi yerine  $f(g_1(x_1), \dots, g_N(x_N))$  işlevi kullanılacaktır. Bunun nedeni YBMG yönteminin doğasında var olan integrallerin alınması sırasında bir önceki bölümde anlatılan sendelenimsiz integrasyon yönteminin kullanılacak olması ve bu yöntem kullanılırken de her bir değişkene ait olan matris gösterimlerinin özdeğer ve özvektörlerinin kullanılabilmesi için özdeğer noktalarını verilen noktalara kaydıran  $g_j(x_j)$ , ( $1 \leq j \leq N$ ) işlevlerinin kullanılması gerekliliğidir. Burada gerçekte yapılan işlem aslında  $x_1, \dots, x_N$  değişkenleri yerine  $g_1(x_1), \dots, g_N(x_N)$  polinomlarının kullanılması demektir ama bu durum integrallerin içerisine  $g'_1(x_1), \dots, g'_N(x_N)$  işlevlerinin de girmesini gerektirmektedir. Ancak burada bu işlevlerin hepsinin sendelenimsizlik özdeğerlerinde 1'e yakın olması nedeniyle burada yapılacak olan hataya gözyumularak işlev türev değerleri 1 olarak alınmıştır.

YBMG yönteminde  $f(x_1, \dots, x_N)$  çok değişkenli işlevi yerine  $f(g_1(x_1), \dots, g_N(x_N))$  çok değişkenli işlevinin değişmez terim ya da daha üst basamaktan terimlerin bulunması sırasında yararlanılan bağıntılarda kullanılması  $g_j(x_j)$  işlevlerinin her birinin  $x_j$ , ( $1 \leq j \leq N$ ) bağımsız değişkenine bağlı bir çokterimli olması nedeni ile olanaklıdır.

Bu durumda değişmez terimin elde edilebilmesi için aşağıdaki bağıntı geçerli olacaktır.

$$f_0 = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_N f(g_1(x_1), \dots, g_N(x_N)) \quad (6.10)$$

Burada belirtmek gerekir ki, (2.8) ile verilen değişmez terime ait bağıntı içerisindeki  $W(x_1, \dots, x_N)$  ağırlığı 1 olarak alınmış ve aralık  $[0, 1]$  aralığı olarak seçilmiştir. Burada aralığın  $[0, 1]$  olarak alınmasının nedeni her sonlu aralığın değişken dönüşümü yapılarak  $[0, 1]$  aralığına getirilebilmesi yüzünden işlemlerin en genel aralıkta yapılması isteğidir. Yine de herhangi bir  $[a, b]$  aralığının  $[0, 1]$  aralığına nasıl indirildiği ve yöntemin bu aralık için izlenmesi gereken adımlarına ait ayrıntılar Ek-B'de verilmektedir.

(6.10) bağıntısından ilerlemek için verilen integrallerin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için bir önceki bölümde verilen sendelenimsiz integrasyon yöntemi kullanılmış ve yine o bölümde verilen şekilde integraller hesaplanmıştır. Bu bölümde farklı olarak yukarıda verilen bağıntıda integrali alınan işlev doğrudan  $x_j$ , ( $1 \leq j \leq N$ ) bağımsız değişkenlerine bağlı değil ama onlara bağlı olan  $g_j(x_j)$ , ( $1 \leq j \leq N$ ) çokterimlilerine bağlıdır. Bu durumda  $N$ -katlı integrallerin hesabında yine  $x_N$  bağımsız değişkenine bağlı integralden başlayarak hesaplama yapılırsa

$$f_0 \approx \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{N-1} \mathbf{e}_1^{(n_N)T} \sum_{k_N=1}^{n_N} f(g_1(x_1), \dots, g_N(\lambda_N^{(k_N)})) \xi_{k_N}^{(N)} \xi_{k_N}^{(N)T} \mathbf{e}_1^{(n_N)} \quad (6.11)$$

anlatımı elde edilir. Burada,  $\lambda_N^{(k_N)}$   $x_N$  bağımsız değişkeninin matris gösterilimi olan  $n_N$  boyutlu  $\mathbf{X}_N$  matrisinin özdeğerlerini  $\xi_{k_N}^{(N)}$  ise bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri göstermektedir.  $\mathbf{e}_1^{(n_N)}$  vektörü ise kartezyen vektör uzayındaki birinci ögesi 1 diğer ögeleri 0 olan  $n_N$  boyutlu vektörü anlatmaktadır. Burada yine  $f(g_1(x_1), \dots, g_N(x_N))$  işlevinin analitikliğinden yararlanılarak anlatım

$$f_0 \approx \sum_{k_N=1}^{n_N} \left( \mathbf{e}_1^{(n_N)T} \xi_{k_N}^{(N)} \right)^2 \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{N-1} f(g_1(x_1), \dots, g_{N-1}(x_{N-1}), g_N(\lambda_N^{(k_N)})) \quad (6.12)$$



biçimine getirilir. Burada  $x_N$ 'e bağlı integral için yapılan işlemler geriye kalan  $N - 1$  tane integral için de yapılırsa, değişmez terim yaklaşık olarak

$$f_0 \approx \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{n_N} \left[ \prod_{i=1}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_i)T} \xi_{k_i}^{(i)} \right)^2 \right] f \left( g_1(\lambda_1^{(k_1)}), \dots, g_N(\lambda_N^{(k_N)}) \right) \quad (6.13)$$

şeklinde elde edilir. Burada (6.9) ile verilen ilişkiler gözönüne alınırsa değişmez terim için

$$f_0 \approx \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{n_N} \left[ \prod_{i=1}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_i)T} \xi_{k_i}^{(i)} \right)^2 \right] f \left( \mu_1^{(k_1)}, \dots, \mu_N^{(k_N)} \right) \quad (6.14)$$

anlatımı elde edilir. Böylece, sendelenimsiz integrasyon yöntemine ait olan evrensel  $\mathbf{X}$  matrisleri aracılığıyla değişmez YBMG teriminin genel yapısında bulunan integraller hesaplanmıştır. Bu çalışmaya özgü yeni geliştirilmiş olan bu hesaplama yöntemi ile (6.6)'da verilen ve bilimsel yazında daha önceden kullanılan bağıntıdaki  $\zeta(\tau)$  katsayılarının eniyilenmesi sağlanmıştır. Eniyilenmiş katsayının yeni hali (6.14) bağıntısındaki çarpım sembolü ile verilen aşağıdaki katsayıdır.

$$\prod_{i=1}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_i)T} \xi_{k_i}^{(i)} \right)^2, \quad 1 \leq k_i \leq n_i \quad (6.15)$$

Bundan sonra YBMG açılımına ait birli terimler için genel bağıntının elde edilmesine geçilebilir. Bu amaçla (2.10) ile verilen eşitlikten yararlanılarak birli terim için anlatım

$$f_i(\zeta_i^{(k_i)}) = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{i-1} \int_0^1 dx_{i+1} \cdots \int_0^1 dx_N \times \\ \times f(g_1(x_1), \dots, g_{i-1}(x_{i-1}), g_i(x_i), g_{i+1}(x_{i+1}), \dots, g_N(x_N)) - f_0 \quad (6.16)$$

şeklinde yazılır. Burada bulunan  $N - 1$  katlı integralin hesaplanması sırasında yine sendelenimsiz integrasyon yöntemi kullanılırsa aşağıda verilen

$$f_i(\zeta_i^{(k_i)}) \approx \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{n_{i-1}} \sum_{k_{i+1}=1}^{n_{i+1}} \cdots \sum_{k_n=1}^{n_N} \left[ \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_m)T} \xi_{k_m}^{(m)} \right)^2 \right] f \left( \mu_1^{(k_1)}, \dots, \mu_N^{(k_N)} \right) - f_0 \quad (6.17)$$

yaklaşım elde edilecektir. Bu bağıntıda bulunan

$$\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_m)T} \xi_{k_m}^{(m)} \right)^2, \quad 1 \leq k_m \leq n_m, \quad m \neq i \quad (6.18)$$

katsayısı da (6.8) ile verilen  $\zeta_m(\tau_m)$  katsayısının sendelenimsiz integrasyon aracılığıyla eniyilenmiş halidir.

Böylece,  $N$  bağımsız değişkene bağlı olarak verilen veri kümesi bölüntülendirilmiş ve  $N$  sayıda tek bağımsız değişkene bağlı veri kümesi elde edilmiştir ki, her bir veri kümesi ilgili bağımsız değişkene ait tanım kümesindeki eleman sayısı kadar sıralı ikiliden oluşur.

Daha üst mertebeden YBMG terimlerini elde ederek verilen veri kümesinin bölüntülendirilme işlemini devam ettirmek olanaklıdır. Ancak, hem matematiksel işlemlerin sonuçlarının elde edilmesinde, hem de bilgisayar tabanlı uygulamalarda hesaplama karmaşıklığının artmasının önüne geçmek amacıyla sözü edilen bu YBMG terimleri hesaplanmamakta ve aranan analitik yapıya sadece sabit terim ve birli terimlerin yardımıyla ulaşılmaya çalışılmaktadır.

Bir sonraki adım ise, (6.17) ile verilen bölüntülendirilmiş veri kümelerini kullanarak her bir birli YBMG terimine karşılık gelen analitik yapıların elde edilmesidir. Bu adım, tek değişkenli bir interpolasyon problemine karşılık gelir ki, bu amaçla Lagrange interpolasyon formülü [64] kullanılabilir. Böylece, her bir bağımsız değişkene karşılık elde edilen bölüntülendirilmiş veri kümelerinden analitik yapılar bulunmuş olur. Bu analitik yapıların her biri birli YBMG terimleri olan  $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_N(x_N)$  işlevlerine karşılık gelir. Bu işlevlerin toplamının değişmez YBMG terimine eklenmesi sonucu (2.13) ile verilen birinci basamaktan YBMG yaklaşımını,  $s_1(x_1, \dots, x_N)$ , elde edilir.

### 6.3 Sayısal Uygulamalar

Bu bölümde anlatılan yöntemin etkinliğinin gösterilebilmesi amacıyla bir takım sayısal uygulamalar hazırlanmıştır. Bu uygulamaların her biri hem bu tez çalışması içinde özgün olarak verilen yöntem, hem de daha önce geliştirilmiş ve bilimsel yazına sunulmuş olan yöntem kullanılarak çözülmüş, her iki yöntemden elde edilen sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar üzerinden gerekli karşılaştırmalar yapılarak tez kapsamında geliştirilen yeni yöntemin sınanması gerçekleştirilmiştir.

Buradaki uygulamaların sonuçları Linux (Ubuntu 7.10) işletim sistemi üzerinde MuPAD (Computer Algebra System) aracılığıyla 20 basamak duyarlılıkla yapılan hesaplanmalarla elde edilmiştir.

Yöntemin etkinliğinin sınanmasına yönelik hazırlanan sayısal örneklerden ilk üçünde ele alınan sınama işlevleri 6 tane bağımsız değişken içermekte ve her bir bağımsız

değişkene ait olan tanım kümeleri aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$D_1 = \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$$

$$D_2 = \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$$

$$D_3 = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$$

$$D_4 = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$$

$$D_5 = \{0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1\}$$

$$D_6 = \{1.2, 1.3\}$$

(6.19)

Bu örneğe ait kartezyen çarpım kümesinde 6400 düğüm noktası bulunmaktadır. Hazırlanan sayısal uygulamalar için aynı tanım kümelerinin seçilmesi genellikle birşey kaybettirmemektedir. Burada önemli olan nokta, bu tanım kümelerinden oluşturulan kartezyen çarpım kümesinin tüm düğüm noktalarında analitik yapısı aranılan işlevin değerlerinin verilmiş olmasıdır. Tanım kümelerinin elemanlarının yapısı yöntemin verimliliğini etkilememektedir. Bu özellik üstel bir işlevin sınama işlevi olarak verildiği ve farklı tanım kümelerinin kullanıldığı dördüncü uygulamada rahatlıkla gözlemlenebilmektedir. Sözü edilen bu son uygulamadaki farklılıklar ilgili alt bölümde verilecektir.

Yöntemin örneklere uygulanmasındaki ilk adım; her bir bağımsız değişken için verilen tanım kümelerindeki nokta sayıları gözönünde bulundurularak her bir bağımsız değişkene ait matris gösterilimlerinin elde edilmesidir. Yani, 6 bağımsız değişkene sahip örnekler ele alındığından yöntemin doğası gereği 6 tane matris oluşacaktır. Bu matrislerden;  $\mathbf{X}_1$  matrisi  $4 \times 4$ ,  $\mathbf{X}_2$  matrisi  $5 \times 5$ ,  $\mathbf{X}_3$  matrisi  $4 \times 4$ ,  $\mathbf{X}_4$  matrisi  $8 \times 8$ ,  $\mathbf{X}_5$  matrisi  $5 \times 5$  ve  $\mathbf{X}_6$  matrisi  $2 \times 2$  şeklindeki yapılara sahip olacaktır.

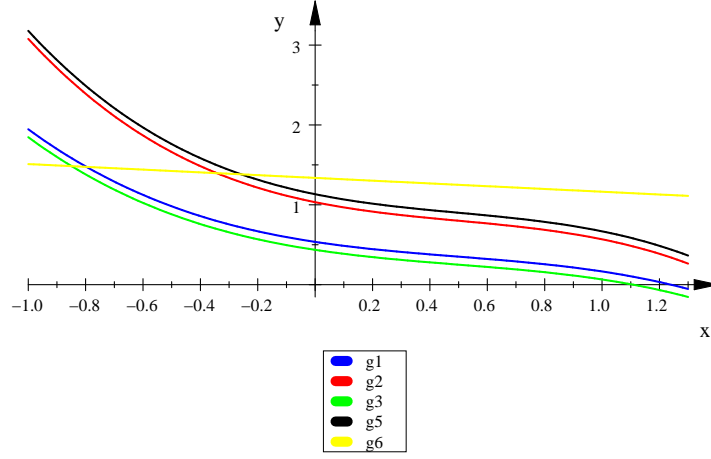
Sonraki adım, bu matrislere ait özdeğerlerin ve her bir özdeğere karşılık gelen özvektörün belirlenmesidir. Bu özdeğerlerden verilen noktalara kaydırma yapabilmek amacıyla (6.9) ilişkisindeki genel yapı gözönüne alınarak Lagrange interpolasyonu kullanılır ve  $g_1(x_1)$ ,  $g_2(x_2)$ ,  $\dots$ ,  $g_6(x_6)$  işlevleri sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur [65].

$$g_1(x_1) = -0.3466170796x_1^3 + 0.5199256194x_1^2 - 0.5440807393x_1 + 0.5353860997$$

$$g_2(x_2) = -0.5270225512x_2^3 + 0.7905338268x_2^2 - 0.7284876825x_2 + 1.0324882034$$

$$g_3(x_3) = -0.3466170796x_3^3 + 0.5199256194x_3^2 - 0.5440807393x_3 + 0.4353860997$$

(6.20)



**Şekil 6.1:**  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $g_5$  ve  $g_6$  çokterimlilerine ait çizim.

$$\begin{aligned}
 g_4(x_4) = & -15.3683625453x_4^7 + 53.7892689088x_4^6 - 78.4498493584x_4^5 \\
 & + 61.6514511240x_4^4 - 28.5467180698x_4^3 + 8.0632604350x_4^2 \\
 & - 1.9089249220x_4 + 1.0349372138
 \end{aligned}$$

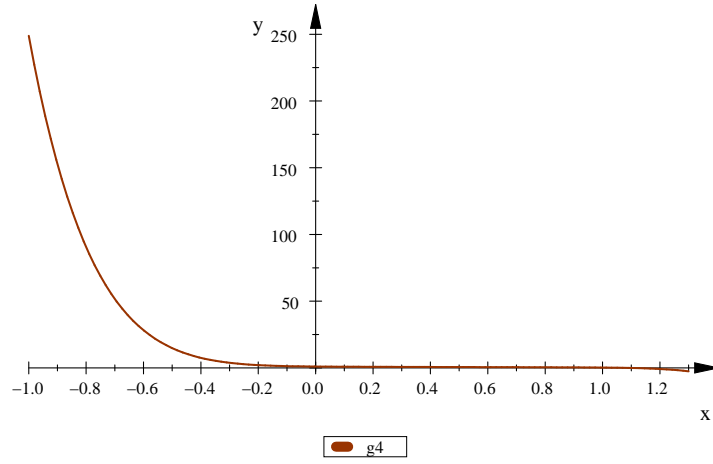
$$\begin{aligned}
 g_5(x_5) = & -0.52702255124x_5^3 + 0.79053382687x_5^2 - 0.72848768258x_5 \\
 & + 1.13248820348
 \end{aligned}$$

$$g_6(x_6) = -0.1732050807x_6 + 1.3366025403 \quad (6.21)$$

Bu işlemlere ait analitik yapılarıdaki katsayılar yer kaygısı nedeniyle 20 basamak duyarlılıkla hesaplanmasına rağmen yalnızca 10 basamaklı halleriyle verilmiştir.

Bulunan  $g_1(x_1)$ ,  $g_2(x_2)$ ,  $\dots$ ,  $g_6(x_6)$  işlevlerinin her biri, bir bağımsız değişkene bağlı çokterimliler olarak karşımıza çıkmaktadır. Yöntemin etkin çalışabilmesi için bu çokterimlilerin çok salınımlı olmaması önemlidir. Burada  $g_j(x_j)$ , ( $1 \leq j \leq 6$ ) çokterimlilerinin her birinin nasıl bir davranış sergilediğinin görülebilmesi açısından bu çokterimlilerin çizimleri Şekil 6.1 ve Şekil 6.2 ile verilmektedir. Her bir işlev farklı bir bağımsız değişkene bağlı olmasına rağmen, örneğin  $g_1$  çokterimlisi  $x_1$  bağımsız değişkenine bağlı olmasına rağmen, salt bu çokterimlilerin davranışlarını gösterebilmek adına hepsinin birden aynı  $x$  değişkenine bağlı olduğu varsayılarak çizimler yapılmıştır.

Burada Şekil 6.2 ile  $g_4(x_4)$  işlevi için ayrı bir çizim verilmesinin nedeni ölçeklendirme (ing: scaling) problemini aşabilmek içindir. Aksi takdirde,  $g_4(x_4)$  işlevinin çok hızlı biçimdeki artışı yüzünden diğer işlevlerin davranışları yeterince iyi gözlemlenemeyecektir. Bu işlevlerin bulunması ile birlikte artık (6.14) ile verilen değişmez YBMG teriminin ve (6.17) ile verilen birli YBMG terimlerinin hesaplanmasına geçilebilir. Bu



**Şekil 6.2:**  $g_4$  çokterimlisine ait çizim.

hesaplamalar ile elde edilen sonuç bölüntülendirilmiş veri kümelerine ulaşmış olmaktadır. Bu veri kümelerinden Lagrange interpolasyon formülü ile birli YBMG terimleri için analitik yapılar oluşturulur ve böylece analitik yapısı aranan işleve bir yaklaşıran olabilecek birinci mertebeden YBMG yaklaşıranı yapılandırılmış olur.

Bu bölümün bundan sonraki kesiminde ise, çeşitli sınaama işlevleri kullanılarak burada verilen tanım kümeleri üzerinden interpolasyon problemleri oluşturulacak ve burada özetlenen yöntemle ait algoritma bu problemlere uygulanacaktır.

### 6.3.1 Uygulama – 1

Bu bölümde seçilen ilk uygulama 6 bağımsız değişkene sahip tam toplamsal yapıda olan aşağıdaki işlevdir.

$$f(x_1, \dots, x_6) = \sum_{i=1}^6 x_i \quad (6.22)$$

(6.19) ile verilen tanım kümelerinden oluşturulan kartezyen çarpım kümesindeki düğüm noktalarında bu işlevin değerlerinin verildiği varsayımı altında ve (6.20) ile verilen yapılar ile  $\mathbf{X}_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) sendelenim matrislerinin özdeğer ve özvektörlerinin yardımıyla değişmez YBMG terimi ve birli YBMG terimleri kullanılarak modelleme yapılır. Sonuçta birinci mertebeden YBMG yaklaşıranı aracılığıyla elde edilen analitik yapı verilen interpolasyon problemine karşılık gelen bir yaklaşırmadır. Bu yaklaşıranın etkinliğini ölçmeye yönelik izlenebilecek yol toplamsallık ölçenlerini hesaplamaktır. Toplamsallık ölçenlerin sonucu ne kadar 1'e yakınsa elde edilen yaklaşıran aranan analitik yapıya o kadar yakındır.

Toplamsallık ölçenleri hesaplandığında bu çalışmada geliştirilen yöntem için elde edilen değişmezlik ölçeni ve arı toplamsallık ölçeni değerleri

$$\sigma_0 = 0.99524913327524594279 \quad \sigma_1 = 1.0 \quad (6.23)$$

şeklindedir. Burada işlevin doğrusal yapıda olmasından dolayı  $\sigma_1$  değerinin 1 olarak elde edilmesi çok doğaldır.

Bu değerlerin daha önce bahsedilen ve (6.1) bağıntısı ile verilen ağırlık işlevinin kullanıldığı yöntemle karşılaştırılabilmesi için ilgili yöntemden elde edilen sonuçlar da aşağıda verilmiştir.

$$\sigma_0 = 0.99324324324324324324 \quad \sigma_1 = 1.0 \quad (6.24)$$

Sınama işlevinin tam toplamsal özellik taşıması ve YBMG açımının toplamsal bir açılım olması nedeniyle her iki yöntem de birinci mertebeden YBMG yaklaşımını ile aranan analitik yapının kesin olarak elde edilmesini sağlamaktadır.

$$s_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 1.0 x_1 + 1.0 x_2 + 1.0 x_3 + 1.0 x_4 + 1.0 x_5 + 1.0 x_6 \quad (6.25)$$

Aynı sonucun hem sınama işlevinin verilen veri kümesinin her bir düğüm noktasındaki değerleri ve elde edilen yukarıdaki YBMG yaklaşımının aynı noktadaki değerleri açısından da irdelenebilmesi için Şekil (6.3) verilmiştir.

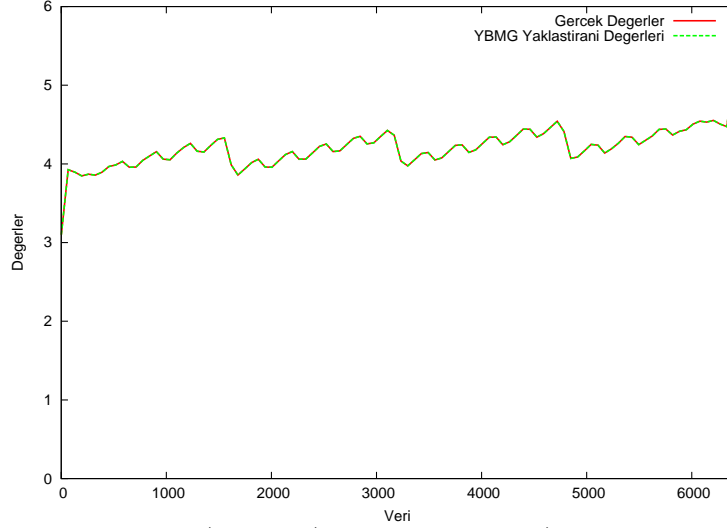
Şekil (6.3)'de düğüm noktaları 1'den başlayacak şekilde sırasayılabilir olarak x-ekseninde yer almış, sınama işlevi ile YBMG yaklaşımının bu noktadaki değerleri ise y-ekseninde yer almıştır. Şekilden de anlaşıldığı üzere birinci basamaktan YBMG yaklaşımını ile elde edilen değerler ile gerçek değerler tam olarak üst üste gelmektedir. Yani, verilen interpolasyon probleminde istenilen analitik yapıya YBMG yaklaşımını ile kesin olarak ulaşılmıştır.

### 6.3.2 Uygulama – 2

Aynı veri kümesi kullanılarak oluşturulan ikinci sayısal uygulamada kullanılan sınama işlevi

$$f(x_1, \dots, x_6) = \left( \sum_{i=1}^6 x_i \right)^5 \quad (6.26)$$

olacak şekilde yine 6 bağımsız değişkene sahip ancak giderek toplamsal yapıdan uzaklaşan, çarpımsal yapıya yaklaşan melez yapıda bir işlevdir.



**Şekil 6.3:**  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  ve  $s_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  işlevlerinin veri kümesinin düğüm noktalarındaki değerleri.

Verilen işlev için elde edilen birinci basamaktan YBMG yaklaşımının yapısı ise aşağıdaki gibidir.

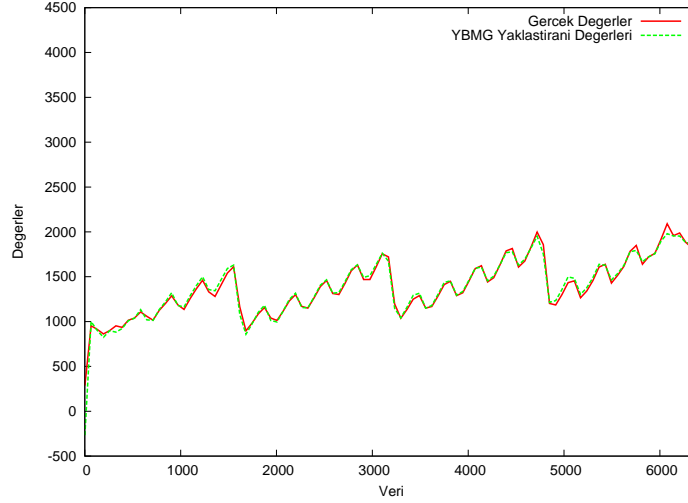
$$\begin{aligned}
s_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = & 177.172 x_1^3 + 564.792 x_1^2 + 1135.016 x_1 + 21.0 x_2^4 \\
& + 109.950 x_2^3 + 405.174 x_2^2 + 690.538 x_2 + 177.173 x_3^3 + 617.944 x_3^2 + 1253.290 x_3 \\
& + 1.6 * 10^{-14} x_4^7 - 7.54 * 10^{-14} x_4^6 + 1.0 x_4^5 + 17.750 x_4^4 + 126.524 x_4^3 + 452.708 x_4^2 \\
& + 813.031 x_4 + 21.0 x_5^4 + 101.550 x_5^3 + 373.449 x_5^2 + 612.718 x_5 + 1599.622 x_6 \\
& - 4095.982
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Bu uygulama için elde edilen değişmezlik ölçeni,  $\sigma_0$  ve arı toplamsallık ölçeni,  $\sigma_1$  değerleri geliştirilen bu yöntem ve bilimsel yazında varolan önceki yöntem için aşağıda sırasıyla verilmektedir.

$$\sigma_0 = 0.89417553638678566798 \quad \sigma_1 = 0.99710687413674654666 \tag{6.28}$$

$$\sigma_0 = 0.85691621415712285768 \quad \sigma_1 = 0.99467467552506445431 \tag{6.29}$$

Burada da görülmektedir ki, elde edilen sonuçlar her ne kadar 1 değerinden uzaklaşmaya başladıysa da yapılan ağırlık işlevi eniyilemesi sonucunda daha iyi yaklaşımlar elde edilebilmektedir. Sınama işlevinin toplamsal yapıdan uzaklaşması, YBMG yönteminin toplamsal yapıdaki işlevler için daha iyi sonuçlar vermesi yüzünden, bu sonuçları doğurmakla beraber ağırlık eniyilemesinin oluşabilecek bir yaklaştırım hatası artışının önüne geçebildiği gözlemlenmektedir.



**Şekil 6.4:**  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  ve  $s_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  işlevlerinin veri kümesinin düğüm noktalarındaki değerleri.

Herşeye rağmen elde edilen yaklaşımın etkinliğinin oldukça yüksek olduğu Şekil (6.4) ile de görülmektedir.

### 6.3.3 Uygulama – 3

Bu uygulamada, bir önceki uygulamanın sonuçlarında gözlemlenen eğilimin daha açık bir şekilde izlenebilmesi amacıyla tam çarpımsal yapıya sahip aşağıdaki işlev değerlendirilmeye alınmıştır.

$$f(x_1, \dots, x_6) = \prod_{i=1}^6 x_i \quad (6.30)$$

Bu uygulama için de elde edilen değişmezlik ölçeni ve arı toplamsallık ölçeni değerleri şu şekildedir:

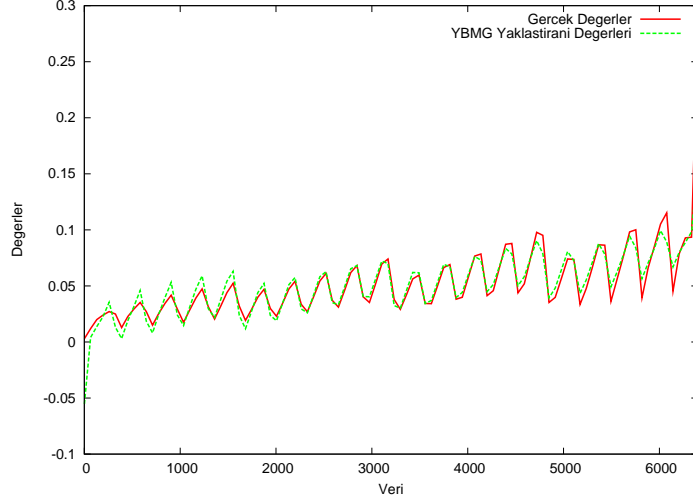
$$\sigma_0 = 0.71580750411503781627 \quad \sigma_1 = 0.96713406928851401242 \quad (6.31)$$

Yine önceki yöntemden elde edilen sonuçlar da aşağıda verilmektedir.

$$\sigma_0 = 0.63548137549203187239 \quad \sigma_1 = 0.94295429158449143777 \quad (6.32)$$

Buradan da görüldüğü gibi geliştirilen yöntemin bir önceki yönteme göre daha iyi işlediği kesindir. Buradan hareketle tekrar vurgulamak gerekir ki, ağırlık eniyilemesi tüm örgünün dolu olduğu bir aşkın uzay üzerinde orijinal işleve daha iyi yakınsama





**Şekil 6.5:**  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  ve  $s_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  işlevlerinin veri kümesinin düğüm noktalarındaki değerleri.

sağlayan bir çokterimli üretebilmektedir. Bu çokterimlinin yapısı

$$\begin{aligned}
 s_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = & -2.576 * 10^{-20} x_2^3 + 4.003 * 10^{-20} x_2^2 + 6.399 * 10^{-2} x_2 \\
 & - 1.4 * 10^{-19} x_4^6 + 5.46 * 10^{-19} x_4^5 - 8.69 * 10^{-19} x_4^4 + 7.215 * 10^{-19} x_4^3 \\
 & - 3.287 * 10^{-19} x_4^2 + 7.875 * 10^{-2} x_4 + 5.688 * 10^{-2} x_5 + 1.463 * 10^{-1} x_1 \\
 & + 2.04 * 10^{-1} x_3 + 4.095 * 10^{-2} x_6 - 2.559 * 10^{-1}
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

şeklinindedir. Verilen sınama işlevinin yapısı tam çarpımsal özellikler taşıdığından YBMG yaklaşımının etkinliği doğal olarak azalmaktadır. Bu eğilim Şekil (6.5) ile verilen görsel yapıda da gözlemlenebilmektedir.

#### 6.3.4 Uygulama – 4

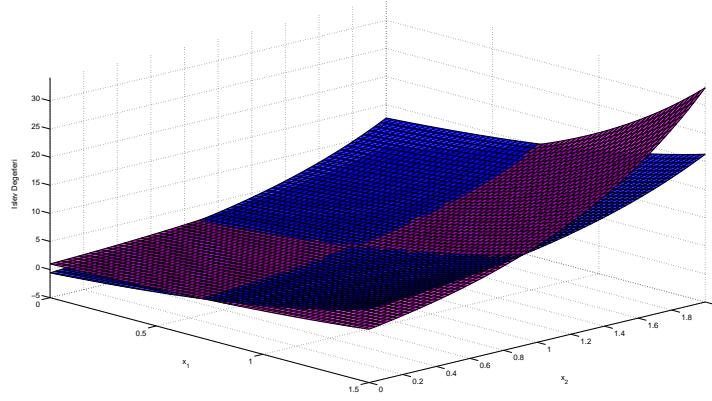
Bu yöntemin seçilen bir analitik işleve yakınsama başarısının daha iyi görülebilmesi ve elde edilen sonuçların grafiklerle de açık bir şekilde verilebilmesi amacıyla aşağıdaki iki boyutlu çarpımsal işlev seçilmiştir

$$f(x_1, x_2) = e^{(x_1+x_2)} \tag{6.34}$$

ve bu işlev için aşağıda verilen her bir bağımsız değişkene ait noktalar kümesi

$$D_1 = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.1, 1.5\}$$

$$D_2 = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.7, 0.8, 1.0, 1.2, 1.6, 2.0\} \tag{6.35}$$



**Şekil 6.6:**  $e^{(x_1+x_2)}$  işlevi ve elde edilen YBMG yaklaşımını ( $s_1(x_1, x_2)$ ).

kullanılarak yöntem uygulanmış ve YBMG yönteminde değişmez terim ve birli terimler toplanarak analitik olarak birinci mertebeden YBMG yaklaşımını ( $s_1$ ) elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
s_1(x_1, x_2) = & 1.003 * 10^{-3} x_1^7 + 2.126 * 10^{-3} x_1^6 + 2.248 * 10^{-2} x_1^5 + 1.023 * 10^{-1} x_1^4 \\
& + 4.150 * 10^{-1} x_1^3 + 1.243 x_1^2 + 2.486 x_1 + 1.356 * 10^{-5} x_2^9 + 1.873 * 10^{-5} x_2^8 \\
& + 4.815 * 10^{-4} x_2^7 + 2.783 * 10^{-3} x_2^6 + 1.733 * 10^{-2} x_2^5 + 8.622 * 10^{-2} x_2^4 \\
& + 3.451 * 10^{-1} x_2^3 + 1.035 x_2^2 + 2.070 x_2 - 5.903 * 10^{-1}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Şekil 6.6 elde edilen bu işlev ile asıl işlevin çizimlerini göstermektedir.

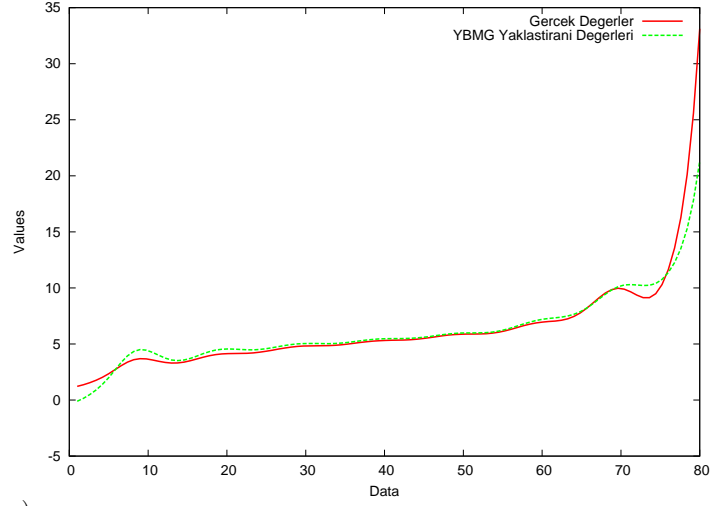
Ayrıca oluşturulan bu yaklaşım için toplamsallık ölçenlerinin incelenmesi yöntemin etkinliğinin araştırılması açısından önemlidir. Değişmezlik ölçeni ve arı toplamsallık ölçeni değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_0 = 0.69058591385661037991 \quad \sigma_1 = 0.97512368649075596302 \tag{6.37}$$

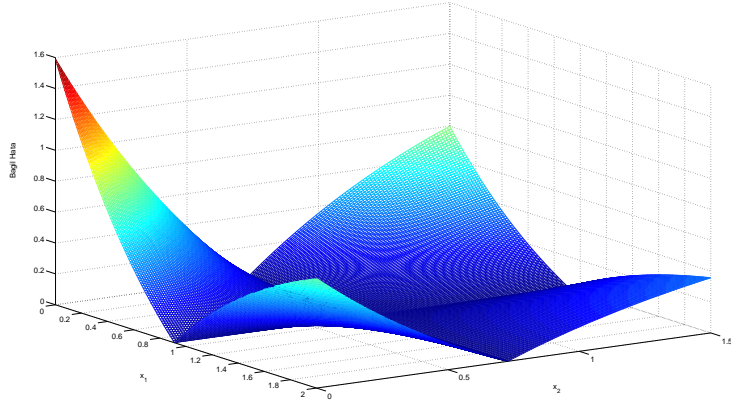
Bu ölçenlerde de anlaşılmaktadır ki, birinci mertebeden YBMG yaklaşımını yine oldukça etkin bir şekilde sonuç alınabilmesini sağlamıştır.

Bununla birlikte bu tür problemlerde olağan şartlar altında aranılan işlevin analitik yapısının bilinmeyeceği gözönünde bulundurulursa çizim işleminin veriler üzerinden yapılmasının çok daha doğru olacağı kesindir. Bu amaçla Şekil 6.7 ile çizim veriler üzerinden yapılmıştır.

Bir diğer şekilde karşılaştırma yapabilmek amacıyla, ele alınan  $e^{(x_1+x_2)}$  işlev ve elde edilen YBMG yaklaşımının ( $s_1(x_1 + x_2)$ ) arasındaki bağıl hata Şekil 6.8 ile verilmektedir. Tüm bu elde edilen sonuçlar göstermektedir ki, ayrık veri bölüntülendirimi için



**Şekil 6.7:**  $e^{(x_1+x_2)}$  işlevinin ve elde edilen YBMG yaklaşımının ( $s_1(x_1, x_2)$ ) veri kümesinin düğüm noktalarındaki değerleri.



**Şekil 6.8:**  $e^{(x_1+x_2)}$  işlevi ve elde edilen YBMG yaklaşımını ( $s_1$ ) arasındaki bağıl hata.

sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılması ve YBMG yönteminin doğasında bulunan ağırlık işlevinin eniyilenmesi ile elde edilen YBMG yaklaşımının asıl işleve daha iyi yakınsamasını sağlamaktadır.

Sayısal uygulamalarda elde edilen başarılı sonuçların yanısıra yöntemin hesaplama karmaşıklığının araştırılması da yöntemin etkinliğinin incelenmesi bakımından önemlidir. YBMG açılımının sağ tarafında bulunan ve bu çalışma boyunca kullanılan değişmez terim ve birli terimlerin hesaplanması sırasında ortaya çıkan işlem sayısı bu yeni yöntemin hesaplama karmaşıklığını oluşturmaktadır. Yöntemin algoritmasını oluştururken verilen problemin her bir bağımsız değişkeninin alabildiği değişik değerlerin toplam sayısı  $N$  değişkenli durum için sırasıyla  $n_1, \dots, n_N$  olarak kabul edilmişti. Kartezyen çarpım kümesi üzerinde çalışıldığı düşünülürse verilen veri kümesinin toplam eleman

sayısı  $n_1 \times \dots \times n_N = n$  şeklindedir. Yöntemin hesaplama karmaşıklığını ortaya çıkarmak için öncelikle değişmez terimin hesaplama karmaşıklığına bakılmalıdır. (6.14) bağıntısı göz önüne alındığında toplam  $n_1 \times \dots \times n_N = n$  sayıda işlem yapılmaktadır. Yani  $f_0$  teriminin bulunması problemde verilen veri sayısı ile doğrusal olarak ilişkilidir.

Birli terimlerle ilgili (6.17) ile verilen bağıntı göz önüne alınacak olursa  $k$ . birli terimin algoritmaya yüklediği işlem sayısı  $n_1 \times \dots \times n_{k-1} \times n_{k+1} \times \dots \times n_N$ 'dir. Bu ifade ise genel olarak  $\frac{n}{n_k}$ , ( $1 \leq k \leq N$ ) anlatımı ile verilebilir.  $N$  sayıda birli terimin olması, birli terimlerin algoritmanın hesap karmaşıklığına etkisini  $\frac{n}{n_1} + \dots + \frac{n}{n_N}$  olarak ortaya çıkarır. Hesaplama karmaşıklığı en kötü durum için incelenirse  $n_1 \ll n, \dots, n_N \ll n$  anlatımları dikkate alınarak  $N \times n$  sayıda işlem olduğu görülür. Değişmez terim ile birli terimlerin yöntemin hesaplama karmaşıklığına toplam katkısı  $(N + 1)n$  şeklinde olacaktır.

Veri modelleme problemlerinde, verilen bağımsız değişken sayısı, yani parametre sayısı, verilen veri kümesindeki nokta sayısından çok çok daha küçük olduğundan ( $N \ll n$ ) yöntemin hesaplama karmaşıklığı verilen veri kümesindeki nokta sayısı ile doğrusal olarak ilişkilidir. Yani yöntemin hesaplama karmaşıklığı  $O(n)$ 'dir.

## 7. SONUÇLAR

Çok değişkenli işlevlerin yer aldığı problemlerin modellenmesinde veya çözümünde standart yöntemler uygulanırken problemin boyutunun çok yukarılara tırmanması birçok soruna neden olabilmektedir. Sorunları aşabilmenin bir yolu problemin doğasında bulunan çok değişkenli yapıların yerine daha rahat çalışılabilecek az değişkenli işlevleri problemin çözümünde kullanmaktır. Bu amaçla böl–ve–yönet algoritması kullanılarak çok değişkenli bir işlev ile uğraşmak yerine çok sayıda az değişken içeren işlevlerle ilgilenmek daha akılcı bir yol olabilir. Böl–ve–yönet algoritması olan Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) yöntemi bu amaç için bir araç olarak kullanılabilir.

YBMG yöntemi hakkında bilimsel yazında bulunan kaynaklar ve verilen sayısal uygulamalar göstermektedir ki, yöntemin etkinliğini birinci dereceden etkileyen öge yöntemin yapısında bulunan ağırlık işlevidir. Yöntemin etkinliğini arttırmanın en önemli yollarından biri bu ağırlık işlevinin eniyilenmesidir. Bu çalışma süresince geliştirilen ve bu tez çalışması içerisinde özgün olarak yer alan iki farklı yöntem belirtilen bu eniyileme işleminin yerine getirilmesini sağlamaktadır.

YBMG yönteminde ağırlık işlevinin eniyilenmesi amacına ulaşabilmek için ise bu yöntemin etkinliğini ölçmek amaçlı tez danışmanı tarafından daha önce geliştirilmiş değişmezlik ölçeni tanımı kullanılmıştır ve bu ölçen üzerinden ağırlık eniyilemeleri gerçekleştirilmesi sağlanmıştır. Eniyileme denklemlerinin elde edilebilmesi için ağırlık işlevine doğrusal birleştirimlerle esneklikler getirilmiş ve doğrusal birleştirim katsayıları değişmezlik ölçenini eniyileyecek biçimde seçilerek YBMG etkinliğinin yani en az sayıda terimle en nitelikli yaklaşırtırımın elde edilebilmesi sağlanmıştır.

Elde edilen eniyileme denklemlerinin doğrusal olmayan bir yapı içermesi denklemlerin çözümü sırasında oldukça zorluk yaratmıştır. Ancak, bu zorluklar gerek tez çalışması sırasında geliştirilen, gerekse de bilimsel yazında varolan yöntemler kullanılarak aşılmıştır.

Bu yöntemlerin ilki sendelenim açılımı (ing: fluctuation expansion) yöntemidir. Bu yöntem tez danışmanı tarafından geliştirilmiş ve bilimsel yazında yerini almıştır. Çok değişkenli bir işlevin matris gösterilimi yerine işleve ait bağımsız değişkenlerin matris gösterilimlerinin işlev altındaki görüntüsü ile çalışabilmeyi sağlayan bir yaklaşımlar yöntemi olan sendelenimsizlik yaklaşımını içeren bu yöntem çalışmada kullanılmış ve eniyileme denklemlerinin çözümünde oldukça çarpıcı sonuçların elde edilmesini sağlamıştır.

Sendelenimsizlik yaklaşımını temel olarak verilen işleve ait bağımsız değişkenlerin matris gösterilimlerinden yararlanmaktadır. Bu matrisler oluşturulurken matrisin boyutu ile elde edilen yaklaşımın kalitesi arasında önemli bir ilişki vardır. Matris boyutu ne kadar arttırılırsa o kadar iyi bir yaklaşım elde edilir. Ancak tez içerisinde yapılan çalışmalar ve sayısal uygulamalar göstermiştir ki, boyut çok fazla yukarılara çıkmadan hatta 3, 4, 5 gibi değerlerde bile yeterince iyi yakınsamalar elde edilebilmiştir. Üstelik sendelenimsizlik yönteminin oldukça verimli çalışması ve yakınsama gücünün yüksek olması nedeni ile sendelenim açılımı içerisinde yer alan daha yüksek basamaktan sendelenim yaklaşımlarına da örneğin birinci basamaktan sendelenim yaklaşım terimlerine de gereksinim duyulmamıştır.

Eniyileme denklemlerinin çözümü sırasında kullanılan bir başka yöntem saptırım açılımı (ing: perturbation expansion) yöntemidir. Tez çalışmasının ilk zamanlarında saptırım açılımı yöntemi kullanılırken ortaya çıkan birtakım olumsuzluklardan dolayı bu yöntemle ilerlemekten vazgeçilmiş ancak ilerleyen zamanlarda saptırım açılımı yöntemi sendelenim matrisi kuramı ile birleştirilerek ortaya başarılı olan yeni bir yöntem çıkarılmıştır.

Tez çalışması sırasında elde edilen eniyileme denklemlerinin yapısının doğrusal olmaması nedeniyle çözümünde zorluklarla karşılaşmış ve bu zorluklar yukarıda sözü edilen her iki yöntem de ayrı ayrı kullanılarak istenilen çözümlere ulaşılmıştır. Ulaşılan çözümler ve bu çözümlerin etkinliği ayrı ayrı bölümlerde sayısal örneklerle de desteklenerek verilmiştir.

Tez çalışması işleyiş olarak iki ana bölüme ayrılmıştır. İlk bölümde, analitik yapısı bilinen işlevler için yöntem geliştirilmesi ile ilgilenilmiş yani, verilen analitik işleve YBMG yöntemi kullanılarak yaklaşım işlevleri oluşturulmuştur. Yaklaşım işlevlerinin oluşturulması, temel olarak iki önemli amacı gütmektedir. Bunlardan

ilki bilgisayar tabanlı uygulamalarda yapısı bilgisayar üzerinde temsil edilemeyecek olan işlevleri toplama, çıkarma, çarpma, bölme gibi dört işlem dediğimiz yapılarla ifade edebilmek, ikincisi ise verilen problemlerin çözümünde karmaşık yapıları işlevleri kullanmak yerine yapıları daha basit olan bu yaklaşımda işlevlerini kullanarak çözüme daha kolay ulaşabilmektir.

Sözü geçen yaklaşım işlevlerinin YBMG açılımı sırasında açılımdan olabildiğince az terim alınarak bulunması hesaplama karmaşıklığını arttırmamak adına oldukça önemli bir olgudur. Ancak bu yapılırken yaklaşım işlevlerinin asıl işlevi iyi bir şekilde temsil edebilmesinden de ödün verilmeden bu işin gerçekleştirilebilmesi önemlidir. Bu yüzden çalışmada bu amacı gerçekleştirebilmek için YBMG yönteminin yapısında bulunan ağırlık işlevi değişmezlik ölçeni üzerinden eniyelenmiş ve böylece yöntemin etkinliği artırılmıştır. İlgili bölümlerde verilen sayısal uygulamalarda da gözlemlenmektedir ki, yöntem her ne kadar doğası gereği toplamsallık özelliği baskın işlevlerin modellenmesinde daha etkin çalışsa da, bu çalışmada geliştirilen ağırlık eniyelenmesi yöntemleri sayesinde çarpımsallık özelliği baskın olan işlevler için bile oldukça iyi sonuçlar verebilmektedir.

Çalışmanın ikinci bölümünde ise, sonlu sayıda noktada değeri verilen çok değişkenli bir işlevin analitik yapısının sorulduğu interpolasyon problemlerinde YBMG yönteminin bilimsel yazında varolan yapısından ağırlık işlevinin eniyelenmesi yoluyla daha etkin şekilde yaklaşım oluşturması sağlanmıştır.

Çok değişkenli veri kümesinin YBMG bileşenleri kullanılarak bölüntülendirilmesi ve değişmez terim ile birli terimlerin kullanıldığı birinci mertebeden YBMG yaklaşım aracıyla aranılan analitik yapıya ulaşılması hedeflenmiştir. YBMG yöntemi ile veri bölüntülendirilmesi için bilimsel yazında varolan algoritmadaki önemli öge ağırlık işlevinin Dirac delta işlevlerinin doğrusal birleşimi şeklinde seçilmesidir. Bu çalışmanın çok değişkenli veri kümelerinin bölüntülendirilmesine olan en önemli katkısı ağırlık işlevinin sendelenimsiz integrasyon yöntemi yardımıyla eniyelenmesidir. Tez içerisinde verilen sayısal uygulamalarda elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların Dirac delta tabanlı ağırlık işlevli yöntemden çıkan sonuçlar ile karşılaştırılmasıyla da görülmüştür ki, bu çalışmada özgün olarak geliştirilen YBMG ve sendelenimsiz integrasyon tabanlı yeni yöntem çok daha etkindir.

Bu tez çalışmasında özgün olarak geliştirilen ve yukarıda da belirtilen çalışmaları maddeler şeklinde özetlersek:

- Çok değişkenli işlevlerin Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) yöntemi ile daha az değişkenli işlevlerin cinsinden yeniden gösterilimlerinin elde edilmesine yönelik bilimsel yazındaki uygulamalar incelenmiş ve bir yaklaşıma felsefesine sahip bu yöntemin etkinliğinin yapısında bulunan ağırlık işlevinin eniyelenmesi ile arttırılabileceği görülmüştür. Yani, ağırlık işlevini uğraşılan problemin yapısına göre yapısı önceden bilinen bir işlev olarak seçmek yerine en uygun işlev yapısını çeşitli hesaplamalar yaparak elde etmek amaçlanmıştır. Bu bağlamda, bilimsel yazına daha önceden girmiş olan toplamsallık ölçenlerinden değişmezlik ölçeni üzerinden ağırlık eniyelenmesine yönelik denklemler elde edilmiştir.
- Elde edilen eniyeme denklemlerinin çözümüne yönelik iki farklı yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan birincisi; tez danışmanı tarafından daha önce geliştirilen sendelenimsizlik teoremini de içeren sendelenim açılımı yöntemidir. Bu yöntem doğrusal olmayan yapıda olan eniyeme denklemlerinin çözümünde sendelenim matrisleri sayesinde oldukça kolaylık sağlamış ve YBMG yönteminde etkin bir yaklaşım bulunabilmesine katkıda bulunmuştur.
- Eniyeme denklemlerinin çözümünde kullanılan ikinci yöntem ise saptırım açılımları yöntemidir. Gerçekte saptırım parametresi eniyeme denklemlerinin içine oluşturulan sendelenim matrisi ile çarpılarak sokulmuş ve bu parametre üzerinden saptırım açılımı uygulanarak seçilen ağırlık işlevi içerisindeki bilinmeyen katsayılar belirlenmiş ve bu sayede eniyelenmiş ağırlık işlevi bulunabilmiştir.
- Tez içerisinde analitik yapısı bilinen işlevlerin yanısıra bir ızgara üzerinde her noktada değeri bilinen fakat işlevin analitik yapısının bilinmediği durumla da ilgilenilmiştir. Bilimsel yazında zaten var olan bu veri bölüntülendirme yöntemi için de sendelenimsiz integrasyon tabanlı ağırlık eniyemesi yapılmıştır. Bu sayede daha etkin bir YBMG tabanlı veri bölüntülendirme yöntemi geliştirilmiştir.



## KAYNAKLAR

- [1] **Sobol, I.M.**, 1993. Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, **1**, 407–414.
- [2] **Rabitz, H., Alis, O.F., Shorter, J. ve Shim, K.**, 1999. Efficient Input-Output Model Representations, *Computer Phys. Comm.*, **117**, 11–20.
- [3] **Shorter, J., Ip, P.C. ve Rabitz, H.**, 1999. An Efficient Chemical Kinetics Solver Using High Dimensional Model Representation, *J. Phys. Chem. A*, **103**, 7192–7198.
- [4] **Rabitz, H. ve Alis, O.F.**, 1999. General Foundations of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, **25**, 197–233.
- [5] **Rabitz, H. ve Alis, O.F.**, 1999. Additive and Multiplicate High Dimensional Representation General Foundations of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, **25**, 197–233.
- [6] **Alis, O.F. ve Rabitz, H.**, 2001. Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, **29**, 127–142.
- [7] **Li, G., Rosenthal, C. ve Rabitz, H.**, 2001. High Dimensional Model Representations, *J. Phys. Chem. A*, **105**, 7765–7777.
- [8] **Li, G., Wang, S.W., Rosenthal, C. ve Rabitz, H.**, 2001. High Dimensional Model Representations Generated from Low Dimensional Data Samples I. mp-Cut-HDMR, *J. Math. Chem*, **30**, 1–30.
- [9] **Li, G., Schoendorf, J., Ho, T. ve Rabitz, H.**, 2004. Multicut–HDMR with an Application to an Ionospheric Model, *Journal of Computational Chemistry*, **25**, 1149–1156.
- [10] **Li, G., Wang, S.W., Rabitz, H., Wang, S. ve Jaffe, P.**, 2002. Global uncertainty assessments by high dimensional model representations (HDMR), *Chem. Eng. Sci.*, **57**, 4445–4460.
- [11] **Li, G., Wang, S.W. ve Rabitz, H.**, 2002. Practical Approaches To Construct RS-HDMR Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, **106**, 8721–8733.
- [12] **Li, G., Artamonov, M., Rabitz, H., Wang, S.W., Georgopoulos, P.G. ve Demiralp, M.**, 2002. High-Dimensional Model Representations Generated from Low Order Terms-lp-RS-HDMR, *Journal of Computational Chemistry*, **24**, 647–656.
- [13] **Li, G., Wang, S.W. ve Rabitz, H.**, 2002. Practical Approaches To Construct RS-HDMR Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, **106**, 8721–8733.

- [14] **Li, G., Rabitz, H., Wang, S.W. ve Georgopoulos, P.G.**, 2003. Correlation Method for Variance Reduction of Monte Carlo Integration in RS-HDMR, *J. Comp. Chem.*, **24**, 277–283.
- [15] **Wang, S.W., Georgopoulos, P.G., Li, G. ve Rabitz, H.**, 2003. Random Sampling–High Dimensional Model Representation (RS-HDMR) with Nonuniformly Distributed Variables: Application to an Integrated Multimedia/Multipathway Exposure and Dose Model for Trichloroethylene, *J. Phys. Chem. A*, **107**, 4707–4716.
- [16] **Li, G., Wang, S.W., Georgopoulos, P., Schoendorf, J. ve Rabitz, H.**, 2006. Random Sampling–High Dimensional Model Representation (RS-HDMR) and Orthogonality of Its Different Order Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, **110**, 2474–2485.
- [17] **Hayes, M.Y., Li, B. ve H, H.R.**, 2006. Estimation of Molecular Properties by High-Dimensional Model Representation, *J. Phys. Chem. A*, **110**, 264–272.
- [18] **Bieniasz, L.K. ve Rabitz, H.**, 2006. High Dimensional Model Representation of Cyclic Voltammograms, *Anal. Chem.*, **78**, 1807–1816.
- [19] **Sobol, I.M.**, 2003. Theorems and Examples on High Dimensional Model Representation, *Reliability Engineering and System Safety*, **79**, 187–193.
- [20] **Demiralp, M.**, 2003. High Dimensional Model Representation and its Application varieties, *Mathematical Research*, **9**, 146–159.
- [21] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.**, 2008. A New Approach for Data Partitioning Through High Dimensional Model Representation, *Int. Journal of Computer Mathematics*, **85**, 1779–1792.
- [22] **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.**, 2003. Hyperspherical or Hyperellipsoidal Coordinates in the Evaluation of High Dimensional Model Representation Approximants, *Mathematical Research*, **9**, 48–62.
- [23] **Akkemik, E. ve Demiralp, M.**, 2003. Algebraic Eigenvalue Problem Modelling via High Dimensional Model Representation, *Mathematical Research*, **9**, 5–18.
- [24] **Civlekoğlu, T. ve Demiralp, M.**, 2003. An HDMR Application to the Schrödinger's Equation for Free Particles Under an External Field with Dipole Polarization and Vanishing Flux Boundary Conditions, *Mathematical Research*, **9**, 110–121.
- [25] **Firat, B., Şenol, N. ve Demiralp, M.**, 2003. Hyperpolyhedral weight construction through High Dimensional Model Representation (HDMR): A Hyperrotation Based Application, *Mathematical Research*, **9**, 183–192.
- [26] **Kaman, T. ve Demiralp, M.**, 2003. A High Dimensional Model Representation Application to the Optimal Control of Harmonic Oscillator, *Mathematical Research*, **9**, 255–269.
- [27] **Şenol, N., Firat, B. ve Demiralp, M.**, 2003. Hyperpolyhedral weight construction through High Dimensional Model Representation: A Laplace Transform Application, *Mathematical Research*, **9**, 366–375.

- [28] **Yaman, İ. ve Demiralp, M.**, 2003. High Dimensional Model Representation Applications to Exponential Matrix Evaluation, *Mathematical Research*, **9**, 463–474.
- [29] **Yaman, İ. ve Demiralp, M.**, 2004. High Dimensional Model Representation Approximation of an Evolution Operator with a First Order Partial Differential Operator Argument, *Appl. Num. Anal. Comp. Math.*, **1**, 280–289.
- [30] **Kaman, T. ve Demiralp, M.**, 2004. A Parametric Sensitivity Analysis for the Solution of Extrema Evaluation Problems via a Dimensionality Reducing Approximation Method, *Appl. Num. Anal. Comp. Math.*, **1**, 260–269.
- [31] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.**, 2003. Data Partitioning via Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR) and Multivariate Interpolative Applications, *Mathematical Research*, **9**, 447–462.
- [32] **Kanmaz, A.A. ve Demiralp, M.**, 2003. Symbolic Computer Programming for Generalized High Dimensional Model Representation, *Mathematical Research*, **9**, 281–289.
- [33] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.**, 2004. A Factorized High Dimensional Model Representation on the Partitioned Random Discrete Data, *Appl. Num. Anal. Comp. Math.*, **1**, 231–241.
- [34] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.**, 2005. A Factorized High Dimensional Model Representation on the Nodes of a Finite Hyperprismatic Regular Grid, *Applied Mathematics and Computation*, **164**, 865–883.
- [35] **Kurşunlu, A. ve Demiralp, M.**, 2003. Additive and Factorized High Dimensional Model Representation Applications to the Multivariate Diffusion Equation under Vanishing Derivative Boundary Conditions, *Mathematical Research*, **9**, 315–327.
- [36] **Tunga, B. ve Demiralp, M.**, 2003. Hybrid High Dimensional Model Representation Approximations and their Utilization in Applications, *Mathematical Research*, **9**, 438–446.
- [37] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.**, 2006. Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMMR) on the Partitioned Data, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **185**, 107–132.
- [38] **Demiralp, E. ve Tunga, M.A.**, 2003. A Hybrid Programming for Projective Displaying of High Dimensional Model Representation Approximations, *Mathematical Research*, **9**, 132–145.
- [39] **S. Tuna, Burcu Tunga, N.A.B. ve Demiralp, M.**, 2009. Fluctuation Free Matrix Representation Based Univariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMMR) Over Plain and Factorized HDMMR, 2nd WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '09), s.112–117.
- [40] **Demiralp, M.**, 2006. Illustrative Implementations to Show How Logarithm Based High Dimensional Model Representation Works for Various Function Structures, *WSEAS Transaction on Computers*, **5**, 1333–1338.

- [41] **Demiralp, M.**, 2006. Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representation and the Effect on Their Types on Univariate Level, *WSEAS Transaction on Mathematics*, **5**, 582–588.
- [42] **Demiralp, M.**, 2006. Transformational High Dimensional Model Representation, *Lecture Series on Computer and Computational Sciences, Recent Progress in Computational Science and Engineering*, **7A**, 128–131.
- [43] **Korkmaz, E.**, 2009. Bütünleştirilmiş Küçük Ölçekli Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi ve çok Değişkenli İşlev Yaklaşımında Kullanımı , *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- [44] **Ziehn, T. ve Tomlin, A.S.**, 2008. A Global Sensitivity Study of Sulfur Chemistry in a Premixed Methane Flame Model Using HDMR, *International Journal of Chemical Kinetics*, **40**, 742–753.
- [45] **Ziehn, T. ve Tomlin, A.S.**, 2009. GUI-HDMR - A software tool for global sensitivity analysis of complex models, *Environmental Modelling & Software*, **24**, 775–785.
- [46] **Sridharan, J. ve Chen, T.**, 2006. Modeling multiple input switching of CMOS gates in DSM technology using HDMR, *Proceedings of Design Automation and Test in Europe*, **1-3**, 624–629.
- [47] **Rao, B.N. ve Chowdhury, R.**, 2008. Probabilistic Analysis Using High Dimensional Model Representation and Fast Fourier Transform, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science & Mechanics*, **9**, 342–357.
- [48] **Chowdhury, R. ve Rao, B.N.**, 2009. Hybrid High Dimensional Model Representation for reliability analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, **198**, 753–765.
- [49] **Gomez, M.C., Tchijov, V., Leon, F. ve Aguilar, A.**, 2008. A tool to improve the execution time of air quality models, *Environmental Modelling & Software*, **23**, 27–34.
- [50] **Banerjee, I. ve Ierapetritou, M.G.**, 2002. Design Optimization under Parameter Uncertainty for General Black-box Models, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **41**, 6687–6697.
- [51] **Banerjee, I. ve Ierapetritou, M.G.**, 2003. Parametric process synthesis for general nonlinear models, *Computers & Chemical Engineering*, **27**, 1499–1512.
- [52] **Banerjee, I. ve Ierapetritou, M.G.**, 2004. Model Independent Parametric Decision Making, *Annals of Operations Research*, **132**, 135–155.
- [53] **Tunga, B. ve Demiralp, M.**, 2007. A Novel Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) Based on the Combination of Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representations, *WSEAS-2007 Proceedings, WSEAS 12-th International Conference on Applied Mathematics for Science and Engineering*, cilt 1, s.157–161.

- [54] **Demiralp, M.**, 2009. Fluctuationlessness Theorem to Approximate Univariate Functions' Matrix Representations, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8**, 258–297.
- [55] **Demiralp, M.**, 2005. A New Fluctuation Expansion Based Method for the Univariate Numerical Integration Under Gaussian Weights, WSEAS-2005 Proceedings, WSEAS 8-th International Conference on Applied Mathematics, s.68–73.
- [56] **Fernandez, F.M.**, 2001. Introduction to perturbation theory in quantum mechanics, CRC Press, Florida.
- [57] **Axelsson, O.**, 1994. Iterative Solution Methods, Cambridge University Press, New York.
- [58] **Tunga, B. ve Demiralp, M.**, 2009. Constancy Maximization Based Weight Optimization in High Dimensional Model Representation, *Numerical Algorithms*, **52**, 435–459.
- [59] **Yaman, İ.**, 2009. Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi Tabanlı Yeni Oransal Yaklaşımlar Oluşturumu ve Sendelenimsizlik Yaklaşımını ile Etkin Biçimde Kullanımı, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- [60] **Hoffman, K. ve Kunze, R.**, 1971. Linear Algebra, Prentice Hall Inc., New Jersey.
- [61] **Oevel, W., Postel, F., Wehmeier, S. ve Gerhard, J.**, 2000. The MuPAD Tutorial, Springer, New York.
- [62] **Tunga, M.A.**, 2006. Data Partitioning and Multivariate Interpolation via Various High Dimensional Model Representations, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- [63] **Atkinson, K.E.**, 1988. An introduction to numerical analysis, Wiley, Newyork.
- [64] **Burden, R.L. ve Faires, J.D.**, 2001. Numerical Analysis, Brooks/Cole, CA.
- [65] **Tunga, B. ve Demiralp, M.**, 2008. Fluctuationlessness Approximation Towards Orthogonal Hyperprismatic Grid Construction, 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '08), s.193–197.



## **EKLER**

**EK A** : Matrislerin İzgesel Yapılarında Saptırım Açılımları ve Uygulamaları

**EK B** : Herhangi Bir Sonlu Aralık İçin Ayrık Veri Bölüntülendirimi

**EK C** : Sendelenim Matrisinin Özdeğerlerinin Özelliği





## EK A

**A** izgesel (ing: spectral) yapısı, diğer bir deyişle, özdeğer ve özyöneyle bilinmekte olan bakışık (ing: symmetric) bir dizeyi (ing: matrix), **S** ise yine bakışık olmakla birlikte izgesel özellik saptama yönünden sorun yaratabilen ama öğeleri bilinen bir dizeyi simgelemek üzere **A + S** yapısındaki bir dizeyin izgesel büyüklüklerinin belirlenmesinde saptırım açılımından yararlanmak olanaklıdır. Bu amaçla, varolma dışında izgesel sorunu (**A** dizeyinin izgesel büyüklüklerinin biliniyor olmasından dolayı) kolayca çözülebilir duruma götürmesi nedeniyle, **S** dizeyine saptırım olarak bakmak akılcı bir yaklaşımdır. **S** dizeyinin varlığının izgesel büyüklükleri, diğer bir deyişle, özdeğer ve özyöneyle (ing: eigenvector) **A** dizeyi için olan değerlerinden saptıracağı bir gerçektir. Aslında bu yüzden, bu dizey için saptırım sözcüğünü de çağrıştıran **S** simgesi kullanılmaktadır. **S**'nin izgesel büyüklük değerlerinde yaratacağı sapmaların niceliğini belirleyen temel öge bakışık bir dizey olan **S** dizeyinin ayrıntıda ne olduğundan çok onun boyunun (ing: norm) büyüklüğüdür. Bu boyu bir değiştirge (ing: parameter) olarak kullanmak ve onun değişen değerlerine karşılık izgesel büyüklüklerdeki sapmaların nasıl değiştiğini incelemek saptırım kuramının temel amacıdır. Dolayısıyla, **A + S** yerine, **S** bundan sonra boyu bir olan bir dizey olmak üzere ve  $\varepsilon$  eksi olmayan değerler alabilen bir değiştirge olmak üzere, **A +  $\varepsilon$ S** ile ilgilenmek daha yerinde bir eylemdir.

Burada sözü edilen boy kavramı belli bir kümeden eksi değer almayan gerçel sayılar kümesine değişim gerçekleştiren bir büyüklüğe karşılık gelmektedir. Bu büyüklük, özel niteliği nedeniyle işlevimsi (ing: functional) olarak adlandırılır ve aslında özel bir işlev türüdür. Bu yazıdaki incelemelerimizde, kartezyen uzaylarla birebir ilişkilendirim sağlayabilmek için, gerçel yöneylerde boy tanımı öğelerin dördüllerinin (ing: square) toplamının dördül kökü (ing: square root) olarak yapılmaktadır. Dizelerde ise bu tür boy tanımı yerine dizeyin devriği (ing: transpose) ile özünün (kendisinin) çarpımından oluşan dizeyin en büyük özdeğerinin dördülköku boy olarak kullanılmaktadır. Böylece, izgesel boy diye de adlandırılabilir işlevimsi ile birim dizeyin boyunun 1 olması sağlanmaktadır.

Birçok uygulamada izgesel boy yerine dördül boy da kullanılmaktadır. Neyin kullanılacağı niçin kullanılacağına bağlıdır. Ancak, ne kullanılırsa kullanılsın aynı anda birden çok tanım kullanılmamalıdır.

Öte yandan, izgesel boy tanımının kullanımı her boy belirleniminde başka bir özdeğer sorununun çözümünü gerektirebilecektir. Bu da çözümlerimiz ederini belki de gereksiz yere yükseltecektir. Oysaki, Frobenius ya da dördül boy belirlendirimi (ing: evaluation) kolay olan bir tanımdır. Kullanımının eder yükselmesine katkısı az olarak düşünülebilir düzeydedir. Dolayısıyla, somut belirlendirmelerde dördül boyu kullanmak daha akılcıdır. Ancak, yakınsama bölgesi saptamalarında somut değerler içeren eşitlikler yerine eşitsizliklere gereksinim duyulacağından ve orada birim dizeyin boyunun 1 olmasının türlü kolaylıklar getirmesinden dolayı, yakınsama çözümlerinde izgesel boy kullanımı daha uygun bir yaklaşım olarak düşünülebilir. Bu anlatılanlar ışığında,  $\varepsilon$  değiştirgesi belirlendirmesinde dördül boy, yakınsama çözümlerinde izgesel boy kullanacağımızı belirtmek yerinde olacaktır.

Bu yapı,  $\mathbf{S}$  dördül boyu 1 ve bakışık ama  $\varepsilon$ 'dan bağımsız olan bir dizey oldukça, tüm izgesel büyüklüklerin  $\varepsilon$  değiştirgesine olan bağımlılıklarının  $\varepsilon$ 'un doğal sayı üslülerinin bir doğrusal birleşimi olarak anlatılabileceğini akla getirir ve bu anlatıma “Saptırım Açılımı” adı verilebilir. Böyle bir açılımın,  $\varepsilon$ 'un salt eksi olmayan gerçel değerleri için değil  $\varepsilon$ 'un karmaşık sayı düzleminde seçilmiş bölgeler üzerinde incelenmesinde yarar bulunmaktadır. Bunun nedeni, gündemdeki doğrusal birleşimin bir üslü serisi diğer bir deyişle Maclaurin serisi olması ve bununla çok daha genel nitelikli Taylor serilerinin özel bir durumu olması, ve de, Taylor serilerinin yakınsama özelliklerinin incelenmesinde bağımsız değişkenin karmaşık sayı düzleminde çalışmanın yerinde ve aslında aranması gereken bir eylem olmasıdır. Dolayısıyla,  $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{S}$  dizeyinde  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{S}$  dizeylerini bakışık ve  $\mathbf{S}$ 'nin boyunu 1 almanın yanısıra  $\varepsilon$  değiştirgesini daha da esnekleştirerek bir karmaşık sayı değerli değiştirge olarak almak daha yerindedir.

Burada  $\mathbf{S}$ 'de varolduğu öngörülen  $\varepsilon$  değiştirgesinden bağımsızlık kısıtlaması kaldırılabilir ve sorun daha geniş kapsamlı duruma getirilebilir. Ancak böyle yapılırsa da,  $\mathbf{S}$ 'nin  $\varepsilon$ 'a olan bağımlılığının  $\varepsilon$ 'un eksi olmayan tamsayı üslüleri serisi olarak anlatılabileceği de varsayılmalıdır. Bu varsayım, saptırım açılımına karşı herhangi bir engel oluşmasına olanak vermez. Böylece, izgesini inceleyeceğimiz dizey  $\mathbf{A} + \varepsilon(\mathbf{S}_0 + \varepsilon\mathbf{S}_1 + \dots)$  yapısına bürünür. Aslında bu dizey  $\varepsilon$ 'a bağımlı tek bir dizeyin  $\varepsilon$ 'un üslüleri türünden açılımı olarak da düşünülebilir. Bu durumda, artık, odaklanacağımız sorunu aşağıdaki anlatımla verilen bir izgesel sorun olarak nitelendirebiliriz.

$$\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{u}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\mathbf{u}(\varepsilon) \quad (1.1)$$

Burada  $\varepsilon$  bağımlılıkları açık olarak vurgulanan  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  ve  $\lambda(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  bağımlı  $\mathbf{A}(\varepsilon)$  dizeyinin sırasıyla özyöney ve özdeğerini simgelenmektedir. Yukarıdaki anlatım bağlamında  $\mathbf{A}(0)$  ( $\mathbf{A}$  ile simgelenen) saptırımsız dizeye,  $(\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))/\varepsilon$  ise ( $\mathbf{S}$  ile simgelenen) saptırım dizeyine karşılık gelmektedir. İncelemelerimizde  $\mathbf{A}(\varepsilon)$  dizeyinin  $\varepsilon$ 'un eksi olmayan tamsayı üslüleri türünden bir serisel açılımla anlatılabildiğini varsaymak durumundayız. Dolayısıyla, altsırasayılı  $\mathbf{A}$  simgeleriyle gösterilen büyüklükler  $\varepsilon$ 'dan bağımsız dizeyler olmak üzere,

$$\mathbf{A}(\varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{A}_i \quad (1.2)$$

ve buradan da (1.1) yerine

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{u}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\mathbf{u}(\varepsilon) \quad (1.3)$$

yazabiliriz.

(1.2) varsayımıyla verilen yapılandırım (1.3)'teki bilinmeyen izgesel büyüklükler için aşağıdaki yapılandırmaların varsayımını akla getirir.

$$\mathbf{u}(\varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i \quad (1.4)$$

$$\lambda(\varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_i \quad (1.5)$$

Son iki eşitlikte  $\mathbf{u}_i$  ve  $\lambda_i$ 'lerle simgelenen, sırasıyla yöney ve sayıl (ing: scalar), büyüklüklerin  $\varepsilon$ 'dan bağımsız oldukları varsayılmaktadır. Bunların (1.3)'te kullanımı

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{A}_i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i \right) \quad (1.6)$$

yazılmasına olanak sağlar. Bu eşitliğin her iki yanında bulunan ikili seri çarpımlar Cauchy Çarpımı'ndan yararlanarak  $\varepsilon$  üslüleri türünden salt birer seri durumuna getirilebilir. Böylece,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left( \sum_{j=0}^i \mathbf{A}_j \mathbf{u}_{i-j} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left( \sum_{j=0}^i \lambda_j \mathbf{u}_{i-j} \right) \quad (1.7)$$

eşitliğine ulaşılabilir. Burada,  $\mathbf{u}_i$  ile  $\lambda_i$  büyüklüklerinin  $\varepsilon$ 'dan bağımsız olmaları, tek bir denklem olan bu eşitlikten aşağıdaki sonsuz sayıda ( $i$ 'nin her bir değeri ayrı bir denklem vermektedir) eşitliğin yazılmasına olanak sağlar.

$$\sum_{j=0}^i \mathbf{A}_j \mathbf{u}_{i-j} = \sum_{j=0}^i \lambda_j \mathbf{u}_{i-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Bunların, en yüksek altsırasayı bilinemeyen yöney olan  $\mathbf{u}_i$ 'nin yalnızca sol yanda içerileceği biçimde yeniden düzenlenmesi,  $\mathbf{A}$  ile aynı türde olan birim dizeyi  $\mathbf{I}$  'le simgelemek üzere,

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{u}_i = - \sum_{j=1}^i (\mathbf{A}_j - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{u}_{i-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

denklemlerini verir. Bu denklemlerde sağdaki sonlu toplamın, üst sınırı alt sınırından küçük olduğundan dolayı, sıfırlandığı varsayılmaktadır. Bu varsayım beklenmedik anlamsızlıklar oluşmaması için yapılmaktadır.

(1.9)'da  $i = 0$  alınır

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

elde edilir. Bu,  $\mathbf{A}(0)$ 'in, ya da diğer bir deyişle, saptırımsız dizeyin özdeğer sorunudur. Eğer, bakışık olduğu varsayılan bu dizeyin özdeğerlerinin ayrık olduğu, katlı özdeğeri olmadığı,  $m$ . özdeğer ve birimboylu özyöneynin sırasıyla  $\alpha_m$  ve  $\mathbf{a}_m$  ile simgelendiği varsayırsa (1.10)'un çözümü,  $c_0$  bu an için belirsiz bir değiştirge olmak üzere,

$$\lambda_0 = \alpha_m, \quad \mathbf{u}_0 = c_0 \mathbf{a}_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.11)$$

olarak yazılabilir. Bu beklenen ve aslında bilinçli olarak istenen bir durumdur. (1.10)'un sağ yansız oluşu (1.9)'daki sonlu toplamın 0 üstsınır ve 1 altsınır değeri için sıfır varsayımından kaynaklanmaktadır. Bu varsayım olmasaydı, kuşkusuz, bu yapı elde edilemeyecekti.

(1.11)'in ilk eşitliğinin kullanımıyla (1.9) yeniden yazılırsa, seçilmiş bir  $m$  değeri için

$$(\mathbf{A}_0 - \alpha_m \mathbf{I}) \mathbf{u}_i = - \sum_{j=1}^i (\mathbf{A}_j - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{u}_{i-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

yazılabilir. Bu  $\mathbf{u}_m$ 'nin  $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{i-1}$  ve  $\lambda_1, \dots, \lambda_i$  türünden belirlenmesi için çözülmesi gerekli olan bir yöneysel denklemdir ve katsayı dizeyinin  $\mathbf{a}_m$ ce örtülen sıfır uzayı boş olmadığından denklemin sağ yanı bu katsayı dizeyinin sol sıfır uzayına dik olmalıdır. Katsayı dizeyi bakışık olduğundan sol ve sağ sıfır uzayları aynıdır ve dolayısıyla  $\mathbf{a}_m$ ce örtülürler. Bu nedenle, bu ortak sıfır uzayına diklik demek onu örten tek yöney olan  $\mathbf{a}_m$ 'ye diklik demektir. Bu ise (1.12)'nin sağ yanının  $\mathbf{a}_m$  yöneyine dik olmasını gerektirir. Bu gereksinim aşağıdaki sonsuz sayıda sayıl denklemin yazılmasına yol açar.

$$\sum_{j=1}^i \mathbf{a}_m^T (\mathbf{A}_j - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{u}_{i-j} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Burada en yüksek altsırasayılı  $\lambda$  değeri olan  $\lambda_i$  saptırım katsayısını diğer terimler türünden çözmek olanaklıdır.  $\mathbf{u}_0 = c_0 \mathbf{a}_m$  ve  $\mathbf{a}_m^T \mathbf{a}_m = 1$  olduğu kullanılarak bu yapılırsa

$$\lambda_i = \mathbf{a}_m^T \mathbf{A}_i \mathbf{a}_m + \frac{1}{c_0} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_m^T (\mathbf{A}_j - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{u}_{i-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitliğin sağ yanında bulunan tüm bilinmeyenlerin altsırasayıları  $i$ 'den küçüktür. Bu nedenle, bu eşitlik bilinmeyenler arasında sayıl bir özyineleme tanımlamaktadır. Bilinmeyen yöneysel saptırım katsayıları arasında da bir özyineleme eşitliği elde edilmelidir. Bu amaçla, (1.12) denklemlerinden  $\mathbf{u}_i$  yöneyinin diğer bilinmeyenler türünden anlatımını veren bir eşitlik üretilmelidir. Bunun için önce (1.13)'ten aşağıdaki denklemleri üretmek

$$\sum_{j=1}^i \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T (\mathbf{A}_j - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{u}_{i-j} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

sonra da bunun sol yanının (1.12)'nin sağ yanından çıkarımının (12) denklemini değiştirmeyeceğini düşünmek yeterlidir. Bu durumda, (1.12) yerine aşağıdaki denkleme ulaşılabilir.

$$(\mathbf{A}_0 - \alpha_m \mathbf{I}) \mathbf{u}_i = - [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \sum_{j=1}^i (\mathbf{A}_j - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{u}_{i-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

Daha ilerlemek için  $\mathbf{A}_0$  dizeyinin izgesel ayrıştırımından (ing: spectral decomposition) yararlanılabilir. Eğer, bakışık olan bir dizeyin izgesel ayrıştırımı için geçerli olan anlatımın  $\mathbf{A}_0$ 'a uygulanmasından elde edilebilecek olan

$$\mathbf{A}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \quad (1.17)$$

ayrıştırımının geçerli olduğu anımsanırsa

$$(\mathbf{A}_0 - \alpha_m \mathbf{I}) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_m) \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \quad (1.18)$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\mathbf{E}_m \equiv \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n \frac{1}{\alpha_i - \alpha_m} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \quad (1.19)$$

anlatımıyla tanımlanan ve aslında  $(\mathbf{A}_0 - \alpha_m \mathbf{I})$  dizeyinin kendi değer uzayı (ing: range) üzerindeki evriği de olan  $\mathbf{E}_m$  dizeyinin aşağıdaki özdeşlikleri sağladığını kanıtlamak hiç de zor değildir.

$$\mathbf{E}_m (\mathbf{A}_0 - \alpha_m \mathbf{I}) \equiv \mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T \quad (1.20)$$

$$\mathbf{E}_m \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T) \mathbf{E}_m \equiv \mathbf{E}_m (\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T) \quad (1.21)$$

Bu bağıntının üretiminde  $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i$  ayrıştırımından yararlanılmıştır.

Burada bir dizey için kullanılan değer uzayı ya da değer bölgesi kavramı dizey altında görüntüleri doğrusal bağımsız olan belli sayıda yöneyin doğrusal birleşimi olarak anlatılabilen yöneyler uzayı olarak tanımlanmakta ve uzay içine  $\mathbf{0}$  yöneyi de alınmaktadır.  $\mathbf{0}$  yöneyinin içlerinde bulunması bu yöneyler kümesini doğrusal yöney uzayı yapan önemli bir olgudur ve bu uzayda ancak ve ancak  $\mathbf{0}$  yöneyinin dizey altındaki görüntüsü  $\mathbf{0}$  yöneyini verebilmektedir.

Bunlardan yararlanarak (1.16)'nın her iki yanının soldan  $\mathbf{E}_m$  ile çarpılmış halinin aşağıdaki biçimde yeniden yazılabileceği kolayca gösterilebilir.

$$[\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \left\{ \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^i \mathbf{E}_m (\mathbf{A}_j - \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{u}_{i-j} \right\} = \mathbf{0}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

Bu denklemlerin çözümü  $c_i$  bu an için belirsiz bir sayıl olmak üzere aşağıdaki eşitliklerle

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^i \mathbf{E}_m (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}_j) \mathbf{u}_{i-j} + c_i \mathbf{a}_m, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

verilebilir. Böylelikle,  $\mathbf{u}_i$  terimini daha küçük altsırasayılı bilinmeyen yöneyler türünden veren yöneyler arası özyineleme elde edilmiş olur. Burada, sağ yanda,  $j = i$  durumuna karşılık gelen terim ayrılır ve  $\mathbf{a}_m$ 'nin  $\mathbf{E}_m$  altında  $\mathbf{0}$  görüntüsünü verdiği anımsanır, daha sonra da, elde edilen eşitliklerde  $\mathbf{E}$  yerine  $\mathbf{E} [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T]$  yerleştirilirse  $i = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere aşağıdaki ilişkiler elde edilir.

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \mathbf{A}_i \mathbf{a}_m c_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}_j) \mathbf{u}_{i-j} + c_i \mathbf{a}_m \quad (1.24)$$

Bu sonsuz denklem takımı aranan özyinelemedir. (1.14) ile birlikte kullanılarak tüm katsayılar ilke olarak belirlenebilir. Ancak, bu anda  $c$  katsayıları belirsiz durumdadır ve belirlenmeleri için koşul verilmesi gerekmektedir. Bu koşul  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  yöneyinin boyunun 1 olması gereksinimi olarak verilebilir ve bunun tüm  $\varepsilon$  değerlerinde sağlanabilmesi için  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  yöneyinin  $\varepsilon$ 'un eksi olmayan üslüleri serisinin katsayıları üzerine koşullar getirilmesi gerekir. Bu öylesine zor bir eylem olmasa da yine de getireceği işlem çokluğundan kaçınmak için başka bir yol izlenebilir. Bu yolda,  $c_i = \delta_{i0}$  seçiminin genellikle bir yitime neden olmayacağını, üstelik önemli kolaylıklar getireceğini, göstermek amaç edinilebilir. Bu amaca yönelik olarak (1.24)'ün her iki yanı  $\varepsilon^i$  ile çarpılıp  $i$ 'nin 0'dan sonsuza dek olan tüm tamsayı değerleri için toplamı alınır

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i &= -\mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{a}_m c_0 + \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i c_i \right) \mathbf{a}_m \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}_j) \mathbf{u}_{i-j} \end{aligned} \quad (1.25)$$

eşitliğine ulaşılır. Buradaki iki toplamı kesimde  $i = 0$  ve  $i = 1$  değerleri için toplamın değerine gerçekte bir katkı gelmediğini görmek hiç de zor değildir. Eğer bu ikili toplamda,  $i$  üzerindeki toplam bu nedenle 2'den başlatıldıktan sonra  $i$  ve  $j$  yerine her yerde sırasıyla  $i + 2$  ve  $j + 1$  konulursa

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i &= -\mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{a}_m c_0 + \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i c_i \right) \mathbf{a}_m \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varepsilon^{i+2} \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\lambda_{j+1} \mathbf{I} - \mathbf{A}_{j+1}) \mathbf{u}_{i+1-j} \end{aligned} \quad (1.26)$$

yazılabilir. Burada yine ikili toplamda  $i$  ve  $j$  üzerindeki toplamın sırası üçgen özdeşliğinden yararlanarak değiştirilir ve oluşan yapıda  $i$  yerine her yerde  $i + j$  konulur daha sonra da  $i$  ve  $j$  sırasıyla  $(i - 1)$  ve  $(j - 1)$  ile her yerde değiştirilirse

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i &= -\mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{a}_m c_0 + \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i c_i \right) \mathbf{a}_m \\ &+ \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \left( \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j [\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A}_j] \right) \left( \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

sonucuna ulaşılabilir. Bu eşitlik  $\mathbf{A}(\varepsilon)$ ,  $\lambda(\varepsilon)$ ,  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  ve  $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i c_i$  ile tanımlanan  $c(\varepsilon)$  saptırım açılımları aracılığıyla çok daha kapalı olarak yeniden aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon) &= -\mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \mathbf{A}(\varepsilon) \mathbf{a}_m c_0 + c(\varepsilon) \mathbf{a}_m \\ &+ \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)) \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))\} \{\mathbf{u}(\varepsilon) - \mathbf{u}(0)\} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Bunun sağ yanında,  $\mathbf{A}(0)$ ,  $\mathbf{u}(0)$ , ve de  $\lambda(0)$ 'ın açık değerlerinden ve bunların arasındaki türlü özelliklerden yararlanarak, indirgemeler yapılırsa aşağıdaki çok daha yalın anlatıma ulaşılabilir.

$$\mathbf{u}(\varepsilon) = \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)) \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))\} \mathbf{u}(\varepsilon) + c(\varepsilon) \mathbf{a}_m \quad (1.29)$$

Buradan

$$\mathbf{u}(\varepsilon) = c(\varepsilon) [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)) \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))\}]^{-1} \mathbf{a}_m \quad (1.30)$$

yazmak da olanaklıdır. Bu bağıntı,  $(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0))$  teriminin  $c(\varepsilon)$ 'a bağımlı olmaması durumunda  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ 'un  $c(\varepsilon)$  ile orantılı olacağı, dolayısıyla, orantı çarpanı olan  $c(\varepsilon)$ 'un  $\mathbf{u}(t)$  yöneyinin boyunu 1 kılmakta kullanılabileceği anlamına gelmektedir. Ancak bunun geçerli olabilmesi için, yukarıda belirtildiği gibi,  $(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0))$  sayılı  $c(\varepsilon)$ 'dan bağımsız olmalıdır.

Son bağıntı gibi başka bir bağıntı elde edebilmek için (1.13) denklemleri,  $j = 0$ 'da toplanan terim sıfırlandığından denklemleri bozmaksızın,  $j$  üzerinde 1 yerine 0'dan başlatarak da yazılabilir ve elde edilen denklem  $\varepsilon^i$  ile çarpılıp  $i$  üzerinden 0'dan sonsuza dek toplanırsa bir Cauchy çarpımından elde edilebilecek olan iki katlı bir toplamla karşılaşılır. Bu ise aşağıdaki denklemin yazılmasına olanak sağlar.

$$\mathbf{a}_m^T [\mathbf{A}(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon) \mathbf{I}] \mathbf{u}(\varepsilon) = 0 \quad \implies \quad \mathbf{a}_m^T \mathbf{A}(\varepsilon) \mathbf{u}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \mathbf{a}_m^T \mathbf{u}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) c(\varepsilon) \quad (1.31)$$

Burada en sağdaki terim yazılırken  $\mathbf{u}_i$ 'lerin, (1.24)'le verilen açık anlatımlarından kolayca çıkarılabilecek olan,  $\mathbf{a}_m$ 'nin örttüğü uzaydaki izdüşümlerinin  $c_i$  değiştirge değerleri olduğu gerçeğinden yararlanılmıştır.

(1.31) ile (1.30) arasında  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ 'un yok edilmesi, yalnızca  $\lambda(\varepsilon)$ 'yı içeren aşağıdaki denklemin yazılmasına izin verir.

$$\lambda(\varepsilon) = \mathbf{a}_m^T \mathbf{A}(\varepsilon) [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)) \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))\}]^{-1} \mathbf{a}_m \quad (1.32)$$

$\lambda(\varepsilon)$ 'nin bu denklemini sağlama gerekliliği bizi çok önemli bir sonuca götürür. Hemen ayırdına varılabileceği gibi bu denklemde  $c(\varepsilon)$  ve dolayısıyla  $c$  belirsiz değiştirgele görünmemektedir. Bu durum,  $\lambda(\varepsilon)$ 'nin  $c$ 'lerden bağımsız olması gerektiği anlamına gelir. Bu bağımsızlık, (1.30)'dan  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ 'un  $c$  sayılarına, dolayısıyla,  $c(\varepsilon)$ 'a olan bağımlılığının tek bir çarpanla yansıtılabileceği anlamına da gelir.  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  ifadesindeki çarpan, yukarıda vurgulandığı gibi, sayıl birimboyululaştırmada kolaylıkla kullanılabilir. Dolayısıyla,  $c_0$  dışındaki tüm  $c$  sayılarını 0,  $c_0$ 'ı ise 1 değerli olarak alarak işlemler yalınlaştırılırsa yalnızca birimboyululaştırmadan ödün verilmiş olur. Bu ödün, saptırım açılımı oluşturulduktan sonra gerçekleştirilecek birimboyululaştırmayla geri kazanılabilir. Burada da öyle yapılacak ve  $c_i = \delta_{i0}$  öngörümü kullanılacaktır.

(1.30) ve (1.32) denklemleri, baştaki özdeğer sorununa saptırım açılımı uygulayıp  $\mathbf{u}_i$  ve  $\lambda_i$  saptırım katsayıları arasında özyinelemeler oluşturmak sonra da onları  $\varepsilon^i$  ile çarpıp  $i$  üzerinde sonsuz toplamlar oluşturmak yoluyla elde edilmek yerine baştaki özdeğer sorununu saptırımsızlık düzeyi  $\mathbf{A}_0$ 'ın  $\mathbf{a}_m$  ile simgelenen özyöneynin örttüğü bir boyutlu uzay ile onun sonsuz boyutlu tümleyicisi üzerinde iki denklem oluşturarak da elde edilebilirdi. Bu durumu iyice açıklayabilmek için (1.1) ile verilen özdeğer sorunumuzu yeniden aşağıdaki yapıda yazalım.

$$[\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I} + (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}_0) - (\lambda(\varepsilon) - \lambda_0) \mathbf{I}] \mathbf{u}(\varepsilon) = \mathbf{0} \quad (1.33)$$

Bunun her iki yanını daha önceden tanımladığımız  $\mathbf{E}_m$  dizeyi ile soldan çarpıp  $\mathbf{E}_m$ 'nin sağladığı daha önceden bildirilen özelliklerinden yararlanılırsa

$$[\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{\mathbf{I} + \mathbf{E}_m (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}_0) - \mathbf{E}_m (\lambda(\varepsilon) - \lambda_0) \mathbf{I}\} \mathbf{u}(\varepsilon) = \mathbf{0} \quad (1.34)$$

denklemin varılabilir.  $\mathbf{a}_m$ 'nin örttüğü bir boyutlu uzayın tümleyicisi üzerinde geçerli olan bu denklemin tüm uzaydaki karşılığı,  $c(\varepsilon)$  bu an için belirsiz ve genellik açısından  $\varepsilon$ 'a bağımlı varsayılan bir sayıl olmak üzere,

$$[\mathbf{I} + \mathbf{E}_m (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}_0) - \mathbf{E}_m (\lambda(\varepsilon) - \lambda_0) \mathbf{I}] \mathbf{u}(\varepsilon) = c(\varepsilon) \mathbf{a}_m \quad (1.35)$$

yapısındadır ve  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ 'in diğer büyüklükler türünden anlatılacağı biçimde yazılması durumunda (1.30) eşitliğiyle aynıdır. Böylelikle, (1.30)'un saptırım açılımı kullanılmadan üretilmesi başarılmış olur.

(1.32)'nin saptırımsız üretimi daha da kolaydır. Baştaki özdeğer sorununu betimleyen denklemin her iki yanı  $\mathbf{a}_m^T$  ile çarpılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathbf{a}_m^T \mathbf{A} \mathbf{u}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \mathbf{a}_m^T \mathbf{u}(\varepsilon) \quad (1.36)$$

(1.35) denkleminin her iki yanı soldan  $\mathbf{a}_m^T$  ile çarpılırsa ve  $\mathbf{a}_m^T \mathbf{E}_m = \mathbf{0}$  olduğu anımsanırsa  $\mathbf{a}_m^T \mathbf{u}(\varepsilon) = c(\varepsilon) \mathbf{a}_m^T \mathbf{a}_m$  ve dolayısıyla, (1.36) yerine,

$$\mathbf{a}_m^T \mathbf{A}(\varepsilon) \mathbf{u}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) c(\varepsilon) \quad (1.37)$$

yazılabilir. Bu ise (1.31) ile birebir örtüşmekte olup (1.32)'nin önceden olduğu gibi elde edilmesine olanak sağlar.

Artık, yakınsamaya odaklanabiliriz. Bu amaçla, (1.32)'den, önce,

$$\begin{aligned} & [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)) \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))\}]^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda(\varepsilon) - \lambda(0))^i [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}(\varepsilon))]^{-i-1} \end{aligned} \quad (1.38)$$

geometrik seri açılımına ve buradan da boy işlevimsisi ile ilgili eşitsizlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left\| [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)) \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))\}]^{-1} \right\| \\ & \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)|^i \left\| [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}(\varepsilon))]^{-1} \right\|^{i+1} \end{aligned} \quad (1.39)$$

eşitsizliğine ulaşılabilir. Bunun etkinliğini yükseltmek için sağ yandaki dizey evirtimi için

$$[\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}(\varepsilon))]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \{ \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}(\varepsilon)) \}^i \quad (1.40)$$

geometrik seri açılımı yazılabilir. Buradan, birim dizeyin boyunu 1 olarak veren izgesel boy kullanımı ve boyla ilgili eşitsizliklerden yararlanarak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılabilir.

$$\begin{aligned} & \left\| [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}(\varepsilon))]^{-1} \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\mathbf{E}_m\|^i \|\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0)\|^i \\ \implies & \left\| [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}(\varepsilon))]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{E}_m\| \|\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0)\|} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Bunun sağ yanını daha da açık bir biçime kavuşturmak için önce

$$\|\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon|^i \|\mathbf{A}_i\| \quad (1.42)$$

yazılabilir ve sonra da sağ yandaki serinin yakınsaklık yarıçapının  $\rho$  ile simgelenen artı bir değer olduğu varsayılabilir. Bu durumda, Cauchy Kanıtı'nın sonuçlarından yararlanarak,  $M_{\mathbf{A}}$  artı değerli olan ve  $\mathbf{A}(\varepsilon)$  dizeyinin yapısından belirlenebilecek olan, dolayısıyla, bilinen bir sayılı göstermek üzere,

$$\|\mathbf{A}_i\| \leq \frac{M_{\mathbf{A}}}{\rho^i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.43)$$

ve bunun (1.42)'de kullanımıyla

$$\|\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0)\| \leq \frac{M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|}{\rho - M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|} \quad (1.44)$$

buradan da (1.41)'e geçerek

$$\left\| [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] (\mathbf{A}(0) - \mathbf{A}(\varepsilon))]^{-1} \right\| \leq \frac{\rho - M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|}{\rho - (1 + \|\mathbf{E}_m\|) M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|} \quad (1.45)$$



eşitsizliğine ulaşılır. Bu üretilirken kullanılan, belki de gereksiz, büyütmelemlerden dolayı; eşitsizliğin gereğinden çok daha kötümser olduğu söylenebilir. Ancak, öyle de olsa, eşitsizliğin üretimi oldukça kolay olduğundan burada gündeme getirilmesi yeğlenmiştir.

(1.45)'in (1.39)'da kullanımı

$$\begin{aligned} & \left\| [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)) \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))\}]^{-1} \right\| \\ & \leq \frac{\rho - M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|}{\rho - (1 + \|\mathbf{E}_m\|) M_{\mathbf{A}} |\varepsilon| - (\rho - M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|) |\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)|} \end{aligned} \quad (1.46)$$

eşitsizliğine götürür.

Yakınsama incelemelerimizde daha da ileriye gitmek için (1.32)'den, çok zorlanmadan çıkarılabilecek olan, aşağıdaki eşitliği yazarak yola koyulabiliriz.

$$\begin{aligned} & \lambda(\varepsilon) - \lambda(0) = \\ & \mathbf{a}_m^T [\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0)] [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)) \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))\}]^{-1} \mathbf{a}_m \end{aligned} \quad (1.47)$$

Buradan, yine izgesel boy kullanarak,

$$\begin{aligned} & |\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)| \leq \\ & \|\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0)\| \left\| [\mathbf{I} - \mathbf{E}_m [\mathbf{I} - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T] \{(\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)) \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\varepsilon) - \mathbf{A}(0))\}]^{-1} \right\| \end{aligned} \quad (1.48)$$

eşitsizliğine ve bu eşitsizlikte (1.44) ve (1.46)'yı kullanarak

$$|\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)| \leq \frac{M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|}{\rho - (1 + \|\mathbf{E}_m\|) M_{\mathbf{A}} |\varepsilon| - (\rho - M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|) |\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)|} \quad (1.49)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizliği daha da kullanışlı duruma getirmek için aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

$$\tilde{\lambda}(\varepsilon) \equiv (\rho - M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|) |\lambda(\varepsilon) - \lambda(0)| \quad (1.50)$$

$$\kappa_1(\varepsilon) \equiv \rho - (1 + \|\mathbf{E}_m\|) M_{\mathbf{A}} |\varepsilon| \quad (1.51)$$

$$\kappa_2(\varepsilon) \equiv M_{\mathbf{A}} |\varepsilon| (\rho - M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|) \quad (1.52)$$

Bunların (1.49)'da kullanımı

$$\tilde{\lambda}(\varepsilon)^2 - \kappa_1(\varepsilon) \tilde{\lambda}(\varepsilon) + \kappa_2(\varepsilon) \geq 0 \quad (1.53)$$

eşitsizliğini verir. Bu,  $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$ 'ya göre bir ikinci derece çokterimli eşitsizliktir. Bunun sağlanması için  $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$ 'nin alabileceği değerlerin kümesini belirleyen öğeler buradaki çokterimlinin katsayıları ve dolayısıyla kökleridir. Kökler aşağıdaki anlatımlarla verilirler.

$$\tilde{\lambda}(\varepsilon)_1 = \frac{1}{2} \kappa_1(\varepsilon) - \frac{1}{2} \sqrt{\kappa_1(\varepsilon)^2 - 4\kappa_2(\varepsilon)} \quad (1.54)$$

$$\tilde{\lambda}(\varepsilon)_2 = \frac{1}{2}\kappa_1(\varepsilon) + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa_1(\varepsilon)^2 - 4\kappa_2(\varepsilon)} \quad (1.55)$$

Burada dördül kök içindeki terim eksi olmadıkça bu kökler gerçeldir ve küçük olan ilk kök olarak alınmaktadır. Köklerin gerçelliği ile ilgili durumu saptamak için, bir takım ara işlemlerden sonra elde edilebilecek olan, aşağıdaki eşitlikten yararlanılabilir.

$$\begin{aligned} \kappa_1(\varepsilon)^2 - 4\kappa_2(\varepsilon) &= \left[ \rho - \left( 3 + \|\mathbf{E}_m\| - 2\sqrt{1 + \|\mathbf{E}_m\|} \right) M_{\mathbf{A}} |\varepsilon| \right] \\ &\quad \times \left[ \rho - \left( 3 + \|\mathbf{E}_m\| + 2\sqrt{1 + \|\mathbf{E}_m\|} \right) M_{\mathbf{A}} |\varepsilon| \right] \end{aligned} \quad (1.56)$$

$\varepsilon$ 'un imsiz değerine göre bir ikinci derece çokterimlisi olan ve iki değişik birinci derece çokterimlisinin çarpımı olarak yazılmış bulunan bu büyüklüğün dördül kökü alınacağından yukarıdaki kök anlatımlarında her biri  $\varepsilon$ 'un imsiz değerine göre birinci dereceden bir çokterimlinin dördül kökü olan iki ayrı işlev görünür. Bu nedenle,  $\varepsilon$ 'un imsiz değerine göre yakınsama bölgesi bu işlevlerden yakınsama bölgesi küçük olanca belirlenir. Bu ise

$$|\varepsilon| < \frac{\rho}{M_{\mathbf{A}} \left( 3 + \|\mathbf{E}_m\| + 2\sqrt{1 + \|\mathbf{E}_m\|} \right)} \quad (1.57)$$

yazılmasına olanak sağlar.  $\varepsilon$ 'un imsiz değerinin bu kısıtlamaya uyması durumunda köklerin gerçelliği de güvence altına alınmış olur. (1.53) bağıntısındaki ikinci derece çokterimlisinin en yüksek üslü teriminin katsayısı +1 olduğundan bu çokterimli yukarıdaki kökler arasında eksi değer alır, köklerde sıfırlanır, ve de kökler dışında hep artı değer alır. Dolayısıyla, (1.53) eşitsizliği  $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$ 'nın ya küçük kökten küçük ya da büyük kökten büyük değerleri için sağlanır. Sıfırlanmalar da sağlamaya neden olur, ama biz daha çok (1.53)'ün sol yanının artı olduğu değerlerle ilgilenmeyi yeğleyeceğiz. Asıl amacımızın yakınsaklık saptaması olması  $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$  için bir üst sınır bulunmasını gerektirmektedir. Bu üst sınır yukarıda verilen köklerden küçük olanı olmalıdır. Diğer bir deyişle eşitsizliğin köklerden küçük olanından küçük kalma olgusu kullanılmalıdır. Böylece, üst sınırın  $\varepsilon$ 'un imsiz değerlerine göre açılımının her bir terimi  $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$ 'un aynı tür serisel açılımının karşılık gelen terimine imsiz değerde baskın olacaktır. Bu imsiz değerde baskın seriye İngilizce majorant seri de denir. Köklerden büyük olandan büyük olma durumu ancak imsiz değerce alttan sınırlayan bir serisel açılıma olanak verir ve bu seriye İngilizce minorant seri denir. Böylece,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\varepsilon) &\leq \frac{1}{2} \left\{ \rho - (1 + \|\mathbf{E}_m\|) M_{\mathbf{A}} |\varepsilon| \right\} - \frac{1}{2} \sqrt{\rho - \left( 3 + \|\mathbf{E}_m\| - 2\sqrt{1 + \|\mathbf{E}_m\|} \right) M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|} \\ &\quad \times \sqrt{\rho - \left( 3 + \|\mathbf{E}_m\| + 2\sqrt{1 + \|\mathbf{E}_m\|} \right) M_{\mathbf{A}} |\varepsilon|} \equiv \tilde{\lambda}(\varepsilon)_1 \end{aligned} \quad (1.58)$$

eşitsizliği bizim için (1.53)'teki eşitsizliğin aranan çözümüdür. Bu eşitsizliğin sağ yanı  $|\varepsilon|$ 'e göre 0'da 0 değeriyle başlayan bir işlevdir. Bu işlev  $|\varepsilon|$ 'nin eksi olmayan üslülerinden oluşan bir seriye açılabilir ve bu serinin yakınsama bölgesi için (1.57) ile verilen eşitsizliğin geçerli olduğu kolayca gösterilebilir. Bu seri aranan, imsiz değerde üstten sınırlayan, seridir.

Bu sonuç, diğer bir deyişle (1.57), (1.50) tanımıyla da birleştirilirse yukarıdaki yakınsaklık bölgesinin  $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$  için de geçerli olacağı yargısına götürür.

(1.55)'in sağına özenli bir bakış, biraz daha kötümserleşmeyle,

$$\tilde{\lambda}(\varepsilon) \leq 2M_{\mathbf{A}} |\varepsilon| \quad (1.59)$$

ve buradan da

$$|\lambda(\varepsilon)| \leq \frac{2M_A |\varepsilon|}{\rho - M_A |\varepsilon|} \quad (1.60)$$

yazılabileceğini gösterir. (1.30) eşitliğinde  $c(\varepsilon) = 1$  olarak alınarak oluşturulacak denklemden her iki yanın boyu alınır, boy özellikleri ve  $\mathbf{a}_m$  yöneyinin boyunun 1 olduğuyla (1.46) gündeme getirilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\|\mathbf{u}(\varepsilon)\| \leq \frac{\rho - M_A |\varepsilon|}{\kappa_1(\varepsilon) - \tilde{\lambda}(\varepsilon)} \leq \frac{\rho - M_A |\varepsilon|}{\kappa_1(\varepsilon) - \tilde{\lambda}(\varepsilon)_1} = \frac{\rho - M_A |\varepsilon|}{\tilde{\lambda}(\varepsilon)_2} = \frac{1}{M_A |\varepsilon|} \tilde{\lambda}(\varepsilon)_1 \quad (1.61)$$

Bu eşitsizliğin sağ yanında  $\varepsilon$ 'un imsiz değerinin 0 olması durumunda oransal bir tekillik var gibi görünse de paydadaki sıfırlanma pay terimi olan  $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$  işlevinin de aynı imsiz  $\varepsilon$  değerinde sıfırlanması nedeniyle aslında yoktur. Diğer bir deyişle, kaldırılabilir türden bir tekilliktir. Dolayısıyla, (1.61)'in sağ yanı  $\varepsilon$ 'un imsiz değerinin karmaşık düzleminde başlangıç noktasını içeren bir teker içinde yakınsayan bir yapıdadır. Bu yakınsama bölgesi  $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$  işlevinin yakınsama bölgesiyle aynı olmak zorundadır. Bunun nedeni ise  $\tilde{\lambda}(\varepsilon)$  işlevinin  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  işlevi için o bölge içinde baskın egemen (majorant) seri olmasıdır. Bu irdelemelerin sonucu olarak,  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ 'nin saptırım açılımının da (1.57) ile verilen yakınsaklık bölgesinde yakınsayacağı anlaşılır.

Artık (1.57)'nin yorumuna geçebiliriz.

1. Saptırım açılımı yakınsaklık yarıçapı  $\mathbf{A}(\varepsilon)$  düzeyininkiyle orantılıdır. Büyük yakınsaklık bölgesi büyük yakınsama bölgesi saptırım açılımı demektir.
2. Saptırım açılımı yakınsaklık yarıçapı  $\mathbf{A}(\varepsilon)$  düzeyinin türev imsiz değerlerinin ortak Cauchy sınırı ile evrik orantılıdır. Büyük Cauchy sınırı küçük yakınsama bölgesi saptırım açılımı demektir. Aslında bu değer bir anlamda saptırım düzeyini belirleyen bütünsel bir deyiştir. Bunun küçük olması saptırım açılımının niteliğini, diğer bir deyişle yakınsama düzeyini artırır.
3.  $\mathbf{E}_m$ 'nin boyunun artan değerleri saptırım açılımının yakınsamasını olumsuz etkiler.  $\mathbf{E}_m$ 'nin boyunun büyük olması, aslında,  $\mathbf{A}_0$  düzeyinin birbirine en yakın iki özdeğeri arasındaki uzaklığın küçük olması demektir. Bu durum, özdeğerlerin (en azından ikisinin) birbirinden yeterince ayrık olmadığı düzeylerde karşılaşırlar. Tüm özdeğerler arasındaki uzaklığın yeterince büyük olduğu düzeyler, bu nedenle, saptırım açılımına çok daha yakındır.
4. Bir önceki sözü edilen ayırdedilemezlik düzeyinin yüksek oluşu durumunun tüm özdeğerler arasında varolması ille de gerekmez. Bazıları arasında bu durum oluşsa bile onlar dışındaki özdeğerlerle ilgili  $m$  değerleri için saptırım açılımı çok daha iyi yakınsar. Diğer bir deyişle, her bir özdeğer için bir ayrışıklık düzeyi tanımlamak olanaklıdır. Bu büyüklük  $\mathbf{E}_m$ 'nin boyu olarak tanımlanabilir.  $m$  sayısına göre değişebilen bu değer her özdeğer için değişik bir saptırım açılımı yakınsamasına yol açacaktır.  $\mathbf{E}_m$ 'nin boyunun tüm  $m$  değerleri için aldığı değerlerin en büyüğü bütünsel ayrışıklık deyiştirgesi olarak tanımlanabilir. Bu bütünsel değer küçük oldukça tüm izgesel büyüklükler için saptırım açılımlarının yakınsama bölgesi çok daha geniş olacaktır.

(1.57) koşulu daha da kolay bir yapıya indirgenebilir. 1'den büyük bir gerçel sayının dördülcüğü o sayıdan küçüktür. Dördülcük yerine sayının özü alınacak olursa değer

büyütülmüş olur. Eğer (1.57)'nin sağ yanında paydadaki dördülköke bu büyütme uygulanacak olursa payda büyür ve sağ yan küçülür. Dolayısıyla, bu yoldan daha küçük ama daha kolay yapılabir bir yakınsama bölgesi elde edilir. Bu durumda, (1.57) ile çelişmeksizin onun aşağıdaki daha kötümser durumu da gündeme getirilebilir.

$$|\varepsilon| < \frac{\rho}{M_{\mathbf{A}}(5 + 2\|\mathbf{E}_m\|)} \quad (1.62)$$

Bu koşullama yukarıda sırasayılandırımı irdelemeleri değiştirmez.

Sonuç olarak, saptırım açılımına girişmeden önce  $\rho$ ,  $M_{\mathbf{A}}$ , ve de,  $\|\mathbf{E}_m\|$  ile simgelenen büyüklüğün değerlerini belirleyip oluşturulacak açılımın yakınsaması için kestirimde bulunabilir. Bu kestirime bakılarak, belli bir sayısal duyarlılık elde etmek için, açılımdan kesme yaklaştıırımı yaparken kaç terim alıkonulması gerektiği doğrultusunda önyargıda bulunulabilir.

## EK B

Bu bölümde verilen sonlu bir  $[a, b]$  aralığı  $[0, 1]$  aralığına nasıl getirilebileceğine ilişkin izlenmesi gereken adımlar verilmektedir.

Değişmez YBMG teriminin hesaplanması için geçerli olan bağıntı

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N f(g_1(x_1), \dots, g_N(x_N)) W(x_1, \dots, x_N) \quad (2.1)$$

ile verilen integral yapısıdır. Bu yapının içerisinde bulunan ağırlık işlevi

$$W(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{b_i - a_i} \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.2)$$

olarak verilsin. Aralığın  $[0, 1]$  aralığına taşınabilmesi için

$$x_i = (b_i - a_i)y_i + a_i \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.3)$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$y_i = \frac{x_i - a_i}{b_i - a_i} \quad 1 \leq i \leq N$$
$$dy_i = \frac{1}{b_i - a_i} dx_i \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.4)$$

olarak bulunacağından integral

$$f_0 = \int_0^1 dy_1 (b_1 - a_1) \cdots \int_0^1 dy_N (b_N - a_N) \times$$
$$\times f(g_1((b_1 - a_1)y_1 + a_1), \dots, g_N((b_N - a_N)y_N + a_N)) \prod_{i=1}^N \frac{1}{b_i - a_i} \quad (2.5)$$

biçimine gelir. Burada gereken kısaltmalar yapılırsa bağıntının yapısı

$$f_0 = \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N f(g_1((b_1 - a_1)y_1 + a_1), \dots, g_N((b_N - a_N)y_N + a_N)) \quad (2.6)$$

şekline gelir. Bundan sonra bu bağıntıdaki integral işlemlerinin hesaplanması yapılarak ilerlenmelidir. Bunun için yöntemde  $[0, 1]$  aralığı için yapılan işlemler uygulanır. Gerekli ara işlemlerden bazıları

$$f_0 \approx \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_{N-1} \mathbf{e}_1^{(n_N)T} \sum_{k_n=1}^{n_N} f(g_1((b_1 - a_1)y_1 + a_1), \dots, g_N(\lambda_N^{(k_N)})) \times$$
$$\times \xi_{k_N}^{(N)} \xi_{k_N}^{(N)T} \mathbf{e}_1^{(n_N)} \quad (2.7)$$

$$f_0 \approx \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{n_N} \left[ \prod_{i=1}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_i)T} \xi_{k_i}^{(i)} \right)^2 \right] \times f \left( g_1(\lambda_1^{(k_1)}), \dots, g_N(\lambda_N^{(k_N)}) \right) \quad (2.8)$$

şeklinde verilebilir ve değişmez terimin yapısı

$$f_0 \approx \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{n_N} \left[ \prod_{i=1}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_i)T} \xi_{k_i}^{(i)} \right)^2 \right] f \left( \mu_1^{(k_1)}, \dots, \mu_N^{(k_N)} \right) \quad (2.9)$$

olarak elde edilir.

Aynı işlemler (2.10) ile verilen ve birli YBMG terimlerinin yapılarını belirlemek için kullanılan denklem için tekrarlanırsa birli YBMG terimi için ilk aşamada

$$f_i(\zeta_i^{(k_i)}) = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{i-1} \int_0^1 dx_{i+1} \cdots \int_0^1 dx_N \times \\ \times f(g_1(x_1), \dots, g_{i-1}(x_{i-1}), g_i(x_i), g_{i+1}(x_{i+1}), \dots, g_N(x_N)) - f_0 \quad (2.10)$$

ifadesine ulaşılır ve sonuç olarak

$$f_i(\zeta_i^{(k_i)}) \approx \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{n_{i-1}} \sum_{k_{i+1}=1}^{n_{i+1}} \cdots \sum_{k_n=1}^{n_N} \left[ \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n_m)T} \xi_{k_m}^{(m)} \right)^2 \right] f \left( \mu_1^{(k_1)}, \dots, \mu_N^{(k_N)} \right) - f_0 \quad (2.11)$$

anlatımı elde edilir. Böylece istenilen amaca ulaşılmış olacaktır.

## EK C

$\mathbf{X}_i$  sendelenim matrisinin özdeğerleri iç çarpımın tanımlandığı  $[a_i, b_i]$  aralığında yer alırlar.

Bu özelliği kanıtlamak amacıyla  $\mathbf{X}_i$  matrisinin üzerinde oluşturulan Rayleigh oranından yararlanılabilir.  $\mathbf{v}$ ,  $n_i$  boyutlu, sıfırdan farklı herhangi bir vektör olmak üzere

$$\lambda_{min}^{(i)} \leq \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{X}_i \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \leq \lambda_{max}^{(i)} \quad (3.1)$$

eşitliği geçerlidir. Burada  $\lambda_{min}^{(i)}$ ,  $\mathbf{X}_i$  matrisinin en küçük özdeğeri,  $\lambda_{max}^{(i)}$  da en büyük özdeğeri. (3.1)'deki Rayleigh oranını  $\mathbf{X}_i$  matrisinin  $\mathbf{X}_i = (\mathbf{w}_i, \widehat{\mathbf{w}}_i^T)$  ile verilen yapısını kullanarak inceleyelim.

$$\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{X}_i \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^T (\widehat{\mathbf{w}}_i, x_i \widehat{\mathbf{w}}_i^T) \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \frac{(\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i, x_i \widehat{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{v})}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \frac{\left( (\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2, x_i \right)}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \quad (3.2)$$

$\left( (\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2, x_i \right)$  iç çarpımını ele alalım.  $(\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2$  her zaman artı (ing: positive) olan bir işlevdir.  $x_i$  de  $[a_i, b_i]$  aralığında değişmektedir. Dolayısıyla,  $a_i \leq x_i \leq b_i$  eşitsizliğinden

$$(\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2 a_i \leq (\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2 x_i \leq (\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2 b_i \quad (3.3)$$

ve

$$\left( (\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2, a_i \right) \leq \left( (\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2, x_i \right) \leq \left( (\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2, b_i \right) \quad (3.4)$$

olacaktır.  $\widehat{\mathbf{w}}_i$  vektörü dik taban işlevlerinden oluşmaktadır. Diklik özelliğinden  $(\widehat{\mathbf{w}}_i, \widehat{\mathbf{w}}_i^T) = \mathbf{I}_i$  yazılabilir. Burada  $\mathbf{I}_i$ ,  $n_i$  boyutlu birim matristir.  $\widehat{\mathbf{w}}_i$  vektörünün bu özelliğini ve  $(\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2 = \mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i \mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i = \mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i \widehat{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{v}$  eşitliğini (3.4) bağıntısında kullanarak,

$$a_i \mathbf{v}^T (\widehat{\mathbf{w}}_i, \widehat{\mathbf{w}}_i^T) \mathbf{v} \leq \left( (\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2, x_i \right) \leq b_i \mathbf{v}^T (\widehat{\mathbf{w}}_i, \widehat{\mathbf{w}}_i^T) \mathbf{v} \quad (3.5)$$

$$a_i \mathbf{v}^T \mathbf{v} \leq \left( (\mathbf{v}^T \widehat{\mathbf{w}}_i)^2, x_i \right) \leq b_i \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad (3.6)$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu durumda, (3.2)'daki Rayleigh oranının içerildiği aralık aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$a_i \leq \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{X}_i \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \leq b_i \quad (3.7)$$

Yukarıdaki eşitsizlikten de anlaşılacağı gibi  $\mathbf{X}_i$  matrisinin özdeğerleri  $[a_i, b_i]$  aralığında yer alırlar.





## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Burcu Tunga

**Doğum Yeri ve Tarihi:** İstanbul, 1978

**Adres:** İTÜ, Bilişim Enstitüsü, Ayazağa Kampüsü,34469, Maslak, İstanbul

**Lisans Üniversitesi:** İTÜ, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği, 2000

**Y. Lisans Üniversitesi:** İTÜ, Bilişim Enstitüsü, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik, 2004

### Yayın Listesi:

- **Tunga B.**, Demiralp M., 2003: Optimally Controlled Dynamics of One Dimensional Harmonic Oscillator: Linear Dipole Functions and Quadratic Penalty, *International Conference on Numerical Analysis & Computational Mathematics (NACOM-2003)*, Mayıs 23-26, Cambridge, İngiltere.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2003: Hybrid High Dimensional Model Representation Approximants and Their Utilization in Applications, *The Fourth International Conference on Tools for Mathematical Modelling*, Haziran 23-28, Saint-Petersburg, Rusya.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2004: Instantaneous Series in Stability and Robustness Investigations for Quantum Optimal Control: Harmonic Oscillator, *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Eylül 10-14, Chalkis, Yunanistan.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2007: A Novel Hybrid High Dimensional Model Representation (HDMR) Based on the Combination of Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representations, *12th WSEAS International Conference on Applied Mathematics Applied Mathematics for Science and Engineering*, Aralık 29-31, Kahire, Mısır.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2008: Fluctuationlessness Approximation Towards Orthogonal Hyperprismatic Grid Construction, *1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '08)*, Mayıs 27-30, İstanbul, Türkiye.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2008: Fluctuationlessness Approximation Based Multivariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation, *AIP Conference Proceedings 1048*, 562-565.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2009: A Nonlinear Perturbative Scheme to Solve Weight Optimization Problem of High Dimensional Model Representation (HDMR), *2nd WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '09)*, Mayıs 30-Haziran 01, İstanbul, Türkiye.

- S. Tuna, **Tunga B.**, Baykara N.A., Demiralp M., 2009: Fluctuation Free Matrix Representation Based Univariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) Over Plain and Factorized HDMR, *2nd WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '09)*, Mayıs 30-Haziran 01, İstanbul, Türkiye.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2009: Support Function Influences on the Univariate of the Enhanced Multivariate Product Representation, *Seventh International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering*, Eylül 29-Ekim 04, Rodos, Yunanistan.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2009: Constancy Maximization Based Weight Optimization in High Dimensional Model Representation, *Numerical Algorithms*, **52**, 3, 435-459, 2009.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2009: A Novel Approximation Method for Multivariate Data Partitioning: Fluctuation Free Integration Based HDMR, *BIT Numerical Mathematics*, inceleme altında.
- **Tunga B.**, Demiralp M., 2009: The Influence of the Support Functions on the Quality of Enhanced Multivariate Product Representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, inceleme altında.