

**BİR VERİ TAKIMINDAN İŞLEV ve TÜREV DEĞERİ ÜRETİMİNDE
YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM UYGULAMALARI VE
SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMINA DAYALI TÜMLEVLEME**

DOKTORA TEZİ
Ayşegül KURŞUNLU

Anabilim Dalı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Programı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

ŞUBAT 2011

**BİR VERİ TAKIMINDAN İŞLEV ve TÜREV DEĞERİ ÜRETİMİNDE
YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM UYGULAMALARI VE
SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMINA DAYALI TÜMLEVLEME**

DOKTORA TEZİ
Ayşegül KURŞUNLU
(702032002)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 Eylül 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 23 Şubat 2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin DEMİRALP (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Viktorya AVİYENTE (BÜ)
Prof. Dr. Ali ALKUMRU (GYTE)
Prof. Dr. Nazmi POSTACIOĞLU (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Adem TEKİN (İTÜ)

ŞUBAT 2011

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca sabırla çalışmalarımı takip eden, yardımlarını esirgemeyen, yol gösteren danışmanım Sayın Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e çok teşekkür ederim.

Tez izleme komitesinde ve tez jürisinde bulunan Sayın Prof. Dr. Ali ALKUMRU'ya ve Sayın Prof. Dr. Viktorya AVİYENTE'ye tez çalışmam boyunca yaptıkları yorum ve katkılardan dolayı çok teşekkür ederim. Tez jürisinde bulunan Sayın Prof. Dr. Nazmi POSTACIOĞLU'na ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Adem TEKİN'e tezime yaptıkları katkılardan dolayı çok teşekkür ederim.

Tez çalışmamı yapabilmek için bana zaman sağlayan TÜBİTAK UEKAE yöneticilerine çok teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatım boyunca beni destekleyen anneme ve babama çok teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca bana gösterdikleri sabır ve anlayıştan dolayı eşim Savaş ve canım kızım Özge'ye çok teşekkür ederim.

ŞUBAT 2011

Ayşegül KURŞUNLU

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	v
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
SEMBOL LİSTESİ	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	1
1.2 Kaynak Taraması	1
1.2.1 Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG)	2
1.2.2 YBMG’de Toplamsallık Ölçenleri.....	5
1.2.3 Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (ÇYBMG). ..	7
1.2.4 Diğer YBMG türleri ve bazı YBMG uygulamaları	10
1.2.5 Sendelenimsizlik Yaklaşırımı	12
2. İÇDEĞERBİÇİMSEL ENİYİLEMELİ YBMG	17
2.1 İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG Yönteminde Kuramsal Taban ve Değişmezlik Ölçeni Eniyilemesi	17
2.1.1 İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG için denklemlerin oluşturulması	17
2.1.2 İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG uygulamaları	25
2.1.3 İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG için verilerin dördülden sapma göreceli değeri	33
2.2 Doğrusal Altkesimsel Taban İşlevleri Kullanılarak İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG	37
2.2.1 Doğrusal Altkesimsel Taban İşlevleri kullanılarak İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG’de denklemlerin oluşturulması	37
2.2.2 Doğrusal Altkesimsel Taban İşlevleri kullanılarak İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG için bazı açıklamalar	54
2.2.3 Türev bastırimsız durum.....	54
2.2.4 Türevdeki sıçramanın bastırılması.....	55
2.2.5 Ara değer ekleme ve ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ..	57
2.2.6 Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması	59
2.2.7 İki değişkenli işlevler için yapılan uygulama	61
2.2.8 Üç değişkenli işlevler için yapılan uygulama	62

2.2.9	Doğrusal altkesimsel taban işlevleri kullanılarak oluşturulan İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG Yöntemi için gözlemler, yorum ve çıkarımlar, bulgular.....	64
2.3	İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG'nin Düzgün Olmayan Izgara Yapılarına Uygulanması	65
2.3.1	Dikdörtgenleştirme	65
2.3.2	Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması yönteminin kullanılması	67
3.	VERİLEN BİR DEĞER TAKIMINDAN TÜREV DEĞERİ ÜRETİMİ	69
3.1	Verilen Bir Değer Takımından İki Bağımsız Değişkenli İşlevler İçin Türev Değeri Üretimi	69
3.2	Verilen Bir Değer Takımından Türev Değeri Üretiminin k Boyuta Genelleştirilmesi	76
3.3	Verilen Bir Değer Takımından Türev Değeri Üretimi ile İlgili Uygulamalar	77
3.3.1	İki Boyutlu Uygulamalar	77
3.3.2	Üç Boyutlu Uygulamalar	78
3.4	Gözlemler, Yorum ve Çıkarımlar, Bulgular.....	78
4.	VERİLERDEN BİR İŞLEVIN TÜMLEVİNİN BELİRLENMESİ	81
4.1	X Dizeyinin Oluşturulması ve X Dizeyinin Özdeğer ve Özyöneylemlerine Ağırlık İşlevlerinin Etkisinin İncelenmesi	81
4.2	Sendelenimsizlik Yaklaşımında Odaklayıcı Ağırlık Kullanımı Uygulanması	83
4.3	Sendelenimsizlik Yaklaşımında Odaklayıcı Ağırlık Kullanımının Genelleştirilmesi	86
4.4	Sendelenimsizlik Yaklaşımını ile Bazı Noktalarda Değeri Bilinen Bir İşlevin Tümlevinin Bulunması.....	90
4.4.1	Denklemlerin oluşturulması.....	90
4.4.2	Örnek uygulamalar	96
4.5	Evrensel Dizey ile İlgili Bazı Gözlemler.....	97
4.6	Verilerin Tümlevlenmesinde Tek Düğüm Noktalı Sendelenimsizlik Yaklaşımını ve Ağırlık İşlevi Üreticileri	98
4.6.1	Çok terimli yapısındaki ağırlık işlevi üreticileri	98
4.6.2	Tek düğüm noktalı tümlevlemede analitiklik aralığının değiştirilmesi	106
4.6.3	Çok terimli olmayan ağırlık işlevi üreticileri.....	109
4.6.4	Elde edilen sonuçlar.....	111
4.7	Üstel Ağırlık İşlevi Kullanarak Tek Düğüm Noktalı Tümlevleme.....	111
4.7.1	Üstel ağırlığın bazı spektral özellikleri.....	112
4.7.2	Tek düğüm noktalı durumda birden çok koşul altında üstel ağırlık işlevleri.....	115
4.7.3	Sayısal örnekler	118
4.7.4	Özpolinomlar tarafından oluşturulan karakteristik altuzayı	119
4.7.5	Üstel ağırlık kullanılarak tek düğüm noktalı tümlevlemede elde edilen sonuçlar	122
4.8	Çok Düğüm Noktalı Durumda Birden Çok Koşul Altında Ağırlık İşlevi Üreticileri.....	123
5.	SONUÇLAR.....	129
	KAYNAKLAR.....	133

ÖZGEÇMİŞ	139
-----------------------	------------

KISALTMALAR

- YBMG** : Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
ÇYBMG : Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
MYBMG : Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
GYBMG : Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
EYBMG : Evriküstelimsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 ε 'a göre göreceli yanlgı değeri.	28
Çizelge 2.2 e^x işlevi için $f^{(m)}(x)$ çokterimlisinin katsayıları.	30
Çizelge 2.3 ε 'a göre göreceli yanlgı değeri.	31
Çizelge 3.1 $\exp(x_1 + x_2)$ işlevi için gerçek ve yaklaşık türev değerlerinin karşılaştırılması.	78
Çizelge 3.2 $x_1^2 + x_2^7$ işlevi için gerçek ve yaklaşık türev değerlerinin karşılaştırılması.	78
Çizelge 4.1 $n = 14$ ve $t = 4$ için dizeylerin boylarının karşılaştırılması.	98
Çizelge 4.2 $n = 20$ ve $t = 4$ için dizeylerin boylarının karşılaştırılması.	99
Çizelge 4.3 $n = 20$ ve $t = 6$ için dizeylerin boylarının karşılaştırılması.	100
Çizelge 4.4 $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 0$ ve artı α ve β değerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılması.	119
Çizelge 4.5 $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 0.5$ ve artı α ve β değerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılması.	119
Çizelge 4.6 $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 1$ ve artı α ve β değerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılması.	120
Çizelge 4.7 $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 0$ ve eksi α ve β değerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılması.	120
Çizelge 4.8 $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 0.5$ ve eksi α ve β değerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılması.	121
Çizelge 4.9 $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 1$ ve eksi α ve β değerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılması.	121
Çizelge 4.10 $\sin(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 1$ ve değişik α ve β değerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılması.	122

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : $y = e^x, n = 5, m = 19, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	27
Şekil 2.2 : $y = e^{0.1x}, n = 5, m = 19, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	28
Şekil 2.3 : $y = e^{0.01x}, n = 5, m = 19, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	29
Şekil 2.4 : $y = x^2 + 10, n = 5, m = 19, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	30
Şekil 2.5 : $y = (0.1x)^2 + 10, n = 5, m = 19, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	31
Şekil 2.6 : $y = (0.01x)^2 + 10, n = 5, m = 19, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	32
Şekil 2.7 : $y = e^x + 2, n = 5, m = 19, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	32
Şekil 2.8 : $y = \ln(e^x + 2) + 2, n = 5, m = 19, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	33
Şekil 2.9 : $y = \ln(\ln(e^x + 2) + 2) + 2, n = 5, m = 19, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	34
Şekil 2.10 : Türev bastırmasız durum: $y = \sin(5x), n = 5, x_1 = 0.00, x_2 = 0.25, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	55
Şekil 2.11 : Türev bastırmasız durum: $y = \sin(5x), n = 4, x_1 = 0.00, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	55
Şekil 2.12 : Türevdeki sıçramanın bastırılması: $y = \sin(5x), n = 4, x_1 = 0.00, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	56
Şekil 2.13 : Türevdeki sıçramanın bastırılması: $\beta_1 = 0.20, \beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.40$: $y = \sin(5x), n = 4, x_1 = 0.00, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	57
Şekil 2.14 : Türevdeki sıçramanın bastırılması: $\beta_1 = 0.25, \beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.35$: $y = \sin(5x), n = 4, x_1 = 0.00, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	58
Şekil 2.15 : Türevdeki sıçramanın bastırılması: $\beta_1 = 0.30, \beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.30$: $y = \sin(5x), n = 4, x_1 = 0.00, x_3 = 0.50, x_4 = 0.75, x_5 = 1.00.$	58
Şekil 2.16 : Ara değer ekleme ve ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması: üç ara nokta, $y = \sin(5x), n = 5, x_1 = 0.0556, x_2 = 0.2778, x_3 = 0.50, x_4 = 0.7222, x_5 = 0.9444.$	59
Şekil 2.17 : Ara Değer Ekleme ve Ara Noktalarda Türevin Sıfırlanması: beş ara nokta, $y = \sin(5x), n = 5, x_1 = 0.0385, x_2 = 0.2692, x_3 = 0.50, x_4 = 0.7308, x_5 = 0.9615.$	59
Şekil 2.18 : Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması: bir ara nokta, $y = \sin(5x), n = 5, x_1 = 0.1, x_2 = 0.3, x_3 = 0.5, x_4 = 0.7, x_5 = 0.9.$	60

Şekil 2.19 :	Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması: üç ara nokta, $y = \sin(5x)$, $n = 5$, $x_1 = 0.0556$, $x_2 = 0.2778$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.7222$, $x_5 = 0.9444$	60
Şekil 2.20 :	Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması: üç ara nokta, $y = \sin(5x)$, $n = 4$, $x_1 = 0.0556$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.7222$, $x_5 = 0.9444$	61
Şekil 2.21 :	Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması: onbir ara nokta, $y = \sin(5x)$, $n = 4$, $x_1 = 0.02$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.74$, $x_5 = 0.98$	61
Şekil 2.22 :	$g(x, 0.4)$ ve $f(x, 0.4)$ işlevlerinin karşılaştırılması.	62
Şekil 2.23 :	$g(x, 0.9)$ ve $f(x, 0.9)$ işlevlerinin karşılaştırılması.	63
Şekil 2.24 :	$g(0.5, 0.1, z)$ ve $f(0.5, 0.1, z)$ işlevlerinin karşılaştırılması.	64
Şekil 2.25 :	$f(x, y) = x + y$, $t = 0.5$, aranokta sayısı=9.	68
Şekil 2.26 :	$f(x, y) = x + y$, $t = 0.8$, aranokta sayısı=9.	68
Şekil 4.1 :	$\frac{(n+1)x^n}{\int_0^1 dx(n+1)x^n}$ ağırlığı ile elde edilen en büyük özdeğerler.	82
Şekil 4.2 :	$\frac{(n+1)(1-x)^n}{\int_0^1 dx(n+1)(1-x)^n}$ ağırlığı ile elde edilen en küçük özdeğerler.	82
Şekil 4.3 :	Değişik düğüm noktaları için birinci ağırlık polinomunun değişimi.....	102
Şekil 4.4 :	Çift dereceli ağırlık polinomları.	103
Şekil 4.5 :	Değişik düğüm noktaları için üçüncü ağırlık polinomunun değişimi.....	103
Şekil 4.6 :	$\exp(\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 0, \dots, 2$).....	104
Şekil 4.7 :	$\exp(\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 2, \dots, 7$).....	105
Şekil 4.8 :	$\exp(-\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 0, \dots, 2$).....	105
Şekil 4.9 :	$\exp(-\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 2, \dots, 7$).....	106
Şekil 4.10 :	x_1 düğüm noktasının v üstel değiştirgesine göre değişimi.	109
Şekil 4.11 :	$\exp(\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 0, \dots, 2$).	110
Şekil 4.12 :	$\exp(\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 2, \dots, 7$).	110
Şekil 4.13 :	$\exp(-\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 0, \dots, 2$).	110
Şekil 4.14 :	$\exp(-\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 2, \dots, 7$).	111
Şekil 4.15 :	$n = 2$ için \mathbf{X} 'nin özdeğerleri.	112
Şekil 4.16 :	$n = 3$ için \mathbf{X} 'nin özdeğerleri.	113
Şekil 4.17 :	$n = 4$ için \mathbf{X} 'nin özdeğerleri.	113
Şekil 4.18 :	$\mathbf{u}^{(n)T} \times \mathbf{v}$ işlevinin $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ ve $n = 2$ için grafiği.....	114
Şekil 4.19 :	$\mathbf{u}^{(n)T} \times \mathbf{v}$ işlevinin $\alpha = -1, -2, \dots, -5$ ve $n = 2$ için grafiği.	114
Şekil 4.20 :	$\mathbf{u}^{(n)T} \times \mathbf{v}$ işlevinin $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ ve $n = 3$ için grafiği.....	114
Şekil 4.21 :	$\mathbf{u}^{(n)T} \times \mathbf{v}$ işlevinin $\alpha = -1, -2, \dots, -5$ ve $n = 3$ için grafiği.	115
Şekil 4.22 :	$\mathbf{u}^{(n)T} \times \mathbf{v}$ işlevinin $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ ve $n = 4$ için grafiği.....	115
Şekil 4.23 :	$\mathbf{u}^{(n)T} \times \mathbf{v}$ işlevinin $\alpha = -1, -2, \dots, -5$ ve $n = 4$ için grafiği.	115
Şekil 4.24 :	İkinci dereceden özpolinomlara dayalı sendelenimsiz tümlevleme.	122
Şekil 4.25 :	2 noktalı durumda $\exp(\alpha x)$ işlevinin gerçek ve yaklaşık tümlevleri.....	125
Şekil 4.26 :	2 noktalı durumda $\exp(-\alpha x)$ işlevinin gerçek ve yaklaşık tümlevleri.	126

SEMBOL LİSTESİ

- σ_k : k . Basamaktan Toplamsallık Ölçeni
 σ_0 : Değişmezlik Ölçeni (0. Basamaktan Toplamsallık Ölçeni)
 W, w : Ağırlık İşlevi
 $\mathbf{X}^{(m)}$: $m \times m$ 'lik evrensel dizey
 μ : beklem (moment)

BİR VERİ TAKIMINDAN İŞLEV ve TÜREV DEĞERİ ÜRETİMİNDE YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM UYGULAMALARI VE SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMINA DAYALI TÜMLEVLEME

ÖZET

Bu tezde, işlevin analitik yapısının bilinmediği, yalnızca bazı noktalarda değerlerinin bilindiği durumlarda, bilinen bu değerlerden işlev elde edebilmek için etkin bir yöntem oluşturulmaya çalışılmıştır. Çalışma tek değişkenli işlevler için gerçekleştirilmiştir. Bu yöntem Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminde bulunan Değişmezlik Ölçenini eniyileyerek oluşturulmuştur. Bu amaçla, öncelikle bir veri takımı olarak verilen çoklulardan (ing: tuples) işlev yapısı üretilmek istenirken, YBMG'nin üzerinde tanımlandığı bir Hilbert uzayında çalışılmış ve bu uzayda seçilen sonlu sayıda işlevin örttüğü bir altuzay odak olarak alınmıştır. YBMG ile aramakta ya da kurmakta olduğumuz işlevin bu uzaydaki taban işlevlerinin bir doğrusal birleştirimi olarak anlatılabileceği öngörülmüştür. Sözkonusu olan taban işlevleri ise, öncelikle sayıları veri çokluları sayısı ile tutarlı olan Lagrange çokterimlileri olarak seçilmiştir. Yöntem oluşturulurken kullanılan doğrusal birleştirim katsayıları, doğrusal birleştirmenin YBMG'ndeki değişmezlik ölçenini en büyük kılacak biçimde seçilmiştir. Bu seçim yapılırken eniyileme için bir amaç işlevimsisi (ing: functional) seçilmiş ve buna değişmezlik ölçeni amaç terimi olarak alınırken veri düğüm noktalarında işlev değeri ile çakışma gereksinimi de kısıt olarak kullanılmıştır. Değişik türde işlevler için yapılan sınamalar sonucunda, veri takımı verilen işlevin yeterince düzgün (ing: smooth) olması durumunda işleve belli bir salınım içinde yaklaşabilen sonuçlar alınabileceği gözlenmiştir. İşlev düzgünleştikçe de salınım genliğinin çok çok azalabildiği saptanmıştır. Yapılan çalışmalar bu salınımın, aslında, çokterimli içdeğer biçiminde Runge olayı diye bilinen olgunun YBMG'ne yansması olduğu yorumunu getirmiştir. Hem bu olgudan hem de işlevin düzgün olma gereksiniminin getirdiği kısıtlamadan kaçınmak için, Lagrange çokterimlilerinin yerine daha etkin bir taban takımı oluşturulumunun yerinde olacağı savı gündeme gelmiştir. Bu nedenle altkesimsel (ing: spline) işlevler kullanımına yönelinmiştir. Daha sonra doğrusal altkesimsel taban işlevleri kullanılarak yapılan çalışma düzgün olmayan ızgara yapıları için sürdürülmüştür. Düzgün olmayan yapıları düzgün duruma getirmek için dikdörtgenleştirme dönüşümü kullanılmıştır. Bu dönüşümde, yamuk bir geometrisi olan bölge dikdörtgen duruma getirilmeye çalışılmıştır. Böylece önce düzgün geometrisi olan yapılar için kullanılan yöntemle işlev elde edilmiş, daha sonra geometrik dönüşümlerle bu yöntem düzgün olmayan yapılara da aktarılmaya çalışılmıştır. Tezde ayrıca verilerden göre türevlerin elde edilmesi için bir çalışma yapılmıştır ve işlevin yapısının bilinmediği, yalnızca bazı noktalardaki değerlerinin bilindiği durum için sendelenimsizlik yaklaşımını kullanarak tümlevleme yöntemi geliştirilmiştir. Sendelenimsizlik yaklaşımını kullanarak tümlevleme yapılırken elde edilen sonuçları iyileştirmekte kullanmak amacıyla ağırlık işlevi üreteçleri ile ilgilenilmiştir.

HIGH DIMENSIONAL MODEL REPRESENTATION APPLICATIONS ON THE PRODUCTION OF THE VALUES FOR A FUNCTION and ITS PARTIAL DERIVATIVES FROM A DATA SET AND NO FLUCTUATION APPROXIMATION ON UNIVARIATE INTEGRATION

SUMMARY

In this work we dealt with developing a method to fit a function to a given data, where the exact analytical function is not known. Here, we worked with univariate functions. To develop this method, we used High Dimensional Model Representation (HDMR) and constancy additivity measurer optimization. Additivity measurers are used to compare HDMR approximation with the original function. Constancy measurer compares the approximation which only contains the constant term with the original function. We used orthonormal basis functions in our approximation. In this study, the original function is defined in a closed interval and this interval is divided into subintervals by using n nodes. To fit a function to the given data, we used HDMRs constancy measurer optimization, that is, we tried to maximize this measurer as much as possible. Here, constancy measurer is taken as objective function and known function values are the constraints. The original function is written as a linear combination of orthonormal basis functions. Firstly, Lagrange polynomials are chosen as basis functions. The experiments realized with different functions showed that if the original function is smooth enough, the approximation gets closer to the original function in an oscillation. This can be considered as the reflection of Runge event in polynomial interpolation to HDMR. To get rid of the necessity of working with smooth functions and also to get rid of the effect of Runge event, basis functions other than Lagrange polynomials are decided to be used. For this reason we used linear spline functions as basis functions and developed a method for fitting function to a given data set. This method is also used for regions which do not have regular grid structure by making some geometrical transformations. These transformations are done by mapping a trapezoidal region to a rectangular region. We worked on a method which gives partial derivatives of a given n dimensional data set and used fluctuation free approximation for finding integral of a given data set. We also study the effect of weight functions to the eigenvalues of universal \mathbf{X} matrix. We dealt with weight function generators to improve the results that we obtained in our approximations for finding integrals.

1. GİRİŞ

1.1 Tezin Amacı

Bu tezde bir veri takımı olarak verilen çoklulardan (ing: tuples) işlev yapısı üretilmesi amaçlanmıştır. Bunun için YBMG'nin üzerinde tanımlandığı bir Hilbert uzayında çalışılmış ve bu uzayda seçilen sonlu sayıda işlevin örttüğü bir altuzay odak olarak alınmıştır. YBMG ile aramakta ya da kurmakta olduğumuz işlevin bu uzaydaki taban işlevlerinin bir doğrusal birleştirimi olarak anlatılabileceği öngörülmüştür. YBMG'nin değişmezlik ölçenini eniyileyerek işlev elde edilmeye çalışılmıştır. Düzgün ızgara yapıları için yapılan çalışma, daha sonra düzgün olmayan ızgara yapıları için de sürdürülmüştür. Tezde ayrıca verilerden göre türevlerin elde edilmesi için bir çalışma yapılmış, sendelenimsizlik yaklaşımını kullanarak tümlevleme yapılması ile ilgilenilmiş ve ağırlık işlevi üreticileri incelenmiştir.

1.2 Kaynak Taraması

Çok sayıda bağımsız değişkeni olan bir işlevin (ing: function) incelenmesi ve işlenmesi, sözgelimi tümlevinin (ing: integral) belirlenmesi gibi işlemlere sokulması, bağımsız değişken sayısının çok büyümesi durumunda, işlev yapısında kolaylık sağlayıcı bir takım özellikler olmadıkça, genellikle büyük zorluklar getirir. Günümüzde güçlü bilgisayar donanımlarının ve yazılımlarının varlığına karşın bu güçlük çoğu kez, kaba hesaplamalarla yetinmek istense bile, bizi uygulama düzeyinde çözümsüzlüğe götürür. Burada sorunun kaynağının “çok sayıda bağımsız değişkenin devrede olması” olarak düşünülebileceği gözönüne alınırsa, sorunu çözenin bir takım sıradışı yöntemler geliştirilerek olanaklı kılınacağı söylenebilir. Bunlar, alışılmış Taylor serileri ya da dikleştirilmiş çokterimli (ing: orthogonalised polynomials) veya işlev serilerinin bazı özelliklerini yansıtsa bile bağımsız değişken sayısı çok büyüdüğünde bağımsız değişkenlere bağımlılığı bu sözü edilen serilerden çok daha etkin olarak yansıtmalıdır. Bu bölümde bu doğrultuda son 15-20 yılda geliştirilmiş olan ve **Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG)** (ing: High Dimensional Model Representation) adını taşıyan bir

yöntem ayrıntılı olarak anlatılacaktır [1–42]. Bu bölümde ayrıca tezde kullanılan diğer yöntem olan sendelenimsizlik yaklaşımını da anlatılacaktır [43–62].

1.2.1 Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG)

Yukarıda, getirdiği sorunlar açısından önemi vurgulanan çok değişkenlilikle başa çıkabilmek için sorunu **böl ve yönet** görüşü çerçevesinde çözmeye çalışmanın akılcı bir yaklaşım olacağı rahatlıkla öngörülebilir. Bu doğrultuda ilk çaba Sobol [1] adlı bir matematikçi tarafından ortaya atılan bir açılım yöntemine dayanmaktadır. Bu yöntem Rabitz [4] tarafından yeniden düzenlenmiş ve Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi adı verilmiştir. Bu yöntemin temel düşüncesi aşağıda, $f(x_1, \dots, x_N)$ çok değişkenli işlevi için yazılan genel bağıntıda verilmektedir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \\ + \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^N f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + \dots + f_{123\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (1.1)$$

Bu denklemde, denklemin sol tarafında bulunan $f(x_1, \dots, x_N)$ ile gösterilen ve x_1, \dots, x_N ile simgelenen N bağımsız değişkene bağımlı olan bir çok değişkenli işlev, denklemin sağ tarafında bulunan dik bileşenlerine (ing: orthogonal components) ayrılmış olmaktadır. Burada, ilk bileşen f_0 ile simgelenen bir değişmezdir (ing: constant). Daha sonraki ilk N bileşen $f_1(x_1), \dots, f_N(x_N)$ ile simgelenen ve bir tek bağımsız değişkene bağlı olan işlevlerdir. Bunların ardından da $N(N-1)/2$ sayıda, $f_{12}(x_1, x_2), f_{13}(x_1, x_3), \dots, f_{1N}(x_1, x_N), f_{23}(x_2, x_3), \dots, f_{2N}(x_2, x_N), \dots, f_{N-1N}(x_{N-1}, x_N)$ ile simgelenen ve yalnızca iki bağımsız değişkene bağımlı işlev bileşenler gelmektedir. Diğer bileşenler de bu biçimde, gittikçe artan sayıda bağımsız değişken içeren, işlevlerden oluşmaktadır. Alabileceğimiz en son bileşen ise işlevin içerdiği kadar bağımsız değişkeni olan bir işlevdir. Sağ taraftaki terim sayısı aşağıdaki özdeşlikten bulunabilir.

$$\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \dots + \binom{N}{N-1} + \binom{N}{N} = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} = 2^N \quad (1.2)$$

Dolayısıyla, sonlu sayıda bağımsız değişkene bağımlı bir işlev için açılımda yaratılabilecek terim sayısı da sonludur. Bu sonlu sayıda terimin tümünü almak yerine, salt değişmez terimin, ya da değişmez terimle birlikte bir değişkenli bileşenlerin veya bunların yanısıra iki değişkenli bileşenlerin alınacağı biçimde kesmeler yapmak ve bu oluşan yapıları ana işleve bir yaklaşım olarak düşünmek olanaklıdır. Kaç değişkenli

bileşenlere dek ilerleyip durmak gerektiği ilgilenilen işlevin yapısına göre değişebilir. Ancak değişmez terim, bir değişkenli ve iki değişkenli bileşenlerden başka çok sayıda terim alındığında bilgisayar karmaşıklığı (ing: computational complexity) artacağından, çok sayıda YBMG bileşeni belirlemeye kalkmanın, uygulama açısından, amaca uygun olmayacağı söylenebilir.

(1.1) eşitliğinin sağ yanındaki tüm bileşenler birbirine diktir. Burada diklik koşulu bir iççarpım üzerinden tanımlanmakta ve gerek $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevinin gerekse YBMG bileşenlerinin karesi tümlevlenebilir (ing: square integrable) işlevler olduğu varsayılmaktadır. Tümlevler ve iççarpım bağımsız değişkenlerin baştan saptanan belirli bir aralığı üzerinde tanımlanmakta ve her bir değişken için o değişkene bağımlı olarak verilen ve $W_i(x_i)$ $1 \leq i \leq N$ ile gösterilen bir ağırlık işlevi kullanılmaktadır. Dolayısıyla, $u(x_1, \dots, x_N)$ ve $v(x_1, \dots, x_N)$ ile simgelenen karesi tümlevlenebilen herhangi iki işlev için iççarpım

$$(u, v) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) u(x_1, \dots, x_N) v(x_1, \dots, x_N) \quad (1.3)$$

anlatımıyla (ing: expression) tanımlanmaktadır. Ayrıca, yukarıda sözü edilen bileşenlerin kolayca saptanabilmesi için, ağırlık işlevlerinin her birinin ilgili aralık üzerindeki tümlevinin 1 olduğu yani

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.4)$$

eşitliğinin geçerli olduğu da varsayılmaktadır.

Daha önce belirtildiği gibi (1.1) eşitliğinin sağ yanındaki bileşenlerin **Diklik Koşulu**'na uymaları gerektiğinden bu bileşenler,

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} dx_i f_i(x_i) W_i(x_i) &= 0, \quad 1 \leq i \leq N \\ \int_{a_i}^{b_i} dx_i f_{jk}(x_j, x_k) W_i(x_i) &= 0, \quad (i = j) \vee (i = k), \quad 1 \leq j, k \leq N \\ \int_{a_i}^{b_i} dx_i f_{j_1 j_2 \dots j_k}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}) W_i(x_i) &= 0, \quad i \in \{j_1, \dots, j_k\}, \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N, \quad 1 \leq k \leq N & \end{aligned} \quad (1.5)$$

eşitliklerini sağlamalıdır. Bu özellik bileşenlerin belirlenmesinde temel öge olarak öngörünüme çıkar. Yukarıdaki özellikler ilk olarak Sobol tarafından birim aşkinküb (ing: unit hypercube) ve 1 ağırlığı altında **tümlevli sıfırlanma** koşulu olarak öngörülmüşlerdir. Rabitz, gerek geometriyi aşkındikçokyüzlüye (ing: rectangular hyperpolyhedron) ve

gerekse ağırlığı 1'den değişik işlevlere genişletmiş, Demiralp ise tümlev sıfırlama koşulunun, aslında, dikliğe (ing: orthogonality) karşılık geldiğinin ayırına Rabitz ile birlikte varıp, bu özelliği etkin olarak kullanmıştır.

(1.1) eşitliğinin sağ yanındaki büyüklüklerin her birinin belirlenmesi için bir takım izdüşüm işleçlerinden (ing: operator) yararlanabiliriz. Bu bağlamda, değişmez bileşeni belirlemek için

$$\mathcal{I}_0 F(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) F(x_1, \dots, x_N) \quad (1.6)$$

işlecini tanımlayalım ve (1.1) denkleminin her iki yanına bu tanımladığımız \mathcal{I}_0 işlecini uygulayalım.

$$\mathcal{I}_0 f(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{I}_0 f_0 + \sum_{i=1}^N \mathcal{I}_0 f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \mathcal{I}_0 f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \cdots \quad (1.7)$$

(1.4) ve (1.5) bağıntıları dikkate alındığında, yukarıdaki eşitlikte \mathcal{I}_0 işleci, değişmez terim dışındaki diğer terimlerde sıfırlanmaya neden olacaktır. Bu durumda,

$$\mathcal{I}_0 f(x_1, \dots, x_N) = f_0 \quad (1.8)$$

eşitliği elde edilir.

Bir bağımsız değişkenli bileşenleri belirleyebilmek için de açık tanımı aşağıda verilen işleci kullanabiliriz.

$$\mathcal{I}_j F(x_1, \dots, x_N) \equiv \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) F(x_1, \dots, x_N) \quad 1 \leq j \leq N \quad (1.9)$$

\mathcal{I}_j işleci, yukarıda yapıldığı gibi (1.1) denkleminin her iki yanına uygulanırsa,

$$\mathcal{I}_j f(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{I}_j f_0 + \sum_{i=1}^N \mathcal{I}_j f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \mathcal{I}_j f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \cdots \quad (1.10)$$

buradan da (1.4) ve (1.5) nedeniyle,

$$\mathcal{I}_j f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + f_j(x_j), \quad 1 \leq j \leq N \quad (1.11)$$

bulunur. $f_j(x_j)$, (1.8) de dikkate alınarak aşağıdaki anlatımla yazılabilir.

$$f_j(x_j) = \mathcal{I}_j f(x_1, \dots, x_N) - f_0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (1.12)$$

Genelleştirirsek, $\mathcal{S}_{i_1 \dots i_k}$, $F(x_1, \dots, x_N)$ işlevinin x_{i_1}, \dots, x_{i_k} değişkenlerini dışlayarak ilgili tümlev bölgesinde ilgili ağırlık işlevi ile çarparak tümlevlemeyi (ing: integration) anlatan bir işleç olarak, yani,

$$\mathcal{S}_{i_1 \dots i_k} F(x_1, \dots, x_N) \equiv \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_k}}^N \int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) F(x_1, \dots, x_N) \quad 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N \quad (1.13)$$

özdeşliğiyle verilecektir. Bu durumda, sözgelimi, iki bağımsız değişkenli bileşenleri bulmak için $\mathcal{S}_{j_1 j_2}$ işlecini (1.1)'e uygularsak;

$$\mathcal{S}_{j_1 j_2} f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + f_{j_1}(x_{j_1}) + f_{j_2}(x_{j_2}) + f_{j_1 j_2}(x_{j_1}, x_{j_2}) \quad 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq N \quad (1.14)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten (1.8) ve (1.12) dikkate alınarak

$$f_{j_1 j_2}(x_{j_1}, x_{j_2}) = \mathcal{S}_{j_1 j_2} f(x_1, \dots, x_N) - f_0 - f_{j_1}(x_{j_1}) - f_{j_2}(x_{j_2}) \quad 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq N \quad (1.15)$$

sonucuna ulaşılır. Diğer YBMG terimleri de aynı yoldan belirlenebilir.

1.2.2 YBMG'de Toplamsallık Ölçenleri

Buraya kadar yapılan incelemeler (1.1)'de yer alan ve (1.8), (1.12) ve (1.15) bağıntıları ile verilen toplamsal açılımın terimlerinin toplam boy'a (ing: norm) katkıları ölçülerek toplamsal yapıdan nasıl bir yaklaşımla çizemi (ing: scheme) üretilebileceği doğrultusunda bir görüş yaratır [20]. Daha önceden gösterdiğimiz gibi, (1.1) bağıntısının sağ yanındaki toplamsal açılımın içerdiği toplam terim sayısı 2^N 'dir. Dolayısıyla, (1.1) açılımı, her ne kadar dik işlev tabanlı (ing: orthogonal function) açılım da olsa, sonsuz değil sonlu sayıda terim içerir. Yine de bu sonlu terim sayısı N değiştirgesinin (ing: parameter) yani bağımsız değişken sayısının çok büyük (100 ya da 1000 gibi, bazı durumlarda daha da büyük değerlerle de karşılaşılabilmektedir) olması durumunda uygulanabilirlik ya da kullanılabilirlik özelliğini önemli ölçüde yitirebilmektedir. Bu nedenle, bu toplamsal açılımdan kesmeler yani baştan başlayarak sıra ile yalnızca belli kesimin gözönüne alınması geri kalan kesimin ise gözardı edilerek bir yaklaşımla üretilmesi, uygulama açısından büyük önem kazanmaktadır. Bu önemin bir başka nedeni de, açılımdaki ilk terimin değişmez (sabit) olmasıdır. Değişmez işlevin incelemelerde son derece büyük kolaylık getireceği açıktır. Yalnızca değişmezle yani f_0 ile yetinilmemesi durumunda hemen ardından gelen $f_i(x_i)$ ($1 \leq i \leq N$) simgelemeli ve bir bağımsız değişkenli işlevler de içerilip geriye kalanlar dışlanarak daha duyarlılıklı başka bir yaklaşımla geliştirilebilir. Bu durumun da aşırı büyük zorluklar getirmediği düşünülebilir.

Çünkü, eninde sonunda, tek bağımsız değişkenli işlevler üzerinde yapılacak işlemler analitik olarak gerçekleştirilebilmesi söz konusu olmasa bile sayısal yaklaşımlarla başarılabılır düzeydedirler. Benzer durum, gittikçe azalan düzeyde olmakla birlikte, iki ve daha çok bağımsız değişkenli işlev içeren terimler için de geçerlidir. Bütün bu anlatılanlar, YBMG tanım özdeşliğinin sağ yanında yapılan bir kesme ile oluşturulan toplamsal yaklaşımın boyunun (ing: norm) karesinin açılımı yapılan işlevin yani $f(x_1, \dots, x_N)$ 'in boyunun karesine oranının bir tür toplamsallık ölçeni (ing: additivity measurer) olarak düşünülebileceğini gösterir. Dolayısıyla, bu bağlamda, aşağıdaki tanımlar yapılabilir.

YBMG'nin "Değişmezlik Ölçeni" aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sigma_0 \equiv \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2} \quad (1.16)$$

YBMG'nin "Birinci Basamaktan Toplamsallık Ölçeni" aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_0 + \frac{\sum_{i=1}^N \|f_i(x_i)\|^2}{\|f\|^2} \quad (1.17)$$

YBMG'nin "İkinci Basamaktan Toplamsallık Ölçeni" aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sigma_2 \equiv \sigma_1 + \frac{\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \|f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})\|^2}{\|f\|^2} \quad (1.18)$$

Burada salt ilk üç toplamsallık ölçeninin verilmesiyle yetinilmektedir. Bunun nedeni uygulamada, çoğunlukla, yalnızca bunlara gereksinim duyulacağını düşünülmesidir.

Bu tanımlamalardan kolayca görülebileceği üzere σ_0 , değişmez terimin yani f_0 büyüklüğünün, tüm açılımdaki katkı düzeyini belirlemektedir. Gerek σ_0 ve gerekse diğer σ büyüklükleri 0 ile 1 arasında değer alabilmektedirler. $\sigma_0 = 1$ durumu ancak ve ancak $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevinin bir değişmez (sabit) olmasına karşılık gelir. Dolayısıyla, σ_0 büyüklüğünü "Değişmezlik Ölçeni" (ing: Constancy Measurer) olarak adlandırmak yerinde olur. Benzer bir gözlem diğer σ büyüklüklerinin de aynı biçimde adlandırılabilirliğini gösterir. Yani, sözgelimi, σ_k en çok k bağımsız değişkene bağımlı olan işlevleri içerecek biçimde yapılacak bir toplamsal kesmenin tüm açılımdaki payını simgeler. Dolayısıyla, en genel biçimiyle, σ_k büyüklüğünü " k . Basamaktan Toplamsallık Ölçeni" olarak adlandırabilir ve aşağıdaki gibi betimleyebiliriz.

$$\sigma_k \equiv \sigma_{k-1} + \frac{\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}}^N \|f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\|^2}{\|f\|^2}, \quad 1 \leq k \leq N \quad (1.19)$$

1.2.3 Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (ÇYBMG)

YBMG'nin az sayıda ilk terimiyle yaklaştırım yapılamayan durumlarda açılımın terimlerinin tümünün alıkonulmasına gerek duyulur [20, 21, 23]. Bağımsız değişken sayısının çok yüksek olduğu yapılar söz konusu ise bu durum çok sayıda terim kullanımı gerektireceğinden YBMG açılımı tüm çekiciliğini yitirecektir. Bu durumda tüm terimlerin alıkonulduğu ama yine de kolayca işlenebilir bir yapıdan yararlanılabilir. Bu yapı YBMG'nde toplama işlemini çarpma işlemi ile değiştirerek ve de toplamda 2^N tane çarpan kullanacak bir açılım tanımlamayla sağlanabilir. Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (ÇYBMG) diye adlandırabileceğimiz ve oluşturma ayrıntılarını açık olarak vermeyeceğimiz bu çizem çarpanları YBMG bileşenlerinden oluşturur ve çarpanlar önce bir değişmez terim, sonra N tane bir bağımsız değişkenli işlevden, daha sonra $N(N-1)/2$ tane iki bağımsız değişkenli işlevden ve daha sonra da, artan bir sıralamayla, daha çok bağımsız değişken içerecek biçimde tasarınırlar. Aşağıda bu yapı özetlenerek sunulmaktadır.

Çok değişkenli bir $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevi için Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(x_1, \dots, x_N) = r_0 \left[\prod_{i=1}^N (1 + r_{i_1}(x_{i_1})) \right] \left[\prod_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N (1 + r_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})) \right] \cdots [(1 + r_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N))] \quad (1.20)$$

Bu denklemin sağ yanındaki bileşenleri bulmak için (1.1) denklemini kullanarak Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi bileşenleri ile bu denklemin bileşenleri arasında eşleştirme yapabiliriz.

$$f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^N f_{i_1, i_2, i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + \cdots = r_0 \left[\prod_{i=1}^N (1 + r_{i_1}(x_{i_1})) \right] \left[\prod_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N (1 + r_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})) \right] \cdots [(1 + r_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N))] \quad (1.21)$$

Bu eşleştirme işlemini yapabilmek için aşağıda tanımlanan işlemlerden faydalanabiliriz.

$$\mathcal{F}_j^{(id)} \mathcal{F}_k^{(id)} \equiv \mathcal{F}_k^{(id)} \mathcal{F}_j^{(id)}, \quad j, k = 1, \dots, N \quad (1.22)$$

$$\left[\mathcal{I}_j^{(id)} \right]^2 \equiv \mathcal{I}_j^{(id)} \quad (1.23)$$

Bu işleci kullanarak (1.1)'de tanımlanan YBMG açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{S}(x_1, \dots, x_N) \equiv f_0 \mathcal{I} + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) \mathcal{I}_{i_1}^{(id)} + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \mathcal{I}_{i_1}^{(id)} \mathcal{I}_{i_2}^{(id)} + \dots \quad (1.24)$$

ve (1.20)'de gösterilen ÇYBMG açılımı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x_1, \dots, x_N) \equiv & r_0 \left[\prod_{i_1=1}^N \left(I + r_{i_1}(x_{i_1}) \mathcal{I}_{i_1}^{(id)} \right) \right] \times \\ & \left[\prod_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \left(I + r_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \mathcal{I}_{i_1}^{(id)} \mathcal{I}_{i_2}^{(id)} \right) \right] \dots \end{aligned} \quad (1.25)$$

(1.24) ve (1.25) denklemleri işleçlere göre eşleştirilirse, ÇYBMG'nin tüm terimleri elde edilebilir. Örneğin, çarpımsal değişmez terimi bulmak için, \mathcal{R} ve \mathcal{S} işlevlerinin \mathcal{I} birim işleciyle çarpılan terimlerini eşleştirmek gerekmektedir. Bu durumda,

$$r_0 = f_0 \quad (1.26)$$

Bir değişkenli çarpımsal terimleri bulmak için, örneğin $r_{i_1}(x_{i_1})$ terimini, \mathcal{R} ve \mathcal{S} işlevlerinin $\mathcal{I}_{i_1}^{(id)}$ işleciyle çarpılan terimlerini eşleştirmek gerekmektedir. Bu durumda aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$r_{i_1}(x_{i_1}) = \frac{f_{i_1}(x_{i_1})}{f_0} \quad (1.27)$$

Aynı sonuçları iki değişkenli ve üç değişkenli terimler için de yazarsak aşağıdaki sonuçlara ulaşırız;

$$r_{ij}(x_i, x_j) = \frac{f_{ij}(x_i, x_j) - \frac{f_i(x_i)f_j(x_j)}{f_0}}{f_0 + f_i(x_i) + f_j(x_j) + \frac{f_i(x_i)f_j(x_j)}{f_0}} \quad (1.28)$$

$$A_1 = r_i(x_i)r_j(x_j)r_k(x_k)(1 + r_{ij}(x_i, x_j) + r_{ik}(x_i, x_k) + r_{jk}(x_j, x_k)) \quad (1.29)$$

$$A_2 = (1 + r_i(x_i))(1 + r_j(x_j))(1 + r_k(x_k)) \quad (1.30)$$

$$A_3 = r_{ij}(x_i, x_j)r_{ik}(x_i, x_k) + r_{ij}(x_i, x_j)r_{jk}(x_j, x_k) + r_{ik}(x_i, x_k)r_{jk}(x_j, x_k) \quad (1.31)$$

$$A_4 = r_{ij}(x_i, x_j)r_{ik}(x_i, x_k)r_{jk}(x_j, x_k) \quad (1.32)$$

$$B_1 = (1 + r_i(x_i))(1 + r_j(x_j))(1 + r_k(x_k)) \quad (1.33)$$

$$B_2 = (1 + r_{ij}(x_i, x_j))(1 + r_{ik}(x_i, x_k))(1 + r_{jk}(x_j, x_k)) \quad (1.34)$$

$$r_{ijk}(x_i, x_j, x_k) = \frac{f_{ijk}(x_i, x_j, x_k) - f_0(A_1 + A_2(A_3 + A_4))}{f_0 B_1 B_2} \quad (1.35)$$

Burada $r_{ij}(x_i, x_j, t)$ 'yi bulmak için (1.24) ve (1.25) denklemlerinde $\mathcal{S}_i^{(id)} \mathcal{S}_j^{(id)}$ işlecinin, $r_{ijk}(x_i, x_j, x_k, t)$ 'yi bulmak için $\mathcal{S}_i^{(id)} \mathcal{S}_j^{(id)} \mathcal{S}_k^{(id)}$ işlecinin katsayıları birbirine eşitlenmiştir.

Keyfiklikleri inceleyerek \mathcal{S} işlecini yeniden yazalım.

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}}(x_1, \dots, x_N) &\equiv f_0 I + \sum_{i_1=1}^N \left(f_{i_1}(x_{i_1}) + c_{i_1}^{(1)} \right) \mathcal{S}_{i_1}^{(id)} + \\ &+ \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \left(f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + c_{i_1 i_2}^{(2,1)}(x_{i_1}) + c_{i_1 i_2}^{(2,2)}(x_{i_2}) \right) \mathcal{S}_{i_1}^{(id)} \mathcal{S}_{i_2}^{(id)} + \dots \end{aligned} \quad (1.36)$$

Burada aşağıda verilen eşitlikler geçerlidir.

$$\sum_{i_1=1}^N c_{i_1}^{(1)} = 0 \quad (1.37)$$

$$\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N c_{i_1 i_2}^{(2,1)}(x_{i_1}) = 0 \quad (1.38)$$

$$\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N c_{i_1 i_2}^{(2,2)}(x_{i_2}) = 0 \quad (1.39)$$

⋮

(1.25) ve (1.36) eşitliklerini karşılaştırsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$r_0 = f_0 \quad (1.40)$$

$$r_{i_1}(x_{i_1}) = \frac{f_{i_1}(x_{i_1})}{f_0} + \frac{c_{i_1}^{(1)}}{f_0} \quad (1.41)$$

⋮

Örnek olarak daha önce incelediğimiz

$$f(x_1, \dots, x_N) = x_1 \cdots x_N \quad (1.42)$$

işlevini ele alalım. Bu işlevin çarpımsal değişmez terimi,

$$r_0 = f_0 = \frac{1}{2^N} \quad (1.43)$$

olarak bulunur. Bir değişkenli terimleri, $c_{i_1}^{(1)}$ isteğe bağlı (keyfi) sabitlerinin 0 olduğunu varsayarsak,

$$r_{i_1}(x_{i_1}) = \frac{f_{i_1}(x_{i_1})}{f_0} = \frac{\frac{1}{2^{N-1}} \left(x_{j_1} - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2^N}} = 2 \left(x_{j_1} - \frac{1}{2}\right) \quad (1.44)$$

Bulduğumuz r_0 ve $r_{i_1}(x_{i_1})$ $1 \leq i_1 \leq N$ terimlerini (1.20) denkleminde birinci basamaktan bileşenlere kadar yerine koyarsak;

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_N) &= \\ r_0 \left[\prod_{i_1=1}^N (1 + r_{i_1}(x_{i_1})) \right] &= \\ \frac{1}{2^N} \prod_{i_1=1}^N \left(1 + 2 \left(x_{j_1} - \frac{1}{2}\right) \right) &= x_1 \cdots x_N \end{aligned} \quad (1.45)$$

Değişmez terim ve birinci basamaktan terimleri almak, bu denklem için bize ana denklemle aynı denklemi üretmiştir. Dolayısıyla daha üst terimleri hesaplamaya gerek yoktur. Yani kendisi gerçekten bir bağımsız değişkenli işlevlerin çarpımı biçiminde olan bir işlevin ÇYBMG gösterilimi salt birli terimlerin kullanımıyla yetinebilmektedir. Bu da, zaten, ÇYBMG'nin temel oluşturum nedenidir. Burada bu kadar bilgi ile yetineceğiz.

1.2.4 Diğer YBMG türleri ve bazı YBMG uygulamaları

Her ne kadar ÇYBMG çarpımsal niteliği çok ağır basan işlevler için geliştirilmiş bir yapıysa da YBMG'de bulunan çok önemli bir özellikten yoksundur. ÇYBMG için YBMG'ndeki toplamsallık ölçenlerine karşılık gelen ve **Çarpımsallık Ölçenleri** olarak adlandırabileceğimiz büyüklükler tanımlamak olanaklı olmakla birlikte, bunlar Toplamsallık Ölçenleri'nin tekdüze artan niteliklerinden yoksundurlar. Dolayısıyla, bunların aldığı değerlere bakarak ÇYBMG'nden kesmelerle oluşturulacak yaklaşımların duyarlılık nitelikleri için güvenli bir öngörümde bulunmak olanaklı değildir. Bu eksiklik ÇYBMG'nin yerini alabilecek ve tekdüze artan çarpımsallık ölçenleri tanımına olanak veren yeni bir YBMG türünün oluşturulmasına yolaçmıştır. Yeni yöntem çarpma işlemini toplama işlemine çevirecek bir dönüşümden yararlanmakta, ilgi odağında bulunan işlevin kendisi yerine karesinin (ing: square) evriküstelini (ing: logaritmasını) YBMG'ne açma düşüncesine dayandırılmaktadır. Bu yöntem Evriküstelimsel (ing: logarithmic)

YBMG (EYBMG) olarak adlandırılmaktadır ve çok çok yeni olarak gündeme getirilmiştir [28, 29].

Uygulamada birçok işlev ne tam toplamsal ne de tam çarpımsal nitelik taşır. Böyle durumlar için YBMG ile ÇYBMG'nin bir anlamda birleştirimi olan ve Melez YBMG (MYBMG) (ing: Hybrid HDMR) olarak adlandırılan bir yöntem gündeme getirilebilmekte ve birleştirim değiştirgesi (ing: parameter) üzerinden eniyilenerek (ing: be optimized) etkinliği arttırılabilmektedir [24].

YBMG'nin uzamının (ing: geometry) dik olma gerekliliği yani küb ya da dik çokyüzlü benzeri bölgeler üzerinde çalışma gereksinimi ve de ağırlık işlevinin çarpımsal nitelikte olma gereksinimi onun uygulanabilirlik alanını çok daraltmaktadır. Bu kısıtlamaları kaldırabilmek için Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (GYBMG) (ing: Generalized HDMR, GHDMR) olarak adlandırılan bir yöntem de geliştirilmiştir [31]. Ancak, bu yöntemde bileşenlerin belirlenebilmesi için tek ve çok değişkenli tümlev denklemlerinin çözülmesi gerekmekte ve kullanımın bilgisayar karmaşıklığı (ing: computational complexity) katlanılabirlik düzeyini, genellikle, çok aşmaktadır. Buna karşın, bu yöntem, düzgün bir aşkınızgaranın (ing: regular hypergrid) tüm düğüm noktaları dolu kalacak biçimde verilen veri kümelerinin değerlendirilmesi için Dirac delta işlevlerini ağırlık olarak kullanan bir yapıda gündeme getirildiğinde sözkonusu tümlev denklemler doğrusal bir denklem takımına dönüştürülebilmekte ve bilgisayar karmaşıklığı olabildiğince azaltılabilmektedir.

EYBMG'nde evriküstel (ing: logarithm) işlevinin bir dönüşüm ögesi olarak kullanılması YBMG uygulanan işlevin yerine, YBMG'ne, onun uygun bir dönüşüm altındaki görüntüsünü açan bir yöntem geliştirilmesini akla getirmiştir. Bu biçimde oluşturulan yöntem Dönüşümsel YBMG (ing: Transformational HDMR, THDMR) olarak adlandırılmış ve üzerinde yoğun çalışmalar başlatılmıştır [25].

YBMG ve türevlerinin türlü alanlarda kullanımı gündeme getirilmiştir. Sözelimi doğrusal programlama, göretürevli (ing: partial differential) ya da sıradan türevli (ing: ordinary differential) denklemlerde kullanımı, ingilizce Cut-HDMR olarak adlandırılan tek noktali açılımlar bu bağlamda gündeme getirilebilirler [7, 15]. Ancak, burada daha çok ayrıntıya girilmeyecektir.

1.2.5 Sendelenimsizlik Yaklaşırımı

Sendelenimsizlik yaklaşırımı, Demiralp tarafından geliştirilen bir kanıtsav (teorem) dayanmaktadır [44]. Bu kanıtsava göre tek değişkenli bir işlevin dizey gösterilimi, bağımsız değişkenin dizey gösteriliminin aynı işlev altındaki görüntüsü ile yaklaşırılabilir. Bu bölümde Demiralp tarafından oluşturulan bu yöntemin ayrıntıları anlatılacaktır.

Sendelenimsizlik yaklaşırımında analitik ve kapalı $[a, b]$ aralığında karesi tümlelenebilir işlevlerin oluşturduğu bir Hilbert uzayı tanımlanır. Birbirine dik ve boyları 1 olan $u_1(x), \dots, u_n(x)$ taban işlevleri Hilbert uzayının bir alt uzayı olan H_n 'i oluştursun. Bu altuzayda verilen bir $w(x)$ ağırlığı altında iççarpım aşığıdaki gibi tanımlanır.

$$(u_i, u_j) = \int_a^b dxw(x)u_i(x)u_j(x) \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1.46)$$

Burada

$$\int_a^b dxw(x) = 1 \quad (1.47)$$

eşitliği geçerlidir.

Yöntem uygulanırken bir taban takımı seçilir. Bu taban takımı y_1, \dots, y_n olsun. Bu taban takımındaki işlevlerin boyları 1'e eşit ve birbirlerine dik olmalıdır. Bunun için Gram Schmidt veya Cholesky yöntemi kullanılabilir [63, 64]. Dönüşüm sonucu elde edilen ortonormal taban işlevlerini $u_1(x), \dots, u_n(x)$ ile gösterelim. Bu taban takımlarını yöney formunda aşığıdaki gibi gösterelim.

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \dots y_n], \quad \mathbf{u}^T = [u_1 \dots u_n], \quad (1.48)$$

Ortonormalleştirmede Cholesky yöntemi kullanılırsa öncelikle $n \times n$ 'lik Gram dizeyi \mathbf{G} oluşturulmalıdır. \mathbf{G} 'nin (i, j) indisli elemanı $\int_a^b dxw(x)y_i(x)y_j(x)$ iççarpımı ile elde edilir. \mathbf{G} dizeyi kapalı yapıda aşığıdaki gibidir.

$$\mathbf{G} = (\mathbf{y}, \mathbf{y}^T) \quad (1.49)$$

\mathbf{G} dizeyinden Cholesky ayrıştırması kullanılarak alt üçgensel $n \times n$ 'lik \mathbf{L} dizeyi elde edilir.

$$\mathbf{G} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (1.50)$$

Bu durumda sırasıyla aşığıdaki işlemler yapılarak \mathbf{u} yöneyi elde edilmiş olur.

$$\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^T)(\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{I} \quad (1.51)$$

Bu denklemdeki \mathbf{I} $n \times n$ 'lik birim dizeydir.

$$(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{y}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}^T) = \mathbf{I} \quad (1.52)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{y} \quad (1.53)$$

Burada $u_1(x) = 1$ 'dir. \mathbf{X} dizeyi, yani x bağımsız değişkeninin dizey gösterilimi

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} (u_1, xu_1) & (u_1, xu_2) & \cdots & (u_1, xu_n) \\ (u_2, xu_1) & (u_2, xu_2) & \cdots & (u_2, xu_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_{n-1}, xu_1) & (u_{n-1}, xu_2) & \cdots & (u_{n-1}, xu_n) \\ (u_n, xu_1) & (u_n, xu_2) & \cdots & (u_n, xu_n) \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

şeklindedir ve \mathbf{M}_f dizeyi, yani f işlevinin dizey gösterilimi

$$\mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} (u_1, fu_1) & (u_1, fu_2) & \cdots & (u_1, fu_n) \\ (u_2, fu_1) & (u_2, fu_2) & \cdots & (u_2, fu_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_{n-1}, fu_1) & (u_{n-1}, fu_2) & \cdots & (u_{n-1}, fu_n) \\ (u_n, fu_1) & (u_n, fu_2) & \cdots & (u_n, fu_n) \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

şeklindedir.

Bağımsız değişken x 'in dizey gösterilimi \mathbf{X} kapalı şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{X} = (\mathbf{u}, x\mathbf{u}^T) \quad (1.56)$$

$f(x)$ işlevinin dizey gösterilimi \mathbf{M}_f kapalı şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{M}_f = (\mathbf{u}, f\mathbf{u}^T) \quad (1.57)$$

$\mathbf{M}_f \approx f(\mathbf{X})$ olduğunu göstermek için $f(x)$ işlevini Maclauren serisi şeklinde aşağıdaki şekilde yazalım.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \quad (1.58)$$

Bu açılımı (1.57)'de $f(x)$ 'in yerine koyalım.

$$\mathbf{M}_f = (\mathbf{u}, \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \mathbf{u}^T) \quad (1.59)$$

$$\mathbf{M}_f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i (\mathbf{u}, x^i \mathbf{u}^T) \quad (1.60)$$

Sendelenimsizlik terimleri gözardı edildiğinde $(\mathbf{u}, x^i \mathbf{u}^T)$ terimi yaklaşık olarak $(\mathbf{u}, x \mathbf{u}^T)^i$ terimine eşittir. Bu durum kullanılarak

$$\mathbf{M}_f \approx \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\mathbf{u}, x \mathbf{u}^T)^i \quad (1.61)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\mathbf{M}_f \approx f((\mathbf{u}, x \mathbf{u}^T)) \approx f(\mathbf{X}) \quad (1.62)$$

olur. (1.56)'da verildiği gibi $(\mathbf{u}, x \mathbf{u}^T)$ x 'in dizey gösterilimi olduğundan, tek değişkenli bir işlevin dizey gösterilimi, bağımsız değişkenin dizey gösteriliminin aynı işlev altındaki görüntüsü ile yaklaşılabildiği gösterilmiş olur. Bu yaklaşıma “Sendelenimsizlik Kanıtı” denir.

$u_1(x) = 1$ olduğundan $f(x)$ işlevinin tümlevi I_f aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$I_f = \int_a^b dx w(x) f(x) = \int_a^b dx w(x) u_1(x) f(x) u_1(x) = (u_1, f u_1) \quad (1.63)$$

Bu durumda, (1.63) eşitliği n elemanlı ve ilk elemanı 1 diğer elemanları 0 olan \mathbf{e}_1 yöneyi ve sendelenimsizlik yaklaşımları kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$I_f = \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}_f \mathbf{e}_1 \approx \mathbf{e}_1^T f(\mathbf{X}) \mathbf{e}_1 \quad (1.64)$$

Bu tümlev değerini \mathbf{X} dizeyinin özdeğer ve özyöneylemleri kullanarak da hesaplayabiliriz.

Bunun için $f(x)$ işlevini \mathbf{X} dizeyine göre Maclauren serisine açalım.

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathbf{X}^k \quad (1.65)$$

Bu durumda \mathbf{X} dizeyinin kuvvetleriyle ilgilenmeliyiz. Bunu yapmak için \mathbf{X} dizeyinin aşağıdaki biçimde gösterilen izgesel gösterilimini (ing: spectral representation) kullanalım.

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^n \xi_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \quad (1.66)$$

Bu denklemde ξ_j , \mathbf{X} dizeyinin özdeğerlerine, \mathbf{v}_j ise ilgili özyöneylemlerine karşılık gelmektedir. Bu eşitliğin her iki yanının karesi alındığında

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^2 &= \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \right)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j \xi_k \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j \xi_k \delta_{jk} \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k^T = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \end{aligned} \quad (1.67)$$

elde edilir. Bu eşitlikte δ_{jk} kronecker deltasıdır ve $j = k$ ise 1'e, $j \neq k$ ise 0'a eşittir. Bu durumu genelleştirdiğimizde

$$\mathbf{X}^k = \sum_{j=1}^n \xi_j^k \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T, \quad k \geq 1 \quad (1.68)$$

sonucunu yazabiliriz. \mathbf{X} dizeyi bakışık olduğundan özyöneylemleri birbirine diktir ve birim boylu hale kolayca getirilebilir. Bu nedenle

$$\mathbf{X}^0 = \sum_{j=1}^n \xi_j^0 \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \quad (1.69)$$

yazılabilir. Bu ise

$$\mathbf{X}^k = \sum_{j=1}^n \xi_j^k \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T, \quad k \geq 0 \quad (1.70)$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathbf{X}^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_{j=1}^n \xi_j^k \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \quad (1.71)$$

ve

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \quad (1.72)$$

sonucuna ulaşılmış olur.

(1.72) kullanılarak (1.64)'te verilen I_f tümlevi

$$I_f \approx \mathbf{e}_1^T f(\mathbf{X}) \mathbf{e}_1 \approx \mathbf{e}_1^T f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T\right) \mathbf{e}_1 \approx \sum_{j=1}^n (\mathbf{e}_1^T \mathbf{v}_j)^2 f(\xi_j) \quad (1.73)$$

olarak bulunur.

2. İÇDEĞERBİÇİMSSEL ENİYİLEMELİ YBMG

2.1 İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG Yönteminde Kuramsal Taban ve Değişmezlik Ölçeni Eniyilemesi

Bu çalışmada veri takımı olarak verilen çoklulardan işlev yapısı üretmek için kullanılacak yeni YBMG yöntemi için önce, “en kolay durum olarak düşünülebilecek, tek bağımsız değişkenli işlevler için verilmiş olan veri takımlarından ilgili işlevlerin en azından yaklaşık olarak belirlenebilmesi için nasıl bir yol izlenilebileceği” konusuna odaklanarak başlanabilir. Bu durumda YBMG’nde bulunacak bileşenler “değişmez terim” ve “bir bağımsız değişkenli terim” olarak ortaya çıkarlar. Böylece, kesme yaklaşımını oluşturabilmek için tek yol salt değişmez terimi alıyoyup diğer terimi yoksaymaktır. Böyle bir kesme ilgi odağındaki işlev gerçekten bir değişmezse kesin sonuç verir ve işlev değişmezlik niteliğini yitirdikçe değişmez terimde kesme yaklaşımını da duyarlılığını yitirmeye ve üstelik belli bir nitelik yitiminden sonra anlamsız duruma da gelmeye başlar. Dolayısıyla, önçalışma “neredeysse değişmez” nitelikli işlevlere odaklanmak durumundadır. Bu altbölümün geri kalan kesimlerinde bir bağımsız değişkenli işlevlerin YBMG açılımlarında değişmez terim kesmeli yaklaşımlara odaklanılacaktır. İlgilenilen verilere karşılık gelen işlev Lagrange içdeğerbiçimiyle oluşturulan bir çokterimliye ek taban işlevlerinin bir doğrusal birleştirmenin eklenmesiyle tanımlanacak ve doğrusal birleştirim katsayıları “Değişmezlik Ölçeni” eniyilemesiyle saptanacaktır.

2.1.1 İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG için denklemlerin oluşturulması

Bir bağımsız değişkenli olan ve x_1, \dots, x_n ile simgelenen n değişik noktada değeri verilen bir $f(x)$ işlevinin yapısı, belli bir aralığı içine alan bir karmaşık sayı düzleminde herhangi bir tekilliği olmaması durumunda, Lagrange içdeğerbiçim ilkeleri bağlamında, aşağıdaki anlatımla verilir

$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i) + (x - x_1) \dots (x - x_n) R(x) \quad (2.1)$$

Burada görünen ve altsırasayılı L ile simgelenen işlevler, açık yapıları aşağıda verilen Lagrange çokterimlilerini göstermektedir.

$$L_k(x) \equiv \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)},$$

$$1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq n < \infty \quad (2.2)$$

(2.1)'de görünen R işlevi $f(x)$ 'in sürekli kaldığı ve her kereden (ing: order) türevlenebilir olduğu karmaşıksayı düzlem bölgesi içinde yakınsak olan bir yapıda bulunmalıdır. Böylesine yakınsak olan bir işlev, z_0 bu bölge içinde uygun bir açılım noktasını, z ise karmaşıksayı düzleminde değer alabilen bir bağımsız değişkeni simgelemek üzere, $(z-z_0)$ büyüklüğünün doğal sayı üslü terimlerinin bir sonsuz doğrusal birleştirimi olarak yazılabilir. Bu ise gerçel sayı ekseninde de bir x bağımsız değişkeninin doğal sayı üslü terimlerinin sonsuz bir doğrusal birleştirimi olarak yazılabileceği anlamına gelir. Yani, α 'lar sayıl (ing: scalar) değiştirgeler olmak üzere

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i \quad (2.3)$$

yazılabilir. Sayısal uygulamalarda ya da yaklaştırım çizemlerinde, kuşkusuz, sonlu sayıda terimle ilgilenmek gerekir. Bu nedenle yukarıdaki toplamdaki sonsuzluğu, baştan sonlu sayıda terim alıkoyup sonluya indirgeyerek bir yaklaştırım oluşturmak yerinde bir eylemdir. Böylece, (2.3) yerine, üstüçdeğeri altıçdeğeri küçük olan toplamlar özdeş olarak 0 varsayılmak üzere,

$$R(x) = \sum_{i=0}^{m-n} \alpha_i x^i, \quad 1 \leq n < \infty, \quad n-1 \leq m < \infty \quad (2.4)$$

yazılabilir. Yukarıdaki varsayım bağlamında, burada m 'nin $n-1$ değerini alması $R(x) \equiv 0$ anlamındadır. Yani bu durumda salt Lagrange içdeğerbiçimi ile yetinilmektedir. Böylece (2.4) anlatımı üzerinden (2.1) yerine aşağıdaki açık yaklaşık anlatım yeğlenebilir.

$$f^{(m)}(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i) + (x-x_1)\dots(x-x_n) \sum_{i=0}^{m-n} \alpha_i x^i,$$

$$1 \leq n < \infty, \quad n-1 \leq m < \infty \quad (2.5)$$

Bu anlatımdan kolayca görülebileceği üzere $f^{(m)}(x)$ m . dereceden bir çokterimlidir. Yani $f(x)$ işlevimiz Lagrange içdeğerbiçiminin ürettiği çokterimliden daha yüksek dereceli olabilen bir çokterimli yapısındadır. Ancak, anlatım değişik nitelikli işlevlerin toplamı biçiminde verildiği için (2.5) anlatımıyla ilerlemeyi sürdürmek pek de rahat çalışma

olanağı sağlamayacaktır. Dolayısıyla, daha rahat çalışma olanağı sağlamak için değişik bir anlatım kullanmak çok daha akılcı olacaktır. Bu bağlamda, YBMG'nin tümlevlemeli yapısı gözönüne alınarak, dik taban takımlı anlatımını kullanmak çok daha yerinde olacaktır.

Böylece ögeleri $u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x), \dots$ ile simgelenen, altsırasayının çokterimlinin derecesini gösterdiği, $W(x)$ ağırlık işlevi altında birbirine dik ve boyları 1 olan, bir çokterimli taban takımı kullanabiliriz. Bu takım ögeleri aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$\int_a^b dx W(x) u_j(x) u_k(x) = \delta_{jk}, \quad 0 \leq j, k < \infty \quad (2.6)$$

(2.6)'da verilen δ_{jk} kronecker delta simgesidir ve değeri $j = k$ için 1'e $j \neq k$ için 0'a eşittir. Buradaki a ve b gerçel sayılarının betimlediği aralığın x_1, \dots, x_n veri noktalarının tümünü kapsayacak biçimde oluşturulması gerektiğini vurgulamakta yarar bulunmaktadır. Eğer öyle yapılmazsa, dışlanan noktalardaki katkılar devre dışı bırakılmış olacaktır.

(2.5) bağıntısı, bu yeni çokterimliler türünden aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$f^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i u_i(x), \quad 1 \leq n < \infty, \quad n-1 \leq m < \infty \quad (2.7)$$

Burada altsırasayılı $\bar{\alpha}$ büyüklüleri bu an için belirsiz olan değiştirgeleri göstermektedir. (2.5)'te $m - n + 1$ belirsiz değiştirge bulunmasına karşın bu son eşitlikte $m + 1$ belirsiz değiştirge bulunmaktadır. Yani n sayıda artık (ing: residual) değiştirge bulunmaktadır. Buna karşın (2.5) eşitliğindeki $f^{(m)}(x)$ işlevi veri noktalarında $f(x)$ işlevinin verilen değerlerini alırken (2.7)'deki $f^{(m)}(x)$ bu özellikten yoksundur. Bu özelliği sağlamak için aşağıdaki n sayıda koşul (2.7)'ye ek olarak getirilmelidir.

$$\sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i u_i(x_k) = f(x_k), \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq n < \infty, \quad n-1 \leq m < \infty \quad (2.8)$$

İlerleyebilmek ve daha tıktız (ing: compact) yapılarla çalışabilmek için aşağıdaki yöney (ing: vector) tanımlarını yapabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(x)^T &\equiv [u_0(x), \dots, u_m(x)], \\ \bar{\alpha}_m^T &\equiv [\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_m], \\ 1 \leq n < \infty, \quad n-1 \leq m < \infty \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.7) ve (2.8) anlatımları, (2.9) yardımıyla, aşağıdaki biçimde yazılabilirler.

$$f^{(m)}(x) = \bar{\alpha}_m^T \mathbf{u}_m(x) \quad (2.10)$$

$$\bar{\alpha}_m^T \mathbf{u}_m(x_k) = f(x_k), \quad (2.11)$$

Son eşitlikleri ilerideki incelemelerimizde daha etkin kullanabilmek için $\mathbf{u}_m(x_k)$ ($1 \leq k \leq n$) yöneyleri yerine onlardan Gram–Schmidt yöntemiyle üretilen, birbirine dik ve boyları 1 olan yöneylerden oluşan takımı gündeme getirmek gerekir. Eğer bu takımın öğeleri $\bar{\mathbf{u}}_k$ ($1 \leq k \leq n$) ile simgelenirse $\bar{\mathbf{u}}_1$ 'in $\mathbf{u}_m(x_1)$ yöneyinin kendi boyuna bölünmesi ile elde edilen yöney olacağını kestirmek hiç de zor değildir. Yani $\bar{\mathbf{u}}_1$ salt $\mathbf{u}_m(x_1)$ yöneyi üzerinde bir doğrusal birleştirmedir. Bu durum $\bar{\mathbf{u}}_2$ yöneyine $\mathbf{u}_m(x_1)$ ile $\mathbf{u}_m(x_2)$ üzerinde bir doğrusal birleştirim olma biçiminde yansır. Aynı biçimde $\bar{\mathbf{u}}_k$ yöneyi de $\mathbf{u}_m(x_1), \dots, \mathbf{u}_m(x_k)$ yöneyleri üzerinde bir doğrusal birleştirim olarak anlatılabilir. Dolayısıyla, \mathbf{Q} ($n \times n$) türü değişmez bir kare dizeyi (ing:square matrix) simgelemek üzere

$$[\mathbf{u}_m(x_1) \dots \mathbf{u}_m(x_n)] \mathbf{Q} = [\bar{\mathbf{u}}_1 \dots \bar{\mathbf{u}}_n], \quad 1 \leq n < \infty, \quad n-1 \leq m < \infty \quad (2.12)$$

yazabiliriz. Eğer

$$[f(x_1) \dots f(x_n)] \mathbf{Q} = [\bar{f}_1 \dots \bar{f}_n], \quad 1 \leq n < \infty, \quad n-1 \leq m < \infty \quad (2.13)$$

tanımlamaları yapılacak olursa aşağıdaki koşul eşitliklerini yazmak olanaklı duruma gelir.

$$\bar{\alpha}_m^T \bar{\mathbf{u}}_k = \bar{f}_k, \quad 1 \leq n < \infty, \quad n-1 \leq m < \infty, \quad 1 \leq k \leq n \quad (2.14)$$

Artık, YBMG uygulamasına geçebiliriz. Bunun için aşağıdaki YBMG açılımı yazılabilir.

$$f^{(m)}(x) = f_0^{(m)} + f_1^{(m)}(x) \quad (2.15)$$

Buradaki değişmez YBMG bileşeni $f_0^{(m)}$ aşağıdaki açık anlatımla verilebilir.

$$f_0^{(m)} = \int_a^b dx W(x) f^{(m)}(x) \quad (2.16)$$

Bu anlatımda YBMG aralığı olarak $[a, b]$, ağırlığı olarak da $W(x)$ işlevi, alınmaktadır.

(2.16)'te (2.7) kullanılacak olursa, (2.6) ve $u_0(x) \equiv 1$ olduğu anımsanırsa

$$\begin{aligned} f_0^{(m)} &= \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i \int_a^b dx W(x) u_i(x) = \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i \int_a^b dx W(x) u_0(x) u_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i \delta_{i0} = \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_m^T \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

yazılabilir. Burada \mathbf{e}_1 ile $(m+1)$ boyutlu kartezyen uzayın birinci kartezyen birim yöneyi simgelenmektedir, yani bu yöneyin ilk elemanı 1, diğer elemanları 0'dır.

Son bağıntıdan aşağıdaki boy ilişkisine geçilebilir.

$$\|f_0^{(m)}\|^2 = \bar{\alpha}_m^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \bar{\alpha}_m \quad (2.18)$$

Öte yandan $f^{(m)}(x)$ 'in boyu için de aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|f^{(m)}\|^2 &= \int_a^b dx W(x) f^{(m)}(x)^2 = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j \int_a^b dx W(x) u_i(x) u_j(x) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j \delta_{ij} = \bar{\alpha}_m^T \bar{\alpha}_m \end{aligned} \quad (2.19)$$

Buradan YBMG'nin değişmezlik ölçeni olarak aşağıdaki anlatım elde edilir.

$$\sigma_0 \equiv \frac{\|f_0^{(m)}\|^2}{\|f^{(m)}\|^2} = \frac{\bar{\alpha}_m^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \bar{\alpha}_m}{\bar{\alpha}_m^T \bar{\alpha}_m} \quad (2.20)$$

Eğer $\bar{\alpha}_m$ 'nin tüm ögeleri bağımsız büyüklükler olsaydı, amacımızın σ_0 'ı $\bar{\alpha}_m$ 'ye göre eniyilemek olmasından dolayı, σ_0 'ı amaç işlevsisi olarak almak olanaklı olabilecekti. Ancak (2.14) koşullarının varlığı Lagrange çarpanlı aşağıdaki amaç işlevsisinin (ing: cost functional) kullanımını gerekli kılar.

$$\mathcal{J}(\bar{\alpha}_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \equiv \frac{\|f_0^{(m)}\|^2}{\|f^{(m)}\|^2} = \frac{\bar{\alpha}_m^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \bar{\alpha}_m}{\bar{\alpha}_m^T \bar{\alpha}_m} + \sum_{k=1}^n \lambda_k (\bar{\alpha}_m^T \bar{\mathbf{u}}_k - \bar{f}_k) \quad (2.21)$$

Burada λ 'lar Lagrange çarpanlarını simgelemektedir. Bu amaç işlevsisinin λ 'lara göre türevlerinin 0'a eşit kılınması (2.14) eşitliklerinin elde edilmesini sağlar ki bu da, aslında, beklenen bir durumdur. Buna karşın, $\bar{\alpha}$ 'lara göre türevlemeler yeni denklemler üretir. Bu denklemlerin yöneysel olarak bir çırpıda yazılmış durumları aşağıda verilmektedir.

$$-\frac{2\sigma_0}{\bar{\alpha}_m^T \bar{\alpha}_m} \left(\mathbf{I}_{m+1} - \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \right) \bar{\alpha}_m + \sum_{k=1}^n \lambda_k \bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

Burada \mathbf{I}_{m+1} $(m+1) \times (m+1)$ türünde birim matristir. Eğer

$$\bar{\lambda}_k \equiv \frac{\bar{\alpha}_m^T \bar{\alpha}_m}{2\sigma_0} \lambda_k, \quad 1 \leq k \leq n \quad (2.23)$$

tanımlamaları yapılacak olursa (2.22) eşitliği aşağıdaki biçimde yeniden düzenlenebilir.

$$\bar{\alpha}_m = \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \left(\mathbf{I}_{m+1} - \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}_k \quad (2.24)$$

Buradan $\bar{\lambda}$ 'leri saptayabilmek için, doğrusal bağımsız $\bar{\mathbf{u}}$ yöneylerinin herbirinin devriğiyle eşitliği soldan çarparak, aşağıdaki eşitlikleri oluşturabiliriz.

$$\sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{u}}_j^T \left(\mathbf{I}_{m+1} - \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}_k \bar{\lambda}_k = \bar{\mathbf{u}}_j^T \bar{\alpha}_m = \bar{f}_j, \quad 1 \leq j \leq n \quad (2.25)$$

Buradan $\bar{\lambda}$ büyüklüklerini kare dizey gösterilimleriyle (ing: square matrix representations) anlatacak biçimde saptamak istersek aşağıdaki tanımlamalara geçebiliriz.

$$\mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix}, \quad M_{jk} = \bar{\mathbf{u}}_j^T \left(\mathbf{I}_{m+1} - \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}_k, \quad 1 \leq j, k \leq n$$

$$\bar{\lambda}^T \equiv [\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n], \quad \mathbf{f}^T \equiv [f(x_1) \dots f(x_n)], \quad \bar{\mathbf{f}}^T \equiv [\bar{f}_1 \dots \bar{f}_n], \quad (2.26)$$

Bunlar (2.25)'in aşağıdaki anlatımla yeniden yazılmasına olanak sağlar.

$$\mathbf{M} \bar{\lambda} = \bar{\mathbf{f}} \quad (2.27)$$

Eğer burada \mathbf{M} kare dizeyinin evirtilebilir (ing: invertable) olduğu varsayılacak olursa

$$\bar{\lambda} = \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{f}} \quad (2.28)$$

arasonucuna ulaşılabilir. Bu sonuçta $\bar{\mathbf{f}}$ yöneyinin ögeleri (2.13)'ten bilinen değerler olmakla birlikte \mathbf{M}^{-1} kare dizeyinde hem evirtim yapılarak açık bir sonuca ulaşılması gerekmekte hem de σ_0 değeri bir bilinmeyen olarak görünmektedir. Bu iki sorunu gidermek için önce evirtim ile ilgilenelim. Bu amaçla, $\mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 = 1$ ve dolayısıyla $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T)^j = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T, 1 \leq j < \infty$ olduğu gözönüne alınarak, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I}_{m+1} - \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \right)^{-1} &= \mathbf{I}_{m+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0^j} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T)^j = \mathbf{I}_{m+1} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0^j} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \\ &= \mathbf{I}_{m+1} - \frac{1}{1 - \sigma_0} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \end{aligned} \quad (2.29)$$

Burada, sonsuz seride ve dolayısıyla evirtimde, $\sigma_0 < 1$ için yakınsama sözkonusudur. Ancak, bağıntının $\sigma_0 = 1$ dışındaki bütün σ_0 değerleri için geçerli olduğunu göstermek hiç de zor değildir. Evrik ile asıl dizeyin çarpımının sonucunun \mathbf{I}_{m+1} olacağını göstermek bu amaç için yeterli olacaktır.

$$M_{jk} = \bar{\mathbf{u}}_j^T \bar{\mathbf{u}}_k - \frac{1}{1 - \sigma_0} \bar{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \bar{\mathbf{u}}_k, = \delta_{jk} - \frac{1}{1 - \sigma_0} v_j v_k, \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (2.30)$$

$$v_j \equiv \bar{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{e}_1, \quad 1 \leq j \leq n \quad (2.31)$$

Eğer

$$\mathbf{v}^T \equiv [v_1 \dots v_n] \quad (2.32)$$

tanımı yapılırsa (2.31)'den aşağıdaki arasonuca ulaşmak hiç de zor değildir.

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{1 - \sigma_0} \mathbf{v}\mathbf{v}^T \quad (2.33)$$

Buradan aşağıdaki eşitliklere geçilebilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1} &= \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{1 - \sigma_0} \mathbf{v}\mathbf{v}^T \right)^{-1} = \mathbf{I}_n + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \sigma_0)^j} (\mathbf{v}\mathbf{v}^T)^j \\ &= \mathbf{I}_n + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \sigma_0)^j} (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{j-1} \mathbf{v}\mathbf{v}^T \\ &= \mathbf{I}_n + \frac{1}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0} \mathbf{v}\mathbf{v}^T \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\mathbf{f}} + \frac{\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{f}}}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0} \mathbf{v} \equiv \bar{\mathbf{f}} + \frac{\mathbf{v}}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (2.35)$$

(2.35)'te σ_0 dışında herşey verilen büyüklüklerden belirlenebilecek durumdadır. σ_0 'ın belirlenmesi için (2.20) eşitliğinin sağ yanının pay ve paydasının açık yapılarını belirlemek gerekir. Bu amaçla (2.24) eşitliğini (2.29) bağlamında yeniden yazabiliriz. Bu eylem aşağıdaki yolları izleyerek daha aşağıda verilen bir arasonucun üretilmesine olanak sağlar.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_m &= \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{1 - \sigma_0} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \right) \bar{\mathbf{u}}_k = \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \bar{\mathbf{u}}_k - \frac{1}{1 - \sigma_0} \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \mathbf{e}_1^T \bar{\mathbf{u}}_k \mathbf{e}_1 \\ &= \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \bar{\mathbf{u}}_k - \frac{1}{1 - \sigma_0} \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \nu_k \mathbf{e}_1 = \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \bar{\mathbf{u}}_k - \frac{\bar{\lambda}^T \mathbf{v}}{1 - \sigma_0} \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Bu ise

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^T \bar{\alpha}_m &= \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \mathbf{e}_1^T \bar{\mathbf{u}}_k - \frac{\bar{\lambda}^T \mathbf{v}}{1 - \sigma_0} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 = \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \nu_k - \frac{\bar{\lambda}^T \mathbf{v}}{1 - \sigma_0} \\ &= \bar{\lambda}^T \mathbf{v} - \frac{\bar{\lambda}^T \mathbf{v}}{1 - \sigma_0} = -\frac{\sigma_0}{1 - \sigma_0} \bar{\lambda}^T \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_m^T \bar{\alpha}_m &= \left(\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \bar{\mathbf{u}}_j - \frac{\bar{\lambda}^T \mathbf{v}}{1 - \sigma_0} \mathbf{e}_1 \right)^T \left(\sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \bar{\mathbf{u}}_k - \frac{\bar{\lambda}^T \mathbf{v}}{1 - \sigma_0} \mathbf{e}_1 \right) \\ &= \bar{\lambda}^T \bar{\lambda} - \frac{2}{1 - \sigma_0} (\bar{\lambda}^T \mathbf{v})^2 + \frac{1}{(1 - \sigma_0)^2} (\bar{\lambda}^T \mathbf{v})^2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

yazılmasına olanak sağlar. Burada belirlenmesi gereken büyüklükler $\bar{\lambda}^T \bar{\lambda}$ ile $\bar{\lambda}^T \mathbf{v}$ olup bunlarla ilgili aşağıdaki eşitlikler, ara işlemler ayrıntılı olarak verilmeksizin, yazılabilir.

$$\bar{\lambda}^T \mathbf{v} = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0} = \frac{1 - \sigma_0}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0} \mathbf{v} \quad (2.39)$$

$$\bar{\lambda}^T \bar{\lambda} = \bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{f}} + \frac{2v^2}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0} + \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v} v^2}{(1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)^2} \quad (2.40)$$

Bunlardan da

$$\bar{\alpha}_m^T \bar{\alpha}_m = \bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{f}} + \frac{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v}}{(1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)^2} v^2, \quad \mathbf{e}_1^T \bar{\alpha}_m = -\frac{\sigma_0}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0} v \quad (2.41)$$

ve sonuçta

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_0^2 v^2}{(1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0)^2 \bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{f}} + (1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v}) \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{f}}} \quad (2.42)$$

elde edilir. Özenli bir inceleme bu anlatımın σ_0 'ı belirlemek için ikinci dereceden bir çokterimlinin köklerini belirlemeye denk geldiğini gösterir. Bu denklemin $[0, 1]$ aralığında iki kökü olup bizim eniyilememiz için büyük olan kökün seçilmesi gerekir. Böylece, aşağıdaki arasonuca ulaşılır.

$$\sigma_0 = 1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{\bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{f}}}{\bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{f}}} \quad (2.43)$$

Artık, daha çok ilerleyebilmek amacıyla \mathbf{v} için (2.31), (2.32) ve (2.12)'den çıkarılabilecek olan aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\mathbf{v}^T = \mathbf{e}_1^T [\bar{\mathbf{u}}_1 \dots \bar{\mathbf{u}}_n] = \mathbf{e}_1^T [\mathbf{u}_m(x_1) \dots \mathbf{u}_m(x_n)] \mathbf{Q} = [1 \dots 1] \mathbf{Q} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}^T \equiv [1 \dots 1] \quad (2.45)$$

Burada $\mathbf{u}_m(x)$ yöneyinin ilk ögesinin özdeş olarak 1 değerli değişmez işlev olduğu gerçeğinden yararlanılmıştır.

Özenli ve biraz ayrıntılı bir inceleme \mathbf{v} yöneyinin boyunun 1'den küçük ya da en çok 1'e eşit olabileceğini gösterir. Bu gerçek (2.45)'ten aşağıdaki eşitsizliğin yazılmasına yol açar.

$$\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{r} \leq 1 \quad (2.46)$$

Şimdi $f(x)$ 'in neredeyse değişmez bir işlev olması durumuyla ilgilenelim. Bu durumda \mathbf{f} yöneyi için aşağıdaki öngörümde bulunabiliriz.

$$\mathbf{f} \equiv c \mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{f}_a, \quad \|\mathbf{f}_a\| = 1 \quad (2.47)$$

Burada c bir değişmezi ε ise yeterince küçük bir değiştirgeyi göstermektedir. Özenli bir bakış

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{f} \quad (2.48)$$

ve dolayısıyla

$$\bar{\mathbf{f}} \equiv c\mathbf{Q}^T \mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a \quad (2.49)$$

yazılabileceğini gösterir. Bu son bağıntıdan

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{f}} &= c^2 (\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{r}) + 2c\varepsilon (\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a) + \varepsilon^2 (\mathbf{f}_a^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a) \\ \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{f}} &= c (\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{r}) + \varepsilon (\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a) \\ \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{v} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{f}} &= c^2 (\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{r})^2 + 2c\varepsilon (\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{r}) (\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a) + \varepsilon^2 (\mathbf{f}_a^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{r} \mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a) \end{aligned} \quad (2.50)$$

bağıntılarını üretmek hiç de zor değildir.

Buradan değişmezlik ölçeni ile ilgili aşağıdaki bağıntıya ulaşılabilir.

$$1 - \sigma_0 = \frac{\varepsilon^2 \mathbf{f}_a^T \mathbf{Q} [(\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{r}) \mathbf{I}_n - \mathbf{Q}^T \mathbf{r} \mathbf{r}^T \mathbf{Q}] \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a}{c^2 (\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{r})^2 + 2c\varepsilon (\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a) + \varepsilon^2 (\mathbf{f}_a^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a)} \quad (2.51)$$

Bu bağıntı $\varepsilon \rightarrow 0$ 'a yaklaştıkça σ_0 'ın alttan 1'e yaklaşacağını ve bu yaklaşmanın karesel hızda olacağını söyler. Öte yandan yukarıdakine benzer olan ama ara işlemlerini vermeyeceğimiz yoldan ilerlenerek aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^T \mathbf{v} &= \frac{1 - \sigma_0}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0} (c + \varepsilon \mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_a) \\ f_0^{(m)} &= \mathbf{e}_1^T \bar{\boldsymbol{\alpha}}_m = -\frac{\sigma_0}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \sigma_0} \mathbf{v} \implies \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_0^{(m)} &= c + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Buradaki son bağıntı $\varepsilon \rightarrow 0$ 'a gittikçe YBMG'nin değişmez bileşeninin ε hızında c değerine yaklaşacağını söyler. Böylelikle kurulan çizemin tutarlı olduğu ve hele ilgilenilen işlev bir değişmeze yakınsa olabildiğince iyi sonuç vereceğini göstermiş oluyoruz. Ancak yakınsamanın yanaşık (asimptotik) nitelikli olduğunun vurgulanmasında da yarar bulunmaktadır.

2.1.2 İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG uygulamaları

Bu altaltbölümde önceki altaltbölümde oluşturulan kuramdaki olguları, bir anlamda doğrulayıcı birkaç uygulama verilecektir. Elde edilen sonuçlar kuramın hem genişletilebilme sınırlarını belirleyecek hem de yeni kavramlar üretilmesine neden olacaktır.

Şimdi uygulamalarımızda nasıl bir yol izleyebileceğimizi gündeme getirebiliriz:

- YBMG aralığını $[0, 1]$ ve ağırlığını da 1 olarak alacağız. Nokta kümesi içinde 0 ve 1 bulunabilir. Bu seçim ile olabildiğince yapısal kolaylaştırım sağlanmakta ama bu yoldan bazı olguların gözden kaçmasına olanak verilmeyeceği düşünülmektedir;

- Taban çokterimlileri olarak Legendre çokterimlilerinden aşağıdaki biçimde yararlanacağız.

$$u_j(x) \equiv \sqrt{2j+1} P_j(2x-1), \quad 0 \leq j < \infty \quad (2.53)$$

Bunlar dik ve boyları 1 olan bir takım oluştururlar ve dolayısıyla ayrıca dikleştirme işlemine gereksinim yoktur. Bu, aslında, bir seçim değildir. Önceki adımdaki seçimlerin bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır;

- Bu takımdan $\mathbf{u}_m(x)$ yöneyinin oluşturulması gerekmektedir;
- $\mathbf{u}_m(x)$ yöneyinden $\mathbf{u}_m(x_1), \dots, \mathbf{u}_m(x_n)$ yöneylerinin ve bunlardan da dikleştirmeyeyle $\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n$ yöneylerinin oluşturulması gerekmektedir;
- Bu yöneylerden \mathbf{Q} kare dizeyinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla, önce

$$\mathbf{V} \equiv [\mathbf{u}_m(x_1) \dots \mathbf{u}_m(x_n)], \quad \bar{\mathbf{V}} \equiv [\bar{\mathbf{u}}_1 \dots \bar{\mathbf{u}}_n] \quad (2.54)$$

dizey tanımlarını yapmak ve sonra da aşağıdaki eşitliği yazmak gerekir;

$$\mathbf{Q} = (\bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{V})^{-1} \quad (2.55)$$

- Bu \mathbf{Q} kare dizeyinden $\bar{\mathbf{f}}$ yöneyinin belirlenmesi gerekmektedir;
- (2.45)'ten \mathbf{v} 'nin belirlenmesi gerekmektedir;
- (2.43)'ten σ_0 'ın belirlenmesi gerekmektedir;
- (2.35)'ten $\bar{\lambda}$ 'nın belirlenmesi gerekmektedir;
- $\bar{\alpha}_m$ 'nin, aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilecek olan anlatımını kullanarak, belirlenmesi gerekmektedir;

$$\bar{\alpha}_m = \bar{\mathbf{V}} \bar{\lambda} - \frac{\bar{\lambda}^T \mathbf{v}}{1 - \sigma_0} \mathbf{e}_1 \quad (2.56)$$

- $f^{(m)}(x)$ işlevinin belirlenmesiyle işlem bitirilmiş olacaktır.

Uygulamalarımızda $f(x)$ için, ε değişmezliğe yakınlığı ölçen ($\varepsilon = 0$ tam değişmezliğe karşılık gelirken ε 0'dan uzaklaştıkça eğrilik gittikçe artacaktır) bir değiştirge olmak üzere, $F(\varepsilon x)$ yapılı işlevler kullanılmıştır. Böylece $F(0)$ değişmezine yakınlık saptaması için sınamalar gerçekleştirilmiştir. Yine kolaylık ve yalınlık için işlev değerlerinin (yani

verilerin) verildiği noktalar olarak $[0, 1]$ aralığını $(n - 1)$ eşit alt aralığa bölecek biçimde yerleştirilmiş noktalar seçilmişlerdir.

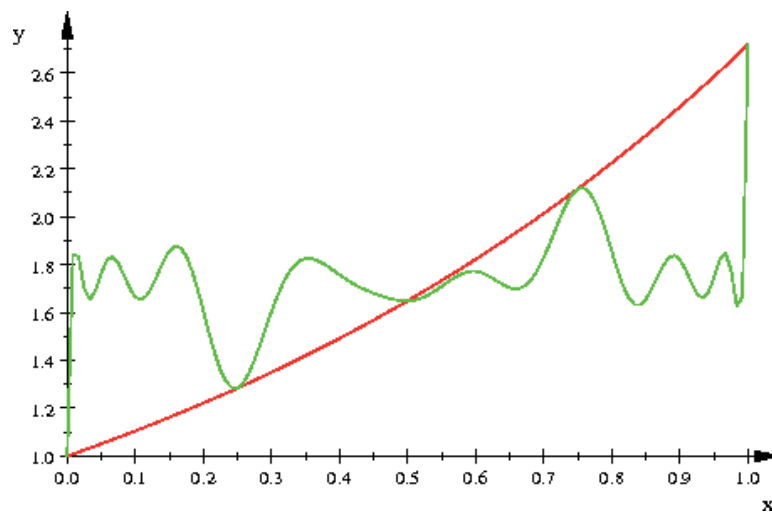
Bu altaltbölümde 9 şekil sunulmaktadır. Her bir şekilde de iki işlev bir arada verilmektedir. İşlevlerden salınımsız olanı açık yapısı verilen işlevi, salınlı olan çizim ise önceki altaltbölümde $f^{(m)}(x)$ ile simgelenen işlevi betimlemektedir. Çizimlerde kullanılan $f^{(m)}(x)$ yapısı belirlenirken veri nokta sayısı $n = 5$ olarak, kesme gösterilimdeki taban yöney sayısı olan m ise 19 olarak seçilmiştir.

Bilgisayım işleminde MuPAD [65] kullanılmış, MuPAD betiklerinde duyarlılık değiştirgeni olan DIGITS çevresel değişkeni 20 olarak seçilmiştir. Bu seçimle sonuç ve arasonuçlarda 20 ondalık basamak dolaylarında bir sayısal kesinlik sağlanmıştır.

YBMG aralığı Sobol'un genel olarak yeğlediği ve sayısal uygulamalarda ölçün (ing: standard) olarak benimsenen $[0, 1]$ olarak seçilmiştir. YBMG ağırlığı da aynı bağlamda, bu aralık içinde her yerde, 1 değeri alan işlev olarak seçilmiştir. Bu seçimlere karşın MuPAD betiğinde bu aralık ve ağırlık için tanımlama olanağı verilerek, gerektiğinde genişletilebilecek, bir yapı kurulmuştur.

Sözü edilen MuPAD betiğinde YBMG'ye açılacak işlev, bu altaltbölümün başında belirtildiği gibi, salt x 'e yani bağımsız değişkene değil onun ε gibi bir değiştirge ile çarpılmışına bağımlı olarak tanımlanmıştır.

Şekil 2.1, Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'te verilerin üretileceği işlev olarak $e^{\varepsilon x}$ alınmıştır. ε değeri, Şekil 2.1, Şekil 2.2 ve Şekil 2.3 için sırasıyla 1.0, 0.1, 0.01 olarak seçilmiştir.



Şekil 2.1: $y = e^x$, $n = 5$, $m = 19$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

Şekillerden de ayırdedilebileceği üzere, ε değeri küçüldükçe, $[0, 1]$ aralığında işlevdeki değişim de azalmakta yani işlev düzleşmektedir. Bu düzleşmeye koşut olarak değişmezlik ölçeni de 1'e yaklaşmaktadır. Düzleşmenin bu yeni YBMG üzerine etkisini ölçebilmek için aşağıdaki göreceli yanılğı (ing: relative error) tanımı yapılabilir:

$$Y_{f,f^{(m)}}(\varepsilon) \equiv \frac{\|f - f^{(m)}\|^2}{\|f\|^2} \quad (2.57)$$

Burada görünen boy tanımı boyu belirlenecek olan işlevin karesinin $[0, 1]$ aralığında ve 1 ağırlığı altında tümlevinin karekökü olarak yapılmaktadır. Yani (2.57) yerine aşağıdaki daha açık tanım yazılabilir:

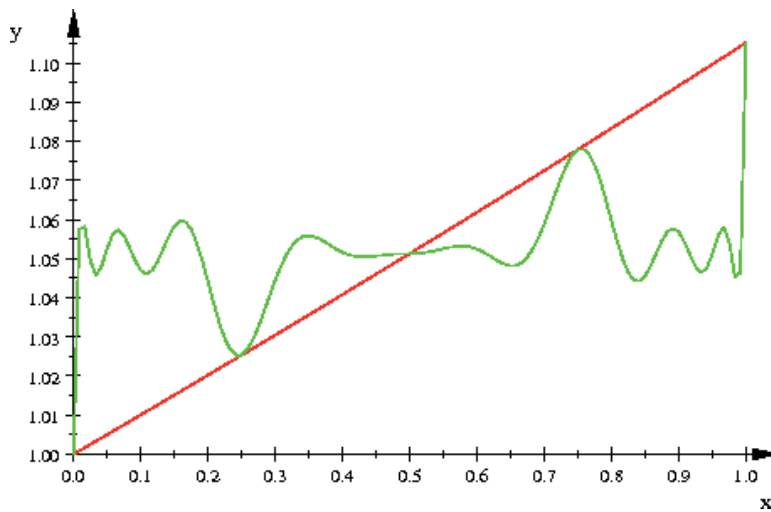
$$Y_{f,f^{(m)}}(\varepsilon) \equiv \frac{\int_0^1 dx [f(\varepsilon x) - f^{(m)}(x)]^2}{\int_0^1 dx f(\varepsilon x)^2} \quad (2.58)$$

Şekil 2.1 için bu son bağıntıdan belirlenen göreceli yanılğı değerleri Çizelge 2.1'de verilmektedir.

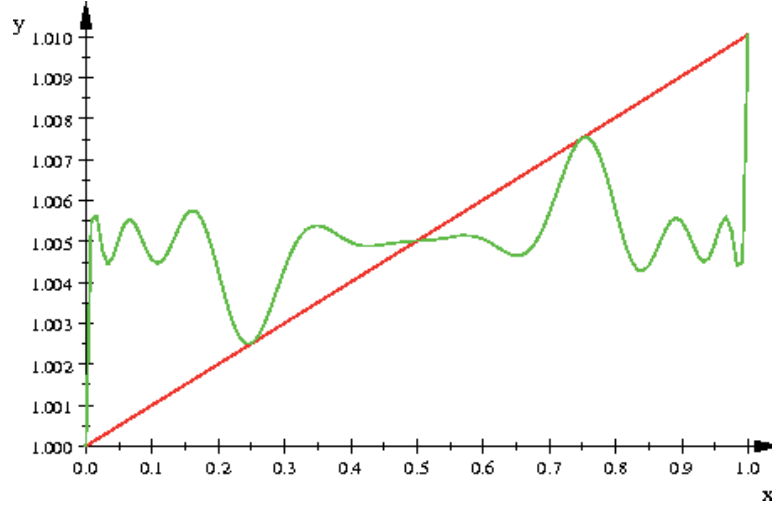
Çizelge 2.1: ε 'a göre göreceli yanılğı değeri.

ε	$Y_{e^{\varepsilon x}, f^{(m)}(x)}$
1.00	0.0211816961
0.10	0.000669669
0.01	0.000007346

Bu eşitliklerden kolayca anlaşılabilirceği gibi ε 0'a doğru azaldıkça göreceli yanılğı da çok hızlı olarak 0'a doğru azalmaktadır. Bu, ilgi odağındaki işlevin ε 0'a doğru azaldıkça hızla düzleşmesinden kaynaklanmaktadır.



Şekil 2.2: $y = e^{0.1x}$, $n = 5$, $m = 19$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.



Şekil 2.3: $y = e^{0.01x}$, $n = 5$, $m = 19$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

Burada ve diğer çizimlerdeki durumlarda $f^{(m)}(x)$ 19. dereceden bir çokterimli yapıyı taşımaktadır. Eğer

$$f^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{19} f_j^{(m)} x^j \quad (2.59)$$

tanımı yapılırsa Çizelge 2.2 yazılabilir.

Çizelge 2.2'den gözlenebileceği gibi bu çokterimlinin katsayılarının ardışık olarak artı ve eksi çok büyük olabilen değerler alması, doğrudan toplama ile yapılacak $f^{(m)}(x)$ değer belirlemesinde, özellikle x 1 dolaylarındayken, hızla yanlıgı birikimine yolaçar. Bu nedenle, ondalık basamak sayısı 20 olarak seçilmiştir. Bu sağlıksız (ing: ill-posed) sayısal yapı sayısal tümlevlemede de MuPAD'in `numeric::int` buyruğunun değil `numeric::quadrature` buyruğunun `MaxCalls=infinity` seçeneği altında kullanılmasına neden olmuştur. Bu söylenenler daha sonraki çizimlerdeki durumlarda da geçerlidir.

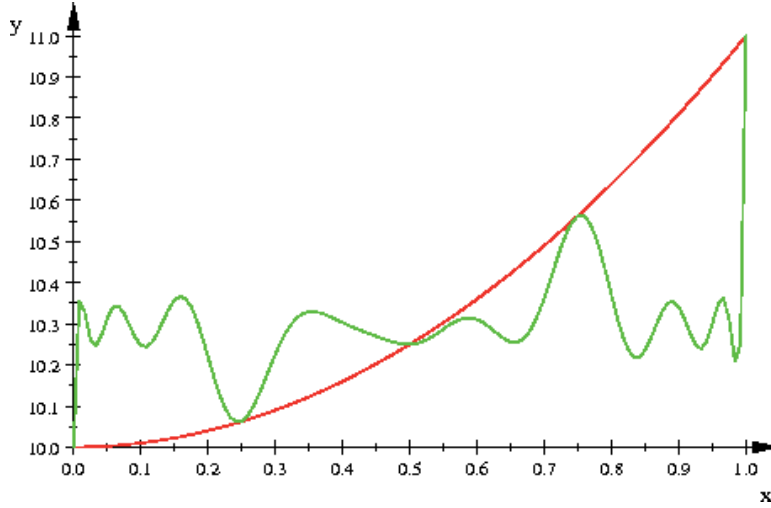
Şekil 2.4, Şekil 2.5, Şekil 2.6'da verilerin oluşturulduğu işlev $(\epsilon x)^2 + 10$ olarak seçilmiştir ve ϵ sırasıyla 1.0, 0.1, ve 0.01 değerlerini almaktadır. Eğrilerin yapıları Şekil 2.1, Şekil 2.2, Şekil 2.3'ten çok da değişik değillerdir. Burada da ϵ azaldıkça göreceli yanlıgı değeri azalmaktadır. Durum Çizelge 2.3'te verilmektedir.

Görüldüğü gibi, daha en başta yani $\epsilon = 1.0$ 'da olabildiğince küçük bir göreceli yanlıgı ile karşılaşmakta ve ϵ azaldıkça göreceli yanlıgı da hızla azalmaktadır.

Bu işlev için dik taban işlevleri türünden doğrudan bir açılım yapılacak olsa beklenen durum salt 1, x , x^2 terimlerinin bir doğrusal birleşimi olması ve bunun da ilgilenilen işleve

Çizelge 2.2: e^x işlevi için $f^{(m)}(x)$ çokterimlisinin katsayıları.

j	$f_j^{(m)}$
0	1.000000
1	205.688799
2	-17390.165199
3	688967.458466
4	-15464544.482811
5	219221802.076524
6	-2104483381.898004
7	14349583136.511295
8	-71861009970.612100
9	270542119209.315764
10	-777692897972.374563
11	1722444904404.297544
12	-2948604063982.682122
13	3890292070728.740277
14	-3917311327301.013676
15	2953891936163.176962
16	-1614013566524.666080
17	603225309364.346137
18	-137902822196.263127
19	14539819284.264195



Şekil 2.4: $y = x^2 + 10$, $n = 5$, $m = 19$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

eşit olmasıdır. Ancak, burada doğrudan bir açılım değil katsayıları YBMG değişmezlik ölçeni eniyilemesiyle saptanan bir açılım söz konusudur. Bu ise Çizelge 2.2’de verilen yapıya benzer bir katsayı yapısı demektir. Burada Şekil 2.4, Şekil 2.5, Şekil 2.6’daki işlevler için üretilen çizelge verilmemektedir. Ama, bu verilmeyen çizelge için Çizelge 2.2’de söylenebilecek hemen hemen herşey aynen dile getirilebilir.

Çizelge 2.3: ε 'a göre göreceli yanlgı değeri.

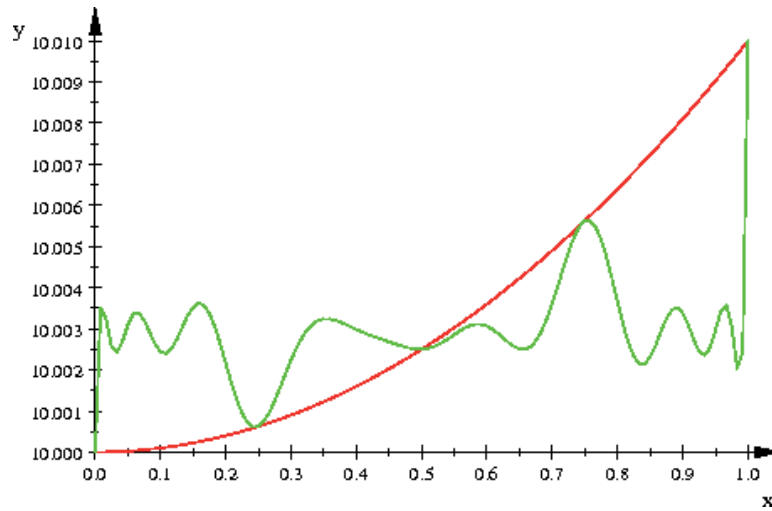
ε	$Y_{(\varepsilon x)^2+10, f^{(m)}(x)}$
1.00	0.00000707486994
0.10	0.00000000080996
0.01	0.000000000000008

Bu ilk 6 şekil işlevin yapısındaki değışmezlik düzeyi arttıkça burada önerilen YBMG türünün iyi çalıştığını göstermektedir. Bu ise ilgilenilecek işlev yerine ondan bir dönüşüm ile üretilebilecek, değışmezlik düzeyi çok daha yüksek olan, bir işlevin bu yeni eniyilemeli YBMG ile yaklaştırımından sonra geriye, dönüşüm öncesi işleve, geçilmesi ve onun anlatımının elde edilmesi anlamına gelir.

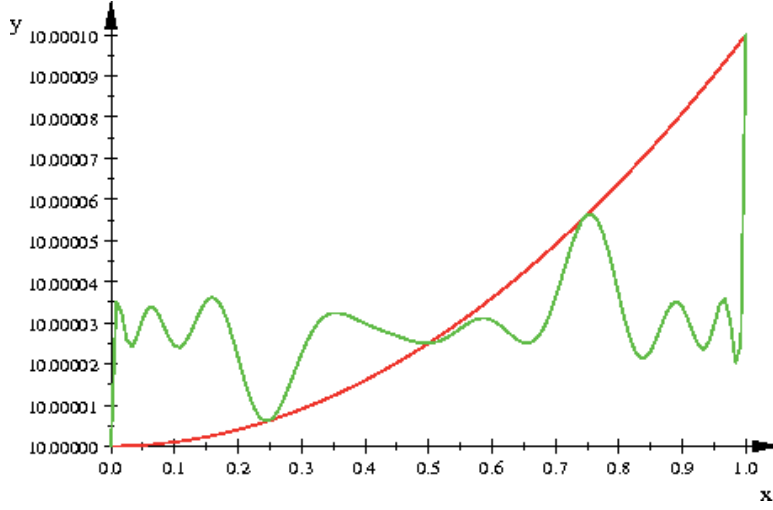
Şekil 2.7, Şekil 2.8, Şekil 2.9 bu sözü edilen dönüşümle düzleştirmeye örnek olarak tasarlanmışlardır. Dönüşüm işleci olarak bir sayıyla ötelemeyi izleyen evriküstel (ing: logaritm) alma eylemidir. Şekil 2.7’de işlev olarak $e^x + 2$ işlevi, Şekil 2.8’de işlev olarak $\ln(e^x + 2) + 2$, Şekil 2.9’de $\ln(\ln(e^x + 2) + 2) + 2$ dönüştürülmüş işlevi kullanılmaktadır.

Yapılan uygulamalardan edinilen izlenimleri aşağıdaki dizelge yapısında verebiliriz.

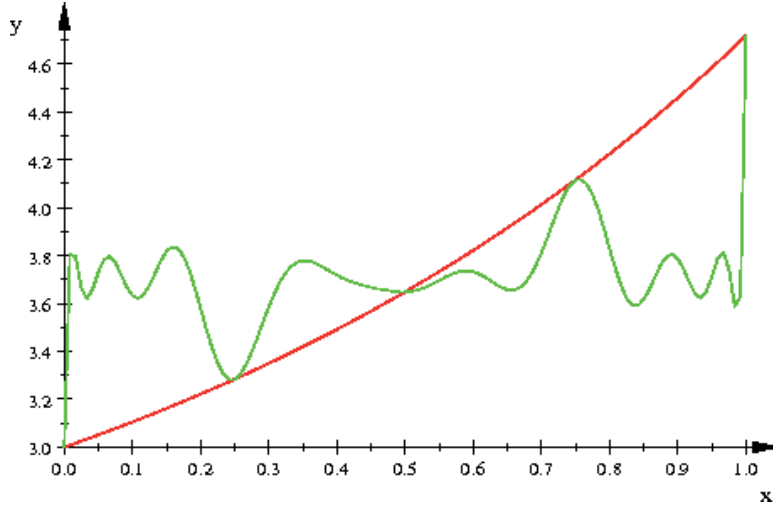
- Yeni YBMG yöntemince üretilen $f^{(m)}(x)$ çokterimlisi bir değışmez işlev eğrisini taban alıp onun altıyla üstü arasında salınmaktadır. Uygulamalar 1 değışkenli durum için gerçekleştirildiyse de çok değışkenli durumlara geçildiğinde de bu tür davranışla karşılaşılacağı, her ne kadar kanıtlama istese de, olabildiğince belli gibi



Şekil 2.5: $y = (0.1x)^2 + 10$, $n = 5$, $m = 19$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.



Şekil 2.6: $y = (0.01x)^2 + 10$, $n = 5$, $m = 19$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.



Şekil 2.7: $y = e^x + 2$, $n = 5$, $m = 19$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

görülmektedir. Burada sözü edilen değişmez işlevin eğrisi ilgilenilen işlevin eğrisini kesmektedir.

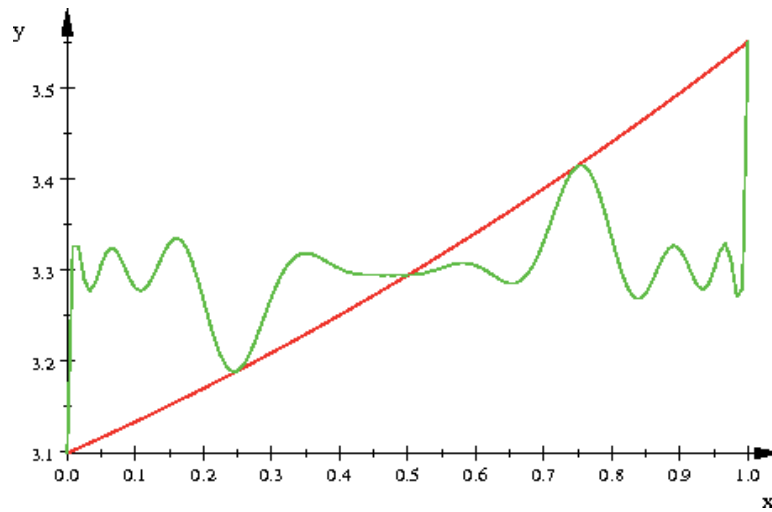
- İlgilenilen işlev ne kadar değişmez nitelikteyse göreceli yanlılığı da o kadar 0'a yakın olmaktadır.
- İlgilenilen işlevin değişmezlik niteliğini arttırmak için evriküstel (ing: logarithm), kök alma, ve bunlara benzer işlevler aracılığıyla dönüşümler tanımlamak ve sonra eniyilemeli YBMG ile yaklaştırmak sonra da ilk baştaki işleve dönmek olanaklı görünmektedir. Bu durum çok değişkenli işlevler için de geçerli görünmektedir.

- Bu yeni eniyilemeli YBMG için m değerinin çok yükseltilmesine gerek olmadığı, yükseltildikçe göreceli yanılığa azalma olabileceği, belirli ve sonlu bir m değeri için en iyi göreceli yanılığın değeri elde edileceği gözlemlenmiştir.
- İlgilenilen işlevin açık anlatımı bilindiğinde tanımı yapılabilen göreceli yanılığın değeri, işlevin açık anlatımı değil de verilerle verilmesi gündemde olduğunda nasıl tanımlanacağı burada açık bir soru olarak kalmıştır. Bu konuya alttaki altaltbölümde odaklanılacaktır.

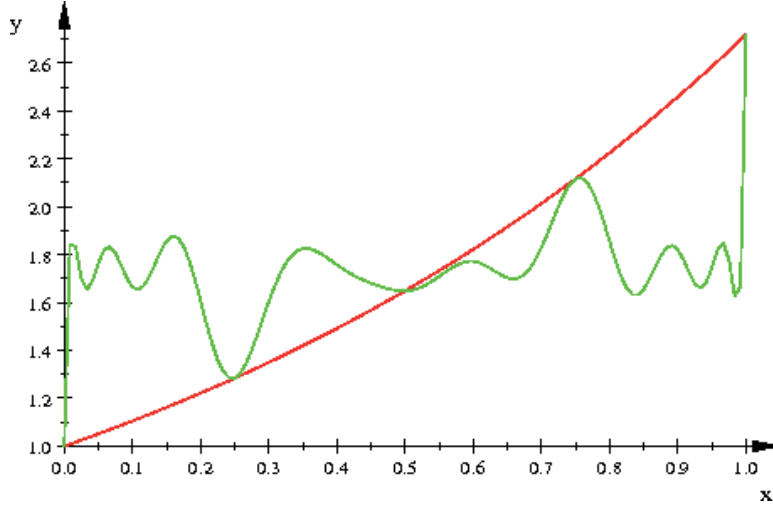
2.1.3 İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG için verilerin dördülden sapma göreceli değeri

Yeni YBMG'nin odaklandığı işlevin açık anlatımı verilirse boy tanımına dayandırılmış bir göreceli yanılığın değerini önceki altaltbölümde kullanmıştık. Ancak bu tanımla verilen değerin belirlenebilmesi için işlevin, $[0, 1]$ aralığının her noktasındaki değerinin bilinmesi gerekmektedir. Yani, işlevin bu aralık içindeki sonlu sayıda noktada değeri verildiğinde bu göreceli yanılığın anlatımındaki tümlevlerin belirlenmesi neredeyse olanaksız duruma gelir. Ya bu tümlevleri içdeğerbiçimsel dördülleme (ing: interpolatory quadrature) yöntemleriyle belirlenebilecek yaklaşık sayısal değerleriyle yetinmek ya da tümlevli anlatımları bırakıp salt verilen işlev değerlerini içeren kesin anlatımlarla gerçekleştiren yeni tanımları kullanmak gerekir.

Bunlardan ilki söz konusu olacak olursa, (2.58)'de, f 'deki yapısal belirsizlikten kaynaklanabilecek, tümlev sayısal değer belirleme sorunu gündeme gelebilir. Bu durumda,



Şekil 2.8: $y = \ln(e^x + 2) + 2$, $n = 5$, $m = 19$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.



Şekil 2.9: $y = \ln(\ln(e^x + 2) + 2) + 2$, $n = 5$, $m = 19$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

belirlenmesi gereken tümlevler aşağıda sıralanmaktadır.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_1 &\equiv \int_0^1 dx f(\varepsilon x)^2, \\
 \mathcal{I}_2 &\equiv \int_0^1 dx f(\varepsilon x) f^{(m)}(x), \\
 \mathcal{I}_3 &\equiv \int_0^1 dx f^{(m)}(x)^2
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Bu tümlevlerden sonuncusu kesin değer olarak belirlenebilir. Bunun nedeni onun bir çokterimli olmasıdır. Sonuç $f^{(m)}(x)$ çokterimlisinin katsayıları üzerinde bir doğrusal birleştirim olarak elde edilir.

(2.60)'daki ikinci tümlev, $f(\varepsilon x)$ 'in değerinin tümlevleme aralığının tüm noktalarında bilinmemesinden dolayı, kesin değer olarak belirlenemez. Sayısal tümlevleme ile değer saptanmasına geçilmesi gerekir. Ancak, $f^{(m)}(x)$ 'in salınımlı yapısından dolayı doğrudan belirlemeye geçmek doğru olmayabilir. Bu yüzden $f^{(m)}(x)$ yerine tekdüze değişen işlevler kullanmak yerinde olur. Dolayısıyla, \mathcal{I}_2 yerine tanımı aşağıda verilen \mathcal{I}_4 tümlevi ile ilgilenmek ve bunlar belirlendikten sonra bunların bir doğrusal birleştirimiyle \mathcal{I}_2 'ye geçmek yeğlenebilir.

$$\mathcal{I}_4 \equiv \int_0^1 dx f(\varepsilon x) x^j, \quad 0 \leq j \leq m-1 \tag{2.61}$$

Bütün bunlar, sayısal olarak belirlenmesi gereken tümlevlerin salt \mathcal{I}_1 ve \mathcal{I}_4 olduğunu dile getirir. Bunları uygun bir dördülleme (ing: quadrature) ile belirlemek olanaklıdır. Ancak, kullanılacak yöntemin veri değerleri üzerinde bir doğrusal birleştirim üretecek nitelikte

olması gerekir. Yani, matematik anlatımlarla verilmek istenirse,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &\equiv \int_0^1 dx f(\varepsilon x)^2 = \sum_{k=1}^{n_1} w_k^{(1)} f(\varepsilon x_k)^2, \\ \mathcal{I}_4 &\equiv \int_0^1 dx f(\varepsilon x) x^j = \sum_{k=1}^{n_2} w_k^{(2)} f(\varepsilon x_k) x_k^j, \quad 0 \leq j \leq n-1\end{aligned}\quad (2.62)$$

anlatımlarının geçerli olabilmesi için $n_1 = n_2 = n$ eşitliklerinin geçerli olabilmesi ve x_1, \dots, x_n değerlerinin verilerin yani YBMG odağında olan işlevin değerlerinin verildiği noktalar olması gerekir. Bu bağlamda, çok özel durumlar dışında, sözgelimi, Gauss dördüllemeleri kullanılamaz. Bunun nedeni bu dördüllemelerdeki noktaların verilen noktalarla çakışmama olasılığının çok yüksek olmasıdır, yani, bunlar ancak ve ancak dördülleme noktaları kümesi ile veri noktaları kümesinin eşdeğer olması durumunda kullanılabilirler ki böyle bir durumun ortaya çıkma olasılığı çok azdır. Bu arada, (2.62)'deki dördülleme ağırlık katsayıları da eşdeğer duruma gelirler. Yani w katsayılarındaki üstsırasayılarla yapılan ayırım söz konusu olmaz.

Bu altaltbölümün başında sözü edilen ikinci seçenek yani içdeğerbiçimsel dördülleme kullanmaksızın yeni tanımlamalara geçme seçeneği söz konusu olacak olursa ve veri noktalarıyla bu noktalarda verilen işlev değerleri, sırasıyla, x_1, \dots, x_n ve $f(x_1), \dots, f(x_n)$ ile simgelenirse aşağıdaki ortalama değer tanımlarıyla yola çıkılabilir.

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j), \quad \overline{f^2} \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j)^2 \quad (2.63)$$

Bu tanımlamalardan işlevin verilen değerlerinin yukarıda verilen işlev ortalama değerinden sapmalarının karelerinin (ing: square) ortalaması için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [f(x_j) - \bar{f}]^2 = \overline{f^2} - 2\bar{f}^2 + \bar{f}^2 = \overline{f^2} - \bar{f}^2 \quad (2.64)$$

Burada ortaya çıkan ve işlevin karelerinin ortalaması ile ortalaması arasındaki değer köküne (ing: square root) “Bocalayım Katsayısı” ya da “Sendelenim Katsayısı” (ing: Fluctuation Coefficient) adı verilebilir. Bu büyüklükten bir “Göreceli Sendelenim Ölçeni” (ing: Relative Fluctuation Measurer) aşağıdaki anlatımla tanımlanabilir.

$$\mathcal{S}_G(f) \equiv \frac{\overline{f^2} - \bar{f}^2}{\bar{f}^2} \quad (2.65)$$

Bu büyüklük ne kadar küçük kalırsa işlev de bir değişmeze o kadar yakın olur. Bu gerçeği kanıtlamak için bir değişmeze olan yakınlığı bir değiştirge ile betimlenen bir yapıda işlev gözönüne alalım.

$$f(x) \equiv c + \varepsilon g(x) \quad (2.66)$$

Burada $g(x)$ veri noktalarında çok büyük değerler almayan bir işlev olarak öngörülmekte olup c ile bir değişmez simgelenmektedir. Bu işlevin ortalama değeri aşağıdaki anlatımla verilebilir.

$$\bar{f} = c + \varepsilon \bar{g} \quad (2.67)$$

Burada \bar{g} ile simgelenen büyüklük $g(x)$ işlevinin ortalama değerini göstermektedir. (2.66)'daki yapı f^2 için de aşağıdaki ortalama değer anlatımını yazmamıza olanak sağlar.

$$\overline{f^2} = c^2 + 2c\varepsilon\bar{g} + \varepsilon^2\bar{g}^2 \quad (2.68)$$

Buradan da

$$\overline{f^2} - \bar{f}^2 = \varepsilon^2\bar{g}^2 - \varepsilon^2\bar{g}^2 \quad (2.69)$$

ve

$$\mathcal{S}_G(f) \equiv \varepsilon^2 \frac{\overline{g^2} - \bar{g}^2}{(c + \varepsilon\bar{g})^2} \quad (2.70)$$

sonuçlarına varılabilir. Son anlatımdan çıkarılabileceği üzere Göreceli Sendelenim Ölçeni, ε 0'a doğru azaldıkça, 0'a yukarıdan yaklaşır. Yani ilgilenilen işlevdeki düzleşme ya da değişmezliğe yaklaşma sendelenimi azaltır.

Göreceli sendelenim ölçeni için aşağıdaki üst sınır, üretim ara aşamaları verilmeksizin, yazılabilir.

$$\mathcal{S}_G(f) \leq \frac{f_{eb}^2 - f_{ek}^2}{f_{ek}^2} \quad (2.71)$$

Burada f_{eb} ile f_{ek} işlev değerlerinin sırasıyla en büyük ve en küçüklerini simgelemektedir. (2.70)'de eşitlik durumu ancak f işlevinin bir değişmez olması durumunda ortaya çıkar, diğer durumlarda eşitsizlik geçerlidir.

(2.71)'de f yerine ondan \mathcal{D} ile simgelenen bir işlevsel dönüşümle elde edilecek işlev kullanılacak olursa aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\mathcal{S}_G(\mathcal{D}(f)) \leq \frac{\mathcal{D}(f)_{eb}^2 - \mathcal{D}(f)_{ek}^2}{\mathcal{D}(f)_{ek}^2} \quad (2.72)$$

Eğer \mathcal{D} bir büzülme dönüşümü (ing: contraction mapping) ise (2.72)'deki göreceli sendelenim ölçeni, aynı f değerleri için, (2.71)'dekinden küçük değer alır. Dolayısıyla, verilen f değerleri üzerinde buradaki İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG uygulamadan önce onlar yerine onların uygun bir dönüşümüyle üretilecek değerleri devreye sokmak daha yerinde bir eylemdir. Önceki çizimlerde kullanılan evriküstel (ing: logarithm) dönüşümün yanı sıra başka dönüşümler de denenebilir. Ama burada bu kadar bilgi ile yetinilecektir.

2.2 Doğrusal Altkesimsel Taban İşlevleri Kullanılarak İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG

2.2.1 Doğrusal Altkesimsel Taban İşlevleri kullanılarak İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG'de denklemlerin oluşturulması

Bir önceki altbölümde, bir veri takımı olarak verilen çoklulardan (ing: tuples) işlev yapısı üretilmek istenirken, YBMG'nin üzerinde tanımlandığı bir Hilbert uzayında çalışılmış ve bu uzayda seçilen sonlu sayıda işlevin örttüğü bir altuzay odak olarak alınmıştı. YBMG ile aramakta ya da kurmakta olduğumuz işlevin bu uzaydaki taban işlevlerinin bir doğrusal birleştirmesi olarak anlatılabileceği öngörülmüştü. Söz konusu olan taban işlevleri ise sayıları veri çokluları sayısı ile tutarlı olan Lagrange çokterimlileri olarak seçilmişti. Taban işlevlerini birleştiren doğrusal birleştirim katsayıları, doğrusal birleştirmenin YBMG'ndeki değişmezlik ölçenini en büyük kılacak biçimde seçilmişti. Bu seçim yapılırken eniyileme için bir amaç işlevimsisi seçilmiş ve buna değişmezlik ölçeni amaç terimi olarak alınırken veri düğüm noktalarında işlev değeri ile çakışma gereksinimi de kısıt olarak kullanılmıştı. Değişik türde işlevler için yapılan sınamalar veri takımı verilen işlevin yeterince düz olması durumunda işleve, belli bir salınım içinde yaklaşabilen sonuçlar alınabileceği gözlenmişti. İşlev düzleştikçe de salınım genliğinin çok çok azalabildiği saptanmıştı. Bir önceki bölümde yapılan çalışmalar bu salınımın, aslında, çokterimli içdeğerbiçiminde Runge olayı diye bilinen olgunun YBMG'ne yansması olduğu yorumunu getirmiştir. Hem bu hem de işlevin düz olma gereksiniminin getirdiği kısıtlamadan kaçınmak için Lagrange çokterimlilerinin yerine daha etkin bir taban takımı oluşturulmasının yerinde olacağı savını gündeme getirmiştir. Runge olayından kaçınmanın en iyi yollarından birinin altkesimsel (ing: spline) işlevler kullanımı olması bizi çalışmada bu yapıda işlev oluşturulmasına yönlendirmiştir.

Lagrange içdeğerbiçimsel YBMG'de gözlenen salınımsal yapı ve özellikle çokterimli derecesi arttığında karşılaşılan aradeğer bozulmaları, bilimsel yazında, Runge Olayı olarak biliniyor ve içdeğerbiçimin daha düzgün yapıda gerçekleştirilebilmesi için bundan kaçınılıp “Çokterimli Altkesimsel İşlevler”den (ing: Polynomial Spline Functions) yararlanılıyor. Biz de, burada, öyle yapma yoluna gideceğiz. Bu amaçla, çalışmalarımızda kullandığımız genel çokterimli ya da Lagrange çokterimlisi yapısında taban işlevleri yerine “Doğrusal Altkesimli” taban işlevleriyle çalışacağız.

Bu amaçla, “Sonlu” bir aralık için bu nitelikte boyları 1 ve birbirlerine dik olan taban işlevleri nasıl oluşturulur?” sorusuna yanıt arayalım. a ve b gerçel ve $b > a$ koşulunu sağlayan iki değiştirge olmak üzere $[a, b)$ aralığında doğrusal bir yapı oluşturabilmek için, yani x bağımsız bir değiştirgeyi simgelemek üzere $x \in [a, b)$ için, oluşturulabilecek tüm doğrusal işlevlere taban olacak işlevlerin sayısı iki olup bu aralıkta 1 ve x 'e eşdeğer olan işlevler ya da onların doğrusal birleştirimlerinden oluşturulan doğrusal bağımsız herhangi iki işlev olabilirler. Böylece, aralığın alt ucunda 0 değerini alan ve bu aralık üzerinde verilen bir ağırlık, $W(x)$, altında tanımlanan boy'a göre boyu 1 olan işlev aşağıdaki anlatım ile verilebilir.

$$u_1(x) \equiv \begin{cases} w_1(x-a) & x \in [a, b) \\ 0 & x \notin [a, b) \end{cases} \quad (2.73)$$

Burada w_1 , boybirimleştirme (ing: normalization) için esneklik yaratmak amacıyla gündeme getirilen ve bu an için belirsiz olan, bir değiştirgeyi göstermektedir. Bunun belirlenmesi için aşağıdaki koşul eşitliğinin yazılması gerekir.

$$\int_a^b dx W(x) u_1(x)^2 = 1 \quad (2.74)$$

Burada görünen $W(x)$ işlevinin $[a, b]$ aralığını içine alan daha büyük bir aralık üzerinde tümlevbirimleştirilmiş (ing: integral normalized) olduğu varsayılmaktadır. Bu, YBMG'nin en önemli kolaylaştırıcı bir gereksinimini sağlamak amacıyla yapılmaktadır.

(2.74)'ü (2.73)'ten yararlanarak, aşağıdaki biçimde daha açık olarak yazmak olanaklıdır.

$$w_1^2 \int_a^b dx W(x) (x-a)^2 = w_1^2 m_2 = 1 \quad (2.75)$$

Burada

$$m_k \equiv \int_a^b dx W(x) (x-a)^k, \quad 0 \leq k < \infty \quad (2.76)$$

ile tanımlanan büyüklüklere $(x-a)$ değişkeninin “[a, b] Aralığında ve $W(x)$ Ağırlığı Altında **k. Beklemi** (ing: moment)” adı verilir. Bu büyüklüklerin açık değerlerinin belirlenebilmesi için $W(x)$ ağırlığının açık yapısının verilmesi gerekir. Burada, açık yapıya, gerekmedikçe geçmeksizin, ilerleyeceğiz. Özenli bir inceleme (2.76) ile verilen beklemlerin tümünün artı değerler olacağını gösterir. Bu nedenle, (2.75)'ten, artılığı sağlamak amacıyla artı çözümlü seçerek

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{m_2}} \quad (2.77)$$

ve buradan da

$$u_1(x) \equiv \begin{cases} \frac{x-a}{\sqrt{m_2}} & x \in [a, b) \\ 0 & x \notin [a, b) \end{cases} \quad (2.78)$$

vargısına (ing: conclusion) ulaşılabilir.

Burada, aslında, boy tanımını olarak

$$\|u_1\|^2 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} dx W(x) u_1(x)^2 \quad (2.79)$$

özdeşliğinden ve bekleme tanımlarında da

$$m_k \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} dx W(x) x^k, \quad 0 \leq k < \infty \quad (2.80)$$

özdeşliklerinden yararlanılmıştır.

$u_1(x)$ işlevine dik ve yukarıda tanımlanan boy işlevimsisine göre boyu 1 olan diğer işlevin tanımını ise aşağıdaki yapıda olmak zorundadır.

$$u_2(x) \equiv \begin{cases} \alpha x + \beta & x \in [a, b) \\ 0 & x \notin [a, b) \end{cases} \quad (2.81)$$

Burada görünen ve bu an için belirsiz olan α ve β değiştirgeleri, $u_2(x)$ işlevini $u_1(x)$ işlevine dik ve boyu 1 olacak duruma getirecek biçimde seçilmelidirler. Bu doğrultuda işlem yapıldığında u_1 işlevine diklik koşulu kullanılarak α ile β arasında aşağıdaki doğrusal denklem elde edilir.

$$(m_2 + am_1) \alpha + m_1 \beta = 0 \quad (2.82)$$

u_2 'nin boyunun 1 olması gereksinimi, α ile β arasında, aşağıdaki dördüsel (ing: quadratic) denklemin yazılmasına olanak sağlar.

$$(m_2 + 2am_1 + a^2 m_0) \alpha^2 + 2(m_1 + am_0) \alpha \beta + m_0 \beta^2 = 1 \quad (2.83)$$

Bu son iki denklemin α için artı değer üreten çözümünü seçilecek olursa

$$\alpha = \frac{m_1}{\sqrt{m_2} \sqrt{m_0 m_2 - m_1^2}}, \quad \beta = -\frac{m_2 + am_1}{\sqrt{m_2} \sqrt{m_0 m_2 - m_1^2}} \quad (2.84)$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu eşitliklerin sağ yanlarının paydalarındaki ikinci karekök (ing: square root) altında görünen büyüklük eksi değer alamaz. Bunun kanıtlanması için önce

$$m_0 m_2 - m_1^2 = \int_a^b dx W(x) \int_a^b dx W(x) (x-a)^2 - \left(\int_a^b dx W(x) (x-a) \right)^2 \quad (2.85)$$

yazılabilir ve hemen sonra

$$\begin{aligned}\overline{W}(x) &\equiv \left(\int_a^b dx W(x) \right)^{-\frac{1}{2}} W(x)^{\frac{1}{2}}, \\ \xi(x) &\equiv \overline{W}(x)(x-a)\end{aligned}\quad (2.86)$$

tanımlamalarına geçilerek (2.85) yerine

$$m_0 m_2 - m_1^2 = \left[\int_a^b dx W(x) \right]^2 \left[\int_a^b dx \xi(x)^2 - \left(\int_a^b dx \overline{W}(x) \xi(x) \right)^2 \right] \quad (2.87)$$

yazılabilir. Burada, eğer, $[a, b]$ aralığında karesi tümlemlenebilen herhangi bir $g(x)$ işlevi üzerinde aşağıda tanımını verilen izdüşüm işleci kullanılacak olursa

$$\mathcal{P}_{\overline{W}} g(x) \equiv \left[\int_a^b dx \overline{W}(x) g(x) \right] \overline{W}(x) \quad (2.88)$$

aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$m_0 m_2 - m_1^2 = \left[\int_a^b dx W(x) \right]^2 \left[\int_a^b dx \xi(x) [\mathcal{I} - \mathcal{P}_{\overline{W}}] \xi(x) \right] \quad (2.89)$$

Eğer, burada, $g_1(x)$ ile $g_2(x)$ karesi tümlemlenebilir herhangi iki işlev olmak üzere,

$$(g_1, g_2) \equiv \int_a^b dx g_1(x) g_2(x) \quad (2.90)$$

ile verilen iççarpım tanımını kullanılacak olursa aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$m_0 m_2 - m_1^2 = \left[\int_a^b dx W(x) \right]^2 (\xi, [\mathcal{I} - \mathcal{P}_{\overline{W}}] \xi) \quad (2.91)$$

Burada, sağ yanda görünen iççarpım, aslında, $[\mathcal{I} - \mathcal{P}_{\overline{W}}]$ işlecinin $\xi(x)$ işlevi üzerinden beklenen değerine eşittir ve bu beklenen değer, $[\mathcal{I} - \mathcal{P}_{\overline{W}}]$ işlecinin de bir izdüşüm işleci olması nedeniyle, eksi değer alamaz. Böylelikle

$$m_0 m_2 - m_1^2 > 0 \quad (2.92)$$

vargısına ulaşılır. (2.91)'deki işlece " $\overline{W}(x)$ İşlevine Göre Sendelenim İşleci", iççarpıma ise " $\xi(x)$ İşlevinin $\overline{W}(x)$ İşlevine Göre Sendelenim Değeri" denebilir ve bir anlamda dördülmeden kaynaklanan sapma değerini ölçer.

Artık $u_2(x)$ 'in somut yapısını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$u_2(x) \equiv \begin{cases} \frac{m_1(x-a) - m_2}{\sqrt{m_2} \sqrt{m_0 m_2 - m_1^2}} & x \in [a, b) \\ 0 & x \notin [a, b) \end{cases} \quad (2.93)$$

Artık, bu yapıyı bizim incelemelerimizde kullanacak düzeneği oluşturmak için kullanabiliriz. Bu amaçla, yine tek bağımsız değişkenle ilgilendiğimizi varsayarak, x_1, \dots, x_n ile simgelenen noktalardan oluşan bir boyutlu ızgara (ing: grid) ya da örgüyü gündeme getirebiliriz. Bu örgü düğümlerinden aşağıdaki aralıkları oluşturabiliriz

$$\mathcal{I}_k \equiv [x_k, x_{k+1}), \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.94)$$

Bu aralıklarda birbirine dik ve boyları 1 olan taban takımı aşağıdaki biçimde oluşturulabilir.

$$u_{2k-1}(x) \equiv \begin{cases} \frac{x-x_k}{\sqrt{m_2^{(k)}}} & x \in \mathcal{I}_k \\ 0 & x \notin \mathcal{I}_k \end{cases}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.95)$$

$$u_{2k}(x) \equiv \begin{cases} \frac{m_1^{(k)}(x-x_k) - m_2^{(k)}}{\sqrt{m_2^{(k)}} \sqrt{m_0^{(k)} m_2^{(k)} - m_1^{(k)2}}} & x \in \mathcal{I}_k \\ 0 & x \notin \mathcal{I}_k \end{cases}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.96)$$

Burada görünen üstsirasayı beklem değerlerinin açık yapıları

$$m_j^{(k)} \equiv \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx W(x) (x-x_k)^j, \quad 0 \leq j < \infty, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2.97)$$

anlatımı ile verilmekte olup bu son tanımlardaki $W(x)$ ile simgelenen ağırlık işlevinin

$$\int_{x_1}^{x_n} dx W(x) = 1 \quad (2.98)$$

tümlembirleştirim koşulunu sağladığı varsayılmaktadır.

Artık, ilgilenilen ve $f(x)$ ile simgelenen, bir işlevin bu taban işlevleri türünden bir doğrusal birleştirimle betimlenebileceğini öngörebilir ve doğrusal birleştirim katsayılarını altsirasayılandırılmış α simgeleriyle göstererek aşağıdaki tanım anlatımını yazabiliriz.

$$f(x) \equiv \sum_{j=1}^{2n-2} \alpha_j u_j(x) \quad (2.99)$$

Bu anlatım, bu belirsiz yapısıyla, x_2, \dots, x_{n-1} değerlerinde süreksizlikler taşımaktadır ve bunlar, salt, altsirasayılandırılmış u simgeleriyle betimlenen işlevlerin yapısından kaynaklanmaktadır. Eğer, $f(x)$ 'in $[x_1, x_n]$ aralığında sürekli olması sözkonusu ise (incelemelerimizde hep öyle varsayacağız) bu tekilliklerin kaldırılması gerekir. Bu ise,

ancak, α katsayıları üzerine koşul getirerek sağlanabilir. Bu süreklilik koşullarından $x = x_k$ 'daki ($2 \leq k \leq n-1$) yazılmak istenirse

$$\lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) \quad (2.100)$$

ve

$$\begin{aligned} & \alpha_{2k-3} \lim_{x \rightarrow x_k^-} u_{2k-3}(x) + \alpha_{2k-2} \lim_{x \rightarrow x_k^-} u_{2k-2}(x) \\ &= \alpha_{2k-1} \lim_{x \rightarrow x_k^-} u_{2k-3}(x) + \alpha_{2k} \lim_{x \rightarrow x_k^-} u_{2k}(x) \end{aligned} \quad (2.101)$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} & \frac{(x_k - x_{k-1})}{\sqrt{m_2^{(k-1)}}} \alpha_{2k-3} + \frac{m_1^{(k-1)}(x_k - x_{k-1}) - m_2^{(k-1)}}{\sqrt{m_2^{(k-1)}} \sqrt{m_0^{(k-1)} m_2^{(k-1)} - m_1^{(k-1)^2}} \alpha_{2k-2} \\ &+ \frac{m_2^{(k)}}{\sqrt{m_2^{(k)}} \sqrt{m_0^{(k)} m_2^{(k)} - m_1^{(k)^2}} \alpha_{2k} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \quad (2.102)$$

denklemlerine ulaşılır. Bunları daha tıkHz biçimde yazabilmek için aşağıdaki tanımları yapabiliriz.

$$\alpha^T \equiv [\alpha_1 \dots \alpha_{2n-2}],$$

$$\begin{aligned} \eta_{k-1} &\equiv \frac{(x_k - x_{k-1})}{\sqrt{m_2^{(k-1)}}} \mathbf{e}_{2k-3} + \frac{m_1^{(k-1)}(x_k - x_{k-1}) - m_2^{(k-1)}}{\sqrt{m_2^{(k-1)}} \sqrt{m_0^{(k-1)} m_2^{(k-1)} - m_1^{(k-1)^2}} \mathbf{e}_{2k-2} \\ &+ \frac{m_2^{(k)}}{\sqrt{m_2^{(k)}} \sqrt{m_0^{(k)} m_2^{(k)} - m_1^{(k)^2}} \mathbf{e}_{2k}, \quad 2 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Buradaki yöneylerin tümü $2n-2$ ögeli olup \mathbf{e}_j ile j . kartezyen birim yöney simgelenmektedir.

Bu tanımlarla (2.102) yerine, T üstsimgesi devrik anlamına gelmek üzere,

$$\eta_k^T \alpha_k = 0, \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (2.104)$$

denklemleri yazılabilir. Bunlara **Süreklilik Denklemleri** adını verebiliriz. Böylelikle α yöneyindeki $2n-2$ bilinmeyen için $n-2$ denklem oluşturulmuş olur. Görüldüğü gibi bu denklemler ilgilenilen işlevden bağımsızdırlar. Salt, doğrusal altkesim taban alt işlevlerinin yapılarına bağımlıdırlar.

Bu aşamadan sonra yapılması gereken işlem $f(x)$ işlevi için, x 'in x_1, \dots, x_n değerlerinin bazılarında verildiği varsayılan değerlerin α yöneyinin belirlenmesine yansıtılmasıdır. Bu

amaçla, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$ yapısında altsırasayılandırılan m ($m \leq n$) sayıda tamsayı için $f(x)$ işlevinin $x = x_{j_\ell}$ ($1 \leq \ell \leq m$) değerlerinde değeri verildiğini, yani f_{j_ℓ} ile bu işlevin söz konusu verilen değerlerinin simgelendiği varsayılarak,

$$f(x_{j_\ell}) = f_{j_\ell}, \quad 1 \leq \ell \leq m, \quad 1 \leq m \leq n \quad (2.105)$$

yazılabildiğini öngörelim. (2.99) ile (2.95) ve (2.96)'dan yararlanarak bu eşitliği aşağıdaki anlatımla daha açık olarak vermek olanaklıdır.

$$-\frac{\sqrt{m_2^{(j_\ell)}}}{\sqrt{m_0^{(j_\ell)} m_2^{(j_\ell)} - m_1^{(j_\ell)^2}} \alpha_{2j_\ell} = f_{j_\ell}, \quad 1 \leq \ell \leq m < n \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(x_n - x_{n-1})}{\sqrt{m_2^{(n-1)}} \alpha_{2n-3} + \frac{m_1^{(n-1)} (x_n - x_{n-1})}{m_2^{(n-1)} \sqrt{m_0^{(n-1)} m_2^{(n-1)} - m_1^{(n-1)^2}} \alpha_{2n-2} \\ & - \frac{\sqrt{m_2^{(n-1)}}}{\sqrt{m_0^{(n-1)} m_2^{(n-1)} - m_1^{(n-1)^2}} \alpha_{2n-2} = f_n \end{aligned} \quad (2.107)$$

Bu denklemleri, ilerideki uygulamalarımıza getirileri açısından, aşağıdaki biçimde yeniden yazmak daha uygundur.

$$-\frac{\sqrt{m_2^{(j_\ell)}}}{\sqrt{m_0^{(j_\ell)} m_2^{(j_\ell)} - m_1^{(j_\ell)^2}} \mathbf{e}_{2j_\ell}^T \alpha = f_{j_\ell}, \quad 1 \leq j_\ell < n \quad (2.108)$$

Yukarıdaki yapı $j_\ell = n$ için geçerli değildir. Onun yerine aşağıdaki anlatım kullanılmalıdır. Kuşkusuz, f_n değeri verilmişse.

$$\begin{aligned} & \frac{(x_n - x_{n-1})}{\sqrt{m_2^{(n-1)}} \mathbf{e}_{2n-3}^T \alpha + \frac{m_1^{(n-1)} (x_n - x_{n-1})}{m_2^{(n-1)} \sqrt{m_0^{(n-1)} m_2^{(n-1)} - m_1^{(n-1)^2}} \mathbf{e}_{2n-2}^T \alpha \\ & - \frac{\sqrt{m_2^{(n-1)}}}{\sqrt{m_0^{(n-1)} m_2^{(n-1)} - m_1^{(n-1)^2}} \mathbf{e}_{2n-2}^T \alpha = f_n \end{aligned} \quad (2.109)$$

Böylece, m denklem daha elde edilmiş olur. Bu m denklem $f(x)$ işlevinin yapısının α 'ya yansıtılması olarak düşünülmelidir. Bu m denklem

$$\eta_{\overline{k}} \begin{cases} -\frac{\sqrt{m_2^{(j_k)}}}{\sqrt{m_0^{(j_k)} m_2^{(j_k)} - m_1^{(j_k)^2}} \mathbf{e}_{2j_k}, & 1 \leq k < n \\ \frac{(x_n - x_{n-1})}{\sqrt{m_2^{(n-1)}}} \mathbf{e}_{2n-3} + \frac{m_1^{(n-1)} (x_n - x_{n-1})}{m_2^{(n-1)} \sqrt{m_0^{(n-1)} m_2^{(n-1)} - m_1^{(n-1)^2}} \mathbf{e}_{2n-2} \\ -\frac{\sqrt{m_2^{(n-1)}}}{\sqrt{m_0^{(n-1)} m_2^{(n-1)} - m_1^{(n-1)^2}} \mathbf{e}_{2n-2} & j_k = n \end{cases}$$

$$n-1 \leq k \leq n+m-2 \quad (2.110)$$

tanımlarıyla aşağıdaki biçime büründürülebilir.

$$\eta_{k+n-2}^T \alpha = f_{j_k}, \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.111)$$

Burada m 'in artı değer alması gerektiği çok açıktır. Eğer $m < n$ olursa α yöneyinin $m-n$ sayıda bileşeni belirsiz kalır. Buna karşılık, $m = n$ durumu belirsiz bileşen bırakmaz. Dolayısıyla, bu belirsizlikleri kaldırmak amacıyla, bir yol, bir ölçüt bulmak gerekir. Bu öyle bir biçimde gündeme getirilebilmelidir ki $m = n$ durumunda da yani belirsizlik olmama durumunda da geçerli olabilsin. Bu amaçla, $f(x)$ işlevini Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi'ne açmak, daha sonra, bazı ölçenlerin değerlerini saptamak, ondan sonra da bunlardan seçilmiş birinin belli bir özelliğinin eniyilenmesini sağlayacak biçimde belirsizlikleri ortadan kaldıracak doğrultuda eyleme geçmek, yol olarak seçilebilir. Böylece, YBMG açılımı olarak, $f(x)$ 'in bir değişkenli oluşu da gözönüne alınarak,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{2n-2} \alpha_j u_j = f^{(0)} + f^{(1)}(x) \quad (2.112)$$

yazılabilir. Burada, $f^{(0)}$ ile simgelenen değişmez YBMG bileşeni aşağıdaki anlatımla tanımlanmaktadır.

$$f^{(0)} = \int_{x_1}^{x_n} dx W(x) \sum_{j=1}^{2n-2} \alpha_j u_j(x) \quad (2.113)$$

Burada, eğer,

$$\mathbf{t}^T \equiv [t_1 \dots t_{2n-2}], \quad (2.114)$$

$$t_j \equiv \int_{x_1}^{x_n} dx W(x) u_j(x), \quad 1 \leq j \leq 2n-2 \quad (2.115)$$

tanımlamaları yapılacak olursa

$$f^{(0)} = \mathbf{t}^T \alpha \quad (2.116)$$

eşitliği yazılabilir. İlgilenilen $f(x)$ işlevinin YBMG Değişmezlik Ölçeni

$$\sigma_0(\alpha) \equiv \frac{\|f^{(0)}\|^2}{\|f\|^2} \quad (2.117)$$

anlatımıyla tanımlanır. Bu büyüklüğü n belirlenebilmesi için (2.116)'dan hemen

$$\|f^{(0)}\|^2 = \alpha^T \mathbf{t} \mathbf{t}^T \alpha \quad (2.118)$$

yazılabilir. Öte yandan u_j işlevlerinin birbirine dik ve birimboylu olmaları

$$\|f\|^2 = \alpha^T \alpha, \quad (2.119)$$

ve sonuçta,

$$\sigma_0(\alpha) \equiv \frac{\alpha^T \mathbf{t} \mathbf{t}^T \alpha}{\alpha^T \alpha} \quad (2.120)$$

yazılmasına olanak sağlar.

Yukarıda sözü edilen belirsizlikleri kaldırmak amacıyla, bu değişmezlik ölçeninin değerinin olabildiğince büyük olması istemi, ölçüt olarak alınabilir. Bu ise, bu ölçenin yukarıda sözedilen $n + m - 2$ koşul altında eniyilenmesi anlamına gelir. Bu doğrultuda, aşağıdaki amaç işlevimsisi kullanılabilir.

$$\mathcal{J}(\alpha, \lambda) \equiv \sigma_0(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k \eta_k^T \alpha + \sum_{k=n-1}^{n+m-2} \lambda_k \left(\eta_k^T \alpha - f_{j_{k+n-2}} \right) \quad (2.121)$$

$$\lambda^T \equiv [\lambda_1 \dots \lambda_{n+m-2}] \quad (2.122)$$

Eniyileme için bu işlevimsinin, kendi bağımsız değişkenlerine göre türevlenip sıfırlanması gerekir. λ 'lara göre türevleme yukarıda önceden sözedilen kısıt denklemlerinin elde edilmesine yani

$$\eta_k^T \alpha = 0, \quad 1 \leq k \leq n-2, \quad (2.123)$$

$$\eta_k^T \alpha = f_{j_{k+n-2}}, \quad n-1 \leq k \leq n+m-2 \quad (2.124)$$

yazılabilmesine olanak sağlar. Öte yandan, α 'lara göre türevleme ve sıfırlama işlemlerinden de, σ_0 'ın α 'lara olan bağımlılığı açık olarak gösterilmemek üzere,

$$\frac{2}{\alpha^T \alpha} (\mathbf{t}\mathbf{t}^T - \sigma_0 \mathbf{I}) \alpha + \sum_{k=1}^{n+m-2} \lambda_k \eta_k = \mathbf{0} \quad (2.125)$$

yöneysel eşitliğine ulaşılabilir. Bu ise,

$$\bar{\lambda}_k \equiv \frac{\alpha^T \alpha}{2} \lambda_k, \quad 1 \leq k \leq n+m-2 \quad (2.126)$$

tanımlamalarından sonra,

$$(\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T) \alpha = \sum_{k=1}^{n+m-2} \bar{\lambda}_k \eta_k \quad (2.127)$$

ve buradan da

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n+m-2} \bar{\lambda}_k (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T)^{-1} \eta_k \quad (2.128)$$

vargısına ulaşılır. Bu bağıntı, α yöneyini, bu an için bilinmeyen, λ yöneyi, ya da daha doğrusu onun öğeleri, türünden veren bir anlatımdır. Bu anlatım (2.123) ve (2.124) ile birleştirilerek λ yöneyini belirlemek için yöneysel bir denklem üretilebilir. Bu yönde, (2.128)'de k yerine ℓ simgesini kullanarak, (2.123)'den

$$\sum_{\ell=1}^{n+m-2} \eta_k^T (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T)^{-1} \eta_\ell \bar{\lambda}_\ell = 0, \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (2.129)$$

ve (2.124)'ten

$$\sum_{\ell=1}^{n+m-2} \eta_k^T (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T)^{-1} \eta_\ell \bar{\lambda}_\ell = f_{j_{k+n-2}}, \quad n-1 \leq k \leq n+m-2 \quad (2.130)$$

eşitlikleri üretilebilir. Bu son iki denklem takımını yöneysel bir yapıda bütünleştirebilmek için aşağıdaki tanımları yapmak yeterlidir

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^T &\equiv [\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_{n+m-2}] \\ \mathbf{L} &\equiv \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n+m-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n+m-2,1} & \cdots & L_{n+m-2,n+m-2} \end{bmatrix}, \\ L_{k\ell} &\equiv \eta_k^T (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T)^{-1} \eta_\ell, \quad 1 \leq k, \ell \leq n+m-2, \\ \mathbf{f} &\equiv \sum_{k=1}^m f_{j_k} \mathbf{e}_{n+k-2} \end{aligned} \quad (2.131)$$

(2.130)'u, bu tanımlardan, aşağıdaki anlatımla yeniden yazmak olanaklıdır.

$$\mathbf{L} \bar{\lambda} = \mathbf{f} \quad (2.132)$$

Bu an için \mathbf{L} dizeyinin evrilebilir olduğunu varsayarak, (2.132)'den,

$$\bar{\lambda} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{f} \quad (2.133)$$

vargısına ulaşılabilir. Bu ise

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n+m-2} (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T)^{-1} \eta_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.134)$$

yazılmasına olanak sağlar.

Artık, \mathbf{L} 'nin evrilebilirliği ile ilgilenebiliriz. Bu amaçla, iyi bilinen

$$(\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T)^{-1} = \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_0(\sigma_0 - \mathbf{t}^T \mathbf{t})} \mathbf{t}\mathbf{t}^T \quad (2.135)$$

eşitliğinden yararlanabiliriz. Bu eşitliği daha da somutlaştırmak ve ilginç yorumlar getirebilmek için

$$\mathcal{P}_k g(x) \equiv u_k(x) \int_{x_1}^{x_n} dy W(y) u(y) g(y), \quad 1 \leq k \leq 2n-2 \quad (2.136)$$

özdeşlikleriyle tanımlanan işlemleri gözönüne alalım. Özenli bir inceleme hemen

$$\mathbf{t}^T \mathbf{t} = \sum_{k=1}^{2n-2} t_k^2 = \int_{x_1}^{x_n} dx W(x) \left[\sum_{k=1}^{2n-2} \mathcal{P}_k \right] U(x) \quad (2.137)$$

yazılabileceğini gösterir. Burada $U(x)$ tümlevleme aralığı içinde her yerde 1 değerini alan işlevi simgelemektedir. Bu eşitlikteki köşeli ayraçlar (ing: parentheses) ile çevrelenmiş olan işlemin etki ettiği işlevden ürettiği işlev, etki altındaki işlevin ilgili aralıkta doğrusal altkesimli içdeğer biçim ile üretilen karşılığıdır. Etki altındaki işlev ilgili aralıkta her yerde 1 değerini aldığından

$$\left[\sum_{k=1}^{2n-2} \mathcal{P}_k \right] U(x) = 1 \quad (2.138)$$

ve buradan da (2.137) yerine

$$\mathbf{t}^T \mathbf{t} = \int_{x_1}^{x_n} dx W(x) = 1 \quad (2.139)$$

vargısına ulaşılabilir. Bu ise (2.135) yerine

$$(\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T)^{-1} = \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_0(\sigma_0 - 1)} \mathbf{t}\mathbf{t}^T = \frac{1}{\sigma_0} [\mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T] - \frac{1}{1 - \sigma_0} \mathbf{t}\mathbf{t}^T \quad (2.140)$$

yazılabileceği anlamına gelir. Buradaki $\mathbf{t}\mathbf{t}^T$ dizeyi bir dışçarpım olup birimboylu olduğu yukarıda kanıtlanmış bulunan \mathbf{t} yöneyinin örttüğü uzaya izdüşüm gerçekleştiren bir

dizedir. Dolayısıyla, buradaki son eşitliğin sağ yanı, bu eşitliğin en solunda görünen düzey evriğinin bu izdüşüm düzeyinin kendisi ile tümleyicisinin doğrusal bir birleşimi olarak ortaya çıkmaktadır. (2.140) eşitliği σ_0 değıştirgesi 0 veya 1 olmadıkça geçerli kalır. Bu özel değerler ise α yöneyinin \mathbf{t} yöneyine koşut ya da dik olması durumlarında ortaya çıkar. Burada, bu an için, bu özel durumlarla karşılaşılmayacağı, yani $0 < \sigma_0 < 1$ eşitsizliğinin geçerli olduğu durumlarla ilgilenileceği öngörülecektir.

(2.140) kullanılarak $L_{k\ell}$ aşığıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$L_{k\ell} = \frac{1}{\sigma_0} \eta_k^T \eta_\ell + \frac{1}{\sigma_0(\sigma_0 - \mathbf{t}^T \mathbf{t})} \eta_k^T \mathbf{t} \mathbf{t}^T \eta_\ell, \quad 1 \leq k, \ell \leq n+m-2, \quad (2.141)$$

Bu da,

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1n+m-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n+m-2,1} & \cdots & E_{n+m-2,n+m-2} \end{bmatrix},$$

$$E_{k\ell} \equiv \eta_k^T \eta_\ell, \quad 1 \leq k, \ell \leq n+m-2,$$

$$\boldsymbol{\theta} \equiv [\theta_1 \dots \theta_{n+m-2}],$$

$$\theta_k \equiv \eta_k^T \mathbf{t}, \quad 1 \leq k \leq n+m-2 \quad (2.142)$$

tanımlarıyla,

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{E} + \frac{1}{\sigma_0(\sigma_0 - 1)} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T \quad (2.143)$$

vargısına ulaşmayı olanaklı kılar. Özenli bir inceleme

$$\mathbf{L}^{-1} = \sigma_0 \mathbf{E}^{-1} - \frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{t}^T \mathbf{t}} \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{E}^{-1} \quad (2.144)$$

yazılabileceğini gösterir.

Buradan daha da ileri gidebilmek için önce

$$\bar{\mathbf{E}} \equiv \sum_{k=1}^{n+m-2} \eta_k \mathbf{e}_k^T \quad (2.145)$$

tanımlamasını yapmak ve bundan çok zorluk çekmeden çıkarılabilecek olan

$$\bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{t} = \boldsymbol{\theta} \quad (2.146)$$

$$\bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \quad (2.147)$$

eşitliklerini gözönüne almak gerekir.

(2.145)'ten yararlanarak (2.134)'ü aşağıdaki daha yalın anlatıma indirgemek olanaklıdır.

$$\alpha = (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T)^{-1} \bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.148)$$

Burada (2.140)'ın kullanımı

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_0} \bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} + \frac{1}{\sigma_0 (\sigma_0 - 1)} \mathbf{t}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.149)$$

arasonucuna götürür. Biraz daha ilerlemek için burada (2.144) ve (2.146)'nın kullanımıyla aşağıdaki ara eşitlikler yazılabilir.

$$\bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} = \sigma_0 \bar{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f} - \frac{\sigma_0 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f})}{\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta} \bar{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1} \theta, \quad (2.150)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} &= \sigma_0 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f}) - \frac{\sigma_0 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f})}{\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta} \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta, \\ &= \frac{\sigma_0 (\sigma_0 - 1) (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f})}{\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta} \end{aligned} \quad (2.151)$$

Bunların (2.149)'da kullanımı, bir takım ara işlemler sonrasında, aşağıdaki daha indirgenmiş denklemin yazılmasına olanak sağlar.

$$\alpha = \bar{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f} + \frac{(\theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f})}{\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta} (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1} \theta) \quad (2.152)$$

Buradan, bir takım ara işlemlerin ayrıntılarını vermeksizin

$$\mathbf{t}^T \alpha = \frac{(\theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f}) \sigma_0}{\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta} \quad (2.153)$$

ve

$$\alpha^T \alpha = \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f}}{(\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^2} \left[(\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^2 + \rho_f (1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta) \right] \quad (2.154)$$

vargılarına ulaşılabilir. Burada ρ_f

$$\rho_f \equiv \frac{(\theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f})^2}{\mathbf{f}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f}} \quad (2.155)$$

anlatımıyla tanımlanmaktadır. (2.153) ve (2.154)'ten aşağıdaki eşitliği üretmek hiç de zor değildir.

$$\frac{(\mathbf{t}^T \alpha)^2}{\alpha^T \alpha} = \frac{\rho_f \sigma_0^2}{(\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^2 + \rho_f (1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)} \quad (2.156)$$

Bu ise, sol tarafın σ_0 'a eşdeğer olması nedeniyle,

$$\sigma_0 = \frac{\rho_f \sigma_0^2}{(\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^2 + \rho_f (1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)} \quad (2.157)$$

denklemine ve buradan da

$$(\sigma_0 - 1 + \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^2 + \rho_f (1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta) - \rho_f \sigma_0 = 0 \quad (2.158)$$

denklemine götürür. Bunun yeniden düzenlenmesiyle de, denklem

$$(\sigma_0 - 1)^2 + [2\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta - \rho_f] (\sigma_0 - 1) + (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^2 - \rho_f (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta) = 0 \quad (2.159)$$

yapısında bir ikinci derece çokterimlisinin köklerinin belirlenmesi sorununa dönüşür. Buradan kökler olarak

$$\sigma_0^{(1)} = 1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta, \quad (2.160)$$

$$\sigma_0^{(2)} = 1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta + \rho_f, \quad (2.161)$$

eşitlikleriyle verilen anlatımlar elde edilir.

Bunlardan ikincisi herhangi bir tekilliğe neden olmaksızın işlemlerimizde eşsizliği sağlar. Ancak, ilk σ_0 değeri \mathbf{L} dizeyinin evrtilmesini olanaksız kılar, yani \mathbf{L} dizeyini tekil duruma getirir. Bu nedenle, bu durumda, yukarıda \mathbf{L} 'nin evriğini içeren tüm bağıntılandırım geçersiz olur. Bu yüzden, α yöneyini, \mathbf{L} 'nin evriğini almaksızın belirlemenin yolunu bulmak gerekir. Bu amaçla, önce, (2.143)'ü σ_0 'ın tekilliğe yolaçan bu değerini yerine yerleştirerek yeniden yazalım.

$$\mathbf{L} = \frac{1}{1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta} \left[\mathbf{E} - \frac{1}{(\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)} \theta \theta^T \right] \quad (2.162)$$

Eğer, \mathbf{E} dizeyinin bakışlımlı ve artı tanımlı olduğu anımsanırsa, onun kare kökünün alınabileceği vargısını kullanarak (2.162)'yi, aşağıdaki biçimde, yeniden yazmak olanaklı duruma gelir.

$$\mathbf{L} = \frac{1}{1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta} \mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \left[\mathbf{I} - \bar{\theta} \bar{\theta}^T \right] \mathbf{E}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.163)$$

$$\bar{\theta} \equiv \frac{1}{(\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}} \theta \quad (2.164)$$

Bu durumda (2.132) aşağıdaki biçime bürünür

$$\mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \left[\mathbf{I} - \bar{\theta} \bar{\theta}^T \right] \mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \bar{\lambda} = [1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta] \mathbf{f} \quad (2.165)$$

Bu denklem

$$\bar{\bar{\lambda}} \equiv \mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \bar{\lambda}, \quad (2.166)$$

$$\bar{\mathbf{f}} \equiv [1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta] \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{f} \quad (2.167)$$

tanımlarıyla

$$\left[\mathbf{I} - \bar{\theta} \bar{\theta}^T \right] \bar{\lambda} = \bar{\mathbf{f}} \quad (2.168)$$

denkleminde dönüştürülebilir. Bu denklemin katsayı dizeyi, yani $\left[\mathbf{I} - \bar{\theta} \bar{\theta}^T \right]$, sıfır uzayı boş olmayan ve, kolayca gösterilebileceği üzere, $\bar{\theta}$ yöneyince örtülen 1 boyutlu bir alt uzay olan dizeydir. Bu nedenle, (2.168)'in çözümünün varolabilmesi için sağ yandaki yöneyin $\left[\mathbf{I} - \bar{\theta} \bar{\theta}^T \right]$ dizeyinin sol sıfır uzayına dik, yani o uzay içinde bileşeni bulunmaması gerekir. Bu durum matematiksel anlatımla,

$$\bar{\theta}^T \bar{\mathbf{f}} = 0 \quad (2.169)$$

koşul eşitliğiyle verilebilir. Ancak, bunun her zaman sağlanması olanaklı değildir. Sağlanması $f(x)$ işlevinin düğümlerdeki değerlerinin (2.169)'u sağlayacak nicelikte olmasını gerektirir. Sağlanma olmadıkça da (2.168)'e ve dolayısıyla değişmezlik ölçeni eniyilemesi sorununa çözüm getirilemez. Bu sıkıntılı durumdan dolayı bir yoldan kaçınmak olanaklıdır. Bu doğrultuda, salt verileri verilen $f(x)$ işlevi yerine onunla, bilinen ama seçimi isteğe bağlı olan, bir $g(x)$ işlevinin doğrusal birleşimi ile çalışmak ve dolayısıyla, $f(x)$ yerine bu doğrusal birleşimi belirleyip sonra sonuçtan $f(x)$ 'i çekerek $f(x)$ 'i belirleme yoluna gitmek olanaklıdır. Bu durumda, (2.168) yerine, $\bar{\mathbf{g}}$ yöneyi daha sonra uygun biçimde belirlenmek ve γ_1 bu an için belirsiz bir sayı (ing: scalar) olmak üzere,

$$\left[\mathbf{I} - \bar{\theta} \bar{\theta}^T \right] \bar{\lambda} = \bar{\mathbf{f}} + \gamma_1 \bar{\mathbf{g}} \quad (2.170)$$

yazılabilir ve bu denklemin çözülebilirliğini sağlamak için aşağıdaki koşulun geçerli olmasını sağlayacak $\bar{\mathbf{g}}$ yöneyi arayışına gidilebilir.

$$\bar{\theta}^T \bar{\mathbf{f}} + \gamma_1 \bar{\theta}^T \bar{\mathbf{g}} = 0 \quad (2.171)$$

Son denklem, $\bar{\mathbf{g}}$ yöneyinin $\bar{\theta}$ yöneyince taranan uzayda bileşeni olduğu sürece yani $\bar{\theta}^T \bar{\mathbf{g}}$ oldukça, γ_1 için çözülebilir ve

$$\gamma_1 = -\frac{\bar{\theta}^T \bar{\mathbf{f}}}{\bar{\theta}^T \bar{\mathbf{g}}} \quad (2.172)$$

elde edilebilir. (2.171)'in geçerliliği (2.170)'in aşağıdaki biçime büründürülebilmesine olanak sağlar.

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{I} - \bar{\theta} \bar{\theta}^T \right] \bar{\lambda} &= \left[\mathbf{I} - \bar{\theta} \bar{\theta}^T \right] (\bar{\mathbf{f}} + \gamma_1 \bar{\mathbf{g}}) \quad \implies \\ \left[\mathbf{I} - \bar{\theta} \bar{\theta}^T \right] (\bar{\lambda} - \bar{\mathbf{f}} - \gamma_1 \bar{\mathbf{g}}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.173)$$

Buradaki son denklem, ayraçlar arasında görünen yöneysel anlatımın $\bar{\theta}$ yöneyince taranan uzay içinde herhangi bir yöney olabileceği, yani, γ_2 bu an için belirsiz bir yöney olmak üzere

$$\bar{\lambda} - \bar{\mathbf{f}} - \gamma_1 \bar{\mathbf{g}} = \gamma_2 \bar{\theta} \quad (2.174)$$

ve buradan da

$$\bar{\lambda} = \bar{\mathbf{f}} + \gamma_1 \bar{\mathbf{g}} + \gamma_2 \bar{\theta} \quad (2.175)$$

yazılabileceği anlamına gelir. Eğer (2.166) ve (2.167) eşitlikleri anımsanır ve $\bar{\mathbf{x}}$ 'in \mathbf{g} ile simgelenen bir yöneyden

$$\bar{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{g} \quad (2.176)$$

eşitliğiyle üretildiği varsayılırsa, (2.175)'i aşağıdaki anlatımla yeniden yazmak olanaklı olur.

$$\bar{\lambda} = [1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta] \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f} + \gamma_1 \mathbf{E}^{-1} \mathbf{g} + \frac{\gamma_2}{(\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{E}^{-1} \theta \quad (2.177)$$

Artık, buradan α yöneyine geçebiliriz. Bu amaçla, (2.145) tanımıyla, (2.149) eşitliğini ve (2.177)'yi birleştirerek aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \alpha &= [\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T]^{-1} \bar{\mathbf{E}} \left([1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta] \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f} + \gamma_1 \mathbf{E}^{-1} \mathbf{g} + \frac{\gamma_2}{(\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{E}^{-1} \theta \right) \\ &= \gamma_3 \bar{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f} + \gamma_4 \bar{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{g} + \gamma_5 \bar{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1} \theta + \gamma_6 \mathbf{t} \end{aligned} \quad (2.178)$$

Burada σ_0 'ın açık yapısı bu anda kullanılmamış olup yeni γ sayıllarının σ_0 ve diğer ögeler türünden tanım anlatımları aşağıda verilmektedir.

$$\gamma_3 = \frac{1}{\sigma_0} [1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta], \quad (2.179)$$

$$\gamma_4 = \frac{\gamma_1}{\sigma_0}, \quad (2.180)$$

$$\gamma_5 = \frac{\gamma_2}{\sigma_0 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.181)$$

$$\begin{aligned} \gamma_6 &= \frac{1}{\sigma_0} [1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta] (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f}) + \frac{\gamma_1 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{g})}{\sigma_0} + \frac{\gamma_2 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_0} \\ &= \frac{1}{\sigma_0} (\bar{\theta}^T \bar{\mathbf{f}} + \gamma_1 \bar{\theta}^T \bar{\mathbf{g}}) + \frac{\gamma_2 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_0} = \frac{\gamma_2 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_0} \end{aligned} \quad (2.182)$$

Eğer, (2.178)'deki eşitliğin ilk evrik çarpanınının açık yapısı kullanıldıktan sonra oluşan denklemin her iki yanı, soldan, \mathbf{t}^T ile çarpılır ve daha önceden de kullanılmış olan indirgeyici özelliklerden yararlanılırsa aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^T \alpha &= \frac{1}{\sigma_0 - 1} \left([1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta] \theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{f} + \gamma_1 \theta^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{g} + \gamma_2 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{\gamma_2}{\sigma_0 - 1} (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (2.183)$$

Aynı eylem \mathbf{t}^T yerine α^T kullanılarak yinelenirse aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned}\alpha^T \alpha &= \frac{1}{\sigma_0^2} [\varphi^T \mathbf{E}^{-1} \varphi + 2\bar{\gamma}_2 \varphi^T \mathbf{E}^{-1} \theta + \bar{\gamma}_2^2 \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta] \\ &+ \frac{(2\sigma_0 - 1)}{\sigma_0^2 (\sigma_0 - 1)^2} [\varphi^T \mathbf{E}^{-1} \theta + \bar{\gamma}_2 \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta]^2\end{aligned}\quad (2.184)$$

Burada

$$\varphi \equiv [1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta] \mathbf{f} + \gamma_1 \mathbf{g}, \quad (2.185)$$

$$\bar{\gamma}_2 \equiv \frac{\gamma_2}{(\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^{\frac{1}{2}}}\quad (2.186)$$

tanımlamaları yapılmakta olup

$$\varphi^T \mathbf{E}^{-1} \theta = 0 \quad (2.187)$$

eşitliğinin geçerliliğini göstermek hiç de zor değildir. Böylece, (2.184)'den

$$\begin{aligned}\alpha^T \alpha &= \frac{1}{\sigma_0^2} \varphi^T \mathbf{E}^{-1} \varphi + \frac{\bar{\gamma}_2^2}{\sigma_0^2} \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta + \frac{(2\sigma_0 - 1)}{\sigma_0^2 (\sigma_0 - 1)^2} \bar{\gamma}_2^2 (\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta)^2, \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} \varphi^T \mathbf{E}^{-1} \varphi + \frac{\gamma_2^2}{\sigma_0^2} + \frac{(2\sigma_0 - 1)}{\sigma_0^2 (\sigma_0 - 1)^2} \gamma_2^2 \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta, \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} \varphi^T \mathbf{E}^{-1} \varphi + \frac{\gamma_2^2}{\sigma_0^2} + \frac{(2\sigma_0 - 1)}{\sigma_0^2 (1 - \sigma_0)^2} \gamma_2^2 (1 - \sigma_0), \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\varphi^T \mathbf{E}^{-1} \varphi + \frac{\sigma_0 \gamma_2^2}{1 - \sigma_0} \right]\end{aligned}\quad (2.188)$$

sonucuna varılır. Burada, son eşitlikte, σ_0 'ın değişmezlik ölçeni eniyilemesiyle elde edilen ve \mathbf{L} düzeyini evirtilemez kılan yapısıyla ilgilendiğimiz anımsanarak ve σ_0 ile çalışarak daha tıkHz bir yapı elde etmek amacıyla $\theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta = 1 - \sigma_0$, eşitliğinden yararlanılmıştır.

Eğer (2.183) ve (2.188) eşitlikleri birleştirilecek olur,

$$\Gamma_2 \equiv \frac{\gamma_2^2 \sigma_0}{(1 - \sigma_0) \varphi^T \mathbf{E}^{-1} \varphi} \quad (2.189)$$

tanımından yararlanılır, ve σ_0 'ın \mathbf{t} ile α türünden anlatımı anımsanır ve gerekli yalınlaştırmalar yapılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 + 1} = 1 \quad (2.190)$$

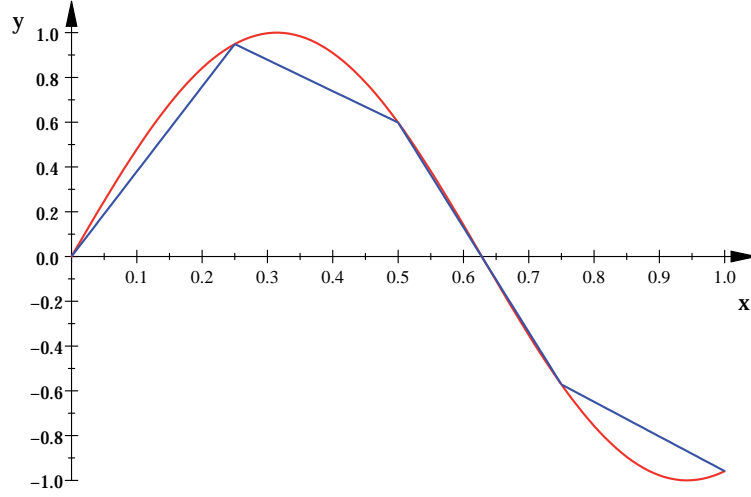
Bunun geçerli olabilmesi için Γ_2 'nin sonsuza gitmesi, dolayısıyla, ya φ 0'dan değişik kalarak γ_2 'nin sonsuz büyümesi ya da γ_2 sonlu kalırken φ 'nin 0'a gitmesi gerekir. Tüm bunlar ise $\sigma_0 = 1 - \theta^T \mathbf{E}^{-1} \theta$ durumunda çözüm üretebilmek için, ancak ve ancak, \mathbf{f} yöneyinin θ yöneyine eşdeğer olması gerektiği anlamına gelir. Yani, bu durumun oluşabilmesi çok çok özel bir yapı gerektirmektedir. Gerçekte, özenli bir inceleme, bu çok özel durumun $f(x)$ işlevinin değişmez nitelikli olacağı ve her yerde 1 değerini alacağı anlamına gelir.

2.2.2 Doğrusal Altkesimsel Taban İşlevleri kullanılarak İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG için bazı açıklamalar

Bu altbölümde, önceki altbölümde ayrıntılı olarak verilen kurama dayandırılan uygulamalar verilmektedir. Bu bağlamda, seçilen belli bir işlev için değişik türlerde veri takımları için elde edilen sonuçlar asıl işlev ile çizimler düzeyinde karşılaştırılmaktadır. Altkesimsel taban işlevleri kullanımı veri noktalarına soldan ve sağdan yaklaşırken, çok özel durumlar dışında, değişik türev değerleri elde edilmesine yolaçmaktadır. Bu ayrılığın giderilmesi için elde pek bir esneklik bulunmamaktadır. Dolayısıyla ara noktalardaki türev sıçramalarının değerlerini, sıfırlanmasa da azaltmak yani bastırmak yoluna gidilebilir. Bir başka yol da yeni ara nokta kullanımı ve bu noktalarda türevde süreklilik koşulu getirmek olabilir. Çalışmalar sonucunda en etkin yolun yeni ara nokta eklenmesi, bazı noktalarda türevde süreklilik koşulu getirmek ve bu koşulun getirilmediği noktalarda türevdeki değişimin bastırılması olduğu belirlenmiştir. Sonraki altbölümlerde yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar çeşitli örnekler verilerek açıklanmaktadır.

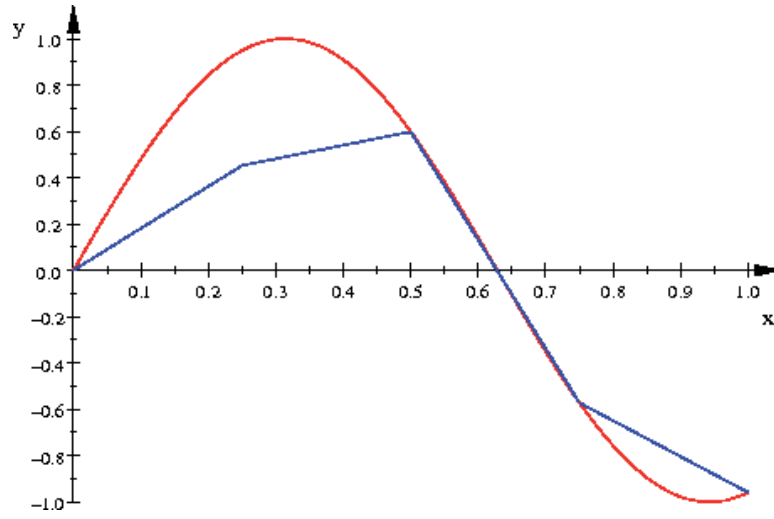
2.2.3 Türev bastırimsız durum

Şekil 2.10'da elde edilen işlevle $\sin(5x)$ işlevi karşılaştırılmaktadır. Burada 5 düğüm noktası seçilmiştir ve düğüm noktalarının tümünde işlev değerleri bilinmektedir. Görüldüğü gibi, burada, önerdiğimiz yöntemin, doğrusal altkesim içdeğerbiçimi ile elde edilecek işlevi ürettiği saptanmıştır.



Şekil 2.10: Türev bastırmasız durum: $y = \sin(5x)$, $n = 5$, $x_1 = 0.00$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

Eğer x_2 noktasındaki değer verilmemişse elde edilecek davranış Şekil 2.11’de görüntülenen biçimde olmaktadır. Yani, işlev değeri verilmeyen bir noktada, elde edilen yaklaşım işlevi gerçek işlevden oldukça sapmaktadır.



Şekil 2.11: Türev bastırmasız durum: $y = \sin(5x)$, $n = 4$, $x_1 = 0.00$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

2.2.4 Türevdeki sıçramanın bastırılması

Türevdeki sıçramanın bastırılması için gerekli olan esneklik yoksunluğu sorununu aşmak için verilerin verildiği takımdaki noktalar dışında ara noktalar tanımına gidilmiştir. Bu ara noktalarda veri verilmediği için bunlara işlev için değer alım kısıtlarının dayatılması söz konusu değildir. Dolayısıyla, her bir ara nokta için bir esneklik elde bulunacaktır. Bu ara noktalarda etkinlik sağlayabilecek istenilen türde koşul getirilebilir.

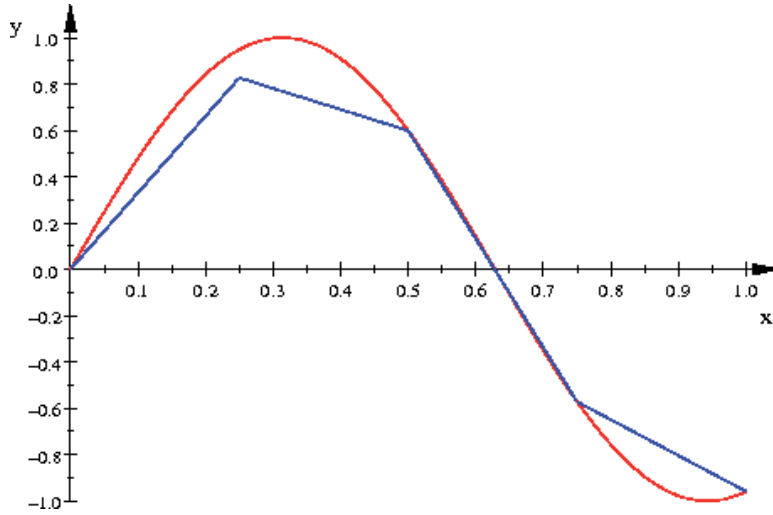
Bu koşullar ara noktalarda işlev sürekliliği ve türev değişiminin bastırılması olarak gündeme getirilebilir. Gözlemler, tüm ara noktalarda türev bastırımı yerine birer ara nokta atlayarak türev bastırımına gitmenin daha yerinde olduğunu göstermektedir. Ancak ilk uygulamalarımızda, yeni ara nokta eklenmemiş, verilerin verildiği ara noktaların tümünde türevdeki sıçramanın bastırılması ve bunun da amaç işlevimsisine eklenmesi yoluna gidilmiştir. Yani, amaç işlevimsisine $n - 2$ sayıda

$$\mathbf{q}_i = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \mathbf{u}'(x) - \lim_{x \rightarrow x_i^+} \mathbf{u}'(x) \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (2.191)$$

terimi eklenmiştir. Bu durumda amaç işlevimsisindeki amaç terimi

$$\sigma_0(\alpha) \equiv \frac{\alpha^T (\mathbf{t}\mathbf{t}^T + (\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + \dots + \mathbf{q}_{n-1}\mathbf{q}_{n-1}^T))\alpha}{\alpha^T \alpha} \quad (2.192)$$

yapısında alınmıştır. Bu durumda daha önce türev bastırmasız durumda elde edilen denklemlerdeki bazı terimlerin yeni yapıları (2.193) ve (2.194)'te verilen biçimlere bürünmektedir ($1 \leq k, \ell \leq n + m - 2$).



Şekil 2.12: Türevdeki sıçramanın bastırılması: $y = \sin(5x)$, $n = 4$, $x_1 = 0.00$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

$$L_{k\ell} \equiv \eta_k^T (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T - (\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T - \dots - \mathbf{q}_{n-1}\mathbf{q}_{n-1}^T))^{-1} \eta_\ell \quad (2.193)$$

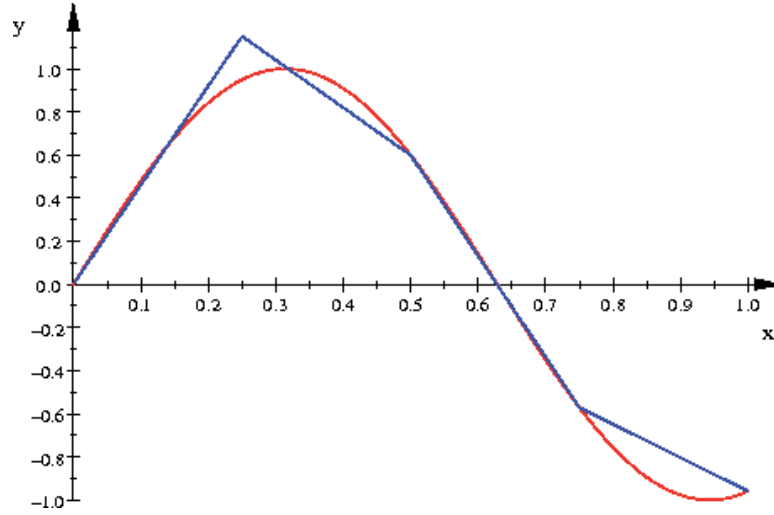
$$\alpha = \sum_{k=1}^{n+m-2} (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T - (\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T - \dots - \mathbf{q}_{n-1}\mathbf{q}_{n-1}^T))^{-1} \eta_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.194)$$

Eniyilemede bu bağıntılar kullanılarak σ_0 belirlenirken analitik çözüme gidilmemiş, Newton yöntemi ile yaklaşık çözüm elde edilmiştir.

Bu durumda elde edilen çizim Şekil 2.12’de verilmektedir. Şekilden görüldüğü gibi değeri verilmeyen noktada işlev gerçek işleve biraz daha yaklaşmıştır. Daha sonra $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$ dizelerine ağırlık verilerek aynı çalışma yapılmıştır. Yani bağıntılarda $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$ dizeleri β_i ağırlıkları ile çarpılmıştır. Bu durumda β_i değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Şekil 2.13, Şekil 2.14, Şekil 2.15’de $\sin(5x)$ için 5 düğüm noktalı durum için elde edilen sonuçlar verilmektedir. Bu örneklerde x_2 noktasındaki değer bilinmemektedir.

Şekil 2.13’te 3 ara nokta için ağırlıklar, sırasıyla, $\beta_1 = 0.20$, $\beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.40$ olarak alınmıştır. Şekil 2.14’te 3 ara nokta için ağırlıklar, sırasıyla, $\beta_1 = 0.25$, $\beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.35$ olarak alınmıştır. Şekil 2.15’te ise 3 ara nokta için ağırlıklar, sırasıyla, $\beta_1 = 0.30$, $\beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.30$ olarak alınmıştır. Görüldüğü gibi en iyi sonuç $\beta_1 = 0.30$, $\beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.30$ ağırlıkları için elde edilmiştir.

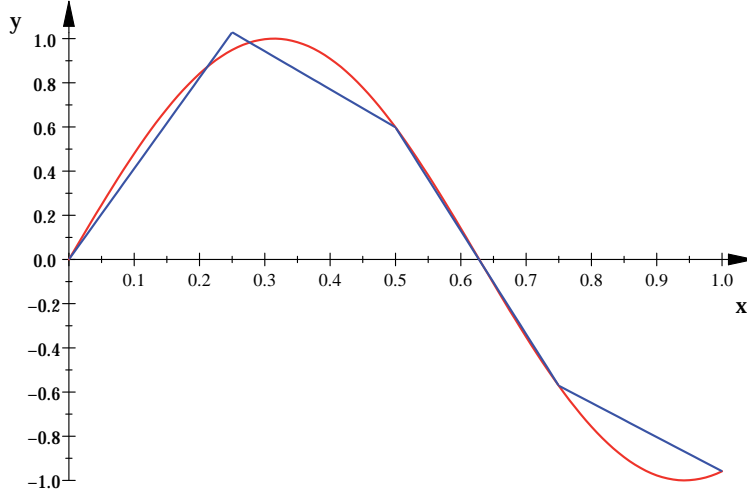


Şekil 2.13: Türevdeki sıçramanın bastırılması: $\beta_1 = 0.20$, $\beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.40$: $y = \sin(5x)$, $n = 4$, $x_1 = 0.00$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

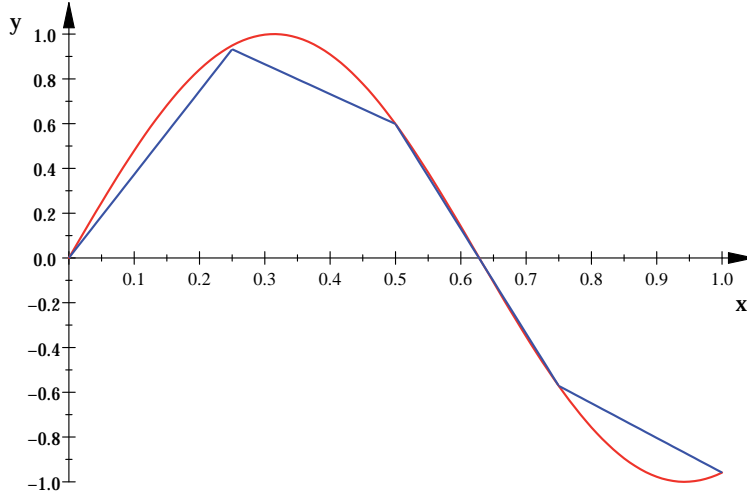
2.2.5 Ara değer ekleme ve ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması

Yukarıdaki altaltbölümde yapılan çalışmalar her noktada türev bastırımının da, türev bastırımı dışçarpımlarına ağırlık eşlik ettirmenin de, işlem ve yaklaşımın yoruculuğu da gözönüne alındığında, uygulama yönünden albenili olmadığı yargısına varılmaktadır. Bu nedenle yöntem ayrıntılarında değişikliğe gidilmiş ve düğüm noktalarının arasına yeni noktalar eklenmiştir. Ardışık veriler arasına eklenen nokta sayısının tek sayıda olmasına özen gösterilmelidir. Böylece, düğüm sayısı arttırılmıştır. Bu yeni durumda, yeni düğüm noktası sayısı

$$n_1 = 2 + n + (n - 1) * \text{aranoktasayisi} \quad (2.195)$$



Şekil 2.14: Türevdeki sıçramanın bastırılması: $\beta_1 = 0.25$, $\beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.35$: $y = \sin(5x)$, $n = 4$, $x_1 = 0.00$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.



Şekil 2.15: Türevdeki sıçramanın bastırılması: $\beta_1 = 0.30$, $\beta_2 = 0.40$ ve $\beta_3 = 0.30$: $y = \sin(5x)$, $n = 4$, $x_1 = 0.00$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1.00$.

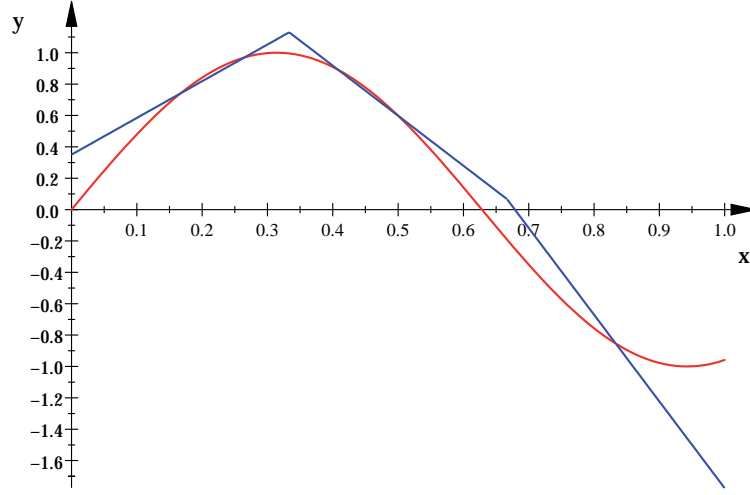
bağıntısı ile bulunur. Bağlıntıdaki, arandaki değeri araya eklenen nokta sayısıdır. 2., 4., 6. ve $n_1 - 1$. noktalarda $\lim_{x \rightarrow x_i^-} \mathbf{u}'(x) - \lim_{x \rightarrow x_i^+} \mathbf{u}'(x) = 0$ olması gerektiği koşul olarak amaç işlevimsisine eklenir. Yani, amaç işlevimsisindeki η sayısı $(n_1 - 1)/2$ artar. Yine

$$\sigma_0(\alpha) \equiv \frac{\alpha^T (\mathbf{t}\mathbf{t}^T) \alpha}{\alpha^T \alpha} \quad (2.196)$$

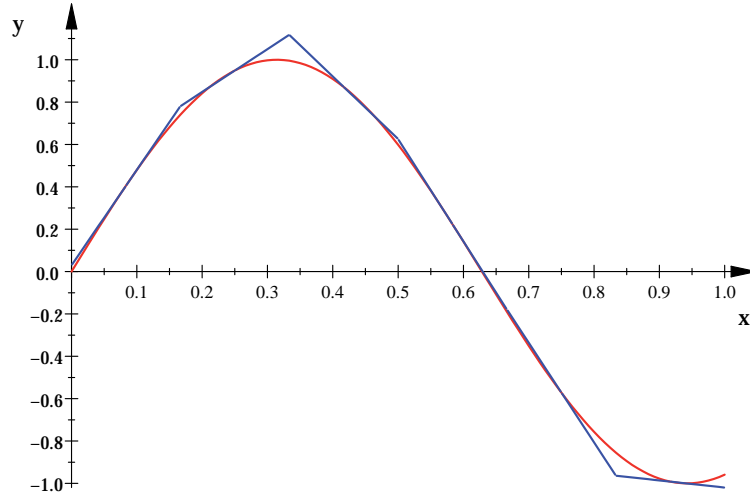
$$L_{k\ell} \equiv \eta_k^T (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T)^{-1} \eta_\ell, \quad 1 \leq k, \ell \leq n + m - 2, \quad (2.197)$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n+m-2} (\sigma_0 \mathbf{I} - \mathbf{t}\mathbf{t}^T)^{-1} \eta_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.198)$$

bağıntılarını kullanarak yaklaşıtırm işlevimizi elde ederiz. Şekil 2.16 ve Şekil 2.17'de $\sin(5x)$ 'de verilen noktalar arasına sırasıyla 3 nokta ve 5 nokta eklenmesi ile elde edilen sonuçlar verilmektedir.



Şekil 2.16: Ara değer ekleme ve ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması: üç ara nokta, $y = \sin(5x)$, $n = 5$, $x_1 = 0.0556$, $x_2 = 0.2778$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.7222$, $x_5 = 0.9444$.



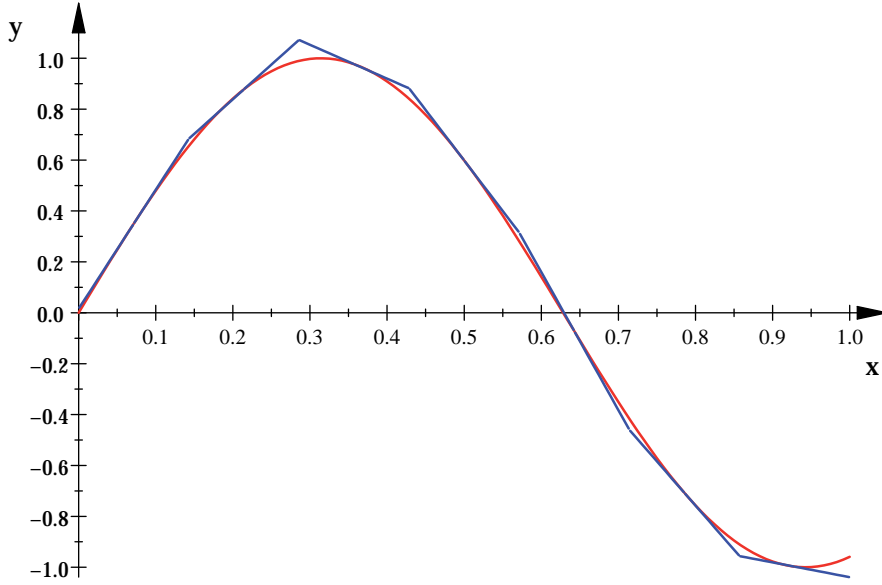
Şekil 2.17: Ara Değer Ekleme ve Ara Noktalarda Türevin Sıfırlanması: beş ara nokta, $y = \sin(5x)$, $n = 5$, $x_1 = 0.0385$, $x_2 = 0.2692$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.7308$, $x_5 = 0.9615$.

Görüldüğü gibi her ne kadar araya eklenen nokta sayısı arttıkça daha iyi yaklaşım elde edilse de bazı noktalarda sapma çok fazladır.

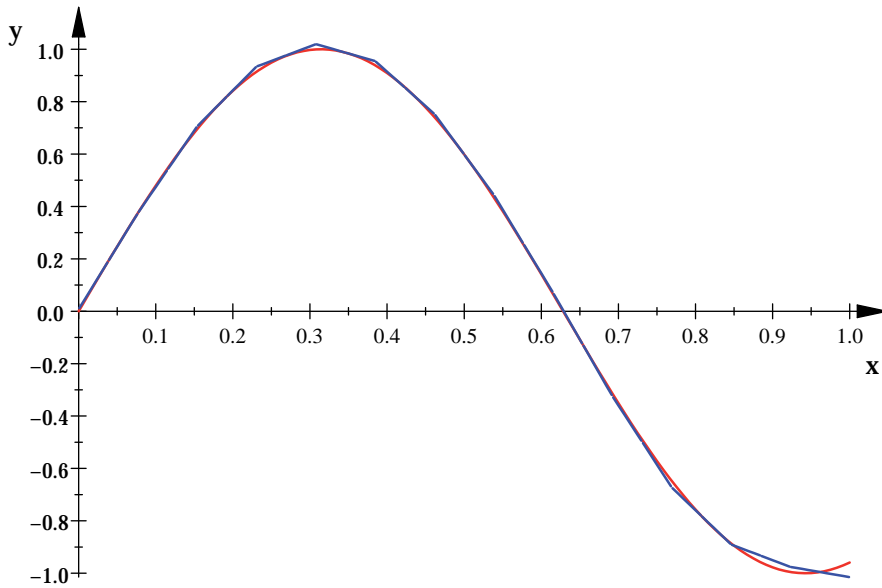
2.2.6 Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması

Yukarıdaki altaltbölümde verilen uygulamada etkinlik istenilen düzeye çıkarılamamış ve yaklaşım işlevinde az da olsa salınım eğilimlerine neden olabileceği gözlenmiştir. Bunun üzerine, yapılanmada salınım giderici küçük değişikliklere gidilmiş ardışık ara noktalarda türevin sıfıra eşitlenmediği noktalarda türevin bastırılmasına karar verilmiştir.

$\sin(5x)$ işlevi için araya 1 nokta ve araya 3 nokta eklendiğinde elde edilen sonuçlar Şekil 2.18 ve Şekil 2.19'da verilmektedir.

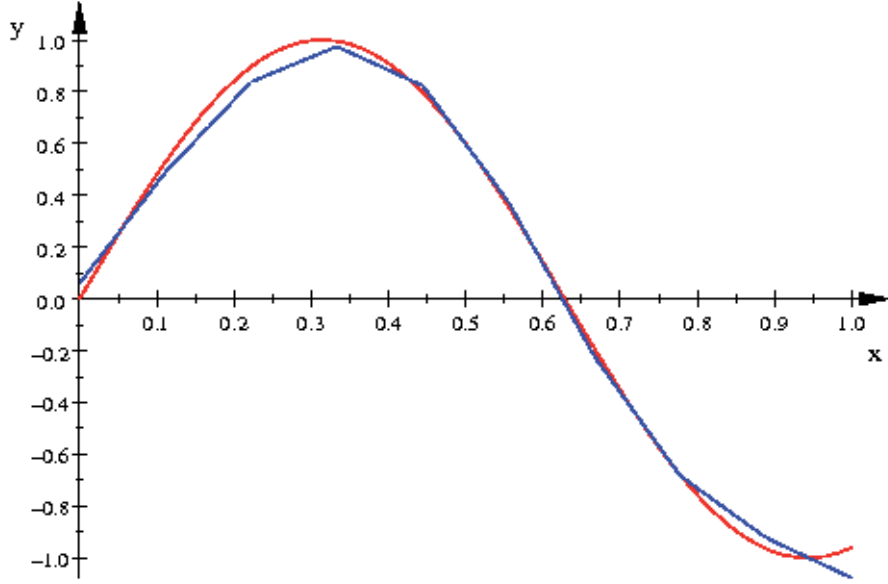


Şekil 2.18: Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması: bir ara nokta, $y = \sin(5x)$, $n = 5$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.3$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0.7$, $x_5 = 0.9$.

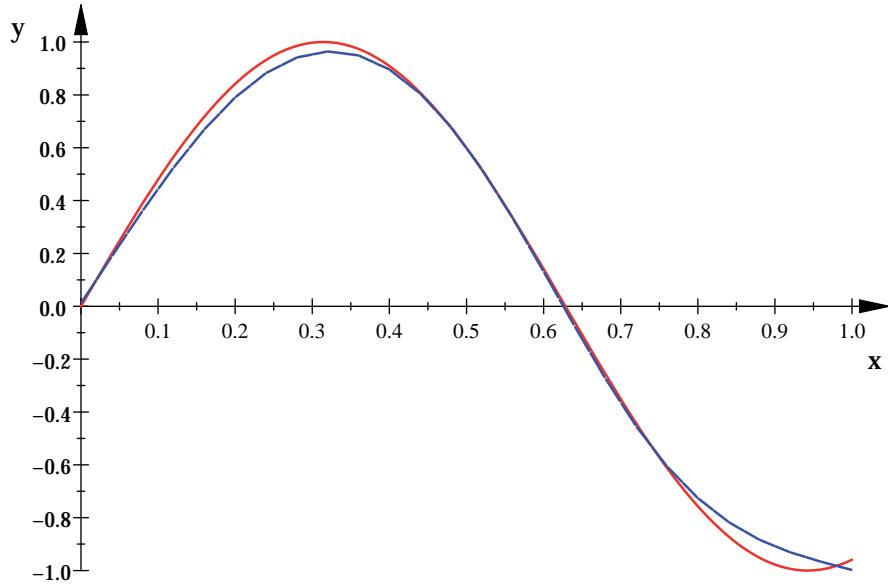


Şekil 2.19: Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması: üç ara nokta, $y = \sin(5x)$, $n = 5$, $x_1 = 0.0556$, $x_2 = 0.2778$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0.7222$, $x_5 = 0.9444$.

Yine x_2 noktasının verilmediği durum için de inceleme yapılmıştır. Bu durumda elde edilen sonuçlar Şekil 2.20 ve Şekil 2.21'de verilmektedir. Bu şekillerde, sırasıyla, araya 3 ve 11 nokta eklenmiştir.



Şekil 2.20: Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması: üç ara nokta, $y = \sin(5x)$, $n = 4$, $x_1 = 0.0556$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.7222$, $x_5 = 0.9444$.



Şekil 2.21: Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değişiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması: onbir ara nokta, $y = \sin(5x)$, $n = 4$, $x_1 = 0.02$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0.74$, $x_5 = 0.98$.

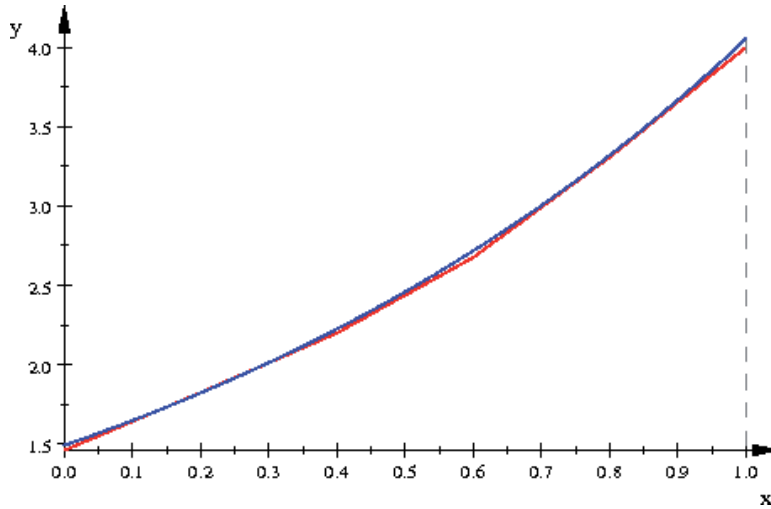
Diğer işlevlerle yapılan incelemelerde de benzer sonuçlar elde edilmektedir. Araya eklenen nokta sayısı arttıkça işleve daha iyi bir yaklaşımla sağlanmaktadır.

2.2.7 İki değişkenli işlevler için yapılan uygulama

İki bağımsız değişkenli bir işlevi $f(x,y)$ anlatımı ile simgeleyelim. Bu işlev için x yönünde işlev değeri verilebilen noktalar x_1, x_2, \dots, x_n olsun. y yönündeki noktalar da

y_1, y_2, \dots, y_m ile simgelenir. İşlevin değerinin bu $n * m$ noktadan bazılarında bilindiğini yani verildiğini varsayalım. Öncelikle, bu bölümde tek değişkenli işlevler için anlatılan yöntemle $g(x_1, y), g(x_2, y), \dots, g(x_n, y)$ işlevleri oluşturulur. $[0, 1]$ aralığında herhangi bir y^* değeri için elde edilen bu n işlev kullanılarak $g(x_1, y^*), g(x_2, y^*), \dots, g(x_n, y^*)$ değerleri elde edilir. Bu n değer kullanılarak yine bu bölümde anlatılan biçimde $g(x, y^*)$ işlevi oluşturulur. Gerçekleştirilen sayısal çalışmalarda elde edilen bu yaklaşım işlevinin, gerçek işleve, yani $f(x, y^*)$ işlevine oldukça yakın olduğu gözlenmiştir. Aşağıda elde edilen sonuçlardan bazı örnekler verilmektedir.

Yapılan bu çalışmada $n = 5$ ve $m = 5$ olarak seçilmiştir. Yani ilgilendiğimiz kartezyen düzlemde 25 nokta vardır. Bu noktalardan 2'sinin değerinin bilinmediği varsayılmıştır. İşlevler oluşturulurken 1 ara nokta eklenmiştir. Gerçek işlev $f(x, y) = \exp(x) \times \exp(y)$ olarak seçilmiştir. Yaklaşım sonucunda elde edilen işlevi $g(x, y)$ ile simgeleyelim. Şekil 2.22 ve Şekil 2.23, sırasıyla, $g(x, 0.4)$ ve $g(x, 0.9)$ işlevlerinin, yine sırasıyla, $f(x, 0.4)$ ve $f(x, 0.9)$ işlevlerine karşı çizilen çizimleridir.

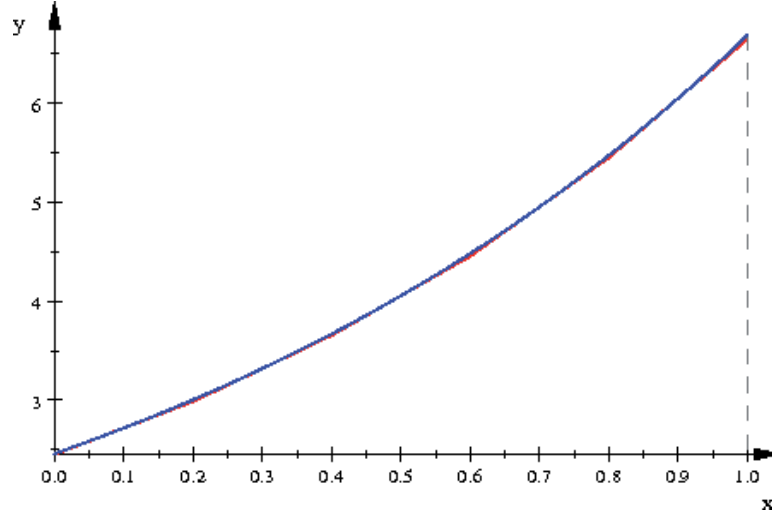


Şekil 2.22: $g(x, 0.4)$ ve $f(x, 0.4)$ işlevlerinin karşılaştırılması.

Şekillerden de görüldüğü gibi gerçek işlevle yaklaşım işlevi hemen hemen her noktada çakışmaktadır. Bazı durumlarda işlevin bazı noktalarda tam çakışmadığı görülmektedir. Bunun nedeni o çizimlerde daha az noktanın bilinmesidir. Araya eklenen nokta sayısı arttırıldıkça bu durumlarda da iki işlev daha iyi çakışacaktır.

2.2.8 Üç değişkenli işlevler için yapılan uygulama

Üç değişkenli, $f(x, y, z)$ ile simgeleyeceğimiz bir işlevi gözönüne alalım. x, y, z yönlerindeki noktalar, sırasıyla, $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; z_1, z_2, \dots, z_\ell$ ile simgelenir.



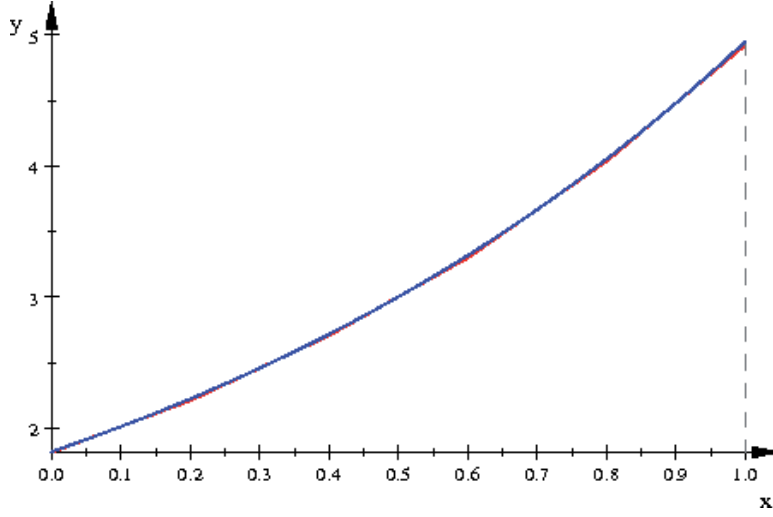
Şekil 2.23: $g(x, 0.9)$ ve $f(x, 0.9)$ işlevlerinin karşılaştırılması.

İşlevin, $n * m * \ell$ noktadan bazılarında değeri biliniyor olsun. Yani işlevin (x_1, y_1, z_1) , $(x_1, y_1, z_2), \dots, (x_n, y_m, z_\ell)$ noktalarının bazılarında değerleri verilmiş olsun. Öncelikle, tek değişkenli işlevler için oluşturulan yöntemle $g(x_1, y, z_1), \dots, g(x_1, y, z_\ell), g(x_2, y, z_1), \dots, g(x_2, y, z_\ell), \dots, g(x_n, y, z_1), \dots, g(x_n, y, z_\ell)$ işlevleri elde edilir. $[0, 1]$ aralığında herhangi bir y^* değeri için elde edilen bu n işlev kullanılarak $g(x_1, y^*, z_1), \dots, g(x_n, y^*, z_\ell)$ değerleri elde edilir. Bu $n * \ell$ değer kullanılarak $g(x, y^*, z_1), \dots, g(x, y^*, z_\ell)$ işlevleri oluşturulur. $[0, 1]$ aralığında herhangi bir x^* değeri için elde edilen bu n işlev kullanılarak $g(x^*, y^*, z_1), \dots, g(x^*, y^*, z_\ell)$ değerleri elde edilir. Bu ℓ değer kullanılarak $g(x^*, y^*, z)$ işlevi elde edilir.

Gerçekleştirilen bu çalışmada $n = 5, m = 5$ ve $\ell = 5$ olarak seçilmiştir. Yani ilgilendığımız kartezyen uzayda 125 nokta vardır. Bu noktalardan ikisinde işlevin değerinin bilinmediği varsayılmıştır. İşlevler oluşturulurken 1 ara nokta eklenmiştir. Gerçek işlev $f(x, y) = \exp(x) * \exp(y) * \exp(z)$ olarak seçilmiştir. Yaklaşım sonucunda elde edilen işlevi $g(x, y, z)$ ile simgeleyelim. Şekil 2.24 $g(0.5, 0.1, z)$, işlevinin $f(0.5, 0.1, z)$ işlevine karşı çizimini içermektedir.

Değişik veri takımları ve değişik işlevler için de benzer sonuçlar elde edilmiştir. Ancak, burada gereksiz içerik büyümesini engellemek için sunulmamaktadırlar.

Buraya kadar geliştirmeyi anlatılan yöntem benzer yollardan ilerleyerek daha çok değişken içeren işlevlere de uygulanabilir. Bu durumda hesaplama karmaşıklığı oldukça yükselecektir.



Şekil 2.24: $g(0.5, 0.1, z)$ ve $f(0.5, 0.1, z)$ işlevlerinin karşılaştırılması.

2.2.9 Doğrusal altkesimsel taban işlevleri kullanılarak oluşturulan İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG Yöntemi için gözlemler, yorum ve çıkarımlar, bulgular

Bu altaltbölümde yapılan çalışmalarda aşağıda sıralanan gözlemler, ilgili yorum ve çıkarımlar ve de bulgular elde edilmiştir. Bunlar, tez çalışmasının gözardı edilemeyecek düzeyde önemli olan, özgün ürünleri olarak ileri sürülmektedirler.

- Veri takımı düzgün bir ızgaranın ancak bazı düğümlerinde işlev değeri içeren genel durum için YBMG değişmezlik ölçeni eniyilemesi yöntemi, sonunda, işlerlik kazanmıştır.
- Yöntemde bağımsız değişken sayısı üzerinde sınırlama yoktur. Ama bu sayı arttıkça bilgisayarın karmaşıklığı da doğal olarak artmaktadır.
- Yöntem, ilgilenilen işlevin, süreksizlik içerilmeyen bir bölgede çalışılması koşuluyla, yapısına çok duyarlıklı bir biçimde bağlı değil görünümü vermektedir.
- Yöntemde duyarlılığı arttıracak temel öge aranokta sayısıdır. Bu sayıyı arttırarak istenilen duyarlılığa erişilebileceği izlenimi elde edilmektedir. Yani, denetlenebilen bir yöntem geliştirilmiştir.
- İlk kez, bir YBMG uygulamasında, altkesimsel çokterimli işlevler kullanılmış ve onların etkinliğinden verimli bir biçimde yararlanılmıştır.

2.3 İçdeğerbiçimsel Eniyilemeli YBMG'nin Düzgün Olmayan Izgara Yapılarına Uygulanması

Bu altbölümde doğrusal taban işlevleri kullanılarak yapılan çalışma düzgün olmayan ızgara yapıları için sürdürülmüştür. Düzgün olmayan yapıları düzgün hale getirmek için aşağıda anlatılan dönüşüm kullanılmıştır. Bu dönüşümde, yamuk bir geometriye sahip bölge dikdörtgen hale getirilmeye çalışılmıştır. Böylece önceki altbölümde düzgün geometriye sahip yapılar için kullanılan yöntemle işlev elde edilmiş, daha sonra geometrik dönüşümlerle bu yöntem düzgün olmayan yapılara da aktarılmaya çalışılmıştır.

2.3.1 Dikdörtgenleştirme

Düzlemde, bir yamuğun köşe noktalarını oluşturan (x_1, y_1) (sol üst köşe), (x_2, y_2) (sağ üst köşe), (x_3, y_3) (sol alt köşe), (x_4, y_4) (sağ alt köşe), sıralı ikililerini gözönüne alalım. Verilen bir s (skaler) sayıl değeri için, s_{eb} ve s_{ek} , sırasıyla, s 'nin aldığı en büyük ve en küçük değer olmak üzere,

$$\begin{aligned} (x_5(s), y_5(s)) &\equiv \frac{s_{eb} - s}{s_{eb} - s_{ek}} (x_1, y_1) + \frac{s - s_{ek}}{s_{eb} - s_{ek}} (x_2, y_2) \\ &\equiv \left(\frac{s_{eb} - s}{s_{eb} - s_{ek}} x_1 + \frac{s - s_{ek}}{s_{eb} - s_{ek}} x_2, \frac{s_{eb} - s}{s_{eb} - s_{ek}} y_1 + \frac{s - s_{ek}}{s_{eb} - s_{ek}} y_2 \right) \end{aligned} \quad (2.199)$$

ile tanımlanan bir sıralı ikilinin betimlediği nokta yukarıdaki yamuğun üst noktalarını birleştiren doğru üzerinde yer alır. Bunu kanıtlamak için bu noktayı (x_1, y_1) noktasına birleştiren doğru parçasının (x_2, y_2) 'yi (x_1, y_1) 'ye birleştiren doğru parçası ile aynı eğimde olduğunu ve dolayısıyla örtüşeceklerini görmek yeterlidir. Özenli bir bakış, (x_5, y_5) 'in $s = s_{ek}$ için (x_1, y_1) ile $s = s_{eb}$ içinse (x_2, y_2) ile çakışacağını, herhangi bir $s_{ek} < s < s_{eb}$ değerinde de yamuğun üst kıyası üzerinde yer alacağını gösterir. Dolayısıyla, s 'nin, yamuğun üst kıyası üzerinde bir konaç (ing: coordinate) olduğunu ilerisürmek olanaklıdır. Diğer bir deyişle, onu s_{ek} 'dan başlayıp s_{eb} 'ye erişene dek sürekli olarak arttırarak yamuğun üst kıyasını taramak olanaklıdır.

Aynı biçimde,

$$\begin{aligned} (x_6(s), y_6(s)) &\equiv \frac{s_{eb} - s}{s_{eb} - s_{ek}} (x_3, y_3) + \frac{s - s_{ek}}{s_{eb} - s_{ek}} (x_4, y_4) \\ &\equiv \left(\frac{s_{eb} - s}{s_{eb} - s_{ek}} x_3 + \frac{s - s_{ek}}{s_{eb} - s_{ek}} x_4, \frac{s_{eb} - s}{s_{eb} - s_{ek}} y_3 + \frac{s - s_{ek}}{s_{eb} - s_{ek}} y_4 \right) \end{aligned} \quad (2.200)$$

ile tanımlanan noktanın da, yamuğun alt kıyasını, s 'in s_{ek} 'dan başlayıp s_{eb} 'ye erişene dek arttırılan s değerleriyle tarayacağını söylemek olanaklıdır. Yani, s bu kıyası üzerinde de

konaç (koordinat) görevini üstlenmektedir. İki değişik kıyı üzerinde aynı biçimde değişen tek bir konaçla eşsiz bir betimleme yapmak olanaklı değildir. Eşsizliği sağlamak için, düzlemsel yapıdan dolayı, ikinci bir konaça gereksinim duyulacaktır. Bu konaçın nasıl yapılandırılması gerektiğini anlayabilmek için yamuğun, bu kez de, sol ve sağ kıyılarını düşünelim. Sol kıyı üzerinde s değişmez olarak s_{ek} değerini alır. Yani bir anlamda bu kıyuyu kimliklendirir. Ama onun değişmezliği kıyı üzerinde konumlandırmaya olanak sağlamaz. Konumlandırmayı, dolayısıyla, kıyuyu taramayı bir başka sayı ile gerçekleştirmek gerekir. Bu amaçla, t_{eb} ve t_{ek} , sırasıyla, t 'nin aldığı en büyük ve en küçük değer olmak üzere,

$$\begin{aligned} (x_7(t), y_7(t)) &\equiv \frac{t_{eb} - t}{t_{eb} - t_{ek}} (x_1, y_1) + \frac{t - t_{ek}}{t_{eb} - t_{ek}} (x_3, y_3) \\ &\equiv \left(\frac{t_{eb} - t}{t_{eb} - t_{ek}} x_1 + \frac{t - t_{ek}}{t_{eb} - t_{ek}} x_3, \frac{t_{eb} - t}{t_{eb} - t_{ek}} y_1 + \frac{t - t_{ek}}{t_{eb} - t_{ek}} y_3 \right) \end{aligned} \quad (2.201)$$

ile tanımlanan bir noktanın yamuğu n sol kıyısı üzerinde konumlanacağı ve t , t_{ek} 'dan başlayıp t_{eb} 'ye dek sürekli arttıkça, kıyı üzerindeki sol üst köşeden başlayıp sol alt köşeye doğru ilerleyerek tüm kıyuyu tarayacağını görmek olanaklıdır. Aynı durum sağ kıyı için de geçerlidir. Bu durumda, taramayı yine t değiştirgesi,

$$\begin{aligned} (x_8(t), y_8(t)) &\equiv \frac{t_{eb} - t}{t_{eb} - t_{ek}} (x_2, y_2) + \frac{t - t_{ek}}{t_{eb} - t_{ek}} (x_4, y_4) \\ &\equiv \left(\frac{t_{eb} - t}{t_{eb} - t_{ek}} x_2 + \frac{t - t_{ek}}{t_{eb} - t_{ek}} x_4, \frac{t_{eb} - t}{t_{eb} - t_{ek}} y_2 + \frac{t - t_{ek}}{t_{eb} - t_{ek}} y_4 \right) \end{aligned} \quad (2.202)$$

noktası üzerinden bütünüyle aynı biçimde gerçekleştirir. Dolayısıyla, t 'yi de konaç olarak düşünmek olanaklıdır. s ve t konaçlarına, sırasıyla, yatayimsi ve düşeyimsi konaçlar adı vermek yerindedir.

Yamuğun sol ve sağ kıyılarında olduğu gibi, üzerinde s 'in değişmez kaldığı, sol ve sağ kıyıları arasında kalan, sonsuz sayıda, düşeyimsi doğru parçası tanımlamak olanaklıdır. Bunlardan herhangi birini tanımlamak için $(x_5(s), y_5(s))$ ile $(x_6(s), y_6(s))$ noktalarını birleştiren ve açık tanımı aşağıda verilen bir nokta ile taranan doğru parçasını düşünebiliriz.

$$\begin{aligned} (x(s, t), y(s, t)) &\equiv \frac{t_{eb} - t}{t_{eb} - t_{ek}} (x_5(s), y_5(s)) + \frac{t - t_{ek}}{t_{eb} - t_{ek}} (x_6(s), y_6(s)) \\ &\equiv \left(\frac{t_{eb} - t}{t_{eb} - t_{ek}} x_5(s) + \frac{t - t_{ek}}{t_{eb} - t_{ek}} x_6(s), \frac{t_{eb} - t}{t_{eb} - t_{ek}} y_5(s) + \frac{t - t_{ek}}{t_{eb} - t_{ek}} y_6(s) \right) \end{aligned} \quad (2.203)$$

(2.199) ve (2.200) eşitliklerinden yararlanarak bu anlatımı çok daha açık bir yapıya büründürebiliriz.

$$\begin{aligned} x(s,t) &= \frac{t_{eb}-t}{t_{eb}-t_{ek}} \left(\frac{s_{eb}-s}{s_{eb}-s_{ek}} x_1 + \frac{s-s_{ek}}{s_{eb}-s_{ek}} x_2 \right) + \frac{t-t_{ek}}{t_{eb}-t_{ek}} \left(\frac{s_{eb}-s}{s_{eb}-s_{ek}} x_3 + \frac{s-s_{ek}}{s_{eb}-s_{ek}} x_4 \right) \\ y(s,t) &= \frac{t_{eb}-t}{t_{eb}-t_{ek}} \left(\frac{s_{eb}-s}{s_{eb}-s_{ek}} y_1 + \frac{s-s_{ek}}{s_{eb}-s_{ek}} y_2 \right) + \frac{t-t_{ek}}{t_{eb}-t_{ek}} \left(\frac{s_{eb}-s}{s_{eb}-s_{ek}} y_3 + \frac{s-s_{ek}}{s_{eb}-s_{ek}} y_4 \right) \end{aligned} \quad (2.204)$$

Buradaki $(x(s,t), y(s,t))$ noktası, aslında, $(x_5(s), y_5(s))$ noktası ile $(x_6(s), y_6(s))$ noktasını birleştiren doğru parçası ile $(x_7(t), y_7(t))$ noktası ile $(x_8(t), y_8(t))$ noktasını birleştiren doğru parçasının kesişme noktasıdır. s ve t konaçları, sırasıyla $[s_{ek}, s_{eb}]$ ile $[t_{ek}, t_{eb}]$ aralıkları içinde değıştikçe yani, (s,t) sıralı ikilisi bunların doğrudan çarpımı (ing: cartesian product, direct product) olan dikdörtgen içinde ya da kıyılarında gezindikçe $(x(s,t), y(s,t))$ ikilisi de yamuğun içinde ya da kıyılarında gezinir. Dolayısıyla, bir yamuğa bir dikdörtgen karşılık getirilmiş olur.

2.3.2 Ara değer ekleme, ara noktalarda türevin değışiminin sıfırlanması ve türevdeki sıçramanın bastırılması yönteminin kullanılması

Burada öncelikle "Ara Değer Ekleme, Ara Noktalarda Türevin Değışiminin Sıfırlanması ve Türevdeki Sıçramanın Bastırılması " başlığı altında anlatıldığı şekilde işlev elde edilmiştir. Bu işlev (s,t) düzgün ızgara yapısına karşılık gelmektedir. Daha sonra (s,t) koordinat sistemi (x,y) koordinat sistemine dönüştürülmüştür. Aşağıdaki örneklerde $5 \times 5 = 25$ nokta kullanılmıştır. Örneklerde belli bir t noktası için işlev elde edilmiş, analitik işlevle karşılaştırılmıştır.

Örnek:

Bu örneklerde seçilen bir işlev için işlevin

$(0.1,0.05), (0.3,0.08), (0.5,0.11), (0.7,0.13), (0.9,0.09),$

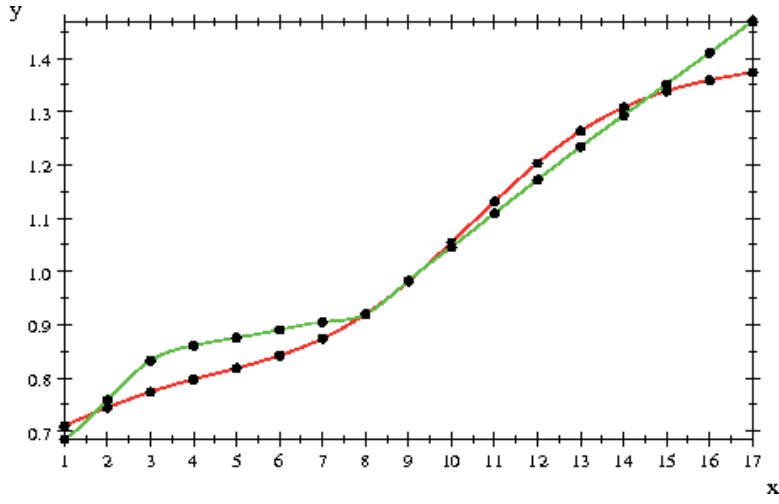
$(0.1,0.19), (0.3,0.17), (0.5,0.28), (0.7,0.35), (0.9,0.22),$

$(0.1,0.40), (0.3,0.55), (0.5,0.42), (0.7,0.52), (0.9,0.60),$

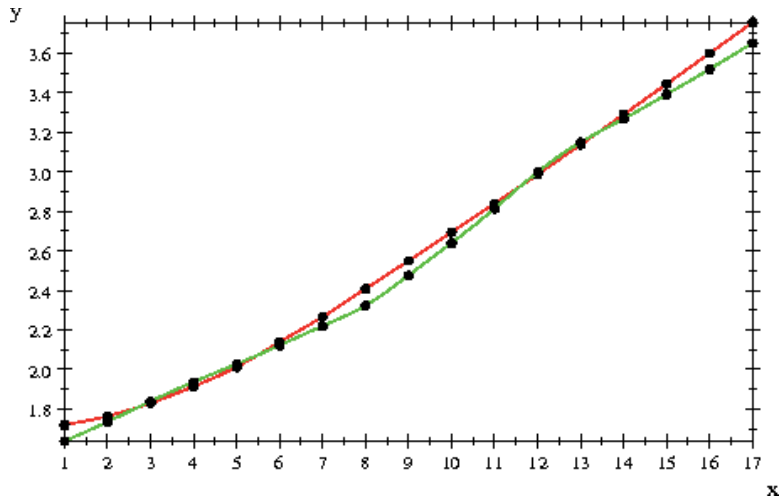
$(0.1,0.65), (0.3,0.60), (0.5,0.75), (0.7,0.68), (0.9,0.76),$

$(0.1,0.85), (0.3,0.95), (0.5,0.88), (0.7,0.92), (0.9,0.96)$

noktalarındaki değerleri verilmiştir. Değışik t değerleri için elde edilen yaklaşık işlevlerin bazı noktalardaki değerlerinin gerçek işlev değerlerine karşılık grafikleri Şekil 2.25 ve Şekil 2.26'da verilmektedir.



Şekil 2.25: $f(x,y) = x + y$, $t = 0.5$, arnokta sayısı=9.



Şekil 2.26: $f(x,y) = x + y$, $t = 0.8$, arnokta sayısı=9.

Grafiklerden de görüldüğü gibi bazı yerlerde gerçek işleve yakınsama çok fazla olmasına rağmen, bazı yerlerde ise yakınsama yeterince iyi değildir. Yakınsamanın istenilen seviyede olmamasının nedeninin, yamuktan dikdörtgene dönüşüm yaparken kullanılan yöntemin tekilliği olduğu düşünülmektedir.

3. VERİLEN BİR DEĞER TAKIMINDAN TÜREV DEĞERİ ÜRETİMİ

3.1 Verilen Bir Değer Takımından İki Bağımsız Değişkenli İşlevler İçin Türev Değeri Üretimi

İki bağımsız değişkene bağımlı olan ve $f(x_1, x_2)$ ile simgelenen bir işlev düşünelim ve bu işlevin değerlerinin x_1 ile x_2 bağımsız değişkenlerince örtülen kartezyen uzayda $(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)})$ sıralı ikililerince betimlenen konumlarda verildiğini varsayalım. Bu değerler için de, sağ yandaki ögelerin verilen değişmezler olması durumunda,

$$f(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}) \equiv f_{i_1 i_2}, \quad 1 \leq i_1 \leq n_1, \quad 1 \leq i_2 \leq n_2 \quad (3.1)$$

yazıldığını öngörelim. Bu durumda, $f(x_1, x_2)$ işlevinin, $(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)})$ sıralı ikililerini düğüm olarak alan bir ızgara üzerinde, $n_1 \times n_2$ sayıda değeri verilmiş olmaktadır.

Eğer, $f(x_1, x_2)$ işlevinin bu ızgarayı içine alan bölgede, sözgelimi, ızgaranın orta noktasında odaklanan ve orta noktayı içine alan bir döngü (disk) ile çevre çemberinin oluşturduğu bölge içinde analitik olan (yani tüm türevleri varolan ve eşsiz değer alan) bir yapıda olduğunu varsayarsak; bu işlevin orta noktada açılan Taylor serisi ızgaranın her noktasında yakınsar ve $f(x_1, x_2)$ işlevini eşsiz biçimde gösterir. Daha somut adımlar atabilmek için, $(x_1^{(o)}, x_2^{(o)})$ ile simgeleyeceğimiz, orta noktann

$$x_1^{(o)} \equiv \frac{1}{2} (x_1^{(1)} + x_1^{(n_1)}), \quad x_2^{(o)} \equiv \frac{1}{2} (x_2^{(1)} + x_2^{(n_2)}) \quad (3.2)$$

eşitlikleriyle verildiğini akılda tutmak gerekir. Bu durumda $f(x_1, x_2)$ işlevinin orta noktada açılan Taylor serisi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \frac{1}{i_1! i_2!} \left(\frac{\partial^{i_1+i_2} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \right)_{x_1=x_1^{(o)}, x_2=x_2^{(o)}} (x_1 - x_1^{(o)})^{i_1} (x_2 - x_2^{(o)})^{i_2} \quad (3.3)$$

Eğer, $f(x_1, x_2)$ işlevinin x_1 ile x_2 bağımsız değişkenlerine olan bağımlılığı açık olarak bir bağıntıyla verilmiş olsaydı o bağıntıdan istenilen düzeyde türevleme ile yukarıdaki Taylor açılım katsayıları istenilen sayıda saptanabilirdi. Ancak, burada böyle bir durum yoktur. Onun yerine $f(x_1, x_2)$ işlevinin sonlu sayıda konumdaki değeri bilinmektedir. Yukarıdaki seri tüm ızgara düğümlerinde yakınsak olduğundan o düğümlerin her birinde orada

verilen işlev değerini üretmek zorundadır. Bu ise sonsuz sayıda bilinmeyen katsayı için sonlu sayıda denklem demektir. Oysa ki, bizim için sonsuz sayıda denklem üretebilme yetisi olan bir yöntem gerekmektedir. (3.3)'teki katsayıların türevler üzerinden $f(x_1, x_2)$ işleviyle ilintilendirimi, açık yapı bilinmediğinden ille de gerekli değildir ve üstelik yazımı da zorlaştırmaktadır. Dolayısıyla, öylesine karmaşık bir simgeleme yerine daha yalın bir anlatım yerinde olacaktır. Öte yandan, $(x_1 - x_1^{(o)})^{i_1} (x_2 - x_2^{(o)})^{i_2}$ ile simgelenen büyüklükler de, her ne kadar çokterimliler olsalar da, eninde sonunda, salt doğrusal bağımsız işlevlerdir. Dolayısıyla, onları seçilen bir tek sırasayılı sıralama çerçevesinde $u_i(x_1, x_2)$ ($1 \leq i < \infty$) ile simgelersek (3.3)'ün bu işlevler üzerinde bir doğrusal birleşim olduğunu görmek hiç de zor değildir. Eğer bu doğrusal birleşim katsayıları α_i ($1 \leq i < \infty$) ile simgelenirse (3.3) yerine aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u_i(x_1, x_2) \quad (3.4)$$

bu eşitliği çok daha tıkHz bir biçime büründürmek olanaklıdır. Bu amaçla,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T(x_1, x_2) &\equiv [u_1(x_1, x_2) \ u_2(x_1, x_2) \ \dots], \\ \alpha^T &\equiv [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots] \end{aligned} \quad (3.5)$$

tanımlarını yapmak ve sonra da (3.4) yerine

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1, x_2)^T \alpha \quad (3.6)$$

eşitliğini yazmak yeterlidir. Bu eşitlik, α_i değiştirgeleri ilgili Taylor açılım katsayıları olunca, $f(x_1, x_2)$ işlevinin analitik olduğu bir bölge içindeki tüm noktalar için geçerli olur. Yani, bir özdeşlik durumuna dönüşür. Bu olgudan yararlanmak için önce uygun bir boy tanımı yapmak gerekir. $a_1, a_2, b_1,$ ve de, b_2 değiştirgeleri, $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ile tanımlanan bölge yukarıda sözü edilen ızgarayı içerecek ve $f(x_1, x_2)$ işlevinin analitik olduğu yörede kalacak biçimde, uygun olarak seçilmek üzere, aynı bölge içinde analitik kalan ve $g(x_1, x_2)$ simgesiyle kimliklendirilen herhangi bir işlev için boy tanımını

$$\|g(x_1, x_2)\| = \left[\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) g(x_1, x_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

anlatımıyla verebiliriz. Ayrık yapıyı üretebilmek için bağıntıdaki ağırlık işlevleri aşağıdaki gibi seçilmişlerdir.

$$w_j(x_j) = \frac{1}{n_j} \sum_{i_j=1}^{n_j} \delta(x_j - x_{i_j}^{(j)}) \quad j = 1, 2 \quad (3.8)$$

Yukarıda sözedildiği gibi (3.6)'nın bu boy tanımının tümlevleme bölgesindeki tüm noktalarda özdeşlik niteliğinde olması

$$\|f(x_1, x_2) - \mathbf{u}^T \alpha\|^2 = 0 \quad (3.9)$$

yazılmasına olanak sağlar. Bu eşitliğin sol yanı açılarak yazılırsa

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) f(x_1, x_2)^2 - \\ & 2 \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2)^T f(x_1, x_2) \alpha + \\ & \alpha^T \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2)^T \alpha \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bu denklemin daha tıknaz bir yapıya büründürmek için aşağıdaki büyüklükleri tanımlamakta yarar bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} \beta^T & \equiv \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2)^T f(x_1, x_2) \\ \mathbf{A} & \equiv \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2)^T \end{aligned} \quad (3.11)$$

Bunların kullanımıyla (3.10) eşitliği aşağıdaki yapıda yeniden yazılabilir

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) f(x_1, x_2)^2 - 2\beta\alpha + \alpha^T \mathbf{A} \alpha = 0 \quad (3.12)$$

Buradaki \mathbf{A} dizeyi bakışık (simetrik), ve de, öğeleri doğrusal bağımsız yöneylerin iç-çarpımları olduğundan, artı tanımlıdır. Dolayısıyla, Choleski ayrıştırımı uygulanarak \mathbf{L} altüçgen bir dizey olmak üzere

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (3.13)$$

yazılabilir. Bu ise (3.12) yerine

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) f(x_1, x_2)^2 - \\ & (\mathbf{L}^{-1}\beta)^T (\mathbf{L}^{-1}\beta) + (\mathbf{L}^T \alpha - \mathbf{L}^{-1}\beta) (\mathbf{L}^T \alpha - \mathbf{L}^{-1}\beta)^T = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Daha ileriye gidebilmek için

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) \equiv \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}(x_1, x_2) \quad (3.15)$$

tanımı yapılırsa bu \mathbf{v} yöneyinin ögeleri olarak gözüken işlevlerin yukarıdaki boy tümlevi altında tanımlanan iççarpıma göre birbirlerine dik ve boyları 1 olduğu zorluk çekmeden gösterilebilir. Bu ise

$$(\mathbf{L}^{-1}\beta)^T (\mathbf{L}^{-1}\beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) v_i(x_1, x_2) f(x_1, x_2) \right)^2 \quad (3.16)$$

yazılmasına ve Parseval eşitsizliğinden (terim sayısı sonsuz olunca eşitsizlik eşitliğe dönüşür) yararlanarak

$$(\mathbf{L}^{-1}\beta)^T (\mathbf{L}^{-1}\beta) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dx_1 dx_2 w_1(x_1) w_2(x_2) f(x_1, x_2)^2 \quad (3.17)$$

ve bunun (3.14)'te kullanımıyla

$$(\mathbf{L}^T \alpha - \mathbf{L}^{-1}\beta) (\mathbf{L}^T \alpha - \mathbf{L}^{-1}\beta)^T = 0 \quad (3.18)$$

denklemine ve buradan da

$$\mathbf{L}^T \alpha = \mathbf{L}^{-1}\beta \quad (3.19)$$

ya da, her iki yanı \mathbf{L} ile soldan çarptıktan sonra

$$\mathbf{A}\alpha = \beta \quad (3.20)$$

denklemine ulaşılır. Buradaki \mathbf{A} dizeyini daha kolay işlenebilir ve ikiden yüksek sayıda bağımsız değişkenli durumlara kolayca aktarılabilir yapıya büründürmek için

$$u_i^{(1)}(x_1) \equiv \left(x_1 - x_1^{(o)} \right)^{i-1}, \quad 1 \leq i < \infty \quad (3.21)$$

ile

$$u_i^{(2)}(x_2) \equiv \left(x_2 - x_2^{(o)} \right)^{i-1}, \quad 1 \leq i < \infty \quad (3.22)$$

bir bağımsız değişkenli taban işlevleri ve bunlardan

$$\mathbf{u}_1(x_1)^T \equiv \left[u_1^{(1)}(x_1) \ u_2^{(1)}(x_1) \ \dots \right] \quad (3.23)$$

$$\mathbf{u}_2(x_2)^T \equiv \left[u_1^{(2)}(x_2) \ u_2^{(2)}(x_2) \ \dots \right] \quad (3.24)$$

yöney değerli işlevleri tanımlanabilir. Bunlar, \otimes yöneyler, dizeyler, ya da, yöneyler dizeyler arası dolaysız çarpımı (ing: direct product) göstermek üzere,

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv \mathbf{u}_1(x_1) \otimes \mathbf{u}_2(x_2) \quad (3.25)$$

yazılmasına olanak sağlarlar.

Dolaysız çarpımın en önemli özelliklerinden birisi aşağıdaki eşitliklerin yazılmasına izin verir.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}_1(x_1) \otimes \mathbf{u}_2(x_2)) (\mathbf{u}_1(x_1) \otimes \mathbf{u}_2(x_2))^T = \\ & \left(\mathbf{u}_1(x_1) \mathbf{u}_1(x_1)^T \right) \otimes \left(\mathbf{u}_2(x_2) \mathbf{u}_2(x_2)^T \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2)^T = \left(\mathbf{u}_1(x_1) \mathbf{u}_1(x_1)^T \right) \otimes \left(\mathbf{u}_2(x_2) \mathbf{u}_2(x_2)^T \right) \quad (3.27)$$

Bunlarsa, (3.11)'den

$$\mathbf{A} = \left(\int_{a_1}^{b_1} dx_1 w_1(x_1) \mathbf{u}_1(x_1) \mathbf{u}_1(x_1)^T \right) \otimes \left(\int_{a_2}^{b_2} dx_2 w_2(x_2) \mathbf{u}_2(x_2) \mathbf{u}_2(x_2)^T \right) \quad (3.28)$$

Eğer,

$$\mathbf{A}_i \equiv \int_{a_i}^{b_i} dx_i w_i(x_i) \mathbf{u}_i(x_i) \mathbf{u}_i(x_i)^T, \quad i = 1, 2 \quad (3.29)$$

tanımlamaları yapılırsa (3.28) yerine, daha tıkHz olan,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2 \quad (3.30)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu önemli bir eşitliktir ve önemi \mathbf{A} 'nın evirtiminde açık olarak ortaya çıkar. Gerçekten de, dolaysız çarpımın evirtimle ilgili indirgeme özelliği (3.30)'dan aşağıdaki eşitliğin yazılmasına yolaçar.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_1^{-1} \otimes \mathbf{A}_2^{-1} \quad (3.31)$$

Artık, β ile ilgilenebiliriz. Onun yapısında $f(x_1, x_2)$ işlevinin açık olarak bulunması \mathbf{A} için yapılan ve sonunda indirgemeyle son bulan eylemleri, neredeyse, yararsız kılar. Bunun, kuşkusuz, en önemli nedeni, tümlevlemedeki bölgenin yalnızca sonlu sayıda noktada değerinin verilmiş olmasıdır. Yalnızca verilen noktalardaki değerleri içerecek bir iççarpım ve boy tanımı yapabilmek için iki katlı tümlevi iki katlı sonlu toplama dönüştürmek ya da, diğer bir deyişle, Dirac'ın delta işlevini kullanmak gerekir. Böylece, β için (3.11)'deki anlatım yerine

$$\beta \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \mathbf{u} \left(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)} \right) f_{i_1, i_2} \quad (3.32)$$

ve buradan da

$$\beta \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \mathbf{u}_1 \left(x_{i_1}^{(1)} \right) \otimes \mathbf{u}_2 \left(x_{i_2}^{(2)} \right) f_{i_1, i_2} \quad (3.33)$$

ya da

$$\gamma_{i_1, i_2} \equiv \mathbf{u}_1 \left(x_{i_1}^{(1)} \right) \otimes \mathbf{u}_2 \left(x_{i_2}^{(2)} \right), \quad 1 \leq i_1 \leq n_1, \quad 1 \leq i_2 \leq n_2 \quad (3.34)$$

tanımlarıyla

$$\beta \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} f_{i_1, i_2} \gamma_{i_1, i_2} \quad (3.35)$$

sonucuna ulaşılır. Bu yapı ve (3.20) α' 'nın da, yukarıdakine benzer biçimde,

$$\alpha \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} f_{i_1, i_2} \alpha_{i_1, i_2} \quad (3.36)$$

anlatımıyla verileceği ve buradaki α_{i_1, i_2} yöneylerinin aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak evrensel yapıyı taşıyacağı öngörümüne götürür.

$$\mathbf{A} \alpha_{i_1, i_2} = \gamma_{i_1, i_2}, \quad 1 \leq i_1 \leq n_1, \quad 1 \leq i_2 \leq n_2 \quad (3.37)$$

(3.34) ve (3.32)'den yararlanarak ve dolaysız çarpım özelliklerini gözönüne alarak

$$\alpha_{i_1, i_2} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{u}_1 \left(x_{i_1}^{(1)} \right) \otimes \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{u}_2 \left(x_{i_2}^{(2)} \right), \quad 1 \leq i_1 \leq n_1, \quad 1 \leq i_2 \leq n_2 \quad (3.38)$$

sonucuna ulaşmak olanaklıdır. Burada önemle belirtilmesi gereken nokta, \mathbf{A}_1 ve \mathbf{A}_2 dizeylerinde tümlevlerin yerini, artık, toplamların almış olmasıdır. Yani, (3.29) yerine, artık,

$$\mathbf{A}_j \equiv \sum_{i_j=1}^{n_j} \mathbf{u}_j \left(x_{i_j}^{(j)} \right) \mathbf{u}_j \left(x_{i_j}^{(j)} \right)^T, \quad j = 1, 2 \quad (3.39)$$

eşitliklerinin geçerli olacağıdır. Özenli bir inceleme

$$\mathbf{A}_i^{(j)} \equiv \sum_{i_j=1}^{n_j} \left(x_{i_j}^{(j)} - x_j^{(o)} \right)^i, \quad 0 \leq i < \infty, \quad j = 1, 2 \quad (3.40)$$

tanımları altında \mathbf{A}_1 ve \mathbf{A}_2 dizyelerinin ögeleri için

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_1]_{i, j} &= A_{i+j-2}^{(1)}, \quad 1 \leq i, j < \infty \\ [\mathbf{A}_2]_{i, j} &= A_{i+j-2}^{(2)}, \quad 1 \leq i, j < \infty \end{aligned} \quad (3.41)$$

eşitliklerinin yazılabileceğini gösterir. Bu eşitliklerde \mathbf{A}_1 ile \mathbf{A}_2 dizyeleri $(\infty \times \infty)$ türünde dizyeler olarak öngörülmekte ve kesin sonuçlar üretecek nitelik taşımaktadırlar. Kesinlikten biraz ödün verip sonsuz yerine sonlu ögelilikle çalışmak belki de en genel yaklaşım yolu olduğundan (3.41) yerine

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{A}_1^{(m_1)} \right]_{i, j} &= A_{i+j-2}^{(1)}, \quad 1 \leq i, j \leq m_1 \\ \left[\mathbf{A}_2^{(m_2)} \right]_{i, j} &= A_{i+j-2}^{(2)}, \quad 1 \leq i, j \leq m_2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

eşitlikleriyle tanımlanan sonlu ögeli dizelerle çalışabiliriz. Bu durumda da sonsuz sayıda ögeli \mathbf{u}_1 ve \mathbf{u}_2 yöneyleri yerine, onların sırasıyla ilk m_1 ve m_2 ögesinden oluşan ve $\mathbf{u}_1^{(m_1)}$ ile $\mathbf{u}_2^{(m_2)}$ simgeleriyle anlatılan yöneyleri kullanabiliriz. Böylece α_{i_1, i_2} yöneyi de, $\alpha_{i_1, i_2}^{(m_1, m_2)}$ ile simgelenen $(m_1 \times m_2)$ ögeli yöney durumuna düşer ve (3.38) yerine

$$\alpha_{i_1, i_2}^{(m_1, m_2)} = \left(\mathbf{A}_1^{(m_1)} \right)^{-1} \mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{i_1}^{(1)} \right) \otimes \left(\mathbf{A}_2^{(m_2)} \right)^{-1} \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{i_2}^{(2)} \right),$$

$$1 \leq i_1 \leq n_1, \quad 1 \leq i_2 \leq n_2 \quad (3.43)$$

eşitlikleri geçerli olur. Bu eşitliklerin herbir yanı soldan $\mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{j_1}^{(1)} \right)^T \otimes \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{j_2}^{(2)} \right)^T$ yöneyi ile çarpılır ve

$$\mathbf{B}_1^{(j_1, i_1)} \equiv \mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{j_1}^{(1)} \right)^T \left(\mathbf{A}_1^{(m_1)} \right)^{-1} \mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{i_1}^{(1)} \right), \quad 1 \leq i_1, j_1 \leq n_1$$

$$\mathbf{B}_2^{(j_2, i_2)} \equiv \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{j_2}^{(2)} \right)^T \left(\mathbf{A}_2^{(m_2)} \right)^{-1} \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{i_2}^{(2)} \right), \quad 1 \leq i_2, j_2 \leq n_2 \quad (3.44)$$

tanımlamaları yapılırsa, $m_1 = n_1$ ve $m_2 = n_2$ durumlarında bu iki dizeyin de birim dizeye dönüştüğü görülür. $n_1 > m_1$ durumunda \mathbf{B}_1 dizeyinin sıfır uzayının boş olmayacağı da anlaşılır. Aynı durum \mathbf{B}_2 dizeyinde de $n_2 > m_2$ durumu geçerlidir. Dolayısıyla, ilerideki incelemeleri kolaylaştırmak için, bundan sonra $m_1 = n_1$ ve $m_2 = n_2$ varsayacağız. Bu durumda, (j_1, j_2) konumundaki işlev değeri f_{j_1, j_2} olarak çıkar. Bu ise zaten olması gereken bir olguyu verir. Yeni bir denklem üretmez. Ancak, (3.43)'ten işlevin götürevlerini belirlemekte yararlanılabilir. Bu amaçla, eşitliklerin her iki yanını soldan, üs ilgili bağımsız değişkene göre türevi göstermek üzere, $\mathbf{u}_1^{(m_1)'} \left(x_{j_1}^{(1)} \right)^T \otimes \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{j_2}^{(2)} \right)^T$ veya $\mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{j_1}^{(1)} \right)^T \otimes \mathbf{u}_2^{(m_2)'} \left(x_{j_2}^{(2)} \right)^T$ ile çarpılırsa ilgili türev değeri belirlenmiş olur. Bu doğrultuda

$$\mathbf{B}_1^{(j_1, i_1)}{}^{(1)} \equiv \mathbf{u}_1^{(m_1)'} \left(x_{j_1}^{(1)} \right)^T \left(\mathbf{A}_1^{(m_1)} \right)^{-1} \mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{i_1}^{(1)} \right), \quad 1 \leq i_1, j_1 \leq n_1 \quad (3.45)$$

veya

$$\mathbf{B}_2^{(j_2, i_2)}{}^{(1)} \equiv \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{j_2}^{(2)} \right)^T \left(\mathbf{A}_2^{(m_2)} \right)^{-1} \mathbf{u}_2^{(m_2)'} \left(x_{i_2}^{(2)} \right), \quad 1 \leq i_2, j_2 \leq n_2 \quad (3.46)$$

tanımına gereksinim duyulur. Bunları kullanarak $f(x_1, x_2)$ işlevinin x_1 ve x_2 değişkenlerine göre birinci türevleri belirlenebilir. Bunun için, özenli bir inceleme sonrasında ulaşılabilecek olan

$$f_{x_1} \left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)} \right) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \mathbf{B}_1^{(j_1, i_1)}{}^{(1)} \delta_{j_2, i_2} f_{i_1, i_2} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \mathbf{B}_1^{(j_1, i_1)}{}^{(1)} f_{i_1, j_2}$$

$$1 \leq j_1 \leq n_1, \quad 1 \leq j_2 \leq n_2 \quad (3.47)$$

ve

$$f_{x_2} \left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)} \right) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \mathbf{B}_2^{(j_2, i_2)^{(1)}} \delta_{j_1, i_1} f_{i_1, i_2} = \sum_{i_2=1}^{n_2} \mathbf{B}_2^{(j_2, i_2)^{(1)}} f_{j_1, i_2}$$

$$1 \leq j_1 \leq n_1, \quad 1 \leq j_2 \leq n_2 \quad (3.48)$$

eşitliklerine ulaşılabilir. Bu eşitliklerde f 'in altsırasayısı hangi değişkene göre türev alındığını belirtmektedir. Bunlardan yaklaşık olarak da olsa göretürev belirlemesi olanaklı olup aynı aralıkta nokta sayısı arttıkça ve $f(x_1, x_2)$ işlevi yeterince düzgün oldukça yeterince duyarlılıkta elde edilebilir.

3.2 Verilen Bir Değer Takımından Türev Değeri Üretiminin k Boyuta Genelleştirilmesi

k boyutlu bir f işlevi için (3.43) aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(m_1, m_2, \dots, m_k)} =$$

$$\left(\mathbf{A}_1^{(m_1)} \right)^{-1} \mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{i_1}^{(1)} \right) \otimes \left(\mathbf{A}_2^{(m_2)} \right)^{-1} \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{i_2}^{(2)} \right) \otimes \dots \otimes \left(\mathbf{A}_k^{(m_k)} \right)^{-1} \mathbf{u}_k^{(m_k)} \left(x_{i_k}^{(k)} \right),$$

$$1 \leq i_1 \leq n_1, \quad 1 \leq i_2 \leq n_2, \dots \quad 1 \leq i_k \leq n_k \quad (3.49)$$

Bu durumda türev denklemlerini oluşturabilmek için (3.49)'in her iki yanını soldan, üs ilgili bağımsız değişkene göre türevi göstermek üzere, sırasıyla

$$\mathbf{u}_1^{(m_1)'} \left(x_{j_1}^{(1)} \right)^T \otimes \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{j_2}^{(2)} \right)^T \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_k^{(m_k)} \left(x_{j_k}^{(k)} \right)^T$$

$$\mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{j_1}^{(1)} \right)^T \otimes \mathbf{u}_2^{(m_2)'} \left(x_{j_2}^{(2)} \right)^T \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_k^{(m_k)} \left(x_{j_k}^{(k)} \right)^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{j_1}^{(1)} \right)^T \otimes \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{j_2}^{(2)} \right)^T \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_k^{(m_k)'} \left(x_{j_k}^{(k)} \right)^T$$

ile çarpılırsa ilgili türev değerleri belirlenmiş olur. Bu doğrultuda

$$\mathbf{B}_1^{(j_1, i_1)^{(1)}} \equiv \mathbf{u}_1^{(m_1)'} \left(x_{j_1}^{(1)} \right)^T \left(\mathbf{A}_1^{(m_1)} \right)^{-1} \mathbf{u}_1^{(m_1)} \left(x_{i_1}^{(1)} \right), \quad 1 \leq i_1, j_1 \leq n_1 \quad (3.50)$$

$$\mathbf{B}_2^{(j_2, i_2)^{(1)}} \equiv \mathbf{u}_2^{(m_2)'} \left(x_{j_2}^{(2)} \right)^T \left(\mathbf{A}_2^{(m_2)} \right)^{-1} \mathbf{u}_2^{(m_2)} \left(x_{i_2}^{(2)} \right), \quad 1 \leq i_2, j_2 \leq n_2 \quad (3.51)$$

\vdots

$$\mathbf{B}_k^{(j_k, i_k)^{(1)}} \equiv \mathbf{u}_k^{(m_k)'} \left(x_{j_k}^{(k)} \right)^T \left(\mathbf{A}_k^{(m_k)} \right)^{-1} \mathbf{u}_k^{(m_k)} \left(x_{i_k}^{(k)} \right), \quad 1 \leq i_k, j_k \leq n_k \quad (3.52)$$

tanımlarına gereksinim duyulur. Bunları kullanarak işlevin sırasıyla x_1, x_2, \dots, x_k değişkenlerine göre birinci türevleri belirlenebilir. Bunun için, özenli bir inceleme sonrasında ulaşılabilecek olan

$$\begin{aligned} f_{x_1} \left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_k}^{(k)} \right) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_k=1}^{n_k} \mathbf{B}_1^{(j_1, i_1)}(1) \delta_{j_2, i_2} f_{i_1, i_2, \dots, i_k} \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \mathbf{B}_1^{(j_1, i_1)}(1) f_{i_1, j_2, \dots, j_k} \quad 1 \leq j_1 \leq n_1, 1 \leq j_2 \leq n_2, \dots, 1 \leq j_k \leq n_k \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} f_{x_2} \left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_k}^{(k)} \right) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_k=1}^{n_k} \mathbf{B}_2^{(j_2, i_2)}(1) \delta_{j_2, i_2} f_{i_1, i_2, \dots, i_k} \\ &= \sum_{i_2=1}^{n_2} \mathbf{B}_2^{(j_2, i_2)}(1) f_{j_1, i_2, j_3, \dots, j_k} \quad 1 \leq j_1 \leq n_1, \quad 1 \leq j_2 \leq n_2, \dots \quad 1 \leq j_k \leq n_k \end{aligned} \quad (3.54)$$

⋮

$$\begin{aligned} f_{x_k} \left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_k}^{(k)} \right) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_k=1}^{n_k} \mathbf{B}_k^{(j_k, i_k)}(1) \delta_{j_2, i_2} f_{i_1, i_2, \dots, i_k} \\ &= \sum_{i_k=1}^{n_k} \mathbf{B}_k^{(j_k, i_k)}(1) f_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, i_k} \quad 1 \leq j_1 \leq n_1, \quad 1 \leq j_2 \leq n_2, \dots \quad 1 \leq j_k \leq n_k \end{aligned} \quad (3.55)$$

eşitliklerine ulaşılabılır. Bu eşitliklerde f 'in altsırasayısı hangi değişkene göre türev alındığını belirtmektedir. Bunlardan yaklaşık olarak da olsa göretürev belirlemesi olanaklı olup aynı aralıkta nokta sayısı arttıkça ve f işlevi yeterince düzgün oldukça yeterince duyarlılıkta elde edilebilir.

3.3 Verilen Bir Değer Takımından Türev Değeri Üretimi ile İlgili Uygulamalar

3.3.1 İki Boyutlu Uygulamalar

1-) Uygulamalarda $\exp(x_1 + x_2)$ işlevi ile çalışılmıştır. Değişkenler $[0,1]$ aralığındadır. Çizelge 3.1 değişik n_1, n_2 ve m değerleri için, x_1 değişkenine göre türev alındığında elde edilen yaklaşık türev değerlerini ve gerçek türev değerlerini göstermektedir. Tabloda f_{x_1} bu yöntemle elde edilen yaklaşık türev değerini göstermektedir. $f_{x_1}^r$ işlevinin gerçek türev değeridir.

2-) Uygulamalarda kullanılan diğer bir işlev $x_1^2 + x_2^7$ işlevidir. Değişkenler $[0,1]$ aralığındadır. Çizelge 3.2 değişik n_1, n_2 ve m değerleri için, x_2 değişkenine göre türev alındığında elde edilen yaklaşık türev değerlerini ve gerçek türev değerlerini göstermektedir. Tabloda f_{x_2} bu yöntemle elde edilen yaklaşık türev değerini göstermektedir. $f_{x_2}^r$ işlevinin gerçek türev değeridir.

Çizelge 3.1: $\exp(x_1 + x_2)$ işlevi için gerçek ve yaklaşık türev değerlerinin karşılaştırılması.

x_1	x_2	n_1	n_2	m	f'_{x_1}	f_{x_1}
1.0	1.0	5	5	5	7.389056	7.385213
1.0	1.0	8	8	8	7.389056	7.389055
1.0	1.0	10	10	10	7.389056	7.389056

Çizelge 3.2: $x_1^2 + x_2^7$ işlevi için gerçek ve yaklaşık türev değerlerinin karşılaştırılması.

x_1	x_2	n_1	n_2	m	f'_{x_2}	f_{x_2}
1.0	1.0	5	5	5	7.0	6.291015
1.0	1.0	7	7	7	7.0	6.984568
1.0	1.0	8	8	8	7.0	7.0

3.3.2 Üç Boyutlu Uygulamalar

1. e^{x+y+z} fonksiyonu için 5^3 noktada fonksiyonun değerleri bilindiğinde virgülden sonra 2 basamağa kadar gerçek fonksiyonun türev değerlerine yaklaşılmıştır. 6^3 noktada fonksiyonun değerleri bilindiğinde virgülden sonra 3 basamağa kadar gerçek fonksiyon türev değerlerine yaklaşılmıştır. 7^3 nokta için 4 basamağa kadar, 15^3 nokta için 10 basamağa kadar gerçek fonksiyon türev değerlerine yaklaştırım sağlamıştır.
2. $\sin(x).\sin(y).\sin(z)$ fonksiyonu için 5^3 noktada fonksiyonun değerleri bilindiğinde virgülden sonra 3 basamağa kadar gerçek fonksiyonun türev değerlerine yaklaşılmıştır. 7^3 nokta için 8 basamağa kadar, 15^3 nokta için en az 10 basamağa kadar gerçek fonksiyon türev değerlerine yaklaştırım sağlamıştır.
3. $2.x^2 + 5.y^4 + z^7$ fonksiyonu için 5^3 noktada fonksiyonun değerleri bilindiğinde z değişkenine göre türev değerlerinde yeterince iyi sonuçlar alınmamıştır. 7^3 nokta için ise virgülden sonra 1 basamağa kadar gerçek fonksiyona türev değerlerine yaklaşılmıştır. 8^3 nokta için en az 10 basamağa kadar gerçek fonksiyon türev değerlerine yaklaştırım sağlamıştır.

3.4 Gözlemler, Yorum ve Çıkarımlar, Bulgular

Bu bölümde, işlevin kendisinin bilinmediği, yalnızca bazı noktalarda işlev değerlerinin bilindiği durumlarda, işlevin göre türevlerini elde etmek için bir yöntem oluşturulmuştur.

Bu yöntemi kullanarak elde edilen göre türev değerlerinin gerçek işlevin göre türev değerlerine yeterince yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. k boyutlu bir işlev için, her boyutta işlevin derecesinden daha fazla noktada işlev değerinin bilinmesi durumunda, oluşturulan bu yöntemle oldukça iyi sonuçlara ulaşılmıştır.

4. VERİLERDEN BİR İŞLEVİN TÜMLEVİNİN BELİRLENMESİ

Bu bölümde, işlevin analitik yapısının bilinmediği, yalnızca bazı noktalardaki işlev değerlerinin verildiği durumlarda, bu işlevin tümlevinin Sendelenimsizlik Yaklaşımını kullanarak nasıl bulunabileceğini inceleyip, yöntem oluşturmaya çalışacağız. Bu bölümde ayrıca ağırlık işlevinin x bağımsız değişkeninin dizey gösteriliminin (\mathbf{X} : Evrensel dizey) özdeğerlerine etkisi incelenmekte ve yalnızca bazı noktalardaki işlev değerlerinin verildiği durumlarda bu işlevin tümlevinin bulunması için yapılan çalışmalar anlatılmaktadır.

4.1 \mathbf{X} Dizeyinin Oluşturulması ve \mathbf{X} Dizeyinin Özdeğer ve Özyöneylelerine Ağırlık İşlevlerinin Etkisinin İncelenmesi

X dizeyi oluşturulurken taban işlevleri $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ olarak seçilmiştir. n bilinen nokta sayısıdır. Taban işlevleri Gram Schmidt yöntemi kullanılarak dik hale getirilmiş ve dik (u_1, u_2, \dots, u_n) işlevleri elde edilmiştir [66, 67]. Burada u_1 işlevi 1'e eşittir. Dikleştirme işlemi Cholesky ayrıştırımı kullanılarak da yapılabilir. $(n \times n)$ boyutundaki \mathbf{X} dizeyinin öğeleri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$X_{i,j} = \int_0^1 W u_i(x) x u_j(x) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

Ağırlık

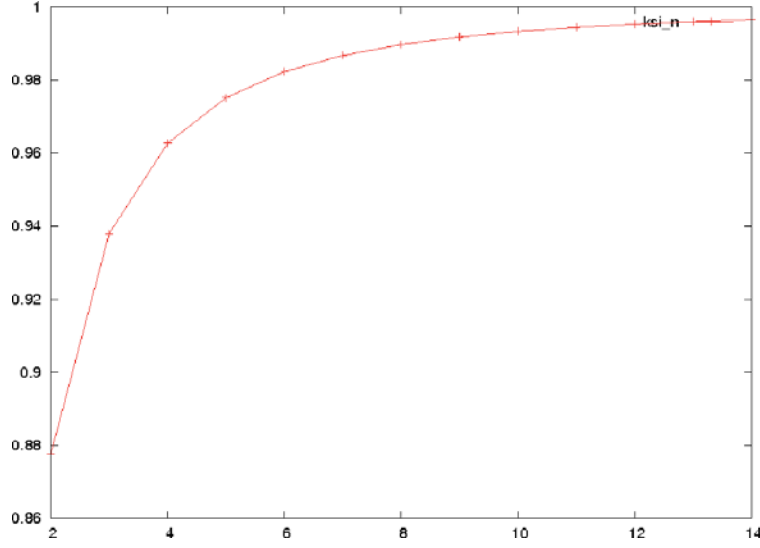
$$W = \frac{(n+1)x^n}{\int_0^1 dx (n+1)x^n}; \quad (4.2)$$

şeklinde seçildiğinde, n değeri ∞ 'a giderken, \mathbf{X} dizeyinin özdeğerlerinin 1'e yaklaştığı görülmüştür. Bu durum değişik n değerleri için Şekil 4.1'de gösterilmektedir. Şekilde x eksenini n değerlerini, y eksenini \mathbf{X} dizeyinin özdeğerlerini göstermektedir.

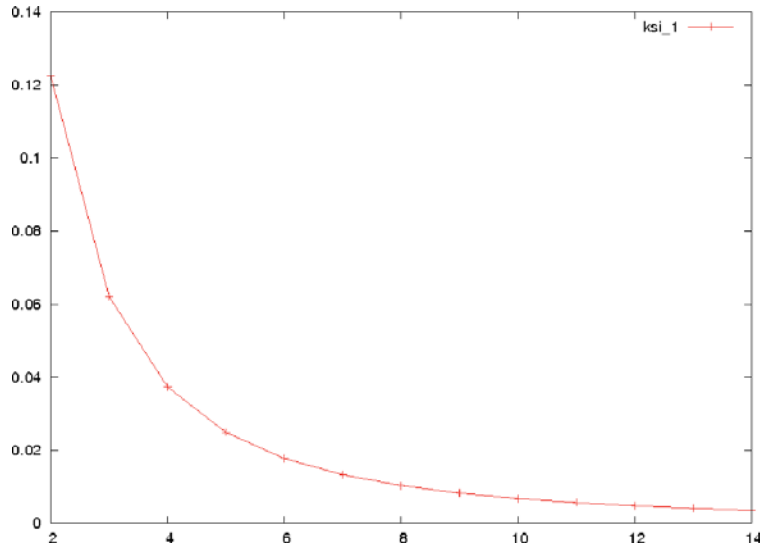
Ağırlık

$$W = \frac{(n+1)(1-x)^n}{\int_0^1 dx (n+1)(1-x)^n}; \quad (4.3)$$

şeklinde seçildiğinde, n değeri ∞ 'a giderken, \mathbf{X} dizeyinin özdeğerlerinin 0'a yaklaştığı görülmüştür. Bu durum değişik n değerleri için Şekil 4.2'de gösterilmektedir. Şekilde x eksenini n değerlerini, y eksenini \mathbf{X} dizeyinin özdeğerlerini göstermektedir.



Şekil 4.1: $\frac{(n+1)x^n}{\int_0^1 dx(n+1)x^n}$ ağırlığı ile elde edilen en büyük özdeğerler.



Şekil 4.2: $\frac{(n+1)(1-x)^n}{\int_0^1 dx(n+1)(1-x)^n}$ ağırlığı ile elde edilen en küçük özdeğerler.

Ağırlık

$$W = \frac{(x-a)^n}{\int_0^1 dx(x-a)^n}; \quad (4.4)$$

yapısında seçilirse $a = 0.5$ durumunda özdeğerler $n = 4$ için $\{0.035, 0.180, 0.819, 0.964\}$ değerlerini ve $n = 6$ için $\{0.017, 0.088, 0.212, 0.787, 0.911, 0.982\}$ değerlerini almaktadır.

$W = 1$ durumunda özdeğerler $n = 4$ için $\{0.069, 0.330, 0.669, 0.930\}$ değerlerini ve $n = 6$ için $\{0.033, 0.169, 0.380, 0.619, 0.830, 0.966\}$ değerlerini almaktadır.

Görüldüğü gibi 0.5 yakınlarındaki özdeğerler ötelenmektedir. $a = 0.5$ seçildiğinden, bu beklenen bir durumdur. Yani, a değiştirgesinin seçimine göre özdeğerler ötelenebilmektedir.

4.2 Sendelenimsizlik Yaklaşımında Odaklayıcı Ağırlık Kullanımı Uygulaması

Bir önceki altbölümde ağırlık kullanarak \mathbf{X} dizeyinin özdeğerlerine etki edilebileceği gösterilmiştir. Bu durum Demiralp'in "Sendelenimsizlik Yaklaşımında Odaklayıcı Ağırlık Kullanımı" [43] çalışmasında da ele alınmıştır. Bu altbölümde [43]'ün Mupad kullanılarak uygulaması yapılacak, bir sonraki altbölümde ise aynı yöntem geliştirilmeye çalışılacaktır. Bu altbölümde, öncelikle [43]'te geliştirilen yöntem ayrıntıları verilmeden, kısaca anlatılacaktır.

Demiralp'in "Sendelenimsizlik Yaklaşımında Odaklayıcı Ağırlık Kullanımı" [43] çalışmasında aşağıda açık yapısı verilen Gauss Dalga Türü ağırlık işlevi kullanılmıştır.

$$w(x, x_d, \varepsilon, s_1, s_2) = A(x_d, \varepsilon, s_1, s_2) e^{-\left(\frac{x-x_d}{\varepsilon}\right)^2} \quad x \in [s_1, s_2] \quad (4.5)$$

Bu ağırlığın $[s_1, s_2]$ aralığındaki tümlevi 1'e eşit olmalıdır. Bu nedenle $A(x_d, \varepsilon, s_1, s_2)$ katsayısı

$$A(x_d, \varepsilon, s_1, s_2) = \left[\int_{s_1}^{s_2} dx e^{-\left(\frac{x-x_d}{\varepsilon}\right)^2} \right]^{-1} \quad (4.6)$$

şeklinde olmalıdır. [43]'te, yukarıda verilen tümlev hesaplanarak $A(x_d, \varepsilon, s_1, s_2)$ 'nin açık yapısı aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$A(x_d, \varepsilon, s_1, s_2) = \frac{1}{|\varepsilon|} \left[\sqrt{\pi} - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{s_2 - x_d}\right) - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{x_d - s_1}\right) \right]^{-1} \quad (4.7)$$

Bu durumda $w(x, x_d, \varepsilon, s_1, s_2)$ ağırlık işlevi $A(x_d, \varepsilon, s_1, s_2)$ 'nin (4.7) eşitliğinde verilen yapısı kullanılarak

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d, \varepsilon, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{|\varepsilon|} \left[\sqrt{\pi} - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{s_2 - x_d}\right) - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{x_d - s_1}\right) \right]^{-1} e^{-\left(\frac{x-x_d}{\varepsilon}\right)^2} \quad (4.8)$$

olarak bulunur.. Bu eşitliklerdeki ϕ işlevi aşağıdaki yapıdadır.

$$\phi(x) = \frac{|x|}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} \int_0^\infty dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{1+x^2y}} \quad (4.9)$$

[43] çalışmasında, sendelenimsizlik yaklaşımında kullanılacak dik taban takımı oluşturmak için kullanılacak olan yani dikleştirilecek taban takımı

$$v_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) = \tilde{\mathbf{x}}^{i-1} = \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_d}{|\varepsilon|} \right)^{i-1} \quad \tilde{\mathbf{x}} \in [\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2] \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

olarak tanımlanmıştır. Buradaki \tilde{x}_1 ve \tilde{x}_2 değıştirgeleri

$$\tilde{x}_1 = \left(\frac{s_1 - x_d}{|\varepsilon|} \right) \quad \tilde{x}_2 = \left(\frac{s_2 - x_d}{|\varepsilon|} \right) \quad (4.11)$$

yapısındadır. Bu taban takımının dikleştirilmesi ve birimboylulaştırılması için aşağıda verilen beklemlerin (ing: moment) tanımlanması gerekir.

$$\mu_k = \int_{s_1}^{s_2} dx w(x) v_k(x) \quad (4.12)$$

Bu beklemlerin açık anlatımları [43]'te aşağıdaki 2 denklemdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \mu_{2k}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &= \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \left[\sqrt{\pi} - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{s_2 - x_d}\right) - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{x_d - s_1}\right) \right]^{-1} \\ &\times \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(j + \frac{1}{2})} \left[e^{-\left(\frac{s_2 - x_d}{\varepsilon}\right)^2} \left(\frac{s_2 - x_d}{\varepsilon}\right)^{2j-1} - e^{-\left(\frac{s_1 - x_d}{\varepsilon}\right)^2} \left(\frac{s_1 - x_d}{\varepsilon}\right)^{2j-1} \right] \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2k+1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &= -\frac{k!}{2} \left[e^{-\left(\frac{s_2 - x_d}{\varepsilon}\right)^2} - e^{-\left(\frac{s_1 - x_d}{\varepsilon}\right)^2} \right] \\ &\times \left[\sqrt{\pi} - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{s_2 - x_d}\right) - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{x_d - s_1}\right) \right]^{-1} \\ &- \left[\sqrt{\pi} - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{s_2 - x_d}\right) - \phi\left(\frac{|\varepsilon|}{x_d - s_1}\right) \right]^{-1} \\ &\times \sum_{j=1}^k \frac{k!}{2j!} \left[e^{-\left(\frac{s_2 - x_d}{\varepsilon}\right)^2} \left(\frac{s_2 - x_d}{\varepsilon}\right)^{2j-1} - e^{-\left(\frac{s_1 - x_d}{\varepsilon}\right)^2} \left(\frac{s_1 - x_d}{\varepsilon}\right)^{2j-1} \right] \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

Beklemler kullanılarak v işlevleri üzerinden Gram dizeyi oluşturulabilir. Gram dizeyinin G_{ij} inci ögesi aşağıdaki özdeşlikle verilmektedir.

$$\begin{aligned} G_{ij}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &\equiv (v_i(\tilde{x}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2), v_j(\tilde{x}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) \equiv \\ &\int_{s_1}^{s_2} dx w(x, x_d, \varepsilon, s_1, s_2) v_i(\tilde{x}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) v_j(\tilde{x}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \mu_{i+j-2} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

Bir taban takımının Gram dizeyi artı tanımlı olduğundan, Gram dizeyine Choleski ayrıştırması uygulanabilir. $L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ bir alt üçgen dizey olmak üzere

$$G(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T \quad (4.16)$$

yazılabilir. Bu durumda yeni taban takımı yöneyi

$$u(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^{-1}v(x, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \quad (4.17)$$

olur. Bu eşitlik yöneylerarası bir ilişkidir. Onun sayılı karşılığı aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) = \sum_{j=1}^i (\mathbf{e}_j^T \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)^{-1} \mathbf{e}_j) \mathbf{v}_j(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) \quad (4.18)$$

$\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin elde edilmesi için öncelikle aşağıda verilen tanımlar yapılmalıdır.

$$\begin{aligned} \alpha_j(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) &= (\mathbf{u}_j(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2), \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{u}_{j+1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)) \\ \beta_j(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) &= (\mathbf{u}_j(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2), \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{u}_j(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Burada \mathbf{u}_i 'lerin açık yapısı kullanılarak α ve β terimleri [43]'te aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\alpha_j = |\varepsilon| \frac{(\mathbf{e}_{j+1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j+1})}{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j)} \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

$$\beta_j = x_d + |\varepsilon| \left[\frac{(\mathbf{e}_{j+1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j)}{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j)} - \frac{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j-1})}{(\mathbf{e}_{j-1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j-1})} \right] \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ işlecinin düzey gösterilimi aşağıdaki gibi olduğundan,

$$\mathbf{X}^{(n)}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, |\varepsilon|) = \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \dots & & \\ & & \dots & & & \\ & & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ & & & & \alpha_{n-1} & \beta_n \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

α ve β terimleri bulunarak $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyi de elde edilmiştir. Yapılan uygulamada bu dizeyin özdeğerleri incelenmiş ve bu özdeğerlerin x_d civarında olduğu görülmüştür. Örneğin $[0,1]$ aralığında, $n = 4$, $\varepsilon = 0.0001$ ve $x_d = 0.5$ için $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin özdeğerleri

$$\{0.499911722, 0.4999703933, 0.5000296067, 0.500088278\}$$

olarak bulunmuştur. $[0,1]$ aralığında, $n = 6$, $\varepsilon = 0.0001$ ve $x_d = 0.5$ için $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin özdeğerleri

$$\{0.499911, 0.499958, 0.499984, 0.500015, 0.500041, 0.500088\}$$

olarak bulunmuştur. Denenen başka n, ε, x_d değerleri için de benzer sonuçlar elde edilmiştir.

4.3 Sendelenimsizlik Yaklaşımında Odaklayıcı Ağırlık Kullanımının Genelleştirilmesi

Bu altbölümde, bir önceki altbölümde elde edilen sonuçların genelleştirilmesi ile ilgileneceğiz. Bunun için W ağırlık işlevini, yapısı aşağıdaki gibi olan m sayıda Gauss dalga türü ağırlık işlevlerinin doğrusal birleşimi olarak tanımlayalım.

$$W = A \sum_{i=1}^m \alpha_i e^{-\left(\frac{x-x_d^i}{\varepsilon}\right)^2} \quad (4.23)$$

Buradaki α_i katsayılarının toplamı 1'e eşit olmalıdır.

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \quad (4.24)$$

Tanım aralığı olan $[s_1, s_2]$ 'de bu ağırlığın tümlevinin 1 olması gerektiğinden, aşağıdaki eşitlik kullanılarak A değeri belirlenebilir.

$$\int_{s_1}^{s_2} dx A \sum_{i=1}^m \alpha_i e^{-\left(\frac{x-x_d^i}{\varepsilon}\right)^2} = 1 \quad (4.25)$$

Yukarıda verilen tümlevi saptayabilmek için öncelikle aşağıda verilen değişken dönüşümünü yapalım.

$$\tilde{x} = \frac{x - x_d^i}{\varepsilon} \quad (4.26)$$

Bu durumda tümlev aralığı $\left[\frac{s_1 - x_d^i}{\varepsilon}, \frac{s_2 - x_d^i}{\varepsilon}\right]$ olur. ε değeri 0'a giderse tümlev aralığı $[-\infty, \infty]$ olacaktır. Bu durumda (4.25) tümlevi

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \varepsilon A \sum_{i=1}^m \alpha_i e^{-\tilde{x}^2} = 1 \quad (4.27)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da A 'nın değeri, ε değeri 0'a giderken

$$A = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \quad (4.28)$$

olarak elde edilir. Bu değer, (4.23)'de yerine konulursa W ağırlık işlevinin yapısı, yine ε değeri 0'a giderken

$$W = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^m \alpha_i e^{-\left(\frac{x-x_d^i}{\varepsilon}\right)^2} \quad (4.29)$$

şeklini alır. İlerleyebilmek için dikleştirilecek taban işlevlerini aşağıdaki gibi seçelim.

$$v_i = x^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

Bu durumda Gram dizeyinin öğeleri aşağıda verilen eşitlik aracılığıyla bulunabilir.

$$\mu_k = \int_{s_1}^{s_2} dx W x^k \quad (4.31)$$

Eğer (4.26)'da verilen değişken dönüşümü yapılır ve ε değeri 0'a yaklaştırılırsa (4.31)

$$\mu_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varepsilon^j x_d^{(i)(n-j)} \tilde{x}^j e^{-\tilde{x}^2} \quad (4.32)$$

olarak yeniden yazılabilir. Buradan, $\tilde{x}^2 = y$ dönüşümü yapılarak Gram dizeyinin öğeleri aşağıdaki yapıda bulunmuş olur.

$$\mu_k = \int_{s_1}^{s_2} dx W x^k = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varepsilon^j (x_d^i)^{(k-j)} \Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right) \quad (4.33)$$

Aslında burada elde edilen sonuçlar asimptotik değerler olup ε değeri 0'a giderken olan duruma karşılık gelir. Bu durumun yeglenmesinin nedeni yanaşıklık getirdiği işlem kolaylığıdır. Gram dizeyi oluşturulduktan sonra Cholesky ayrıştırımı ile taban takımı dikleştirilir ve $G = LL^T$ bağıntısı kullanılarak L dizeyi elde edilir. Gram dizeyinin (i, j)'inci ögesi μ_{i+j-2} 'ye eşittir. Bu durum

$$\begin{aligned} G_{ij} &= (v_i, v_j) = \\ & \int_{s_1}^{s_2} dx W v_i v_j = \int_{s_1}^{s_2} dx W x^{i+j-2} = \mu_{i+j-2} \\ i, j &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.34)$$

eşitliği ile gösterilebilir. Buradan $G = (v, v^T)$ olduğu kolayca görülür. Aynı zamanda

$$G = LL^T \quad (4.35)$$

eşitliği geçerli olduğundan, $L^{-1}(v, v^T)(L^T)^{-1} = I$ ve $(L^{-1}v, v^T(L^T)^{-1}) = (u, u^T) = I$ eşitlikleri kullanılarak

$$u = L^{-1}v \quad (4.36)$$

elde edilir.

u yöneyinin i. ögesi

$$u_i = \sum_{j=1}^i (e_i^T L^{-1} e_j) v_j \quad (4.37)$$

yapısındadır. X dizeyinin i, j indisli ögesi

$$X_{ij} = (u_i, x u_j) \quad (4.38)$$

oldugundan bu dizeyi oluşturabilmek için xu_j terimlerinin bulunması gereklidir. Bunun için xu_j 'i aşağıda verildiği gibi seriye açalım.

$$xu_j = \sum_{k=0}^{j+1} b_k u_k \quad (4.39)$$

u_j işlevleri birim boylu ve birbirine dik olduğundan, bu ifadedeki b_k katsayıları

$$b_k = (u_k, xu_j) \quad (4.40)$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$xu_j = \sum_{k=0}^{j+1} (u_k, xu_j) u_k \quad (4.41)$$

yazılabilir. \hat{x} ile simgelenen ve etki ettiği işlevi bağımsız değişken değeri x ile çarpan işlecin özüne eş (self-adjoint) olmasından yararlanarak (4.42) ve (4.43) eşitlikleri yazılabilir.

$$(u_k, xu_j) = (u_j, xu_k) \quad (4.42)$$

$$(u_j, xu_k) = 0 \quad k < j - 1 \quad (4.43)$$

Bu iki özelliği kullanarak (4.41) eşitliği

$$xu_j = (u_{j-1}, xu_j) u_{j-1} + (u_j, xu_j) u_j + (u_{j+1}, xu_j) u_{j+1} \quad (4.44)$$

durumuna dönüştürülebilir. Burada,

$$\tilde{\alpha}_j = (u_j, xu_{j+1}) \quad \tilde{\beta}_j = (u_j, xu_j) \quad (4.45)$$

tanımlamalarını yaparsak (4.44) eşitliği

$$xu_j = \tilde{\alpha}_{j-1} u_{j-1} + \tilde{\beta}_j u_j + \tilde{\alpha}_j u_{j+1} \quad (4.46)$$

olarak yazılabilir. $X_{ij} = (u_i, xu_j)$ olduğundan X dizeyinin bir yapışik köşegenli bakışık bir dizey olduğu ve köşegeninde $\tilde{\beta}_j$ 'lerin köşegenin alt ve üstünde ise $\tilde{\alpha}_j$ terimlerinin olduğu kolayca görülür.

$$X^{(n)} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & \tilde{\alpha}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_2 & \tilde{\alpha}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \tilde{\beta}_{n-1} & \tilde{\alpha}_{n-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \tilde{\alpha}_{n-1} & \tilde{\beta}_n & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$\tilde{\beta}_j$ ve $\tilde{\alpha}_j$ 'leri daha açık yapıda elde etmek için aşağıda verilen ara işlemleri yapalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}u_j &= \sum_{k=1}^j (\mathbf{e}_k^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}_k) v_{k+1} \\ &= (\mathbf{e}_j^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}_j) v_{j+1} + (\mathbf{e}_j^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}_{j-1}) v_j + \dots \end{aligned} \quad (4.48)$$

Bu eşitlikteki v işlevlerini u işlevleri cinsinden yazalım. $v = Lu$ olduğundan

$$v_{j+1} = \sum_{k=1}^{j+1} (\mathbf{e}_{j+1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_k) u_k = (\mathbf{e}_{j+1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j+1}) u_{j+1} + (\mathbf{e}_{j+1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j) u_j + \dots \quad (4.49)$$

ve

$$v_j = \sum_{k=1}^j (\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_k) u_k = (\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j) u_j + \dots \quad (4.50)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda (4.48) eşitliği

$$\begin{aligned} \mathbf{x}u_j &= (\mathbf{e}_j^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}_j) (\mathbf{e}_{j+1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j+1}) u_{j+1} \\ &+ ((\mathbf{e}_j^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}_j) (\mathbf{e}_{j+1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j) + (\mathbf{e}_j^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}_{j-1}) (\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j)) u_j + \dots \\ (\mathbf{e}_j^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}_j) &= \frac{1}{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j)} \end{aligned} \quad (4.51)$$

olarak bulunur. Bu eşitlikteki u_j teriminin katsayısı $\tilde{\beta}_j$ 'e ve u_{j+1} teriminin katsayısı $\tilde{\alpha}_j$ 'e eşittir. Bu durumda

$$(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}_j) = \frac{1}{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j)} \quad (4.52)$$

ve

$$(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}_{j-1}) = -\frac{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j-1})}{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j) (\mathbf{e}_{j-1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j-1})} \quad (4.53)$$

eşitliklerini kullanırsak $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin öğeleri olan $\tilde{\beta}_j$ ve $\tilde{\alpha}_j$ terimlerini aşağıdaki iki eşitlikte verildiği gibi elde ederiz.

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{(\mathbf{e}_{j+1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j+1})}{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j)} \quad (4.54)$$

$$\tilde{\beta}_j = \frac{(\mathbf{e}_{j+1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j)}{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_j)} - \frac{(\mathbf{e}_j^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j-1})}{(\mathbf{e}_{j-1}^T \mathbf{L} \mathbf{e}_{j-1})} \quad (4.55)$$

Böylece $\mathbf{X}^{(n)}$ dizeyinin öğeleri elde edilmiş olur ve bu öğeler kullanılarak bu dizeyin özdeğerleri ve özyöneylemleri belirlenebilir.

Örnek Çalışma

Bu örnekte $n=6$, $\varepsilon : 0.0001$ alınmış ve tüm α katsayıları $1/6$ olarak seçilmiştir. x_d degerleri aşağıdaki gibi verilirse:

{0.1428571429, 0.2857142857, 0.4285714286, 0.5714285714, 0.7142857143, 0.8571428571}

$X^{(n)}$ dizeyinin özdegerleri aşağıdaki gibi elde edilir:

{0.1429135071, 0.2857704481, 0.4286276157, 0.5714852249, 0.7143423907, 0.8571993309}

Görüldüğü gibi özdegerler, x_d degerlerine oldukça yakın degerlerdir.

4.4 Sendelenimsizlik Yaklaşırımı ile Bazı Noktalarda Değeri Bilinen Bir İşlevin Tümlevinin Bulunması

4.4.1 Denklemlerin oluşturulması

Aşğıdaki tümlev tanımını yapalım.

$$I = \int_0^1 dxw(x) f(x) \quad (4.56)$$

Bu eşitlikte yer alan $w(x)$ ağırlık işlevidir. Bu çalışmada $f(x)$ işlevinin analitik yapısının verilmediği, yalnızca bazı noktalarda $f(x)$ işlevinin degerlerinin verildiği durumlar için yukarıda verilen tümlevin bulunması ile ilgileneceğiz. $f(x)$ işlevinin x_1, x_2, \dots, x_n noktalarındaki degerleri, yani $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ biliniyor olsun.

$$f_i \equiv f(x_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.57)$$

tanımını yapalım. (4.56)'da verilen I tümlevini aşğıdaki gibi yazalım.

$$I \approx I_n = \sum_{i=1}^n \omega_i f_i \quad (4.58)$$

Bu çalışmada ω_i katsayılarını bularak I_n yaklaşık tümlevini belirlemeye çalışacağız. $f(x)$ işlevini s_j 'ler bilinmeyen katsayılar olmak üzere aşğıdaki gibi tanımlayalım.

$$f(x) = \frac{W(x)}{w(x)} \left(\sum_{i=1}^n s_i u_i \right)^2 g(x) \quad (4.59)$$

(4.59) eşitliğinde verilen u_i işlevleri dik işlevlerdir ve $1, x, x^2, \dots$ üslü serisinin dikleştirilmesi ile oluşturulmuştur. Bu nedenle bu u_i ve u_j işlevlerinin iççarpımları $i = j$ için 1'e,

$i \neq j$ için 0'a eşittir.

$$(u_i, u_j) = \int_0^1 dx w(x) u_i(x) u_j(x) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.60)$$

(4.59)'u (4.56)'da yerine koyarsak,

$$I = \int_0^1 dx W(x) \left(\sum_{i=1}^n s_i u_i \right)^2 g(x) \quad (4.61)$$

elde edilir. $0 \leq c \leq 1$ olmak üzere $g(x)$ işlevini Taylor serisine [66, 67] açalım.

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \quad (4.62)$$

(4.62)'yi, (4.61)'de toplama ve tümlev işlemlerinin yerini değiştirerek yerleştirelim.

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(c)}{k!} \int_0^1 dx W(x) \left(\sum_{i=1}^n s_i u_i \right)^2 (x-c)^k \quad (4.63)$$

(4.63)'ü daha kapalı yazabilmek için aşağıda verilen tanımlamaları yapalım.

$$X_k = (u, (x-c)^k u^T) \quad (4.64)$$

$$u^T = [u_1(x), \dots, u_n(x)] \quad (4.65)$$

Bu tanımlamaları kullanarak (4.63)

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(c)}{k!} s^T X_k s \quad (4.66)$$

olarak yeniden yazılabilir. (4.59)'u x yerine x_i yerleştirerek aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz.

$$f(x_i) = \frac{W(x_i)}{w(x_i)} \left(\sum_{i=1}^n s_i u_i \right)^2 g(x_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.67)$$

Ayrıca

$$g_i = g(x_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.68)$$

tanımını yaparsak (4.67) yerine

$$f_i = \frac{W(x_i)}{w(x_i)} \left(\sum_{i=1}^n s_i u_i \right)^2 g_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.69)$$

yazabiliriz.

$$\Omega_i = \omega_i \frac{W(x_i)}{w(x_i)} \left(\sum_{i=1}^n s_i u_i \right)^2 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.70)$$

tanımını yapalım. (4.58)'de verilen I_n tümlevi

$$I_n = \sum_{i=1}^n \Omega_i g_i \quad (4.71)$$

olarak yazılabilir. İlerleyebilmek için g_i 'yi Taylor serisine açalım.

$$g_i = g(x_i) = g(c + (x_i - c)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(c)}{k!} (x_i - c)^k \quad (4.72)$$

(4.72)'de verilen seri açılımını (4.71)'de yerine koyarsak

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(c)}{k!} \sum_{i=1}^n \Omega_i (x_i - c)^k \quad (4.73)$$

bulunur. (4.66) ve (4.73) incelendiğinde aşağıda verilen eşitliğin sağlanması gerektiği ortaya çıkar.

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i (x_i - c)^k = s^T X_k s \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (4.74)$$

Sendelenimsizlik kanıtına göre, tüm sendelenim terimlerinin gözardı edilmesi durumunda,

$$X_k \approx X^k \quad (4.75)$$

yaklaşırımı geçerlidir. Bu durumu gösterebilmek için aşağıdaki iki anlatımı yazalım.

$$X_2 - X^2 = (u, (x-c)^2 u^T) - (u, (x-c)u^T)(u, (x-c)u^T) \quad (4.76)$$

$$X_2 - X^2 = (u, (x-c)^2 u^T) - (u, (x-c)\hat{P}(x-c)u^T) \quad (4.77)$$

Bu anlatımdaki, \hat{P} işleci aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\hat{P}h(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)(u_i, h) \quad (4.78)$$

İlerleyebilmek için aşağıdaki S_2 tanımını yapalım.

$$S_2 = X_2 - X^2 = (u, (x-c)(I - \hat{P})(x-c)u^T) \quad (4.79)$$

Bu tanımlama daha genel olarak S_k için

$$S_k = X_k - X^k \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.80)$$

yapısında verilebilir ve buradan da

$$X_k = X^k + S_k \approx X^k \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.81)$$

bulunur. Bu durumda (4.74) yerine

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i (x_i - c)^k \approx s^T X^k s \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (4.82)$$

yazılabilir.

X dizeyinin özyöneyleleri v_i ile, özdegerleri ise ξ_i ile simgelenir. X dizeyi bakışık olduğundan bu dizeyin özyöneyleleri birbirine diktir ve birimboylu hale getirilebilirler. Yani $v_i^T v_j = \delta_{ij}$ özelliğini sağlarlar. İlerleyebilmek için, aşağıda verilen Q dizeyini tanımlayalım.

$$Q = [v_1 \cdots v_n] \quad (4.83)$$

v_i yöneyleleri dik olduğundan,

$$Q^T Q = I \quad (4.84)$$

olmalıdır. Ayrıca aşağıdaki eşitlik de geçerlidir.

$$Q^T X Q = D_x = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \xi_n \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

D_x köşegen dizeydir. Bu durumda aşağıda verilen 3 eşitlik yazılabilir:

$$X = Q^T D_x Q \quad (4.86)$$

$$X^2 = Q^T D_x^2 Q \quad (4.87)$$

$$X^k = Q^T D_x^k Q \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (4.88)$$

(4.88), (4.82)'te yerine konulursa

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i (x_i - c)^k \approx s^T Q^T D_x^k Q s \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (4.89)$$

ve

$$Q s = \tilde{s} \quad (4.90)$$

tanımını yaparak (4.89)

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i (x_i - c)^k \approx \xi_1^k \tilde{s}_1^2 + \xi_2^k \tilde{s}_2^2 + \cdots + \xi_n^k \tilde{s}_n^2 \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (4.91)$$

olarak sayıl eşitliklerle ya da aşağıdaki gibi dizey gösterilimi yapısında yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \cdots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{s}_1^2 \\ \tilde{s}_2^2 \\ \tilde{s}_3^2 \\ \vdots \\ \tilde{s}_n^2 \end{bmatrix} \approx \sum_{i=1}^n \Omega_i \begin{bmatrix} 1 \\ (x_i - c) \\ (x_i - c)^2 \\ \vdots \\ (x_i - c)^n \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

(4.92) denkleminin sol tarafında bulunan dizey Vandermond türündedir. Bu dizeye V ile simgeleyelim. \mathcal{D} , V dizeyinin determinantını gösterebilir. $\mathcal{D}_i(\xi)$ determinanı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \cdots & \xi_{i-1} & \xi & \xi_{i+1} & \cdots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \cdots & \xi_{i-1}^2 & \xi^2 & \xi_{i+1}^2 & \cdots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \cdots & \xi_{i-1}^{n-1} & \xi^{n-1} & \xi_{i+1}^{n-1} & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (4.93)$$

Bu durumda \tilde{s}_j^2 terimleri aşağıdaki anlatıma eşdeğerdir.

$$\tilde{s}_j^2 \approx \sum_{i=1}^n \Omega_i \frac{\mathcal{D}_j(x_i - c)}{\mathcal{D}} \quad (4.94)$$

Bu eşitlikteki $\frac{\mathcal{D}_j(\xi)}{\mathcal{D}}$ anlatımı

$$\frac{\mathcal{D}_j(\xi)}{\mathcal{D}} = \frac{(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{j-1})(\xi - \xi_{j+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_j - \xi_1) \cdots (\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_j - \xi_{j+1}) \cdots (\xi_j - \xi_n)} = L_j(\xi) \quad (4.95)$$

yapısındadır. Buradan

$$\tilde{s}_j^2 \approx \sum_{i=1}^n \Omega_i L_j(x_i - c) \quad j = 1, \dots, n \quad (4.96)$$

elde edilir. Burada Ω_i 'ler biliniyorsa (4.96) kullanılarak \tilde{s}_j değerleri bulunur. Bu değerler (4.90) eşitliğinde yerine konularak s_j katsayıları elde edilir. (4.69) ve (4.71) eşitlikleri kullanılarak I_n tümlevi belirlenir.

Burada Ω_i 'ler bilinmiyorsa bu değerleri bulmak için aşağıda verilen tanımı yapalım.

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i (x_i - c)^k \approx \xi_1^k \tilde{s}_1^2 + \xi_2^k \tilde{s}_2^2 + \cdots + \xi_n^k \tilde{s}_n^2 \quad k = n, \dots, 2n-1 \quad (4.97)$$

Bu anlatımı aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\sum_{i=1}^n (\Omega_i (x_i - c)^n) (x - c)^k \approx \xi_1^k (\xi_1^n \tilde{s}_1^2) + \xi_2^k (\xi_2^n \tilde{s}_2^2) + \cdots + \xi_n^k (\xi_n^n \tilde{s}_n^2) \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (4.98)$$

Bu denklem sistemi aşağıdaki gibi dizey gösterilimi yapısında yeniden yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \cdots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{s}_1^2 \\ \tilde{s}_2^2 \\ \tilde{s}_3^2 \\ \vdots \\ \tilde{s}_n^2 \end{bmatrix} \approx \sum_{i=1}^n \Omega_i \begin{bmatrix} 1 \\ (x_i - c) \\ (x_i - c)^2 \\ \vdots \\ (x_i - c)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

(4.99) denkleminin sol tarafında bulunan dizey Vandermond türündedir. Bu dizeye V diyelim. \mathcal{D} , V dizeyinin determinanı olsun. $\mathcal{D}_i(\xi)$ determinanı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \cdots & \xi_{i-1} & \xi & \xi_{i+1} & \cdots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \cdots & \xi_{i-1}^2 & \xi^2 & \xi_{i+1}^2 & \cdots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \cdots & \xi_{i-1}^{n-1} & \xi^{n-1} & \xi_{i+1}^{n-1} & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (4.100)$$

Buna göre

$$\tilde{s}_j^2 \approx \sum_{i=1}^n \Omega_i \frac{\mathcal{D}_j(x_i - c)}{\mathcal{D}} \quad (4.101)$$

ve

$$\frac{\mathcal{D}_j(\xi)}{\mathcal{D}} = \frac{(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{j-1})(\xi - \xi_{j+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_j - \xi_1) \cdots (\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_j - \xi_{j+1}) \cdots (\xi_j - \xi_n)} = L_j(\xi) \quad (4.102)$$

yazılabilir ve

$$\xi_j^n \tilde{s}_j^2 \approx \sum_{i=1}^n \Omega_i (x - c)^n L_j(x_i - c) \quad (4.103)$$

elde edilir. (4.96) ve (4.103) kullanılarak

$$\sum_{i=1}^n [\Omega_i (x - c)^n - \xi_j^n \Omega_i] L_j(x_i - c) = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (4.104)$$

elde edilir. Aynı zamanda Ω_i değerlerinin toplamı 1'e eşit olmalıdır. Yani Ω_i 'ler

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i = 1 \quad (4.105)$$

eşitliğini sağlamalıdır. Lagrange çokterimlilerinin gerçel değer oluşturması için $\xi_{j-1} \leq \xi \leq \xi_{j+1}$ olmalıdır. Benzer şekilde $\xi_{j-1} \leq x_i - c \leq \xi_{j+1}$ olmalıdır. Ω_i 'leri belirleyecek denklemleri dizey gösteriliminde yazabiliriz. Bunun için aşağıdaki iki tanımı yapalım.

$$Z^T = [\Omega_1, \dots, \Omega_n] \quad (4.106)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (x_1^n - \xi_1^n)L_1(x_1) & (x_2^n - \xi_1^n)L_1(x_2) & \cdots & (x_n^n - \xi_1^n)L_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^n - \xi_{n-1}^n)L_{n-1}(x_1) & (x_2^n - \xi_{n-1}^n)L_{n-1}(x_2) & \cdots & (x_n^n - \xi_{n-1}^n)L_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

e_1 ilk ögesi 1 diğer ögeleri 0 olan n ögeli bir yöney olsun. Bu tanım kullanılarak Z dizeyi

$$Z = A^{-1}e_1 \quad (4.108)$$

olarak elde edilir. Böylece Ω_i 'ler elde edilmiş olur. Ω_i 'ler (4.96) denkleminde yerine konularak \tilde{s}_j degerleri bulunur. Bu degerler (4.90) eşitliğinde yerine konularak s_j katsayıları elde edilir. (4.69) ve (4.71) eşitlikleri kullanılarak I_n tümlevi bulunur. Bir sonraki alt bölümde bazı örnek uygulamalar ve bu örneklere ait sayısal sonuçlar verilecektir.

4.4.2 Örnek uygulamalar

1-) e^{-2x} işlevinin sırasıyla $n = 5$, $n = 8$ ve $n = 12$ noktada degerleri verilmiş olsun. $W = 1$ ve $w = 1$ olarak alınsın. İşlevin degerlerinin verildiği x noktaları:

0.15, 0.30, 0.65, 0.8, 1.00

0.05, 0.15, 0.30, 0.50, 0.65, 0.80, 0.95, 1.00

0.02,0.05,0.15,0.25, 0.35, 0.5, 0.61,0.7,0.82,0.92,0.97,1.0

olarak verilmiş olsun.

[0,1] aralığında, e^{-2x} işlevinin gerçek tümlevi 0.432332358'e eşittir. Bu bölümde anlatılan yöntemle elde edilen tümlev degerleri $n = 5$ için 0.322159315, $n = 8$ için 0.421939148, $n = 12$ için 0.451380526 şeklindedir.

2-) $2x^2 + x + 2$ işlevinin sırasıyla $n = 5$, $n = 8$ ve $n = 12$ noktada degerleri verilmiş olsun.

$W = 1$ ve $w = 1$ kullanılsın. İşlevinin degerlerinin verildiği x noktaları:

0.15, 0.30, 0.65, 0.8, 1.00

0.05, 0.15, 0.30, 0.50, 0.65, 0.80, 0.95, 1.00

0.02,0.05,0.15,0.25, 0.35, 0.5, 0.61,0.7,0.82,0.92,0.97,1.0

olarak verilmiş olsun.

$2x^2 + x + 2$ işlevinin gerçek tümlevi 3.166666667'e eşittir. Bu bölümde anlatılan yöntemle elde edilen tümlev değerleri $n = 5$ için 2.738102162, $n = 8$ için 3.130480189, $n = 12$ için 3.285357588 şeklindedir.

3-) Bu yöntemin çalışabilmesi için verilen x_i noktalarının $\xi_{i-1} \leq \xi_{i+1}$ koşulunu sağlaması gerekmektedir. X dizeyini oluştururken kullandığımız ağırlıklar yardımıyla dizeyin özdeğerlerini kontrol edebiliriz. Ağırlık işlevi:

$$W_i = (\tilde{x} - x[i])^2 \quad i = 1..4$$

$$A_i = \int_0^1 dx W_i$$

$$W = 1.0/n \times (W_1/A_1 + W_2/A_2 + W_3/A_3 + W_4/A_4)$$

şeklinde seçilsin. $2x^2 + x + 2$ işlevinin $n = 4$ noktada değeri verilsin. Bu noktalar:

0.25, 0.50, 0.75, 1.00

olsun. İşlevin gerçek tümlevi 3.121428571 ve bu yöntemle bulunan tümlevi 3.895876610'a eşittir.

Burada karşılaşılan sorun, işlevin değerleri bilinen noktalarının evrensel dizeyin özdeğerleriyle aynı olmamasıdır. Sendelenimsizlik yaklaşımları ile tümlevleme işlevinin bilinen noktaları özdeğerlere karşılık geliyorsa çizem (şema) iyi işlemektedir. Odaklayıcı ağırlık kullanarak ise özdeğerleri istenilen noktalara yerleştirmek olanaklıdır.

4.5 Evrensel Dizey ile İlgili Bazı Gözlemler

$X_k = (u, x^k u)$ ve $X^k = (u, x u)^k$ olmak üzere, sendelenimsizlik yaklaşımına göre, sendelenim terimlerinin tümü gözardı edildiğinde,

$$X_k \approx X^k \quad (4.109)$$

yaklaşık eşitliği geçerlidir. Bu dizeyler $n \times n$ boyutunda olsun. Gözlemlerimize göre $1 < t < n$ olmak üzere X_k dizeyinin $(n - t) \times (n - t)$ 'lik bir altdizeyi ile X^k dizeyinin $(n - t) \times (n - t)$ 'lik bir altdizeyi birbirine oldukça yakındır. Bu dizeylere Y ve Z diyelim.

Örneğin $n = 5$, $k = 4$ ve $t = 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki dizeyleri elde ederiz.

$$X^k = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2309 & 0.1277 & 0.0377 & 0.0047 \\ 0.2309 & 0.3142 & 0.2397 & 0.1163 & 0.0329 \\ 0.1277 & 0.2397 & 0.2857 & 0.2253 & 0.1082 \\ 0.0377 & 0.1163 & 0.2253 & 0.2747 & 0.1903 \\ 0.0047 & 0.0329 & 0.1082 & 0.1903 & 0.1658 \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

$$X_k = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2309 & 0.1277 & 0.0377 & 0.0047 \\ 0.2309 & 0.3142 & 0.2397 & 0.1163 & 0.0329 \\ 0.1277 & 0.2397 & 0.2857 & 0.2253 & 0.1122 \\ 0.0377 & 0.1163 & 0.2253 & 0.2787 & 0.2221 \\ 0.0047 & 0.0329 & 0.1122 & 0.2221 & 0.2765 \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2309 & 0.1277 \\ 0.2309 & 0.3142 & 0.2397 \\ 0.1277 & 0.2397 & 0.2857 \end{pmatrix} \quad (4.112)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2309 & 0.1277 \\ 0.2309 & 0.3142 & 0.2397 \\ 0.1277 & 0.2397 & 0.2857 \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

Örnekten görüldüğü gibi Y ve Z dizeleri birbirinin aynısıdır. Boy karşılaştırılması yapılırsa $\|X^k - X_k\| = 0.119672129$ iken $\|Y - Z\| = 8.131493706 \times 10^{-18}$ yapısındadır. Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3'te dizelerin boy karşılaştırmaları verilmektedir. Çizelge 4.1 için Mupad'ın DIGITS değiştirgesi 100 olarak seçilmiştir. Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3 için Mupad'ın DIGITS değiştirgesi 200 olarak seçilmiştir.

Çizelge 4.1: $n = 14$ ve $t = 4$ için dizelerin boylarının karşılaştırılması.

k	$\ X^k - X_k\ $	$\ Y - Z\ $
1	0	0
2	0.06257982	0
3	0.09644574	0
4	0.11834317	0
5	0.13398165	0
6	0.14587442	0
7	0.15531848	0
8	0.16305884	0
9	0.16955771	0
10	0.17511897	0.00000096
11	0.17995171	0.00000530
12	0.18420514	0.00001672
13	0.18798894	0.00003971
14	0.19138581	0.00007899

4.6 Verilerin Tümlevlenmesinde Tek Düğüm Noktalı Sendelenimsizlik Yaklaşımı ve Ağırlık İşlevi Üreticileri

4.6.1 Çok terimli yapısındaki ağırlık işlevi üreticileri

Bu altbölümde, işlevin yapısının bilinmediği durumlarda verilerin tümlevinin elde edilebilmesi için yeni bir yöntem oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu yöntem sendelenimi

Çizelge 4.2: $n = 20$ ve $t = 4$ için dizelerin boylarının karşılaştırılması.

k	$\ X^k - X_k\ $	$\ Y - Z\ $
1	0	0
2	0.06253908	0
3	0.09638096	0
4	0.11824926	0
5	0.13385504	0
6	0.14571245	0
7	0.15511899	0
8	0.16282000	0
9	0.16927789	0
10	0.17479671	0.00000095
11	0.17958565	0.00000527
12	0.18379398	0.00001664
13	0.18753146	0.00003950
14	0.19088085	0.00007856
15	0.19390585	0.00013828
16	0.19665647	0.00022262
17	0.19917251	0.00033486
18	0.20148617	0.00047756
19	0.20362377	0.00065255
20	0.20560708	0.00086098

yok etmeye dayanmaktadır. Bu bölümde ilk önce ağırlık işlevi üretme altuzayları oluşturulmuştur. Doğru ağırlık işlevi kullanımı oldukça önemlidir. Yapılan çalışma tek düğüm noktalı tümlevlemeyi içermektedir.

Burada geliştirilen yöntem, Gauss dördüllerini [68, 69] polinomlar aracılığıyla ve dizey gösterilimli yaklaşımlar olarak anlatan sendelenimsiz tümlevlemeye dayanmaktadır.

Sendelenimsiz tümlevleme, yalnızca polinomlarla yapılmamaktadır. Genel yaklaşım, birçok formülün yapısını yalınlaştırdığından polinom kullanmak olsa da, başka uygun taban işlevleri de kullanılabilir. Bu altbölümün amacı bir polinom taban kümesi için Gauss Dördüllemeye [68–71] eş bir sendelenimsiz tümlev alma yöntemi oluşturmaktır. Bunu yapabilmek için yeni bir ağırlık işlevi oluşturacağız ve bunu dördüle benzer bir formül oluşturmak için kullanacağız. Belirlenecek tümlev aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx f(x) \quad (4.114)$$

Çizelge 4.3: $n = 20$ ve $t = 6$ için dizeylerin boylarının karşılaştırılması.

k	$\ X^k - X_k\ $	$\ Y - Z\ $
1	0	0
2	0.06253908	0
3	0.09638096	0
4	0.11824926	0
5	0.13385504	0
6	0.14571245	0
7	0.15511899	0
8	0.16282000	0
9	0.16927789	0
10	0.17479671	0
11	0.17958565	0
12	0.18379398	0
13	0.18753146	0
14	0.19088085	0
15	0.19390585	0.00000002
16	0.19665647	0.00000011
17	0.19917251	0.00000035
18	0.20148617	0.00000087
19	0.20362377	0.00000187
20	0.20560708	0.00000361

(4.115), yöntemi oluştururken kullanacağımız beklemleri tanımlamaktadır.

$$\mu_i \equiv \int_0^1 dx x^i = \frac{1}{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.115)$$

Tek düğüm noktalı tümlevlemede düğüm noktasını x_1 ve ilgili ağırlık değişmezini w_1 ile göstereceğiz. Sendelenimsiz tümlevlemeye göre (veya Gauss dördülüne göre) aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$w_1 = \tilde{\mu}_0, \quad w_1 x_1 = \tilde{\mu}_1 \quad (4.116)$$

(4.116)'da bulunan $\tilde{\mu}_0$ ve $\tilde{\mu}_1$ simgeleri, bilinmeyen ağırlık işlevi $\tilde{w}(x)$ 'in ilk iki beklemini göstermektedir. Bu ağırlık işlevi birim ağırlık işlevi $w_c(x) = 1$ 'nin $s(x)$ adı verilen bir işlev kullanılarak $\tilde{w}(x) = w_c(x)s(x)$ olarak değiştirilmesi ile oluşturulmuştur ve $s(x)$ 'in belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için (4.116)'yı kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_0 &= \int_0^1 dx s(x), & \tilde{\mu}_1 &= \int_0^1 dx s(x)x, \\ \longrightarrow \tilde{\mu}_1 \int_0^1 dx s(x) - \tilde{\mu}_0 \int_0^1 dx s(x)x &= 0 \\ \longrightarrow x_1 \int_0^1 dx s(x) - \int_0^1 dx s(x)x &= 0 \end{aligned} \quad (4.117)$$

eşitliğini yazalım. (4.117)'ye "Tek düğüm noktalı ağırlık koşulu " denir. $s(x)$ işlevinin tümlevi alınacak işlevin analitik olduğu bölgede analitik olduğunu varsayabiliriz. Bu da Taylor açılımını kullanmamızı sağlar. Simetri nedeniyle, $s(x)$ işlevini tümlevleme aralığının orta noktasında açmayı yegliyoruz. Bu durumda,

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \left(x - \frac{1}{2}\right)^j \quad (4.118)$$

yazılabilir ve katsayılar arasında aşağıda verilen ilişki bulunur.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} s_j \left(x_1 \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2}\right)^j - \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2}\right)^j x \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} s_j \left[\frac{1}{2^j(j+1)} \frac{1+(-1)^j}{2} \left(x_1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{j+1}(j+2)} \frac{1-(-1)^j}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.119)$$

s_0 diğer katsayılar türünden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$s_0 = - \sum_{j=1}^{\infty} s_j \left[\frac{1}{2^j(j+1)} \frac{1+(-1)^j}{2} - \frac{1}{2^{j+1}(j+2)} \frac{1-(-1)^j}{2} \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \right] \quad (4.120)$$

Bu da (4.118)'de kullanılarak aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$s(x) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j p_j(x) \quad (4.121)$$

Buradaki $p_j(x)$ 'in açık durumu (4.122)'de verilmektedir.

$$p_j(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^j - \frac{1+(-1)^j}{2^{j+1}(j+1)} + \frac{1-(-1)^j}{2^{j+2}(j+2)} \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.122)$$

Bu polinomların çarpımsal evriği (ing: reciprocal) ile tümlevi alınacak işlevin çarpımı oluşturacağımız dördülün işlevi olarak kullanılacağından, bu polinomların kökleri incelenmelidir. Denklem (4.123)'te verilen eşitlikler tümlevi yaklaştırmakta kullanılacaktır.

$$\int_0^1 dx f(x) \equiv \int_0^1 dx s(x) \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(x) \equiv \frac{f(x)}{s(x)} \quad (4.123)$$

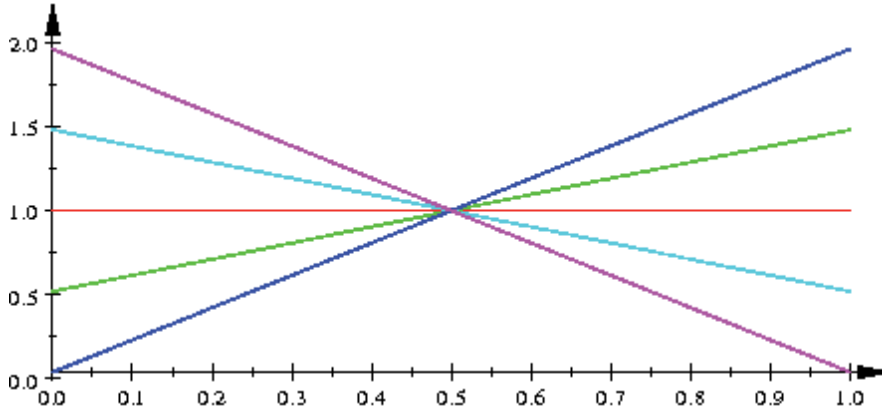
Bu durumda $s(x)$ ağırlık işlevi, $\tilde{f}(x)$ de tümlevi alınacak işlev olarak kabul edilmektedir. Özenli bir inceleme, (4.122)'de verilen çift dereceli polinomların kökleri olduğunu göstermektedir. Bu durumda çift dereceli p_j polinomlarının çarpımsal evrikleri tüm tümlevleme bölgesinde ($[0, 1]$) analitik olamaz.

Tek dereceli p polinomlarının da x karmaşık düzleminde merkezi $(1/2, 0)$ olan bir çember üzerinde kökleri vardır, fakat bu durumda çemberin yarıçapı $(x_1 - 1/2)$ teriminin tek

tamsayı köklerinden biriyle orantılıdır. Bu durum tüm tümlevleme aralığında analitiklik sağlar ve analitikliğin düzeyi x_1 $1/2$ 'ye yaklaştıkça artar. Bu durumda $p_1(x)$ en yüksek analitiklik bölgesi olan polinomdur ve tek kökü x_z aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x_z = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (4.124)$$

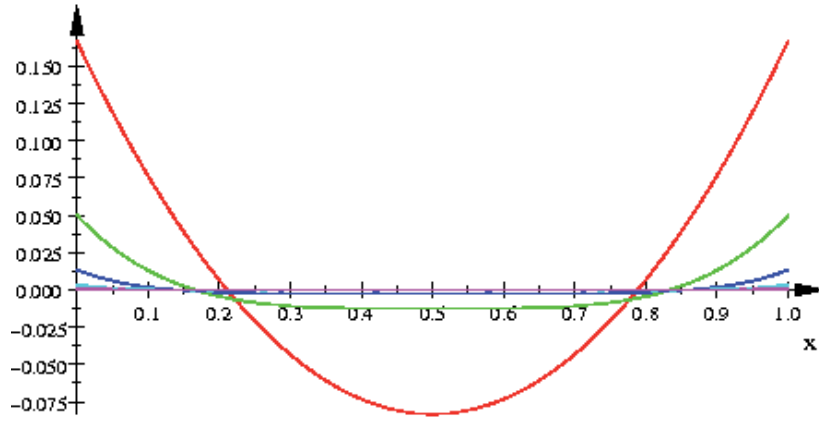
Eğer x_1 , $1/2$ 'ye sağdan yaklaşırsa x_z artı sonsuza gider. Eğer x_1 bu orta noktadan sağa doğru uzaklaşırsa x_z küçülür. x_1 , $2/3$ olursa analitiklik bozulur. Diğer yandan, x_1 orta noktada sola doğru giderse x_z eksi sonsuzdan büyümeye başlar ve x_1 $1/3$ olduğunda analitiklik bozulur. Bu da $p_1(x)$ 'in $x_1 \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ için ağırlık işlevi olarak kullanılabilceğini gösterir. Analitiklik bölgesi genişledikçe sendelenimsiz tümlevlemenin verimliliği de artar. Şekil 4.3 birinci dereceden p polinomunun $[0,1]$ aralığında normalize edilmiş



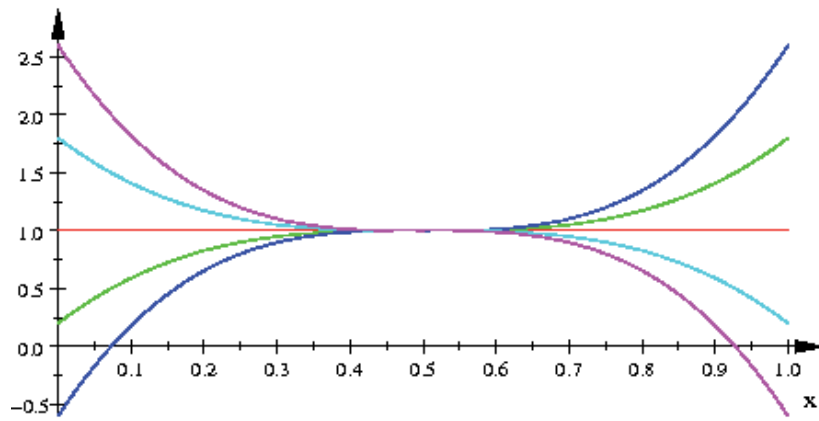
Şekil 4.3: Değişik düğüm noktaları için birinci ağırlık polinomunun değişimi.

durumunun değişik x_1 değerleri için gra klerini vermektedir. Şekildeki kırmızı çizgi $x_1 = 0.50$, yeşil çizgi $x_1 = 0.58$, mavi çizgi $x_1 = 0.66$, açık mavi çizgi $x_1 = 0.42$, e atun çizgi $x_1 = 0.34$ için birinci dereceden p polinomunu göstermektedir. Görüldüğü gibi çizgiler x_1 $1/3$ ve $2/3$ aralığında olduğu sürece artı tanımlı ekseninde bulunmaktadır. Bu Şekil $p_1(x)$ 'in normalize edilmiş durumunun, $1/3$ ve $2/3$ aralığındaki düğüm noktaları için, ağırlık işlevi olarak kullanılabilceğini göstermektedir. Şekil 4.4, çift dereceli polinomların gra klerini vermektedir. Şekilde 2., 4., 6., 8., 10. dereceden polinomların gra kleri sırasıyla kırmızı yeşil, mavi, açık mavi ve e atun renklerinde. Bu polinomların $[0, 1]$ aralığındaki tümlevleri 0 olduğundan normalize edilmemişlerdir. Bu nedenle de ağırlık işlevi olarak kullanılamazlar.

Şekil 4.5, Şekil 4.3'deki aynı düğüm noktaları için, üçüncü dereceden polinomun $[0,1]$ aralığında normalize edilmiş durumunun gra klerini göstermektedir. Şekildeki kırmızı



Şekil 4.4: Çift dereceli ağırlık polinomları.



Şekil 4.5: Değişik düğüm noktaları için üçüncü ağırlık polinomunun değişimi.

çizgi $x_1 = 0.50$, yeşil çizgi $x_1 = 0.58$, mavi çizgi $x_1 = 0.66$, açık mavi çizgi $x_1 = 0.42$, e atun çizgi $x_1 = 0.34$ için üçüncü dereceden p polinomunu göstermektedir. Şekilden de görüldüğü gibi oluşan polinomlar her yerde artı değildir. Fakat her yerde artılığın sağlandığı bir x_1 alt aralığı bulmak olanaklıdır.

p polinomlarının oluşturduğu altuzayı “Birinci Dereceden Tek Düğüm Noktalı Ağırlık Üreticileri ” olarak adlandırabiliriz. Şekillerden de görüldüğü gibi bu polinomlardan birincisi dışında hiç biri $(1/3, 2/3)$ aralığının tümünde artı değildir. Fakat bu açık aralıkta birinci polinomun artı tanımlı ığı yine bu aralıkta artı tanımlı kalan yeni polinomlar üretebilmek için yeterlidir. Bu çalışmada “Birinci Ağırlık Üretici” olarak adlandırılan $p_1(x)$ polinomu, tek düğüm noktalı dördül elde etmek için kullanılacaktır.

Bu durumda yaklaşık tümlev aşağıdaki şekilde yazılır,

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx p_1(x) \left[\frac{f(x)}{p_1(x)} \right] \quad (4.125)$$

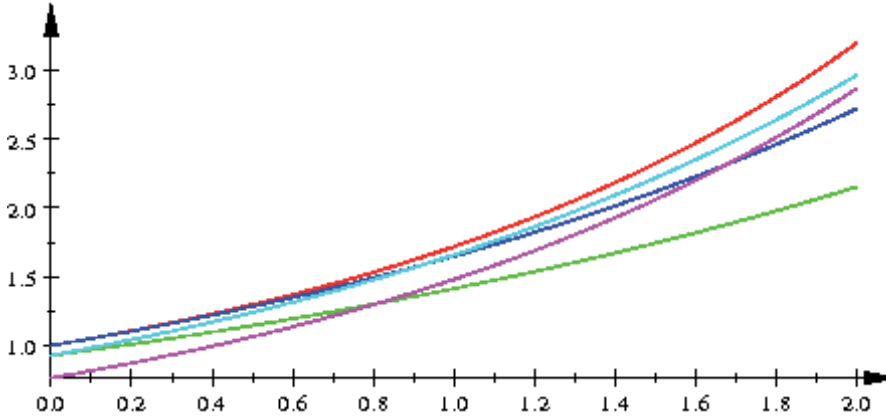
Görüldüğü gibi $p_1(x)$ 'in çarpımsal evrigi (ing: reciprocal) tümlevlenecek işlevin bir parçası olarak ve $p_1(x)$ ağırlık işlevi olarak alınmaktadır. Bu durumda (4.125) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\mathcal{I} \approx \frac{1}{p_1(x_1)} f(x_1) \quad (4.126)$$

(4.125)'da $p_1(x)$ 'in ölçeklendirilmesi sonucu değiştirmeyeceğinden, $p_1(x)$ $[0,1]$ aralığında tümlevi 1 olacak şekilde normalize edilebilir. Bu şekilde elde edilen ağırlık işlevine $\tilde{p}_1(x)$ diyelim. Bu durumda aşağıdaki eşitliği yazabiliriz,

$$\mathcal{I} \approx \frac{1}{\tilde{p}_1(x_1)} f(x_1) \quad (4.127)$$

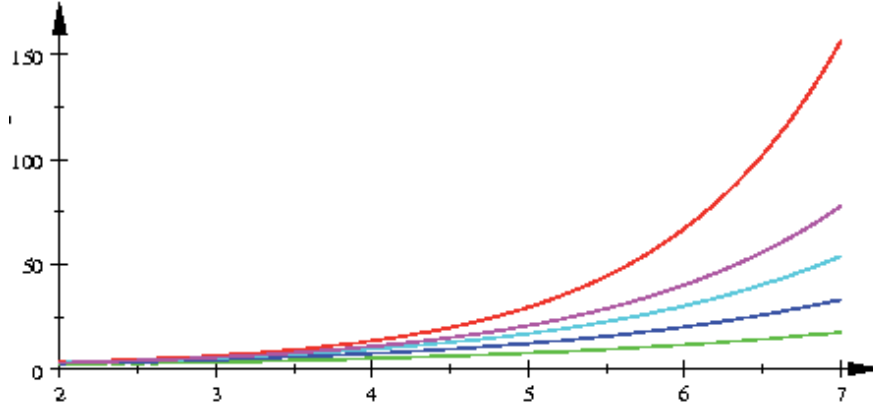
Şekil 4.6, $\exp(\alpha x)$ işlevinin gerçek ve yaklaşık tümlevlerini göstermektedir. Yaklaşık tümlevler (4.127) kullanılarak $x_1 = 0.42, 0.50, 0.58, 0.60$ düğüm noktaları için elde edilmiştir. Şekilde x eksenini α değerlerini, y eksenini tümlev değerlerini göstermektedir. Gerçek tümlev değeri kırmızı çizgi ile gösterilmektedir. $x_1 = 0.42, 0.50, 0.58, 0.60$ düğüm noktalarında elde edilen yaklaşık tümlev değerleri sırasıyla yeşil, mavi, açık mavi ve e atun renkleri ile gösterilmiştir. α değerleri 0 ve 2 arasında değişmektedir. Aynı çizimler α 'nın 2 ve 7 arasında değişen değerleri için Şekil 4.7'de verilmektedir.



Şekil 4.6: $\exp(\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 0, \dots, 2$).

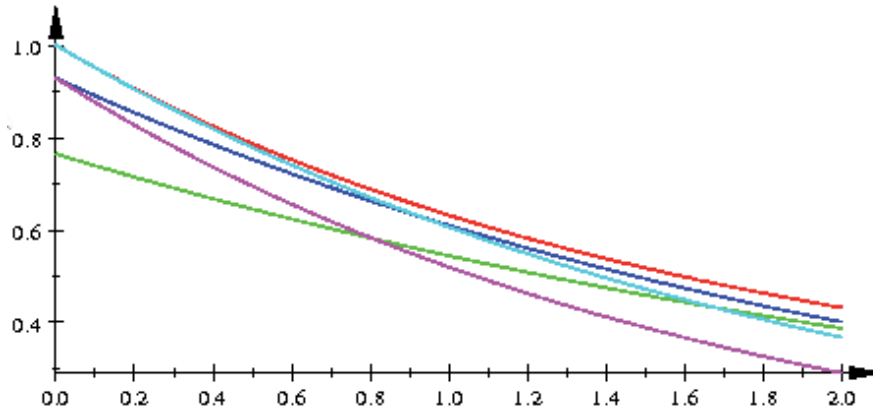
Bu grafler, tümlevi alınacak işlevin eğriliği arttıkça yöntemin işleyişi hakkında fikir sahibi olabilmek için tekdüze artan işlevler için çizdirilmiştir. Benzer şekilde tekdüze azalan işlevler de incelenebilir. Şekil 4.8 ve Şekil 4.9'da $\exp(-\alpha x)$ işlevinin gerçek ve yaklaşık tümlevleri değişik α değerleri için verilmektedir.

Bu şekillere göre elde edilen sonuçlar aşağıda maddeler halinde verilmektedir:

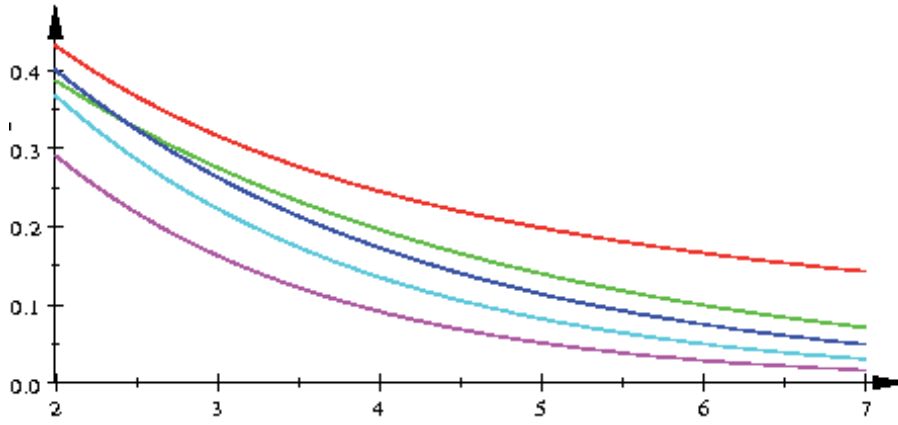


Şekil 4.7: $\exp(\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 2, \dots, 7$).

1. Eger α 0'a yaklaşırsa ilgilenilen işlev düz bir işlev olur. Bu durumda $x_1 = 0.50$ gerçek tümlev değeri ile çakışan en iyi yaklaşırtımı verir. Bu durum düz işlevlerin tümlevlerinin $x_1 = 0.50$ kullanılarak yaklaşırtılabileceklerini gösterir. Yani orta nokta civarındaki düğüm noktaları, düz işlevlerin tümlevlerinin bulunmasında daha iyi sonuç elde edilmesini sağlamaktadır.
2. α , 0'dan artı yönde arttıkça işlev eğriligi artar. Bu durumda en iyi tümlevi elde etmek için gerekli düğüm noktası sağa doğru kayar. Bu da eğriligi yüksek, tekdüze artan işlevler için, tek düğüm noktalı tümlevlemede, 1'e yakın düğüm noktaları için daha iyi sonuç elde edileceğini gösterir.
3. α , 0'dan eksi yönde uzaklaşırsa, üstel işlevin eğriligi tekdüze azalarak artar. Bu durumda en iyi tümlevi elde etmek için gerekli düğüm noktası orta noktadan sola doğru kayar. Bu da eğriligi yüksek, tekdüze azalan işlevler için, tek düğüm noktalı tümlevlemede, 0'a yakın düğüm noktaları için daha iyi sonuç elde edileceğini gösterir.



Şekil 4.8: $\exp(-\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 0, \dots, 2$).



Şekil 4.9: $\exp(-\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 2, \dots, 7$).

4. Eger tümlevi alınacak işlev hakkında x_1 düğüm noktasındaki değeri dışında bir bilgi yoksa, bu durumda bir öngörüm yapmadan (4.127)'de verilen formülü kullanmak zorunluluk haline gelecektir. Eger işlevin yapısı hakkında herhangi bir bilgi varsa, yapılan yaklaşırtırımın niteliği üzerine birşeyler söylenebilir.
5. Eger ilgilenilen işlev analitik olarak biliniyorsa, bu durumda en iyi yaklaşırtırımı verebilecek x_1 değeri seçilebilir. En iyi tümlev yaklaşırtırımını veren x_1 değeri işlevden işleve değişmektedir.

4.6.2 Tek düğüm noktalı tümlevlemede analitiklik aralığının değiştirilmesi

Bu ana dek yapılan inceleme, x_1 'in tüm aralığın sadece $1/3$ 'ünde değer alabildiğini göstermiştir. Bu durum istenmeyen bir olgudur ve yöntemi daha uygulanabilir hale getirmek için değiştirilmelidir. Daha önce belirtildiği gibi x_1 'in değer alabildiği en geniş aralık $(1/3, 2/3)$ açık aralıktır. Fakat daha geniş bir bölgede analitiklik sağlanması için $[x_1^{(\min)}, x_1^{(\max)}]$ gibi bir alt aralık kullanmayı yegleyeceğiz. Bu altbölüme kadar gerekmesede birim değişmez ağırlık kullanılmıştı. Tümlevleme değişkenini değiştirerek ilgilenilen tümlevi aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\mathcal{J} = \int_0^1 dx (k+1)x^k f(1-x^{k+1}) \quad (4.128)$$

Burada eksi olmayan bir k değeri için $x \rightarrow 1-x^{k+1}$ dönüşümü yapılmıştır. Aşağıda tanımlanan $W(x)$ işlevi $[0, 1]$ aralığında ağırlık işlevi olarak kabul edilebilir.

$$W(x) \equiv (k+1)x^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.129)$$

$x = \tilde{x}_1$ ve x_1 arasında aşağıdaki ilişkiyi tanımlayalım.

$$\tilde{x}_1 \equiv (1 - x_1)^{\frac{1}{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.130)$$

x_1 'in en geniş analitiklik sağladığı bölgeyi bulmak için (4.117)'i yeniden yazalım.

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_0 &= \int_0^1 dx W(x) s(x), & \tilde{\mu}_1 &= \int_0^1 dx W(x) s(x) x, \\ \longrightarrow \tilde{\mu}_1 \int_0^1 dx W(x) s(x) - \tilde{\mu}_0 \int_0^1 dx W(x) s(x) x &= 0 \\ \longrightarrow \tilde{x}_1 \int_0^1 dx W(x) s(x) - \int_0^1 W(x) dx s(x) x &= 0 \end{aligned} \quad (4.131)$$

Bu durumda (4.118) değişmeyecek ve (4.119) aşağıdaki yapıda yazılabilecektir.

$$\sum_{j=0}^{\infty} s_j \left(\tilde{x}_1 \int_0^1 dx W(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)^j - \int_0^1 dx W(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)^j x \right) = 0 \quad (4.132)$$

Eğer

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \left(\tilde{x}_1 \int_0^1 dx W(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)^j - \int_0^1 dx W(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)^j x \right), \\ j &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.133)$$

tanımlanırsa, s_0, s_j 'ler türünden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$s_0 = - \sum_{j=1}^{\infty} s_j \frac{\sigma_j}{\sigma_0} \quad (4.134)$$

Bu eşitlik (4.132)'de kullanılırsa

$$s(x) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j p_j(x) \quad (4.135)$$

elde edilir. Burada $p_j(x)$

$$p_j(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^j - \frac{\sigma_j}{\sigma_0}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.136)$$

yapısındadır.

$p_1(x)$ kullanılarak σ_0 ve σ_1 açık halde aşağıda verilen yapıda bulunur.

$$\sigma_0 = \tilde{x}_1 - \frac{k+1}{k+2}, \quad \sigma_1 = \frac{k}{2(k+2)} \sigma_0 - \frac{k+1}{(k+2)^2(k+3)}. \quad (4.137)$$

Bu formüller de

$$p_1(x, \tilde{x}_1, k) = x - \frac{1}{2} - \frac{k}{2(k+2)} + \frac{k+1}{(k+2)(k+3) [(k+2)\tilde{x}_1 - (k+1)]} \quad (4.138)$$

yazmamızı sağlar. (4.138)'un kökü $x_z(x_1, k)$ açık halde

$$x_z(\tilde{x}_1, k) = \frac{1}{2} + \frac{k}{2(k+2)} - \frac{k+1}{(k+2)(k+3)[(k+2)\tilde{x}_1 - (k+1)]} \quad (4.139)$$

şeklinde yazılır. Bu kök aşağıda verilen eşitsizlikleri sağlamalıdır.

$$x_z(\tilde{x}_1, k) > \frac{1}{2} + \rho, \quad x_z(\tilde{x}_1, k) < \frac{1}{2} - \rho \quad (4.140)$$

Burada ρ , $x = 1/2$ merkezli çemberin yarıçapıdır. (4.139) ve (4.140) kullanılarak (4.141) yazılabilir.

$$\tilde{x}_1^{(\min)}(k, \rho) < \tilde{x}_1 < \tilde{x}_1^{(\max)}(k, \rho) \quad (4.141)$$

Burada

$$\tilde{x}_1^{(\max)}(k, \rho) \equiv \frac{(k+1)[(2\rho+1)k + (6\rho+1)]}{(k+3)[(2\rho+1)k + 4\rho]} \quad (4.142)$$

$$\tilde{x}_1^{(\min)}(k, \rho) \equiv \frac{(k+1)[(2\rho-1)k + (6\rho-1)]}{(k+3)[(2\rho-1)k + 4\rho]} \quad (4.143)$$

yapısındadır. Bu da

$$1 - \tilde{x}_1^{(\max)}(k, \rho)^{k+1} < x_1 < 1 - \tilde{x}_1^{(\min)}(k, \rho)^{k+1}. \quad (4.144)$$

yazabilmemizi sağlar. x_1 için bu sınırlar k sonsuza giderken $1 - e^{-2}$ 'ye yaklaşır. (yaklaşık 0.86466). Burada e doğal logaritma tabanıdır. Bu analizler analitiklik aralığının uygun koordinat dönüşümü ile değiştirilebileceğini gösterir. Burada ağırlık olarak bağımsız değişkenin tamsayı kuvvetlerini kullandık ve bu da aralığın sağa ötelenmesini sağladı. Eğer aşağıda verilen denklem kullanılırsa,

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx (k+1)x^k f(x^{k+1}) \quad (4.145)$$

aralık sola ötelenecek ve k sonsuza giderken ve limitler e^{-2} 'ye (yaklaşık 0.135336) yaklaşacaktır. Aralığın değişimi ve ötelenmesi tamamen tümlevde kullanılan $W(x)$ 'in yapısına bağlıdır. Ağırlık işlevlerinin önemli bir özelliği, analitiklik aralığını ya yalnızca sağ uç noktanın dışına doğru ya da yalnızca sol uç noktanın dışına doğru arttırmasıdır. Bu çalışmaya göre gerekli dönüşümler yapılarak analitiklik aralığı $e^{-2} < x_1 < 1 - e^{-2}$ açık aralığına genişletilebilmiştir. Bu durumda bu altbölümde verilen p_1 yapısı ve (4.126) ve (4.127) kullanılarak yaklaşık tümlev değerleri elde edilir.

4.6.3 Çok terimli olmayan ağırlık işlevi üreticileri

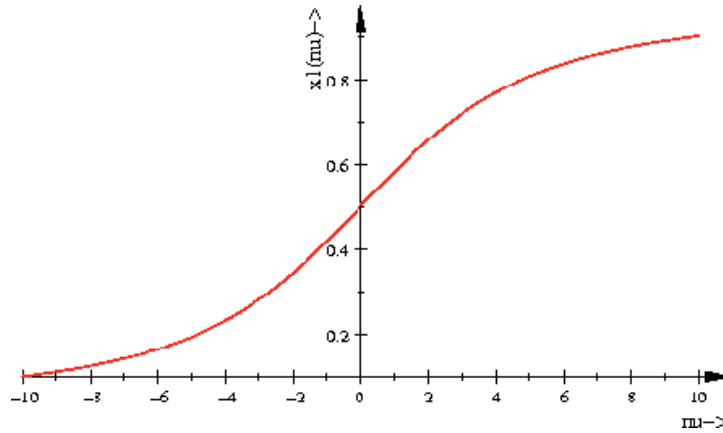
$s(x)$ 'i aşağıdaki gibi seçelim.

$$s(x, v) \equiv e^{v(x-\frac{1}{2})} \quad (4.146)$$

Burada v gerçel sayıdır. Aşağıda verilen eşitliği yazarsak

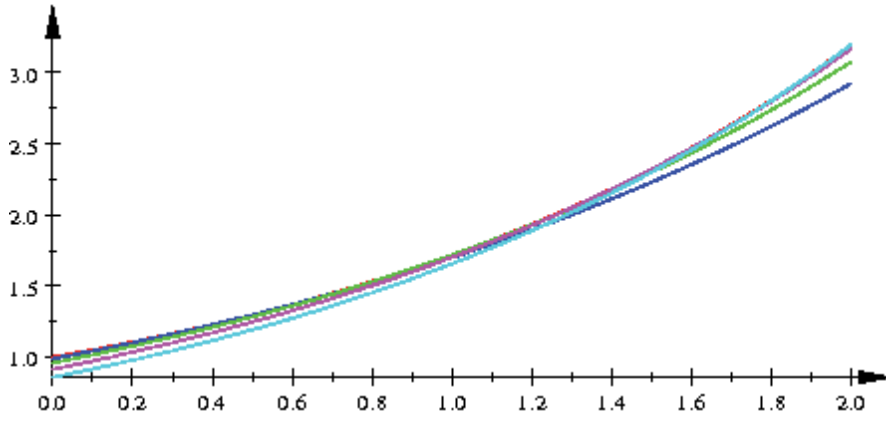
$$\begin{aligned} & \left(x_1 - \frac{1}{2}\right) \int_0^1 dxs(x, v) - \int_0^1 dxs(x, v) \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}\right) \int_0^1 dx e^{v(x-\frac{1}{2})} - \int_0^1 dx e^{v(x-\frac{1}{2})} \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{v}\right) \frac{2}{v} \sinh\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{1}{v} \cosh\left(\frac{v}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.147)$$

v 'nun analitik olarak x_1 türünden yazılması neredeyse olanaksızdır. Ama bu işlevi kullanarak x_1 'in v 'ya karşı grafini Şekil 4.10'da verildiği gibi çizdirebiliriz. Şekilden görüldüğü gibi x_1 değerleri 0 ve 1 arasında değişirken v gerçel ekseninde soldan sağa doğru gider. x_1 0 iken v değeri eksi sonsuza, x_1 1 iken v değeri artı sonsuza karşılık gelir. Bu durum da her x_1 değerine karşılık gelen bir v değeri olduğunu göstermektedir.

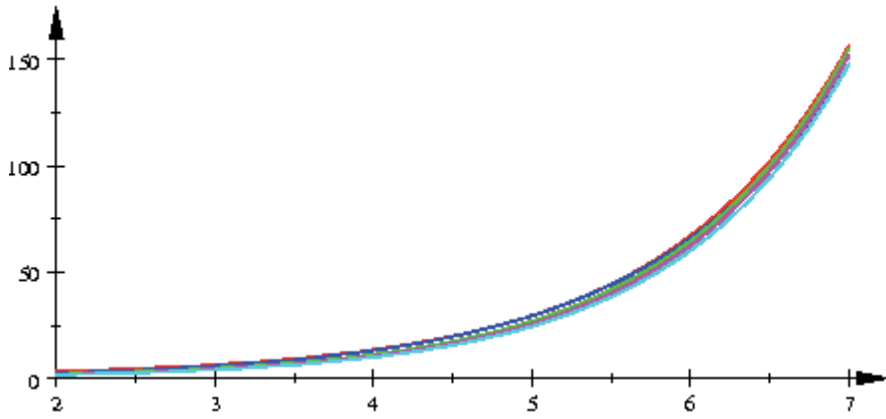


Şekil 4.10: x_1 düğüm noktasının v üstel değiştirgesine göre değişimi.

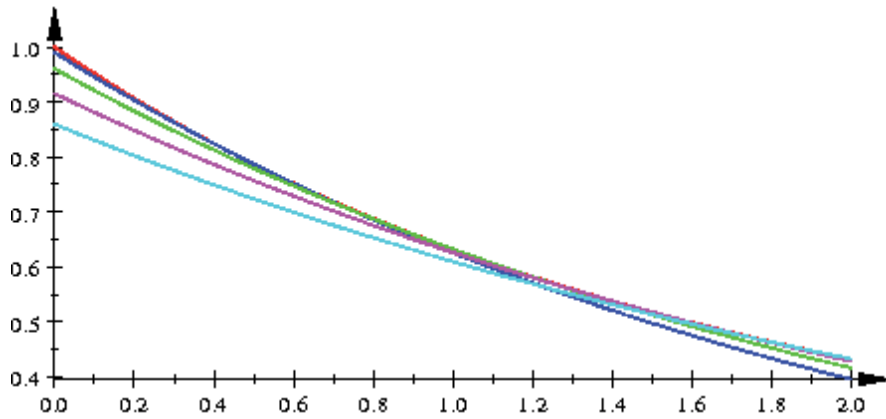
Şekil 4.11, $\exp(\alpha x)$ işlevi için gerçel ve yaklaşık tümlev değerlerini göstermektedir. Gerçek tümlev değeri kırmızı ile gösterilmiştir. Şekilde, yaklaşık tümlevler (4.127) kullanılarak $v = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ değerleri için sırasıyla mavi, yeşil, e atun, açık mavi renklerinde verilmiştir. α değerleri 0 ve 2 arasında değişmektedir. Aynı çizim, Şekil 4.12'de α 'nın 2 ve 7 arasındaki değerleri için verilmektedir. Şekilde, yaklaşık tümlevler (4.127) kullanılarak $v = 5.0, 8.0, 9.0, 10.0$ için sırasıyla mavi, yeşil, e atun, açık mavi renklerinde verilmiştir. Şekillerde x_1 değerleri ilgili v değerlerine göre belirlenmiştir.



Şekil 4.11: $\exp(\alpha x)$ 'in gerçekte ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 0, \dots, 2$).



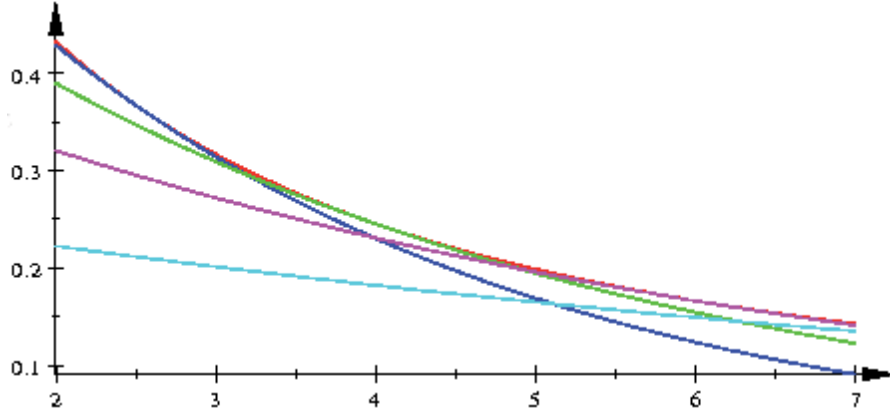
Şekil 4.12: $\exp(\alpha x)$ 'in gerçekte ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 2, \dots, 7$).



Şekil 4.13: $\exp(-\alpha x)$ 'in gerçekte ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 0, \dots, 2$).

Şekillerden de görüldüğü gibi işlevin eğriliği arttıkça ağırlık işlevinde daha büyük bir v değeri kullanmalıyız.

Şekil 4.13 ve Şekil 4.14, $\exp(-\alpha x)$ işlevi için değişik α değerleri ile oluşturulmuştur. Yaklaşık tümlev değerleri (4.127) kullanılarak sırasıyla $v = -0.5, -1.0,$



Şekil 4.14: $\exp(-\alpha x)$ 'in gerçek ve yaklaşık tümlevleri ($\alpha = 2, \dots, 7$).

$-1.5, -2.0$ ve $v = -2.5, -4.0, -6.0, -10.0$ için oluşturulmuştur. Şekillerde x_1 değerleri ilgili v değerlerine göre belirlenmiştir. Buna göre eksi bağımsız değişkenli işlevler için v değıştirgesi eksi olmalıdır ve işlevin eğriligi tekdüze azalarak artarsa, mutlak degerce büyük bir v değıştirgesi kullanılmalıdır.

4.6.4 Elde edilen sonuçlar

Bu bölümde tek düğüm noktası kullanılarak yapılan tümlevlemede daha iyi yaklaşıtımlar elde edebilmek için tümlevlemede kullanılan ağırlığı değıştirmeye çalıştık. Bu durumda bu ağırlığın çarpımsal evriği, tümlevi alınacak işleve çarpım şeklinde katılmış oldu. Tümlevi alınacak işlevin analitikliğinin bozulmaması için, ağırlık işlevi üretici olarak polinom yapılar kullanıldığında, tek düğüm noktasının alabileceği degerler sınırlanmış oldu. Yani alabileceği degerler tümlev aralığının tümünü kapsayamadı. Bu durumda birim ağırlık işlevi dışında bir ağırlık kullanarak düğüm noktasının alabileceği degerlerin aralığını genişletmeye çalıştık. Polinom olmayan yapılar kullanarak bu sorunu çözmeye çalıştık. Üstel ağırlık işlevi kullanımının bu konuda en iyi sonuçları verdiğini gözlemledik.

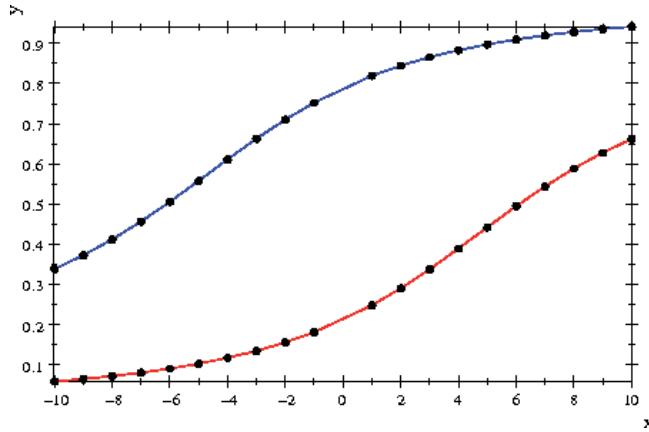
4.7 Üstel Ağırlık İşlevi Kullanarak Tek Düğüm Noktalı Tümlevleme

Önceki bölümlerde, polinom yapısına sahip ağırlıkların düğüm noktasının alabileceği degerleri sınırladığını ve bu sorunun üstel ağırlık işlevleri kullanılarak çözülebileceğini gördük. Bu bölümde ise üstel ağırlık işlevi kullanarak tek düğüm noktalı tümlevleme ile daha detaylı olarak ilgileneceğiz.

4.7.1 Üstel ağırlığın bazı spektral özellikleri

Bir önceki bölümde $\exp(\alpha x)/(\exp(\alpha) - 1)$ şeklindeki üstel ağırlık işlevinin bazı önemli özellikleri olduğunu gördük. Öncelikle, α 'nın uygun seçimiyle $[0, 1]$ aralığında istenilen noktada değer üretilebilir. Üstel ağırlık işlevinin yapısı nedeniyle bir α değerinin karşılık geldiği düğüm noktası tektir.

Ağırlık işlevi üretici uzayı oluştururken yapacağımız işlemlere açıklık getirmek için öncelikle evrensel dizey $X^{(n)}(\alpha)$ 'nın spektral özelliklerine bakacağız. Bu evrensel dizeyin özdeğerlerini gösteren üç gra k vereceğiz. Her özdeğer artan α değerlerine karşılık çizdirilmiş ve $n \times n$ boyutlu dizeyin tüm özdeğerleri aynı gra kte verilmiştir. Şekil 4.15, Şekil 4.16, Şekil 4.17 sırasıyla $n = 2, 3, 4$ boyutlu dizeyler içindir. Şekillerdeki x eksenini α değerlerini, y eksenini özdeğerleri göstermektedir. Şekillerden görüldüğü gibi α artı sonsuza giderken özdeğerler 1'e, α eksi sonsuza giderken özdeğerler 0'a yaklaşmaktadır. Evrensel dizey $X^{(n)}(\alpha)$ 'i oluştururken kullanılan taban işlevleri $u_1(x, \alpha)$,



Şekil 4.15: $n = 2$ için X 'nin özdeğerleri.

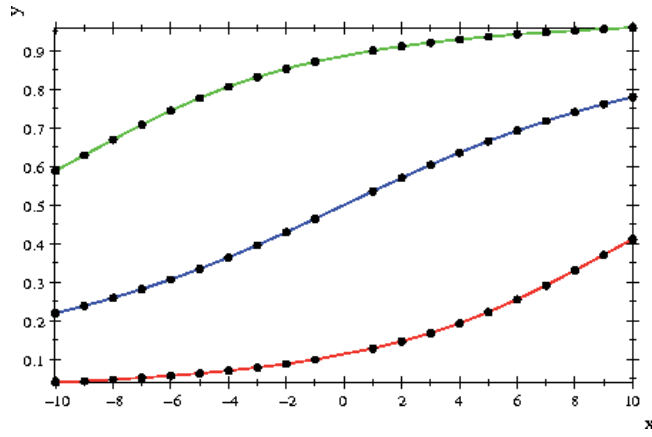
..., $u_n(x, \alpha)$, kuvvet serisi x^0, \dots, x^{n-1} 'in $[0, 1]$ aralığında ve $\exp(\alpha x)/(\exp(\alpha) - 1)$ ağırlığı altında dikleştirilmesi ile elde edilmiştir.

(4.148) ve (4.149)'da verilen tanımları yapalım. Burada $v_i, X^{(n)}(\alpha)$ 'nin özyöneylemidir.

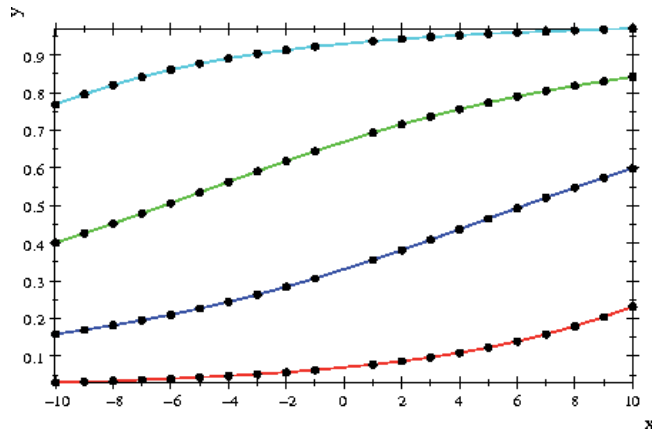
$$p_i^{(\text{eig})}(x, \alpha) \equiv \mathbf{u}^{(n)}(x, \alpha)^T \mathbf{v}_i(\alpha), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.148)$$

$$\mathbf{u}^{(n)T}(x, \alpha) \equiv [u_1(x, \alpha) \dots u_n(x, \alpha)] \quad (4.149)$$

$p_i^{(\text{eig})}(x, \alpha)$ polinomları $[0, 1]$ aralığında ve üstel ağırlık işlevi altında diktir. Fakat bu



Şekil 4.16: $n = 3$ için X 'nin özdeğerleri.

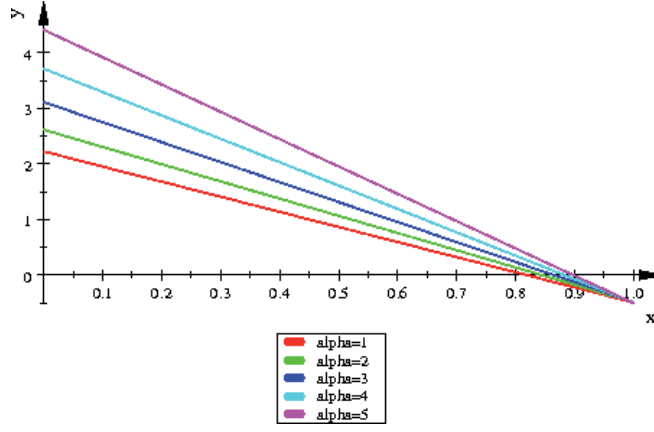


Şekil 4.17: $n = 4$ için X 'nin özdeğerleri.

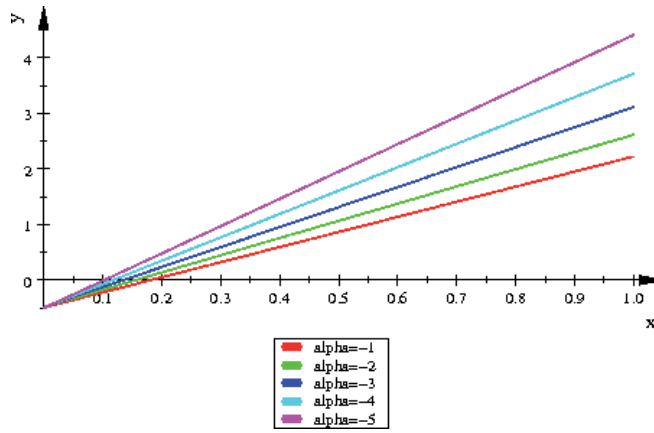
polinomlar $[0, 1]$ aralığında işaret değiştirdiklerinden gerçek ağırlık işlevleri degillerdir. Bu polinomlara “ n 'inci Dereceden Evrensel Özpolinomlar” diyoruz.

Şekil 4.18 $n = 2$ ve değişik α değerleri için evrensel dizinin en küçük özdegerine karşılık gelen özpolinomu göstermektedir. Şekil 4.19 ise aynı işlemi büyük özdeger ve eksi α değerleri için göstermektedir. $n = 2$ olduğundan polinomlar birinci derecedendir ve eksenini 0 ve 1 aralığında keserler. Bu da bu polinomların ağırlık işlevi üretici uzayında olmalarına karşın ağırlık işlevi olmadıklarını doğrular. Bu polinomların eksenini kestikleri nokta artı α değerleri için 1 'e, eksi α değerleri için 0 'a yakındır.

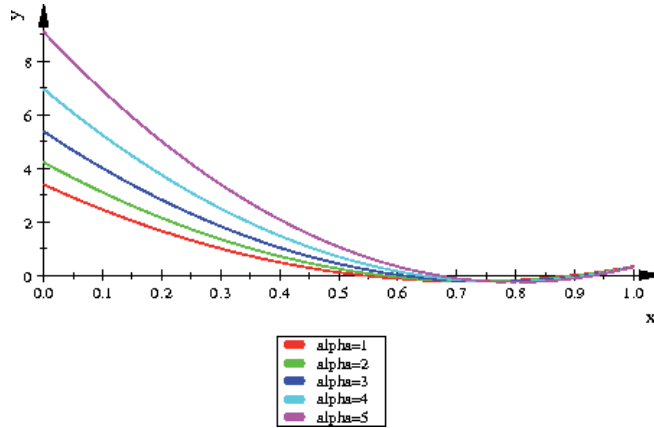
Şekil 4.20 ve Şekil 4.21 $n = 3$ için ve sırasıyla artı ve eksi α değerleri için özpolinomların graflerini vermektedir. Bu durumda polinomların derecesi 2 'dir ve eksenini iki yerde kesmektedir. Bu polinomların da eksenini kestikleri noktalar artı α değerleri için 1 'e, eksi α değerleri için 0 'a yakındır.



Şekil 4.18: $u^{(n)T} \times v$ işlevinin $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ ve $n = 2$ için grafi.

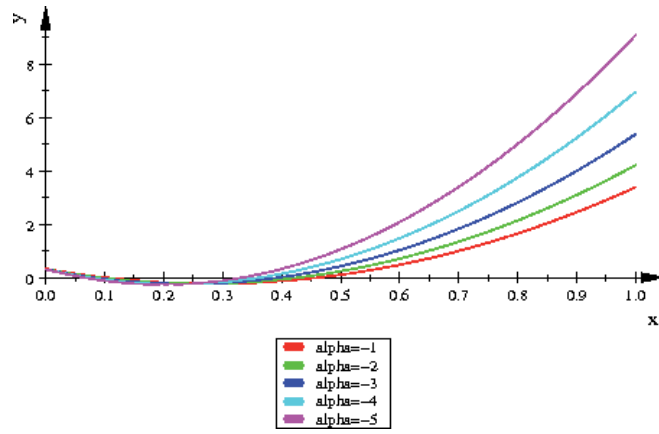


Şekil 4.19: $u^{(n)T} \times v$ işlevinin $\alpha = -1, -2, \dots, -5$ ve $n = 2$ için grafi.

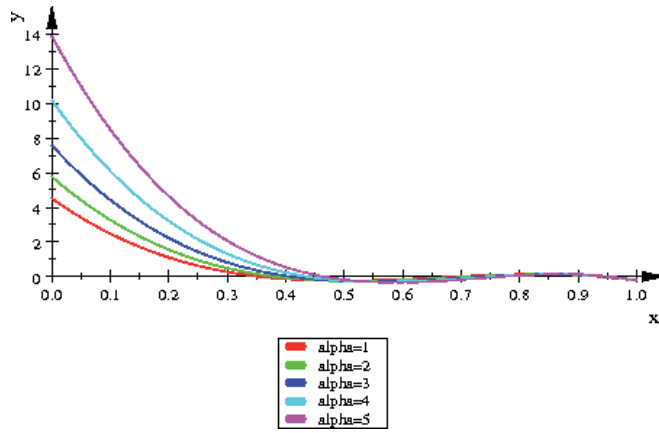


Şekil 4.20: $u^{(n)T} \times v$ işlevinin $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ ve $n = 3$ için grafi.

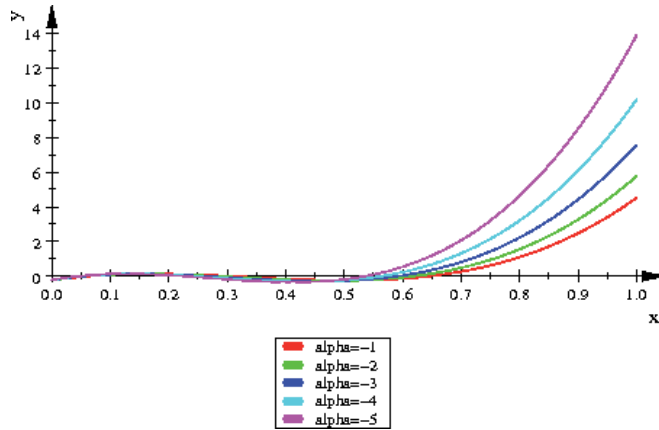
Şekil 4.22 ve Şekil 4.23 benzer durumu $n = 4$ için göstermektedir. Bu durumda eksenleri artı α değerleri için 1'e, eksi α değerleri için 0'a yakın olmak üzere üç noktada kesmektedir. Ayrıca bu kesim noktaları polinomu oluşturmakta kullanılmayan özdeğerlere ait özdeğerlerle ilişkilidir.



Şekil 4.21: $u^{(n)T} \times v$ işlevinin $\alpha = -1, -2, \dots, -5$ ve $n = 3$ için grafi.



Şekil 4.22: $u^{(n)T} \times v$ işlevinin $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ ve $n = 4$ için grafi.



Şekil 4.23: $u^{(n)T} \times v$ işlevinin $\alpha = -1, -2, \dots, -5$ ve $n = 4$ için grafi.

4.7.2 Tek düğüm noktalı durumda birden çok koşul altında üstel ağırlık işlevleri

Daha önceki bölümde ağırlık işlevi üretici altuzayı oluştururken bir koşul kullanmıştık.

Fakat daha iyi sayısal duyarlılık için uzayı oluştururken daha çok koşul kullanılabilir.

İlgilenilen tümlev aşağıdaki yapıdadır.

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^1 dx f(x) \quad (4.150)$$

Daha önceki bölümde $s(x)$ oluşturulurken

$$\int_0^1 dx s(x) (x - x_{nd}) = 0 \quad (4.151)$$

koşulunu kullanmıştık. Burada x_{nd} tümlevi alınacak işlevin değerinin bilindiği noktayı göstermektedir. Yapılan incelemeler sonucunda x_{nd} 'nin alabileceği değerlerin sınırlı olduğu görülmüştür. Ağırlık olarak $\exp(\alpha x)$ işlevi kullanıldığında ise her α değerinin bir x_{nd} değerine karşılık geldiği ve α eksi sonsuza giderken $x_{nd} = 0$ ve α artı sonsuza giderken $x_{nd} = 1$ olduğu belirlenmiştir.

Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım.

$$\int_0^1 dx s(x) (x - x_{nd})^j = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.152)$$

Koşul sayısı m , "Sendelenimsizlik Düzeyi" olarak adlandırılır. İlerleyebilmek için $s(x)$ 'i aşağıdaki yapıda varsayalım.

$$s(x) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} s_j w_e(x, \alpha) u_j(x), \quad w_e(x, \alpha) \equiv \frac{e^{\alpha x}}{e^{\alpha} - 1} \quad (4.153)$$

Burada α bilinmemektedir ve x_{nd} düğüm noktasını $[0, 1]$ aralığında istenilen konuma getirecek şekilde seçilecektir. s_j katsayıları da henüz bilinmemekte ve ilgilenilen uzayın boyutunu göstermektedir. $u_j(x)$ polinomları x^0, x^1, x^2, \dots serisinin $[0, 1]$ aralığında ve üstel ağırlık işlevi $w_e(x, \alpha)$ kullanılarak dik hale getirilmiş halidir.

(4.153)'te verilen $s(x)$ 'i (4.152)'de yerine koyalım. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_j(x) (x - x_{nd})^k \right] s_j = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (4.154)$$

elde edilir. Bu eşitlikler bazı ardışık işlemler ve indirgemeler sonucunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_j(x) x^i \right] s_j = x_{nd} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_j(x) x^{i-1} \right] s_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.155)$$

x^{i-1} işlevi $u_1(x), u_2(x), \dots, u_i(x)$ polinomlarının doğrusal birleşimi olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_i(x) x u_j(x) \right] s_j = x_{nd} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_i(x) u_j(x) \right] s_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.156)$$

elde edilir ve bu eşitlik yerine de $u_i(x)$ işlevlerinin dikliği kullanılarak

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_i(x) x u_j(x) \right] s_j = x_{nd} s_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.157)$$

yazılır. Bu eşitlik,

$$\sum_{j=1}^{m+1} \left[\int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_i(x) x u_j(x) \right] s_j = x_{nd} s_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.158)$$

şeklinde de gösterilebilir. (4.158), aşağıda verildiği gibi düzey cebirsel gösterilimle de yazılabilir.

$$\left(X^{(m)}(\alpha) - x_{nd} I_m \right) s^{(m)} = - \int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_m(x) x u_{m+1}(x) s_{m+1} e_m \quad (4.159)$$

Burada $X^{(m)}(\alpha)$ bağımsız değişkenin düzey gösterilimi ve I_m birim dizeydir. $s^{(m)}$ yöneyinin ögeleri s_1, \dots, s_m yapısındadır. e_m ise m'inci kartezyen birim yöneydir ve m. ögesi 1, diğer ögeleri 0'dır.

x_{nd} düğüm noktası $X^{(m)}(\alpha)$ dizeyinin özdeğerlerinden biri değilse, (4.159)'un sol tarafındaki dizeyin evriği alınabilir. Bu durumda

$$s^{(m)} = - \int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_m(x) x u_{m+1}(x) s_{m+1} \left[X^{(m)}(\alpha) - x_{nd} I_m \right]^{-1} e_m \quad (4.160)$$

elde edilir ve

$$u^{(m)}(x) \equiv [u_1(x) \dots u_m(x)]^T. \quad (4.161)$$

tanımı yapılarak

$$\begin{aligned} P_{pr}(x, \alpha) &\equiv \sum_{i=1}^{m+1} s_i u_i(x) = u^{(m)}(x)^T s^{(m)} + s_{m+1} u_{m+1}(x) \\ &= \left\{ u_{m+1}(x) - \beta_m u^{(m)}(x)^T \left[X^{(m)}(\alpha) - x_{nd} I_m \right]^{-1} e_m \right\} s_{m+1} \end{aligned} \quad (4.162)$$

bulunur. Burada β_m

$$\beta_m \equiv \int_0^1 dx w_e(x, \alpha) u_m(x) x u_{m+1}(x) \quad (4.163)$$

yapısındadır. $P_{pr}(x)$ polinomuna ağırlık üretici uzayın “Birinci Tekil Olmayan Taban Polinomu” denir. Bu polinomun tümlevinin $[0, 1]$ aralığında ve $w_e(x, \alpha)$ ağırlığı altında 1 olmasını sağlayacak şekilde s_{m+1} 'i seçelim. Bu polinomlar, doğru seçilen α değerleri için $(m+1)$ tane doğrusal bağımsız m'inci dereceden polinom oluşturur. Bu da değişmez birim işlevin bu polinomların doğrusal birleşimi olarak yazılabileceğini gösterir. Yani

$$1 = \sum_{i=1}^{m+1} c_i P_{pr}(x, \alpha_i) \quad (4.164)$$

yazılabilir. Doğrusal birleşim katsayıları c_i 'ler (4.164)'ün çözümü ile elde edilir. Bu durumda

$$\int_0^1 dx f(x) \approx \sum_{i=1}^{m+1} c_i \int_0^1 dx P_{pr}(x, \alpha_i) f(x) = \sum_{i=1}^{m+1} c_i \int_0^1 dx S_{pr}(x, \alpha_i) \frac{f(x)}{w_e(x, \alpha_i)},$$

$$S_{pr}(x, \alpha_i) \equiv w_e(x, \alpha_i) P_{pr}(x, \alpha_i) \quad (4.165)$$

yazılabilir. $S_{pr}(x, \alpha_i)$ 'ye ağırlık üretici altuzayın “Birinci Taban İşlevi” denir. Eğer $f(x)/w_e(x, \alpha)$ işlevi için bir düğüm noktalı sendelenimsiz tümlevleme kullanırsak

$$\int_0^1 dx f(x) \approx \left(\sum_{i=1}^{m+1} \frac{c_i}{w_e(x_{nd}, \alpha_i)} \right) f(x_{nd}) \quad (4.166)$$

formülünü elde ederiz. Bu formüle “m’inci dereceden Tek Düğüm Noktalı Birinci Sendelenimsiz Tümlevleme” denir. $f(x_{nd})$ işlevini çarpan toplam, sendelenimsiz tümlevlemenin ağırlık değişmezi olarak kabul edilir. m arttıkça daha yüksek sayısal duyarlılık beklenir.

4.7.3 Sayısal örnekler

[0,1] aralığında tümlevi ile ilgilendığımız işlev $\exp(\beta x)$ olsun. Çizelge 4.4, Çizelge 4.5, Çizelge 4.6 $m = 2$, değişik artı α ve β değerleri için ve sırasıyla $x_{nd} = 0, 0.5, 1$ için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılmasını vermektedir. Çizelge 4.7, Çizelge 4.8, Çizelge 4.9 ise $m = 2$, değişik eksi α ve β değerleri için ve sırasıyla $x_{nd} = 0, 0.5, 1$ için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılmasını vermektedir.

$\exp(\beta x)$ işlevi için elde edilen sonuçlar aşağıda maddeler halinde verilmektedir.

- İyi yaklaşımlar elde edebilmek için α değerleri β değerlerine yakın seçilmelidir.
- Artı β değerleri için, β arttıkça, 1'e yakın x_{nd} değerleri daha iyi sonuçlar üretmektedir.
- Eksi β değerleri için, β mutlak değerce arttıkça, 0'a yakın x_{nd} değerleri daha iyi sonuçlar üretmektedir.

$\sin(\beta x)$ gibi bazı işlevler için uygun α değerleri bulmak kolay değildir. Çizelge 4.10, $\sin(\beta x)$ işlevi için bazı sonuçlar vermektedir.

$\exp(((x - x_d)/\varepsilon)^2)$ Gauss işlevi durumunda, iyi yaklaşım elde etmek için, x_{nd} düğüm noktası x_d 'ye yakın olmalıdır. Fakat ε küçüldükçe, yani işlev x_d değeri etrafında dikleştikçe, iyi yaklaşım elde etmek mümkün olmamaktadır. ε 'un büyük değerleri

Çizelge 4.4: $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 0$ ve artı α ve β degerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev degerlerinin karşılaştırılması.

β	α_1	α_2	α_3	Gerçek Tümlev	Yaklaşık Tümlev	Bagıl Hata
1	0.95	1	1.05	1.718281828	1.718344686	-0.00003658149625
4	3.95	4	4.05	13.39953751	13.40022851	-0.00005156929666
7	6.95	7	7.05	156.5190226	156.5301629	-0.00007117512637
10	9.95	10	10.05	2202.546579	2202.832245	-0.0001296976757

Çizelge 4.5: $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 0.5$ ve artı α ve β degerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev degerlerinin karşılaştırılması.

β	α_1	α_2	α_3	Gerçek Tümlev	Yaklaşık Tümlev	Bagıl Hata
1	0.95	1	1.05	1.718281828	1.718248721	0.00001926757134
4	3.95	4	4.05	13.39953751	13.39914832	0.00002904472514
7	6.95	7	7.05	156.5190226	156.5134321	0.00003571765411
10	9.95	10	10.05	2202.546579	2202.500961	0.00002071152089

için ise, iyi sonuçlar elde etmek mümkündür. Örneğin, $x_d = 0.5$, $\varepsilon = 0.6$ için, eger $x_{nd} = 0.5$ ve α degerleri $-0.03, -3.5, 0.03$ şeklinde seçilirse, $[0,1]$ aralığında yaklaşık tümlev 0.806335056 olarak elde edilir. Bu aralıkta gerçek tümlev degeri 0.8097354431 olduğundan bagıl hata 0.004199380249 'a eşittir.

4.7.4 Özpolinomlar tarafından oluşturulan karakteristik altuzayı

(4.159) $s_{m+1} = 0$ alınarak da çözülebilir. Bu yapırsa

$$\left(X^{(m)}(\alpha) - x_{nd} I_m \right) s^{(m)} = 0 \quad (4.167)$$

elde edilir ve buradan $s^{(m)}$ bulunur. Fakat bu denklemin 0'dan farklı çözümü ancak x_{nd} $X^{(m)}(\alpha)$ dizeyinin spektrumundaysa mümkündür. Bu durumda $s^{(m)}$ evrensel dizeyin x_{nd} özdegerine karşılık gelen özyönevidir. $X^{(m)}(\alpha)$ evrensel dizeyinin özdegerlerine $\xi_i(\alpha)$ ve özyöneylelerine $v_i(\alpha)$ dersek

$$s_i^{(m)} = v_i(\alpha), \quad i = 1, \dots, m \quad (4.168)$$

olur ve bu durumda $m - 1$. dereceden polinomlar olan

$$p_i^{(eig)}(x, \alpha) \equiv s_i^{(m)T} u^{(m)}(x) \quad i = 1, \dots, m \quad (4.169)$$

Çizelge 4.6: $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 1$ ve artı α ve β degerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev degerlerinin karşılaştırılması.

β	α_1	α_2	α_3	Gerçek Tümlev	Yaklaşık Tümlev	Bağıl Hata
1	0.95	1	1.05	1.718281828	1.718354118	-0.00004207108447
4	3.95	4	4.05	13.39953751	13.39988794	-0.00002615242243
7	6.95	7	7.05	156.5190226	156.5224553	-0.00002193151009
10	9.95	10	10.05	2202.546579	2202.573521	-0.00001223178381

Çizelge 4.7: $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 0$ ve eksi α ve β degerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev degerlerinin karşılaştırılması.

β	α_1	α_2	α_3	Gerçek Tümlev	Yaklaşık Tümlev	Bağıl Hata
-1	-0.95	-1	-1.05	0.6321205588	0.6321460318	-0.00004029770964
-4	-3.95	-4	-4.05	0.2454210903	0.2454284272	-0.00002989507438
-7	-6.95	-7	-7.05	0.142726874	0.1427299585	-0.00002161133314
-10	-9.95	-10	-10.05	0.09999546001	0.0999969181	-0.00001458163251

polinomlarını yazabiliriz. Bu polinomlar evrensel dizey $X^{(m)}(\alpha)$ 'in özyöneyleleri ile ilgili olduklarından bunlara “Özpolinomlar” diyoruz. İlerleyebilmek için

$$S_i^{(\text{eig})}(\mathbf{x}, \alpha) \equiv p_i^{(\text{eig})}(\mathbf{x}, \alpha) \quad i = 1, \dots, m \quad (4.170)$$

tanımını yapalım. Bu tanımda verilen işlevlere “Öztaban İşlevleri” adı verilir.

m dogrusal bagımsız özyöneyleyin dogrusal birleşimi, birim değışmez ağırlık işlevini oluşturmak için kullanılamaz. Bunun nedeni herbirinin farklı bir özdegere, dolayısıyla farklı bir düğüm noktasına karşılık gelmesidir. Bu durumu çözmek için şu yolu izleyebiliriz: Bir x_{nd} degeri alıp onu $X(\alpha_1)$ dizeyinin en büyük özdegeri yapacak şekilde α_1 belirlenir. Daha sonra aynı x_{nd} degerini $X(\alpha_2)$ dizeyinin ikinci en büyük özdegeri yapacak şekilde α_2 belirlenir. Bu işlem bu şekilde m adım devam ettirilir ve bu özdegerlere karşılık gelen $v(\alpha_1)_1, v(\alpha_2)_2, \dots, v(\alpha_i)_i, \dots, v(\alpha_m)_m$ özyöneyleleri bulunur. Bu özyöneylelerin dogrusal bagımsız olduğu beklenmektedir. Bu durumda aşğıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$p_i^{(\text{eig})}(\mathbf{x}, \alpha_i) \equiv \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, \alpha_i)^T \mathbf{v}(\alpha_i)_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.171)$$

$$1 = \sum_{i=1}^m c_i p_i^{(\text{eig})}(\mathbf{x}, \alpha_i) \quad (4.172)$$

Çizelge 4.8: $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 0.5$ ve eksi α ve β degerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev degerlerinin karşılaştırılması.

β	α_1	α_2	α_3	Gerçek Tümlev	Yaklaşık Tümlev	Bagıl Hata
-1	-0.95	-1	-1.05	0.6321205588	0.6321087504	0.00001868058994
-4	-3.95	-4	-4.05	0.2454210903	0.2454147695	0.00002575496297
-7	-6.95	-7	-7.05	0.142726874	0.1427223402	0.00003176559685
-10	-9.95	-10	-10.05	0.09999546001	0.09999056797	0.00004892255402

Çizelge 4.9: $\exp(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 1$ ve eksi α ve β degerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev degerlerinin karşılaştırılması.

β	α_1	α_2	α_3	Gerçek Tümlev	Yaklaşık Tümlev	Bagıl Hata
-1	-0.95	-1	-1.05	0.6321205588	0.6321460014	-0.00004024955129
-4	-3.95	-4	-4.05	0.2454210903	0.2454334784	-0.00005047699139
-7	-6.95	-7	-7.05	0.142726874	0.1427365128	-0.00006753300603
-10	-9.95	-10	-10.05	0.09999546001	0.1000040009	-0.00008541276607

(4.172) çözümlenerek c_i katsayıları bulunur. Bu durumda ilgilenilen tümlev aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx f(x) &\approx \sum_{i=1}^m c_i \int_0^1 dx p_i^{(\text{eig})}(x, \alpha_i) f(x) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \int_0^1 dx S_i^{(\text{eig})}(x, \alpha_i) \frac{f(x)}{w_e(x, \alpha_i)} \end{aligned} \quad (4.173)$$

Burada $S_i^{(\text{eig})}(x, \alpha_i) = p_i^{(\text{eig})}(x, \alpha_i) w_e(x, \alpha_i)$ şeklindedir. (4.173)'ün sağ yanına tek düğüm noktalı sendelenimsiz tümlevleme uygularsak

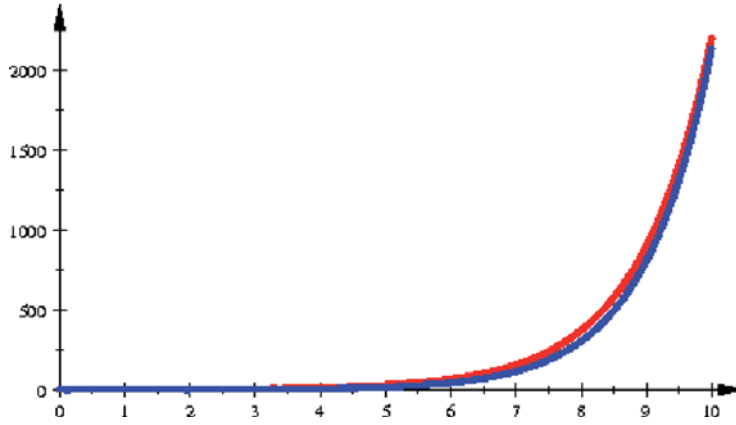
$$\int_0^1 dx f(x) \approx \left(\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{w_e(x_{nd}, \alpha_i)} \right) f(x_{nd}) \quad (4.174)$$

bagıntısını üretiriz. Bu bagıntıya “Özpolinomlara dayalı m’inci dereceden tek düğüm noktalı sendelenimsiz tümlevleme” denir. Şekil 4.24, $\exp(\beta(x))$ işlevi için bu yöntemle elde edilen yaklaşık tümlev degerleri ile gerçek tümlev degerlerinin karşılaştırmasını vermektedir. x eksenini β degerlerini, y eksenini tümlev degerlerini vermektedir. Şekilde, birinci α değıştirgesi 2 ve ikinci α değıştirgesi 21.98 olarak alınmıştır. x_{nd} degeri 0.84463397 ve bu deger her α degeri için X dizeyinin bir özdegeridir. Bu sonuçlar oldukça iyi olmasına karşın, 0.07, 0.6 gibi başka x_{nd} degerleri ile daha kötü sonuçlar elde edilmiştir. Bu da, seçilecek α değıştirgesinin ve x_{nd} düğüm noktasının tümlevi alınacak işlevden işleve değışmesi gerektiğini göstermektedir. Tekdüze artan işlevler için

Çizelge 4.10: $\sin(\beta x)$ işlevinin $x_{nd} = 1$ ve değişik α ve β değerleri için gerçek ve yaklaşık tümlev değerlerinin karşılaştırılması.

β	α_1	α_2	α_3	Gerçek Tümlev	Yaklaşık Tümlev	Bagıl Hata
1	1.01	1.2	1.9	0.4596976941	0.4596321427	0.00014259671
2	0.2	0.45	1.0	0.7080734183	0.701230198	0.009664563104
3	-5.95	-1.005	0.1	0.6633308322	0.665693645	0.003562042

1'e yakın, tekdüze azalan işlevler için 0'e yakın x_{nd} değerleri ile daha iyi sonuçlar elde edilir.



Şekil 4.24: İkinci dereceden özpolinomlara dayalı sendelenimsiz tümlevleme.

4.7.5 Üstel ağırlık kullanılarak tek düğüm noktalı tümlevlemede elde edilen sonuçlar

Bu çalışmada üstel ağırlık işlevi kullanarak "m'inci dereceden tek düğüm noktalı sendelenimsiz tümlevleme yöntemi" geliştirmiş olduk. Bu yöntemde, derece m arttıkça daha iyi sayısal duyarlılık beklenmektedir. Fakat m arttıkça uygun α değıştirgeleri bulmak güçleşmektedir. Bunun nedeni, α değıştirgelerinin tümlevi alınacak işleve bağımlı olmasıdır. Elde edilen sonuçlar maddeler halinde aşağıdaki gibi verilebilir:

- $\exp(\beta x)$ işlevinin, tek düğüm noktası kullanarak $[0,1]$ aralığında tümlevini bulmaya çalışırken, iyi bir yaklaşım elde etmek için üstel ağırlık işlevinde bulunan α değeri β değeriye yakın seçilmelidir.
- Artı β değeri için, β değeri arttıkça, 1'e yakın x_{nd} değeri daha iyi sonuçlar vermektedir.

- Eksi β degerleri için, β mutlak degerce arttıkça, 0'a yakın x_{nd} degerleri daha iyi sonuçlar vermektedir.
- Gauss işlevi $\exp(((x - x_d)/\varepsilon)^2)$ için ise , iyi bir yaklaşım elde etmek x_{nd} degeri x_d degerine yakınsa mümkündür.
- Ayrıca bu çalışmada “özpolinomlara dayalı m'inci dereceden tek düğüm noktalı sendelenimsiz tümlevleme yöntemi”de geliştirilmiştir. Yöntemle daha iyi duyarlılıkta sonuçlar elde edebilmek için tümlevli alınacak işleve uygun x_{nd} ve α değıştirgeleri belirlenmelidir. tekdüze artan işlevler için 1'e yakın, tekdüze azalan işlevler için 0'e yakın x_{nd} degerleri ile daha iyi sonuçlar elde edilir.

Böylece, bu çalışmada, tek düğüm noktalı sendelenimsiz tümlevleme yönteminin temel noktaları belirlenmiş olmuştur.

4.8 Çok Düğüm Noktalı Durumda Birden Çok Koşul Altında Ağırlık İşlevi Üreticileri

Bu altbölümde de aşağıda verilen tümlevle ilgileneceğiz.

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^1 dx f(x) \quad (4.175)$$

İki düğüm noktalı sendelenimsiz tümlevleme yöntemi oluşturabilmek için aşağıdaki koşulları gözönüne alacağız.

$$w_1 + w_2 = \tilde{\mu}_0, \quad w_1x_1 + w_2x_2 = \tilde{\mu}_1, \quad w_1x_1^2 + w_2x_2^2 = \tilde{\mu}_2, \quad w_1x_1^3 + w_2x_2^3 = \tilde{\mu}_3 \quad (4.176)$$

Burada $\tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3$ bilinmeyen ağırlık işlevinin beklemleridir. Bu koşullar homojen olmadığından, doğrudan ağırlık işlevi üretici altuzayı oluşturmakta kullanılamazlar. Fakat bunlar yerine, bu altuzayı oluşturmak için aşağıda verilen koşulları kullanabiliriz.

$$\begin{aligned} (w_1x_1 + w_2x_2) \tilde{\mu}_0 - (w_1 + w_2) \tilde{\mu}_1 &= 0, \\ (w_1x_1^2 + w_2x_2^2) \tilde{\mu}_0 - (w_1 + w_2) \tilde{\mu}_2 &= 0, \\ (w_1x_1^3 + w_2x_2^3) \tilde{\mu}_0 - (w_1 + w_2) \tilde{\mu}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.177)$$

Bu durumda, Hilbert uzayında yukarıda verilen 3 koşulu sağlayan bir işlev bulmaya çalışacağız. Eger bu işleve $s(x)$ dersek ve aşağıdaki formda olduğunu varsayarsak

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j \quad (4.178)$$

bu durumda beklemler

$$\tilde{\mu}_j \equiv \int_0^1 dx s(x) x^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.179)$$

olurak bulunur ve

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa_k}{j+1} - \frac{1}{j+k+1} \right) s_j = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.180)$$

yazabiliriz. Bu eşitlikteki κ_k

$$\kappa_k \equiv \frac{w_1 x_1^k + w_2 x_2^k}{w_1 + w_2}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.181)$$

yapısındadır. (4.180), s_0 , s_1 ve s_2 'yi geri kalan s_i katsayıları türünden yazmamızı sağlar ve böylece 3×3 'lük bir doğrusal denklem kümesi elde ederiz. $s(x)$ işlevi

$$s(x) = \sum_{j=3}^{\infty} s_j p_j(x, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \quad (4.182)$$

olarak yazılabilir. Buradaki $p_j(x, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ polinomu x üzerinden j inci derecedendir. Bu polinomun açık hali aşağıda verilmektedir.

$$p_j(x, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = x^j + e_1^{(3)T} A^{-1} r_j + e_2^{(3)T} A^{-1} r_j x + e_3^{(3)T} A^{-1} r_j x^2, \quad j = 3, 4, 5, \dots \quad (4.183)$$

Burada A ve r_j

$$A \equiv \begin{bmatrix} \kappa_1 - \frac{1}{2} & \frac{\kappa_1}{2} - \frac{1}{3} & \frac{\kappa_1}{3} - \frac{1}{4} \\ \kappa_2 - \frac{1}{3} & \frac{\kappa_2}{2} - \frac{1}{4} & \frac{\kappa_2}{3} - \frac{1}{5} \\ \kappa_3 - \frac{1}{4} & \frac{\kappa_3}{2} - \frac{1}{5} & \frac{\kappa_3}{3} - \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad r_j \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{j+2} - \frac{\kappa_1}{j+1} \\ \frac{1}{j+3} - \frac{\kappa_2}{j+1} \\ \frac{1}{j+4} - \frac{\kappa_3}{j+1} \end{bmatrix}, \quad j = 3, 4, 5, \dots \quad (4.184)$$

yapısındadır. $e_1^{(3)T}$, $e_2^{(3)T}$, ve $e_3^{(3)T}$ ise altindislerinin bulunduğu konumdaki öğeleri 1, diğer öğeleri 0 olan yöneylerdir. (4.183)'de bulunan polinomların katsayıları bu denklemde verilen polinomun artılığını belirler. Çalışmamızda tüm katsayıların artı olduğu durumla ilgileneceğiz. Bu durumda aşağıda verilen eşitsizlikler yazılabilir.

$$e_1^{(3)T} A^{-1} r_j > 0, \quad e_2^{(3)T} A^{-1} r_j > 0, \quad e_3^{(3)T} A^{-1} r_j > 0, \quad j = 3, 4, 5, \dots \quad (4.185)$$

Bu eşitsizlikler, aşağıda verilen eşitliklere dönüştürülebilir.

$$e_1^{(3)T} A^{-1} r_j = c_{j,1}^2, \quad e_2^{(3)T} A^{-1} r_j = c_{j,2}^2, \quad e_3^{(3)T} A^{-1} r_j = c_{j,3}^2, \quad j = 3, 4, 5, \dots \quad (4.186)$$

c simgeleri gerçel sayılardır. (4.186) kullanılarak κ_1 , κ_2 , ve κ_3 terimleri, c katsayıları türünden bulunabilir. Bu durumda MuPAD kullanılarak, p_3 polinomu için, κ 'lar aşağıda verildiği gibi bulunmuştur. Burada $c_{3,2}^2$ katsayısı $\frac{5}{7}$ değerini alamamaktadır.

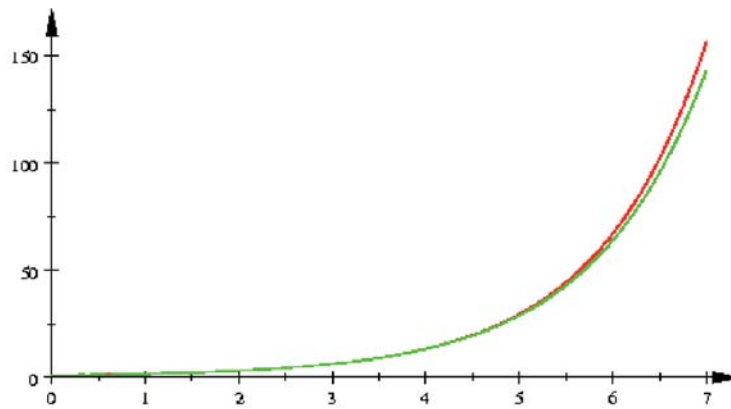
$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{30c_{3,1}^2 + 20c_{3,2}^2 + 15c_{3,3}^2 + 12}{60c_{3,1}^2 + 30c_{3,2}^2 + 20c_{3,3}^2 + 15}, \\ \kappa_2 &= \frac{20c_{3,1}^2 + 15c_{3,2}^2 + 12c_{3,3}^2 + 10}{60c_{3,1}^2 + 30c_{3,2}^2 + 20c_{3,3}^2 + 15}, \\ \kappa_3 &= \frac{105c_{3,1}^2 + 84c_{3,2}^2 + 70c_{3,3}^2 + 60}{420c_{3,1}^2 + 210c_{3,2}^2 + 140c_{3,3}^2 + 105}\end{aligned}\quad (4.187)$$

(4.181) ve (4.187)'yi birlikte kullanarak w_1, w_2, x_1, x_2 değerlerini $c_{3,1}^2, c_{3,2}^2, c_{3,3}^2$ cinsinden bulabiliriz. Bunu yapabilmek için bir denkleme daha gereksinim vardır. Bu da $w_1 + w_2 = 1$ eşitliğidir. $c_{3,1}^2, c_{3,2}^2, c_{3,3}^2$ terimlerine değişik değerler vererek değişik w_1, w_2, x_1, x_2 değerleri elde ederiz. $f(x)$ işlevinin yaklaşık tümlev denklemi olan

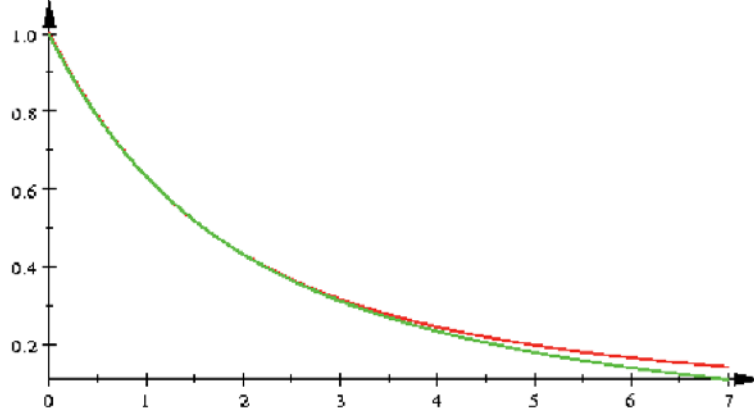
$$\int_0^1 f(x) dx \approx w_1 \frac{f(x_1)}{p_3(x_1)} + w_2 \frac{f(x_2)}{p_3(x_2)} \quad (4.188)$$

denkleminde bu değerler kullanılarak yaklaşık tümlev bulunmuş olur.

Örneğin, $c_{3,1}^2 = 1, c_{3,2}^2 = 0.1, c_{3,3}^2 = 0.1$ seçilirse, $w_1 = 0.427171807, w_2 = 0.572828193, x_1 = 0.2305934636, x_2 = 0.8209214896$ bulunur. $\exp(\alpha x)$ işlevinin bu w_1, w_2, x_1, x_2 değerleri ile elde edilen yaklaşık tümlevi ile gerçek tümlevinin karşılaştırılması Şekil 4.25'te verilmektedir. Şekil 4.26'da ise aynı karşılaştırma $\exp(-\alpha x)$ işlevi için verilmektedir. Bu şekillerde, α değerleri 0 ve 7 arasındadır.



Şekil 4.25: 2 noktalı durumda $\exp(\alpha x)$ işlevinin gerçek ve yaklaşık tümlevleri.



Şekil 4.26: 2 noktalı durumda $\exp(-\alpha x)$ işlevinin gerçek ve yaklaşık tümlevleri.

0'dan büyük başka $c_{3,1}^2, c_{3,2}^2, c_{3,3}^2$ değerleri için de benzer sonuçlar elde edilmiştir. $n = 2$ nokta yerine daha fazla nokta alınarak daha iyi sonuçlar elde edilebilir. Çalışma $n = 3$ ve $n = 5$ için de yapılmış ve gerçekten de sonuçların iyileştiği gözlemlenmiştir.

Oluşturulan yöntemi n nokta için genelleştirelim. Bu durumda aşağıda verilen tanımlar yapılabilir.

$$\kappa_i = \frac{w_1 x_1^i + w_2 x_2^i + \dots + w_n x_n^i}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \quad 1 \leq i \leq 2n - 1 \quad (4.189)$$

$$p_{2n-1} = x^{2n-1} + \sum_{i=1}^{2n-1} e_i^T A^{-1} r x^{i-1} \quad (4.190)$$

Burada A dizeyi $2n - 1 \times 2n - 1$ boyutundadır ve açık durumu

$$A_{ik} = \frac{\kappa_i}{k} - \frac{1}{i+k}, \quad 1 \leq i \leq 2n - 1, \quad 1 \leq k \leq 2n - 1 \quad (4.191)$$

yapısındadır. $2n - 1$ boyutundaki r yöneyinin açık durumu ise

$$r_i = \frac{1}{j+i+1} - \frac{\kappa_i}{j+1}, \quad 1 \leq i \leq 2n - 1, \quad j = 3, 4, 5, \dots \quad (4.192)$$

gibidir. $n = 2$ 'de olduğu gibi burada da p_{2n-1} polinomunun artı olmasını güvence altına almak için $e_i^T A^{-1} r$ terimleri artı olmalıdır. Bu ifadeleri c_i 'ler reel olmak üzere c_i^2 'lere eşitlersek κ_i değerlerini c_i^2 'ler cinsinden bulabiliriz. $s(x)$ ağırlık işlevleri normalize edilmiş olduklarından

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \quad (4.193)$$

yazabiliriz. Bu eşitliği ve (4.189)'u kullanarak $w_1, \dots, w_n, x_1, \dots, x_n$ degerlerini elde edip, bu degerleri de

$$\int_0^1 f(x)dx \approx w_1 \frac{f(x_1)}{p_{2n-1}(x_1)} + w_2 \frac{f(x_2)}{p_{2n-1}(x_2)} + \dots + w_n \frac{f(x_n)}{p_{2n-1}(x_n)} \quad (4.194)$$

formülü ile $f(x)$ işlevinin yaklaşık tümlevini bulmakta kullanabiliriz. Bu durumda, n arttıkça ortaya çıkan denklemlerin çözülememesi sorunu ortaya çıksa da, küçük n degerlerinden gözlemlendiği gibi bu sorunun çözülmesi durumunda oldukça iyi sonuçlar elde edilmesi beklenmektedir.

5. SONUÇLAR

1. Bu tezde, işlevin analitik yapısının bilinmediği, yalnızca bazı noktalarda değerlerinin bilindiği durumlar için, bilinen bu değerlerden işlev elde edebilmek amacıyla, YBMG ve Değişmezlik Ölçeni Eniyilemesi ile etkin bir yöntem oluşturulmaya çalışılmıştır. Yöntem oluşturulurken, YBMG ile aramakta ya da kurmakta olduğumuz işlevin bu uzaydaki taban işlevlerinin bir doğrusal birleştirimi olarak anlatılabileceği öngörülmüştür. Sözkonusu olan taban işlevleri ise öncelikle sayıları veri çokluları sayısıyla tutarlı olan Lagrange çokterimlileri olarak seçilmiştir. Daha sonra, bu doğrusal birleştirim katsayıları, doğrusal birleştirmenin YBMG'ndeki değişmezlik ölçenini en büyük kılacak biçimde seçilmiştir. Değişik türde işlevler için yapılan sınamalar veri takımı verilen işlevin yeterince düzgün olması durumunda işleve, belli bir salınım içinde, yaklaşabilen sonuçlar alınabileceği gözlenmiştir. İşlev düzgünleştikçe de salınım genliğinin çok çok azalabildiği saptanmıştır. Bu durumda elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanan kesimlerle verilmektedir:

- Yeni YBMG yönteminde üretilen $f^{(m)}(x)$ çokterimlisi bir değişmez işlev egrisini taban alıp onun altıyla üstü arasında salınmaktadır. Uygulamalar 1 değişkenli durum için gerçekleştirildiyse de çok değişkenli durumlara geçildiğinde de bu tür davranışla karşılaşılacağı düşünülmektedir. Burada sözü edilen değişmez işlevin egrisi ilgilenilen işlevin egrisini kesmektedir.
- Ilgilenilen işlev ne kadar değişmez nitelikteyse göreceli yanılğı da o kadar 0'a yakın olmaktadır.
- Ilgilenilen işlevin değişmezlik niteligini arttırmak için evriküstel (ing: logarithm), kökalma, ve bunlara benzer işlevler aracılığıyla dönüşümler tanımlamak ve sonra eniyilemeli YBMG ile yaklaştırmak sonra da ilk baştaki işleve dönmek olanaklı görünmektedir. Bu durum çok değişkenli işlevler için de geçerli görünmektedir.

- Bu yeni eniyilemeli YBMG için m degerinin çok yükseltilmesine gerek olmadığı, yükseltildikçe göreceli yanılığda azalma olabilecegi, belirli ve sonlu bir m degeri için en iyi göreceli yanılığ degeri elde edilecegi gözlemlenmiştir.
 - Ilgilenilen işlevin açık anlatımı bilindiğinde tanımı yapılabilen göreceli yanılığ degerinin, işlevin açık anlatımı değil de verilerle verilmesi gündemde olduğunda nasıl tanımlanacağı burada açık bir soru olarak kalmıştır.
 - Çalışmada ayrıca, verilerin dördülden sapma göreceli degerinin nasıl belirlenecegi anlatılmaktadır.
2. Yapılan çalışmalar bir önceki kesimde anlatılan salınımın, aslında, çokterimli içdegerbiçiminde Runge olayı diye bilinen olgunun YBMG'ne yansması olduğu yorumunu getirmiştir. Hem bu durumun hem de işlevin düz olma gereksiniminin getirdiği kısıtlamadan kaçınmak için Lagrange çokterimlilerinin yerine daha etkin bir taban takımı oluşturmunun yerinde olacağı savını gündeme getirmiştir. Runge olayından kaçınmanın en iyi yollarından birinin altkesimsel (ing: spline) işlevler kullanımı olması bizi çalışmada bu yapıda işlev oluşturmuna yönlendirmiştir. Taban işlevleri olarak, dogrusal altkesimsel taban işlevleri kullanılmış ve veri takımından bir işlev oluşturmamızı sağlayan etkin bir yöntem elde edilmiştir.
3. Dogrusal altkesimsel taban işlevleri kullanılarak elde edilen işlev oluşturma yöntemi, düzgün olmayan ızgara yapıları için de geometrik dönüşüm kullanılarak uygulanmıştır. Düzgün olmayan yapıları düzgün duruma getirmek için dikdörtgenleştirme dönüşümü kullanılmıştır. Bu dönüşümde, yamuk bir geometriye sahip bölge dikdörtgen hale getirilmeye çalışılmıştır. Böylece önce düzgün geometriye sahip yapılar için kullanılan yöntemle bir işlev elde edilmiş, daha sonra geometrik dönüşümlerle bu yöntem düzgün olmayan yapılara da aktarılmaya çalışılmıştır. Bazı durumlarda, örneğin verilerin dağılımı çok bozuk değilse, bu yöntemin oldukça iyi işlediği görülmüştür.
4. Tezde, verilen bir deger takımından türev üretimi ile de ilgilenilmiş ve ilgili göre türev bağıntıları oluşturulmuştur. Bu bağıntılardan yaklaşık olarak da olsa göre türev belirlemesi olanaklı olup aynı aralıkta işlev degeri bilinen nokta sayısı arttıkça ve veri takımının üretildiği işlev yeterince düzgünse oldukça iyi duyarlılıkta sonuçlar elde edilebilmektedir. Yapılan sayısal çalışmalara göre, türev degerlerinin gerçek işlevin türev degerlerine yeterince yakın olması için her boyutta işlevin derecesinden daha fazla noktada işlevin degerinin bilinmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

5. Tezde ayrıca, işlevin analitik yapısının bilinmediği, yalnızca bazı noktalardaki işlev değerlerinin verildiği durumlarda bu işlevin tümlevinin Sendelenimsizlik Yaklaşımını kullanılarak nasıl bulunabileceği incelenip, bir yöntem oluşturulmuştur. Evrensel düzeyin özdeğerlerinin yerlerinin değiştirilebilmesi için odaklayıcı ağırlık işlevi kullanılabileceği belirlenmiştir.
6. Bir düğüm noktalı durumda (x_{nd} düğüm noktasını simgelesin), tümlevlemeyi daha etkin hale getirebilmek için ağırlık işlevi üreticileri ile ilgilenilmiştir. Bu durumda çok terimli yapıda ağırlık işlevi üreticileri kullanıldığında tümlev alınırken kullanılan düğüm noktasının alabileceği değerlerin tüm tümlevleme aralığını kapsayamadığı belirlenmiştir. Üstel yapıdaki ağırlık işlevi üreticileri kullanılarak bu sorun çözümlenmeye çalışılmış ve oldukça iyi sonuçlar elde edilerek tüm tümlevleme aralığının kapsanması sağlanmıştır. Bu durumda ağırlık üretici olarak kullanılan $\exp(\alpha x)$ işlevinin yapısında bulunan her α parametresine bir düğüm noktası karşılık gelmektedir. Örneğin α parametresi $-\infty$ 'a giderken düğüm noktasının alabileceği değerler 0'a, α parametresi $+\infty$ 'a giderken düğüm noktasının alabileceği değerler 1'e yaklaşmaktadır.
7. Üstel ağırlık işlevinin bu getirisini kullanarak "m'inci dereceden tek düğüm noktalı sendelenimsiz tümlevleme yöntemi" geliştirilmiştir. Bu yöntemde derece m arttıkça daha iyi sayısal duyarlılık beklenmektedir. Fakat m arttıkça uygun α parametreleri bulmak güçleşmektedir, çünkü α parametreleri tümlevi alınacak işleve bağlıdır. Örneğin, $\exp(\beta x)$ işlevinin, tek düğüm noktası kullanarak $[0,1]$ aralığında tümlevi bulunacaksa, iyi bir yaklaşım elde etmek için üstel ağırlık işlevinde bulunan α değeri β değerine yakın seçilmelidir. Ayrıca, artı β değerleri için, β değeri arttıkça, 1'e yakın x_{nd} değerleri daha iyi sonuçlar vermektedir. Eksi β değerleri için ise, β mutlak değerce arttıkça, 0'a yakın x_{nd} değerleri daha iyi sonuçlar vermektedir. Gauss işlevi $\exp(-((x - x_d)/\varepsilon)^2)$ için, iyi bir yaklaşım elde etmek x_{nd} değeri x_d değerine yakınsa mümkündür.
8. Ayrıca, "Özpolinomlara Dayalı m'inci Dereceden Tek Düğüm Noktalı Sendelenimsiz Tümlevleme Yöntemi" adı verilen bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemle daha iyi duyarlılıkta sonuçlar elde edebilmek için tümlevi alınacak işleve uygun x_{nd} ve α parametreleri belirlenmelidir. Tekdüze artan işlevler için 1'e yakın, tekdüze azalan işlevler için 0'a yakın x_{nd} değerleri ile daha iyi sonuçlar elde edilmektedir. Sonuç

olarak, tek düğüm noktalı sendelenimsiz tümlevleme yönteminin temel noktaları belirlenmiştir.

9. Çok düğüm noktalı durumlarda da sendelenimsizlik yöntemine dayalı tümlevleme yapabilmek için birden fazla koşul altında ağırlık işlevi üreticileri kullanılarak bir yöntem geliştirilmiştir.

Burada sıralanmış bu olguların tümü özgün olup ilk kez bir tezde gerçekleştirilmiştir. Bu yapıyla tez, bir bilgisayarım yöntembilimsel (ing: computational methodology) çalışma durumundadır.

KAYNAKLAR

- [1] Sobol, I.M., 1993. Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *MMCE*, 1, 407.
- [2] Sobol, I.M., 2003. Theorems and examples on high dimensional model representations, *Reliability Engineering and System Safety*, 79, 187–193.
- [3] Rabitz, H., Alis, O.F., Shorter, J. ve Shim, K., 1999. Efficient Input-Output Model Representations, *Computer Phys.Comm.*, 117, 11–20.
- [4] Rabitz, H. ve Alis, O.F., 1999. Additive and Multiplicate High Dimensional Representation General Foundations of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem*, 25, 197–233.
- [5] Rabitz, H. ve Alis, O.F., 2001. Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem*, 29, 127–142.
- [6] Li, G., Rosenthal, C. ve Rabitz, H., 2001. High Dimensional Model Representations, *J. Phys. Chem. A*, 105, 7765–7777.
- [7] Li, G., Wang, S.W., Rosenthal, C. ve Rabitz, H., 2001. High Dimensional Model Representations Generated from Low Dimensional Data Samples. I. Imp-Cut-HDMR, *J. Math. Chem*, 30, 1–30.
- [8] Li, G., Artamonov, M., Rabitz, H., Wang, S.W., Georgopoulos, P.G. ve Demiralp, M., 2002. High-Dimensional Model Representations Generated from Low Order Terms-Ip-RS-HDMR, *Journal of Computational Chemistry*, 24, 647–656.
- [9] Wang, S.W., Georgopoulos, P.G., Li, G., Artamonov, M. ve Rabitz, H., 2001. Computationally Efficient Atmospheric Chemical Kinetic Modeling by Means of High Dimensional Model Representation (HDMR), LNCS, Springer-Verlag, 326–333.
- [10] Li, G., Wang, S.W. ve Rabitz, H., 2002. Practical Approaches To Construct RS-HDMR Component Functions, *Chem. Eng. Sci.*, 57, 4445–4460.
- [11] Li, G., Wang, S.W., Rabitz, H. ve Jaffe, P., 2002. Global uncertainty assessments by high dimensional model representations (HDMR), *J. Phys. Chem. A*, 106, 8721–8733.
- [12] Li, G., Rabitz, H., Wang, S.W. ve Georgopoulos, P.G., 2003. Correlation Method for Variance Reduction of Monte Carlo Integration in RS-HDMR, *J. Comp. Chem.*, 24, 277–283.

- [13] Wang, S.W., Georgopoulos, P.G., Li, G. ve Rabitz, H., 2003. Random Sampling-High Dimensional Model Representation (RS-HDMR) with Nonuniformly Distributed Variables: Application to an Integrated Multimedia/Multipathway Exposure and Dose Model for Trichloroethylene, *J. Phys. Chem. A*, 107, 4707–4716.
- [14] Ho, T. ve Rabitz, H., 2003. Reproducing Kernel Hilbert space interpolation methods as a paradigm of high dimensional model representations: Application to multidimensional potential energy surface construction, *J. Chem. Phys.*, 119, 6433–6442.
- [15] Li, G., Schoendorf, J., Ho, T. ve Rabitz, H., 2004. Multicut-HDMR with an Application to an Ionospheric Model, *Journal of Computational Chemistry*, 25, 1149–1156.
- [16] Manzhos, S. ve Carrington, T., 2006. A Random-Sampling High Dimensional Model Representation Neural Network For Building Potential Energy Surfaces, *The Journal of Chemical Physics*, 125.
- [17] Hayes, M.Y., Li, G. ve Rabitz, H., 2006. Estimation of Molecular Properties by High-Dimensional Model Representation, *J. Phys. Chem. A*, 110, 264–272.
- [18] Li, G., Wang, S.W., Georgopoulos, P.G., Schoendorf, J. ve Rabitz, H., 2006. Random Sampling-High Dimensional Model Representation (RS-HDMR) and Orthogonality of Its Different Order Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, 110, 2474–2485.
- [19] Bieniasz, L.K. ve Rabitz, H., 2006. High Dimensional Model Representation of Cyclic Voltammograms, *Anal. Chem.*, 78, 1807–1816.
- [20] Demiralp, M., 2001. Yuksek Boyutlu Model Gosterilimi: Degismezlik ve Toplamsallik Olcenleri, *Carpimsal Gosterilim ve Carpimsallik Olcenleri*, 12. Ulusal Mekanik Kongresi, Konya.
- [21] Demiralp, M., 2001. Carpimsallastirilmis Yuksek Boyutlu Model Gosterilimi; Gosterilim Carpanlarinin Belirlenmesi, 12. Ulusal Mekanik Kongresi, Konya.
- [22] Demiralp, M., 2003. High Dimensional Model Representation and its Applications, *Tools For Mathematical Modelling*, 9, 146–159.
- [23] Tunga, M.A. ve Demiralp, M., 2005. A Factorized High Dimensional Model Representation on the Nodes of a Finite Hyperprismatic Regular Grid, *Applied Mathematics and Computation*, 164, 865–883.
- [24] Tunga, M.A. ve Demiralp, M., 2006. Hybrid High Dimensional Model Representation (HDMR) on the Partitioned Data, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 185, 107–132.
- [25] Demiralp, M., 2006. Transformational High Dimensional Model Representation, *ICCMSE-2006*.
- [26] Demiralp, M., 2006. Monotonously Increasing Multiplicativity Measurers in Factorized High Dimensional Model Representation, *ICNAAM-2006*.

- [27] Demiralp, M., 2006. Weight Parameters Optimization to Get Maximum Constancy in High Dimensional Model Representation, *WSEAS Transaction on Mathematics*, 5, 1177–1181.
- [28] Demiralp, M., 2006. Illustrative Implementations to Show How Logarithm Based High Dimensional Model Representation Works for Various Function Structures, *WSEAS Transaction on Computers*, 5, 1333–1338.
- [29] Demiralp, M., 2006. Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representation and the Effect on Their Types on Univariance Level, *WSEAS Transaction on Mathematics*, 5, 582–588.
- [30] Kursunlu, A. ve Demiralp, M., 2003. Additive and Factorized High Dimensional Model Representation Applications to the Multivariate Diffusion Equation Under Vanishing Derivative Boundary Conditions, *The Fourth International Conference on Tools For Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia.
- [31] Tunga, M. ve Demiralp, M., 2003. Data Partitioning via Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR) and Multivariate Interpolative Applications, *Mathematical Research*, 9, 447–462.
- [32] Tunga, M. ve Demiralp, M., 2008. Introductory Steps for an Indexing Based HDMR Algorithm: Lumping HDMR, *1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering*, 129–135.
- [33] Tunga, M. ve Demiralp, M., 2001. High Dimensional Model Representation of Multivariate Interpolation via Hypergrids, *The Sixteenth International Symposium on Computer and Information Sciences (ISCIS XVI)*, 416–423.
- [34] Yaman, I. ve Demiralp, M., 2003. High Dimensional Model Representation Approximation of an Evolution Operator with a First Order Partial Differential Operator Argument, *ANACM, Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, 1, 287–296.
- [35] Yaman, I. ve Demiralp, M., 2003. High Dimensional Model Representation Applications to Exponential Matrix Evaluation, *The Fourth International Conference on Tools For Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia.
- [36] Akkemik, E. ve Demiralp, M., 2003. Algebraic Eigenvalue Problem Modelling via High Dimensional Model Representation, *The Fourth International Conference on Tools For Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia.
- [37] Tunga, M.A. ve Demiralp, M., 2008. A New Approach for Data Partitioning Through High Dimensional Model Representation, *Journal of Computer Mathematics*, 85, 1779–1792.
- [38] Ziehn, T. ve Tomlin, A., 2009. GUI-HDMR- A software tool for global sensitivity analysis of complex models, *Environmental Modelling and Software*, 24, 775–785.
- [39] Ziehn, T. ve Tomlin, A., 2008. A global sensitivity study of sulfur chemistry in a premixed methane flame model using HDMR, *International Journal of Chemical Kinetics*, 40, 742–753.

- [40] Rao, B. ve Chowdhury, R., 2008. Factorized high dimensional model representation for structural reliability analysis, *International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 25, 708–738.
- [41] Chowdhury, B.R., Rao, N. ve Prasad, A.M., 2008. High dimensional model representation for piece-wise continuous function approximation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24, 1587–1609.
- [42] Chowdhury, B.R., Rao, N. ve Prasad, A., 2008. High dimensional model representation for structural reliability analysis, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 25, 301–337.
- [43] Demiralp, M., 2009. Sendelenimsizlik Yaklastiriminda Odaklayici Agirlik Kullanimi, *Bilisim Enstitusu Bilgisayim Bilimi ve Yontemleri Toplulugu Notlari*.
- [44] Demiralp, M., 2005. A Fluctuation Expansion Method for the Evaluation of a Function's Expectation Value, *Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math.*, Wiley, Rhodes, Greece, Sept. 16-20, 711–714.
- [45] Demiralp, M., 2008. Fluctuation Expansion at the horizon as a New and Efficient Tool for Integration and ODE and PDE Solving, under review.
- [46] Gurvit, E., Baykara, N.A. ve Demiralp, M., 2009. Evaluation of Multivariate Integrals via Fluctuationlessness Theorem and Taylor's Remainder, *AIP Conf. Proc.*, 1148, 128.
- [47] Gurvit, E., Baykara, N.A. ve Demiralp, M., 2008. Evaluation of Univariate Integrals via Fluctuationlessness Theorem, *AIP Conf. Proc.*, 1048, 239.
- [48] Gurvit, E., Baykara, N.A. ve Demiralp, M., 2009. Numerical Integration of Bivariate Functions over a Non Rectangular Area by Using Fluctuationlessness Theorem, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 8, 193–198.
- [49] Tunga, B. ve Demiralp, M., 2008. Fluctuationlessness Approximation Based Multivariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation, *AIP Conf. Proc.*, 1048, 562 – 565.
- [50] Uskuplu, S. ve M.Demiralp, 2008. Univariate Integration via Space Extension Based Fluctuation Approximation, *AIP Conf. Proc.*, 1048, 566 – 569.
- [51] Gurvit, E., Baykara, N.A. ve Demiralp, M., 2008. A Hybridized Finite Taylor Formula by Fluctuation Free Remainder Term for Multivariable Function Approximation, *AIP Conf. Proc.*, 1148, 21.
- [52] Demiralp, M., 2005. Determination of Quantum Expectation Values Via Fluctuation Expansion, *Lecture Series on Computer and Computational Sciences, Selected Papers from Int. Conf. of Comput. Methods in Sci. and Eng. (ICCMSE 2005)*, 4A, 146–149.
- [53] Baykara, N.A. ve Demiralp, M., 2005. Fluctuation Expansion in the Quantum Optimal Control of One Dimensional Perturbed Harmonic Oscillator, *Lecture Series on Computer and Computational Sciences, Selected Papers from Int. Conf. of Comput. Methods in Sci. and Eng. (ICCMSE 2005)*, 4A, 56–59.

- [54] Demiralp, M., 2008. Finite Subspace Representation of the Multiplication Operator's Resolvent in Terms of Fluctuation Matrices, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2008).
- [55] Gozukirmizi, C. ve Demiralp, M., 2008. Introductory Steps for the Design of An Algorithm for Finding the Higher Order Fluctuation Terms via Symbolic Simplifications, Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE'08), 189–192.
- [56] Kalay, B. ve Demiralp, M., 2008. Smoothing the Integrands to Increase the Quality of Fluctuationlessness Approximation in Numerical Integration, Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE'08), 204–208.
- [57] Demiralp, M., 2005. Convergence Issues in the Gaussian Weighted Multidimensional Fluctuation Expansion for the Univariate Numerical Integration, WSEAS Tracsaction on Mathematics, 4, 486–492.
- [58] Demiralp, M., 2009. Fluctuationlessness Theorem to Approximate Univariate Functions Matrix Representations, WSEAS Tracsaction on Mathematics, 8, 258–267.
- [59] Demiralp, M., 2009. No Fluctuation Approximation in any Desired Precision for Univariate Matrix Representations, Journal of Math. Chem.
- [60] Gozukirmizi, C. ve Demiralp, M., 2008. Univariate Integration Via Space Extension Based No Fluctuation Approximation, American Institute of Physics Conf. Proc., Numerical Analysis and Applied Mathematics, 566–569.
- [61] Gozukirmizi, C. ve Demiralp, M., 2009. The Application of the Fluctuation Expansion with Extended Basis Set to Numerical Integration, WSEAS Transactions on Mathematics, 8, 205–212.
- [62] Altay, N. ve Demiralp, M., 2008. Application of Fluctuationlessness Theorem on the Numerical Solution of Higher Order Linear Ordinary Differantial Equations, Proceedings of the 6 th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 52–55.
- [63] Higham, N.J., 2008. Cholesky Factorization, WSEAS Tracsaction on Mathematics, 2008.116 For Wiley Interdisciplinary Rewievs: Computational Statistics.
- [64] Davis, P. ve Rabinowitz, P., 1984. Methods of Numerical Integration, Academic Press, New York.
- [65] Gerhard, J., Oevel, W., Postel, F. ve Wehmeier, S., 2000. MuPAD Tutorial, Springer, New York.
- [66] Chapra, S. ve Canale, R., 2002. Numerical Methods for Engineers, McGraw-Hill.
- [67] Burden, R. ve Faires, J., 2005. Numerical Analysis, Thomson Brooks/Cole, Belmont, CA.

- [68] Milovanovic, G. ve Cvetkovic, A., 2005. Orthogonal polynomials and Gaussian quadrature rules related to oscillatory weight functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 179, 263–287.
- [69] Coussement, J. ve Assche, W., 2005. Gaussian quadrature for multiple orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 178, 131–145.
- [70] Ma, J., Rokhlin, V. ve Wandzura, S., 1996. Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33, 971–996.
- [71] Maucher, R., 1996. A symbolic computation procedure for the generation of Gauss quadrature rules with a user-defined weight function, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12, 141–145.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ayşegül Kurşunlu

Doğum Yeri ve Tarihi: Mugla, 1975

Lisans Üniversitesi: BÜ, Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği, 1998

Y. Lisans Üniversitesi: ITÜ, Bilişim Enstitüsü, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik, 2003

Yayın Listesi:

- Kurşunlu A., Demiralp M., 2008: Partial derivative evaluating formulae from a data given on the nodes of a regular planar grid, 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '08), Mayıs 27-30, İstanbul, Türkiye.
- Kurşunlu A., Demiralp M., 2011: A node removal based univariate integration over prescribed nodes: certain important aspects of one node removal free integration, Journal of Mathematical Chemistry, 49, 2, 407-427, 2011.
- Kurşunlu A., Demiralp M., 2011: A node removal based univariate integration over prescribed nodes One node removal free integration under higher order set of conditions with an extension to multinode case, Journal of Mathematical Chemistry, 49, 2, 428-443, 2011.

