

**SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN
UZAY GENİŞLETME İLE EVRENSEL BİR BİÇİME
DÖNÜŞTÜRÜLMESİ VE KESME YAKLAŞTIRIMLARI**

**DOKTORA TEZİ
Sevda ÜSKÜPLÜ ALTINBAŞAK**

Anabilim Dalı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Programı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Şubat 2011

**SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN
UZAY GENİŞLETME İLE EVRENSEL BİR BİÇİME
DÖNÜŞTÜRÜLMESİ VE KESME YAKLAŞTIRIMLARI**

**DOKTORA TEZİ
Sevda ÜSKÜPLÜ ALTINBAŞAK
(702032014)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28 Haziran 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 9 Şubat 2011**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin DEMİRALP (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ayşe Hümeysra BİLGE (KHAS)
Prof. Dr. Yılmaz AKYILDIZ (BÜ)
Prof. Dr. Nazmi POSTACIOĞLU (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Ahmet DURAN (İTÜ)**

Şubat 2011

ÖNSÖZ

Benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e teşekkürü bir borç bilirim. Onun bilimsel çalışmalardaki coşkusu beni her zaman etkilemiştir ve kendisi ile çalıştığım için çok şanslı olduğumu biliyorum.

Çalışmam boyunca, yapıcı yorumları ve yönlendirimleri ile tezimin şekillenmesine yardımcı oldukları için değerli jüri üyelerim Prof. Dr. Ayşe Hümeysra BİLGE'ye ve Prof. Dr. Yılmaz AKYILDIZ'a, ayrıca, Prof. Dr. Nazmi POSTACIOĞLU'na ve Yrd. Doç. Dr. Ahmet DURAN'a değerli yorumları için çok teşekkür ederim.

Bilişim Enstitüsü'ne geldiğim günden beri hemen hemen kesintisiz üyesi olduğum Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu'nun (BEBBYT) hayatımdaki yeri yadsınamaz. Birçok bilimsel etkinliğe beraber katıldığım, fikir alışverişinde bulunduğum topluluktaki çalışma arkadaşlarıma, özellikle İrem YAMAN ve Burcu TUNGA'ya çalışmamı baştan sona takip ettikleri, önerilerde buldukları ve gereksinim duyduğum zamanlarda yardımlarını esirgemedikleri için çok teşekkür ederim.

Tezimin tamamlanması sırasında yapılması gereken idari işlemlerle sabırla ilgilenen, işlemlerin kolay bir şekilde yürütülmesini sağlayan ve güler yüzleri ile beni her zaman rahatlatan Bilişim Enstitüsü idari personeline gerçekten minnettarım.

Sevgili arkadaşım Berna FIRAT'a tezimi baştan sona sabırla okuduğu, düzeltmeler yaptığı ve önerilerde bulunarak tezimin son şeklini almasına yardımcı olduğu için, Birkan TUNÇ'a hem çalışmamın tamamlanması sırasında yaptığı yorumlardan dolayı hem de yazım aşamasında yaptığı katkılardan dolayı çok teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemde en büyük emeğe sahip olan, maddi ve manevi anlamda her zaman yanımda olan annem Cemile ÜSKÜPLÜ ve babam Ali ÜSKÜPLÜ'ye, desteklerini arkamda hissettiğim, beni hiç bir zaman yalnız bırakmayan kardeşlerim Selda ve Sibel ÜSKÜPLÜ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak, sevgili eşim Caner ALTINBAŞAK'a, bu çalışma sürecinde, benimle birlikte bu büyük özveriye ortak olarak bana büyük bir destek verdiği, her zaman yanımda olup beni yüreklendirdiği için ve en önemlisi hayatıma kattığı anlam için teşekkür ediyorum.

Şubat 2011

Sevda ÜSKÜPLÜ ALTINBAŞAK

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
2. UZAY GENİŞLETME	5
3. SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMI	9
4. UZAY GENİŞLETME VE SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLER	19
4.1 Türevli Denklemlerin Analitik ve Seri Çözümü.....	19
4.1.1 Sayıl Türevli Denklemler.....	19
4.1.2 Matris Katsayılı Türevli Denklemler	20
4.2 Uzay Genişletme Kavramı ile Okubo Biçimi'nin Elde Edilmesi.....	22
4.2.1 Sayıl Türevli Denklemlerde Uzay Genişletme	22
4.2.2 Matris Katsayılı Türevli Denklemlerde Uzay Genişletme.....	26
4.3 Okubo Biçimi'nin Seri Çözümü ve Tekillikleri	30
4.3.1 Yöntemin Yakınsaklık Ölçütlerinin İncelenmesi	36
4.3.2 Kesme Yaklaşımları ve Hata Analizi	38
4.4 Analitik Çözümü Bilinen Denklem Üretme	39
4.5 Okubo Biçimi'nin Seri Çözümü İle Elde Edilen Sayısal Sonuçlar	41
4.6 Uzay Genişletme Kavramı ile Evrensel Biçimin Elde Edilmesi	47
4.7 Evrensel Biçimin Seri Çözümü	51
4.7.1 Yöntemin Yakınsaklık Ölçütlerinin İncelenmesi	55
4.7.2 Kesme Yaklaşımları ve Hata Analizi	57
4.8 Yüksek Mertebeli Uzay Genişletme.....	61
4.9 Sayısal Sonuçlar	63
5. SONSUZDA BASKIN SAPTIRIM AÇILIMLARI	73
5.1 Matris Katsayılı Türevli Denklemlerde Saptırım Açılımları	73
5.2 Yöntemin Yakınsaklık Ölçütlerinin İncelenmesi ve Hata Analizi	76
5.3 Başlangıç Değişmezinin Belirlenmesine Dayalı Analitik Sürdürüm	78
5.4 Sayısal Sonuçlar	79
6. DOĞRUSAL OLMAYAN SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLER	85
6.1 Doğrusal Olmayan Türevli Denklemler ve Sendelenimsizlik	86
6.1.1 Kuantum Mekaniği ve Dalga İşlevi.....	86

6.1.2 Denklemlerin Üretilmesi.....	87
6.2 Göretürevli Denklemler ve Uzay Genişletme.....	96
6.2.1 Evrensel Biçimin Elde Edilmesi	96
6.2.2 Evrensel Biçimin Seri Çözümü.....	102
6.3 Doğrusal Olmayan Türevli Denklemler İçin Değişik Çözüm Yöntemleri.....	106
6.3.1 Yöntem - 1: Üretici İşlevler Türünden Çözüm	106
6.3.2 Yöntem - 2: İzgesel Gösterilim İle Elde Edilen Çözüm	107
7. SONUÇLAR.....	111
KAYNAKLAR.....	117
EKLER	123
ÖZGEÇMİŞ	136

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.1 : [0,3] aralığında denklemin analitik çözümü ve Okubo Biçimi'nin seri çözümünün karşılaştırılması.....	43
Şekil 4.2 : [0,3] aralığında denklemin seri çözümü ve Okubo Biçimi'nin seri çözümünün karşılaştırılması (4 ve 8 terimle yaklaştırım).....	43
Şekil 4.3 : [0,3] aralığında denklemin seri çözümü ve Okubo Biçimi'nin seri çözümünün karşılaştırılması (5 ve 10 terimle yaklaştırım).....	44
Şekil 4.4 : [0,3] aralığında denklemin seri çözümünün Okubo Biçimi'nin seri çözümünden sapmasının Frobenius boyu.	45
Şekil 4.5 : [0,0.7] aralığında denklemin analitik çözümü ve Okubo Biçimi'nin seri çözümünün karşılaştırılması.	46
Şekil 4.6 : [0,3] aralığında denklemin analitik çözümü ve En Kısıtlı Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m = 1$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.	64
Şekil 4.7 : [0,3] aralığında denklemin analitik çözümü ve Düzgün Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 2$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.	65
Şekil 4.8 : [0,3] aralığında denklemin analitik çözümü ve Aşkın Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 3$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.	65
Şekil 4.9 : [0,3] aralığında denklemin seri çözümü ve Evrensel Biçim'in seri çözümünün karşılaştırılması (4 ve 8 terimle yaklaştırım).....	66
Şekil 4.10 : [0,3] aralığında denklemin seri çözümü ve Evrensel Biçim'in seri çözümünün karşılaştırılması (5 ve 10 terimle yaklaştırım).....	66
Şekil 4.11 : [0,3] aralığında denklemin seri çözümünün Evrensel Biçim'in seri çözümünden sapmasının Frobenius boyu.	68
Şekil 4.12 : [0,0.7] aralığında denklemin analitik çözümü ve En Kısıtlı Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m = 1$) kullanılarak elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.	69
Şekil 4.13 : [0,1] aralığında denklemin analitik çözümü ve Düzgün Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 2$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.	70
Şekil 4.14 : [0,1.2] aralığında denklemin analitik çözümü ve Düzgün Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 2$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.	70
Şekil 4.15 : [0,1.25] aralığında denklemin analitik çözümü ve Aşkın Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 3$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.	71

Şekil 4.16 :	[0,2] aralığında denklemin analitik çözümü ve Aşkın Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 4$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.	71
Şekil 5.1 :	[0.5,1] aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması.	80
Şekil 5.2 :	[1.0,1.5] aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması.	81
Şekil 5.3 :	[1.5,2.5] aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması.	81
Şekil 5.4 :	[1.0,1.5] aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması (Geniş alt aralık seçimi).	82
Şekil 5.5 :	[0.5,3.0] aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması ($m_{gen} = 2$).	82

SEMBOL LİSTESİ

Uzay Genişletme

f_C	:	Çift işlev
f_T	:	Tek işlev
\mathbf{f}	:	Yöneş yapılı işlev
\mathbf{y}	:	Değıştirge yöneyi
f_0, \dots, f_{n-1}	:	\mathbf{f} yöneyinin öğeleri
m	:	Uzay genişletme mertebesi

Sendelenimsizlik Yaklaşırımı

\mathcal{H}	:	Hilbert uzayı
\mathcal{H}_n	:	Hilbert uzayının n boyutlu alt uzayı
\mathcal{K}_n	:	Kartezyen uzayın n boyutlu alt uzayı
\mathcal{U}	:	Hilbert uzayını örten taban işlevlerini içeren küme
\mathcal{U}_n	:	\mathcal{U} 'da kesme ile üretilen n öğeli taban takımı
$w(x)$:	Ağırlık işlevi
f_1, f_2	:	Hilbert uzayından alınan işlevler
g, h	:	Hilbert uzayından alınan işlevler
$g^{(n)}, h^{(n)}$:	\mathcal{H}_n uzayından alınan işlevler
g_i, h_i	:	g ve h işlevlerinin doğrusal birleşirim katsayıları
$g_i^{(n)}, h_i^{(n)}$:	$g^{(n)}$ ve $h^{(n)}$ işlevlerinin doğrusal birleşirim katsayıları
δ	:	Kronecker delta işlevi
u_j	:	Taban işlevleri
\widehat{P}	:	İzdüşüm işlevi
\widehat{I}	:	Birim işlev
\widehat{S}	:	Sendelenim işlevi
\widehat{O}	:	Sıfır işlevi
\widehat{x}	:	Hilbert uzayında tanımlı işlev
\widehat{x}_{yak}	:	\widehat{x} işlevine \mathcal{H}_n üzerinde yaklaşırım yapan işlev
\mathbf{X}	:	\widehat{x} işlevinin matris gösterilimi
\mathbf{X}_k	:	\widehat{x}^k işlevinin matris gösterilimi
X_{ij}	:	\mathbf{X} matrisinin genel terimi
e_i	:	i . öğesi 1, diğeri öğeleri 0 olan birim yöney
\mathbf{F}	:	$f(x)$ işlevinin matris gösterilimi
$\mathbf{X}^{(n)}$:	\mathbf{X} matrisinin \mathcal{H}_n üzerindeki yaklaşırım matrisi

Uzay Genişletme ve Sıradan Türevli Denklemler

$x(t)$: Sayıl bilinmeyen işlev
$a(t)$: Sayıl katsayı işlevi
ρ	: Katsayı işlevinin yakınsaklık yarıçapı
\mathbf{X}	: $n \times n$ türünde bilinmeyen matris işlev
\mathbf{A}	: $n \times n$ türünde matris katsayı işlevi
\mathbf{I}_n	: $n \times n$ türünde birim matris
\mathbf{I}	: Öğeleri $n \times n$ türünde birim matrisler olan öbek yapıdaki birim matris
m	: Çokterimlinin ve uzay genişletmenin mertebesi
t	: Denklem sisteminin asıl bağımsız değişkeni
y	: Uzay genişletme bağımsız değişkeni
τ	: Tümlev değiştirgesi
x_0, \dots, x_m	: Sayıl denkleme uzay genişletme uygulandığında elde edilen bilinmeyen işlevler
\mathbf{z}	: Uzay genişletme ile oluşan bilinmeyen işlevleri içeren yöney
$\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_m$: Okubo Biçim'i elde edilirken matris katsayılı denkleme uzay genişletme uygulandığında elde edilen bilinmeyen matris işlevler
$\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_m$: Evrensel Biçim elde edilirken matris katsayılı denkleme uzay genişletme uygulandığında elde edilen bilinmeyen matris işlevler
\mathbf{Z}	: Uzay genişletme ile oluşan bilinmeyen matris işlevleri içeren öbek yapılı matris
$\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1$: Okubo Yapısı'nı ve Evrensel Biçim'i oluşturan matrisler
α	: Seri çözüm üstel değiştirgesi
$\boldsymbol{\theta}_{0,D}$: $\boldsymbol{\theta}_0$ matrisinin köşegeni
$\boldsymbol{\theta}_{0,O}$: $\boldsymbol{\theta}_0$ matrisinin köşegen dışı öğeleri
$\ \cdot\ _F$: Frobenius boyu
$\text{iz}(\cdot)$: Matrisin izi
B	: Katsayı matrisinin boyca en üst değeri
I	: $\boldsymbol{\theta}_0$ matrisinin boyunun alabildiği en büyük değer
Γ	: Gama işlevi
\mathbf{Z}_i	: Okubo Yapısı'nın ve Evrensel Biçim'in seri çözüm bileşenleri
$\mathbf{X}_{K,i}$: Türevli denklemin seri çözümünden yapılan kesme
$\mathbf{Z}_{K,i}$: Okubo Yapısı'nın ve Evrensel Biçim'in seri çözümünden yapılan kesme
E_i	: Seri çözümün hata terimleri
$\mathbf{Y}(t)$: Evrensel Biçim'in oluşturulması için kullanılan dönüşüm matrisi
m_{gen}	: Aşkın uzay genişletme mertebesi
$\boldsymbol{\theta}_0^{(m_{gen})}, \boldsymbol{\theta}_1^{(m_{gen})}$: Evrensel Biçim'i oluşturan yüksek mertebeli uzay genişletme matrisleri
$\mathbf{L}_D, \mathbf{L}_0$: Köşegen ve köşegen dışı öbek öğelerden oluşan matrisler
χ	: Hata analizi için kullanılan işlev
$\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Q}$: Analitik çözüm üretmek için kullanılan matrisler
$\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$: Analitik çözüm üretmek için kullanılan gerçel değerli sayılar
$\mathbf{T}(t)$: Denklem sisteminin asıl bağımsız değişkeninin oluşturduğu öbek yapıdaki matris

Sonsuzda Baskın Saptırım Açılımları

ε	: Saptırım açılımı değiştirgesi
$\mathbf{Z}_{G,i}$: Saptırım açılımı terimi
\mathcal{I}	: Tümlev işleci
\mathbf{K}	: Tümlev çekirdeği
κ_1, κ_2	: Yakınsaklık ölçütleri için kullanılan işlevler
\mathbf{C}_1	: Başlangıç koşulu matrisi

Doğrusal Olmayan Sıradan Türevli Denklemler

$\hat{\mathbf{A}}$: Hermitsel işleç
ψ	: Dalga işlevi
$ \cdot ^2$: Karmaşık değer boy karesi
φ	: Göretürevli denklemin başlangıç koşulunu veren işlev
\hat{H}	: Hamilton işleci
\mathcal{O}	: Türevli denklem üretmek için seçilen işleç
$E_{\mathcal{O}}$: \mathcal{O} işlecinin beklenen değeri
$\Psi_{sağ}, \Psi_{sol}$: Bir dizgenin evrimini betimleyen işlevler
$u_j^{(sağ)}, u_j^{(sol)}$: Devingen taban ikilisi
\mathcal{L}	: Evrim işleci
\mathcal{L}^\dagger	: Evrim işlecinin hermitsel eşleniği
F, G	: Hilbert uzayından alınan işlevler
ξ	: Uzay genişletme değiştirgesi
Ψ_0, \dots, Ψ_m	: Göretürevli denkleme uzay genişletme uygulandığında elde edilen bilinmeyen işlevler
\mathbf{z}	: Uzay genişletme ile oluşan bilinmeyen işlevleri içeren yöney
$\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$: Evrensel Biçim'i oluşturan öbek yapılı matrisler
\mathbf{z}_ξ	: \mathbf{z} yöneyinin ξ değişkenine göre türevi
\mathbf{z}_t	: \mathbf{z} yöneyinin t değişkenine göre türevi
\mathbf{z}_i	: Evrensel Biçim'in seri çözümler bileşenleri
$\zeta_k(t)$: $\mathbf{Z}(t)$ matrisinin izgesel gösterilimini oluşturan özdeğerler
$\mathbf{z}_k(t)$: $\mathbf{Z}(t)$ matrisinin izgesel gösterilimini oluşturan özyöneyleler
H, G	: Değişkenlerin ayrılması yoluyla tümlev almada kullanılan işlevler

SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN UZAY GENİŞLETME İLE EVRENSEL BİR BİÇİME DÖNÜŞTÜRÜLMESİ VE KESME YAKLAŞTIRIMLARI

ÖZET

Sıradan türevli denklem takımlarının çözümü için geliştirilmiş çok sayıda yöntem olmasına karşın, bilinmeyen işlev (ing: function) sayısı arttıkça etkin sayısal çözümler üretmek de zorlaşmaktadır. Bu nedenle, yeni ve etkin çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu tezde matris katsayılı türevli denklemler evrensel bir biçime (ing: form) dönüştürülerek asıl yapılarından işlenmesi daha kolay yapılara dönüşüm sağlanmıştır. İlgilenilen denklemler genelleştirmeye uygun olarak seçilmiş ve böylece elde edilen sonuçların tüm matris katsayılı türevli denklemlere uygulanabilirliği sağlanmıştır.

Sözü edilen dönüşüm uzay genişletme (ing: space extension) kavramı kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Bu kavram, denkleme yeni bilinmeyenlerin eklenmesi ve denklemin böylece yeni bir biçime dönüştürülmesi olgusuna dayanmaktadır. Bu bağlamda öncelikle denklem uzay genişletme kullanılarak yeni bir evrensel biçime dönüştürülür ve sonra da bu genel yapının seri çözümü elde edilir. Elde edilen seri çözümün katsayıları ikili bir özyineli ilişkiyi sağlamaktadır. Bu çalışmanın asıl amacı elde edilen çözümden kesmeler yaparak yaklaşık çözüm üreten bir yapı oluşturmaktır. Denklem takımının, “En Kısıtlı Uzay Genişletme”, “Düzgün Uzay Genişletme” ve “Aşkın Uzay Genişletme” olarak adlandırılan değişik uzay genişletme türleri kullanılarak elde edilen seri çözümünün yakınsaklığı birtakım uygun boy (ing: norm) çözümlenmeleri yardımı ile incelenmektedir. Bu aynı zamanda seriden kesme yapılarak elde edilen çözümler için de hata kestirimi yapılmasını olanaklı kılar.

Geliştirilen yöntemin sonuçları, ilgilenilen aralığın değişik noktalarında saptırım (ing: perturbation) açılımları kullanılarak güçlendirilmektedir. Matris katsayılı türevli denkleme saptırım değiştirgesi (ing: parameter) eklenmekte ve denklem Maclaurin serisine açılmaktadır. Böylece katsayıları iki terimli özyinelemeyi sağlayan bir kesme yaklaşımını elde edilmektedir. Kesme yaklaşımını için de yakınsaklık ölçütleri incelenmiş ve hata analizi yapılmıştır. Değişik, ancak komşu aralıklarda saptırım kesmelerinin yinelemeli kullanımı “Saptırımlı Matris Altkesimsel İşlevleri (ing: Perturbative Matrix Splines)” olarak adlandırılan bir kavramın tanımlanmasını sağlar.

Bu tezde üzerinde durulan bir diğer olgu da doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümüne yöneliktir. Öncelikle sendelenimsizlik (ing: fluctuationlessness) yaklaşımını kullanılarak göretürevli denklemler (ing: partial differential equations) aracılığı ile doğrusal olmayan matris katsayılı türevli denklemler üretilmektedir. Daha sonra da göretürevli denklemlere uzay genişletme uygulanarak evrensel biçim oluşturulmakta ve bu biçimin seri çözümü elde edilmektedir. Bu, doğrusal olmayan denklem takımı çözmek zorunda kalmadan bu tür denklemlere çözüm üretilmesini sağlar.

TRANSFORMATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS INTO AN UNIVERSAL FORM WITH SPACE EXTENSION, AND, ITS TRUNCATING APPROXIMATIONS

SUMMARY

Although many methods have been developed in order to solve systems of ordinary differential equations, the cases where the number of unknown functions is high, may cause numerical and computational difficulties. Therefore, it is important to use more efficient methods and algorithms at least for these cases. In this thesis, it is focused on the conversion of matrix ordinary differential equations to certain universal forms which can be handled more easily than their original structures. The equations concerned here are chosen from certain specific ones although the generalization seems to be possible for all types of matrix ordinary differential equations.

Conversion to new form is realized by using space extension approach which introduces new unknowns into equation. First, the differential equation is converted into a new universal form by using space extension approach. Then a series solution to this common form is sought. The coefficients of this solution form a two term recursion. Main purpose of this work is to construct approximate solutions by truncating this series solution. The convergence of the series solution to this equation obtained via “Minimal Space Extension”, “Regular Space Extension”, and “Excessive Space Extension” is also investigated with the aid of an appropriate norm analysis which also enables us to get error estimates for the truncated series solutions.

This method presented here is empowered by using perturbation expansions at the other end point of the interval under consideration. A perturbation parameter is introduced into the matrix ordinary differential equation and the equation is expanded into Maclaurin series whose coefficients satisfy a two term recursion and thus a new truncation approximation is constructed. We also investigated the convergence and error estimates for these truncation approximants. The repetitious usage of the perturbation truncations on different but neighbor intervals permits us to define and use so-called “Perturbative Matrix Splines”.

The nonlinear matrix ordinary differential equations are also concerned in the thesis. First, fluctuation free approximation is used in order to obtain nonlinear matrix ordinary differential via certain partial differential equations. Then, space extension concept is applied to partial differential equations. This is a very important fact that we obtain a system of nonlinear ordinary differential equations by using partial differential equations. This prevents us from solving nonlinear ODEs. We get a solution for them by solving related PDEs via space extension approach.

1. GİRİŞ

Bu çalışma, matris katsayılı sıradan türevli denklemlerin sayısal olarak etkin bir biçimde çözülebilmesi için uzay genişletme kavramına dayalı yeni bir yöntem geliştirmeye yöneliktir. Geliştirilen çözüm yöntemi matris katsayılı doğrusal ya da doğrusal olmayan sıradan türevli denklemlere uygulanmaktadır. Türevli denklemler mühendislikte ve uygulamalı matematikte sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Fizik, biyoloji ve sosyal bilimlerin birçok alanında karşılaşılan çok sayıda problem yapısal olarak türevli denklemlerle anlatılabilmektedir. Bu alanlarda karşılaşılan problemlerin birçoğu değişim oranı diye tanımlanan türevli terimleri içermektedir. Bir türevli denklem, işlev ve bu işleve ait türevler arasındaki ilişkiyi anlatır. Bu çalışmada birinci mertebeden, sağyansız (ing: homogeneous) sıradan türevli denklemler üzerinde durulacaktır. Bu tür denklemlerin çözümü üzerine türlü kesin ya da yaklaşık çözüm üretme yöntemleri geliştirilmiştir [1–5]. Ancak, bilinmeyen işlev sayısı arttıkça bu tür denklemlere çözüm üretmek zorlaşır ve hesaplama karmaşıklığı artabilir. Özellikle de denklem doğrusal olmayan bir yapıda ise etkin bir çözüm elde etmek çoğu kez çok zordur. Üretilen çözüm yöntemleri arasında serisel çözüm üretmek için geliştirilenler önemli bir yer kaplar [6, 7].

Bu tezin temel amacı ise sıradan türevli denklemlere, ister sayıl (ing: scalar) değerli olsun, ister yöney (ing: vector) ya da ister matris değerli olsun; ister doğrusal, ister doğrusal olmayan yapıda olsun, uzay genişletme ile büyütülmüş bir uzay içindeki gösterilimin çözümlerinden sonlu terim içeren kesmelerle yaklaştırım oluşturmaktır. Çözülmesi amaçlanan türevli denklemin çözümü üslü seri olarak öngörüldüğünde katsayılar arasında özyineli bir ilişki elde edilmekte ve bu özyineli ilişkinin mertebesi birtakım mertebe azaltma yöntemleri ile indirgenebilmektedir. Bu çalışmada uzay genişletme kavramına dayalı bir mertebe indirgeme yöntemi geliştirilmektedir. Bu amaçla önce uzay genişletilerek sıradan türevli denkleme evrensel bir yeni biçim kazandırılmaktadır. Böylelikle türevli denklem daha kolay işlenebilecek evrensel bir

biçime dönüştürülmektedir. Bu elde edilen yapı ilk defa Okubo'ca incelenmiştir [8,9]. Evrensel biçimin seri çözümü iki terimli özyineli ilişki oluşturmaktadır. Evrensel denklemin seri çözümü elde edildikten sonra, bu çözüm üzerinden sonlu kesmelerle yaklaştırım yapılmaktadır. Yakınsamayı ilgilendiren öğelerin, sözgelimi katsayılar matrisi serisel açılım kesme düzeyinin, uzay genişletme düzeyinin, ve de evrensel yapının çözümündeki kesme düzeyinin yaklaştırım niteliğini denetleyen değiştirgeler olarak nitelenmesiyle yaklaştıranlar (ing: approximant) oluşturulmaktadır. Çalışma bu bağlamda Hesaplamalı Bilim ve Mühendislikte yöntembilimsel niteliktedir. Tez kapsamında yapılan çalışmalar ve tezin içeriği aşağıdaki gibi özetlenebilir. Bu teze matris katsayılı türevli denklemlere çözüm üretilirken iki önemli olgu kullanılmaktadır. Bunlardan ilki uzay genişletme kavramı diğeri de sendelenimsizlik yaklaştırımıdır. Bu nedenle tezin bundan sonraki ilk iki bölümü bu iki kavramın temel özelliklerini vermektedir.

Tezin ikinci bölümünde uzay genişletme kavramından söz edilmektedir. Uzay genişletme kavramı daha önce çok boyutlu cebirsel Lie evrim işlecinin (ing: operator) daha basit evrim işleçlerinin çarpımı biçiminde gösterilmesinde [10, 11] ve özdeğer problemlerinin çözümünde [12] kullanılmıştır.

Sendelenimsizlik Yaklaştırımı Metin Demiralp tarafından geliştirilmiş [13–15], tek ve çok değişkenli tümlevleme (ing: integration) [16–21], sıradan türevli denklem çözümleri [22–28], yüksek boyutlu model gösterilimi [29–34], vb. birçok alana uygulanmıştır [29, 35–38]. Sendelenimsizlik yaklaştırımı ile ilgili ayrıntılı bir anlatım tezin üçüncü bölümünde verilmektedir.

Bu iki kavram açıklandıktan sonra artık türevli denklemlere nasıl uygulanacakları üzerinde durulabilir. Tezin ilk aşaması matris katsayılı, doğrusal türevli denklemlerin çözümüne yöneliktir. Birinci mertebeden, matris katsayılı doğrusal ve sağyansız bir sıradan türevli denklem, en genel biçimde,

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) \quad (1.1)$$

yapısında verilebilir. Bu denklemde $\mathbf{A}(t)$, $n \times n$ türünde matris katsayı işleve, $\mathbf{X}(t)$ ise yine $n \times n$ türünde bilinmeyen matris işleve karşılık gelmektedir. Her iki matris değerli işlev de t 'ye bağlıdır ve bileşenlerinin gerçel değerli olduğu varsayılmaktadır.

Uzay genişletme kavramı uygulanarak türevli denklemin evrensel yapıya dönüşümünün ne şekilde yapıldığı dördüncü bölümde anlatılmaktadır. Bu bölümde uzay genişletme kavramının sıradan türevli denklemlere nasıl uygulanmakta olduğu gösterilmektedir. Konunun anlaşılabilir olmasını sağlamak amacıyla öncelikle sayıl birinci mertebeden, doğrusal ve sağyansız sıradan türevli denklemler üzerinde durulacak daha sonra da uzay genişletme kavramının matris katsayılı doğrusal denklemlere nasıl uygulandığı örneklerle gösterilecektir. Uzay genişletme kavramının matris katsayılı türevli denklemlere uygulanması ile karşımıza çıkan evrensel biçimin seri çözümü türevli denklemin çözümü için yeni bir yöntemin elde edilmesini sağlar. Evrensel biçimin seri çözümünün nasıl elde edildiği dördüncü bölümde ayrıntılı olarak anlatılmaktadır. Çözüm yönteminin kuramsal yapısını oluşturan matrislerin ve seri çözümün yakınsaklık ölçütleri incelenmiş ve böylelikle çözümde yüksek doğruluklu ve en etkin çözümün hangi dönümcül (ing: critical) değerlere bağlı olduğu belirlenmiştir. Ayrıca değişik kesme yaklaşımları için evrensel biçimin seri çözümünün etkinliği incelenmiştir.

Yüksek mertebeli uzay genişletme kavramı oluşturulmuş ve değişik mertebeden uzay genişletme yaklaşımlarının etkinliğini göstermek amacıyla sayısal denemeler yapılmıştır. Bu kavramın ayrıntıları dördüncü bölümde anlatılmaktadır.

Seri çözüm ile elde edilen sonuçlar saptırım açılımları kullanılarak güçlendirilmektedir. Denkleme bir saptırım değıştirgesi eklenmiş ve elde edilen yapının seri çözümü elde edilmiştir. Sayısal analizdeki altkesimsel işlevlerle (ing: spline functions) benzerlik kurulmuş ve “Saptırımlı Matris Altkesimsel İşlevleri (ing: Perturbative Matrix Splines)” kavramı oluşturulmuştur. Saptırım açılımları daha önce birçok çalışmada kullanılmış ve oldukça etkin sonuçlar elde edilmiştir [39–42]. Tezin beşinci bölümünde bu kavramın sözü edilen denkleme ne şekilde uygulandığından söz edilmektedir. Beşinci bölümde ayrıca saptırım açılımları ile geliştirilen yöntemin de yakınsaklık özellikleri incelenmektedir. Saptırım açılımlarının kullanılmasıyla çözüm yönteminin etkinliğinin ne derece arttığı sayısal örneklerle gösterilmiştir.

Tezin ikinci aşaması

$$\mathbf{X}'(t) = -f(\mathbf{X}(t), t) \quad (1.2)$$

yapısında verilen matris katsayılı doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümüne yöneliktir ve tezin altıncı bölümünde anlatılmaktadır. Bu bölümde sendelenimsizlik yaklaşımı kullanılarak götürevli denklemlerden (ing: partial differential equations) doğrusal olmayan türevli denklem elde edilmektedir. Doğrusal olmayan türevli denklemler oluşturulurken sendelenimsizlik yaklaşımı beklenen değerlere uygulanmaktadır. Burada kuvantum mekaniğindeki dalga işlevleri ve bu işlevler üzerinde tanımlanmış kavramlardan esinlenilmiştir. Bu nedenle altıncı bölümde öncelikle, kuvantum mekaniğinin bu tezde kullanılan kavramlarına değinilecek ve daha sonra da türevli denklemin elde edilişi ile ilgili ayrıntılar verilecektir. Burada amaçlanan, götürevli denklemlerin çözümü üzerinden doğrusal olmayan denklemlerin çözümüne ulaşmaktır. Genel yapısı

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.3)$$

biçiminde verilen götürevli denkleme uzay genişletme kavramı uygulanmaktadır. Uzay genişletme kavramı bir önceki aşamada elde edilen evrensel yapıya benzer bir yapı elde edilmesini sağlamaktadır. Altıncı bölüm uzay genişletme uygulanarak elde edilen evrensel yapının seri çözümünü de içermektedir.

Bu bölümde son olarak sendelenimsizlik yaklaşımı bağlamında elde edilen doğrusal olmayan türevli denklemlerin, elde edilış yoluna bağlı olarak önerilen değışik çözüm yöntemlerine de değinilmektedir.

Tezin son bölümü geliştirilen yöntemi, bu aşamada kullanılan kavramları ve elde edilen sonuçları kısaca özetlemekte ve gelecekte yapılabilecek çalışmalarla ilgili bilgi vermektedir.

2. UZAY GENİŞLETME

Uzay genişletme kavramı değişik biçimlerde açıklanabilmektedir [10, 11]. Bunlardan en etkin olanı karmaşık değerli bir işlevin tek ve çift işlevlere ayrılmasına dayanmaktadır. Eğer bir $f(y)$ işlevi, karmaşık düzlemin sonlu her bölgesinde analitik bir işlevse aşağıdaki gibi Maclaurin seri açılımı ile anlatılabilir [43]

$$f(y) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} f_j y^j. \quad (2.1)$$

Bu bağıntıda f_j , işlevin $y = 0$ noktasındaki j . türevinin j 'nin ardıl çarpımına (ing: factorial) bölümüne karşılık gelmektedir. Bu seri açılımı y değişkeninin yalnızca tek ve çift üslülerini içerecek biçimde iki işleve ayırmak olanaklıdır

$$\begin{aligned} f_C(y) &\equiv \sum_{j=0}^{\infty} f_{2j} y^{2j}, \\ f_T(y) &\equiv \sum_{j=0}^{\infty} f_{2j+1} y^{2j+1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bu bağıntıda f_C çift işleve, f_T ise tek işleve karşılık gelmektedir. Bu ayırımın yapılmasının asıl nedeni işlevin y 'deki değerinin y değişkeninin sıfır noktası çevresinde saatin tersi yönünde π radyanlık dönüşünden etkilenmeyecek, yani bu dönüşüm altında değişmez kalacak biçimde oluşturulmasını sağlamaktır. Ancak (2.2) sırasayısı ile verilen denkliklerde y yerine $-y$ konulduğunda çift işlev değişmez kalırken, tek işlevin işareti değişmektedir. Bu işaret değişikliği tek işlevdeki y değişkeninin tek üslülerinden kaynaklanmaktadır. Bu değişikliğin yarattığı sorun y değişkeninin bu işlev içerisinden çekilip çıkartılmasıyla giderilebilir. Bu durumda (2.2) sırasayısı ile verilen denklikler yerine aşağıda verilen tanımlamaların kullanılması daha uygun olacaktır

$$\begin{aligned} f_0(y^2) &\equiv f_C(y) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} f_{2j} y^{2j}, \\ f_1(y^2) &\equiv \frac{f_T(y)}{y} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} f_{2j+1} y^{2j}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bu durumda $f(y)$ işlevi bu yeni tanımlamalar kullanılarak aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir

$$f(y) \equiv f_0(y^2) + yf_1(y^2). \quad (2.4)$$

Burada vurgulanması gereken nokta, yeniden tanımlanan ve bu an için bilinmeyen durumunda olan f_0 ve f_1 işlevlerinin doğrudan y 'ye değil, onun çift üslülerine bağlı olduğudur. Bu iki bilinmeyen işlevi belirlemek için iki kurala gereksinim duyulur. Birinci kural (2.4) sırasayılı bağıntı ile verilebilir. Diğer kural ise aynı bağıntıda y yerine $-y$ yerleştirilerek elde edilebilir. Bu dönüşüm altında f_0 ve f_1 işlevlerinin değişmez kaldığı daha önce belirtilmişti. (Bu dönüşüm, ilgilenilen işlevin karmaşık sayı düzleminde herhangi bir tekilliği olmadığı sürece geçerlidir.) f_0 ve f_1 işlevleri bu dönüşüm altında değişmez kalıyor olsalar da bunların doğrusal birleşim katsayıları bu dönüşümden etkilenir. Böylece aşağıdaki bağıntı elde edilir

$$f(-y) \equiv f_0(y^2) - yf_1(y^2). \quad (2.5)$$

(2.4) ve (2.5) sırasayılı bağıntılar, bilinmeyenleri $f_0(y^2)$ ve $f_1(y^2)$ işlevleri olan, doğrusal yapılı cebirsel iki denklemden oluşan aşağıdaki gibi bir denklem takımı oluştururlar

$$\begin{aligned} f_0(y^2) &= \frac{f(y) + f(-y)}{2}, \\ f_1(y^2) &= \frac{f(y) - f(-y)}{2y}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.6) sırasayısı ile verilen denklem takımını matris gösterilimi kullanarak

$$f(y) = \mathbf{y}^T \mathbf{f}(y^2) \quad (2.7)$$

biçiminde yazmak olanaklıdır. Bu bağıntıda \mathbf{y} ve $\mathbf{f}(y^2)$ yöneylerinin açık yapısı

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T &\equiv [1 \ y], \\ \mathbf{f}(y^2)^T &\equiv [f_0(y^2) \ f_1(y^2)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

biçimindedir. Burada üzerinde özellikle durulması gereken olgu, (2.4) sırasayılı bağıntıda $f(y)$ işlevi sayıl bir büyüklükken, (2.7) sırasayılı bağıntıda artık bu işlev iki bileşenden oluşan yöneylerin çarpımı biçiminde bir yapıya dönüşmüştür. Böylece

sayıl bağıntısının bileşenlerini tek elemanlı yöneyler olarak düşünecek olursak, şimdi bu bileşenleri iki elemanlı yöneylerle değiştirmiş oluruz. Yani, bu bileşenlere ait uzay 1 boyuttan 2 boyuta genişletilmiş olur.

Bu yaklaşım benzer şekilde 1 boyuttan herhangi bir sonlu sayıdaki boyuta genişletilebilir. Sözelimi, 1 boyuttan herhangi bir m boyuta uzay genişletme denkliği

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^T &\equiv [1 \ y \ y^2 \ \cdots \ y^{m-1}], \\ \mathbf{f}(y^m)^T &\equiv [f_0(y^m) \ f_1(y^m) \ \cdots \ f_{m-1}(y^m)],\end{aligned}\quad (2.9)$$

olmak üzere

$$f(y) = \mathbf{y}^T \mathbf{f}(y^m) \quad (2.10)$$

yapısında yazılabilir. Bu bağıntılarda $f(y)$ işlevinin y karmaşık düzleminin sonlu bölgelerinde herhangi bir tekil noktasının bulunmadığı varsayılmaktadır. $\mathbf{f}(y^m)$ yöneyini oluşturan bileşenlerin değişmez kalması y^m değişkeninin sıfır noktası çevresinde saat yönünün tersine $2\pi/m$ radyan kadar döndürülmesini gerekli kılmaktadır. Böylece m sayıda bilinmeyen işlevi belirleyebilmek için aşağıdaki yapı oluşturulur

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} 1 & y & y^2 & \cdots & y^{m-1} \\ 1 & ye^{\frac{2\pi i}{m}} & y^2 e^{2\frac{2\pi i}{m}} & \cdots & y^{m-1} e^{(m-1)\frac{2\pi i}{m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & ye^{(m-1)\frac{2\pi i}{m}} & y^2 e^{2(m-1)\frac{2\pi i}{m}} & \cdots & y^{m-1} e^{(m-1)^2\frac{2\pi i}{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(y^m) \\ f_1(y^m) \\ \vdots \\ f_{m-1}(y^m) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(y) \\ f\left(ye^{\frac{2\pi i}{m}}\right) \\ \vdots \\ f\left(ye^{(m-1)\frac{2\pi i}{m}}\right) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Bu denklem takımında bilinmeyen yöneye ait katsayı matrisinin determinanı Vandermonde tipinde bir determinanttır. Bu nedenle bu matris tersi alınabilen bir matristir. Böylelikle denklem takımına ait tek bir çözüm bulunabilir [44].

Her bir yeni m değeri sistemin boyutunu artıracığından bu değişken “Uzay Genişletme Mertebesi” olarak adlandırılabilir.

3. SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMI

Sendelenimsizlik yaklaşımını işlevlerin Hilbert uzayı üzerindeki matris gösterimlerine dayanmaktadır. Matris gösterim, işlevlerle tanımlanmış herhangi bir problemin yöneyler ve matrisler yardımıyla cebirsel yapıdaki karşılığına dönüştürülmesini sağlar [15, 45, 46].

$[0, 1]$ aralığı üzerinde sürekli ve karesi tümlevlenebilir işlevlerin gerdiği Hilbert uzayı \mathcal{H} ile simgelenmektedir. Bu uzayda, $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ ile verilen herhangi iki işlev arasındaki iççarpımın (ing: inner product), $w(x)$ ağırlık işlevi

$$\int_0^1 dxw(x) = 1 \quad (3.1)$$

biçiminde verilen birim tümlevlileştirme koşulunu sağlamak üzere,

$$(f_1, f_2) = \int_0^1 dxw(x)f_1(x)f_2(x) \quad (3.2)$$

eşitliğiyle verildiği varsayılmaktadır. Bu uzaydan alınan bir $f(x)$ işlevinin boyu ise, bu iççarpım ile

$$\|f\| \equiv (f, f)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

olarak tanımlanmaktadır [15, 45, 46]. Burada, aralık $[0, 1]$ yerine $[a, b]$ olarak da seçilebilir. Ancak sonlu her aralık $[0, 1]$ aralığına indirgenebildiği için çalışma aralığı işlemleri kolaylaştırmak amacıyla $[0, 1]$ olarak seçilmiştir. Bu indirgeme ile genellikle birşey yitirmek söz konusu değildir (EK-A). \mathcal{H} Hilbert uzayını geren taban işlevlerini içeren küme \mathcal{U} ile simgelenirse bu küme kapalı bir anlatımla

$$\mathcal{U} \equiv \{u_j(x)\}_{j=1}^{\infty} \quad (3.4)$$

biçiminde yazılabilir. Bu taban takımının birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluşması gerekmez. Ancak, bu taban takımı Gram–Schmidt dikleştirme işlemiyle ya da Cholesky ayrıştırımı kullanılarak birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluşan bir takıma dönüştürülebilir [47, 48]. Burada kolaylık açısından bu işlemin yapıldığı ve

\mathcal{U} 'nun birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluştuğu yani

$$(u_i, u_j) = \delta_{j,k}, \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (3.5)$$

eşitliğinin geçerli olduğu varsayılmaktadır.

Şimdi işlemlerde kolaylık sağlaması açısından Hilbert uzayının $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ ile verilen, birbirine dik ve boyları 1 olan, taban yöneylerinin örttüğü (ing: span) bir altuzayını ele alalım. Bu uzaydan alınan herhangi bir $g(x)$ işlevi sözü edilen taban işlevleri üzerinde bir doğrusal birleştirim olarak

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^n g_i u_i(x) \quad (3.6)$$

biçiminde anlatılabilir. Bu bağıntıda görünen ve g_i ile simgelenen büyüklükler birtakım gerçel değişmezleri simgelemektedir ve $g(x)$ işlevinin yapısına bağlıdır. Bu bağımlılık taban yöneylerinin diklik ve birimboyluluk özelliklerinden yararlanılarak açık olarak saptanabilir. Bu amaçla, k , ilk n tamsayının oluşturduğu küme içinde kalmak üzere (3.6) eşitliğinin her iki yanının $u_k(x)$ ile iççarpımı alınır,

$$(u_k, g) = (u_k, \sum_{j=1}^n g_j u_j) = \sum_{j=1}^n g_j (u_k, u_j) = \sum_{j=1}^n g_j \delta_{kj} = g_k, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.7)$$

yazılabilir. Bu sonuç (3.6) sırasayılı bağıntıda kullanılırsa

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i u_i(x) = \sum_{i=1}^n (u_i, g) u_i(x) = \sum_{i=1}^n \hat{P}_i g(x) \equiv \hat{P}^{(n)} g(x) \quad (3.8)$$

denkliği elde edilir. (3.8) sırasayılı bağıntıda \hat{P}_i ile gösterilen büyüklük bir tümlev işleci olup $u_i(x)$ tarafından örtülen altuzaya izdüşürür. Yani, bu anlatım

$$\hat{P}_i g(x) \equiv g_i u_i(x) \quad (3.9)$$

denkliği ile verilebilir. (3.7) sırasayılı eşitlik bu bağıntıda kullanılırsa (3.9) sırasayılı bağıntının aşağıdaki gibi de anlatılabileceği görülür

$$\hat{P}_i g(x) \equiv (u_i, g) u_i(x). \quad (3.10)$$

(3.9) sırasayılı bağıntı \hat{P}_i işlecinin bir izdüşüm işleci olduğunu gösterir. Bu işleç, \mathcal{H} uzayından $u_i(x)$ 'ce örtülen uzaya izdüşürür ve özünedöner (ing: idempotent)

bir işleçtir (EK-B). Burada, 1 değil n boyutlu uzaya izdüştüren bir işlece gereksinim duyulmaktadır. Bu amaçla,

$$\widehat{P}^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^n \widehat{P}_i, \quad 1 \leq n < \infty \quad (3.11)$$

tanımlaması yapılacak olursa bu işlecin de özünedönen olduğu ve $u_1(x), \dots, u_n(x)$ taban yöneylerince örtülen n boyutlu \mathcal{H}_n altuzayına izdüştürdüğü söylenebilir. Yani $\widehat{P}^{(n)}$ işleci için,

$$\widehat{P}^{(n)} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_n \quad (3.12)$$

yazmak olanaklıdır. $\widehat{P}^{(n)}$ 'nin aynı zamanda \mathcal{H}_n için bir birim işleç olduğu söylenebilir. Bu uzayın birim işleci $\widehat{I}^{(n)}$ ile simgelenirse, \mathcal{H}_n için

$$\widehat{P}^{(n)} \equiv \widehat{I}^{(n)} \quad (3.13)$$

yazılabilir. $\widehat{P}^{(n)}$ işleci de özünedönen bir işleçtir (EK-B). \mathcal{H}_n altuzayının n sonsuza gittikçe \mathcal{H} ile simgelenen Hilbert uzayına dönüşeceği düşünülürse, \widehat{I} Hilbert uzayına ait birim işleci simgelemek üzere, n sonsuza gittikçe $\widehat{P}^{(n)}$ 'in de \widehat{I} 'ya gideceğini söylemek olanaklıdır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{P}^{(n)} = \widehat{I}. \quad (3.14)$$

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{S}^{(n)} = \widehat{0} \quad (3.15)$$

ve

$$\widehat{S}^{(n)} \equiv \widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \quad (3.16)$$

olmak üzere, bir sapma işleci tanımlanabilir. Bu bağlamda $g(x)$ işlevinin Hilbert uzayı üzerindeki gösterilimi

$$g(x) \equiv \widehat{P}^{(n)}g(x) + [\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}]g(x) \quad (3.17)$$

yapısında olacaktır. Bu bağıntıda $\widehat{P}^{(n)}g(x)$ terimi Hilbert uzayının \mathcal{H}_n ile simgelenen altuzayında bulunurken, $[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}]g(x)$ terimi \mathcal{H}_n altuzayının tümleyicisi (ing: complement) olan uzayda bulunur. Bu bağlamda tümleyen uzayda $g(x)$ işlevi

$$[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}]g(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} g_i u_i(x) \quad (3.18)$$

biçiminde anlatılacaktır. (3.33) denklği ile verilen $\widehat{S}^{(n)}$ işlecinin bir işleve etkisi, u_i işlevlerinin, i arttıkça çok salınımlı olmasından dolayı, aralık üzerinde tekdüze (ing: monotonous) gezinildiğinde çok sayıda iniş çıkışa neden olur. Bu nedenle, burada, $\widehat{S}^{(n)}$ işleci “Sendelenim İşleci” olarak adlandırılmaktadır. Sendelenim (ing: fluctuation) işleci içeren terimlerin yoksayılmasıyla elde edilecek yaklaşıma ise “Sendelenimsizlik Yaklaşımı” denilmektedir [13–15, 38].

Bu aşamada, \mathcal{H} içinde tanımlı \widehat{x} işlecini ele alalım. Bu işleç aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır

$$\widehat{x}g(x) \equiv xg(x), \quad g(x) \in \mathcal{H}, \quad x \in [0, 1]. \quad (3.19)$$

$xg(x)$ çarpımı da $g(x)$ işlevi gibi, $[0, 1]$ aralığı üzerinde tümlemlenebilir. Bu $\widehat{x}g(x)$ işlecinin de \mathcal{H} içinde kalacağı anlamına gelmektedir. Bu durum

$$\widehat{x}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad (3.20)$$

olmak üzere,

$$h(x) \equiv \widehat{x}g(x) \equiv xg(x), \quad g(x), h(x) \in \mathcal{H}, \quad x \in [0, 1] \quad (3.21)$$

biçiminde anlatılabilir.

Tanımlanan bu işlecin matris gösterilimine geçmek amacıyla öncelikle \mathcal{H} 'deki herhangi bir işlev \mathcal{U} kümesinin öğeleri üzerinde bir doğrusal birleştirim olarak yazılabilir. $g(x)$ ve $h(x)$ işlevleri için, g_i ve h_i bu an için belirsiz olan doğrusal birleştirim katsayılarını göstermek üzere,

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} g_i u_i(x), \quad h(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} h_i u_i(x) \quad (3.22)$$

denklikleri yazılabilir. Bu denkliklerde toplama simgelemesi olan i, j ile değiştirilirse ve her bir denkliğin her iki yanının u_i ile iççarpımı alınırsa, iççarpımın doğrusallık özelliklerinden de yararlanarak [47]

$$(u_i, g) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j (u_i, u_j), \quad (u_i, h) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j (u_i, u_j) \quad (3.23)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada taban takım öğelerinin diklik ve birim boylulukları gözönünde bulundurularak, δ_{ij} Kronecker'in delta simgesini göstermek üzere [48],

$$(u_i, g) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \delta_{ij}, \quad (u_i, h) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \delta_{ij} \quad (3.24)$$

eşitlikleri ve buradan da

$$g_i = (u_i, g), \quad h_i = (u_i, h), \quad 1 \leq i < \infty \quad (3.25)$$

sonuçlarına ulaşılır. Böylelikle, doğrusal birleştirim katsayıları belirlenmiş olur. h_i katsayısı, $g(x)$ 'in doğrusal birleştirim katsayılarına bağlı olarak yazılmak istenirse aşağıdaki eşitlikler yazılabilir

$$h_i = (u_i, h) = (u_i, \hat{x}g) = \left(u_i, \hat{x} \sum_{j=1}^{\infty} g_j u_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (u_i, \hat{x} u_j) g_j, \quad 1 \leq i < \infty. \quad (3.26)$$

Burada verilen sonsuz sayıdaki eşitliğin tek bir cebirsel anlatım olarak yazılabilmesi için aşağıdaki sonsuz elemanlı yöney tanımları yapılmalıdır

$$\mathbf{g}^T \equiv [g_1 \cdots g_n \cdots], \quad \mathbf{h}^T \equiv [h_1 \cdots h_n \cdots]. \quad (3.27)$$

Cebirselliği tam olarak sağlamak için sonsuz sayıda yataysıra ile sonsuz sayıda düşeysıraya sahip olan bir \mathbf{X} matrisinin açık yapısı aşağıdaki anlatımla verilebilir

$$\mathbf{X} \equiv \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Buradaki matris öğelerinin genel terimi de

$$X_{ij} \equiv (u_i, \hat{x} u_j) = \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x u_j(x), \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (3.29)$$

eşitliği ile açık olarak verilmektedir. \mathbf{X} matrisi \hat{x} işlecinin \mathcal{U} taban takımı üzerindeki “Matris Gösterilimi” olarak adlandırılır.

Sonsuz boyutlu öğelerle kesin olarak uğraşmak, çok çok özel yapılar olmadıkça olanaksızdır. Bu nedenle belli sayıda ilk öge kullanılarak yaklaştırım yapmak gerekmektedir. Bu amaçla, bu ana dek gündeme getirilen tüm öğelerin sonlu yaklaştırımını oluşturmak gerekir. Eğer, \mathcal{U} yerine ondan kesme ile üretilen sonlu öğeli

$$\mathcal{U}_n \equiv \{u_j(x)\}_{j=1}^n \quad (3.30)$$

taban takımı gözönüne alınırsa ve \mathcal{H} uzayının bu takımın öğelerince örtülen altuzayı \mathcal{H}_n ile simgelenirse bu altuzaydaki $g^{(n)}(x)$ ile simgelenen herhangi bir işlev

$$g^{(n)}(x) \equiv \sum_{i=1}^n g_i^{(n)} u_i(x) \quad (3.31)$$

anlatımıyla tek türlü tanımlanabilir. Eğer, \widehat{x}_{yak} ile simgelenecek olan ve \widehat{x} işlecine \mathcal{H}_n üzerinde bir yaklaştırım olarak tanımlanabilen bir işleç gözönüne alınırsa $g^{(n)}(x)$ 'in bu işleç altındaki görüntüsü $h^{(n)}(x)$ ile simgelenebilir ve

$$h^{(n)}(x) \equiv \widehat{x}_{yak} g^{(n)}(x) \quad (3.32)$$

$$\widehat{\mathcal{S}}^{(n)} \equiv \widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \quad (3.33)$$

denkliği yazılabilir. $h^{(n)}(x)$ için de daha önceki bağıntılara benzer biçimde

$$h^{(n)}(x) \equiv \sum_{i=1}^n h_i^{(n)} u_i(x) \quad (3.34)$$

yapısında bir doğrusal birleştirim yazılabilir. Burada, (3.26) eşitliğinde elde edildiği gibi $g^{(n)}(x)$ ile $h^{(n)}(x)$ 'nin doğrusal birleştirim katsayıları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki kurulabilir

$$h_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n (u_i, \widehat{x}_{yak} u_j) g_j^{(n)}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.35)$$

Verilen sonlu sayıdaki eşitliğin yine tek bir cebirsel anlatım olarak yazılabilmesi için aşağıdaki sonlu sayıda elemanı olan yöney tanımları yapılmalıdır

$$\mathbf{g}^{(n)T} \equiv [g_1 \cdots g_n], \quad \mathbf{h}^{(n)T} \equiv [h_1 \cdots h_n], \quad 1 \leq n < \infty. \quad (3.36)$$

Bu durumda \mathbf{X} matrisinin açık yapısı ise aşağıdaki, sonlu sayıda öge içeren, matris anlatımıyla verilebilir

$$\mathbf{X}^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{11}^{(n)} & \cdots & X_{1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}^{(n)} & \cdots & X_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Matris öğelerinin genel terimi de

$$X_{ij}^{(n)} \equiv (u_i, \widehat{x}_{yak} u_j) = \int_0^1 dx w(x) u_i(x) \widehat{x}_{yak} u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.38)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\mathbf{X}^{(n)}$ ile \mathbf{X} 'in ilk n yataysırası ve ilk n düşey sırasının arakesiti olan $n \times n$ kesiminin birebir örtüşmesi için, (3.38) denkleğinin yerine

$$X_{ij}^{(n)} \equiv \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.39)$$

tanımlaması kullanılabilir. (3.35)-(3.38) denklemlerinden

$$\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n)} \mathbf{g}^{(n)} \quad (3.40)$$

bağıntısı yazılabilir. Şimdi,

$$\mathbf{X}_2^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{2,11}^{(n)} & \cdots & X_{2,1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{2,n1}^{(n)} & \cdots & X_{2,nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

ve

$$X_{2,ij}^{(n)} \equiv \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.42)$$

tanımlamalarıyla verilen matrisi gözönüne alalım. Bu matris, aslında, \hat{x}^2 işlecinin \mathcal{H}_n üzerindeki matris gösterilimidir. (3.42) bağıntısı, (3.33) bağıntısı da kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 u_j(x) &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x \hat{T} x u_j(x) \\ &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x \hat{P}^{(n)} x u_j(x) \\ &+ \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x \hat{S}^{(n)} x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned} \quad (3.43)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Burada, sendelenim işlecini içeren tümlev gözardı edilirse,

$$\int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 u_j(x) \approx \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x \hat{P}^{(n)} x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.44)$$

yaklaşımına ulaşılır.

\mathcal{H}_n uzayının, kartezyen birim yöneylerinden i 'ncisi $\mathbf{e}_i^{(n)}$ ile simgelenir ve yalnızca i . ögesi 1, diğer tüm ögeleri ise 0 olarak tanımlanırsa bunların birimboylu ve birbirine dik yöneyler olacağı kolayca görülebilir. (3.44) yaklaşımının sol yanı bu yöneyleri de kullanarak

$$\int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 u_j(x) \equiv \mathbf{e}_i^{(n)T} \mathbf{X}_2^{(n)} \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.45)$$

anlatımıyla yeniden yazılabilir. Yine (3.44) yaklaşımının sağ yanındaki tümlev için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x \hat{P}^{(n)} x u_j(x) &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x u_k(x) \\ &\times \int_0^1 dy w(y) u_k(y) x u_j(y) = \sum_{k=1}^n (u_i, x u_k) (u_k, x u_j) \\ &= \sum_{k=1}^n X_{ik}^{(n)} X_{kj}^{(n)} = \mathbf{e}_i^{(n)T} [\mathbf{X}^{(n)}]^2 \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Son üç eşitlik bizi

$$\mathbf{X}_2^{(n)} \approx [\mathbf{X}^{(n)}]^2 \quad (3.47)$$

yargısına götürür. Bu yargıyı çok daha genel bir yapıya büründürmek olanaklıdır. Bu amaçla,

$$\mathbf{X}_3^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{3,11}^{(n)} & \cdots & X_{3,1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{3,n1}^{(n)} & \cdots & X_{3,nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

ve

$$X_{3,ij}^{(n)} \equiv \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^3 u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.49)$$

tanımlamalarıyla verilen matris gözönüne alınırsa, bu matris de, aslında, \hat{x}^3 işlecinin \mathcal{H}_n üzerindeki matris gösterilimidir. Bu işleç için, (3.42) denkleminde yapıldığı gibi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^3 u_j(x) &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \hat{I} x u_j(x) \\ &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \hat{P}^{(n)} x u_j(x) \\ &+ \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \hat{S}^{(n)} x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (3.50)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Burada sendelenim işlecinin içeren terim gözardı edildiğinde

$$\int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^3 u_j(x) \approx \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \hat{P}^{(n)} x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.51)$$

bağıntısı elde edilir. Bunun sol ve sağ yanları için sırasıyla aşağıdaki eşitlikler oluşturulabilir

$$\int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^3 u_j(x) \equiv \mathbf{e}_i^{(n)T} \mathbf{X}_3^{(n)} \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \hat{P}^{(n)} x u_j(x) &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 u_k(x) \\ &\times \int_0^1 dy w(y) u_k(y) x u_j(y) = \sum_{k=1}^n (u_i, x^2 u_k) (u_k, x u_j) \\ &= \sum_{k=1}^n X_{2,ik}^{(n)} X_{kj}^{(n)} = \mathbf{e}_i^{(n)T} [\mathbf{X}_2^{(n)} \mathbf{X}^{(n)}] \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Buradan

$$\mathbf{X}_3^{(n)} \approx \mathbf{X}_2^{(n)} \mathbf{X}^{(n)} \quad (3.54)$$

yaklaşırımı elde edilir. (3.47) sırasayılı bağıntı (3.54) sırasayılı bağıntıda yerine konulduğunda

$$\mathbf{X}_3^{(n)} \approx \left[\mathbf{X}^{(n)} \right]^3 \quad (3.55)$$

yaklaşırımına ulaşılır. Matematiksel tümevarım ile buradan genel bir bağıntı çıkarabilmek için bu kez

$$\mathbf{X}_k^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{k,11}^{(n)} & \cdots & X_{k,1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k,n1}^{(n)} & \cdots & X_{k,nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

ve

$$X_{k,ij}^{(n)} \equiv \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.57)$$

tanımlamalarıyla verilen matris gözönüne alınır. Bu matris de, aslında, \hat{x}^k işlecinin \mathcal{H}_n üzerindeki matris gösterilimidir. Bu matris için

$$\mathbf{X}_k^{(n)} \approx \left[\mathbf{X}^{(n)} \right]^k \quad (3.58)$$

anlatımının geçerli olduğu varsayılsa genelleştirmeyi sağlamak için bunun k yerine $(k+1)$ konulduğunda da geçerli kalacağını kanıtlamak gerekir. Bu amaçla, (3.57) denkleminin sağ yanında k yerine $(k+1)$ yerleştirerek elde edilen yapı için, (3.43) ve (3.50) sırasayılı bağıntılarda olduğu gibi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^{k+1} u_j(x) &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k \hat{I} x u_j(x) \\ &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k \hat{P}^{(n)} x u_j(x) \\ &+ \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k \hat{S}^{(n)} x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (3.59)$$

yazılabilir ve sendelenim işleçli terim gözardı edilerek

$$\int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^{k+1} u_j(x) \approx \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k \hat{P}^{(n)} x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.60)$$

yaklaşırımına ulaşılabilir. Bu yaklaşıma da, daha önce benzerlerinde izlenen yol uyarlandığında, (3.58) denkleminin k yerine $(k+1)$ konulduğundaki anlatımı üretilebilir. Böylece, tümevarımla kanıtlama tamamlanmış olur.

Artık, bir işlevin matris gösterilimiyle ilgilenilebilir. Bu amaçla,

$$\int_0^1 dx w(x) u_i(x) f(x) u_j(x) \equiv \mathbf{e}_i^{(n)T} \mathbf{F}^{(n)} \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.61)$$

tanımı yapılacak olduğunda ve $f(x)$ işlevinin tümleme bölgesi içinde yakınsak olan aşağıdaki serisel açılıma sahip olduğu öngörüldüğünde, yani

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k \quad (3.62)$$

yazıldığında ve (3.61) denkleminde kullanıldığında

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^{(n)T} \mathbf{F}^{(n)} \mathbf{e}_j^{(n)} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k u_j(x) \\ &\approx \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathbf{e}_i^{(n)T} [\mathbf{X}^{(n)}]^k \mathbf{e}_j^{(n)} \\ &= \mathbf{e}_i^{(n)T} \sum_{k=0}^{\infty} f_k [\mathbf{X}^{(n)}]^k \mathbf{e}_j^{(n)} \\ &= \mathbf{e}_i^{(n)T} f(\mathbf{X}^{(n)}) \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (3.63)$$

eşitliğine ve buradan da

$$\mathbf{F}^{(n)} \approx f(\mathbf{X}^{(n)}) \quad (3.64)$$

sonucuna ulaşılır. Bu bizi, **“Sendelenim işleci içeren terimler gözardı edildiğinde, bir işlevin matris gösterilimi, o işlevde bağımsız değişken yerine, bağımsız değişkenin matris gösteriliminin yerleştirilmesiyle elde edilen matris işleve eşdeğerdir.”** sonucuna götürür [13–15, 38].

(3.64) denklemi ile verilen anlatım altuzay boyutu n 'in sonsuza gitmesi durumunda kesin bir eşitliğe dönüşecektir. Bu gerçek, (3.64) anlatımındaki yaklaşımın niteliğinin n arttıkça artacağı anlamına gelir ve sayısal uygulamalarda yeterince büyük n değerleri için gerçeğe yakın sonuçların elde edilmesi beklenir.

4. UZAY GENİŞLETME VE SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLER

Bu bölümde uzay genişletme kavramı sıradan türevli denklemlere uygulanacaktır. Bu kavramın bu tür denklemlere uygulanışının daha anlaşılabilir olmasını sağlamak amacıyla öncelikle sayıl, birinci mertebeden, doğrusal ve sağyansız sıradan türevli denklemler üzerinde durulacaktır. Daha sonra uzay genişletme kavramının matris katsayılı doğrusal denklemlere nasıl uygulandığı örneklerle gösterilecektir.

Uzay genişletme kavramının yukarıda sözü edilen denklemlere nasıl uygulandığını incelemeyen önce bu denklemlerin analitik ya da seri çözümlerinin nasıl elde edildiği üzerinde durmak geliştirilen yöntemin artılarını görmemiz ve etkinliğini belirlememiz açısından önemlidir. O nedenle türevli denklemin öncelikle seri ve analitik çözümünü elde edeceğiz.

4.1 Türevli Denklemlerin Analitik ve Seri Çözümü

4.1.1 Sayıl Türevli Denklemler

Birinci mertebeden, sayıl, doğrusal ve sağyansız bir sıradan türevli denklem, en genel biçimde,

$$x'(t) = a(t)x(t) \quad (4.1)$$

yapısında verilebilir. t bağımsız değişken olmak üzere çoğu uygulamada bu değişken zaman değişkenine karşılık gelmektedir. t değişkeni gerçel sayı olabileceği gibi, ilgilenilen sorunun yapısına bağlı olarak karmaşık sayı olarak da ortaya çıkabilir.

$a(t)$ katsayı işlevinin seriye açılabilir olarak seçilmesi durumu için özetle şunlar söylenebilir: Eğer $a(t)$ işlevi seriye açılabiliriyorsa sıradan türevli denklem için elde edilen çözüm de yakınsaklık yarıçapı gözönünde bulundurulmak üzere seriye açılabilir. Bu noktaya türevli denklemin düzgün noktası denir. $t = t_0$ noktası türevli denklemin bir düzgün noktası ise bu denklemin, yakınsaklık bölgesi boş olmayan bir seri çözümü

vardır. Bu bölge t_0 merkezli bir tekerdir ve yarıçapı ρ ile gösterilebilir. Bu durumda $|t - t_0| < \rho$ eşitsizliğini sağlayan bütün t değerleri için bu seri yakınsaktır [49].

Çözümün her zaman yakınsak olamayacağı durumlar da söz konusu olabilir ancak bu konu tezin kapsamı dışında tutulmaktadır.

Şimdi de türevli denklemin seri çözümü ile ilgilenelim. $a(t)$ işlevinin karmaşık düzlemde her noktada analitik bir işlev olduğunu ve Taylor Serisi'ne açılabilir olduğunu varsaymıştık. Bu durumda (4.1) sırasayılı türevli denklemin herhangi bir tekil noktası yoktur ve elde edilen çözüm de verilen bir t noktasında Taylor Serisi'ne açılabilir [49]. İncelemelerin biraz daha kolay yapılabilmesini sağlamak için t açılım noktası karmaşık düzlemin merkezi olarak seçilebilir. Bu ise türevli denklemin çözümünün

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j t^j \quad (4.2)$$

olarak yazılabileceği anlamına gelir. Bu eşitliğin her iki yanının t 'ye göre birinci türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$x'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)x_{j+1}t^j \quad (4.3)$$

sonucuna varılır. (4.2) ve (4.3) sırasayıları ile verilen eşitlikler (4.1) sırasayılı türevli denklemde yerine konur ve Cauchy çarpımı da (EK-A) kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)x_{j+1}t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j a_k x_{j-k} \right) t^j \quad (4.4)$$

elde edilir. t^j terimine ait her iki yandaki katsayılar birbirine eşitlenirse

$$jx_j = \sum_{k=0}^{j-1} a_k x_{j-k-1}, \quad 0 \leq j < \infty \quad (4.5)$$

ile verilen yerel olmayan bir özyineli ilişki elde edilir. Bu özyineli ilişkinin mertebesi j değiştikçe değişir. Yerel olmayan bir özyinelemenin mertebesinden söz edemeyiz.

4.1.2 Matris Katsayılı Türevli Denklemler

Tezin bu bölümünde (1.1) ile verilen matris katsayılı türevli denklemin seri çözümü elde edilecektir. Denklemdaki $\mathbf{A}(t)$ katsayı işlevi bir çokterimli (ing: polynomial)

olarak seçilmektedir. Bu işlevin bir çokterimli olarak seçilmesi analitikliği de beraberinde getirir. Bu durumda $\mathbf{A}(t)$ katsayı işlevini

$$\mathbf{A}(t) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} t^i \mathbf{A}_i \quad (4.6)$$

biçiminde yazmak olanaklıdır [43]. Bu bağıntıda \mathbf{A}_i matrislerinin her biri t 'den bağımsız $n \times n$ türünde matrislerdir. $\mathbf{A}(t)$ katsayı işlevinin bu yapıda olması (1.1) denkleminin t -karmaşık sayı düzleminde tekil noktaya sahip olmadığı anlamına gelir ve bu da denklemin çözümünün de karmaşık sayı düzleminin sonlu noktalarında Taylor serisine açılacağı anlamına gelir [1]. Böylelikle bilinmeyen işlev

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \mathbf{X}_i \quad (4.7)$$

biçiminde Maclaurin serisine açılabilir. Bu bağıntıda \mathbf{X}_i matrislerinin her biri yine t 'den bağımsız $n \times n$ türünde matrislerdir. $\mathbf{A}(t)$ ve $\mathbf{X}(t)$ işlevlerine ait seri açılım bağıntıları sayıl denklemde yapıldığı gibi, (1.1) denkleminde yerine konulduğunda

$$i \mathbf{X}_i = \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{A}_j \mathbf{X}_{i-j-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

biçimindeki özyineli ilişki elde edilir. Bu toplama ait üst limit, alt limitten küçük olduğunda sonlu toplamın ilgili terimi düşer. Bu durumda \mathbf{X}_0 matrisi belirsiz bir büyüklük olarak kalır. Bu belirsizlik, denkleme

$$\mathbf{X}(0) \equiv \mathbf{X}_0 = \mathbf{I}_n \quad (4.9)$$

biçiminde bir başlangıç koşulu eklenerek giderilebilir. Bu bağıntıda \mathbf{I}_n , $n \times n$ türünde birim matrise karşılık gelmektedir. Başlangıç koşulunun bu şekilde seçilmesi genellikle herhangi birşey yitirilmesine neden olmaz.

(1.1) denklemi için eşsiz bir çözüm bulmak olanaklıdır. Denklemin çözümü için elde edilen seri, merkezi $t = 0$ noktası olan ve yakınsaklık yarıçapı bu noktadan en yakın tekillik noktasına kadar olan uzaklıkla verilen çemberin çevrelediği bölgede yakınsak bir seridir [50]. Çözümdeki tekillikler $\mathbf{A}(t)$ matrisinin tekillikleri ile doğrudan ilintilidir. Ancak bu çalışmada $\mathbf{A}(t)$ matrisi bir çokterimli matris olarak seçildiğinden t -karmaşık sayı düzleminin herhangi bir sonlu noktasında bu işlevin tekilliklerinden söz edilemez.

(4.8) bağıntısına geri dönecek olunursa, elde edilen bu özyineli ilişki sayıl denklem çözümünde olduğu gibi yerel olmayan bir yapı sergilemektedir. Bu nedenle bu açılım sayısal çözüm elde etmede kullanışsızdır. Bu çalışmada sıradan türevli denklem yalnızca iki terimli bir özyineleme oluşturacak değişik bir yapıya dönüştürülecektir. Aslında türevli denkleme birinci mertebeden bir değişim denklemi ile yaklaştırım yapılacaktır. Bu sonuca ulaşmak için uzay genişletme yaklaşımı kullanılmaktadır.

4.2 Uzay Genişletme Kavramı ile Okubo Biçimi'nin Elde Edilmesi

4.2.1 Sayıl Türevli Denklemlerde Uzay Genişletme

Bu bölümde (4.1) sırasayısı ile verilen türevli denklem uzay genişletme kavramı kullanılarak evrensel bir yapıya dönüştürülecektir. Anlaşılabilirlik sağlanması açısından basit örneklerle anlatılacak olan bu dönüşüm daha sonra en genel biçimiyle verilecektir. Oluşturulan evrensel biçimin seri çözümü ise bir sonraki alt bölümde anlatılmaktadır.

Örnek - 1: Uzay genişletme kavramının türevli denklemlere uygulandığını açık bir şekilde görebilmek için

$$\frac{dx(t)}{dt} = (a_0 + a_1 t)x(t), \quad x(0) = c \quad (4.10)$$

denklemi ilk örnek çalışma olarak seçilmiştir. Uzay genişletme kavramı kullanılarak denkleme çözüm üretilirken $a(t)$ katsayı işlevinin derecesine bağlı olarak uzay genişletme mertebesi belirlenir. Bu örnekte katsayı işlevi birinci dereceden bir çokterimli olduğundan, ve ayrıca, a_0 ve a_1 gibi iki katsayı ile tanımlandığından uzay genişletme mertebesi 2'ye eşit olarak seçilir. Bu bağlamda $x(t)$ işlevi iki yeni bilinmeyen işlevin doğrusal birleştirimi olarak öngörüülecektir. Bilinmeyen işlevler t 'nin tek ve çift tamsayı üslü terimleri ayrı ayrı toplanacak biçimde iki ayrı seri olarak yazılmaktadır. Böylece, $x(t)$ işlevi için, x_1 ve x_2 t 'nin bu anda bilinmeyen çift işlevleri olmak üzere,

$$x(t) = x_0(t^2) + tx_1(t^2) \quad (4.11)$$

öngörümü yapılır ve $y \equiv t^2$ tanımlaması bu bağıntıda yerine konularak

$$x(t,y) = x_0(y) + tx_1(y) \quad (4.12)$$

anlatımı elde edilir. $x(t)$ işlevi için yapılan bu öngörüm (4.10) sırasayılı denklemde yerine konulursa

$$\frac{dx_0(y)}{dy} \frac{dy}{dt} + x_1(y) + t \frac{dx_1(y)}{dy} \frac{dy}{dt} = (a_0 + a_1 t) [x_0(y) + t x_1(y)] \quad (4.13)$$

eşitliği ve buradan da

$$2t \frac{dx_0(y)}{dy} + 2y \frac{dx_1(y)}{dy} = [a_0 + a_1 t] x_0(y) + [-1 + a_0 t + a_1 y] x_1(y) \quad (4.14)$$

denklemini elde edilir. t içeren ve içermeyen terimlerin eşitliğin her iki yanındaki katsayıları birbirlerine eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} \frac{dx_0(y)}{dy} &= \frac{1}{2} (a_0 x_1(y) + a_1 x_0(y)) \\ \frac{dx_1(y)}{dy} &= \frac{1}{2y} (a_0 x_0(y) - x_1(y)) + \frac{1}{2} a_1 x_1(y) \end{aligned} \quad (4.15)$$

biçimindeki iki bağıntı yazılabilir. İki bağıntıdan oluşan bu denklem takımı yeniden düzenlenip matris yapısında yazılacak olursa aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\frac{d}{dy} \begin{bmatrix} x_0(y) \\ x_1(y) \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} & \frac{a_0}{2} \\ 0 & \frac{a_1}{2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_0(y) \\ x_1(y) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Bu takım $\theta_0^{(1)}$ ve $\theta_1^{(1)}$ sırasıyla

$$\theta_0^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

ve

$$\theta_1^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

olmak üzere aşağıda verilen matris biçimli bağıntıya dönüştürülebilir

$$\mathbf{z}'(y) = \left[\frac{1}{y} \theta_0^{(1)} + \theta_1^{(1)} \right] \mathbf{z}(y). \quad (4.19)$$

Elde edilen bu yapıya Okubo Biçimi denilmektedir [8, 9, 51]. Bu eşitlikte verilen (1) üstsimgelemesi 1. mertebe uzay genişletmeye karşılık gelmektedir.

Örnek - 2: İkinci bir çalışma örneği olarak bu kez,

$$\frac{dx(t)}{dt} = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) x(t), \quad x(0) = c \quad (4.20)$$

denklemini seçilmiştir. Bu türevli denklemin uzay genişletme çözümü için bu kez $y \equiv t^3$ tanımlaması yapılır ve x işlevi için

$$x(t) = x_0(t^3) + tx_1(t^3) + t^2x_2(t^3) \quad (4.21)$$

yani

$$x(t, y) = x_0(y) + tx_1(y) + t^2x_2(y) \quad (4.22)$$

yapısı öngörülür. Bu yapı (4.20) sırasayılı denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} \frac{dx_0(y)}{dy} \frac{dy}{dt} + x_1(y) + t \frac{dx_1(y)}{dy} \frac{dy}{dt} + 2tx_2(y) + t^2 \frac{dx_2(y)}{dy} \frac{dy}{dt} \\ = (a_0 + a_1t + a_2t^2) [x_0(y) + tx_1(y) + t^2x_2(y)] \end{aligned} \quad (4.23)$$

eşitliği ve buradan da

$$\begin{aligned} 3t^2 \frac{dx_0(y)}{dy} + 3y \frac{dx_1(y)}{dy} + 3ty \frac{dx_2(y)}{dy} &= a_0x_0(y) - x_1(y) \\ &+ [a_1x_0(y) + a_0x_1(y) + (a_2y - 2)x_2(y)]t \\ &+ [a_2x_0(y) + a_1x_1(y) + a_0x_2(y)]t^2 \\ &+ [a_2x_1(y) + a_1x_2(y)]y \end{aligned} \quad (4.24)$$

denklemini elde edilir. t , t^2 ve salt y içeren terimlerin katsayıları karşılıklı olarak birbirlerine eşitlendiğinde bu kez

$$\begin{aligned} \frac{dx_0(y)}{dy} &= \frac{1}{3} (a_0x_2(y) + a_1x_1(y) + a_2x_0(y)) \\ \frac{dx_1(y)}{dy} &= \frac{1}{3y} (a_0x_0(y) - x_1(y)) + \frac{1}{3} (a_1x_2(y) + a_2x_1(y)) \\ \frac{dx_2(y)}{dy} &= \frac{1}{3y} (a_0x_1(y) + a_1x_0(y) - 2x_2(y)) + \frac{1}{3} a_2x_2(y) \end{aligned} \quad (4.25)$$

biçimindeki denklem takımını yazmak olanaklıdır. Bu denklem takımı düzenlenip matris biçiminde yazılacak olursa aşağıdaki yapı elde edilir

$$\frac{d}{dy} \begin{bmatrix} x_0(y) \\ x_1(y) \\ x_2(y) \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ a_1 & a_0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_2}{3} & \frac{a_1}{3} & \frac{a_0}{3} \\ 0 & \frac{a_2}{3} & \frac{a_1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{a_2}{3} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_0(y) \\ x_1(y) \\ x_2(y) \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Bu anlatım bu kez

$$\boldsymbol{\theta}_0^{(2)} \equiv \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_0 & -1 & 0 \\ a_1 & a_0 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

ve

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(2)} \equiv \frac{1}{3} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

olmak üzere

$$\mathbf{z}'(y) = \left[\frac{1}{y} \boldsymbol{\theta}_0^{(2)} + \boldsymbol{\theta}_1^{(2)} \right] \mathbf{z}(y) \quad (4.29)$$

biçimindeki matris biçimli bağıntıya dönüştürülebilir. Yani denklem takımı yine Okubo Biçimi'ne dönüştürülmüştür. Bu eşitlikte verilen (2) üstsimgemesi 2. mertebe uzay genişletmeye karşılık gelmektedir.

Bu iki örnek gözönünde bulundurularak $a(t)$ katsayı işlevinin ve bilinmeyen $x(t)$ işlevinin herhangi dereceden bir çok terimli olmaları durumunda, m çokterimlinin mertebesi olmak üzere, Okubo Biçimi için en genel biçim, $y \equiv t^{m+1}$ tanımlaması yapılarak,

$$\frac{d}{dy} \begin{bmatrix} x_0(y) \\ x_1(y) \\ \vdots \\ x_m(y) \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_0}{m+1} & -\frac{1}{m+1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{m-1}}{m+1} & \cdots & \frac{a_0}{m+1} & -\frac{m}{m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_m}{m+1} & \cdots & \frac{a_0}{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{a_m}{m+1} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_0(y) \\ x_1(y) \\ \vdots \\ x_m(y) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

biçiminde elde edilir. Bu yapının bu kez, $\boldsymbol{\theta}_0^{(m)}$ ve $\boldsymbol{\theta}_1^{(m)}$ sırasıyla

$$\boldsymbol{\theta}_0^{(m)} \equiv \frac{1}{m+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{m-1} & \cdots & a_0 & -m \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

ve

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(m)} \equiv \frac{1}{m+1} \begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 \\ 0 & a_m & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

olmak üzere, Okubo Biçimi'nde yazılabildiği görülmektedir

$$\mathbf{z}'(y) = \left[\frac{1}{y} \boldsymbol{\theta}_0^{(m)} + \boldsymbol{\theta}_1^{(m)} \right] \mathbf{z}(y). \quad (4.33)$$

Bu eşitlikte (m) ile verilen üstsimgeleme, m . mertebe uzay genişletmeye karşılık gelmektedir.

4.2.2 Matris Katsayılı Türevli Denklemlerde Uzay Genişletme

Bu bölümün ikinci aşamasında (1.1) bağıntısı ile verilen matris katsayılı türevli denkleme uzay genişletme yaklaşımı uygulanmakta ve bu denklem Okubo Biçimi'ne indirgenmektedir. (1.1) sırasayılı denklemde $\mathbf{A}(t)$ 'nin, $n \times n$ türünde bir matris katsayı işleve, $\mathbf{X}(t)$ 'nin ise yine $n \times n$ türünde bilinmeyen matris işleve karşılık geldiği, her iki matris değerli işlevin de t 'ye bağlı olduğu, bileşenlerinin gerçel değerli olduğu daha önce de belirtilmişti.

Örnek - 1: (1.1) ile verilen türevli denklemde $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisinin

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + t\mathbf{A}_1 \quad (4.34)$$

biçiminde seçildiğini varsayalım. Bilinmeyen $\mathbf{X}(t)$ matrisi içinse

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(t^2) + t\mathbf{X}_1(t^2) \quad (4.35)$$

öngörümünde bulunalım. $y \equiv t^2$ tanımlaması yapılır ve bu tanımlama (4.35) sırasayılı eşitlikte yerine konulursa

$$\mathbf{X}(t,y) = \mathbf{X}_0(y) + t\mathbf{X}_1(y) \quad (4.36)$$

bağıntısı elde edilir. (4.34) ve (4.36) sırasayılı bağıntılar (1.1) denklemde yerine konulduğunda

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{X}_0(y) + t(\mathbf{A}_0\mathbf{X}_1(y) + \mathbf{A}_1\mathbf{X}_0(y)) + t^2\mathbf{A}_1\mathbf{X}_1(y) \quad (4.37)$$

eşitliğine ulaşılır. $\mathbf{X}(t)$ matrisinin türevi açık bir şekilde bu bağıntıda yerine konulursa

$$2t \frac{d\mathbf{X}_0(y)}{dy} + 2y \frac{d\mathbf{X}_1(y)}{dy} + \mathbf{X}_1(y) = \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0(y) + y \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1(y) + t(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_1(y) + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_0(y)) \quad (4.38)$$

denklemini elde edilir. t içeren ve içermeyen terimlerin, denklemin her iki yanındaki katsayıları birbirlerine eşitlendiğinde aşağıdaki denklem takımını yazmak olanaklıdır

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}_0(y)}{dy} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_1(y) + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_0(y)) \\ \frac{d\mathbf{X}_1(y)}{dy} &= \frac{1}{2y} (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0(y) - \mathbf{X}_1(y)) + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1(y). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Bu denklem takımı yeniden düzenlenip

$$\frac{d}{dy} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(y) \\ \mathbf{X}_1(y) \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{y} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{A}_1}{2} & \frac{\mathbf{A}_0}{2} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{A}_1}{2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(y) \\ \mathbf{X}_1(y) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

biçimindeki matris yapısına dönüştürülür. Bu bağıntı, üstsimgeleme (1) uzay genişletme mertebesini göstermek üzere, açık yapıları

$$\boldsymbol{\theta}_0^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

ve

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

biçiminde verilen $\boldsymbol{\theta}_0^{(1)}$ ve $\boldsymbol{\theta}_1^{(1)}$ matrisleri kullanılarak

$$\mathbf{Z}'(y) = \left[\frac{1}{y} \boldsymbol{\theta}_0^{(1)} + \boldsymbol{\theta}_1^{(1)} \right] \mathbf{Z}(y) \quad (4.43)$$

Okubo Biçimi'ne dönüştürülmüştür. $\boldsymbol{\theta}_0^{(1)}$ ve $\boldsymbol{\theta}_1^{(1)}$ matrislerinin sayıl denklemde elde edilen Okubo Biçimi'ndeki aynı isimli matrislerden ayrılığı bu bağıntıdaki matrislerin öğelerinin öbek (ing: block) yapıda olmasıdır. Ayrıca bir önceki yapıda bilinmeyenler \mathbf{z} yöneyi ile verilirken bu kez bilinmeyenler öbek yapıdaki \mathbf{Z} matrisi ile verilmektedir.

Örnek - 2 : İkinci bir çalışma örneğinde bu kez $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisinin

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + t\mathbf{A}_1 + t^2\mathbf{A}_2 \quad (4.44)$$

biçiminde ikinci dereceden bir çokterimli olarak verildiğini varsayalım. Bilinmeyen $\mathbf{X}(t)$ matrisi içinse

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(t^3) + t\mathbf{X}_1(t^3) + t^2\mathbf{X}_2(t^3) \quad (4.45)$$

öngörümünü yapalım. $y \equiv t^3$ tanımlaması yapılır ve bu tanımlama yukarıdaki denklemde yerine konulursa $\mathbf{X}(t)$ matrisi

$$\mathbf{X}(t, y) = \mathbf{X}_0(y) + t\mathbf{X}_1(y) + t^2\mathbf{X}_2(y) \quad (4.46)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. (4.44) ve (4.46) eşitlikleri (1.1) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'(t) &= \mathbf{A}_0\mathbf{X}_0(y) + t(\mathbf{A}_0\mathbf{X}_1(y) + \mathbf{A}_1\mathbf{X}_0(y) + y\mathbf{A}_2\mathbf{X}_2(y)) \\ &+ t^2(\mathbf{A}_0\mathbf{X}_2(y) + \mathbf{A}_1\mathbf{X}_1(y) + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_0(y)) + y(\mathbf{A}_1\mathbf{X}_2(y) + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_1(y)) \end{aligned} \quad (4.47)$$

bağıntısı oluşur. $\mathbf{X}(t)$ matrisinin türevi alınıp açık bir şekilde bu bağıntıda yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} 3t^2 \frac{d\mathbf{X}_0(y)}{dy} + t \left(2\mathbf{X}_2(y) + 3y \frac{d\mathbf{X}_2(y)}{dy} \right) &+ 3y \frac{d\mathbf{X}_1(y)}{dy} + \mathbf{X}_1(y) = \mathbf{A}_0\mathbf{X}_0(y) \\ &+ t(\mathbf{A}_0\mathbf{X}_1(y) + \mathbf{A}_1\mathbf{X}_0(y) + y\mathbf{A}_2\mathbf{X}_2(y)) \\ &+ t^2(\mathbf{A}_0\mathbf{X}_2(y) + \mathbf{A}_1\mathbf{X}_1(y) + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_0(y)) \\ &+ y(\mathbf{A}_1\mathbf{X}_2(y) + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_1(y)) \end{aligned} \quad (4.48)$$

denklemini elde edilir. t içeren ve içermeyen terimlerin, denklemin her iki yanındaki katsayıları birbirlerine eşitlendiğinde aşağıdaki denklem takımını yazmak olanaklıdır

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}_0(y)}{dy} &= \frac{1}{3}(\mathbf{A}_0\mathbf{X}_2(y) + \mathbf{A}_1\mathbf{X}_1(y) + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_0(y)) \\ \frac{d\mathbf{X}_1(y)}{dy} &= \frac{1}{3y}(\mathbf{A}_0\mathbf{X}_0(y) - \mathbf{X}_1(y)) + \frac{1}{3}(\mathbf{A}_1\mathbf{X}_2(y) + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_1(y)) \\ \frac{d\mathbf{X}_2(y)}{dy} &= \frac{1}{3y}(\mathbf{A}_0\mathbf{X}_0(y) + \mathbf{A}_1\mathbf{X}_0(y) - 2\mathbf{X}_2(y)) + \frac{1}{3}\mathbf{A}_2\mathbf{X}_2(y). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Bu denklem takımı yeniden düzenlenip matris yapısında yazılabilir. Bu durumda denklem takımı

$$\frac{d}{dy} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(y) \\ \mathbf{X}_1(y) \\ \mathbf{X}_2(y) \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{y} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{A}_0}{3} & -\frac{\mathbf{I}}{3} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{A}_1}{3} & \frac{\mathbf{A}_0}{3} & -\frac{2\mathbf{I}}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{A}_2}{3} & \frac{\mathbf{A}_1}{3} & \frac{\mathbf{A}_0}{3} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{A}_2}{3} & \frac{\mathbf{A}_1}{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{A}_2}{3} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(y) \\ \mathbf{X}_1(y) \\ \mathbf{X}_2(y) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

biçimine dönüşür. Bu anlatım, üstsimgeleme (2) uzay genişletme mertebesini göstermek üzere, açık yapıları sırasıyla

$$\boldsymbol{\theta}_0^{(2)} \equiv \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -2\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

ve

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(2)} \equiv \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

biçiminde verilen $\boldsymbol{\theta}_0^{(2)}$ ve $\boldsymbol{\theta}_1^{(2)}$ matrisleri kullanılarak

$$\mathbf{Z}'(y) = \left[\frac{1}{y} \boldsymbol{\theta}_0^{(2)} + \boldsymbol{\theta}_1^{(2)} \right] \mathbf{Z}(y) \quad (4.53)$$

matris biçimli bağıntıya yani Okubo Biçimi'ne dönüştürülmüştür.

Bu iki örnek gözönünde bulundurularak $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisinin ve $\mathbf{X}(t)$ bilinmeyen matrisinin herhangi dereceden iki çokterimli olmaları durumu incelenebilir. m çokterimlinin mertebesi olmak üzere, $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisi aşağıdaki gibi verilebilir

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + t\mathbf{A}_1 + \cdots + t^m \mathbf{A}_m. \quad (4.54)$$

$\mathbf{X}(t)$ bilinmeyen matris işlevi için

$$\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}_0(t^{m+1}) + t\mathbf{X}_1(t^{m+1}) + \cdots + t^m \mathbf{X}_m(t^{m+1}) \quad (4.55)$$

varsayımı yapılır ve yeni değişken $y \equiv t^{m+1}$ biçiminde tanımlanırsa $\mathbf{X}(t)$ matris işlevi

$$\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}_0(t, y) + t\mathbf{X}_1(t, y) + \cdots + t^m \mathbf{X}_m(t, y) \quad (4.56)$$

yapısına dönüşür. (4.54) ve (4.56) sırasayılı bağıntılar (1.1) denkleminde yerine konur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa yeniden Okubo Biçimi elde edilir

$$\mathbf{Z}'(y) = \left[\frac{1}{y} \boldsymbol{\theta}_0^{(m)} + \boldsymbol{\theta}_1^{(m)} \right] \mathbf{Z}(y). \quad (4.57)$$

(4.57) eşitliğinde $\mathbf{Z}(y)$,

$$\mathbf{Z}(y)^T = [\mathbf{X}_0(y) \ \cdots \ \mathbf{X}_m(y)] \quad (4.58)$$

biçimindedir. $\boldsymbol{\theta}_0^{(m)}$ ve $\boldsymbol{\theta}_1^{(m)}$ matrisleri ise sırasıyla

$$\boldsymbol{\theta}_0^{(m)} \equiv \frac{1}{m+1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{m-1} & \cdots & \mathbf{A}_0 & -m\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

ve

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(m)} \equiv \frac{1}{m+1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{A}_{m-1} & \cdots & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_m & \cdots & \mathbf{A}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

biçiminde verilir. Bu eşitliklerde (m) ile verilen üstsimgeleme, m . mertebe uzay genişletmeye karşılık gelmektedir.

4.3 Okubo Biçimi'nin Seri Çözümü ve Tekillikleri

Bu bölümde amaç, Okubo Biçimi'ne y 'nin sonlu bir değerini açılım noktası olarak alan serisel bir çözüm üretmektir. Bu durumda açılım noktasının konumu serisel çözümün davranışını belirleyecek temel değiştirge görevini üstlenir. Eğer, açılım noktası olma özelliği a altsimgelemesi ile yansıtılan y_a değiştirgesinde bir açılımdan söz etmek istersek, \mathbf{Z}_i terimleri y 'den bağımsız açılım katsayıları olmak üzere,

$$\mathbf{Z}(y) = \sum_{i=0}^{\infty} (y - y_a)^{i+\alpha} \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{Z}_0 \neq 0 \quad (4.61)$$

tanım eşitliği yazılabilir. Açılım noktasında çözümde varolması olası olan bir dallanma tekilliğini yansıtmak için $y = y_a$ 'da üstel bir davranış veren α değiştirgesi kullanılmaktadır. (Burada \mathbf{Z}_0 matrisi için 0 olmama koşullaması yapılmaktadır. Böyle yapmakla genellikle herhangi bir yitime neden olunmaz.) (4.57) sırasayılı eşitlikte y yerine $y - y_a$ konulduğunda Okubo Biçim'i

$$(y - y_a) \mathbf{Z}'(y) + y_a \mathbf{Z}'(y) = (\boldsymbol{\theta}_0 + (y - y_a) \boldsymbol{\theta}_1 + y_a \boldsymbol{\theta}_1) \mathbf{Z}(y) \quad (4.62)$$

yapısında yeniden yazılabilir. (4.61) ile verilen serisel yapı bu eşitlikte yerine konulduğunda

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} (i + \alpha)(y - y_a)^{i+\alpha} \mathbf{Z}_i + \sum_{i=0}^{\infty} (i + \alpha)y_a(y - y_a)^{i+\alpha-1} \mathbf{Z}_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (y - y_a)^{i+\alpha} \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_i + \sum_{i=0}^{\infty} (y - y_a)^{i+\alpha+1} \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_i \\
& \quad + \sum_{i=0}^{\infty} y_a(y - y_a)^{i+\alpha} \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_i \tag{4.63}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada i yerine birinci, üçüncü ve beşinci toplamlarda $(i - 1)$, dördüncü toplamda ise $(i - 2)$ yerleştirilirse yukarıdaki denklem yeniden aşağıdaki gibi yazılır

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} (i + \alpha - 1)(y - y_a)^{i+\alpha-1} \mathbf{Z}_{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} (i + \alpha)y_a(y - y_a)^{i+\alpha-1} \mathbf{Z}_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (y - y_a)^{i+\alpha-1} \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_{i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} (y - y_a)^{i+\alpha-1} \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-2} \\
& \quad + \sum_{i=1}^{\infty} y_a(y - y_a)^{i+\alpha-1} \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-1}. \tag{4.64}
\end{aligned}$$

Bu yapıdan, uygun terim ayırmalarıyla oluşturulan aynı tür serilerin ve diğer terimlerin bir yanda toplanmasıyla,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=2}^{\infty} (y - y_a)^{i+\alpha-1} [(i + \alpha - 1)\mathbf{Z}_{i-1} + (i + \alpha)y_a \mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_{i-1} - \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-2} - y_a \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-1}] \\
&+ (\alpha - 1)y_a(y - y_a)^{\alpha-1} \mathbf{Z}_0 - (y - y_a)^{\alpha} [\boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_0 + y_a \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_0 - \alpha y_a \mathbf{Z}_1] = \mathbf{0} \tag{4.65}
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada \mathbf{Z}_i katsayıları y 'den bağımsız olmaları gerektiğinden y 'nin değişik üslülerinin katsayıları 0 olmalıdır. Böylece, tüm eşitliklerin, gerçekte varolmayan eksi altsırasayıllı bilinmeyenlerin 0 varsayılmasıyla tek bir yapıda toplanması

$$\begin{aligned}
& [(i + \alpha - 1)\mathbf{Z}_{i-1} + (i + \alpha)y_a \mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_{i-1} - \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-2} - y_a \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-1}] = \mathbf{0} \\
& \mathbf{Z}_i \equiv \mathbf{0}, \quad i < 0 \tag{4.66}
\end{aligned}$$

denklemini verir. Bu denklemlerin ilki aşağıdaki yapıdadır

$$\alpha y_a \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}. \tag{4.67}$$

$\mathbf{Z}_0 \neq \mathbf{0}$ koşullamasından dolayı bu denklem $\alpha y_a = 0$ sayıl denklemine eşdeğerdir. Bu nedenle, y_a açılım noktası 0 olmadıkça α değerinin 0 olması gerekir. Bu durumda, (4.61) açılımı Taylor Serisi yapısında bir üslümler toplamına dönüşür. $\alpha = 0$ durumunda (4.66) denklemi

$$[(i-1)\mathbf{Z}_{i-1} + iy_a\mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\theta}_0\mathbf{Z}_{i-1} - \boldsymbol{\theta}_1\mathbf{Z}_{i-2} - y_a\boldsymbol{\theta}_1\mathbf{Z}_{i-1}] = \mathbf{0}, \quad (4.68)$$

$$\mathbf{Z}_i \equiv \mathbf{0}, \quad i < 0 \quad (4.69)$$

yapısına bürünür. Bu da,

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{C}, \quad \mathbf{Z}_1 = \left[\frac{1}{y_a}\boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\theta}_1 \right] \mathbf{C} \quad (4.70)$$

başlangıç koşullu aşağıdaki ikinci mertebeden özyineli ilişkiyi verecektir

$$\mathbf{Z}_i = \frac{1}{i} \left[\boldsymbol{\theta}_1 + \frac{1}{y_a}\boldsymbol{\theta}_0 - \frac{i-1}{y_a}\mathbf{I} \right] \mathbf{Z}_{i-1} + \frac{1}{iy_a}\boldsymbol{\theta}_1\mathbf{Z}_{i-2}. \quad (4.71)$$

Burada \mathbf{I} , birim matrisi, \mathbf{C} ise belirsiz bir matrisi simgelemektedir. \mathbf{C} matrisinin değeri verildiğinde çözüm tektir. (4.71) ile verilen yapı başlangıç koşullu ve üç ardışık terimli bir özyinelemedir. Üç terimli özyineleme kuramsal incelemelerde çok kullanışlı değildir. Yukarıdaki incelemeler y_a sıfır olmadıkça Okubo Biçimi'nin çözümünün y_a noktasında Taylor serisine açılabilmesini göstermektedir. Bu da y_a merkezli boş olmayan bir bölgede bu denklemin çözümünün analitik olacağını göstermektedir, y_a değerlerine ya da noktalarına da denklemin düzgün noktaları denir. Elde edilen seri salt $y = y_a$ noktasında yakınsak olup onun dışında ıraksayabilir. Bu durumda, geriye düzgün olmama kuşkusu taşıyan iki y değeri kalır. Bunlar 0 ve sonsuz değerleridir.

y_a 'nın sıfır değerinden Okubo Biçimi'nin çözümlerinin davranışlarını algılayabilmek için (4.66) denklemde $y_a = 0$ alınırsa \mathbf{Z}_i içeren terim yok olur yalnızca \mathbf{Z}_{i-1} ve \mathbf{Z}_{i-2} içeren terimler kalır. Böylece özyinelemenin mertebesi ikiden bire düşer. Bir özyinelemede bir değiştirgenin bazı değerlerinin mertebe düşürmesi durumunda, büyük yapısal değişiklik yaratıldığından, o değerler özyinelemenin değiştirgesel tekillikleri olarak nitelendirilirler. Burada sonlu y_a değerlerinden yalnızca 0 değeri bu olguya neden olmaktadır. Dolayısıyla $y_a = 0$, (4.66) denkleminin bir değiştirgesel tekilliğidir. $y_a = 0$ için (4.66) denklemde i yerine $i+1$ yerleştirilirse

$$[(i+\alpha)\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0]\mathbf{Z}_i = \boldsymbol{\theta}_1\mathbf{Z}_{i-1}, \quad \mathbf{Z}_i \equiv \mathbf{0}, \quad i < 0 \quad (4.72)$$

elde edilir. $i = 0$ olduğunda bu denklemin aldığı yapı

$$[\alpha \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0] \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0} \quad (4.73)$$

biçimindedir. Bu $\boldsymbol{\theta}_0$ matrisinin izgesel (ing: spectral) sorunu olup α ancak ve ancak $\boldsymbol{\theta}_0$ 'ın özdeğerlerinden birine eşit olabilir. Eşit olduğunda da, \mathbf{Z}_0 'ın o özdeğere karşılık gelen özyöneyle bir değişmez yöneyin dış çarpımı olması gerekir. Bunun dışında apaçık çözüm olan $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$ elde edilir ve α belirsiz kalır ki o da \mathbf{Z}_0 'ın baştaki sıfırdan farklı olma öngörümü ile çelişir. Böylece α 'nın artık sıfır olmayan değerler alabildiği ve bu değerlerin artı tamsayı da olmayabileceği görülmektedir. Böyle bir durumda, Okubo Biçimi'nin çözümünde α 'nın değerine bağımlı olarak dallanma tekilliği gözlenebilir. Çünkü, tamsayı olmayan tüm özdeğerler çözümde dallanma tekilliği yaratırlar. Bu yüzden α değerlerinden bazıları dallanma yaratmasa da, $y_a = 0$ değerine ya da noktasına Okubo Biçimi'nin tekilliği denir. Sıradan türevli denklemlerde dallanma tekilliği yaratan çarpanlar dışında içerilen çarpan işlevler yakınsak serilerden oluşan yapıdaysalar bu tür tekilliklere düzgün tekillik (ing: regular singularity) denir. $y_a = 0$ noktası Okubo Biçimi'nin bir düzgün tekillik noktasıdır. Bu denklemin diğer bir dallanma noktası da $y_a = \infty$ noktasıdır. Bunu açıkça görebilmek için $y_a = 1/y_{a_1}$ dönüşümünün yapılması ve $y_{a_1} = 0$ noktasının durumunun incelenmesi gerekir.

(4.72) sırasayılı eşitlik, (1.1) sırasayılı eşitlikle verilen sıradan türevli denklem Okubo Biçimi'ne dönüştürüldükten sonra $y_a = 0$ dolaylarında seriye açılarak da elde edilebilir. $y_a = 0$ noktası denklemin bir tekil noktası olduğundan seri açılımda α terimi kullanılarak olası dallanmalı yapı çözüme yansıtılmalıdır [43]. $\mathbf{Z}(y)$ işlevi $y = 0$ dolaylarında seriye açıldığında işlev ve işleve ait birinci türev aşağıdaki gibi elde edilir

$$\mathbf{Z}(y) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{i+\alpha} \mathbf{Z}_i \quad (4.74)$$

$$\mathbf{Z}'(y) = \sum_{i=0}^{\infty} (i + \alpha) y^{i+\alpha-1} \mathbf{Z}_i. \quad (4.75)$$

Bu eşitlikler oluşturulan (4.57) sırasayılı Okubo Biçimi'nde yerine yazıldığında

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i + \alpha) y^{i+\alpha-1} \mathbf{Z}_i = \left[\frac{1}{y} \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\theta}_1 \right] \sum_{i=0}^{\infty} y^{i+\alpha} \mathbf{Z}_i, \quad (4.76)$$

bağıntısı ve buradan da

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i + \alpha) y^{i+\alpha-1} \mathbf{Z}_i = \sum_{i=0}^{\infty} y^{i+\alpha-1} \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_i + \sum_{i=0}^{\infty} y^{i+\alpha} \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_i \quad (4.77)$$

bağıntısı elde edilir. (Bu eşitliklerde Okubo Biçimi'nin derecesi gösterimde kolaylık sağlanması açısından kullanılmamıştır). Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(\alpha \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_0) y^{\alpha-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[(i + \alpha) \mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-1} \right] y^{i+\alpha-1} = 0 \quad (4.78)$$

eşitliğine varılır. $y^{\alpha-1}$ ve $y^{i+\alpha-1}$ terimlerine ait katsayılar sıfırlandığında doğal sayı üsler serisini oluşturan \mathbf{Z}_i yöneylerine ait özyineli ilişki

$$\left[(i + \alpha) \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0 \right] \mathbf{Z}_i = \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-1}, \quad \mathbf{Z}_{-1} \equiv 0, \quad i \geq 0 \quad (4.79)$$

yapısında elde edilir. (4.59) sırasayılı eşitlikte görüleceği gibi $\boldsymbol{\theta}_0$ matrisi tekil bir matristir, tersi alınamaz. Bu matrisin özdeğerleri sırasıyla $0, -\frac{1}{m+1}, \dots, -\frac{m}{m+1}$ biçimindedir. Dolayısıyla, (4.79) sırasayılı anlatımda $i = 0$ olduğunda elde edilecek eşitlikten görülebileceği üzere α özdeğerlerden birine eşit olmak durumundadır. Çünkü bu denklemde $i = 0$ olarak seçildiğinde denklem,

$$\boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_0 = \alpha \mathbf{Z}_0 \quad (4.80)$$

biçiminde bir özdeğer bulma problemine dönüşmektedir.

$$\boldsymbol{\phi}_0(i) \equiv \left[(i + \alpha) \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0 \right], \quad \boldsymbol{\phi}_1 \equiv \boldsymbol{\theta}_1 \quad (4.81)$$

tanımlamaları yapılacak olunursa, (4.79) sırasayılı eşitlik

$$\boldsymbol{\phi}_0(i) \mathbf{Z}_i = \boldsymbol{\phi}_1 \mathbf{Z}_{i-1} \quad (4.82)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Burada α ilk özdeğere eşit alındığında, $i \geq 1$ iken

$$\boldsymbol{\phi}_0(i) = \frac{1}{m+1} \begin{bmatrix} i\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_0 & (i+1)\mathbf{I} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}_{m-1} & \cdots & -\mathbf{A}_0 & (i+m)\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

ve

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \frac{1}{m+1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{A}_{m-1} & \cdots & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_m & \cdots & \mathbf{A}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{\phi}_0(i) \mathbf{Z}_i^{(\alpha_1)} = \boldsymbol{\phi}_1 \mathbf{Z}_{i-1}^{(\alpha_1)} \quad (4.85)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin çözümünün olabilmesi için soldaki katsayı matrisinin tüm i değerleri için tersinin alınabiliyor olması yeterlidir. Bu katsayı matrisinin tersinin alınabilirliğinin önemli olan yeterlilik koşulu, α 'nın alabileceği değerlerin birbirini artı tamsayı değişimlerle izlememesidir. Eğer, sözgelimi k bir artı tamsayı olmak üzere, α_1 ve $\alpha_1 + k$, θ_0 matrisinin iki özdeğeri ise yukarıdaki özyinelemede α yerine α_1 alındığında $i = k$ için katsayı matrisi tersi alınamaz duruma gelir. Ancak burada θ_0 matrisinin özdeğerleri birbirini artı tamsayı değişimle izlemezler. Bu durumda, $\phi_0(i)$ matrisi tersi tüm ilgili i değerleri için alınabilen bir matris olduğundan aşağıdaki özyineli ilişki elde edilir

$$\mathbf{Z}_i^{(\alpha_1)} = [\phi_0(i)]^{-1} \phi_1 \mathbf{Z}_{i-1}^{(\alpha_1)}. \quad (4.86)$$

Bu eşitliklerde $\mathbf{Z}_i^{(\alpha_1)}$ matrisinde üstsimgeleme olarak kullanılan (α_1) , denklemlerin birinci özdeğer kullanılarak oluşturulduğunu göstermektedir. Bu özyineli ilişki diğer özdeğerler için de elde edilmelidir. Her bir üstel değıştirgeye karşılık gelen serisel yapı diğerinden doğrusal bağımsızdır ve ayrı ayrı birer çözüm oluştururlar

$$\mathbf{Z}_i^{(\alpha_j)} = [\phi_0(i)]^{-1} \phi_1 \mathbf{Z}_{i-1}^{(\alpha_j)}, \quad j = 1, \dots, m + 1. \quad (4.87)$$

Elde edilen çözüm

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i &= [(\alpha + i)\mathbf{I} - \theta_0]^{-1} \theta_1 \times \dots \times [(\alpha + 1)\mathbf{I}_n - \theta_0]^{-1} \theta_1 \mathbf{Z}_0 \\ &= \left[\prod_{j=1}^i [(\alpha + i + 1 - j)\mathbf{I} - \theta_0]^{-1} \theta_1 \right] \mathbf{Z}_0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.88)$$

biçiminde de yazılabilir. Böylece Okubo Biçimi'nin çözümü

$$\mathbf{Z}(y) = y^\alpha \left(\sum_{i=0}^{\infty} y^i \left[\prod_{j=1}^i [(\alpha + i + 1 - j)\mathbf{I} - \theta_0]^{-1} \theta_1 \right] \right) \mathbf{Z}_0 \quad (4.89)$$

eşitliği ile verilebilir. Genel çözüm bunların, belirsiz katsayılarla oluşturulan, herhangi bir doğrusal birleşimidir. Doğrusal birleşimin katsayılarının belirlenmesi içinse ek koşullar gerekir. Başlangıç ya da sınır değer koşulları gibi. Burada, çarpım simgesinin üst sınırı alt sınırından küçük ise çarpım değeri \mathbf{I} olarak alınmaktadır.

Bir sonraki aşama Okubo Biçimi'ni oluşturan matrislerin ve Okubo Biçimi'nin çözümünün yakınsaklık ölçütlerinin incelenmesi olacaktır. Yakınsaklık ölçütleri yöntemin etkinliğinin belirlenmesi açısından oldukça önemlidir.

4.3.1 Yöntemin Yakınsaklık Ölçütlerinin İncelenmesi

4.3.1.1 Okubo Matrislerinin Yakınsaklık Ölçütlerinin İncelenmesi

Okubo Biçimi'nde elde edilen ve açık yapısı (4.59) ve (4.60) ile verilen θ_0 ve θ_1 matrislerinin boy özelliklerini inceleyeceğiz. (Bu bölümde elde edilen eşitlik ve eşitsizliklerin çıkarılımlarının ayrıntıları (EK-C)'de verilmektedir.)

Bundan sonra yapılacak olan çözümlenelerde aksi belirtilmedikçe matris boyu için Frobenius boy tanımı kullanılmaktadır. $p \times r$ türünde herhangi bir \mathbf{A} matrisi için Frobenius boyu, a_{ij} matrisin öğelerini ve \dagger simgesi de eşleniğinin devriğini belirtmek üzere,

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{iz}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})} \quad (4.90)$$

biçiminde verilmektedir [52].

Bu bağlamda, θ_0 ve θ_1 matrislerin boyunu veren bağıntılar aşağıdaki gibidir

$$\|\theta_0\|_F^2 = \frac{1}{(m+1)^2} \left(\sum_{i=1}^m i \|\mathbf{A}_{m-i}\|_F^2 + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \|\mathbf{I}\|_F^2 \right), \quad (4.91)$$

$$\|\theta_1\|_F^2 = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{i=0}^m (i+1) \|\mathbf{A}_i\|_F^2. \quad (4.92)$$

Bu eşitliklerde F altsimgesi Frobenius matris boyuna karşılık gelmektedir [52].

$\mathbf{A}(t)$ matrisi analitik bir matris olduğundan aşağıdaki bağıntı yazılabilir

$$\|\mathbf{A}_i\|_F^2 < \frac{B^2}{\rho^{2i}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.93)$$

Bu bağıntıda ρ , bağımsız değişkenin yakınsaklık yarıçapıdır. Diğer yandan B , $\mathbf{A}(t)$ matris boyunun merkezi sıfır noktasının çevresi olan ρ yarıçaplı çember içindeki sınırını vermektedir [53]. (4.93) sırasayılı denklem (4.92) bağıntısında yerine konulursa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\|\theta_1\|_F^2 < \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{\rho^4}{(\rho^2-1)^2} + \frac{(m+1) - (m+2)\rho^2}{\rho^{2m}(\rho^2-1)^2} \right]. \quad (4.94)$$

Bu, θ_1 matrisinin $\rho > 1$ olduğu sürece tüm m değerleri için sonlu kalacağı anlamına gelmektedir.

Şimdi (4.91) sırasayılı eşitliği yeniden gözönüne alalım. Bu bağıntıdaki toplam içeren terim ve diğer terim θ_0 matrisinin sırasıyla köşegen ve köşegen dışı öğelerine karşılık gelmektedir. Daha iyi bir analiz yapabilmek için bunların her biri ayrı ayrı ele alınabilir. $\theta_{0,O}$ ve $\theta_{0,D}$ matrislerinin θ_0 matrisinin sırasıyla köşegen dışı ve köşegen yapılarına karşılık geldiğini düşünelim. Bu durumda

$$\|\theta_{0,O}\|_F^2 = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{i=1}^m i \|\mathbf{A}_{m-i}\|_F^2 \quad (4.95)$$

ve

$$\|\theta_{0,D}\|_F^2 = \frac{nm(2m+1)}{6(m+1)} \quad (4.96)$$

eşitliklerini yazmak olanaklıdır. Burada $n \times n$ boyutlu birim matrisin Frobenius boyunun karesinin n olduğu gözönüne alınmıştır. (4.93) sırasayılı eşitsizlik (4.95) sırasayılı eşitlik içinde kullanılırsa

$$\|\theta_{0,O}\|_F^2 < \frac{B^2}{(m+1)^2(\rho^2-1)^2} \left[\frac{1}{\rho^{2m-2}} + \rho^2(m\rho^2 - m - 1) \right] \quad (4.97)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (4.96) ve (4.97) sırasayılı bağıntılar, uzay genişletme mertebesi sonsuza doğru arttıkça, köşegen yapı sınırsız bir şekilde büyürken köşegen dışı yapının sifira doğru yaklaştığını gösterir. Uzay genişletme mertebesi arttıkça θ_0 matrisi de köşegen baskın bir yapıya dönüşmektedir. Bu da seri çözüm elde ederken kullanılan bağıntılarda kolaylıklar sağlamaktadır.

4.3.1.2 Seri Çözümün Yakınsaklık Ölçütlerinin İncelenmesi

Bölüm (4.3)'de Okubo Biçimi'ne ait seri çözümün nasıl elde edildiğine kısaca değinilmişti. Seri toplamını oluşturan bilinmeyen \mathbf{Z} matrislerine ait özyineli ilişki özdeğer sıfıra eşit olduğunda

$$\phi_0(i) \equiv [i\mathbf{I} - \theta_0], \quad \phi_1 \equiv \theta_1, \quad i \geq 0, \quad (4.98)$$

olmak üzere

$$\phi_0(i)\mathbf{Z}_i = \phi_1\mathbf{Z}_{i-1} \quad (4.99)$$

biçiminde elde edilmiş, $\phi(i)$ matrisi i 'in tüm artı değerleri için tersi alınabilen bir matris olduğundan

$$\mathbf{Z}_i = [\phi_0(i)]^{-1} \phi_1\mathbf{Z}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.100)$$

eşitliği yazılmıştı. Bu durumda \mathbf{Z}_0 dışında tüm \mathbf{Z}_i matrisleri tek bir şekilde belirlenebilir.

Şimdi amacımız $\mathbf{Z}(y)$ bilinmeyen matrisinin boyu için bir büyüklük tanımlamak olacaktır. Bu bağlamda $\phi_0(i)$ matrisini kullanacağız. Bu matris için

$$\left\| [\phi_0(i)]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{i^k} \|\theta_0\|^k = \frac{1}{i - \|\theta_0\|}, \quad i > I \quad (4.101)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikteki I değeri θ_0 matrisinin boyunun en küçük tamsayı üst sınırındır. Bu eşitsizlikte izgesel boy (ing: spectral norm) kullanılmıştır. Birim matrisin izgesel boyu 1'e eşittir [52]. İzgesel boy, bir matrisin kendisi ile eşleniğinin devriğinin çarpımının en büyük özdeğerinin karekökü alınarak hesaplanır [54]. (4.100) ve (4.101) sırasayılı bağıntılar kullanılarak aşağıdaki eşitsizliği

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}_i\| &\leq \frac{1}{i - \|\theta_0\|} \|\phi_1\| \|\mathbf{Z}_{i-1}\| = \frac{\Gamma(I+1 - \|\theta_0\|)}{\Gamma(i+1 - \|\theta_0\|)} \|\phi_1\|^{i-I} \|\mathbf{Z}_I\|, \\ i &= I, I+1, \dots \end{aligned} \quad (4.102)$$

ve buradan da

$$\sum_{k=I}^{\infty} \|y\|^k \|\mathbf{Z}_k\| \leq \sum_{k=I}^{\infty} \|y\|^k \left(\frac{\Gamma(I+1 - \|\theta_0\|)}{\Gamma(k+1 - \|\theta_0\|)} \|\phi_1\|^{k-I} \right) \|\mathbf{Z}_I\| \quad (4.103)$$

eşitsizliğini yazmak olanaklıdır. Bu son eşitsizlik Okubo Biçimi'nin, y bağımsız değişkeninin tüm sonlu değerleri için, matris cebirsel bağıntılara ait bileşenler sonlu kaldığı sürece, yakınsadığını gösterir. Bu da bize seri çözümde kesme yapabilme olanağı verir.

4.3.2 Kesme Yaklaşımları ve Hata Analizi

$\mathbf{Z}(y)$ matris işlevi için aşağıdaki yaklaşım yazılabilir

$$\mathbf{Z}_{K,i}(y) \equiv \sum_{j=0}^i y^j \mathbf{Z}_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.104)$$

Bu bağıntıya bağlı olarak da $\mathbf{X}(t)$,

$$\mathbf{t}^T \equiv [1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^m] \quad (4.105)$$

olmak üzere,

$$\mathbf{X}_{K,i}(t) \equiv \mathbf{t}^T \mathbf{Z}_{K,i}(y), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.106)$$

biçiminde yazılır. Gözardı edilen terimlerin toplamı gözönüne alınırsa hata teriminin boyu

$$\|E_i(y)\| \equiv \left\| \sum_{j=i+1}^{\infty} y^j \mathbf{Z}_j \right\|, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.107)$$

biçimindedir. (4.102) sırasayılı eşitsizlikten esinlenerek hata terimi için

$$\begin{aligned} \|E_i(y)\| &\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i+2 - \|\boldsymbol{\theta}_0\|)}{\Gamma(i+2 - \|\boldsymbol{\theta}_0\| + j)} \|\phi_1\|^j |y|^j \right) |y|^{i+1} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\ &< \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i+2 - I)}{\Gamma(i+2 - I + j)} \|\phi_1\|^j |y|^j \right) |y|^{i+1} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\ &= \frac{(i - I + 1)! \|\mathbf{Z}_{i+1}\|}{\|\phi_1\|^{i+1-I}} |y|^I \left(e^{\|\phi_1\||y|} - \sum_{j=0}^{i-I} \frac{\|\phi_1\|^j |y|^j}{j!} \right) \end{aligned} \quad (4.108)$$

eşitsizliğini yazmak olanaklıdır. Bu eşitsizlikte $i > I - 1$ olduğu unutulmamalıdır.

4.4 Analitik Çözümü Bilinen Denklem Üretme

(1.1) ile verilen sıradan türevli matris denklemi yeniden gözönüne alalım. Bir an için çözümü bildiğimizi ve bu çözümü üretecek $\mathbf{A}(t)$ matrisini bulmak istediğimizi düşünelim. Bu durumda, $\mathbf{X}(t)$ bilindiğinden onun t 'nin doğal sayı üslüleri açılımının katsayıları da biliniyor demektir. Yani,

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \mathbf{X}_i \quad (4.109)$$

açılımındaki \mathbf{X}_i değişmezleri (katsayıları) biliniyor demektir. Bu durumda (4.109) denkleminin t 'ye göre türevi alındığında

$$\mathbf{X}'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)t^i \mathbf{X}_{i+1} \quad (4.110)$$

yazılabilir. $\mathbf{X}(t)$ 'nin (4.109) denklemindeki açılımının yazılabildiğini varsaymanın $\mathbf{A}(t)$ için de aynı tür açılımın yazılabileceğini varsaymayı akla getireceğini biliyoruz. Dolayısıyla $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisi için aşağıdaki seri açılım yazılabilir

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \mathbf{A}_i. \quad (4.111)$$

Bilindiği varsayılan $\mathbf{X}(t)$ çözümünü hangi $\mathbf{A}(t)$ matrisinin üreteceğini aradığımızdan buradaki $\mathbf{A}(t)$ ve dolayısıyla \mathbf{A}_i değişmezleri ya da katsayıları da bilinmeyen

büyükklüklerdir. Çözüm için ve katsayı matrisi için öngörülen açılımlar denklemde yerine yazıldığında ve gerekli düzenlemeler yapıldığında aşağıdaki özyineli ilişkinin elde edildiğini (4.1.2) alt bölümünde göstermiştik

$$(i+1)\mathbf{X}_{i+1} = \sum_{j=0}^i \mathbf{A}_j \mathbf{X}_{i-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.112)$$

Burada $i = 0$ alındığında

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_1 \quad (4.113)$$

olur ve $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ olduğundan

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{X}_1 \quad (4.114)$$

sonucuna ulaşılır. Özyineli ilişkide $i = 1$ alındığında, ara işlemleri vermeksizin, aşağıdaki sonuç yazılabilir

$$\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1^2. \quad (4.115)$$

Bundan sonra i yerine $2, 3, 4, \dots$ alarak, sırasıyla, $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \dots$ matrislerini belirlemek olanaklıdır. Dolayısıyla, $\mathbf{X}(t)$ için bir yapı varsayıp, sonra onu seriye açmak, sonra da açılım katsayılarından $\mathbf{A}(t)$ 'nin açılım katsayılarını belirlemek olanaklıdır. Bundan sonra, sanki çözüm bilinmiyormuş ama $\mathbf{A}(t)$ verilmiş gibi varsayıp işgörmek yeterlidir. Çünkü bize $\mathbf{A}(t)$ 'nin kendisinden çok serisel açılım katsayıları gereklidir. Bu katsayılarla evrensel biçimin çözümünü oluşturup aslında bilinen $\mathbf{X}(t)$ ile karşılaştırma yapmak sorunumuzun çözümü olacaktır.

\mathbf{Q} tersi alınabilen herhangi bir $n \times n$ türünde değişmez matris ve $\boldsymbol{\lambda}(t)$ ise

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \begin{bmatrix} e^{\gamma_1 t + \gamma_2 t^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\gamma_{n-1} t + \gamma_n t^2} \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

biçiminde verilen $n \times n$ türünde bir matris işlev olmak üzere $\mathbf{X}(t)$ 'nin bu matrisler türünden aşağıdaki biçimde yazılabildiğini varsayalım

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\lambda}(t) \mathbf{Q}. \quad (4.117)$$

Bu matrisin türevi, yapısının kolaylığı nedeniyle, hemen belirlenebilir. Böylece, $\mathbf{X}'(t)\mathbf{X}(t)^{-1}$ çarpımının seri açılımı ile $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisinin bileşenleri

belirlenebilir. Değişik γ değerleri ve \mathbf{Q} matrisleri seçilerek değişik analitik yapılar üretmek olanaklıdır.

Bir sonraki alt bölümde bu şekilde elde edilen yapılar kullanılarak yaklaşırtım yöntemi ile ilgili sınamalar yapılacaktır. Burada kullanılan örnekler bir sonraki bölümde yeniden ele alınacak ve tezde sözü edilen yaklaşımlar için sayısal sonuçlar karşılaştırılacaktır. Bu çalışmadaki sayısal hesaplamalar MuPAD betiksel programlama aracı kullanılarak yapılmıştır [55].

4.5 Okubo Biçimi'nin Seri Çözümü İle Elde Edilen Sayısal Sonuçlar

İlk sayısal örnekte 2×2 'lik bir türevli denklem takımını ele alalım. $\mathbf{A}(t)$ matrisini

$$\mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} -\frac{19}{2}t - 12 & -14t - \frac{35}{2} \\ \frac{20}{3}t + \frac{25}{3} & \frac{59}{6}t + \frac{73}{6} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

biçiminde seçelim. Bu durumda (1.1) denkleminin $t = 0$ noktasında birim matrisi veren analitik çözümü

$$\mathbf{X}(t) \equiv \begin{bmatrix} 15e^{-\frac{t^2}{12} - \frac{t}{3}} - 14e^{\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}} & 21e^{-\frac{t^2}{12} - \frac{t}{3}} - 21e^{\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}} \\ 10e^{\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}} - 10e^{-\frac{t^2}{12} - \frac{t}{3}} & 15e^{\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}} - 14e^{-\frac{t^2}{12} - \frac{t}{3}} \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

biçiminde elde edilmektedir. Analitik çözüm elde edilirken $\mathbf{X}(t)$ matrisinin (4.117) ile verilen yapıda olması öngörülmüştür. Başlangıç koşulu birim matrise eşit, \mathbf{Q} ve $\lambda(t)$ matrisleri ise sırasıyla

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \lambda(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{3}t - \frac{1}{12}t^2} \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

biçiminde seçilmiştir. $\lambda(t)$ matrisinin 2. derece çokterimlileri değiştirge olarak alan üstel işlev olarak seçilmesiyle $\mathbf{A}(t)$ katsayı işlevinin analitikliği güvence altına alınmış olur. $\mathbf{X}(t)$ matrisi (4.117) eşitliği kullanılarak oluşturulur ve daha sonra $\mathbf{X}'(t)\mathbf{X}(t)^{-1}$ çarpımının seri açılımı ile $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisinin bileşenleri belirlenir. Böylece $\mathbf{A}(t)$ matrisinin yukarıda verilen yapısı belirlenmiş olur. Bu durumda, bu örnekte

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + t\mathbf{A}_1 \quad (4.121)$$

biçiminde seçilen $\mathbf{A}(t)$ katsayı işlevinde \mathbf{A}_0 ve \mathbf{A}_1 bileşenleri

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -12 & -35/2 \\ 25/3 & 73/6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -19/2 & -14 \\ 20/3 & 59/6 \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

biçiminde belirlenmiş olur. Denklem uzay genişletme uygulandığında $\boldsymbol{\theta}_0$ ve $\boldsymbol{\theta}_1$ matrisleri elde edilir:

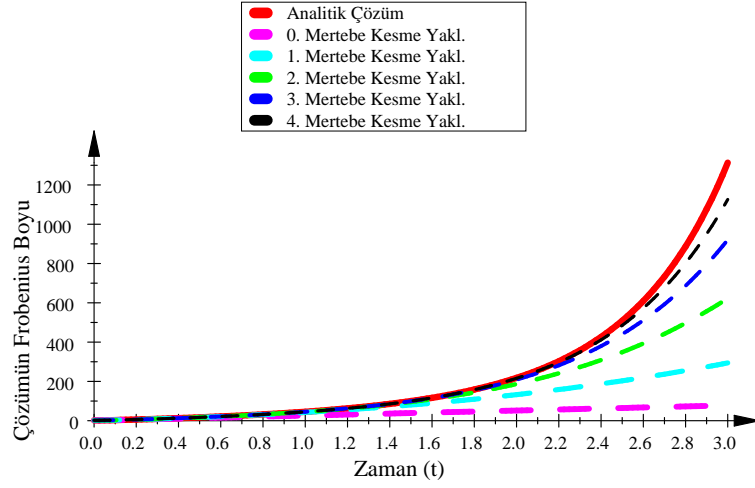
$$\boldsymbol{\theta}_0 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -35/2 & -1 & 0 \\ 25/3 & 73/6 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.123)$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 \equiv \begin{bmatrix} -19/2 & -14 & -12 & -35/2 \\ 20/3 & 59/6 & 25/3 & 73/6 \\ 0 & 0 & -19/2 & -14 \\ 0 & 0 & 20/3 & 59/6 \end{bmatrix}. \quad (4.124)$$

Uzay genişletme yaklaşımına ait seri çözüm için başlangıç koşulu olan \mathbf{Z}_0 matrisi de

$$\mathbf{Z}_0 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 & 25/3 \\ 0 & 1 & -35/2 & 73/6 \end{bmatrix}^T \quad (4.125)$$

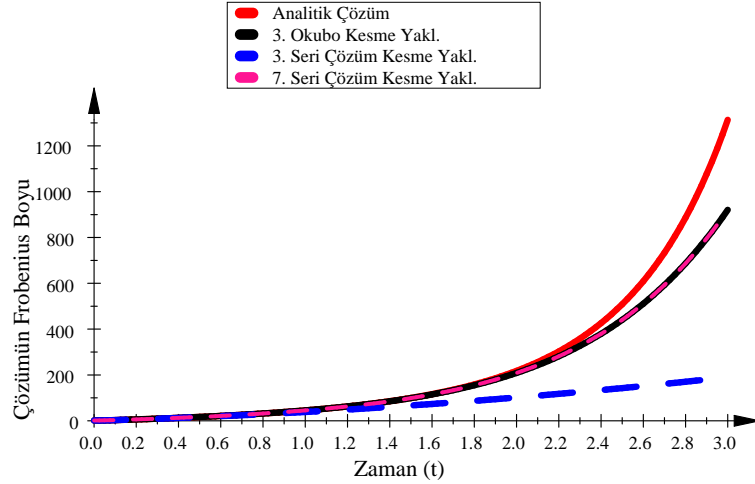
biçiminde oluşturulur. Şekil (4.1)'de uzay genişletme yaklaşımını kullanılarak elde edilen Okubo Biçimi'nin seri çözümü ve denklemin analitik çözümü verilmektedir. Yaklaşım seri açılımdan beş terim alınarak elde edilmiştir. Karşılaştırmalarda $[0,3]$ aralığında hem gerçek çözümün hem de sayısal çözümün Frobenius boyu hesaplanmıştır. Bu çizimde en üstteki kesiksiz çizgi analitik çözümün Frobenius boyunu vermektedir. Kesikli çizgiler ise seriden sırasıyla 1'den 5'e dek terim alınarak yapılan kesme yaklaşımlarına karşılık gelmektedir. Bu çizimden de anlaşılacağı üzere seriden alınan terim sayısı arttıkça elde edilen çözümün de etkinliği artmaktadır. Ancak çizimde gözönünde bulundurulacak bir diğer nokta da t sıfırdan uzaklaştıkça etkinliğin azaldığıdır. Yine de terimden alınan ilk beş terim analitik çözümü oldukça iyi yansıtmaktadır. Bu örnekte kullanılan üstel işlevin yay uzunluğu çok büyük değildir, bu nedenle yaklaşım beş terimle bile iyi sonuçlar vermiştir. Ancak yay uzunluğu değiştikçe sonuçların değişeceğini kestirmek çok zor değildir.



Şekil 4.1: $[0,3]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve Okubo Biçimi'nin seri çözümünün karşılaştırılması.

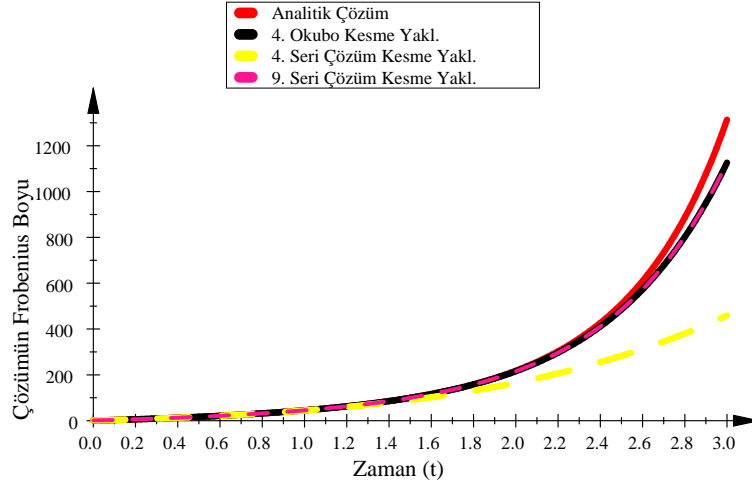
Bu örnek için bir diğer karşılaştırma (1.1) denkleminin seri çözümü ile aynı denklemin uzay genişletme uygulanarak Okubo Biçimi'ne dönüştürülmüş yapısının seri çözümü arasında yapılabilir.

Bu karşılaştırmanın sonuçları Şekil (4.2) ve Şekil (4.3) ile verilmektedir.



Şekil 4.2: $[0,3]$ aralığında denklemin seri çözümü ve Okubo Biçimi'nin seri çözümünün karşılaştırılması (4 ve 8 terimle yaklaştırım).

Şekil (4.2)'de, kırmızı kesiksiz çizgi analitik çözüme karşılık gelmektedir. Okubo Biçimi'nin seri çözümünden 4 terim alınarak elde edilen yaklaştırım siyah kesiksiz çizgi ile, denklemin seri çözümünden 4 terim alınarak elde edilen yaklaştırım mavi kesikli çizgi ile verilmektedir. Açıkça görüldüğü gibi Okubo Biçimi'nin seri çözümü denklemin seri çözümüne göre çok daha iyi sonuç vermektedir. Seri çözümden 8 terim

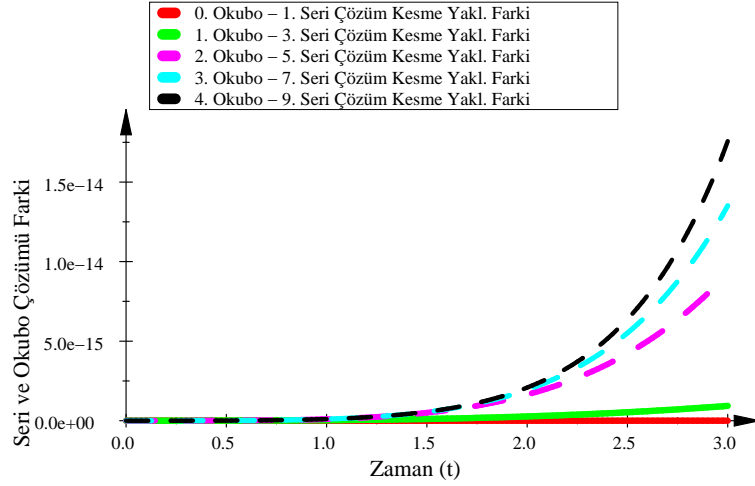


Şekil 4.3: $[0,3]$ aralığında denklemin seri çözümü ve Okubo Biçimi'nin seri çözümünün karşılaştırılması (5 ve 10 terimle yaklaştırım).

alındığında (pembe kesikli çizgilerle verilmektedir) ancak, Okubo Biçimi'nin 4 terimli çözümü ile aynı sonuç elde edilmektedir.

Şekil (4.3)'de, kırmızı kesiksiz çizgi analitik çözüme karşılık gelmektedir. Okubo Biçimi'nin seri çözümünden 5 terim alınarak elde edilen yaklaştırım siyah kesiksiz çizgi ile, denklemin seri çözümünden 5 terim alınarak elde edilen yaklaştırım sarı kesikli çizgi ile verilmektedir. Burada da açıkça görüldüğü gibi Okubo Biçimi'nin seri çözümü denklemin seri çözümüne göre çok daha iyi sonuç vermektedir. Seri çözümünden 10 terim alındığında (pembe kesikli çizgilerle verilmektedir) ancak, Okubo Biçimi'nin 5 terimli çözümü ile aynı sonuç elde edilmektedir.

Yukarıda verilen örnekte uzay genişletme mertebesi $m = 1$ olarak seçilmiştir. Uzay genişletme mertebesi 1 olduğunda seri çözümünden alınan terim sayısı Okubo Biçimi'nin seri çözümünden alınan terim sayısının iki katı olduğunda ancak, aynı sayısal sonuçlar elde edilmektedir. Benzer şekilde, uzay genişletme mertebesi $m = 2$ olarak seçildiğinde seri çözümünden alınan terim sayısı Okubo Biçimi'nin seri çözümünden alınan terim sayısının 3 katı kadar olduğunda sayısal sonuçlar birbiriyle çakışmaktadır. Buradan, seri çözümünden alınan terim sayısının, Okubo Biçimi'nin seri çözümünden alınan terim sayısından $m + 1$ kat daha çok olduğunda her iki yöntemin de aynı sonuçları verdiği genel yargısına varılabilir. Bu Şekil (4.4)'te de görülmektedir. Şekil (4.4)'te verilen sonuçlara bakıldığında denklemin seri çözümünden ve Okubo Biçimi'nin seri çözümünden yukarıda sözü edildiği gibi uygun sayıda terim alınarak



Şekil 4.4: $[0,3]$ aralığında denklemin seri çözümünün Okubo Biçimi'nin seri çözümünden sapmasının Frobenius boyu.

iki çözüm arasındaki sapma incelenmiş ve sıfıra çok yakın değerler elde edilmiştir. Ancak kuramsal incelemeler bu sapmaların tam olarak sıfır sonucunu üretmesini gerektirmektedir. Buna bir sonraki, uzay genişletme yaklaşımından evrensel biçimin elde edildiği bölümde yeniden değinilecektir.

İkinci örnekte üstel terimin yay uzunluğu arttırılmış ve büyük yay uzunluğu için bir önceki örneğe benzer denemeler yapılmıştır. Bu kez $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisi

$$\mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} -202t - 117 & -294t - 168 \\ 140t + 80 & 204t + 115 \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

biçiminde seçilmektedir. Bu durumda (1.1) denkleminin, $t = 0$ noktasında birim matrisi veren analitik çözümü

$$\mathbf{X}(t) \equiv \begin{bmatrix} 15e^{-3t^2-5t} - 14e^{4t^2+3t} & 21e^{-3t^2-5t} - 21e^{4t^2+3t} \\ 10e^{4t^2+3t} - 10e^{-3t^2-5t} & 15e^{4t^2+3t} - 14e^{-3t^2-5t} \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

biçiminde elde edilmektedir. Başlangıç koşulu birim matrise eşit, \mathbf{Q} ve $\lambda(t)$ matrisleri ise sırasıyla

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \lambda(t) = \begin{bmatrix} e^{3t+4t^2} & 0 \\ 0 & e^{-5t-3t^2} \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

biçiminde seçilmiştir. $\mathbf{X}(t)$ matrisi yine (4.117) eşitliği kullanılarak oluşturulur ve daha sonra $\mathbf{X}'(t)\mathbf{X}(t)^{-1}$ çarpımının seri açılımı ile $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisinin bileşenleri

belirlenir

$$\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}_0 + t\mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_0 \equiv \begin{bmatrix} -117 & -168 \\ 80 & 115 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 \equiv \begin{bmatrix} -202 & -294 \\ 140 & 204 \end{bmatrix}. \quad (4.129)$$

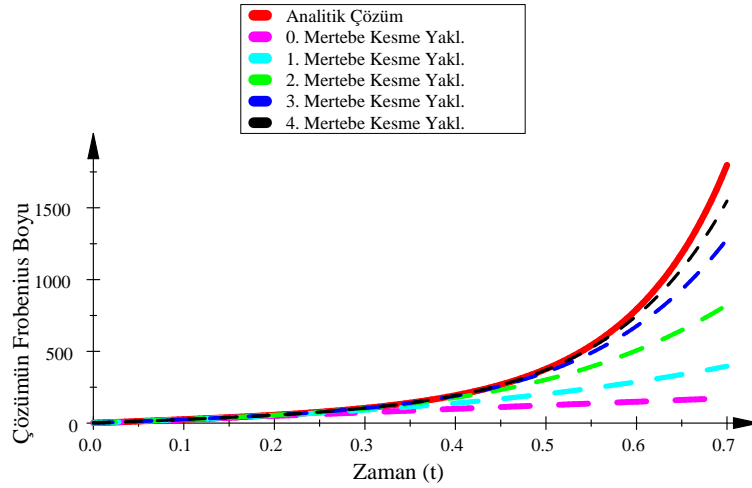
Uzay genişletme sonucu elde edilen $\boldsymbol{\theta}_0$ ve $\boldsymbol{\theta}_1$ matrisleri ise

$$\boldsymbol{\theta}_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

biçiminde oluşturulmaktadır. Bu bağıntılarda $\mathbf{0}$ ve \mathbf{I} matrisleri sırasıyla 2×2 boyutlu sıfır matrisine ve aynı boyutlu birim matrise karşılık gelmektedir. \mathbf{Z}_0 başlangıç matrisi ise açık olarak

$$\mathbf{Z}_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}^T \quad (4.131)$$

biçimindedir. Denklem analitik çözümü ile Okubo Biçimi'nin seri çözümünden elde edilen sonuçlar Şekil (4.5)'de verilmektedir. Seri çözümden yine 1 ile 5 arasında terim alınmıştır. Yine Frobenius boy hesaplanmış ancak bu kez aralık $[0, 0.7]$ olarak seçilmiştir. Bu çizim için de Şekil (4.1) ile aynı şeyler söylenebilir çünkü kesme



Şekil 4.5: $[0, 0.7]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve Okubo Biçimi'nin seri çözümünün karşılaştırılması.

yaklaşımlarının davranışı bu çizimle benzerlikler göstermektedir. Ancak, bu kez t için seçilen aralık öncekinden daha dar bir aralıktır. Yani, aynı kesme yaklaşımları ile elde edilen sonuçların etkinliğinin azaldığı gözlemlenmektedir. $[0, 3]$ aralığı için elde edilen sonuçlar $[0, 0.7]$ aralığı için elde edilen sonuçlarla hemen hemen aynıdır.

4.6 Uzay Genişletme Kavramı ile Evrensel Biçimin Elde Edilmesi

(4.57) ile verilen Okubo Biçimi, Bölüm (4.3)'de incelenmiş ve bu denklemin $y = 0$ 'daki serisel açılımında bir tekliğin söz konusu olduğu belirtilmiştir. Bu tekliğin türünü daha önce de belirtildiği gibi θ_0 matrisinin özdeğerleri betimler. Eğer bu özdeğerler sıfır ya da artı tamsayı ise çözümde dallanma tekliği söz konusu olmaz. Buna karşın, tamsayı olmayan tüm özdeğerler çözümde bir dallanma tekliği yaratırlar. Okubo Biçimi'nde oluşan θ_0 matrisinin özdeğerleri tamsayı olmadıklarından Okubo Biçimi'nin seri çözümünde dallanma tekillikleri ile karşılaşmaktadır. Biraz daha ayrıntılı açıklamak için (4.57) ile verilen Okubo Biçimi'nin seri çözümünü yeniden ele alalım. Seri çözüm ve bu çözümün açık yapısı aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} y^{i+\alpha} \mathbf{Z}_i \\ &= y^{\alpha} \mathbf{Z}_0 + y^{\alpha+1} \mathbf{Z}_1 + y^{\alpha+2} \mathbf{Z}_2 + \dots \end{aligned} \quad (4.132)$$

Okubo Biçimi'ni oluşturan matrislerin yapısından dolayı, m uzay genişletme mertebesini belirtmek üzere, α değeri $0, -\frac{1}{m+1}, \dots, -\frac{m}{m+1}$ olarak seçilmektedir. Bu durumda değişik m değerleri için aşağıda sırasıylalandırılan eşitlikler elde edilebilir:

1. $m = 1$ ise $y \equiv t^2$ olarak seçilir ve her bir α değeri için

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Rightarrow \mathbf{Z}(y) = \mathbf{Z}_0 + y \mathbf{Z}_1 + y^2 \mathbf{Z}_2 + \dots \\ \alpha = -\frac{1}{2} &\Rightarrow \mathbf{Z}(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \mathbf{Z}_0 + \sqrt{y} \mathbf{Z}_1 + \sqrt{y^3} \mathbf{Z}_2 + \dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.133)$$

eşitlikleri elde edilir.

2. $m = 2$ ise $y \equiv t^3$ olarak seçilir ve yine her bir α değeri için

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Rightarrow \mathbf{Z}(y) = \mathbf{Z}_0 + y \mathbf{Z}_1 + y^2 \mathbf{Z}_2 + \dots \\ \alpha = -\frac{1}{3} &\Rightarrow \mathbf{Z}(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \mathbf{Z}_0 + \sqrt[3]{y^2} \mathbf{Z}_1 + \sqrt[3]{y^5} \mathbf{Z}_2 + \dots \\ \alpha = -\frac{2}{3} &\Rightarrow \mathbf{Z}(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \mathbf{Z}_0 + \sqrt[3]{y} \mathbf{Z}_1 + \sqrt[3]{y^4} \mathbf{Z}_2 + \dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.134)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitliklerden de görüldüğü gibi Okubo Biçimi'nin seri çözümü karşımıza sonlu sayıda Riemann yaprağı içeren dallanma tekilliklerini çıkarmaktadır. (4.133) ile verilen eşitliklerin ikincisinde ($\alpha = -\frac{1}{2}$ 'ye ait olan), $t = y^{\frac{1}{2}}$ işlevine ait Riemann yüzeyinin 2 yapraklı olacağı görülür. (4.134) ile verilen eşitliklerin ikincisinde ($\alpha = -\frac{1}{3}$ 'e ait olan), $t = y^{\frac{1}{3}}$ işlevine ait Riemann yüzeyinin 3 yapraklı olacağı görülür. Bu söylenen özelliklerden dolayı $y = 0$ noktası bir dallanma noktasıdır.

Matris katsayılı birinci mertebeden sıradan türevli denklemlerde uzay genişletme yöntemiyle evrenselleştirmeye geçildiğinde elde edilen Okubo Biçimi'nin çözümlerinde sonlu sayıda Riemann yaprağı içeren dallanma tekilliğiyle karşılaşılır ve bu nedenle Okubo Biçimi'nin seri çözümü karmaşık düzlemde Riemann yapraklarını kullanmayı gerektirir. Bundan kaçınmak için bu bölümde denklem sisteminin bağımsız değişkeni yerine yeni bir bağımsız değişkenin Riemann yaprak sayısına eşdeğer üslüsü kullanılarak yeni bir biçim oluşturma yoluna gidilecektir.

(1.1) ile verilen türevli denklemin çözümünün

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \mathbf{X}_i \quad (4.135)$$

biçiminde seriye açılabileceği söylenmişti. Bu seri açılım kullanılarak uzay genişletme yaklaşımına yeni bir anlatım getirilebilir. $n \times n$ 'lik bir $\mathbf{Y}(y)$ matrisini gözönüne alalım. Bu matrisin t^{m+1} 'in üslüleri türünden seriye açılabildiğini varsayalım. (4.135) eşitliğini yeni tanımlanan \mathbf{Y}_i matrislerini kullanarak

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=0}^m t^i \mathbf{Y}_i(y) \quad (4.136)$$

biçiminde yazalım. Bu durumda $\mathbf{X}(t)$ matrisinin türevi yeni tanımlanan $\mathbf{Y}(y)$ matrisi kullanılarak

$$\mathbf{X}'(t) \equiv \sum_{i=0}^m i t^{i-1} \mathbf{Y}_i(y) + \sum_{i=0}^m t^i \mathbf{Y}_i'(y) \equiv \sum_{i=0}^m t^{i-1} [i \mathbf{Y}_i(y) + t \mathbf{Y}_i'(y)] \quad (4.137)$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi de $\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)$ çarpımı gözönüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(\sum_{i=0}^m t^i \mathbf{A}_i \right) \left(\sum_{i=0}^m t^i \mathbf{Y}_i(y) \right) = \sum_{i=0}^m t^i \left[\sum_{j=0}^i \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{i-j}(y) + t^{m+1} \sum_{j=i+1}^m \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{i+m+1-j}(y) \right] \quad (4.138)$$

eşitliği elde edilir. (4.137) denkleminin sağ yanı t 'nin, -1 ve m arasındaki, bu değerler de içermek üzere, üslüleri ile çarpılmış $m + 2$ değişik terimden oluşmaktadır. (Bu çarpanların ötesinde tüm terimler t^{m+1} 'in üslüleri türünden yazılabilirler.) (4.138) denklemi ise t 'nin 0 ile $2m + 1$ arasındaki ayrı üslülerini içeren $2m + 2$ adet terimden oluşmaktadır. Bu denklemlerin oluşturduğu bilinmeyen matris sayısı ise $m + 1$ 'dir. Bu değişiklik t^m ve t^{-1} içeren terimlerin tamamen bağımsız olmamasından kaynaklanmaktadır. t^m , t^{m+1} ve t^{-1} 'in çarpımı olarak yazılabilmektedir. Bu durumda ya t^m ya da t^{-1} değerinin tek başına kullanılması daha uygun olacaktır. Burada t^{-1} değerini tek başına kullanmayı seçerek ilerleyeceğiz. Bunu gerçekleştirmek için, (4.138) eşitliğinin sağ yanındaki iç toplamın $i = m$ olduğunda yok olduğu da gözönünde bulundurularak, i değişkeninin m 'e eşit olduğu terim denklemde ayrı tutularak yazılır. Bu durumda (4.138) sırasayılı bağıntı

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^m t^i \mathbf{A}_i \right) \left(\sum_{i=0}^m t^i \mathbf{Y}_i(y) \right) &= t^{-1} \sum_{j=0}^m t^{m+1} \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{m-j}(y) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} t^i \left[\sum_{j=0}^i \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{i-j}(y) + t^{m+1} \sum_{j=i+1}^m \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{i+m+1-j}(y) \right] \end{aligned} \quad (4.139)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. (4.137) ve (4.139) sırasayılı bağıntıların birleşimi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m t^{i-1} [i \mathbf{Y}_i(y) + t \mathbf{Y}_i'(y)] - t^{-1} \sum_{j=0}^m t^{m+1} \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{m-j}(y) \\ - \sum_{i=0}^{m-1} t^i \left[\sum_{j=0}^i \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{i-j}(y) + t^{m+1} \sum_{j=i+1}^m \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{i+m+1-j}(y) \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.140)$$

bağıntısını üretir. Bu bağıntıda sağ yandaki son toplam teriminin simgelemesi i yerine $i - 1$ olacak şekilde bağıntı yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} t^{-1} \left[t \mathbf{Y}_0'(y) - \sum_{j=0}^m t^{m+1} \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{m-j}(y) \right] \\ + \sum_{i=1}^m t^{i-1} \left[i \mathbf{Y}_i(y) + t \mathbf{Y}_i'(y) - \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{i-j-1}(y) - t^{m+1} \sum_{j=i}^m \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{i+m-j}(y) \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.141)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, söz konusu bu bağıntı, t^{-1} , t^0 , \dots , t^{m-1} çarpanlarını içeren ve $m + 1$ terimden oluşan yapıya dönüştürülür. Burada belirsiz bilinmeyenleri

saptamak için aşağıdaki denklemler oluşturulabilir. Bu durumda

$$t\mathbf{Y}_0'(y) - \sum_{j=0}^m t^{m+1}\mathbf{A}_j\mathbf{Y}_{m-j}(y) = \mathbf{0}$$

$$i\mathbf{Y}_i(y) + t\mathbf{Y}_i'(y) - \sum_{j=0}^{i-1}\mathbf{A}_j\mathbf{Y}_{i-j-1}(y) - t^{m+1}\sum_{j=i}^m\mathbf{A}_j\mathbf{Y}_{i+m-j}(y) = \mathbf{0} \quad (4.142)$$

biçimindeki denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımı üzerinde bazı düzenlemeler yapılacak olunursa bu kez denklem takımı

$$\mathbf{Y}_i'(y) = -\frac{i}{t}\mathbf{Y}_i(y) + \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{i-1}\mathbf{A}_j\mathbf{Y}_{i-j-1}(y) + t^m\sum_{j=i}^m\mathbf{A}_j\mathbf{Y}_{i+m-j}(y) \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (4.143)$$

biçimine dönüşür. Bu denklem takımını daha tıkmaz bir yapıda yazmak olanaklıdır. $\mathbf{Z}(t)$ bilinmeyen \mathbf{Y}_i matrislerinden oluşan ve açık yapısı

$$\mathbf{Z}(t) \equiv [\mathbf{Y}_0(y) \ \dots \ \mathbf{Y}_m(y)]^T \quad (4.144)$$

biçiminde verilen, öğeleri yine matrisler olan bir matris olmak üzere (4.143) sırasayılı denklem takımı

$$\mathbf{Z}'(t) = \left[\frac{1}{t}\boldsymbol{\theta}_0 + t^m\boldsymbol{\theta}_1 \right] \mathbf{Z}(t) \quad (4.145)$$

yapısında yeniden yazılmış olur. Bu bağtıdaki $\boldsymbol{\theta}_0$ ve $\boldsymbol{\theta}_1$ matrislerinin açık yapısı ise

$$\boldsymbol{\theta}_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -2\mathbf{I} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m-1} & \dots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -m\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4.146)$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{A}_{m-1} & \dots & \dots & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_m & \mathbf{A}_{m-1} & \dots & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

biçimindedir.

Burada $\boldsymbol{\theta}_0$ ve $\boldsymbol{\theta}_1$, t 'den bağımsız olan $(m+1)n \times (m+1)n$ türünde katsayı matrislerini, $\mathbf{Z}(t)$ ise $(m+1)n \times n$ türünde bilinmeyen matrisi göstermektedir. m

ise, genel bir artı tamsayı olarak düşünülmesine karşın, aslında, yukarıda sözü edilen uzay genişletme eyleminden geldiğinde gündeme gelen Riemann yaprak sayısının bir eklenmişini göstermektedir.

(4.145) evrensel denklemindeki θ_0 ve θ_1 matrisleri birlikte köşegenleştirilebilen yapıdaysalar (bu yapının varolabilmesi için θ_0 ve θ_1 matrislerinin değişirli (ing: commutative) olması gerek ve yeter bir koşuldur) $\mathbf{Z}(t)$ matrisinin üzerinde uygun bir matrisle gerçekleştirilecek bir dönüşümle tanımlanan yeni matris öğeleri üzerinde ayrışık sıradan türevli denklemler oluşturulabilir ve onların birinci kereden olmaları çözümlerin bazı tümlevler türünden yazılmasına olanak verir. Bu durum, bir anlamda, apaçık gibi nitelendirilebilecek yapıdadır ve burada üzerinde durulmasına gerek görülmemektedir. Bu nedenle, burada, θ_0 ve θ_1 matrislerinin değişirli olmadıkları varsayılmaktadır.

(4.145) denklemindeki tüm büyüklüklerin yalnızca gerçel değerler içerdikleri varsayılmaktadır. Gerçel yapı için elde edilecek yapılar karmaşık sayılı yapılara kolayca genişletilebilir.

4.7 Evrensel Biçimin Seri Çözümü

Aşağıda verilen seri açılım (4.145) sırasayısı ile verilen evrensel yapının çözümü olarak öngörülebilir

$$\mathbf{Z}(t) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} t^{(m+1)i+\alpha} \mathbf{Z}_i. \quad (4.148)$$

(4.145) denkleminin $t = 0$ noktasında tekiliği olduğundan α değeri de denkleme eklenmiştir. Bu denklemdeki \mathbf{Z}_i katsayıları t 'den bağımsız $(m+1)n \times n$ 'lik bilinmeyen matrislerdir. (4.148) seri açılımının türevi

$$\mathbf{Z}'(t) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} ((m+1)i + \alpha) t^{(m+1)i+\alpha-1} \mathbf{Z}_i \quad (4.149)$$

biçiminde verilebilir. Bu seri açılım ve seri açılımın türevi (4.145) denkleminde kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} ((m+1)i + \alpha) t^{(m+1)i+\alpha-1} \mathbf{Z}_i &= \frac{1}{t} \left[\theta_0 \sum_{i=0}^{\infty} t^{(m+1)i+\alpha} \mathbf{Z}_i \right. \\ &\quad \left. + t^m \theta_1 \sum_{i=0}^{\infty} t^{(m+1)i+\alpha} \mathbf{Z}_i \right] \quad (4.150) \end{aligned}$$

elde edilir. t değişkenine bağlı olarak gerekli düzenlemeler yapıldığında denklem

$$(\alpha \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{Z}_0 t^{\alpha-1} + \sum_{i=1}^{\infty} [((m+1)i + \alpha) \mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{Z}_i - \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-1}] t^{(m+1)i + \alpha - 1} = 0 \quad (4.151)$$

yapısına dönüşür. Bu bağıntıda, $t^{\alpha-1}$ ve $t^{(m+1)i + \alpha - 1}$ terimlerinin katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlendiğinde

$$[((m+1)i + \alpha) \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0] \mathbf{Z}_i = \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.152)$$

biçimindeki iki terimli özyineli ilişki elde edilir. Bu denklemde \mathbf{Z}_{-1} özdeş olarak sıfıra eşittir. Bu özyineli ilişkinin ilk terimi $\boldsymbol{\theta}_0$ matrisine ait özdeğer denklemini verir

$$[\alpha \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0] \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}. \quad (4.153)$$

Bu da α değerlerinin $\boldsymbol{\theta}_0$ matrisinin özdeğerlerine karşılık geldiğini gösterir [1]. $\boldsymbol{\theta}_0$ matrisi öbek yapıda bir matris olduğundan ve köşegen öbekleri \mathbf{I} birim matrisi ile orantılı olduğundan, bu matrisin özdeğerleri sırasıyla $0, -1, \dots, -m$ biçiminde oluşan oransallık katsayılarına eşittir ve her biri n katlıdır. Bu özdeğerlerin cebirsel ve geometrik katlılıkları birbirlerine eşit olduğundan her bir özdeğere karşılık gelen birbirinden doğrusal bağımsız özyöneysel bulunabilir [47]. Birbirinden doğrusal bağımsız özyöneysel bulunabiliyor olması seri çözümün açık bir şekilde elde edilmesinde kolaylık sağlamaktadır. Bu durum gözönünde bulundurulduğunda (4.152) denkleminin sol yanındaki matris, tüm artı tanımlı (ing: positive definite) i değerleri için tersi alınabilen bir matristir. Bu da bize özyineli ilişkinin

$$\mathbf{Z}_i = [((m+1)i + \alpha) \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0]^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{Z}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.154)$$

biçimindeki yeni yapısını verir. Bu denklemde \mathbf{Z}_{i-1} matrisinin değerleri özyineli ilişkiye uygun bir şekilde yerine konulduğunda

$$\mathbf{Z}_i = \left[\prod_{j=0}^{i-1} [((m+1)(i-j) + \alpha) \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0]^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \right] \mathbf{Z}_0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.155)$$

eşitliği elde edilir. Bu sonuç bize \mathbf{Z}_0 herhangi bir şekilde belirlendiğinde çözümün tek olacağını gösterir. Bu amaçla öncelikle

$$\mathbf{Z}_0 = [\mathbf{Z}_{0,0} \dots \mathbf{Z}_{0,m}]^T \quad (4.156)$$

tanımlamasını yapabiliriz. (4.152) sırasayılı denklemde α , $-m$ ile 0 arasında, sınır değerleri de içerilmek üzere, herhangi bir değere eşit olarak seçildiğinde, sözgelimi bu değer m_1 olduğu düşünülürse, m_1 'den küçük j değerleri için, \mathbf{Z}_{0,m_1} isteğe bağlı kalmak koşuluyla tüm $\mathbf{Z}_{0,j}$ matrisleri sifıra eşit olacaktır. Bu isteğe bağlı olarak seçilen matrisin de \mathbf{C} ile simgelandiğini ve tüm sıfırdan farklı bileşenlerin en sağındaki çarpan olduğunu varsayalım. Sözgelimi, $\alpha = 0$ olduğunda

$$\mathbf{Z}_{0,0} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{Z}_{0,1} = \mathbf{A}_0 \mathbf{C}, \quad \mathbf{Z}_{0,2} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_0^2 + \mathbf{A}_1) \mathbf{C}, \quad (4.157)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu bağıntılar daha genel bir şekilde yazılacak olunursa

$$i \mathbf{Z}_{0,i} = \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{A}_{i-j-1} \mathbf{Z}_{0,j}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (4.158)$$

özyineli ilişkisi elde edilir. Bu özyineli ilişki (1.1) denkleminin seri çözümünde elde edilen katsayılar arasındaki özyineli ilişkinin ilk $m + 1$ terimi ile eşleşir. Bu durumda $\mathbf{Z}_{0,0}$ matrisinin (1.1) denkleminin başlangıç koşulu olan \mathbf{I} matrisine eşit olduğu görülür. Böylece, \mathbf{Z}_0 matrisinin $n \times n$ 'lik öbek öğeleri (1.1) denkleminin Maclaurin seri açılımı ile elde edilen çözüm katsayılarına karşılık gelmektedir. Bu da $\mathbf{T}(t)^T \mathbf{Z}(t)$ matris işlevinin

$$\mathbf{T}(t) \equiv [\mathbf{I} \quad t\mathbf{I} \quad \dots \quad t^m \mathbf{I}]^T \quad (4.159)$$

olmak üzere, $\alpha = 0$ iken (1.1) denkleminin çözümü olduğunu göstermektedir. Tüm bunlar gözönünde bulundurulduğunda α 'nın yalnızca sifıra eşit olduğu durumun incelenmesi (4.145) ile verilen evrensel matris türevli denklemin çözümü için yeterlidir. Ancak bu, başlangıç matrisi \mathbf{Z}_0 'ın bileşenlerinin $\mathbf{Z}_{0,0} = \mathbf{I}$ ile birlikte (4.158) sırasayılı denklemi sağladığı zaman geçerlidir. $\mathbf{X}(t)$ matrisi $n \times n$ boyutlu bir matris iken, $\mathbf{Z}(t)$ matrisi $(m + 1)n \times n$ boyutlu bir matristir. Bunun anlamı (4.145) sırasayılı denklemin uzayı, (1.1) denkleminin uzayından $m + 1$ kez daha çok öğeden oluşmaktadır. Bu genelleştirme ve evrenselleştirme süreci “Uzay Genişletme” olarak adlandırılmaktadır [10, 11]. Uzay genişletme yaklaşımının en önemli artışı seri çözümden gelen özyineli ilişkideki terim sayısını (mertebesi yerel olmayanlar da içerilmek üzere) iki terime indiriyor olmasıdır [56, 57]. (4.145) ile verilen türevli denklem “Evrensel Biçim (ing: Universalized Form)” olarak adlandırılmaktadır [56, 57]. Elde edilen evrensel yapı da Okubo Biçimi'nde olduğu gibi tekillikleri

açısından incelenebilir. Bu bağlamda, evrensel yapının (4.148) sırasayılı eşitliği ile verilen seri çözümü ve bu çözümün açık yapısı yeniden ele alınabilir

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} t^{(m+1)i+\alpha} \mathbf{Z}_i \\ &= t^{\alpha} \mathbf{Z}_0 + t^{(m+1)+\alpha} \mathbf{Z}_1 + t^{2(m+1)+\alpha} \mathbf{Z}_2 + \dots\end{aligned}\quad (4.160)$$

Evrensel biçimi oluşturan matrislerin yapısından dolayı bu kez, m yine uzay genişletme mertebesini belirtmek üzere, α değeri $0, -1, \dots, -m$ olarak seçilmektedir. Bu durumda değişik m değerleri için aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

$m = 1$ ise:

$$\begin{aligned}\alpha = 0 &\Rightarrow \mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_0 + t^2 \mathbf{Z}_1 + t^4 \mathbf{Z}_2 + \dots \\ \alpha = -1 &\Rightarrow \mathbf{Z}(t) = \frac{1}{t} \mathbf{Z}_0 + t \mathbf{Z}_1 + t^3 \mathbf{Z}_2 + \dots \\ \alpha = -2 &\Rightarrow \mathbf{Z}(t) = \frac{1}{t^2} \mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_1 + t^2 \mathbf{Z}_2 + \dots \\ &\dots\end{aligned}\quad (4.161)$$

$m = 2$ ise

$$\begin{aligned}\alpha = 0 &\Rightarrow \mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_0 + t^3 \mathbf{Z}_1 + t^6 \mathbf{Z}_2 + \dots \\ \alpha = -1 &\Rightarrow \mathbf{Z}(t) = \frac{1}{t} \mathbf{Z}_0 + t^2 \mathbf{Z}_1 + t^5 \mathbf{Z}_2 + \dots \\ \alpha = -2 &\Rightarrow \mathbf{Z}(t) = \frac{1}{t^2} \mathbf{Z}_0 + t \mathbf{Z}_1 + t^4 \mathbf{Z}_2 + \dots \\ &\dots\end{aligned}\quad (4.162)$$

(4.161) ve (4.162) ile verilen eşitliklerde kutup tekillikleri oluşmaktadır ve bu tür tekillikler çözümde dallanma tekilliklerince yaratılabilen türden olumsuzluklar oluşturmazlar. Okubo Biçimi'nde elde edilen tekillikler dallanma tekillikleriydi. Dallanma tekillikleri, her zaman, olanak varsa, kaçınılmak istenen olgulardır. Nedeni de karmaşık düzlemde ve Riemann yapraklarıyla çalışma gerektirmeleridir. Burada tekillik değil de tekillik türü bizi bu yönde bir ayırım yapmaya itmiştir.

Bir sonraki aşama, Okubo Biçimi'ndekine benzer biçimde, Evrensel Biçim'in çözümünün yakınsaklık ölçütlerinin incelenmesi olacaktır.

4.7.1 Yöntemin Yakınsaklık Ölçütlerinin İncelenmesi

(4.145) ile verilen sıradan türevli matris katsayılı türevli denklemin tek sonlu tekil noktası $t = 0$ noktasıdır. Bu durumda $t = 0$ noktasındaki seri çözüm, karmaşık sayı düzleminde merkezi sıfır noktası olan bir çember içinde yakınsak olacaktır. Yöntemin etkin bir yöntem olabilmesi için en önemli koşul yakınsaklık koşuludur. Bu nedenle yöntemin yakınsaklık durumunun incelenmesi yaklaşımın niteliğini belirlemek açısından oldukça önemlidir. Bu amaçla, öncelikle (4.148) sırasayılı denklem ile incelemelerimize başlayabiliriz. Bu denklemin her iki yanının boyunu alacak olursak

$$\|\mathbf{Z}(t)\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |t|^{(m+1)i+\alpha} \|\mathbf{Z}_i\| \quad (4.163)$$

eşitsizliğini elde ederiz [54]. Bir çarpımın boyu, onu oluşturan çarpanların ayrı ayrı boylarının çarpımına eşit ya da bu çarpımdan küçüktür olgusu kullanılarak [52]

$$\|\mathbf{Z}_i\| \leq \left\| [((m+1)i + \alpha)\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0]^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \right\| \|\mathbf{Z}_{i-1}\|, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.164)$$

eşitsizliğini yazmak olanaklıdır. Amacımız, bu eşitsizliğin sağ yanındaki ilk boy çarpanının daha kolay bir anlatımını bulmaktır. Bu amaçla \mathbf{L}_D ve $-\mathbf{L}_O$ sırasıyla öbek köşegen ve köşegen dışı bölümlere karşılık gelmek üzere

$$\mathbf{L} \equiv [((m+1)i + \alpha)\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0] \equiv \mathbf{L}_D - \mathbf{L}_O, \quad (4.165)$$

denkliği tanımlanabilir. Bu bağtıda eksi işaretini kullandığımız için, \mathbf{L}_O , $\boldsymbol{\theta}_0$ matrisinin sıfır köşegen öbekler de içerilmek üzere, alt üçgensel bölümüne karşılık gelmektedir. Böylece \mathbf{L}_D , j . bileşeni, $j = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere, köşegeni $((m+1)i + \alpha + j - 1)\mathbf{I}$ biçimindeki öbeklerden oluşan matris yapısındadır. Bu da

$$\begin{aligned} [((m+1)i + \alpha)\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0]^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 &= [\mathbf{L}_D - \mathbf{L}_O]^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O]^{-1} \mathbf{L}_D^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O]^k \mathbf{L}_D^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \end{aligned} \quad (4.166)$$

yazılmasını olanaklı kılar. Burada $\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O$ çarpımının köşegeninde sıfır öbek matrisleri olan alt üçgensel öbek matris olması özelliği kullanıldığında bu toplamın m 'den büyük olan tüm üsleri özdeş olarak sıfıra eşit olmaktadır

$$[((m+1)i + \alpha)\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0]^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 = \sum_{k=0}^m [\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O]^k \mathbf{L}_D^{-1} \boldsymbol{\theta}_1. \quad (4.167)$$

Yukarıdaki bağıntının sağ yanındaki son anlatım

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m [\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O]^k \mathbf{L}_D^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \right\| &\leq \sum_{k=0}^m \|\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O\|^k \|\mathbf{L}_D^{-1} \boldsymbol{\theta}_1\| \\ &= \frac{1 - \|\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O\|^{m+1}}{1 - \|\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O\|} \|\mathbf{L}_D^{-1} \boldsymbol{\theta}_1\| \end{aligned} \quad (4.168)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Buradan da

$$\left\| [((m+1)i + \alpha)\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0]^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \right\| \leq \frac{1 - \|\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O\|^{m+1}}{1 - \|\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O\|} \|\mathbf{L}_D^{-1} \boldsymbol{\theta}_1\| \quad (4.169)$$

eşitsizliğini yazmak olanaklıdır. \mathbf{L}_D^{-1} matris işleci işleneninin (ing: operand) j . satır bloğunu, $j = 1, 2, \dots, m+1$ olmak üzere $(m+1)i + \alpha + j - 1$ değerinin tersi ile çarpmaktadır. Bu yapı gözönünde bulundurularak yukarıdaki bağıntıda türlü düzenlemeler yapılacak olursa

$$\|\mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_O\| \leq \frac{1}{(m+1)i + \alpha} \|\mathbf{L}_O\|, \quad \|\mathbf{L}_D^{-1} \boldsymbol{\theta}_1\| \leq \frac{1}{(m+1)i + \alpha} \|\boldsymbol{\theta}_1\| \quad (4.170)$$

eşitsizlikleri elde edilebilir. Bu eşitsizliklerde $\alpha = 0$ olarak alınabilir, çünkü önceki bölümde yalnızca bu durumun incelenmesinin yeterli olacağını söylemiştik. (4.170) ile elde edilen eşitsizlikler hata sınırlarını tanımlamak için kullanılacaktır. Bu durumda, yukarıdaki eşitsizliğin ilk teriminde kullanılan i değeri için, (4.170)'de verilen ilk eşitsizliğin 1'den küçük olmasını sağlayacak, i_{as} ile isimlendireceğimiz bir alt sınır tanımlamak olanaklıdır. Bu alt sınır,

$$i_{as} > \frac{\|\mathbf{L}_O\|}{m+1} \quad (4.171)$$

biçiminde verilebilir. (4.170) ve (4.171) sırasayılı eşitsizlikler, (4.169) ile birlikte kullanıldığında

$$\left\| [((m+1)i + \alpha)\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_0]^{-1} \boldsymbol{\theta}_1 \right\| \leq [(m+1)i - \|\mathbf{L}_O\|]^{-1} \|\boldsymbol{\theta}_1\|, \quad i > i_{as} \quad (4.172)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (4.164) denkleminde

$$\|\mathbf{Z}_i\| \leq \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} \frac{1}{i - \frac{\|\mathbf{L}_O\|}{m+1}} \|\mathbf{Z}_{i-1}\|, \quad i = i_{as} + 1, i_{as} + 2, \dots \quad (4.173)$$

biçiminde yansıtılabilir. Bu ilişki (4.145) denkleminin seri çözümünün yakınsaklık yarıçapının sonsuz olduğunu gösterir.

4.7.2 Kesme Yaklaşımları ve Hata Analizi

Bu bölümde seride yapılacak olan kesme düzeyine bağlı olarak hata analizi yapılacaktır. Bu amaçla

$$\mathbf{X}_{K,i}(t) \equiv \mathbf{T}(t)^T \mathbf{Z}_{K,i}(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.174)$$

tanımlaması yapılabilir. $\alpha = 0$ olduğu da gözönünde bulundurulursa $\mathbf{Z}_{K,i}$ matrisi için

$$\mathbf{Z}_{K,i}(t) \equiv \sum_{j=0}^i t^{(m+1)j} \mathbf{Z}_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.175)$$

yazmak olanaklıdır. $\mathbf{X}_{K,i}(t)$ ve $\mathbf{Z}_{K,i}(t)$ matrisleri sırasıyla (1.1) ve (4.145) denklemlerine ait “ i . Kesme Yaklaşımları” olarak adlandırılabilir. Bu bölümdeki amacımız bu bileşenler için hata kestirimleri yapmaktır. Bu amaçla öncelikle (4.145) denkleminin çözümüne odaklanılacaktır. Bu durumda “ i . Hata Kestirimi”

$$\mathbf{E}_i(t) \equiv \mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}_{K,i}(t) \equiv \sum_{j=i+1}^{\infty} t^{(m+1)j} \mathbf{Z}_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.176)$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu bağtıda önceki bölümde tanımlanan i_{as} değerinden daha büyük olan i değerleri için inceleme yapılabilir. Çünkü bu değerler için boy sınır çözümü yapmak çok karmaşık değildir. i_{as} değerinden küçük olan i değerleri içinse hata terimi sonlu ve sonlu olmayan bölümlere ayrılabilir. Bu durumda sonsuz toplam i 'nin yalnızca i_{as} 'den büyük olan değerlerine karşılık gelmektedir. Bu durumda hata analizi yapmak için yalnızca $i > i_{as}$ durumunu incelemek yeterlidir. Ayrıca hata analizinde t 'nin yalnızca gerçel sayı olduğu durumlar gözönünde bulundurulacak ve aralık uzunluğu isteğe bağlı olmak üzere, $[0, t_{eb}]$ aralığında bulunduğu varsayılacaktır. Bu durumda (4.176) denkleği kullanılarak

$$\|\mathbf{E}_i(t)\| \leq \sum_{j=i+1}^{\infty} t^{(m+1)j} \|\mathbf{Z}_j\|, \quad i = i_{as}, i_{as} + 1, \dots \quad (4.177)$$

eşitsizliği yazılabilir. (4.173) eşitsizliği de

$$\|\mathbf{Z}_j\| \leq \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} \frac{1}{j-i} \|\mathbf{Z}_{j-1}\|, \quad j = i+1, i+2, \dots, \quad i = i_{as}, i_{as} + 1, \dots \quad (4.178)$$

biçiminde yeniden yazılabilir ve bu bağtıda j üzerinde düzenleme yapılırsa

$$\|\mathbf{Z}_j\| \leq \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^{j-i-1}}{(m+1)^{j-i-1}} \frac{1}{(j-i)!} \|\mathbf{Z}_{i+1}\|, \quad j = i+1, i+2, \dots, \quad i = i_{as}, i_{as} + 1, \dots \quad (4.179)$$

biçiminde yeniden yazılır. Bu sonuç, (4.177) denkleminde yerine konulur ve $j, j+i+1$ ile değiştirilirse

$$\begin{aligned}\|\mathbf{E}_i(t)\| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} t^{(m+1)(j+i+1)} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j (j+1)!} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\ &= (m+1) \frac{\|\mathbf{Z}_{i+1}\|}{\|\boldsymbol{\theta}_1\|} t^{(m+1)i} \left(e^{\frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} t^{m+1}} - 1 \right), \quad i = i_{as}, i_{as} + 1 \dots\end{aligned}\quad (4.180)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu bağıntı, t ve/veya $\boldsymbol{\theta}_1$ matrisinin boyu arttıkça, kesme hatasının artacağını göstermektedir. Diğer yandan, i 'nin büyük değerleri $\|\mathbf{Z}_{i+1}\|$ boy değeri $i!$ değerinin tersi gibi davrandığından hataları küçültür. Elde edilen bu anlatımın daha kullanışlı bir yapısını elde edebilmek için (4.173) sırasayılı eşitsizlikte i yerine j konulur ve i_{as} değeri de bu denklemde kullanılırsa

$$\|\mathbf{Z}_j\| \leq \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} \frac{1}{j - i_{as}} \|\mathbf{Z}_{j-1}\|, \quad j = i+1, i+2, \dots, \quad i = i_{as}, i_{as} + 1, \dots \quad (4.181)$$

elde edilir ve bir adım ilerlenecek olunursa

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Z}_j\| &\leq \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^{j-i-1}}{(m+1)^{j-i-1}} \frac{(i+1-i_{as})!}{(j-i_{as})!} \|\mathbf{Z}_{i+1}\|, \\ &\quad j = i+1, i+2, \dots, \quad i = i_{as}, i_{as} + 1, \dots\end{aligned}\quad (4.182)$$

bağıntısına ulaşılır. Bu sonucun (4.177)'de yerine konulmasıyla ve j yerine $j+i+1$ yerleştirilmesi ile

$$\begin{aligned}\|\mathbf{E}_i(t)\| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} t^{(m+1)(j+i+1)} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{(i+1-i_{as})!}{(j+i+1-i_{as})!} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} t^{(m+1)(j+i+1)} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{(i+1-i_{as})!}{(j+i+1-i_{as})!} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\ &\quad + t^{(m+1)(i+1)} \|\mathbf{Z}_{i+1}\|, \quad i = i_{as}, i_{as} + 1 \dots\end{aligned}\quad (4.183)$$

eşitsizliği elde edilir. Beta işlevinin tümlev gösterilimi (EK-A) bu anlatımda kullanılırsa

$$\frac{(i+1-i_{as})!}{(i+1-i_{as}+j)!} = \frac{1}{(j-1)!} \int_0^1 d\tau \tau^{j-1} (1-\tau)^{i+1-i_{as}} \quad (4.184)$$

bağıntısı yazılabilir [58]. Bu da

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} t^{(m+1)(j+i+1)} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{(i+1-i_{as})!}{(j+i+1-i_{as})!} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} t^{(m+1)(j+i+1)} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{1}{(j-1)!} \int_0^1 d\tau \tau^{j-1} (1-\tau)^{i+1-i_{as}} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\
&= \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{(m+1)} t^{(m+1)(i+2)} \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{i+1-i_{as}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{t^{(m+1)j} \tau^j}{j!} \\
&= \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{(m+1)} t^{(m+1)(i+2)} \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{i+1-i_{as}} e^{\frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} t^{m+1} \tau} \quad (4.185)
\end{aligned}$$

yazılmasına olanak sağlar. (4.185) bağıntısında, en sağdaki tümlevde τ yerine $\tau^{m+1}/m+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{i+1-i_{as}} e^{\frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} t^{m+1} \tau} \\
&= (m+1) t^{-(m+1)(i+2-i_{as})} \int_0^{t^{m+1}} d\tau \tau^m (t^{m+1} - \tau^{m+1})^{i+1-i_{as}} e^{\frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} \tau^{m+1}} \quad (4.186)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bunun (4.185) bağıntısında kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} t^{(m+1)(j+i+1)} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{(i+1-i_{as})!}{(j+i+1-i_{as})!} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} t^{(m+1)(j+i+1)} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{1}{(j-1)!} \int_0^1 d\tau \tau^{j-1} (1-\tau)^{i+1-i_{as}} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\
&= \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \|\boldsymbol{\theta}_1\| t^{(m+1)i_{as}} \int_0^{t^{m+1}} d\tau \tau^m (t^{m+1} - \tau^{m+1})^{i+1-i_{as}} e^{\frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} \tau^{m+1}} \quad (4.187)
\end{aligned}$$

eşitliği ve buradan da

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{E}_i(t)\| &\leq \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \|\boldsymbol{\theta}_1\| t^{(m+1)i_{as}} \int_0^{t^{m+1}} d\tau \tau^m (t^{m+1} - \tau^{m+1})^{i+1-i_{as}} e^{\frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} \tau^{m+1}} \\
&\quad + t^{(m+1)(i+1)} \|\mathbf{Z}_{i+1}\|, \quad i = i_{as}, i_{as} + 1 \dots \quad (4.188)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu hata kestiriminin tümlev gösterilimidir. Bu anlatımı bütünüyle cebirsel olarak yazmak olanaklıdır.

Bu anlatım cebirsel olarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} t^{(m+1)(j+i+1)} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{(i+1-i_{as})!}{(j+i+1-i_{as})!} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\
&= (i+1-i_{as})! \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \frac{(m+1)^{i+1-i_{as}}}{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^{i+1-i_{as}}} t^{(m+1)i_{as}} \sum_{i=i+2-i_{as}}^{\infty} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{t^{(m+1)j}}{j!} \\
&= (i+1-i_{as})! \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \frac{(m+1)^{i+1-i_{as}}}{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^{i+1-i_{as}}} t^{(m+1)i_{as}} \\
&\quad \times \left(e^{\frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} t^{m+1}} - \sum_{j=0}^{i+1-i_{as}} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{t^{(m+1)j}}{j!} \right) \tag{4.189}
\end{aligned}$$

biçiminde verilebilir. Eğer χ ile simgelenecek ve

$$\chi_i(t) \equiv \frac{(i+1)!}{t^{i+1}} \left(e^t - \sum_{j=0}^i \frac{t^j}{j!} \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{4.190}$$

biçiminde tanımlanacak işlev kullanılacak olunursa (4.189) bağıntısı

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} t^{(m+1)(j+i+1)} \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|^j}{(m+1)^j} \frac{(i+1-i_{as})!}{(j+i+1-i_{as})!} \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \\
&= \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{(m+1)} \frac{t^{(m+1)(i+2)}}{i+2-i_{as}} \chi_{i+1-i_{as}} \left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} t^{m+1} \right) \tag{4.191}
\end{aligned}$$

yapısına dönüşür. Bu son anlatım (4.183) bağıntısı ile birlikte kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{E}_i(t)\| &\leq \|\mathbf{Z}_{i+1}\| \frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{(m+1)} \frac{t^{(m+1)(i+2)}}{i+2-i_{as}} \chi_{i+1-i_{as}} \left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}_1\|}{m+1} t^{m+1} \right) \\
&\quad + t^{(m+1)(i+1)} \|\mathbf{Z}_{i+1}\|, \quad i = i_{as}, i_{as} + 1 \dots \tag{4.192}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini verir. χ işlevlerinin yapısına bakıldığında, değişkenleri sıfıra gittikçe bu işlevlerin 1'e yaklaştıkları görülür. Bu da, t dönümcül bir değerden küçük kaldığı sürece öngörülen bir doğruluğun elde edilebileceğini göstermektedir. t 'nin dönümcül denilecek değeri ise $\boldsymbol{\theta}_1$ matrisinin boyunun tersi ile, $(m+1)$ 'in ise kendisiyle orantılıdır. Bu iki bileşen evrenselleştirmenin başında sabitlenir, böylece her öngörülüş doğruluk ancak bu doğruluğa bağlı olan bir aralıkta çalışılarak elde edilebilir.

Şimdiye kadar olan anlatımlarda uzay genişletme mertebesi $\mathbf{A}(t)$ çokterimli işlevinin derecesine eşit, yani m olarak seçildi. Bu değişmez seçimin, χ işlevinin değiştirgeninin büyüklüğünün esnekliğini kısıtladığı görülmektedir.

4.8 Yüksek Mertebeli Uzay Genişletme

Uzay genişletme mertebesi $\mathbf{A}(t)$ katsayı matris işlevinin derecesinden daha büyük seçilebilir ve χ işlevi üzerindeki yukarıda sözü edilen kısıtlama bu şekilde kaldırılabilir. Bu amaçla $\mathbf{A}(t)$ çokterimlisinin $m_{gen} > m$ olmak üzere

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=0}^{m_{gen}} t^i \mathbf{A}_i \quad (4.193)$$

biçiminde olduğu varsayılabilir. Bu bağıntı $i = m + 1, \dots, m_{gen}$ iken

$$\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{0} \quad (4.194)$$

denkliğini sağlamaktadır. (1.1) denkleminin t 'nin $(m_{gen} + 1)$. üssü kullanılarak uzay genişletme yaklaşımı ile evrenselleştirilmesi durumunda

$$\mathbf{Z}'(t) = \left[\frac{1}{t} \boldsymbol{\theta}_0^{(m_{gen})} + t^{m_{gen}} \boldsymbol{\theta}_1^{(m_{gen})} \right] \mathbf{Z}(t) \quad (4.195)$$

denklemini elde edilir. Bu eşitlikteki $\boldsymbol{\theta}_0^{(m_{gen})}$ ve $\boldsymbol{\theta}_1^{(m_{gen})}$ matrislerinin açık yapısı sırasıyla

$$\boldsymbol{\theta}_0^{(m_{gen})} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -2\mathbf{I} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m-1} & \cdots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -m\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_m & \ddots & \cdots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -(m+1)\mathbf{I} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m_{gen}-1} & \cdots & \mathbf{A}_m & \mathbf{A}_{m-1} & \cdots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -m_{gen}\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4.196)$$

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(m_{gen})} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{m_{gen}} & \mathbf{A}_{m_{gen}-1} & \cdots & \mathbf{A}_{m+1} & \mathbf{A}_m & \mathbf{A}_{m-1} & \cdots & \cdots & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m_{gen}} & \mathbf{A}_{m_{gen}-1} & \cdots & \mathbf{A}_{m+1} & \mathbf{A}_m & \mathbf{A}_{m-1} & \cdots & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m_{gen}} & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_{m_{gen}} & \mathbf{A}_{m_{gen}-1} & \cdots & \mathbf{A}_{m+1} & \mathbf{A}_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \mathbf{A}_{m_{gen}} & \ddots & \cdots & \mathbf{A}_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_{m_{gen}-1} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m_{gen}} \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

biçimindedir. $\boldsymbol{\theta}_0^{(m_{gen})}$ ve $\boldsymbol{\theta}_1^{(m_{gen})}$ matrisleri $(m_{gen} + 1)n \times (m_{gen} + 1)n$ türünde matrislerken, $\mathbf{Z}(t)$ matrisi $(m_{gen} + 1)n \times n$ türünde bir matristir. Başka bir deyişle söylenecek olursa matrislerin boyutları artmıştır. $\boldsymbol{\theta}_0^{(m_{gen})}$ ve $\boldsymbol{\theta}_1^{(m_{gen})}$ matrisleri yine

sırasıyla alt ve üst üçgensel matrislerdir. Ancak bu kez, $\theta_0^{(m_{gen})}$ matrisinin köşegenine paralel olan alt köşegenler sıfır matrisleri içerir. Köşegen bütünüyle sıfır olmadığı halde $m_{gen} - m$ adet alt komşusu sıfırdır. Benzer bir duruma $\theta_1^{(m_{gen})}$ matrisinde de rastlanır. Bu matrise ait tek sıfırdan değişik olan öbek, θ_1 öbek matrisine eşit olan en üst sağ öbektir. Bu sıfırlanma durumu birçok şeyi kolaylaştırmaktadır. $\theta_1^{(m_{gen})}$ ve θ_1 matrislerinin Frobenius boyları da birbirlerine eşittir. Bu durumda önceki bölümde yapılan hata çözümlemesi yeniden ele alındığında bu kez m_{gen} büyüdükçe hatanın azaldığı gözlemlenmektedir. $\theta_0^{(m_{gen})}$ matrisinin seyreklik (ing: sparseness) derecesinin de artıyor olması sayısal yaklaşım niteliğini artırmaktadır. Böylece, m_{gen} büyüdükçe sayısal yakınsamanın arttığı gözlemlenmektedir.

Uzay genişletme yaklaşımını üç şekilde uygulanmaktadır. İlk durumda uzay genişletme mertebesi katsayı çokterimlisinin derecesine eşit seçilmektedir. Bu uzay genişletme için seçilebilecek en küçük mertebedir. O nedenle bu yapı “En Kısıtlı Uzay Genişletme” olarak adlandırılmaktadır.

En düşük mertebeyi aşan herhangi bir uzay genişletme yaklaşımı “Düzgün Uzay Genişletme” olarak adlandırılmaktadır. Bu şekilde uygulanan uzay genişletme yaklaşımında en kısıtlı uzay genişletme öbek matris yapısı kullanılmaktadır. Ancak, en kısıtlı uzay genişletme yaklaşımından farkı, bu yaklaşımda verilen çokterimli matris katsayı işlevinin en yüksek üslüsü öbek köşegeni oluştururken, düzgün uzay genişletme yaklaşımında öbek köşegen sıfırdır. Yani katsayı çokterimlisinin en yüksek dereceli katsayısı sistemde gözükmez.

Bunların dışında kalan tüm yüksek mertebeden uzay genişletme yaklaşımları “Aşkın Uzay Genişletme” olarak adlandırılmaktadır. Aşkın yapıda düzgün uzay genişletme yapısından değişik olarak, olması gereken düzeyin ötesine giderek duyarlılık artırma kaygısı ve amacı sözkonusudur. Burada verilen değişik uzay genişletme yaklaşımlarının etkinliği sayısal örneklerde de gösterilmektedir.

Daha önce Okubo Biçimi'nin sayısal çözümleri elde edilirken kullanılan örnekler burada da kullanılmış, bu bağlamda yüksek mertebeli uzay genişletme yönteminin sonuçları karşılaştırmalı bir şekilde verilmiştir.

4.9 Sayısal Sonuçlar

Okubo Biçimi'nin seri çözümünün ilk sayısal örneğinde kullanılan $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisi burada yeniden ele alınabilir

$$\mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} -\frac{19}{2}t - 12 & -14t - \frac{35}{2} \\ \frac{20}{3}t + \frac{25}{3} & \frac{59}{6}t + \frac{73}{6} \end{bmatrix}. \quad (4.198)$$

Bu örnekte yine

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + t\mathbf{A}_1 \quad (4.199)$$

biçiminde seçilen $\mathbf{A}(t)$ katsayı işlevinde \mathbf{A}_0 ve \mathbf{A}_1 bileşenleri

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -12 & -35/2 \\ 25/3 & 73/6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -19/2 & -14 \\ 20/3 & 59/6 \end{bmatrix} \quad (4.200)$$

biçiminde belirlenmiş olur. Denklem uzay genişletme uygulandığında $\boldsymbol{\theta}_0$ ve $\boldsymbol{\theta}_1$ matrisleri elde edilir:

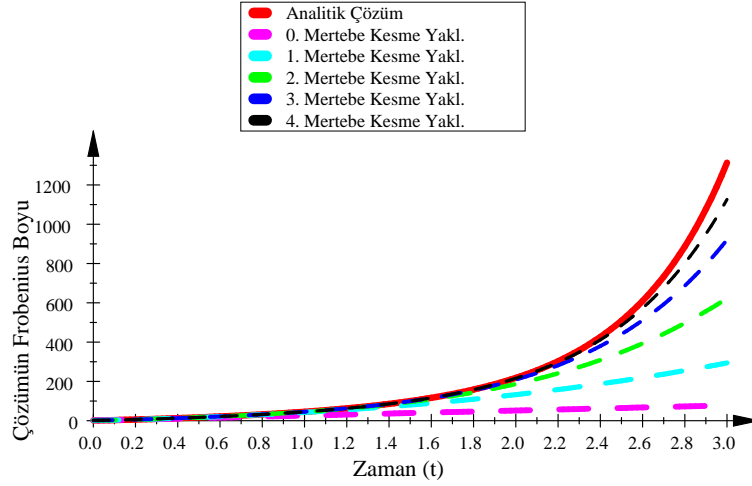
$$\boldsymbol{\theta}_0 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -35/2 & -1 & 0 \\ 25/3 & 73/6 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.201)$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 \equiv \begin{bmatrix} -19/2 & -14 & -12 & -35/2 \\ 20/3 & 59/6 & 25/3 & 73/6 \\ 0 & 0 & -19/2 & -14 \\ 0 & 0 & 20/3 & 59/6 \end{bmatrix}. \quad (4.202)$$

Uzay genişletme yaklaşımına ait seri çözüm için başlangıç koşulu olan \mathbf{Z}_0 matrisi oluşturulur:

$$\mathbf{Z}_0 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 & 25/3 \\ 0 & 1 & -35/2 & 73/6 \end{bmatrix}^T. \quad (4.203)$$

Şekil (4.6)'da "En kısıtlı Uzay Genişletme Yaklaşımı" kullanılarak elde edilen yapının seri çözümünü ve analitik çözümü içeren çizim verilmektedir. Yaklaşım



Şekil 4.6: $[0, 3]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve En Kısıtlı Uzak Genişletme Yaklaşımı ($m = 1$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.

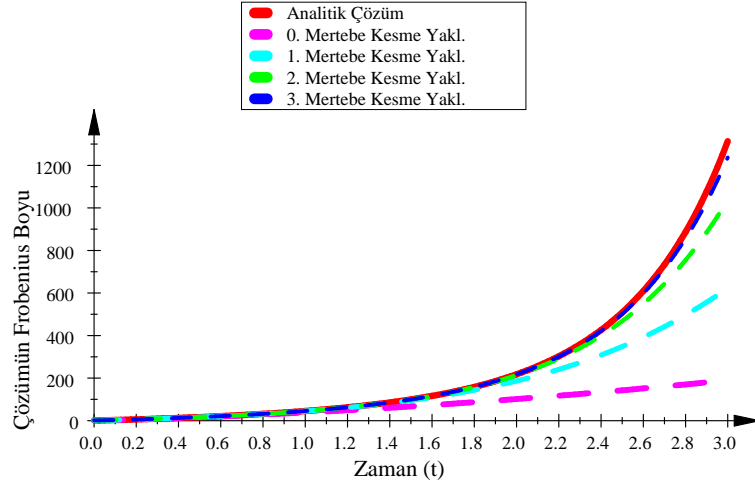
seri açılımdan beş terim alınarak elde edilmiştir. Karşılaştırmalarda $[0, 3]$ aralığında hem gerçek çözümün hem de sayısal çözümün Frobenius boyu hesaplanmıştır. Bu çizimde en üstteki kesiksiz çizgi analitik çözümün Frobenius boyunu vermektedir. Kesikli çizgiler ise seriden sırasıyla 1'den 5'e dek terim alınarak yapılan kesme yaklaşımlarına karşılık gelmektedir. Bu çizimden de anlaşılacağı üzere seriden alınan terim sayısı arttıkça elde edilen çözümün de etkinliği artmaktadır. Ancak çizimde gözönünde bulundurulacak bir diğer nokta da t sıfırdan uzaklaştıkça etkinliğin azaldığıdır. Yine de terimden alınan ilk beş terim analitik çözümü oldukça iyi yansıtmaktadır.

Bu denklem takımı bir de uzak genişletme mertebesi artırılarak çözülecek ve bu yaklaşımın çözüm üzerindeki etkisi incelenecektir. Bu amaçla, öncelikle, Düzgün Uzak Genişletme Yaklaşımını kullanılacak ve $m_{gen} = 2$ olarak seçilecektir. Bu durumda θ_0 ve θ_1 matrisleri ve Z_0 başlangıç koşulu aşağıdaki gibi oluşmaktadır:

$$\theta_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -2\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \theta_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.204)$$

$$\mathbf{Z}_0 \equiv \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{A}_0 \quad \frac{1}{2}\mathbf{A}_0^2 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 \right]. \quad (4.205)$$

Uygulanan bu yaklaşımın sonuçları Şekil (4.7) ile verilmektedir. Şekil (4.7) uzak genişletme mertebesinin artmasıyla sayısal yaklaşım sonuçlarının da iyileştiğini göstermektedir.



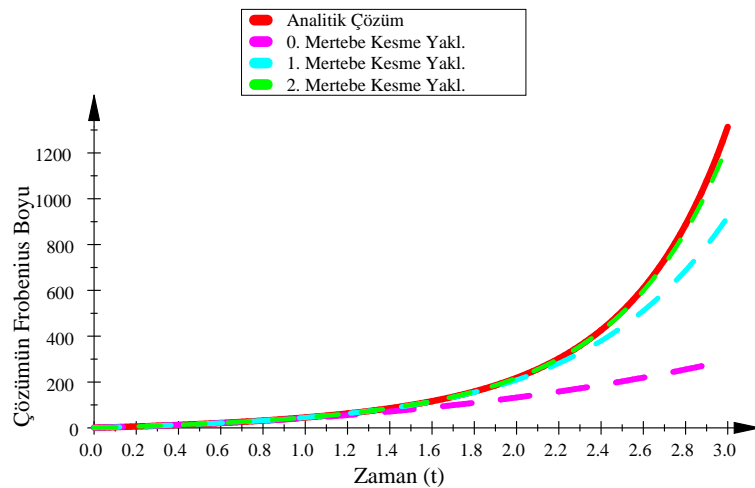
Şekil 4.7: $[0, 3]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve Düzgün Uzak Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 2$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.

Bir aşama daha gidilecek olunur ve Aşkın Uzak Genişletme kullanılacak olunursa bu kez $m_{gen} = 3$ olarak seçilir. Bu durumda θ_0 ve θ_1 matrisleri ve Z_0 başlangıç koşulu ise, bu kez,

$$\theta_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -3\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \theta_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.206)$$

$$Z_0 \equiv \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{A}_0 \quad \frac{1}{2}\mathbf{A}_0^2 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 \quad \frac{1}{3}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_0 + \frac{1}{6}\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{A}_0^3 \right] \quad (4.207)$$

yapısında oluşmaktadır. Bu örneğe ait sonuçlar Şekil (4.8)'de verilmektedir. Bu

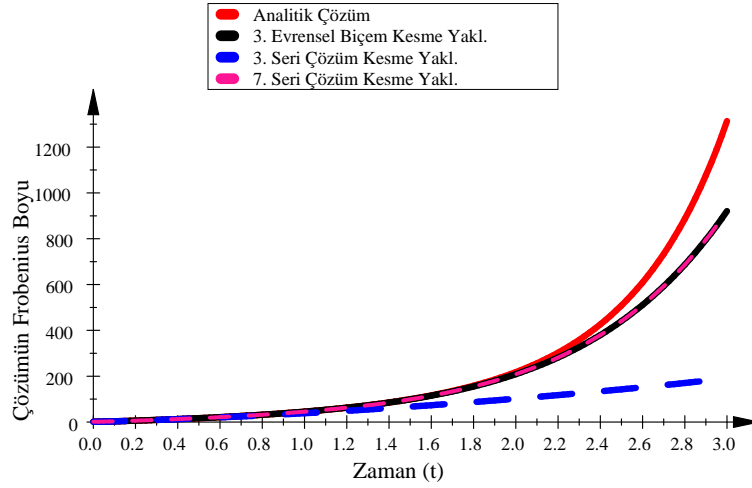


Şekil 4.8: $[0, 3]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve Aşkın Uzak Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 3$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.

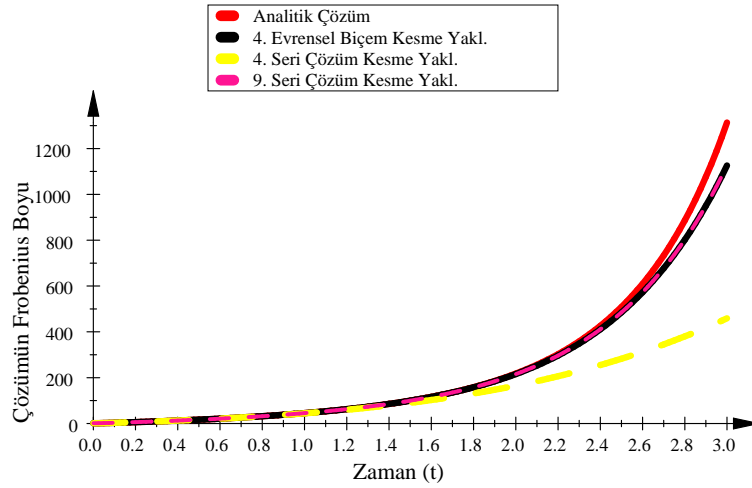
çözümünden de görüldüğü gibi uzak genişletme mertebesi arttırıldığında evrensel biçimin

seri açılımından yalnızca 3 terim alınarak bu aralıkta, gerçek çözüme oldukça yakın bir sonuç elde edilmiştir.

Bu örnek için bir diğer karşılaştırma daha önce Okubo Biçimi'nin seri çözümünde yapıldığı gibi (1.1) denkleminin seri çözümü ile aynı denklemin uzay genişletme uygulanarak Evrensel Biçim'e dönüştürülmüş yapısının seri çözümü arasında yapılabilir. Bu karşılaştırmanın sonuçları Şekil (4.9) ve Şekil (4.10) ile verilmektedir.



Şekil 4.9: $[0,3]$ aralığında denklemin seri çözümü ve Evrensel Biçim'in seri çözümünün karşılaştırılması (4 ve 8 terimle yaklaştırım).



Şekil 4.10: $[0,3]$ aralığında denklemin seri çözümü ve Evrensel Biçim'in seri çözümünün karşılaştırılması (5 ve 10 terimle yaklaştırım).

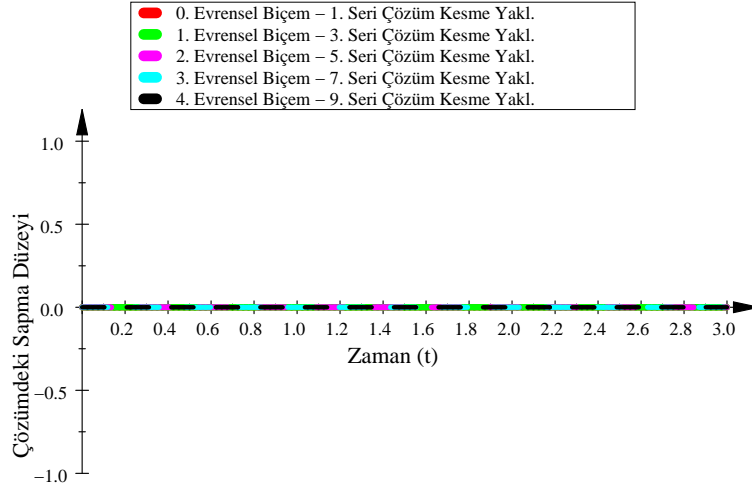
Şekil (4.9)'da, kırmızı kesiksiz çizgi analitik çözüme karşılık gelmektedir. Evrensel Biçim'in seri çözümünden 4 terim alınarak elde edilen yaklaştırım siyah kesiksiz çizgi ile, denklemin seri çözümünden 4 terim alınarak elde edilen yaklaştırım mavi

kesikli çizgi ile verilmektedir. Açıkça görüldüğü gibi Evrensel Biçim'in seri çözümü denklemin seri çözümüne göre çok daha iyi sonuç vermektedir. Seri çözümden 8 terim alındığında (pembe kesikli çizgilerle verilmektedir) ancak Evrensel Biçim'in 4 terimli çözümü ile aynı sonuç elde edilmektedir.

Şekil (4.10)'da, kırmızı kesiksiz çizgi analitik çözüme karşılık gelmektedir. Evrensel Biçim'in seri çözümünden 5 terim alınarak elde edilen yaklaşımlı siyah kesiksiz çizgi ile, denklemin seri çözümünden 5 terim alınarak elde edilen yaklaşımlı sarı kesikli çizgi ile verilmektedir. Burada da açıkça görüldüğü gibi Evrensel Biçim'in seri çözümü denklemin seri çözümüne göre çok daha iyi sonuç vermektedir. Seri çözümden 10 terim alındığında (pembe kesikli çizgilerle verilmektedir) ancak Okubo Biçimi'nin 5 terimli çözümü ile aynı sonuç elde edilmektedir.

Yukarıda verilen örnekte uzay genişletme mertebesi $m = 1$ olarak seçilmiştir. Uzay genişletme mertebesi 1 olduğunda seri çözümden alınan terim sayısı Evrensel Biçim'in seri çözümünden alınan terim sayısının iki katı olduğunda ancak aynı sayısal sonuçlar elde edilmektedir. Benzer şekilde, uzay genişletme mertebesi $m = 2$ olarak seçildiğinde seri çözümden alınan terim sayısı Evrensel Biçim'in seri çözümünden alınan terim sayısının 3 katı kadar olduğunda sayısal sonuçlar birbiriyle çakışmaktadır. Buradan, seri çözümden alınan terim sayısının, Evrensel Biçim'in seri çözümünden alınan terim sayısından $m + 1$ kat daha çok olduğunda her iki yöntemin de aynı sonuçları verdiği genel yargısına varılabilir. Buraya kadar sözü edilen tüm bu yargılar Okubo Biçimi için elde edilen yargılarla birebir örtüşmektedir. Ancak, burada Okubo Biçimi'ndekinden değişik olarak, denklemin seri çözümünün Evrensel Biçim'in seri çözümünden sapmasının Frobenius boyunun tam olarak sıfıra eşit olduğu gözlemlenmiştir. Bu Şekil (4.11)'de de görülmektedir. Benzer bir inceleme Okubo Biçimi için de yapılmış ve çözümün sıfırdan sapmalar gösterdiği görülmüştü (Şekil (4.4)). Bu nedenle, buradaki evrensel yapı ile ilgili anlatımlar Okubo Biçimi'ndekilerle birebir aynıdır. Bu durum, aslında, bilinçli olarak gündeme getirilmiş ve aynılığın düzeyinin çok yüksek olduğu iyice vurgulanmak istenmiştir.

Okubo Biçimi'nin çözümlerinde sıfıra çok yakın ancak tam olarak sıfır olmayan sonuçların elde edilmesi aradaki yapı değişikliğinin sayısal yansımaları olarak yorumlanabilir. Serisel çözüm yapısı neredeyse aynı olsa da matrislerde sayısal



Şekil 4.11: $[0,3]$ aralığında denklemin seri çözümünün Evrensel Biçim'in seri çözümünden sapmasının Frobenius boyu.

değişiklikler oluşur ve bunlar matrislerin durum sayılarını etkiler. Bu da Okubo Biçimi'nde sıfırlanmaların bir kesimini ortadan kaldırır. Diğer bir deyişle, bu durumda sağlıksız yapılanma diyebileceğimiz bazı olguların kendiliğinden yumuşatıldığı söylenebilir.

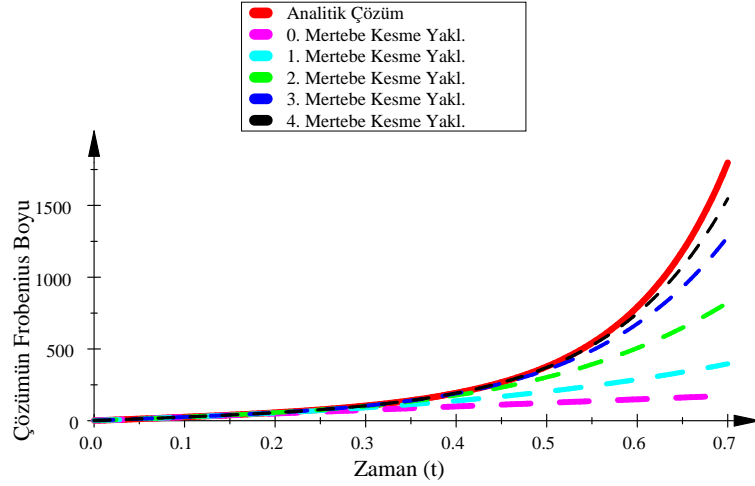
İkinci örnekte yine yay uzunluğunun artırılması durumu incelenmektedir. Bu aşamada da yine Okubo Biçimi'nin seri çözümüne ait sayısal denemelerdeki ikinci örnek üzerinde durulmaktadır. Büyük yay uzunluğu için bir önceki örneğe benzer denemeler yapılmıştır. $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisi

$$\mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} -202t - 117 & -294t - 168 \\ 140t + 80 & 204t + 115 \end{bmatrix} \quad (4.208)$$

biçiminde seçilmektedir. Başlangıç koşulu birim matrise eşit seçilmiş ve θ_0 ve θ_1 matrisleri oluşturulmuştur:

$$\theta_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \theta_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}. \quad (4.209)$$

Denklemin analitik çözümü ile uzay genişletme yaklaşımının seri çözümünden elde edilen sonuçlar Şekil (4.12)'de verilmektedir. Seri çözümden yine 1 ile 5 arasında terim alınmıştır. Yine Frobenius boy hesaplanmış ancak bu kez aralık $[0,0.7]$ olarak seçilmiştir. Bu çizim için de Şekil (4.6) ile aynı şeyler söylenebilir çünkü kesme yaklaşımlarının davranışı bu çizimle benzerlikler göstermektedir. Ancak, bu kez t



Şekil 4.12: $[0, 0.7]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve En Kısıtlı Uzak Genişletme Yaklaşımı ($m = 1$) kullanılarak elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.

için seçilen aralık öncekinden daha dar bir aralıktır. Aynı kesme yaklaşımaları ile elde edilen sonuçların etkinliğinin azaldığı gözlemlenmektedir. $[0, 3]$ aralığı için elde edilen sonuçlar $[0, 0.7]$ aralığı için elde edilen sonuçlarla hemen hemen aynıdır.

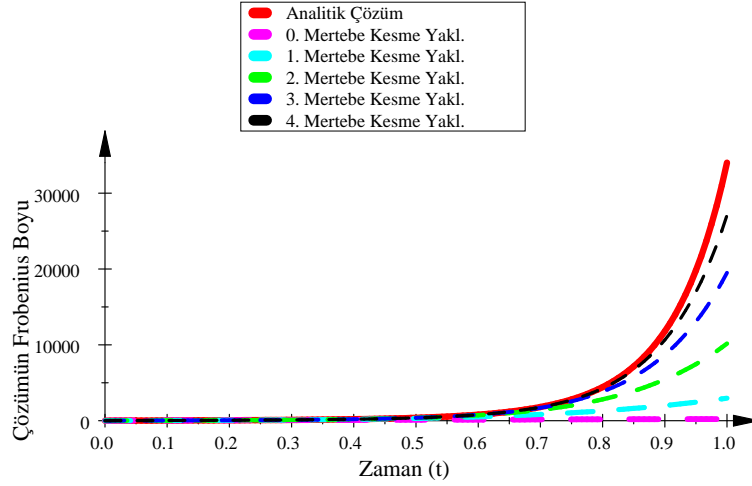
Üçüncü örnekte $\mathbf{A}(t)$ katsayı matrisi ikinci örnekteki gibi seçilmiştir ancak bu kez uzay genişletme mertebesi yükseltilmiştir. Bir önceki örnekte $m = 1$ olarak seçilmişti. Bu En Kısıtlı Uzak Genişletme ile çalıştığımızı göstermektedir. Bu örnekte ise $m_{gen} = 2$ olarak seçilmiştir. Bu durumda $\boldsymbol{\theta}_0$ ve $\boldsymbol{\theta}_1$ matrisleri ve \mathbf{Z}_0 başlangıç koşulu

$$\boldsymbol{\theta}_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -2\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.210)$$

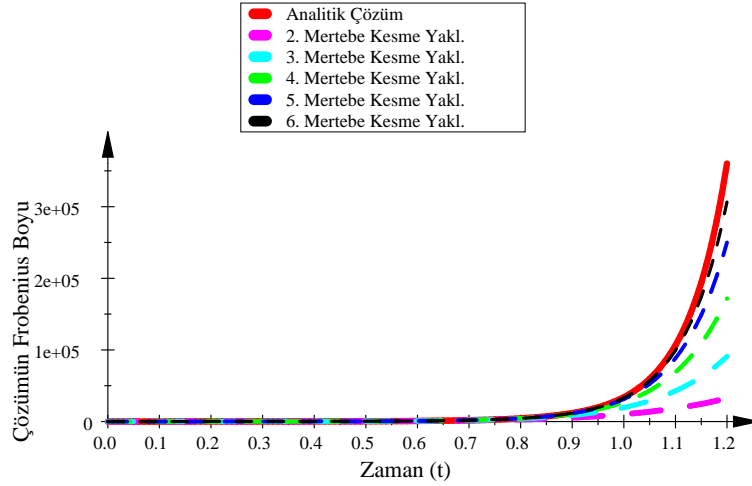
$$\mathbf{Z}_0 \equiv \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{A}_0 \quad \frac{1}{2}\mathbf{A}_0^2 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 \right] \quad (4.211)$$

biçiminde oluşmaktadır. Sonuçlar Şekil (4.13)'te verilmektedir. Şekil (4.13) uzay genişletme mertebesinin artmasıyla sayısal yaklaşım sonuçlarının da iyileştiğini göstermektedir. Uzay genişletme mertebesi bir önceki örnekten yalnızca 1 fazladır, ancak bu bile t 'ye ait aralığın genişlemesine, yani daha geniş bir aralıkta da duyarlı sonuçlar elde edilmesine yetmiştir. $[0, 0.7]$ aralığı için elde edilen çözüm aynı duyarlılıkla daha geniş bir aralık olan $[0, 1]$ aralığı için elde edilmiştir.

Aynı uzay genişletme mertebesinde bu kez Evrensel Biçim'in seri çözümünden alınacak terim sayısı da arttırılacak olunursa bu kez (4.14) ile verilen çizim elde



Şekil 4.13: $[0, 1]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve Düzgün Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 2$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.



Şekil 4.14: $[0, 1.2]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve Düzgün Uzay Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 2$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.

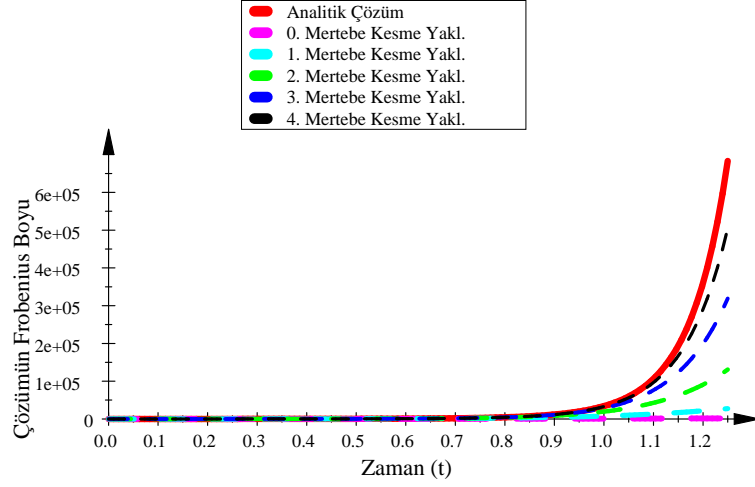
edilmektedir. Seri çözümünden iki terim daha çok alındığında bir önceki örnekte verilen aralığın boyu genişlemiştir.

Bu bölüme ait son örnek yine bir önceki örnekte verilen sistemin bu kez Aşkın Uzay Genişletme Yaklaşımı ile çözümüne bir örnektir. Bu örnekte $m_{gen} = 3$ olarak seçilmiştir. Bu kez denemeler $[0, 1.25]$ aralığında elde edilmiştir. Bu durumda θ_0 ve θ_1 matrisleri ve Z_0 başlangıç koşulu

$$\theta_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -3\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \theta_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.212)$$

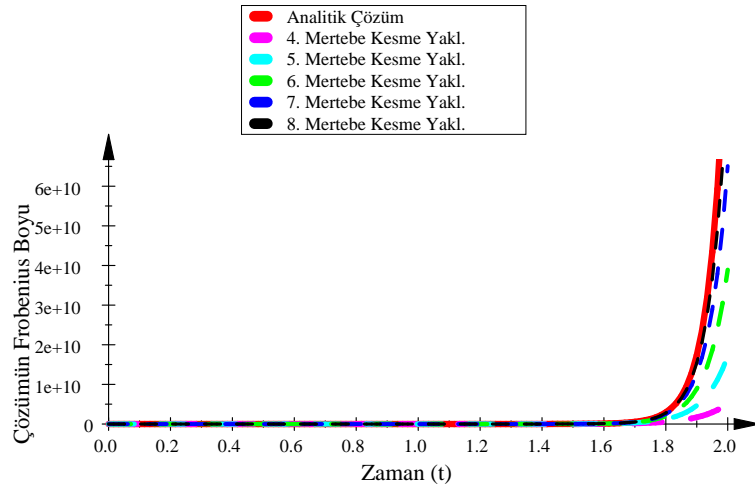
$$Z_0 \equiv \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{A}_0 \quad \frac{1}{2}\mathbf{A}_0^2 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 \quad \frac{1}{3}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_0 + \frac{1}{6}\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{A}_0^3 \right] \quad (4.213)$$

biçiminde oluşmaktadır. Bu örneğe ait sonuçlar Şekil (4.15)'te verilmektedir. Aynı



Şekil 4.15: $[0, 1.25]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve Aşkın Uzak Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 3$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.

örnekte uzak genişletme mertebesi bir kez daha büyütülür ve seriden alınan terim sayısı da arttırılırsa, bu kez Şekil (4.16) elde edilmektedir. Bu örnekte, sayısal sonuçların



Şekil 4.16: $[0, 2]$ aralığında denklemin analitik çözümü ve Aşkın Uzak Genişletme Yaklaşımı ($m_{gen} = 4$) ile elde edilen seri çözümün karşılaştırılması.

gerçek çözümle eşleştiği aralığın genişlediği gözlemlenmektedir.

Buraya kadar elde edilen sonuçlar şöyle yorumlanabilir: (4.145) denkleminin $t = 0$ noktasında serisel açılımının nasıl gerçekleştirildiği ve elde edilen seriden sonlu sayıda ilk terimle oluşturulan kesme yaklaşımlarının $t = 0$ 'dan belli bir uzaklıktaki t değerleri için kullanılabilir olduğu gösterilmiştir. Denklemin seri çözümü üretilirken aslında, t için sonlu bir aralıktan değer alma varsayımının geçerli olduğu

düşünülmektedir. Yani, t için $t \in [0, t_{eb}]$ kısıtlaması yapılmaktadır. Bu varsayım altında $t = 0$ 'daki serisel çözüm bu aralığın iki ucundan yalnızca birinde üretilmekte, çözüm aralığın öbür ucunda da yakınsaklığını korumaktadır. Ancak, $t = 0$ 'dan uzaklaştıkça, aynı sayısal duyarlılığı elde edebilmek için kesme yaklaşımında alıkonulması gereken terim sayısı görünür biçimde artmaktadır. Bu nedenle, aralığın sağ ucunda, $t = t_{eb}$ 'de geçerli olan bir açılım geliştirmek yerinde olacaktır. Bu noktada denklemin serisel açılımı düşünülebilir, ancak bu tür bir açılım bu nokta üzerinde tekillik içermese de iki ardışık terimli bir özyineleme değil, üç terimli bir özyineleme verir. (4.3) bölümünde üç terimli özyinelemenin nasıl oluştuğu gösterilmiştir. Bu çözüm yöntemine karşılık ikinci bir yol, uygun bir saptırım açılımı ile iki ardışık terimli özyineleme oluşturmaktır. Bundan sonraki bölüm böyle bir yaklaşım oluşturmaya yöneliktir.

5. SONSUZDA BASKIN SAPTIRIM AÇILIMLARI

Sonuçların iyileştirilmesi için önerilen yüksek mertebeli uzay genişletme yöntemine değişik bir seçenek olarak düşünülebilecek bir diğer yaklaşım da $t = 0$ noktasından değişik bir noktada, sözgelimi $t = t_1$ ile gösterilebilecek bir noktada (4.145) denkleminin seriye açılmasıdır. Ancak bu durumda elde edilecek özyineli ilişki iki terimli değil, üç terimli olacaktır. Amaç iki terimli özyineleme ile sonuca ulaşmaktır ve bu da seri açılım yerine başka bir yaklaşımın kullanılmasını gerektirmektedir.

5.1 Matris Katsayılı Türevli Denklemlerde Saptırım Açılımları

Bu doğrultuda tezin bu bölümünde denklem takımının çözümünde saptırım açılımı kullanılacaktır. (4.145) ile verilen denkleme bir saptırım değiştirgesi eklemek ve daha sonra elde edilen yapıyı Maclaurin serisine açmak olanaklıdır [59]. Bu durumda elde edilen özyineli ilişki iki terimli olacaktır. Burada amaç, t_1 noktasında verilen bir başlangıç koşulu altında denkleme saptırım açılımı uygulayarak çözüm elde etmektir.

$(m + 1)n \times n$ boyutlu $\mathbf{Z}(t_1)$ matrisi isteğe bağlı olarak seçilen ve t_1 noktasındaki başlangıç koşulunu veren matris olsun ve \mathbf{C}_1 matrisine eşit olsun. (4.145) denklemini daha genel bir biçimde bir baskın terim ve bir saptırım terimi içerecek şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_G'(t, \varepsilon) &= \left[\frac{1}{t_1} \boldsymbol{\theta}_0 + t_1^m \boldsymbol{\theta}_1 \right] \mathbf{Z}_G(t, \varepsilon) \\ &+ \varepsilon \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_1} \right) \boldsymbol{\theta}_0 + (t^m - t_1^m) \boldsymbol{\theta}_1 \right] \mathbf{Z}_G(t, \varepsilon), \quad \mathbf{Z}_G(t_1, \varepsilon) = \mathbf{C}_1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Bu denklemdeki baskın terim, matris işlevinin değişken bir t 'ye değil de değişmez bir t_1 noktasına bağlı olarak yazılmasıyla tanımlanmıştır. G alt simgesi genişletilmiş ya da genelleştirilmiş anlamında kullanılmaktadır. Bu simgenin kullanılmasının nedeni ise, aslında, yeni bir değiştirgeyi işin içine sokarak genelleştirme ya da genişletme yapmak olarak açıklanabilir. Saptırım terimi ise matris işlevinin t_1 noktasının t 'den

sapmasına bağılı olarak tanımlanmıştır. Elde edilen seri, saptırım değıştirgesi 1'e eşit olduğunda (4.145) denkleminin seri çözümüyle eşleşmektedir. Bu işlevin çözümü (4.145) denkleminin çözümü ile ilintilidir ve bu ilişki

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_G(t, 1) \quad (5.2)$$

eşitliği ile verilebilir. (5.1) ile verilen denkleme çözüm bulmak amacıyla \mathbf{Z}_G işlevinin ε -karmaşık sayı düzleminde merkeze konumlanmış, yarıçapı sıfırdan farklı olan ve $\varepsilon = 1$ noktasını da içeren bir çember içinde analitik olduğu varsayılır. Bu durumda

$$\mathbf{Z}_G(t, t_1, \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1) \quad (5.3)$$

ile verilen açılımı yazmak olanaklıdır [59]. Burada t_1 'e olan bağımlılık, başlangıç koşulu bu noktada verildiğinden ve bunun da yakınsaklık bölgesi içinde çözümün davranışını etkiliyor olmasından dolayı özellikle belirtilmiştir. (5.3) ile verilen seri açılım (5.1) denkleminde yerine konduğunda

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'_{G,i}(t, t_1) &= \left[\frac{1}{t_1} \boldsymbol{\theta}_0 + t_1^m \boldsymbol{\theta}_1 \right] \mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1) \\ &+ \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_1} \right) \boldsymbol{\theta}_0 + (t^m - t_1^m) \boldsymbol{\theta}_1 \right] \mathbf{Z}_{G,i-1}(t, t_1), \\ \mathbf{Z}_{G,i}(t_1, t_1) &= \mathbf{C}_1 \delta_{i0} \end{aligned} \quad (5.4)$$

biçimindeki özyineli matris katsayılı türevli denklem elde edilmektedir. Bu denklemdeki δ simgesi Kronecker delta simgesidir ve $\mathbf{Z}_{-1}(t)$ değerinin sıfıra eşit olduğu varsayılmaktadır. $i = 0$ olduğunda denklem, \mathbf{C} matrisi

$$\mathbf{C} \equiv \frac{1}{t_1} \boldsymbol{\theta}_0 + t_1^m \boldsymbol{\theta}_1 \quad (5.5)$$

biçiminde tanımlanmak üzere

$$\mathbf{Z}'_{G,0}(t, t_1) - \mathbf{C} \mathbf{Z}_{G,0}(t, t_1) = 0, \quad \mathbf{Z}_{G,0}(t_1, t_1) = \mathbf{C}_1 \quad (5.6)$$

biçimine dönüşmektedir. (5.6) denkleminin çözümü

$$\mathbf{Z}_{G,0}(t, t_1) = e^{(t-t_1)\mathbf{C}} \mathbf{C}_1 \quad (5.7)$$

biçimindedir [1]. Diğer yandan \mathbf{C} matrisi (5.4) sırasayılı denklemde kullanılırsa bu denklem

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'_{G,i}(t, t_1) - \mathbf{C} \mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1) &= \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{t^m}{t_1^{m+1}} \right) \boldsymbol{\theta}_0 + \left(\frac{t^m}{t_1^m} - 1 \right) \mathbf{C} \right] \mathbf{Z}_{G,i-1}(t, t_1), \\ \mathbf{Z}_{G,i}(t_1, t_1) &= \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

yapısına dönüşür. Bu denklemin çözümü ise

$$\mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1) = \int_t^{t_1} d\tau \mathbf{K}(t, \tau) \mathbf{Z}_{G,i-1}(\tau, t_1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

biçimindeki tümlev içeren özyineli ilişki ile verilebilir. Bu denklemden görülen \mathbf{K} işlevinin yapısı

$$\mathbf{K}(t, \tau) \equiv \left(1 - \frac{\tau^m}{t_1^m}\right) \mathbf{C} e^{(t-\tau)\mathbf{C}} - \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\tau^m}{t_1^{m+1}}\right) e^{(t-\tau)\mathbf{C}} \boldsymbol{\theta}_0 \quad (5.10)$$

biçimindedir.

Eğer,

$$\mathcal{J}(t_1) \equiv \int_t^{t_1} d\tau \mathbf{K}(t, \tau) \quad (5.11)$$

biçiminde bir $\mathcal{J}(t_1)$ tümlev işlevi tanımlanacak olunursa, $\mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1)$ işlevi için, $\mathbf{Z}_{G,i-1}(t, t_1)$ işlevinin $(\mathbf{K}(t, \tau))$ çekirdeğine sahip $\mathcal{J}(t_1)$ tümlevi altındaki görüntüsü olduğu söylenebilir. Bu tümlev işlevi i 'ye bağımlı olmadığından $\mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1)$ işlevi, $\mathbf{Z}_0(t, t_1)$ işlevinin aynı tümlev işlevinin i . üssü altındaki görüntüsü olarak düşünülebilir. Bu durumda

$$\mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1) = \mathcal{J}(t_1)^i \mathbf{Z}_{G,0}(t, t_1) = \mathcal{J}(t_1)^i e^{(t-t_1)\mathbf{C}} \mathbf{C}_1, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.12)$$

bağıntısını yazmak olanaklıdır.

Bu elde edilen son anlatım saptırım serisinin yakınsaklığı ile ilgili bilgi edinmek amacıyla yapılacak olan sınır çözümlemesini kolaylaştıracaktır. Yine çözümlemeleri kolaylaştırmak amacıyla t 'nin kapalı bir aralıkta olduğu varsayılabilir ve bu aralık $[t_0, t_1]$ olarak seçilebilir. t_0 'ın artı bir sayı olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda aşağıda verilen kesme yaklaşımını oluşturulabilir

$$\mathbf{Z}_G^{(i)}(t, t_1, \varepsilon) = \sum_{j=0}^i \varepsilon^j \mathbf{Z}_{G,j}(t, t_1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.13)$$

Bu eşitlikte $\varepsilon = 1$, (4.145) denkleminin çözümünün i . saptırım yaklaşımını tanımlar ve bu

$$\mathbf{Z}^{(i)}(t, t_1) = \mathbf{Z}_G^{(i)}(t, t_1, 1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.14)$$

biçiminde gösterilebilir.

5.2 Yöntemin Yakınsaklık Ölçütlerinin İncelenmesi ve Hata Analizi

$\mathcal{S}(t_1)$ tümlevinin çekirdeğinde yer alan matrisler aldıkları değıştirgelere bağlı olarak değışirler ve bu nedenle $[t_0, t_1]$ aralığında sınırlandırılmışlardır. Bu da, bu aralık boyunca sözü edilen matrisler için en büyük oldukları değerlerin bulunabileceği anlamına gelmektedir. Bu durumda

$$\kappa_1(t_0, t_1) \equiv \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| e^{(t-\tau)\mathbf{C}} \boldsymbol{\theta}_0 \right\|, \quad \kappa_2(t_0, t_1) \equiv \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \mathbf{C} e^{(t-\tau)\mathbf{C}} \right\| \quad (5.15)$$

tanımlamalarını yapmak ve sırasıyla

$$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{\tau^m}{t_1^{m+1}} \right) < \left(\frac{1}{t_0} - \frac{t_0^m}{t_1^{m+1}} \right), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.16)$$

$$\left(1 - \frac{\tau^m}{t_1^m} \right) < \left(1 - \frac{t_0^m}{t_1^m} \right), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (5.17)$$

eşitsizliklerini tanımlamak olanaklıdır. Tüm bunlar

$$\kappa(t_0, t_1) \equiv \left(\frac{1}{t_0} - \frac{t_0^m}{t_1^{m+1}} \right) \kappa_1(t_0, t_1) + \left(1 - \frac{t_0^m}{t_1^m} \right) \kappa_2(t_0, t_1) \quad (5.18)$$

tanımlamasını yapmamızı sağlar ve böylece (5.9) denkleminin de kullanılmasıyla

$$\| \mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1) \| < \kappa(t_0, t_1) \int_t^{t_1} d\tau \| \mathbf{Z}_{G,i-1}(\tau, t_1) \|, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.19)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.7) sırasayılı eşitlikten

$$\| \mathbf{Z}_{G,0}(t, t_1) \| \leq e^{(t_1-t_0)\|\mathbf{C}\|} \| \mathbf{C}_1 \|, \quad (5.20)$$

eşitsizliği yazılır ve bu (5.19) içinde kullanılırsa

$$\| \mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1) \| < \frac{\kappa(t_0, t_1)^i}{i!} (t_1 - t)^i e^{(t_1-t_0)\|\mathbf{C}\|} \| \mathbf{C}_1 \|, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

elde edilir. Şimdi de (5.3) sırasayılı açılım için

$$\| \mathbf{Z}_G(t, t_1, \boldsymbol{\varepsilon}) \| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\boldsymbol{\varepsilon}|^i \| \mathbf{Z}_{G,i}(t, t_1) \| \quad (5.22)$$

eşitsizliği yazılır ve bu (5.21) sırasayılı denklemlerle birleştirilirse

$$\| \mathbf{Z}_G(t, t_1, \boldsymbol{\varepsilon}) \| \leq e^{\kappa(t_0, t_1)|\boldsymbol{\varepsilon|(t_1-t)}} e^{(t_1-t_0)\|\mathbf{C}\|} \| \mathbf{C}_1 \| \quad (5.23)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu, $\kappa(t_0, t_1)$ sonlu kaldığı sürece yukarıda verilen saptırım açılımının, saptırım değiştirgesinin sonlu tüm değerleri için yakınsadığını gösterir. Bu t_0 'ın artı değerleri için sağlanır. Ancak, t_0 sıfıra yaklaştıkça $\kappa(t_0, t_1)$ sınırsız olarak büyür. Burada kavramsal olarak yakınsama olsa bile, yakınsama oranı t_0 azaldıkça azalır. Bu da saptırım açılımının t_0 , sıfırdan yeterince uzak iken kullanışlı çözümler ürettiğini göstermektedir.

Bu bölümün ikinci aşaması kesme yaklaşımlarını için hata kestirimi yapmaya yöneliktir. Bu amaçla öncelikle

$$\|E_i(t, t_1)\| \equiv \left\| \mathbf{Z}_G(t, t_1, 1) - \mathbf{Z}_G^{(i)}(t, t_1, 1) \right\|, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.24)$$

tanımlaması yapılabilir ve E_i terimi için

$$\|E_i(t, t_1)\| \leq \sum_{j=i+1}^{\infty} \left\| \mathbf{Z}_{G,j}(t, t_1) \right\| \quad (5.25)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik

$$\|E_i(t, t_1)\| \leq \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{\kappa(t_0, t_1)^j}{j!} (t_1 - t)^j e^{(t_1 - t_0)\|\mathbf{C}\|} \|\mathbf{C}_1\| \quad (5.26)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu anlatımda açık yapısı (4.190) ile verilen χ_i işlevi kullanılacak olunursa

$$\|E_i(t, t_1)\| \leq \frac{\kappa(t_0, t_1)^{i+1}}{(i+1)!} (t_1 - t)^{i+1} \chi_i(\kappa(t_0, t_1)(t_1 - t)) e^{(t_1 - t_0)\|\mathbf{C}\|} \|\mathbf{C}_1\| \quad (5.27)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu saptırım açılımının i . kesme yaklaşımına ait hata kestirimini vermektedir. $\kappa(t_0, t_1)$ sonlu kaldıkça, her ε değeri için yakınsama vardır. Diğer bir deyişle sonsuz yakınsaklık yarıçapı söz konusudur. Matematiksel olarak böyle bir yakınsama olmasına karşın, t_0 ve t_1 değerleri çok belirleyici nitelikler taşırlar. Belli bir duyarlılık yakalamak için saptırım açılımından alınması gereken terim sayısı, sonsuz yarıçaplı yakınsamanın varlığına karşın, $\kappa(t_0, t_1)$ değerinin büyümesine koşut olarak artar. Özellikle t_0 'ın 0'a yaklaşması bu artışı katlanılmaz düzeylere tırmandırabilir. Bu nedenle burada $t_0 = t_1/2$ alma eğiliminde olacağız ve saptırım açılımından kesmeleri $[\frac{t_1}{2}, t_1]$ aralığı içinde kullanacağız. $[0, \frac{t_1}{2}]$ aralığında ise önceki bölümde sözü edilen üslü seri açılımından kesmelerle çalışacağız.

5.3 Başlangıç Değişmezinin Belirlenmesine Dayalı Analitik Sürdürüm

Yukarıdaki çözümlerinde $\mathbf{Z}_G(t, t_1)$ işlevinin isteğe bağlı olarak seçilecek bir \mathbf{C}_1 değişmezi içerdiği görülmektedir. Bu değişmezin belirlenmesini kolaylaştırmak amacıyla

$$\mathbf{Z}(t, t_1) \equiv \bar{\mathbf{Z}}(t, t_1) \mathbf{C}_1 \quad (5.28)$$

denkliği yazılabilir. $\bar{\mathbf{Z}}(t, t_1)$ matrisi eşsiz bir matristir. Farklı bir $t = t_2$ noktasında başka bir çözüm için bu kez

$$\mathbf{Z}(t, t_2) \equiv \bar{\mathbf{Z}}(t, t_2) \mathbf{C}_2 \quad (5.29)$$

denkliği yazılabilir. $\bar{\mathbf{Z}}(t, t_2)$ matrisi $t = t_2$ noktasında eşsiz bir matristir ve bu noktadaki çözüm için \mathbf{C}_2 yeni bir keyfi matrisi simgeler. t_2 'nin t_1 'den büyük olduğu varsayılırsa, (5.28) ve (5.29) eşitliklerinde verilen matris işlevleri arada bulunan bir değerde, sözcüğü $[t_1, t_2]$ aralığının orta noktasında, eşleşmelidir. Çünkü matris katsayılı türevli denklemin çözümü bu işlevlerin doğrusal bağımlılığını gerektirmektedir. Bu durumda

$$\bar{\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{2}(t_1 + t_2), t_2\right) \mathbf{C}_2 = \bar{\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{2}(t_1 + t_2), t_1\right) \mathbf{C}_1 \quad (5.30)$$

eşitliği yazılabilir. $\bar{\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{2}(t_1 + t_2), t_2\right)$ ve $\bar{\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{2}(t_1 + t_2), t_1\right)$ matrisleri olanaklı kıldığı sürece \mathbf{C}_1 ve \mathbf{C}_2 değişmez matrislerinden biri diğeri türünden çözülebilir. Eğer çözüm bulunamıyorsa bu durumda eşleşme noktası orta noktadan $[t_1, t_2]$ aralığında değişik bir iç noktaya kaydırılabilir. En uygun iç noktanın bulunabilmesi eniyileme (ing: optimization) problemidir ve çok daha ayrıntılı bir çözümlenmeyi gerektirmektedir. Bu konu tezin kapsamı dışındadır. Bu çalışmada böyle bir eşleşme noktasının bulunabileceği varsayılmaktadır.

Bu kavramlar akla “Saptırımlı Matris Altkesimsel İşlevleri (ing: Perturbative Matrix Splines)” tanımlamasını getirebilir. t 'nin artan t_1 , t_2 ve t_3 değerlerinde saptırım açılımlarını elde ettiğimizi düşünelim. Bu durumda elde edilen çözümler sırasıyla \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 ve \mathbf{C}_3 değişmez matrislerini içerecektir. Eşleşme noktaları, birinci ve ikinci, ikinci ve üçüncü saptırım çözümleri için \bar{t}_{1-2} ve \bar{t}_{2-3} ile gösterilsin. Bu durumda, ikinci çözüm $[\bar{t}_{1-2}, \bar{t}_{2-3}]$ aralığında parçalı matris işlev gösterilimi olarak düşünülebilir. Sayısal analizdeki altkesimsel işlevlerle (ing: spline functions) benzerlik kurulacak

olunursa [60, 61], bu tip matrislerin tümü “Saptırımlı Matris Altkesimsel İşlevleri” olarak adlandırılabilir [57]. İlk aralık 0 noktasını başlangıç noktası olarak alacak ve ilk eşleşme noktası için saptırımlı altkesimsel matris işlevi sıfır etrafındaki seri çözümden yapılan kesme ile elde edilecektir. Problemin başlangıç koşulu ilk eşleşme noktasının bulunmasında kullanılmaktadır. Birbirini izleyen aralıklar sözkonusu olduğunda ilk aralığın son noktasında alınan değer bir sonraki aralıkta başlangıç değeri olarak kullanılmaktadır. Kesme noktaları ve altkesimsel işlev aralıkları saptırım serilerinin kesme mertebesine ve seri çözümün kesme mertebesine bağlı olarak değişiklikler gösterebilir.

5.4 Sayısal Sonuçlar

$\mathbf{A}(t)$ katsayı işlevinin

$$\mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} -202t - 117 & -294t - 168 \\ 140t + 80 & 204t + 115 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

biçiminde seçildiği durumu gözönüne alalım. $\mathbf{A}(t)$ katsayı işlevi bu şekilde seçildiğinde (1.1) denkleminin analitik çözümünün

$$\mathbf{X}(t) \equiv \begin{bmatrix} 15e^{-3t^2-5t} - 14e^{4t^2+3t} & 21e^{-3t^2-5t} - 21e^{4t^2+3t} \\ 10e^{4t^2+3t} - 10e^{-3t^2-5t} & 15e^{4t^2+3t} - 14e^{-3t^2-5t} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

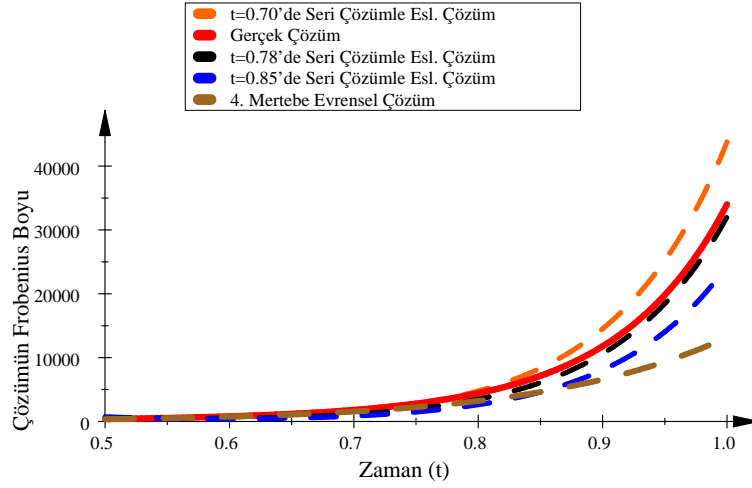
biçiminde ve $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}_1$, \mathbf{Z}_0 matrislerinin açık yapılarının ise sırasıyla

$$\boldsymbol{\theta}_0 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 117 & -168 & -1 & 0 \\ 80 & 115 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_1 \equiv \begin{bmatrix} -202 & -294 & -117 & -168 \\ 140 & 204 & 80 & 115 \\ 0 & 0 & -202 & -294 \\ 0 & 0 & 140 & 204 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

$$\mathbf{Z}_0 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -117 & 80 \\ 0 & 1 & -168 & 115 \end{bmatrix}^T \quad (5.34)$$

biçiminde elde edildiğini önceki bölümde göstermiştik. Denklem sisteminin [0.5, 1.0] aralığında saptırım açılımları kullanılarak elde edilen çözümlerini veren sonuçlar Şekil (5.1)'de verilmektedir. Kırmızı ile verilen eğri analitik çözümü göstermektedir.

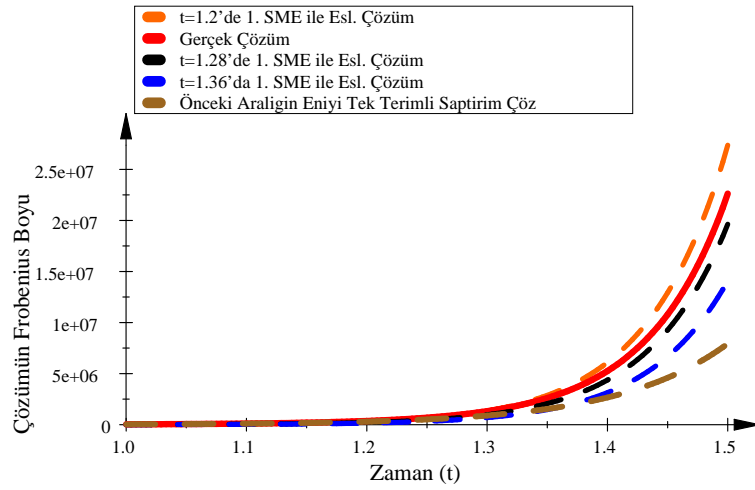
Yukarıdan itibaren birinci, üçüncü ve dördüncü eğriler $t = 1.0$ noktasındaki tek terimli saptırım açılımı çözümünü vermektedir. Bu eğriler Evrensel Biçim'in sırasıyla $t = 0.70$, $t = 0.78$ ve $t = 0.85$ noktalarındaki dört terimli seri çözümü ile eşleşmektedirler. En alttaki eğri ise evrensel biçimin beş terimli seri çözümüne karşılık gelmektedir. Bu çizimden de kolayca görüldüğü gibi yukarıdan üçüncü eğri gerçek çözümle neredeyse aynı sonucu vermektedir. Burada gerçek eşleşme noktası aslında 0.78 'den daha küçüktür. Ancak, bu değer tam olarak bulunabilmesi daha önce de belirtildiği gibi bir eniyileme problemidir. Tek terimli saptırımı matris altkesimsel işlevlerinin kullanımı, seri çözümden beş terim alınarak elde edilmiş olan yaklaşımdan çok daha iyi bir sonuç üretmiştir. Şekil (5.2), $t = 1.5$ noktasında elde edilen saptırım açılımına ait



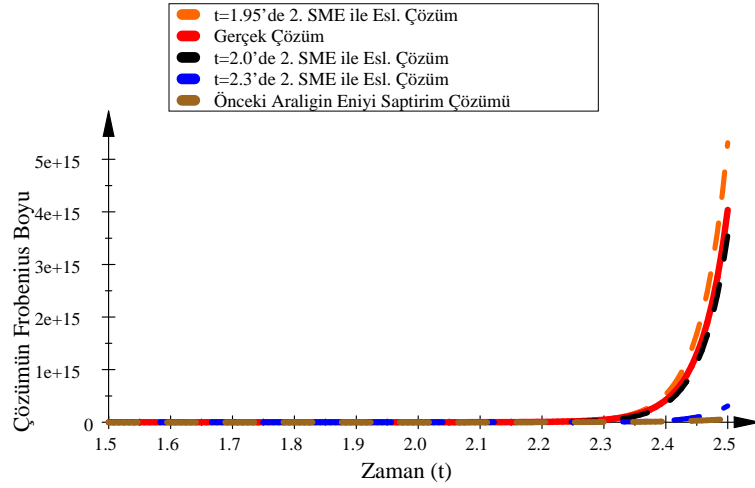
Şekil 5.1: $[0.5, 1]$ aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması.

çözümü göstermektedir. Bu çizimde, ikinci eğri yine analitik çözümü göstermektedir. Birinci, üçüncü ve dördüncü eğriler sırasıyla bir önceki aralıkta elde edilen birinci saptırımı matris altkesimsel işlevinin $t = 1.20$, $t = 1.28$ ve $t = 1.36$ noktaları ile eşleşen değerlerini göstermektedir. Bu çizimdeki en iyi yaklaşım üçüncü eğri ile elde edilmiştir. Bu çizimden de açıkça görüldüğü gibi çözüm aralığı $[1, 1.5]$ aralığına genişletilmiş ve daha geniş bir aralıkta da gerçek çözüme çok yakın bir sonuç elde edilmiştir.

Bir adım daha ileri gidilebilir ve ikinci bir saptırımı matris altkesimsel işlevi kullanılarak çözüm aralığı daha da genişletilebilir (Şekil (5.3)). Bu çizimlerden de



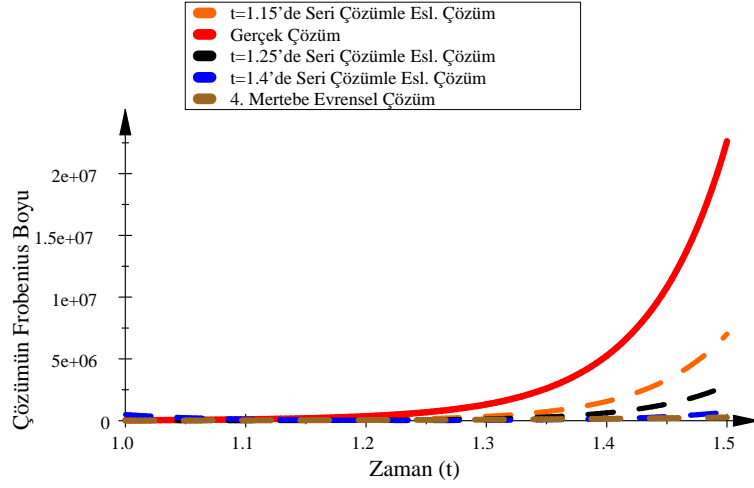
Şekil 5.2: $[1.0, 1.5]$ aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması.



Şekil 5.3: $[1.5, 2.5]$ aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması.

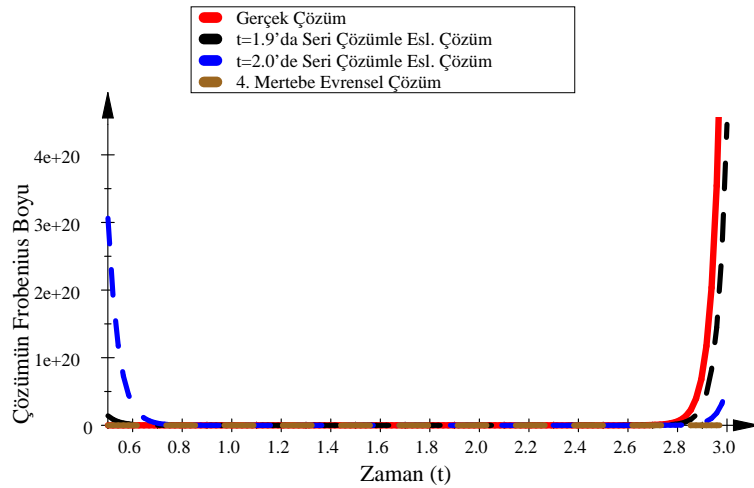
görüldüğü gibi kullanılan altkesimsel işlev sayısı arttıkça sayısal yaklaşımın da niteliği belirgin bir biçimde artmaktadır.

Buraya kadar verilen çizimlerde sayısal sonuçlar (5.12) sırasayılı saptırım açılımı bağıntısından yalnızca tek bir terim alınarak elde edilmiştir. Alt aralık yeterince küçük seçildiğinde saptırım açılımının yalnızca ilk terimini kullanmak yeterlidir. Bu örnekte, ilk aralık $[0, 0.5]$ aralığıdır ve 0 noktasını başlangıç noktası olarak almaktadır. İlk aralık $[0, 0.5]$ yerine sözgelimi $[0, 1.0]$ olarak seçildiğinde yaklaşımın niteliğinin düştüğü gözlemlenmektedir. Bu alt aralık kullanılarak elde edilen sonuç Şekil (5.4) ile verilmektedir.



Şekil 5.4: [1.0, 1.5] aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması (Geniş alt aralık seçimi).

Buraya kadar verilen sayısal sonuçlar yalnızca En Kısıtlı Uzay Genişletme Yaklaşımını kullanarak elde edilmiştir. Saptırım açılımlarını yüksek mertebeli uzay genişletme yaklaşımının da kullanılabileceği bir yapıya genişletmek olanaklıdır. Eğer uzay genişletme mertebesi yükseltir ve saptırım açılımı yeni uzay genişletme mertebesine bağlı olarak oluşturulursa sayısal sonuçların da bu mertebeye bağlı olarak gelişmesi beklenmektedir. Bu bağlamda, önceki örnek uzay genişletme mertebesi bir artırılarak yani, $m_{gen} = 2$ seçilerek, yeniden hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil (5.5) ile verilmektedir. Bu çizimde tek terimli saptırım açılımı kullanılmış,



Şekil 5.5: [0.5, 3.0] aralığında analitik çözüm ile tek terimli saptırım açılımı kullanılarak elde edilen çözümün Frobenius boylarının karşılaştırılması ($m_{gen} = 2$).

ve yalnızca tek bir saptırımlı altkesimsel matris işlevi kullanılarak sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Tek bir saptırımlı altkesimsel matris işlevi kullanıldığı halde denklem takımının oldukça geniş bir aralıkta çözümü bulunmuştur. Aralığın başında gözlenen sapma ise daha önce değindiğimiz aralık boyu seçimi ile ilgilidir. Aralığın alt sınırı, üst sınırın yarısı olarak seçildiğinde duyarlı çözümler elde edileceği daha önce belirtilmişti. Bu örnekte bu sınırlar aşıldığı için aralığın başında çözümde bir sapma gözlenmektedir.

Sayısal sonuçların iyileştirilmesi için saptırım açılımından birden çok terim de alınabilir. Ancak böyle bir durum birtakım tümlevlerin hesaplanmasını gerektirir ve bu da hesaplama karmaşıklığını artırır. Bu nedenle tek terimli saptırım açılımları ile yetinilecek ve sayısal sonuçların niteliğinin artırılmasında birden çok saptırımlı altkesimsel matris işlevi kullanma yoluna gidilecektir. Deneyimlerimiz de bize ilk aralığın yeterince küçük seçilmesi durumunda sonuçların oldukça etkin çıktığını göstermektedir.

6. DOĞRUSAL OLMAYAN SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLER

Bu bölümde uzay genişletme kavramının doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümünde nasıl kullanılacağı üzerinde durulmaktadır. Uzay genişletme yönteminin doğrusal olmayan türevli denklemlere doğrudan uygulanması, doğrusal sıradan türevli denklemlerde olduğu gibi bizi doğrudan evrensel bir yapıya götürmez. Bu nedenle, doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümünde değişik bir yol izlemek gerekmektedir.

Yaptığımız incelemeler göretürevli denklemlere uzay genişletme yönteminin uygulanmasıyla evrensel yapıların elde edilebildiğini göstermektedir. Bu nedenle, çalışmanın bu aşamasında göretürevli denklemlerin kullanımıyla doğrusal olmayan türevli denklem oluşturma yoluna gidilecektir.

Bu noktada bize yardımcı olacak bir diğer olgu sendelenimsizlik yaklaşıdır. Sendelenimsizlik yaklaşımı, göretürevli denklemlerin doğrusal olmayan türevli denklemlere dönüştürülmesinde kullanılmaktadır. Göretürevli denklemlerden, doğrusal olmayabilen sıradan türevli denklem üretmek için sendelenimsizlik yaklaşımı bir öge olarak kullanılmaktadır ancak bu yalnız başına iş gören bir öge değildir. Bu nedenle, sendelenimsizlik yaklaşımı beklenen değerler üzerine uygulanarak bütünlük sağlanmaktadır. Bu noktada kuvantum mekaniğinde kullanılan bazı kavramlardan yararlanılacaktır. Böylelikle karmaşık yapıda olmayan bir göretürevli denklemin uzay genişletme yöntemi ile elde edilen çözümünden doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümüne ulaşılabilir.

Bu bağlamda, bu bölümde öncelikle sendelenimsizlik yaklaşımı ile doğrusal olmayan türevli denklemlerin nasıl elde edileceği gösterilecek, daha sonra da göretürevli denklemlere uzay genişletme kavramının ne şekilde uygulanacağı ve evrensel biçimin nasıl elde edileceği anlatılacaktır. Evrensel biçim oluşturulduktan

sonra daha önceki bölümlerde yapıldığı gibi bu biçimin seri çözümü ile ikili özyineli ilişkinin nasıl elde edildiği gösterilecektir.

6.1 Doğrusal Olmayan Türevli Denklemler ve Sendelenimsizlik

6.1.1 Kuantum Mekaniği ve Dalga İşlevi

Kuantum mekaniğinde bir fiziksel sistemin belirli bir t anındaki durumu ψ ile gösterilen dalga işlevi ile belirlenir. Bu durumun zaman içindeki gelişimi ise ψ işlevinin doğrusal ve sağyansız bir türevli denklemi ile tanımlanmaktadır. Bu denklem, t zaman değişkenine göre birinci dereceden bir türevli denklem olmalıdır. Dalga işlevlerinin oluşturduğu uzayda bir işlem ψ işlevine başka bir ψ' işlevini karşılık getiriyorsa bunun bir işlecin etkisiyle oluştuğu kabul edilir. \hat{A} böyle bir işleci simgelemek üzere bu ilişki

$$\hat{A}\psi = \psi' \quad (6.1)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu bağlamda Schrödinger dalga denklemi, \hat{H} hamilton adı verilen işleç olmak üzere,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (6.2)$$

olarak yazılabilir. Bir kuantum sisteminin fiziksel durumunu betimleyen dalga işlevlerinin oluşturduğu uzay Hilbert Uzayı'dır ve dalga denkleminde kullanılan hamilton işleci hermitsel bir işleçtir. Her \hat{A} işleci için \hat{A}^\dagger ile gösterilen bir hermitsel eşlenik işleç, iççarpım yoluyla

$$(\phi, \hat{A}\psi) = (\hat{A}^\dagger \phi, \psi) \quad (6.3)$$

biçiminde tanımlanır [45].

6.1.1.1 Dalga İşlevinin Olasılık Yorumu

Dalga denkleminin i sayısı içermesi nedeniyle ψ dalga işlevi karmaşık sayı değer de alacaktır. Karmaşık sayı değerli bir işlev tek başına olasılığın bir ölçüsü olamaz. Olasılığın ölçüsü olarak işlevin karmaşık değer boyunun karesi düşünülebilir

$$|\psi|^2 = \psi\psi^*. \quad (6.4)$$

İşlevin mutlak değer karesi olasılık yoğunluğu adını alır [45, 46, 62, 63].

6.1.1.2 Dalga İşlevi İçin Beklenen Değer Yorumu

Bir parçacığın t anındaki x konumunu bulmak için çok sayıda gözlem yapılır ve bir anlamda bulunan değerlerin ağırlıklı ortalaması olan beklenen değer (ing: expectation value) hesaplanır. Bunun için her bir konum değeri, bu konum etrafında dx aralığında bulunma olasılığı ($|\psi(x,t)|^2$) ile çarpılıp tüm uzayda toplanır. Bu bağlamda beklenen değer bağıntısı

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x,t)|^2 dx = (\psi, x\psi) \quad (6.5)$$

biçiminde verilir [45, 46, 62, 63]. $\psi(x,t)$ zamana bağlı olduğu için konumun beklenen değeri de zamanla değişecektir.

Bu tanımlamalar yapıldıktan sonra şimdi benzer kavramlar kullanılarak doğrusal olmayan denklem tanımlama yoluna gidilecektir.

Burada kuantum mekaniğinde yer alan kavramlardan yararlanmadaki asıl amacımız, bir takım işleçlerin matris gösterilimini kullanarak sendelenimsizlik yaklaşımını gündeme getirmek ve bu yolla doğrusal olmayan türevli denklem takımı oluşturmaktır.

6.1.2 Denklemlerin Üretilmesi

Öncelikli olarak birtakım işleçler tanımlanarak bu işleçler aracılığı ile birtakım götürevli denklemler oluşturulmaktadır. Denklemler işleçlerin matris gösteriliminden yararlanılarak yeniden tanımlanır. Burada kuantum mekaniğinde kullanılan hamilton işlecine benzer bir tanımlama yapılmaktadır. İşleçler en çok konuma bağlı türevler içerecek şekilde seçilmektedir.

Bu bağlamda aşağıdaki birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli götürevli denklem gözönüne alınabilir

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = f(x,t) \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + g(x,t) \psi(x,t). \quad (6.6)$$

Burada $\psi(x,t)$ bilinmeyen, $f(x,t)$ ile $g(x,t)$ ise bilinen işlevleri göstermektedir. Zaman gibi nitelendirilebilecek olan t değişkeni $[0, \infty)$ aralığında, x değişkeni ise $[a, b]$ aralığında değer almaktadır. $\psi(x,t)$ işlevinin, $\varphi(x)$ bilinen bir işlev olmak üzere

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \quad \psi(a,t) = \psi(b,t) \quad (6.7)$$

koşullamalarını, $f(x,t)$ işlevinin de

$$f(a,t) = f(b,t) \quad (6.8)$$

koşullamasını sağladığı öngörülmektedir.

6.1.2.1 İşleç Tanımlama ve Denklemlerin Oluşturulması

$[a,b]$ aralığı üzerinde karesi tümlevlenebilir olan ve (6.7) sırasayılı eşitliğin ikinci koşullamasını sağlayan işlevlerin içinde bulunduğu Hilbert uzayı içinden alınan herhangi bir $F(x)$ işlevi için, t 'yi değiştirge olarak içeren ve

$$\mathcal{L}F(x) \equiv f(x,t)F'(x) + g(x,t)F(x) \quad (6.9)$$

anlatımı ile verilen \mathcal{L} işleci kullanılırsa (6.6) sırasayılı eşitlik

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \mathcal{L}\psi(x,t), \quad \psi(x,0) = \varphi(x), \quad \psi(a,t) = \psi(b,t) \quad (6.10)$$

biçiminde yazılabilir. $w(x)$ işlevi,

$$\int_a^b dx w(x) = 1 \quad (6.11)$$

koşullamasını sağlayan bir ağırlık işlevidir. $F(x)$ ile $G(x)$, \mathcal{H} 'den alınan herhangi iki işlev olmak üzere bu iki işlevin iççarpımının,

$$(F, G) \equiv \int_a^b dx w(x)F(x)G(x) \quad (6.12)$$

eşitliği ile tanımlandığını biliyoruz. Bu durumda, \mathcal{L} 'nin eşi olan ve \mathcal{L}^\dagger ile simgelenen işleç

$$\left(\mathcal{L}^\dagger F, G \right) = (F, \mathcal{L}G) \quad (6.13)$$

tanımlamasıyla verilir. Buradan \mathcal{L}^\dagger işlecinin açık yapısını bulabilmek için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir

$$(F, \mathcal{L}G) = \int_a^b dx w(x)F(x)\mathcal{L}G(x) = \int_a^b dx w(x)F(x) [f(x,t)G'(x) + g(x,t)G(x)]. \quad (6.14)$$

Son eşitliğin sağ yanında $G(x)$ üzerindeki türev kaldırılmak istenirse kesimsel tümlevlemeden (ing: integration by parts) ve aralık uçlarında $w(x)$, $f(x,t)$, $F(x)$ 'in ve $G(x)$ 'in ayrı ayrı değişmez kalmalarından (bu özelliklerin neden öngörüldüğü

böylelikle ortaya çıkmaktadır) yararlanarak, x altsimgesi x' e göre türevi göstermek üzere,

$$\begin{aligned} \int_a^b dx w(x) F(x) f(x, t) G'(x) &= w(b) F(b) f(b, t) G(b) - w(a) F(a) f(a, t) G(a) \\ &\quad - \int_a^b dx G(x) [w(x) F(x) f(x, t)]_x \\ &= - \int_a^b dx w(x) \left[f(x, t) F'(x) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} F(x) + \frac{w'(x)}{w(x)} F(x) \right] G(x) \end{aligned} \quad (6.15)$$

bağıntısı yazılabilir. Bu anlatım (6.14) eşitliğinin sağ yanında yerine konular ve $F(x)$ üzerine etki eden tüm işleç gözönüne alınır

$$\mathcal{L}^\dagger F(x) \equiv -f(x, t) F'(x) - \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} F(x) - \frac{w'(x)}{w(x)} F(x) + g(x, t) F(x) \quad (6.16)$$

anlatımına ulaşılır. Artık, kuvantum mekaniğinde yapıldığı gibi, t değiştikçe değişmeyen, bir anlamda olasılık yoğunluğu gibi nitelendirilebilecek, bir büyüklük oluşturma çabasına girebiliriz [64].

6.1.2.2 Üretilen Denklem İçin Olasılık Yorumu

Aşağıdaki denklemleri ve onlara eşlik eden koşulları gözönüne alalım

$$\frac{\partial \psi_{sağ}(x, t)}{\partial t} = \mathcal{L} \psi_{sağ}(x, t), \quad \psi_{sağ}(x, 0) = \varphi(x), \quad \psi_{sağ}(a, t) = \psi_{sağ}(b, t), \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \psi_{sol}(x, t)}{\partial t} = -\mathcal{L}^\dagger \psi_{sol}(x, t), \quad \psi_{sol}(x, 0) = \varphi(x), \quad \psi_{sol}(a, t) = \psi_{sol}(b, t). \quad (6.18)$$

(6.17) sırasayılı eşitlikteki ilk anlatımın her iki yanının $\psi_{sol}(x, t)$ ile, (6.18) sırasayılı eşitlikteki ilk anlatımın her iki yanının da $\psi_{sağ}(x, t)$ ile iççarpımı alınır ve elde edilen denklemlerin sol ve sağ yanlarının toplamlarını sol ve sağ yan olarak alan denklem oluşturulursa

$$\left(\psi_{sol}(t), \frac{\partial}{\partial t} \psi_{sağ}(t) \right) + \left(\psi_{sağ}(t), \frac{\partial}{\partial t} \psi_{sol}(t) \right) = \left(\psi_{sol}(t), \mathcal{L} \psi_{sağ}(t) \right) - \left(\psi_{sağ}(t), \mathcal{L}^\dagger \psi_{sol}(t) \right) \quad (6.19)$$

bağıntısı yazılabilir. Burada, x iççarpımdaki tümlevleme değişkeni olarak gündeme geldiğinden, iççarpımlardaki işlevlerin bu değişkene bağımlılığı açık olarak gösterilmemektedir. Öte yandan t iççarpımlara bir değiştirge olarak

girdiğinden iççarpımların ürettiği değerlerin bu değıştirgeye bağımlılığı açık olarak gösterilmektedir.

Buradaki Hilbert uzayının gerçel işlevler üzerinde tanımlı olması, bunlar üzerindeki iççarpımları öğelerine göre bakışık (ing: symmetric) kılar. Yani

$$\left(\psi_{sağ}(t), \frac{\partial}{\partial t} \psi_{sol}(t) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi_{sol}(t), \psi_{sağ}(t) \right) \quad (6.20)$$

eşitliği yazılabilir. Bundan yararlanarak da

$$\left(\psi_{sol}(t), \frac{\partial}{\partial t} \psi_{sağ}(t) \right) + \left(\psi_{sağ}(t), \frac{\partial}{\partial t} \psi_{sol}(t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi_{sol}(t), \psi_{sağ}(t) \right) \quad (6.21)$$

eşitliğine ulaşılabilir. Öte yandan, özüne eşlik (ing: self-adjointness) tanımı [65,66] ve iççarpımdaki bakışım

$$\left(\psi_{sağ}(t), \mathcal{L}^\dagger \psi_{sol}(t) \right) = \left(\mathcal{L} \psi_{sağ}(t), \psi_{sol}(t) \right) = \left(\psi_{sol}(t), \mathcal{L} \psi_{sağ}(t) \right) \quad (6.22)$$

yazılmasına olanak sağlar. (6.21) ve (6.22) eşitliklerinin (6.19) eşitliğinde kullanımı

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\psi_{sol}(t), \psi_{sağ}(t) \right) = 0 \quad (6.23)$$

sonucunu verir. Bunun yorumu $(\psi_{sol}(t), \psi_{sağ}(t))$ iççarpımının t ne olursa olsun değışmez kalacağıdır. Dolayısıyla, iççarpım $t = 0$ için aldığı değeri her t değeri için koruyacaktır. Bu ise

$$\left(\psi_{sol}(t), \psi_{sağ}(t) \right) = (\varphi, \varphi) \quad (6.24)$$

yazılabileceğini gösterir. Bu ana dek $\varphi(x)$ üzerinde herhangi bir öngörümde bulunulmamıştı. Ancak, (6.24)'de elde edilen değışmez değerin bu işlevin boy karesi olması bu işlevin birimboylu seçilmesinin incelemeleri kolaylaştıracağı açıktır. Böyle bir seçim ilgilenilen denklemlerin doğrusallığından dolayı genellik yitimine neden olmaz. Bunun nedeni $\varphi(x)$ 'in boyuna bölünerek elde edilen işlevin başlangıç işlevi olarak alınmasıyla elde edilen çözüm φ 'nin boyu ile çarpıldığında sonuç, başlangıç değeri olarak $\varphi(x)$ 'nin alınmasıyla elde edilecek sonuçla aynı olacaktır. Dolayısıyla, bu andan başlayarak, $\varphi(x)$ 'in birimboylulaştırıldığı varsayılacak ve böylece

$$(\varphi, \varphi) = 1, \quad \left(\psi_{sol}(t), \psi_{sağ}(t) \right) = 1 \quad (6.25)$$

eşitliklerinin geçerli olduğu öngörölmüş olacaktır.

Yukarıda ortaya çıkan $\Psi_{sağ}(t)$ işlevinin bir dizgenin evrimini betimleme niteliği taşıdığı, $\Psi_{sol}(t)\Psi_{sağ}(t)$ işlevininse t anında bu dizgenin x ile $x + dx$ arasındaki sonsuz küçük yersel bölge içinde bulunma olasılığını, diğer bir deyişle, dizgenin olasılık yoğunluğunu verdiği söylenebilir.

6.1.2.3 Üretilen Denklem İçin Beklenen Değer Yorumu

Herhangi bir (t 'den bağımsız) \mathcal{O} işlecinin beklenen değerinin yani bir anlamda yukarıdaki olasılık yoğunluğunu ağırlık olarak alan ortalamasının tanımı aşağıdaki gibi verilebilir

$$E_{\mathcal{O}}(t) \equiv (\Psi_{sol}(t), \mathcal{O}\Psi_{sağ}(t)). \quad (6.26)$$

Bu beklenen değer, (varsa) dizge değıştirgelerinin yanısıra, yalnızca, t 'ye bağımlı sayıl bir işlevdir. Bunun açık yapısını elde edebilmek için ya $\Psi_{sol}(t)$ ile $\Psi_{sağ}(t)$ işlevleri açık olarak belirlenip daha sonra (6.26) eşitliğindeki iççarpım açık olarak saptanacak ya da (6.26) eşitliğinden bir sıradan türevli denklem üretilcektir. Amaç türevli denklem üretmek olduğundan ikinci yol seçilecektir.

Önce bazı genel bilgiler çıkarılmaya çalışılacak ondan sonra özel işleçler için uygulamaya geçilecektir. Artık, (6.26) eşitliğinin her iki yanının t 'ye göre türevini alabilir ve aşağıda verilecek eşitlikleri yazabiliriz

$$E'_{\mathcal{O}}(t) = \left(\frac{\partial \Psi_{sol}(t)}{\partial t}, \mathcal{O}\Psi_{sağ}(t) \right) + \left(\Psi_{sol}(t), \mathcal{O} \frac{\partial \Psi_{sağ}(t)}{\partial t} \right). \quad (6.27)$$

(6.17) ve (6.18)'de verilen ilk denklemlerinin burada kullanımı

$$E'_{\mathcal{O}}(t) = - \left(\mathcal{L}^{\dagger} \Psi_{sol}(t), \mathcal{O}\Psi_{sağ}(t) \right) + \left(\Psi_{sol}(t), \mathcal{O} \mathcal{L} \Psi_{sağ}(t) \right) \quad (6.28)$$

eşitliği ile

$$E'_{\mathcal{O}}(t) = - \left(\Psi_{sol}(t), [\mathcal{L}\mathcal{O} - \mathcal{O}\mathcal{L}] \Psi_{sağ}(t) \right) \quad (6.29)$$

eşitliğinin yazılmasını olanaklı kılar. Buradaki, $[\mathcal{L}\mathcal{O} - \mathcal{O}\mathcal{L}]$ büyüklüğü ya da işleci “değışçeç” (ing: commutator) ya da zaman zaman “Lie Çarpımı” olarak adlandırılır ve genellikle $[\mathcal{L}, \mathcal{O}]$ biçiminde gösterilir [67]. (6.29) eşitliği önemli bir kamtsav olarak verilebilir: **“Bir işlecini beklenen değıerinin zamansal türevi, sistemi betimleyen evrim işlecini o işleçle değışçeçinin beklenen değıerine eşdeğıerdir”**. Burada sözü geçen evrim işleci (ing: evolution operator) \mathcal{L} işlecidir.

Biraz daha adım atabilmek için özel bir duruma odaklanabilir ve

$$\mathcal{O} = \hat{x} \quad (6.30)$$

durumu ile ilgilenebiliriz. Burada \hat{x} ile simgelenen işlecin \mathcal{H} içindeki herhangi bir $F(x)$ işlevine etkisi o işlevi bağımsız değişkenle çarpmak olarak tanımlanmaktadır, yani

$$\hat{x}F(x) \equiv xF(x) \quad (6.31)$$

yazılabilmektedir. Bu işlecin herhangi bir işlevi de aynı yapıyı taşır, yani, $\phi(\hat{x})$ 'ın tanımını

$$\phi(\hat{x})F(x) \equiv \phi(x)F(x) \quad (6.32)$$

anlatımıyla verilebilir.

Bunlar gözönüne alındığında

$$\mathcal{L}F(x) = f(\hat{x}, t)F'(x) + g(\hat{x}, t)F(x) \quad (6.33)$$

tanımlamasının daha doğru bir anlatım olacağı ortaya çıkar. Bu ise

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \hat{x} \psi_{sağ}(x) &= f(\hat{x}, t) (x\psi_{sağ}(x))' + g(\hat{x}, t)x\psi_{sağ}(x) \\ &= x [f(\hat{x}, t) \psi_{sağ}'(x) + g(\hat{x}, t) \psi_{sağ}(x)] + f(\hat{x}, t) \psi_{sağ}(x) \\ &= \hat{x} \mathcal{L} \psi_{sağ}(x) + f(\hat{x}, t) \psi_{sağ}(x) \end{aligned} \quad (6.34)$$

eşitliğinin ve buradan da

$$(\psi_{sol}(x), [\mathcal{L}\hat{x} - \hat{x}\mathcal{L}] \psi_{sağ}(x)) = (\psi_{sol}(x), f(\hat{x}, t) \psi_{sağ}(x)) \quad (6.35)$$

eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\frac{d(\psi_{sol}(x), \hat{x}\psi_{sağ}(x))}{dt} = -(\psi_{sol}(x), f(\hat{x}, t) \psi_{sağ}(x)) \quad (6.36)$$

sonucuna ulaşılmasını sağlar. Yani, bağımsız değişkenle çarpma işlecinin beklenen değerinin zamansal türevi $f(x, t)$ ile çarpma işlecinin beklenen değerinin eksilisine eşdeğer çıkmaktadır.

Bir aşama daha ilerleyebilmek için \mathcal{H} için devingen taban takımı tanımlama yoluna gidelebilir.

6.1.2.4 Devingen Taban Takımı Tanımlama

Devingen taban takımı tanımlamak için önce bu takımın $t = 0$ 'daki yapılandırımını sağlamalıyız. Bu amaçla, $1, x, \dots, x^n, \dots$ yapısında, yani x 'in doğalsayı üslüleri olan işlevlerle yola çıkabiliriz. Bunlar aralarında doğrusal bağımsız olup kareleri tümlelenebilir. Ancak, $x = a$ ve $x = b$ 'de aynı değeri alma özelliğini sağlamazlar. Yine de bunlardan yola çıkıp yapılandırımına girişebiliriz. \mathcal{H} 'de bulunan bir $F(x)$ işlevinin analitik olma varsayımı altında

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j x^j \quad (6.37)$$

anlatımıyla yazılabileceğini varsayabiliriz. Bu varsayım, $F(a) = F(b)$ eşitliğinin sağlanması için,

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=0}^{\infty} (b^j - a^j) F_j = 0 \quad (6.38)$$

eşitliğinin yazılabileceğini ve bu anlatımın geçerli olması için de

$$F_1 = - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(b^j - a^j)}{b - a} F_j \quad (6.39)$$

eşitliğinin yazılabilmesi gerektiğini gösterir. Bu anlatım (6.37) eşitliğinde kullanılırsa

$$F(x) = F_0 + \sum_{j=2}^{\infty} F_j \left[x^j - \frac{(b^j - a^j)}{b - a} x \right] \quad (6.40)$$

denklemini yazılabilir. Bu eşitliğin sağ yanı, aşağıdaki tanım eşitlikleriyle verilen taban takımı öğelerinin doğrusal birleşimi olarak düşünülebilir

$$v_j(x) \equiv \begin{cases} 1 & j = 1 \\ x^j - \frac{(b^j - a^j)}{b - a} x & j = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6.41)$$

Bu işlevler dik bir takım oluşturmazlar ama çeşitli yöntemlerle dikleştirilebilirler [47, 48]. Sıra korunarak bu eylemin gerçekleştirildiği öngörülerek oluşturulacak işlevler $v_1^{(\perp)}(x), v_2^{(\perp)}(x), \dots$ olarak simgelenirse aşağıdaki özelliklerin geçerli olacağı kesindir

$$\left(v_j^{(\perp)}, v_k^{(\perp)} \right) = \delta_{j,k}, \quad 1 \leq j, k < \infty. \quad (6.42)$$

$\varphi(x)$ işlevi \mathcal{H} içinden seçildiği için

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j v_j^{(\perp)} \quad (6.43)$$

anlatımıyla verilebilir. Dolayısıyla, $\psi_{sağ}(x, t)$ işlevi de $t = 0$ için bu anlatımla verilmek durumundadır. Bu durum, bizi, aşağıdaki denklemlerin çözümü olarak tanımlanan işlevlerle ilgilenmeye yöneltir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j^{(sağ)}(x, t)}{dt} &= \mathcal{L}u_j^{(sağ)}(x, t); & u_j^{(sağ)}(a, t) &= u_j^{(sağ)}(b, t), \\ t \in [0, \infty); & & u_j^{(sağ)}(x, 0) &= v_j^{(\perp)}(x); \quad 1 \leq j < \infty, \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j^{(sol)}(x, t)}{dt} &= -\mathcal{L}^\dagger u_j^{(sol)}(x, t); & u_j^{(sol)}(a, t) &= u_j^{(sol)}(b, t), \\ t \in [0, \infty); & & u_j^{(sol)}(x, 0) &= v_j^{(\perp)}(x); \quad 1 \leq j < \infty. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Özenli bir inceleme

$$\left(u_j^{(sol)}, u_k^{(sağ)} \right) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k < \infty \quad (6.46)$$

olduğunu gösterir. Yani \mathcal{H} içinde iki değişik tam ortonormal takım oluşturulabilmektedir. Bunlar, $u_j^{(sol)}$ ve $u_j^{(sağ)}$ işlevleri olup, ikisi birlikte tam ortonormal bir takım oluşturmaktadırlar. Bunlara, t bağımlılıkları nedeniyle, “Devingen Taban Takım İkili” adını vereceğiz.

(6.17), (6.18), (6.43) ve de (6.44) ile (6.45) sırasayılı eşitliklerden

$$\psi_{sol}(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j u_j^{(sol)}(x, t), \quad \psi_{sağ}(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j u_j^{(sağ)}(x, t) \quad (6.47)$$

çıkarımlarının yapılabilmesi hiç de zor değildir. Bu çıkarımların kullanımıyla

$$\left(\psi_{sol}(t), \widehat{x} \psi_{sağ}(t) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i \varphi_j \left(u_i^{(sol)}(t), \widehat{x} u_j^{(sağ)}(t) \right), \quad (6.48)$$

$$\left(\psi_{sol}(t), f(\widehat{x}) \psi_{sağ}(t) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i \varphi_j \left(u_i^{(sol)}(t), f(\widehat{x}) u_j^{(sağ)}(t) \right) \quad (6.49)$$

kuvadratik işlev sağyanlı eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerdeki büyüklükler için yeni tanımlamalar yaparak farklı anlatımlara erişmek olanaklıdır. Gerçekten de

$$X_{ij}(t) \equiv \left(u_i^{(sol)}(t), \widehat{x} u_j^{(sağ)}(t) \right), \quad (6.50)$$

$$\mathbf{X}(t) \equiv \begin{bmatrix} X_{11}(t) & \cdots & X_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}(t) & \cdots & X_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.51)$$

ve

$$F_{ij}(t) \equiv \left(u_i^{(sol)}(t), f(\hat{x}, t) u_j^{(sağ)}(t) \right), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (6.52)$$

$$\mathbf{F}(t) \equiv \begin{bmatrix} F_{11}(t) & \cdots & F_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(t) & \cdots & F_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq n < \infty \quad (6.53)$$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{\varphi}^T \equiv [\varphi_1 \cdots \varphi_n] \quad (6.54)$$

ile verilen $\boldsymbol{\varphi}$ yöneyi, (6.48) ve (6.49) yerine

$$\left(\psi_{sol}(t), \hat{x} \psi_{sağ}(t) \right) = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{X}(t) \boldsymbol{\varphi}, \quad \left(\psi_{sol}(t), f(\hat{x}, t) \psi_{sağ}(t) \right) = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{F}(t) \boldsymbol{\varphi} \quad (6.55)$$

anlatımlarının yazılabileceğini gösterir. Son iki sonuç (6.36) ile birleştirilirse

$$\mathbf{X}'(t) = -\mathbf{F}(t) \quad (6.56)$$

biçimindeki sıradan matris türevli denklem elde edilir. Bu denkleme eşlik ettirilecek başlangıç koşulu, (6.50) ve daha önceki bazı eşitliklerden, aşağıdaki gibi elde edilebilir

$$\mathbf{X}(0) \equiv \begin{bmatrix} \left(v_1^{(\perp)}, \hat{x} v_1^{(\perp)} \right) & \cdots & \left(v_1^{(\perp)}, \hat{x} v_n^{(\perp)} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(v_n^{(\perp)}, \hat{x} v_1^{(\perp)} \right) & \cdots & \left(v_n^{(\perp)}, \hat{x} v_n^{(\perp)} \right) \end{bmatrix}. \quad (6.57)$$

(6.51), (6.53), (6.50) ve (6.52) eşitliklerinde tanımlanan $\mathbf{F}(t)$ matrisi $f(\hat{x}, t)$ işlev tabanlı işlecin ilgili devingen taban işlevlerinin örttüğü uzaydaki matris gösteriliminden başka birşey değildir. Sendelenimsizlik kanıtına göre, bu matris, sendelenim katkıları gözardı edildiğinde aşağıdaki yanaşık (ing: asymptotic) bağıntı ile açık olarak anlatılabilir

$$\mathbf{F}(t) \approx f(\mathbf{X}(t), t). \quad (6.58)$$

Bu ise doğrusal olmayabilen

$$\mathbf{X}'(t) \approx f(\mathbf{X}(t), t) \quad (6.59)$$

denkleminin (6.57) koşulu altında çözümünün bu denklemi çözmeksizin (6.44) ve (6.45) ile verilen göretürevli denklemlerin çözümlerinden, sendelenimsizlik yaklaşımları bağlamında üretilebileceğini ortaya çıkarır. Bu çok önemli bir olgudur. Doğrusal olmayan bir problem (sıradan türevli bir denklem), doğrusal

bir probleme (göretürevli denklemlere), yaklaşık da olsa, dönüştürülebilmektedir. Çözülmesi gereken göretürevli denklemler, uzay genişletme ile, birinci mertebeden özyinelemelerle çözülebilir. Sendelenimli düzeltme terimlerinin eklenmesi ile yaklaşık çözümdeki duyarlılık arttırılabilir.

\hat{x} yerine çok daha değişik işleçler kullanarak daha değişik yapıda sıradan türevli denklemler üretmek olanaklıdır.

6.2 Göretürevli Denklemler ve Uzay Genişletme

Göretürevli denklemlerin kullanılmasıyla doğrusal olmayan türevli denklemlerin elde edilmesinden sonra şimdi de bu denklemlere uzay genişletme yöntemi uygulanacaktır. Uzay genişletme uygulanacak göretürevli denklem

$$\frac{\partial \psi(y,t)}{\partial t} = a(y,t) \frac{\partial \psi(y,t)}{\partial y} \quad (6.60)$$

biçimindedir.

6.2.1 Evrensel Biçimin Elde Edilmesi

Sayı ve matris türevli denklemlerde yaptığımız gibi $a(y,t)$ katsayı işlevinin m . dereceden bir çokterimli olarak aşağıdaki gibi seçildiğini varsayalım

$$a(y,t) = a_0(t) + y a_1(t) + y^2 a_2(t) + \dots + y^m a_m(t). \quad (6.61)$$

Uzay genişletme kavramı kullanılarak denkleme çözüm üretilirken $a(y,t)$ işlevinin derecesine bağlı olarak uzay genişletme mertebesinin belirlendiğini daha önce belirtmiştik. Bu durumda, tanımlayacağımız yeni değişken $\xi \equiv y^{m+1}$ yapısında olacaktır. Ayrıca, ψ_0, \dots, ψ_m işlevleri şimdilik bilinmeyen işlevler olmak üzere ψ işlevi bu bilinmeyen işlevler türünden aşağıdaki gibi yazılarak, $\psi(y,t)$ işlevi için de varsayım yapılmış olunur

$$\psi(y, \xi, t) = \psi_0(\xi, t) + y \psi_1(\xi, t) + \dots + y^m \psi_m(\xi, t). \quad (6.62)$$

(6.61) ve (6.62) sırasayılı eşitliklerin t 'ye ve yeni değişken ξ 'ye göre türevleri alınır, (6.60) sırasayılı denklemde yerine konular ve gerekli düzenlemeler yapılırsa bu tür denklemler için evrensel bir yapı elde edilir.

Bu işlemlerin daha kolay anlaşılmasını sağlamak amacıyla sayıl türevli denklemlerde izlediğimiz yolu izleyerek basit örneklerle bu dönüşümü anlatabilir ve daha sonra da en genel yapıyı elde edebiliriz.

Uzay genişletme kavramının göretürevli denklemlere uygulamasını açık bir şekilde görebilmek için

$$\frac{\partial \psi(y,t)}{\partial t} = [a_0(y,t) + y a_1(y,t)] \frac{\partial \psi(y,t)}{\partial y} \quad (6.63)$$

denklemini ilk örnek çalışma olarak seçilmiştir. Böylece, ψ_0 ve ψ_1 , y ve t 'nin bu anda bilinmeyen çift işlevleri olmak üzere, $\psi(y,t)$ işlevi için

$$\psi(y,t) = \psi_0(y^2,t) + y \psi_1(y^2,t) \quad (6.64)$$

öngörümü yapılır. $\xi \equiv y^2$ tanımlaması bu bağıntıda yerine konulduğunda

$$\psi(\xi,y,t) = \psi_0(\xi,t) + y \psi_1(\xi,t) \quad (6.65)$$

denklemini elde edilir. $\psi(y,t)$ işlevinin ξ ve t değişkenlerine göre türevi alınır ve (6.63) sırasayılı denkleminde yerine konulur. Daha sonra da y içeren ve içermeyen terimler karşılıklı olarak birbirlerine eşitlenirse

$$\begin{aligned} 2a_1\xi \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 2a_0\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial t} - a_0\psi_1 \\ 2a_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 2a_1\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - a_1\psi_1 \end{aligned} \quad (6.66)$$

biçimindeki denklem takımı elde edilir. Elde edilen bu denklem takımı matris biçimli yazılabilir, yani (6.66) denkleminin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} 2\xi a_1 & 2\xi a_0 \\ 2a_0 & 2\xi a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

biçimindedir. Bu biçim,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2a_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_0 \\ 0 & 2a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (6.68)$$

ve

$$\mathbf{z} = [\psi_0 \quad \psi_1]^T \quad (6.69)$$

olmak üzere

$$\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \xi \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \mathbf{B}_1 \mathbf{z} \quad (6.70)$$

şeklinde verilebilir.

İkinci bir örnek

$$\frac{\partial \psi(y,t)}{\partial t} = [a_0(y,t) + y a_1(y,t) + y^2 a_2(y,t)] \frac{\partial \psi(y,t)}{\partial y} \quad (6.71)$$

biçiminde seçilebilir. Burada bu kez, $\psi(y,t)$ işlevi için, ψ_0 , ψ_1 ve ψ_2 , y ve t 'nin bu anda bilinmeyen çift işlevleri olmak üzere,

$$\psi(y,t) = \psi_0(y^3,t) + y \psi_1(y^3,t) + y^2 \psi_2(y^3,t) \quad (6.72)$$

öngörümü yapılır. $\xi \equiv y^3$ tanımlaması bu bağıntıda yerine konulduğunda

$$\psi(\xi,y,t) = \psi_0(\xi,t) + y \psi_1(\xi,t) + y^2 \psi_2(\xi,t) \quad (6.73)$$

denklemini elde edilir. $\psi(y,t)$ işlevinin ξ ve t değişkenlerine göre türevi alınır ve (6.71) sırasayılı denklemde yerine konulur. Daha sonra da y içeren ve içermeyen terimler karşılıklı olarak birbirlerine eşitlenirse

$$\begin{aligned} 3a_1 \xi \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 3a_0 \xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + 3a_2 \xi^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial t} - a_0 \psi_1 - 2\xi a_2 \psi_2 \\ 3a_2 \xi \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 3a_1 \xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + 3a_0 \xi \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - 2a_0 \psi_2 - a_1 \psi_1 \\ 3a_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 3a_2 \xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + 3a_1 \xi \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - 2a_1 \psi_2 - a_2 \psi_1 \end{aligned} \quad (6.74)$$

biçimindeki denklem takımı elde edilir. Elde edilen bu denklem takımı matris biçimli yazılabilir, yani (6.74) denkleminin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} 3a_1 \xi & 3a_0 \xi & 3a_2 \xi^2 \\ 3a_2 \xi & 3a_1 \xi & 3a_0 \xi \\ 3a_0 & 3a_2 \xi & 3a_1 \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_0 & -2a_2 \xi \\ 0 & -a_1 & -2a_0 \\ 0 & -a_2 & -2a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

biçimindedir. Bu biçim,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3a_1 & 3a_0 & 0 \\ 3a_2 & 3a_1 & 3a_0 \\ 0 & 3a_2 & 3a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 & 0 \\ 0 & -a_1 & -2a_0 \\ 0 & -a_2 & -2a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.77)$$

ve

$$\mathbf{z} = [\psi_0 \quad \psi_1 \quad \psi_2]^T \quad (6.78)$$

olmak üzere,

$$\mathbf{A}_0 + (\xi \mathbf{A}_1 + \xi^2 \mathbf{A}_2) \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + (\mathbf{B}_1 + \xi \mathbf{B}_2) \mathbf{z} \quad (6.79)$$

şeklinde verilebilir.

Genel yapıyı daha net görebilmek için bir adım daha ilerleyebiliriz. Bu amaçla üçüncü bir örneği

$$\frac{\partial \psi(y,t)}{\partial t} = [a_0(y,t) + y a_1(y,t) + y^2 a_2(y,t) + y^3 a_3(y,t)] \frac{\partial \psi(y,t)}{\partial y} \quad (6.80)$$

biçiminde seçebiliriz. Burada bu kez, $\psi(y,t)$ işlevi için, ψ_0 , ψ_1 , ψ_2 ve ψ_3 , y ve t 'nin bu anda bilinmeyen çift işlevleri olmak üzere,

$$\psi(y,t) = \psi_0(y^4,t) + y\psi_1(y^4,t) + y^2\psi_2(y^4,t) + y^3\psi_3(y^4,t) \quad (6.81)$$

öngörümü yapılır. $\xi \equiv y^4$ tanımlaması bu bağıntıda yerine konulduğunda

$$\psi(\xi, y, t) = \psi_0(\xi, t) + y\psi_1(\xi, t) + y^2\psi_2(\xi, t) + y^3\psi_3(\xi, t) \quad (6.82)$$

denklemleri elde edilir. $\psi(y,t)$ işlevinin ξ ve t değişkenlerine göre türevi alınır ve (6.80) sırasayılı denklemlerde yerine konulur. Daha sonra da y içeren ve içermeyen terimler karşılıklı olarak birbirlerine eşitlenirse

$$\begin{aligned} 4a_1\xi \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 4a_0\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + 4a_3\xi^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} + 4a_2\xi^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial t} - a_0\psi_1 - 3\xi a_2\psi_3 - 2\xi a_3\psi_2 \\ 4a_2\xi \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 4a_1\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + 4a_0\xi \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} + 4a_3\xi^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - 2a_0\psi_2 - a_1\psi_1 - 3\xi a_3\psi_3 \\ 4a_3\xi \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 4a_2\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + 4a_1\xi \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} + 4a_0\xi \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - 3a_0\psi_3 - 2a_1\psi_2 - a_2\psi_1 \\ 4a_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 4a_3\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + 4a_2\xi \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} + 4a_1\xi \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_3}{\partial t} - 3a_1\psi_3 - 2a_2\psi_2 - a_3\psi_1 \end{aligned} \quad (6.83)$$

biçimindeki denklem takımı elde edilir. Elde edilen bu denklem takımı matris biçimli yazılabilir

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 4a_1\xi & 4a_0\xi & 4a_3\xi^2 & 4a_2\xi^2 \\ 4a_2\xi & 4a_1\xi & 4a_0\xi & 4a_3\xi^2 \\ 4a_3\xi & 4a_2\xi & 4a_1\xi & 4a_0\xi \\ 4a_0 & 4a_3\xi & 4a_2\xi & 4a_1\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_0 & -2a_3\xi & -3a_2\xi \\ 0 & -a_1 & -2a_0 & -3a_3\xi \\ 0 & -a_2 & -2a_1 & -3a_0 \\ 0 & -a_3 & -2a_2 & -3a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}. \quad (6.84)
\end{aligned}$$

Bu biçim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 4a_1 & 4a_0 & 0 & 0 \\ 4a_2 & 4a_1 & 4a_0 & 0 \\ 4a_3 & 4a_2 & 4a_1 & 4a_0 \\ 0 & 4a_3 & 4a_2 & 4a_1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4a_3 & 4a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.85)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & -2a_0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -2a_1 & -3a_0 \\ 0 & -a_3 & -2a_2 & -3a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2a_3 & -3a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.86)$$

ve

$$\mathbf{z} = [\psi_0 \quad \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3]^T \quad (6.87)$$

olmak üzere,

$$\mathbf{A}_0 + (\xi \mathbf{A}_1 + \xi^2 \mathbf{A}_2) \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + (\mathbf{B}_1 + \xi \mathbf{B}_2) \mathbf{z} \quad (6.88)$$

şeklinde verilebilir.

Bu örnekler bize en genel yapının nasıl olacağı konusunda bilgi vermektedir. Bu durumda (6.61) ve (6.62) sırasayıları ile verilen $a(y,t)$ ve $\psi(y,\xi,t)$ işlevlerinin (6.60) ile verilen göretürevli denklemde yerlerine konulması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (n+1)a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} (n+1)a_1 & (n+1)a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (n+1)a_2 & (n+1)a_1 & (n+1)a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (n+1)a_{n-1} & (n+1)a_{n-2} & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (n+1)a_n & (n+1)a_{n-1} & \cdots & \cdots & (n+1)a_1 & (n+1)a_0 \\ 0 & (n+1)a_n & \cdots & \cdots & (n+1)a_2 & (n+1)a_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (n+1)a_n & (n+1)a_{n-1} & \cdots & (n+1)a_2 \\ 0 & 0 & 0 & (n+1)a_n & \cdots & (n+1)a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & (n+1)a_n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_1 & -2a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & -2a_1 & -3a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & -a_{n-1} & -2a_{n-2} & -3a_{n-3} & \cdots & \cdots & -na_0 \\ 0 & -a_n & -2a_{n-1} & -3a_{n-2} & \cdots & \cdots & -na_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2a_n & -3a_{n-1} & \cdots & -(n-1)a_3 & -na_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3a_n & \ddots & \cdots & -na_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -na_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -na_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

olmak üzere

$$\mathbf{A}_0 + (\xi \mathbf{A}_1 + \xi^2 \mathbf{A}_2) \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + (\mathbf{B}_1 + \xi \mathbf{B}_2) \mathbf{z} \quad (6.90)$$

evrensel biçimi elde edilir. Bu biçim içerisinde kullanılan \mathbf{z} yöneyi

$$\mathbf{z} = [\psi_0(\xi, t) \quad \cdots \quad \psi_m(\xi, t)]^T \quad (6.91)$$

biçiminde tanımlanan, bilinmeyen işlevleri içeren yöneydir.

6.2.2 Evrensel Biçimin Seri Çözümü

Artık bu denkleme ait seri çözüm elde edilebilir. Ancak, (6.90) ile verilen evrensel denklem seriye açıldığında ikili bir özyineli ilişki elde edilmez. Bunun nedeni denklemdaki \mathbf{A}_0 matrisidir. Bu matrisin yapısına bakılacak olunursa en alt köşesinde

yalnızca a_0 terimini içerdiği görülür. Bu durumda a_0 katsayısı için bir koşul tanımlamadığımız sürece ikili bir özyineleme elde etmek olanaklı görünmemektedir.

Bu nedenle (6.60) sırasayılı denklemde öncelikli olarak ψ işlevi için birinci mertebeden evrim işleci kullanılarak aşağıdaki dönüşüm gerçekleştirilebilir

$$\psi = e^{b(t)\frac{\partial}{\partial y}}\bar{\psi}. \quad (6.92)$$

Eğer (6.92) sırasayılı denklemin t ve y değişkenlerine bağlı olarak türevleri alınırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= b'(t)\frac{\partial}{\partial y}e^{b(t)\frac{\partial}{\partial y}}\bar{\psi} + e^{b(t)\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}e^{b(t)\frac{\partial}{\partial y}}\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (6.93)$$

(6.93) ile verilen eşitlikler (6.60) sırasayılı götürevli denklemde yerine konular ve birinci mertebeye evrim işlecinin (EK-A)'da verilen özellikleri kullanılırsa

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + b'(t)\frac{\partial}{\partial y}\bar{\psi} = e^{-b(t)\frac{\partial}{\partial y}} \left[a(y,t)\frac{\partial}{\partial y}e^{b(t)\frac{\partial}{\partial y}}\bar{\psi} \right] \quad (6.94)$$

eşitliği elde edilir ve buradan da aşağıdaki eşitlik yazılır

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + b'(t)\frac{\partial}{\partial y}\bar{\psi} = \left[e^{-b(t)\frac{\partial}{\partial y}}a(y,t) \right] \left[e^{-b(t)\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial y}e^{b(t)\frac{\partial}{\partial y}}\bar{\psi} \right]. \quad (6.95)$$

Bu da,

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = [a(y-b(t),t) - b'(t)]\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \quad (6.96)$$

bağıntısının yazılmasını olanaklı kılar. Eğer x değişkeni $x \equiv y - b(t)$ olarak seçilirse (6.96) sırasayılı eşitlik aşağıdaki yapıya dönüşür

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = [a(x,t) - b'(t)]\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}. \quad (6.97)$$

Eğer $a(0,t)$ işlevi τ üzerinde tümlevlenirse

$$b(t) = \int_0^t d\tau a(0, \tau) \quad (6.98)$$

$$\bar{a}(x,t) = a(x,t) - a(0,t) \quad (6.99)$$

olmak üzere bu kez aşağıdaki denklem elde edilir

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \bar{a}(x,t)\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}. \quad (6.100)$$

Böylece katsayı işlevinde a_0 teriminin sifira eşit olmasını sağlayacak şekilde düzenleme yapılmış ve (6.90) ile verilen evrensel yapıda, seri çözümde ikili özyineli ilişki elde edilmesini engelleyen \mathbf{A}_0 matrisi ortadan kaldırılmış ve denklem

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} (n+1)a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (n+1)a_2 & (n+1)a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (n+1)a_{n-1} & (n+1)a_{n-2} & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (n+1)a_n & (n+1)a_{n-1} & \cdots & \cdots & (n+1)a_1 & 0 \\ 0 & (n+1)a_n & \cdots & \cdots & (n+1)a_2 & (n+1)a_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (n+1)a_n & (n+1)a_{n-1} & \cdots & (n+1)a_2 \\ 0 & 0 & 0 & (n+1)a_n & \cdots & (n+1)a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & (n+1)a_n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & -2a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & -a_{n-1} & -2a_{n-2} & -3a_{n-3} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -a_n & -2a_{n-1} & -3a_{n-2} & \cdots & \cdots & -na_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2a_n & -3a_{n-1} & \cdots & -(n-1)a_3 & -na_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3a_n & \ddots & \cdots & -na_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -na_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -na_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.101)$$

olmak üzere

$$\mathbf{A}_1 \xi \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi} + \mathbf{A}_2 \xi^2 \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \mathbf{B}_1 \mathbf{z} + \xi \mathbf{B}_2 \mathbf{z} \quad (6.102)$$

yapısına dönüşmüş ve götürevli denklemler için “Evrensel Biçim” elde edilmiştir. Evrensel Biçim’e uzay genişletme kavramı uygulandığında elde edilen denklemin seri çözümü ikili bir özinyeli ilişki verecektir. \mathbf{z} bilinmeyen işlevinin seri açılımı, bu açılımın t ve ξ değişkenlerine göre türevleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\xi, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{z}_i(t) \xi^i, \\ \mathbf{z}_\xi(\xi, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \mathbf{z}_{i+1}(t) \xi^i, \\ \mathbf{z}_t(\xi, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{z}'_i(t) \xi^i \end{aligned} \quad (6.103)$$

biçiminde verilir. Bu eşitlikler (6.102) bağıntısında yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_1 \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \mathbf{z}_{i+1}(t) \xi^{i+1} + \mathbf{A}_2 \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \mathbf{z}_{i+1}(t) \xi^{i+2} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{z}'_i(t) \xi^i + \mathbf{B}_1 \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{z}_i(t) \xi^i + \mathbf{B}_2 \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{z}_i(t) \xi^{i+1} \end{aligned} \quad (6.104)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı ξ değişkeninin üslerine bağlı olarak düzenlenecek olunursa

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{\infty} \left(i \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_i(t) + (i-1) \mathbf{A}_2 \mathbf{z}_{i-1}(t) + \mathbf{z}'_i(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_i(t) + \mathbf{B}_2 \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{z}_{i-1}(t) \right) \xi^i \\ &+ (\mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{z}'_1(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{z}_0(t)) \xi + \mathbf{z}'_0(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_0(t) \equiv 0 \end{aligned} \quad (6.105)$$

denkliği yazılabilir. ξ değişkeninin katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlendiğinde

$$\mathbf{z}'_0(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_0(t) = 0 \quad (6.106)$$

ve

$$\mathbf{z}'_1(t) + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) \mathbf{z}_1(t) = -\mathbf{B}_2 \mathbf{z}_0(t) \quad (6.107)$$

olmak üzere

$$\mathbf{z}'_i(t) + (i\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) \mathbf{z}_i(t) = -((i-1)\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2) \mathbf{z}_{i-1}(t) \quad (6.108)$$

biçimindeki iki terimli özyineli ilişki elde edilir. Ancak bu özyinelemenin kullanılabilmesi için her bir \mathbf{z}_i değerinin belirlenmesi ve bunun için de sıradan türevli denklem çözülmesi gerekmektedir. Bu sıradan türevli denklemlerin çözümü analitik olarak kolayca belirlenebilir. (6.106) sırasayılı türevli denklemin analitik çözümü

$$\mathbf{z}_0(t) = e^{-\mathbf{B}_1 t} \mathbf{c}_1 \quad (6.109)$$

bağıntısı ile ve (6.107) sırasayılı türevli denklemin analitik çözümü

$$\mathbf{z}_1(t) = e^{-(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)t} \mathbf{c}_2 - \int_0^t d\tau e^{-(t-\tau)} \mathbf{B}_2 \mathbf{z}_0(\tau) \quad (6.110)$$

bağıntısı ile verilir. \mathbf{c}_1 ve \mathbf{c}_2 başlangıç koşulları ile belirlenmektedir. \mathbf{z}_0 ve \mathbf{z}_1 işlevleri belirlendikten sonra özyineli ilişki kullanılarak benzer yolla diğer \mathbf{z}_i işlevleri de belirlenir. Bu özyineli ilişkiyi kullanmaktaki asıl amacımız zamanla değişen bir taban takımı oluşturmaktır. Bu taban takımı kullanılarak (6.30) ile verilen işlecin matris gösterilimi oluşturulur ve bu matris gösterilim aslında bize doğrusal olmayan sıradan türevli denklemin çözümünü verir.

6.3 Doğrusal Olmayan Türevli Denklemler İçin Değişik Çözüm Yöntemleri

6.3.1 Yöntem - 1: Üretici İşlevler Türünden Çözüm

Doğrusal olmayan türevli denklem oluşturmak için \hat{x} işlecinin kullanılması ile bağımsız değişken üzerinden bir işleç tanımlanmıştır. Aslında burada yapılan beklenen değer evrimini izleyerek sıradan türevli denklem üretilmesi yoluna gitmektir. Buradaki esinlenme kuvantum mekaniğinde dalga işlevinin evriminin beklenen değerler üzerinden belirlenmesinden gelmektedir. Kuvantum mekaniğinde bu tip

yapılar için üretici işlevler (ing: generating functions) türünden çözüm yazılabilir [68, 69]. Bu çalışmada ise aynı mantık izlenerek doğrusal olmayan türevli denklemler üretilirken kullanılan işlevlerin matris gösterilimi ile analitik çözüm elde edilecektir.

Bu durumda doğrusal olmayan türevli denklem genel olarak

$$\mathbf{Z}'(t) = f(\mathbf{Z}(t)) \quad (6.111)$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi başlangıç koşulunun

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{A} \quad (6.112)$$

olduğunu ve $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathbf{Z}(t)$ matrisinin çözümü, \mathbf{A} bağımsız değişkenin matris gösterilimi ve \mathbf{B} bir kare matris olmak üzere

$$\mathbf{Z}(t) = e^{-it\mathbf{B}} \mathbf{A} e^{it\mathbf{B}} \quad (6.113)$$

biçiminde seçilmektedir. (6.113) eşitliğinin türevi alınır

$$\mathbf{Z}'(t) = e^{-it\mathbf{B}} (-i\mathbf{B}\mathbf{A} + i\mathbf{A}\mathbf{B}) e^{it\mathbf{B}} \quad (6.114)$$

elde edilir.

$$f(e^{-it\mathbf{B}} \mathbf{A} e^{it\mathbf{B}}) = e^{-it\mathbf{B}} f(\mathbf{A}) e^{it\mathbf{B}} \quad (6.115)$$

olduğu gözönüne alınır

$$f(\mathbf{A}) = i(\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}) \quad (6.116)$$

olur. Burada, eğer, \mathbf{B} matrisinin değeri belirlenirse bu türevli denklem de çözülmüş olunur. Bilimsel yazında \mathbf{B} matrisinin değerini belirleyen oldukça etkin yöntemler bulunmaktadır [70, 71].

6.3.2 Yöntem - 2: İzgesel Gösterilim İle Elde Edilen Çözüm

Doğrusal olmayan ve (6.111) sırasayılı türevli denklemi yeniden ele alalım. Bu denklemi bu kez işlevinin izgesel gösterilimini kullanarak yazalım. $\mathbf{Z}(t)$ işlevinin izgesel açılımı, $\zeta_k(t)$ işlevin özdeğerlerini ve \mathbf{z}_k , bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerini betimlemek üzere

$$\mathbf{Z}(t) = \sum_{k=1}^n \zeta_k(t) \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k^T(t) \quad (6.117)$$

biçiminde yazılabilir. $f(\mathbf{Z}(t))$ işlevi için de benzer tanımlama kullanılabilir. Bu durumda

$$f(\mathbf{Z}(t)) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k(t)) \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k(t)^T \quad (6.118)$$

bağıntısı yazılabilir. Burada

$$\mathbf{z}_j^T(t) \mathbf{z}_k(t) = \delta_{jk} \quad (6.119)$$

olduğu, yani özyöneylemlerin birbirine dik olduğu varsayılmaktadır. Öncelikle (6.117) sırasayılı bağıntının türevini alalım

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'(t) &= \sum_{k=1}^n (\zeta_k'(t) \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k^T(t) + \zeta_k(t) (\mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k^T(t))') \\ &= \sum_{k=1}^n \zeta_k'(t) \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k(t)^T + \zeta_k(t) \mathbf{z}_k'(t) \mathbf{z}_k^T(t) + \zeta_k(t) \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k'^T(t). \end{aligned} \quad (6.120)$$

$\mathbf{Z}(t)$ işlevinin türevini ve $f(\mathbf{Z}(t))$ işlevini (6.111) sırasayılı bağıntıda yerine koyarsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \zeta_k'(t) \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k(t)^T + \zeta_k(t) \mathbf{z}_k'(t) \mathbf{z}_k^T(t) + \zeta_k(t) \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k'^T(t) \\ = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k(t)) \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k(t)^T \end{aligned} \quad (6.121)$$

eşitliği elde edilir. Bu bağıntıyı soldan $\mathbf{z}_{n_1}^T$, sağdan \mathbf{z}_{n_2} özyöneylemleri ile çarpacak olursak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \zeta_k'(t) \mathbf{z}_{n_1}(t)^T \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k^T(t) \mathbf{z}_{n_2}(t) + \zeta_k(t) \mathbf{z}_{n_1}(t)^T \mathbf{z}_k'(t) \mathbf{z}_k^T(t) \mathbf{z}_{n_2}(t) + \\ \zeta_k(t) \mathbf{z}_{n_1}(t)^T \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k'^T(t) \mathbf{z}_{n_2}(t) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k(t)) \mathbf{z}_{n_1}(t)^T \mathbf{z}_k(t) \mathbf{z}_k^T(t) \mathbf{z}_{n_2}(t) \end{aligned} \quad (6.122)$$

yapısı elde edilir. Buradan da (6.119) sırasayılı eşitlik gözönünde tutularak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \zeta_k'(t) \delta_{n_1 k} \delta_{k n_2} + \zeta_k(t) \mathbf{z}_{n_1}(t)^T \mathbf{z}_k'(t) \delta_{k n_2} + \zeta_k(t) \delta_{n_1 k} \mathbf{z}_k'^T(t) \mathbf{z}_{n_2}(t) \\ = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k(t)) \delta_{n_1 k} \delta_{k n_2} \end{aligned} \quad (6.123)$$

eşitliği yazılır. Eğer $n_1 = n_2 = n$ olarak seçilirse (6.123) sırasayılı bağıntı

$$\zeta_n'(t) + \zeta_n(t) [\mathbf{z}_n^T(t) \mathbf{z}_n'(t) + \mathbf{z}_n'(t)^T \mathbf{z}_n(t)] = f(\zeta_n(t)) \quad (6.124)$$

yapısına dönüşür. Bu bağıntıda ise ayıraçlar içindeki yapı (6.119) sırasayılı bağıntının türevi olup sıfıra eşittir ve denklemden çıkarılabilir

$$\zeta_n'(t) = f(\zeta_n(t)) \quad (6.125)$$

bağıntısı elde edilir. Eğer $n_1 \neq n_2$ olarak seçilirse (6.123) sırasayılı bağıntı

$$\zeta_{n_2}(t) \mathbf{z}_{n_1}(t)^T \mathbf{z}'_{n_2}(t) + \zeta_{n_1}(t) \mathbf{z}'_{n_1}(t)^T \mathbf{z}_{n_2}(t) = 0 \quad (6.126)$$

biçimini alır. (6.119) sırasayılı bağıntının türevli anlatımı bu eşitlikte kullanılırsa

$$\mathbf{z}'_{n_1}(t)^T \mathbf{z}_{n_2}(t) (\zeta_{n_1}(t) - \zeta_{n_2}(t)) = 0 \quad (6.127)$$

denklemini elde edilir. ζ_{n_1} ve ζ_{n_2} özyöneyleleri birbirinden değişik olduklarından $\zeta_{n_1}(t) - \zeta_{n_2}(t)$ farkı sıfıra eşit olmayacaktır. Bu durumda

$$\mathbf{z}'_{n_1}(t)^T \mathbf{z}_{n_2}(t) = 0 \quad (6.128)$$

olur. Bu bağıntı bize $\mathbf{z}'_{n_1}(t)$ ile $\mathbf{z}_{n_2}(t)$ yöneylerinin birbirine dik olduklarını gösterir. $n_1 \neq n_2$ olduğundan ve n boyutlu uzayda çalıştığımızdan \mathbf{z}'_{n_1} yöneyi, \mathbf{z}_{n_1} dışındaki tüm yöneylere diktir. Bu durumda \mathbf{z}_{n_1} yöneyi ve bu yöneyin türevi arasında aşağıdaki bağıntı yazılabilir

$$\mathbf{z}'_{n_1} = \alpha \mathbf{z}_{n_1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.129)$$

Daha sonra da,

$$\|\mathbf{z}_{n_1}\|^2 = e^{2\alpha t} \|\mathbf{z}_{n_1}(0)\|^2, \quad k = 1, \dots, n \quad (6.130)$$

olduğu gözönünde tutulursa ve burada $\|\mathbf{z}_{n_1}\| = 1$ olduğu düşünülürse $\alpha = 0$ olur ve

$$\mathbf{z}'_{n_1}(t) = 0 \quad (6.131)$$

denklemini oluşur. Bu denklemin çözümü

$$\mathbf{z}_{n_1}(t) = \mathbf{c} \quad (6.132)$$

olarak elde edilir. Bu da bizi özyöneylelerin zamandan bağımsız olduğu sonucuna götürür. Bu, başlangıç koşuluna ait özyöneylelerin her andaki çözümün de özyöneyleleri olacağı anlamına gelmektedir. Yani özyöneylelerin saptanması için başlangıç düzeyinin özyöneylelerini bulmak yeterlidir. Bu yapılırken bulunacak olan özdeğerler de, aslında, zamanla değişen ζ özdeğerlerinin başlangıç koşulları olacaklar ve herbir özdeğer (6.125) denklemini değişik başlangıç koşulları altında çözecek işlev olacaktır. Bu sıradan türevli denklem sayıl yapıda olup, değişkenlerin ayrılması yöntemiyle $1/f$

üzerinde bir tümlevin oluşturacağı işlevin ters işlevi olarak saptanacaktır. Bu bağlamda (6.125) denklemi

$$\frac{1}{f(\zeta_n(t))}d(\zeta_n(t)) = dt \quad (6.133)$$

yapısına dönüştürülür ve eşitliğin her iki yanının tümlevi alınarak çözüm kapalı bir biçimde

$$G(\zeta_n(t)) = \int \frac{1}{f(\zeta_n(t))}d(\zeta_n(t)) = \int dt = t + k \quad (6.134)$$

yapısında elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$\zeta_n(t) = H(t + k) \quad (6.135)$$

biçiminde açık olarak elde edilebilir. Burada H işlevi G işlevinin tersi olan işlevdir

$$H = G^{-1}. \quad (6.136)$$

Böylece elde edilen özyöney ve özdeğerler (6.117) ile verilen denklemde yerine konulduğunda doğrusal olmayan sıradan türevli denklemin de çözümü bulunmuş olunur.

7. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında matris katsayılı doğrusal ve doğrusal olmayan türevli denklemlerin sayısal olarak çözülmesi için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntem uzay genişletme kavramına dayanmaktadır. Uzay genişletme kavramına ek olarak, sendelenimsizlik yaklaşımı ve saptırım açılımları yöntemleri de yöntemin oluşturulması ve geliştirilmesinde yardımcı öğeler olarak kullanılmaktadır. Bu bağlamda, öncelikli olarak doğrusal yapılu türevli denklemlerin çözümü ile ilgilenilmiş, daha sonra da doğrusal olmayan türevli denklemler için incelemeler yapılmıştır.

Matris katsayılı doğrusal türevli denklemlerde birinci mertebeden, sağıyansız olan yapı ile ilgilenilmiştir. Genellikle herhangi bir şey yitirmeden başlangıç anında denklem çözümünün birim matrise eşit olduğu varsayılmıştır. Matris bilinmeyen işlevi soldan çarpan katsayı matrisi bir çokterimli olarak seçilmiştir. Bu katsayı matrisi bağımsız değişkenin içinde bulunduğu karmaşık sayı düzleminin her sonlu bölgesinde analitik bir işlev olduğundan, matris katsayılı türevli denklemin çözümü de aynı sonlu bölge içinde analitiktir.

Bu çalışmada matris katsayılı türevli denklemin çözümü için öncelikle bir öngörüm yapılmıştır. Bilinmeyen işlev parçalara bölünmüş ve her bir parçanın denkleme yeni eklenen bir değişkenle çarpımının doğrusal birleşimi denklemin çözümü olarak öngörülmüştür. Denkleme eklenen yeni değişken, matris denklemin asıl bilinmeyenine bağlı olarak tanımlanmıştır. Yeni değişken, bağımsız değişkenin, denklemin yapısına bağlı olarak belirlenen bir üslüsü olarak seçilmiştir ve bu üs değeri “Uzay Genişletme Mertebesi” olarak adlandırılmıştır. Böyle bir dönüşüm yeni, ancak evrensel bir matris katsayılı türevli denklem elde etmemizi sağlamıştır. Elde edilen bu evrensel yapının seri çözümü iki terimli bir özyineleme oluşturmaktadır.

Burada sözü edilen dönüşüm iki değişik biçimde gerçekleştirilmiş, ilk dönüşüm bizi “Okubo Biçimi” adı verilen yapıya götürürken, ikinci dönüşüm bizi “Evrensel Biçim”

diye adlandırdığımız başka bir yapıya götürmüştür. Bu iki biçimin serisel çözüm yapısı birbirine benzerdir ancak matrislerin sayısal değerleri değişmiştir. Okubo Biçimi'nin serisel çözümlerinde dallanma tekillikleri ile karşılaşmıştır. Bu tür tekillikler karmaşık düzlemde ve Riemann yapraklarıyla çalışma gerektirdiklerinden bu yapı ile çalışmaktan kaçınılmış ve bu tür tekilliklerin oluşmadığı yeni bir yapılanmaya gidilmiştir. Evrensel Biçim'in serisel çözümlerinde de tekillikler oluşmaktadır, ancak bu tekillikler kutup tekillikleridir ve uygulamada dallanma tekillikleri kadar sorun yaratmazlar. Burada, tekillik değil de tekilliğin türü bizi bu yönde bir ayırım yapmaya itmiştir.

Her iki yapının serisel çözümü elde edilmiş ve sayısal denemeler yapılmıştır. Sayısal karşılaştırmalar analitik çözümü bilinen denklemlerle yapılmıştır. Yöntemin sayısal sonuçları, denklemlerin serisel çözümü ile de karşılaştırılmış, hem Okubo Biçimi'nin, hem de Evrensel Biçim'in serisel çözümlerinin, denklemin doğrudan seri çözümü ile elde edilen sonuçlarından çok daha iyi olduğu gözlemlenmiş ve bunun nedeni kuramsal olarak da gösterilmiştir.

Geliştirilen çözüm yönteminin her iki yapı için yakınsaklık ölçütleri incelenmiş ve hangi koşullar altında yakınsadıkları gösterilmiştir. Her bir yapı için hata çözümlemesi yapılmıştır. Bu bağlamda, Okubo Biçimi'nin, bağımsız değişkeninin tüm sonlu değerleri için, matris cebirsel bağıntılara ait bileşenler sonlu kaldığı sürece yakınsadığı gösterilmiş ve bu da seri çözümde kesme yapabilme olanağı vermiştir. Benzer bir inceleme Evrensel Biçim için de yapılmış ve denklemin seri çözümünün yakınsaklık yarıçapının sonsuz olduğu gösterilmiştir.

Yöntemin etkinliğini artırmak için değişik yüksek mertebeli uzay genişletme yaklaşımları oluşturulmuştur. Uzay genişletme mertebesi seçimine bağlı olarak oluşturulan üç tür uzay genişletme yaklaşımından söz edilmiştir. Bunlar sırasıyla, "En Kısıtlı Uzay Genişletme", "Düzgün Uzay Genişletme" ve "Aşkın Uzay Genişletme" olarak adlandırılmışlardır. Her bir uzay genişletme yaklaşımı için sayısal denemeler yapılmış ve yüksek uzay genişletme mertebelerine çıkıldığında yaklaşım niteliğinin arttığı gözlemlenmiştir.

Burada geliştirilen bu yeni yöntem aslında, seri katsayılarının bir şekilde yeniden sıralanması ve kümelenmesi mantığına dayanmaktadır. Bu anlamda yöntem, hesaplama karmaşıklığı açısından çok etkin olmasa da, yakınsaklık, hata kestirimleri ve sayısal sonuçlar açısından oldukça önemli katkılarda bulunmaktadır.

Yöntemin geliştirilmesi, denklem sisteminin evrensel bir yapıya dönüştürülmesi, bu elde edilen yapının $t = 0$ noktasında serisel açılımının elde edilmesi ve daha sonra da yüksek mertebeden uzay genişletme yaklaşımları ile sayısal sonuçların iyileştirilmesi aşamalarını içermektedir.

Elde edilen seriden sonlu sayıda terimle kesme yaklaşımları oluşturulmuş ve $t = 0$ 'dan belli bir uzaklıktaki t değerleri için yöntemin oldukça kullanışlı bir yöntem olduğu gösterilmiştir. Ancak, $t = 0$ 'dan uzaklaştıkça, aynı sayısal duyarlılığı elde edebilmek için kesme yaklaşımından çok fazla terimin alınması gerekmektedir. Bu nedenle, aralığın sıfırdan farklı bir noktasında geçerli olan bir açılım geliştirme gereksinimi duyulmuştur. Böyle bir noktada denklemin serisel açılımı iki ardışık terimli bir özyineleme değil, üç terimli bir özyineleme verdiği için bu aşamada değişik bir yaklaşıma gerek duyulmuştur. Bu amaçla yeni yaklaşım yöntemi olarak, uygun bir saptırım açılımı ile iki ardışık terimli özyineleme oluşturma yoluna gidilmiştir. Bu yöntemin de yakınsaklık ölçütleri incelenmiş ve gerekli hata çözümlenmeleri yapılmıştır. Geliştirilen yöntemin saptırım değiştirgesinin tüm sonlu değerleri için yakınsadığı gösterilmiştir. “Saptırımlı Matris Altkesimsel İşlevleri” kavramı oluşturulmuş ve bu kavram aracılığı ile birbirini izleyen aralıklarda kullanılan saptırım açılımları yaklaşımı çözüm aralığını genişletmiş ve böylece sayısal duyarlılık artmıştır. Bunlara ek olarak, saptırım açılımları yüksek mertebeli uzay genişletme yaklaşımının da kullanılabilmesi için bir yapıya genişletilmiştir. Sayısal sonuçların da bu mertebeye bağlı olarak geliştiği gözlemlenmiştir. Sayısal örneklerle yaklaşımın etkinliği gösterilmiştir.

Buraya kadar sözü edilen yöntemler ve yaklaşımlar doğrusal matris katsayılı türevli denklemlerin çözümüne yöneliktir. Mühendislikte karşımıza çıkabilecek bir diğer önemli sorun da doğrusal olmayan türevli denklemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesidir. Bu bağlamda, bu tezin ikinci aşaması bu tür problemlere yine uzay genişletme kavramı yardımı ile çözüm üretmeyi amaçlamıştır. Bu bölümde

uzay genişletme kavramının doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümünde nasıl kullanıldığı anlatılmıştır. Uzak genişletme yönteminin doğrusal olmayan türevli denklemlere doğrudan uygulanması, doğrusal sıradan türevli denklemlerde olduğu gibi bizi doğrudan evrensel bir yapıya götürmediğinden, doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümünde yeni bir yol izlenerek öncelikle göretürevli denklemler aracılığı ile doğrusal olmayan türevli denklem üretilmiştir. Daha sonra da, göretürevli denklemlere uzak genişletme yöntemi uygulanmış ve yine bir evrensel yapı elde edilmiştir.

Göretürevli denklemlerin doğrusal olmayan denklemlere dönüştürülmesinde sendelenimsizlik yaklaşımını kullanılmıştır. Sendelenimsizlik yaklaşımını beklenen değer kavramı kullanılarak uygulanmıştır. Böylelikle karmaşık yapıda olmayan bir göretürevli denklemin uzak genişletme yöntemi ile elde edilen çözümünden doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümüne ulaşmak amaçlanmıştır.

Göretürevli denklemlere uzak genişletme uygulanarak elde edilen evrensel biçimin doğrusal türevli denklemlerde olduğu gibi seri çözümü oluşturulmuş ve iki terimli özyineli ilişki elde edilmiştir. Bu elde edilen özyinelemenin kullanılabilmesi sıradan türevli denklem çözümü gerektirmektedir. Ancak bu sıradan türevli denklemler, analitik çözümü oldukça kolay bir biçimde elde edilebilecek türdendir.

Özyineli ilişki ile elde edilen çözüm dışında doğrusal olmayan türevli denklemler için değişik iki çözüm yönteminden daha söz edilmektedir. Bunlardan biri üretici işlevler kullanarak denkleme çözüm getirirken, diğeri de izgesel gösterilim kullanarak denklemlerin nasıl çözüleceğini göstermektedir. Bu önerilen iki yöntem, doğrusal olmayan türevli denklem üretilirken kullanılan kuvantum mekaniği kavramlarından esinlenerek oluşturulmuştur ve iki terimli özyineleme dışında denkleme çözüm üreten değişik seçenekler olarak düşünülmüşlerdir.

Burada oluşturulan yöntem için sayısal denemeler yapılmamıştır ancak kuramsal olarak oldukça önemli bulgular elde edilmiştir. Özellikle, göretürevli denklemlerden doğrusal olmayan türevli denklem üretimi doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümüne çok değişik bir bakış açısı getirmiştir.

Bu çalışma, doğrusal ve doğrusal olmayan türevli denklemlerin sayısal çözümü için bilimsel yazına çok yeni ve oldukça etkili olan kavramlar kazandırmıştır [27, 28, 56, 57, 72]. Denklemler çok yönlü olarak incelenmiş, kuramsal olarak elde edilen bulgular sayısal denemelerle de sınanmıştır. Bir yöntemin etkinliğinin en önemli göstergelerinden biri olan yakınsaklık özellikleri incelenmiş ve geliştirilen yöntemin yakınsak olduğu gösterilmiştir. Ele alınan konu oldukça kapsamlı olduğundan bu konu ile ilgili bundan sonra da yapılabilecek daha bir çok çalışma söz konusudur.

Bundan sonra yapılması öngörülen ve tezin kapsamı dışında tutulmuş konular şu şekilde verilebilir:

- Denklem takımının herhangi bir tekillik içermediği durum incelenmiştir. Ancak tekil olan yapılar da yeni bir inceleme konusu olabilir.
- Matris katsayılı türevli denklem değişik bir yapıda seçilebilir. Sözelimi,

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)\mathbf{B}(t) \quad (7.1)$$

yapısında bir denklem de seçilebilir ve benzer yaklaşımlar bu denklem takımına da uygulanabilir. Bu tez çalışmasının yapıldığı süre içerisinde bu yapılanlara ek olarak, bu denklem takımı da incelenmiştir. (7.1) sırasayılı denkleme uzay genişletme yaklaşımını uygulanmış ve bu kez

$$\mathbf{\Xi}'(y) = \frac{1}{y} (\mathcal{A}_{-1}\mathbf{\Xi}(y) + \mathbf{\Xi}(y)\mathcal{B}_{-1}) + (\mathcal{A}_0\mathbf{\Xi}(y) + \mathbf{\Xi}(y)\mathcal{B}_0) \quad (7.2)$$

biçiminde verilen, hem Okubo Biçimi'ne hem de Evrensel Biçim'e yapısal olarak benzeyen yeni bir biçim elde edilmiştir. Ancak serisel çözüm ve buna bağlı olarak da sayısal denemeler yapılmadığı için tezin kapsamı dışında tutulmuştur. Böyle bir denklem uygulamada karşılaşılan türde bir denklemdir ve yakın gelecekte üzerinde durulması gereken bir çalışma olarak düşünülebilir.

- Saptırım açılımları kullanılarak yöntemin etkinliği artırılırken tek terimli saptırım açılımı kullanılmıştır. Sayısal sonuçların iyileştirilmesi için saptırım açılımından birden çok terim de alınabilir. Böyle bir durumun birtakım tümlevlerin hesaplanmasını gerektirdiğini daha önce de belirtmiştik. Bu nedenle tümlev almaktan kaçınmak için birden çok saptırımlı altkesimsel matris işlevi kullanma

yoluna gidilmiştir. Tümler içeren bu terimler de işlemlere katılabilir. Ancak etkin tümler hesaplama yöntemleri kullanmak gerektiğinden bu tezde böyle bir çalışmaya girilmemiştir. Bu gelecek bir çalışmada incelenebilecek, içeriği oldukça kapsamlı olabilecek bir başlık olarak düşünülebilir.

- Saptırım açılımları kullanılırken çözümün iyileştirilmesinde saptırımı altkesimsel matris işlevlerinden yararlanılmıştır. Eşleşme noktaları seçilerek birbirine komşu olan aralıklarda sayısal sonuçlar elde edilmiştir. En uygun iç noktaların bulunabilmesi bir eniyileme problemidir ve bu konu da çok ayrıntılı bir inceleme yapmayı gerektirmektedir.
- Doğrusal olmayan ancak bu tezde elde edilen yapıdan farklı bir yapıda türevli denklem üretebilmek için değişik işlemlerden yola çıkılabilir.
- Doğrusal olmayan türevli denklemler için kuramsal taban geliştirilmiş ancak sayısal denemeler yapılmamıştır. Bu da gelecekte bu çerçevede yapılacak bir çalışmanın konusu olarak düşünülebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Coddington, E.A. ve Carlson, R.**, 1997. Linear Ordinary Differential Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA.
- [2] **Jeffrey, A.**, 1993. Linear Algebra And Ordinary Differential Equations, CRC Press, Inc., Florida, USA.
- [3] **Birkhoff, G. ve Rota, G.C.**, 1989. Ordinary Differential Equations, Wiley, 4th ed., New York, USA.
- [4] **Boyce, W.E. ve DiPrima, R.C.**, 2001. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Wiley, 7th ed., New York, USA.
- [5] **Kurzweil, J.**, 1986. Ordinary Differential Equations: Introduction To The Theory Of Ordinary Differential Equations In The Real Domain, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- [6] **Brauer, F. ve Nohel, J.A.**, 1969. The Qualitative Theory Of Ordinary Differential Equations: An Introduction, Dover Publications, New York, USA.
- [7] **Zwillinger, D.**, 1992. Handbook of Differential Equations, Academic Press, Boston, USA.
- [8] **Okubo, K.**, 1963. A Global Representation of a Fundamental Set of Solutions and a Stokes Phenomenon for a System of Linear Ordinary Differential Equations, *Jou. Math. Soc. Jap.*, **15**, 268–288.
- [9] **Okubo, K.**, 1965. A Connection Problem Involving a Logarithmic Function, *Publications of the R.I.M.S*, **1**, 99–128.
- [10] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.**, 1993. Lie Algebraic Factorization of Multivariable Evolution Operators: Definition and the Solution of the Canonical Problem, *Int. J. Engng Sci.*, **31**, 307–331.
- [11] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.**, 1993. Lie Algebraic Factorization of Multivariable Evolution Operators: Convergence Theorems for the Canonical Case, *Int. J. Engng Sci.*, **31**, 333–346.
- [12] **Kurşunlu, A., Yaman, İ. ve Demiralp, M.**, 2004. A Space Extension Reductive Approach to the Solution of Eigenvalue Problems: Anharmonic Oscillator, Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2004), ICNAAM, Chalkis, Greece, s.224–227.

- [13] **Demiralp, M.**, 2007. Recent Developments in The Fluctuation Expansion Of Univariate Functions' Matrix Representations, Applied Maths. and Engineering, (MATH-07), World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Cairo, Egypt, invited lecture.
- [14] **Demiralp, M.**, 2009. Fluctuationlessness Theorem to Approximate Univariate Functions' Matrix Representations, WSEAS Transactions on Mathematics, cilt 6 of 8, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Cairo, Egypt, s.258–267, invited lecture.
- [15] **Demiralp, M.**, 2009. Fluctuationlessness Theorem to Approximate Univariate Functions' Matrix Representations, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8**, 258–297.
- [16] **Demiralp, M., Baykara, N.A. ve Gürvit, E.**, 2008. Evaluation of Univariate Integrals via Fluctuationlessness Theorem, AIP Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2008, Kos, Greece.
- [17] **Demiralp, M. ve Kalay, B.**, 2008. Smoothing the Integrands to Increase the Quality of Fluctuationlessness Approximation in Numerical Integration, Proceedings of the Multivariate Analysis and Its Application for Science and Engineering Conference (MAASE'08), WSEAS, İstanbul, Turkey, s.204–208.
- [18] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.**, 2008. Univariate Integration via Space Extension Based No Fluctuation Approximation, AIP Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2008, Kos, Greece.
- [19] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.**, 2009. Basic Components In Fluctuation Free Integration of Highly Oscillatory Functions, International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering, ICCMSE 2009, Rhodes, Greece.
- [20] **Gürvit, E., Baykara, N. ve Demiralp, M.**, 2009. Numerical Integration of Bivariate Functions over a Non Rectangular Area by Using Fluctuationlessness Theorem, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8(5)**, 193–198.
- [21] **Gözükırmızı C. ve Demiralp, M.**, 2009. The Application of the Fluctuation Expansion with Extended Basis Set to Numerical Integration, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8(5)**, 205–212.
- [22] **Demiralp, M. ve Altay, N.**, 2008. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations in Fluctuationlessness Theorem Perspective, Proceedings of the Multivariate Analysis and Its Application for Science and Engineering Conference (MAASE'08), WSEAS, İstanbul, Turkey, s.162–167.

- [23] **Demiralp, M. ve Altay, N.**, 2008. Application of Fluctuationlessness Theorem on the Numerical Solution of Higher Order Linear Ordinary Differential Equations, AIP Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2008, Kos, Greece.
- [24] **Altay, N. ve Demiralp, M.**, 2010. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations by Fluctuationlessness Theorem, *J. Math. Chem.*, **47(4)**, 1323–1343.
- [25] **Altay, N. ve Demiralp, M.**, 2009. Fluctuationlessness Theorem and its Application to Boundary Value Problems of ODEs, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8(5)**, 199–204.
- [26] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.**, 2009. Truncation Approximations For Two Term Recursive Universal Form Of Matrix Ordinary Differential Equations, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8(5)**, 219–223.
- [27] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.**, 2007. Conversion of Matrix ODEs to Certain Universal and Easily Handlable Forms Via Space Extension, Proceedings of the WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Cairo, Egypt.
- [28] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.**, 2007. Transformation of Ordinary Differential Equations into Okubo Universal Form with Space Extension and Its Truncating Approximations, International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2007), Corfu, Greece.
- [29] **Demiralp, M. ve Tunga, B.**, 2008. Applications of Multivariate Integration via Fluctuationlessness Approximation: HHDMMR, AIP Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2008, Kos, Greece.
- [30] **Tuna, S., Tunga, B. ve Demiralp, M.**, 2009. Fluctuation Free Matrix Representation Based Univariate Integration In Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMMR) Over Plain and Factorized HDMMR, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8(5)**, 225–230.
- [31] **Tunga, B.**, 2010. Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminde Sendelenimsiz Matris Gösterim Tabanlı Ağırlık Eniyilemesi, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- [32] **Tunga, B. ve Demiralp, M.**, 2009. Constancy Maximization Based Weight Optimization in High Dimensional Model Representation, *Numerical Algorithms*, **52(3)**, 435–459.
- [33] **Yaman, İ.**, 2009. Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi Tabanlı Yeni Oransal Yaklaşımlar Oluşturumu ve Sendelenimsizlik Yaklaşımını İle Etkin Biçimde Kullanımı, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- [34] **Yaman, İ. ve Demiralp, M.**, 2009. A New Rational Approximation Technique Based on Transformational High Dimensional Model Representation, *Numerical Algorithms*, **52(3)**, 385–407.

- [35] **Demiralp, M. ve Gözükırmızı, C.**, 2008. Evaluation of Fluctuation Coefficients for Three Consecutive Term Recursive Basis Functions, AIP Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2008, Kos, Greece.
- [36] **Demiralp, M. ve Ayvaz, M.**, 2008. Utilization of the Fluctuationlessness Theorem in the Evaluation of Certain Operator Matrix Representations for Optimally Controlled Simple Quantum Harmonic Oscillator, Proceedings of the Multivariate Analysis and Its Application for Science and Engineering Conference (MAASE'08), WSEAS, İstanbul, Turkey, s.216–220.
- [37] **Demiralp, M., Baykara, N.A. ve Gürvit, E.**, 2008. A Hybridized Finite Taylor Formula by Fluctuation Free Remainder Term for Univariate Function Approximation, AIP Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2008, Kos, Greece.
- [38] **Demiralp, M.**, 2008. Finite Subspace Matrix Representation of the Multiplications Operator's Resolvent in Terms of Fluctuation Matrices, AIP Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2008, Kos, Greece.
- [39] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.**, 1993. Optimally Controlled Quantum Molecular Dynamics: A Perturbation Formulation and the Existence of Multiple Solutions, *Phys. Rev. A*, **47**, 809.
- [40] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.**, 1994. Optimal Control in Classical Molecular Dynamics: A Perturbation Formulation and the Existence of Multiple Solutions, *J. Math. Chem.*, **16**, 185.
- [41] **Meral, E. ve Demiralp, M.**, 2005. An Optimized Two Factor Perturbation Based Exponential Matrix Factorization Approach to the Control Equations of Quantum Multiharmonic Oscillator With Linear Dipole Function and Linear Control Agents, Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2005), ICNAAM, Rhodes, Greece, s.731–734.
- [42] **Kaman, T. ve Demiralp, M.**, 2004. Perturbation Expansion Around the Nominal Value of External Field Amplitude in Molecular Optimal Control Theory, Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2004), ICNAAM, Chalkis, Greece, s.185–188.
- [43] **Wylie, C.R.**, 1995. Advanced Engineering Mathematics, McGraw-Hill, Inc., USA.
- [44] **Hartfiel, D.J.**, 2001. Matrix Theory and Applications with Matlab, CRC Press, Florida, USA.
- [45] **Karaoğlu, B.**, 1997. Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler, BilgiTek Yayıncılık, İstanbul.

- [46] **Halmos, P.R.**, 1982. A Hilbert Space Problem Book, Springer, New York, USA.
- [47] **Meyer, C.D.**, 2000. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, USA.
- [48] **Kreider, D.L., Kuller, R.G., Ostberg, D.R. ve Perkins, F.W.**, 1966. An Introduction to Linear Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, USA.
- [49] **Kreyszig, E.**, 2006. Advanced Engineering Mathematics, Wiley, 9th ed., New York.
- [50] **Riley, K.F., Hobson, M.P. ve Bence, S.J.**, 2002. Mathematical Methods for Physics and Engineering : A Comprehensive Guide, Cambridge University Press, 2nd ed., Cambridge, UK.
- [51] **Demiralp, M.**, 2007. Conversion of the First Order Linear Vector Differential Equations With Polynomial Coefficient Matrix to Okubo Form, Proceedings of the 11th WSEAS Int. Conf. on Appl. Math., WSEAS, Dallas, USA.
- [52] **Golub, G.H. ve Loan, C.F.V.**, 1996. Matrix Computations, Johns Hopkins University Pres, Baltimore; London.
- [53] **Thomas, G.B., Weir, M.D., Hass, J. ve Giordano, F.R.**, 2007. Thomas's Calculus, Addison-Wesley, 11th ed., UK.
- [54] **Horn, R.A. ve Johnson, C.R.**, 1985. Matrix Analysis, Cambridge University Pres, Cambridge, UK.
- [55] **Oevel, W., Postel, F., Wehmeier, S. ve Gerhard, J.**, 2000. The MuPAD Tutorial, Springer, New York.
- [56] **Altınbaşak, S. ve Demiralp, M.**, 2010. Solutions To Linear Matrix Ordinary Differential Equations Via Minimal, Regular, And Excessive Space Extension Based Universalization: Convergence and Error Estimates For Truncation Approximants In The Homogeneous Case with Premultiplying Polynomial Coefficient Matrix, *J. Math. Chem.*, **48(2)**, 266–286.
- [57] **Altınbaşak, S. ve Demiralp, M.**, 2010. Solutions To Linear Matrix Ordinary Differential Equations Via Minimal, Regular, And Excessive Space Extension Based Universalization: Perturbative Matrix Splines, Convergence And Error Estimate Issues For Polynomial Coefficients In The Homogeneous Case, *J. Math. Chem.*, **48(2)**, 253–265.
- [58] **Andrews, G.E., Askey, R. ve Roy, R.**, 1999. Special Functions, Cambridge University Pres, Cambridge, UK.
- [59] **Hinch, E.J.**, 2000. Perturbation Methods, Cambridge University Pres, Cambridge, UK.
- [60] **Boor, C.D.**, 1978. A Practical Guide to Splines, Springer Verlag, New York, USA.

- [61] **Schumaker, L.**, 2007. Spline Functions: Basic Theory, Cambridge University Pres, Cambridge, UK.
- [62] **Greiner, W.**, 1989. Quantum Mechanics, Springer Verlag, Berlin.
- [63] **Debnath, L. ve Mikusinski, P.**, 2005. Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Elsevier Academic Press, USA.
- [64] **Pitman, J.**, 1993. Probability, Springer-Verlag, New York.
- [65] **Dirac, P.A.M.**, 1958. The Principles of Quantum Mechanics, Clarendon Press, Oxford, England.
- [66] **Akhiezer, N.I. ve Glazman, I.M.**, 1993. Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, New York.
- [67] **Hall, B.C.**, 2004. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations : An Elementary Introduction, Springer, New York, USA.
- [68] **Iserles, A.**, 2009. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [69] **Iserles, A.**, 2001. Acta Numerica, Volume 10, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [70] **Demiralp, M.**, 2009. Quantum Mechanical Matrix Ordinary Differential Equations and Their Solutions by Characteristic Evolutions, WSEAS, ACC'09, Vouliagmeni, Greece.
- [71] **Demiralp, M. ve Ayvaz, M.**, 2009. Expectation Value Evolutions for the One Dimensional Quantum Harmonic Oscillator Under the Influence of External Dipol Effects, WSEAS, ACC'09, Vouliagmeni, Greece.
- [72] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.**, 2008. Conversion of PDEs to Certain Universal and Easily Handlable Forms Via Space Extension, International Conference on Multivariate Analysis and Its Application in Science and Engineering, MAASE 2008, Istanbul, Turkiye.
- [73] **Kaplan, W.**, 2003. Advanced Calculus, Addison-Wesley, 5th ed., USA.

EKLER

EK A : Matematiksel Bazı Kavramlar ve Bağıntılar

EK B : Özünedöner İşleçler

EK C : Okubo Matrislerinin Yakınsaklık Ölçütlerinin Çıkarımı

EK A : Matematiksel Bazı Kavramlar ve Bağlıntılar

Aralık İndirgeme

Değişken dönüşümü tümlevlerin hem analitik hem de sayısal çözümlerinde kullanılan oldukça güçlü bir yöntemdir. İşlevlerin hızlı değişim gösterdiği tümlev bölgelerinde doğruluğu artırmak ve tümlev alınamayacak durumlarda tümlev bölgesini değiştirmek için kullanılır.

Değişken dönüşümü aşağıda verilen bağıntı ile gösterilebilir

$$\int_0^1 f(r(x)) \frac{dr(x)}{dx} dx = \int_{a=r(0)}^{b=r(1)} f(r) dr. \quad (\text{A.1})$$

Bu bağıntıda $r(x)$, $x \in [0, 1]$ birim aralığını $r \in [a, b]$ aralığına eşleştiren herhangi bir işleve karşılık gelir. Bu işlevin en basit biçimi, tümlevi herhangi bir aralıktan alıp birim aralığa indirgeyen, ve

$$\begin{aligned} r(x) &= a + (b - a)x, \\ \frac{dr(x)}{dx} &= b - a \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

biçiminde verilen doğrusal yapıdır.

Cauchy Çarpımı

(a_1, a_2, a_3, \dots) ve (b_1, b_2, b_3, \dots) iki dizi olsun. Bu dizilerin her birinin toplamı sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad (\text{A.3})$$

ile verilmiş olsun. Bu durumda bu iki serinin Cauchy çarpımı

$$c_n = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \quad (\text{A.4})$$

olmak üzere,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \right) \quad (\text{A.5})$$

biçiminde verilir.

Beta İşlevi ve Tümlev Gösterilimi

β işlevinin tümlev gösterilimi

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\text{A.6})$$

ile verilmektedir. Bu işlev, Γ işlevi türünden anlatım da

$$\Gamma(x) = (x - 1)!, \quad \Gamma(y) = (y - 1)! \quad (\text{A.7})$$

olmak üzere,

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{A.8})$$

biçiminde verilmektedir [73].

Evrin İşlevinin Bazı Özellikleri

Özellik 1:

$$e^{-b(t)\frac{\partial}{\partial x}} [F_1(x)F_2(x)] = \left[e^{-b(t)\frac{\partial}{\partial x}} F_1(x) \right] \left[e^{-b(t)\frac{\partial}{\partial x}} F_2(x) \right] \quad (\text{A.9})$$

Özellik 2:

$$e^{-b(t)\frac{\partial}{\partial x}} F(x) = F(x - b(t)) \quad (\text{A.10})$$

EK B : Özünedöner İşleçler

Bir P işleci eğer $P^2 = P$ koşulunu sağlıyorsa bu işleç özünedöner (ing: idempotent) bir işleçtir [63]. Bunun kanıtı aşağıdaki gibi verilebilir:

\mathcal{H}_n , \mathcal{H} Hilbert uzayının n boyutlu kapalı bir altuzayı ve $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$, de bu altuzay içinde tanımlanmış bir ortonormal sistem olsun. \hat{P}_i ile gösterilebilecek bir izdüşüm işleci

$$\hat{P}_i g(x) = \sum_{i=1}^n (g, u_i) u_i(x) \quad (\text{B.1})$$

biçiminde tanımlanabilir. İki işlecin çarpımı

$$\begin{aligned} \hat{P}_j \hat{P}_i g(x) &\equiv u_j(x) (u_j, u_i) (u_i, g) \\ &= u_j(x) \delta_{ji} (u_i, g) \\ &= \delta_{ji} \hat{P}_i g, \quad g(x) \in \mathcal{H}, \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlikler üzerinde özenli bir inceleme

$$\hat{P}_i \hat{P}_j = \delta_{ij} \hat{P}_i, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (\text{B.3})$$

eşitliğinin sağlandığını gösterir. Bu da bu işleçlerin özünedöner nitelik taşıdığı anlamına gelir. Bu işleç, \mathcal{H} uzayından $u_i(x)$ 'ce gerilen uzaya izdüşürür. 1 değil de n boyutlu uzaya izdüşürecek bir $\hat{P}^{(n)}$ işleci

$$\hat{P}^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^n \hat{P}_i \quad (\text{B.4})$$

biçiminde tanımlanır ve bu işleç de özünedönerdir. Bunun kanıtı da aşağıdaki gibi verilebilir:

Bu işleç, \mathcal{H}_n altuzayına izdüşüren bir işleç ise, $\hat{P}^{(n)}$ bu altuzayın aynı zamanda birim işlecidir ve bu

$$\hat{P}^{(n)} \equiv \hat{I}^{(n)} \quad (\text{B.5})$$

biçiminde gösterilebilir. Her $g(x) \in \mathcal{H}$ için $\hat{P}^{(n)} g(x) \in \mathcal{H}_n$ olduğundan, $\forall g(x) \in \mathcal{H}$ için

$$\left[\hat{P}^{(n)} \right]^2 g(x) = \hat{P}^{(n)} (\hat{P}^{(n)} g(x)) = \hat{P}^{(n)} g(x) \quad (\text{B.6})$$

olur. Bu durumda

$$\left[\hat{P}^{(n)} \right]^2 = \hat{P}^{(n)} \quad (\text{B.7})$$

olduğu kolayca görülebilir [63].

EK C : Okubo Matrislerinin Yakınsaklık Ölçütlerinin Çıkarımı

1. θ_0 Matrisinin Boyu:

θ_0 matrisinin açık yapısı aşağıdaki gibidir:

$$\theta_0 \equiv \frac{1}{m+1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{m-1} & \cdots & \mathbf{A}_0 & -m\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Bu matrisinin Frobenius boyunu veren bağıntı

$$\|\theta_0\|_F^2 = \frac{1}{(m+1)^2} \left(\sum_{i=1}^m i \|\mathbf{A}_{m-i}\|_F^2 + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \|\mathbf{I}\|_F^2 \right) \quad (\text{C.2})$$

biçimindedir.

Birinci mertebeden uzay genişletme uygulanması durumunda θ_0 matrisi

$$\theta_0^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

biçiminde olacaktır. Bu matrisin Frobenius boyu için aşağıdaki eşitlik yazılabilir

$$\|\theta_0^{(1)}\|_F^2 = \frac{1}{4} (\|\mathbf{A}_0\|_F^2 + \|\mathbf{I}\|_F^2). \quad (\text{C.4})$$

(C.2) sırasayılı bağıntıda m yerine 1 yazılacak olunursa

$$\begin{aligned} \|\theta_0^{(1)}\|_F^2 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^1 i \|\mathbf{A}_{1-i}\|_F^2 + \|\mathbf{I}\|_F^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} (\|\mathbf{A}_0\|_F^2 + \|\mathbf{I}\|_F^2) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliğin (C.4) ile aynı olduğu görülür.

İkinci mertebeden uzay genişletme uygulanması durumunda θ_0 matrisi

$$\theta_0^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -2\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

biçiminde olacaktır. Bu matrisin Frobenius boyu için aşağıdaki eşitlik yazılabilir

$$\|\theta_0^{(2)}\|_F^2 = \frac{1}{9} (2\|\mathbf{A}_0\|_F^2 + \|\mathbf{A}_1\|_F^2 + 5\|\mathbf{I}\|_F^2). \quad (\text{C.7})$$

(C.2) sırasayılı bağıntıda m yerine 2 yazılacak olunursa

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\theta}_0^{(2)}\|_F^2 &= \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^2 i \|\mathbf{A}_{2-i}\|_F^2 + 5 \|\mathbf{I}\|_F^2 \right) \\ &= \frac{1}{9} (\|\mathbf{A}_1\|_F^2 + 2\|\mathbf{A}_0\|_F^2 + 5\|\mathbf{I}\|_F^2)\end{aligned}\quad (\text{C.8})$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliğin (C.7) ile aynı olduğu görülür.

2. $\boldsymbol{\theta}_1$ Matrisinin Boyu:

$\boldsymbol{\theta}_1$ matrisinin açık yapısı aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(m)} \equiv \frac{1}{m+1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{A}_{m-1} & \cdots & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_m & \cdots & \mathbf{A}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_m \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Bu matrisinin Frobenius boyunu veren bağıntı

$$\|\boldsymbol{\theta}_1\|_F^2 = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{i=0}^m (i+1) \|\mathbf{A}_i\|_F^2 \quad (\text{C.10})$$

ile verilmiştir.

Birinci mertebeden uzay genişletme uygulanması durumunda $\boldsymbol{\theta}_1$ matrisi

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

biçiminde olacaktır. Bu matrisin Frobenius boyu için aşağıdaki eşitlik yazılabilir

$$\|\boldsymbol{\theta}_1^{(1)}\|_F^2 = \frac{1}{4} (2\|\mathbf{A}_1\|_F^2 + \|\mathbf{A}_0\|_F^2). \quad (\text{C.12})$$

(C.11) sırasayılı bağıntıda m yerine 1 yazılacak olunursa

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\theta}_1^{(1)}\|_F^2 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=0}^1 (i+1) \|\mathbf{A}_i\|_F^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} (2\|\mathbf{A}_1\|_F^2 + \|\mathbf{A}_0\|_F^2)\end{aligned}\quad (\text{C.13})$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliğin (C.12) ile aynı olduğu görülür.

İkinci mertebeden uzay genişletme uygulanması durumunda $\boldsymbol{\theta}_1$ matrisi

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

biçiminde olacaktır. Bu matrisin Frobenius boyu için aşağıdaki eşitlik yazılabilir

$$\|\boldsymbol{\theta}_1^{(2)}\|_F^2 = \frac{1}{9} (3\|\mathbf{A}_1\|_F^2 + 2\|\mathbf{A}_1\|_F^2 + \|\mathbf{A}_0\|_F^2). \quad (\text{C.15})$$

(C.3) sırasayılı bağıntıda m yerine 2 yazılacak olunursa

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\theta}_1^{(2)}\|_F^2 &= \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^2 (i+1) \|\mathbf{A}_i\|_F^2 \right) \\ &= \frac{1}{9} (\|\mathbf{A}_1\|_F^2 + 2\|\mathbf{A}_1\|_F^2 + 3\|\mathbf{A}_2\|_F^2)\end{aligned}\quad (\text{C.16})$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliğin (C.15) ile aynı olduğu görülür.

Bir adım daha ilerlemek için

$$\|\mathbf{A}_i\|_F^2 < \frac{B^2}{\rho^{2i}} \quad (\text{C.17})$$

eşitsizliğini (C.10) bağıntısında yerine koyalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\theta}_1\|_F^2 &= \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{i=0}^m (i+1) \|\mathbf{A}_i\|_F^2 \\ &< \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{i=0}^m (i+1) \frac{B^2}{\rho^{2i}} \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \sum_{i=1}^{m+1} i (\rho^{-2})^{i-1} \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \sum_{i=1}^M i t^{i-1}\end{aligned}\quad (\text{C.18})$$

eşitsizliği elde edilir. Bu bağıntılarda $\rho^{-2} \equiv t$ ve $M = m + 1$ olarak seçilmiştir. Bu eşitsizlikte son elde edilen toplam açık bir biçimde

$$C = \sum_{i=1}^M i t^{i-1} = 1 + 2t + 3t^2 + \dots + (M-2)t^{M-3} + (M-1)t^{M-2} + Mt^{M-1} \quad (\text{C.19})$$

biçiminde yazılabilir. Bu toplamı hesaplamak için öncelikle

$$A = \sum_{i=1}^M t^{i-1} = 1 + t + t^2 + \dots + t^{M-2} + t^{M-1} \quad (\text{C.20})$$

toplamını ele alalım. Bu toplamın değeri

$$A = \frac{1-t^M}{1-t} \quad (\text{C.21})$$

bağıntısıyla hesaplanır [53, 73]. (C.19) ile verilen toplamdan son terim çıkarıldığında kalan terimlerin toplamı (C.20) toplamının türevine eşittir

$$A' = 1 + 2t + 3t^2 + \dots + (M-2)t^{M-3} + (M-1)t^{M-2}. \quad (\text{C.22})$$

(C.21) ile verilen genel bağıntının türevi alınır

$$A' = \frac{-Mt^{M-1}(1-t) - (-1)(1-t^M)}{(1-t)^2}, \quad (\text{C.23})$$

ve bu türev (C.19) toplamında yerine konulursa

$$C = \frac{-Mt^{M-1}(1-t) - (-1)(1-t^M)}{(1-t)^2} + Mt^{M-1} \quad (\text{C.24})$$

eşitliği elde edilir. Bu bağıntı (C.18) eşitsizliğinde yerine konulur ve aşağıda verilen düzenlemeler yalırsa

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\theta}_1\|_F^2 &< \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{-Mt^{M-1}(1-t) + (1-t^M)}{(1-t)^2} + Mt^{M-1} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{-(m+1)\rho^{-2m}(1-\rho^{(-2)}) + (1-\rho^{-2m-2})}{(1-\rho^{(-2)})^2} + (m+1)\rho^{-2m} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{\frac{-(m+1)}{\rho^{2m}}(\frac{\rho^2-1}{\rho^2}) + (\frac{\rho^{2m+2}-1}{\rho^{2m+2}})}{(\frac{\rho^2-1}{\rho^2})^2} + (m+1)\frac{1}{\rho^{2m}} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{[-(m+1)(\rho^2-1) + (\rho^{2m+2}-1)]\rho^4 + (\rho^2-1)^2\rho^2(m+1)}{(\rho^2-1)^2\rho^2\rho^{2m}} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{\rho^2(\rho^2-1)(m+1)}{\rho^2\rho^{2m}(\rho^2-1)^2}(-\rho^2 + \rho^2 - 1) + \frac{\rho^4(\rho^{2m+2}-1)}{\rho^2(\rho^2-1)^2\rho^{2m}} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{-(m+1)}{\rho^{2m}(\rho^2-1)} + \frac{\rho^2(\rho^{2m+2}-1)}{(\rho^2-1)^2\rho^{2m}} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{(1-\rho^2)(m+1)}{\rho^{2m}(\rho^2-1)^2} + \frac{\rho^2(\rho^{2m+2}-1)}{\rho^{2m}(\rho^2-1)^2} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{(m+1) - (m+1)\rho^2}{\rho^{2m}(\rho^2-1)^2} + \frac{(\rho^{m+2}-\rho)(\rho^{m+2}+\rho)}{(\rho^{m+2}-\rho^m)^2} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{m+1 - m\rho^2 - \rho^2}{\rho^{2m}(\rho^2-1)^2} + \frac{\rho^{2m+4} - \rho^2}{(\rho^m(\rho^2-1))^2} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{m+1 - m\rho^2 - \rho^2 + \rho^{2m}\rho^4 - \rho^2}{\rho^{2m}(\rho^2-1)^2} \right] \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \left[\frac{(m+1) - (m+2)\rho^2}{\rho^{2m}(\rho^2-1)^2} + \frac{\rho^4}{(\rho^2-1)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

eşitsizliği oluşur.

3. $\boldsymbol{\theta}_0$ Matrisinin Köşegen Dışı Öğelerinin Boyu:

$\boldsymbol{\theta}_0$ matrisinin köşegen dışı öğelerinin boyu

$$\|\boldsymbol{\theta}_{0,O}\|_F^2 = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{i=1}^m i \|\mathbf{A}_{m-i}\|_F^2 \quad (\text{C.26})$$

bağıntısı ile verilmektedir. (C.17) eşitsizliği bu bağıntıda yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\theta}_{0,O}\|_F^2 &< \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{i=1}^m i \frac{B^2}{\rho^{2m-2i}} \\ &= \frac{B^2}{(m+1)^2} \sum_{i=1}^m i (\rho^2)^i (\rho^2)^{-m} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

eşitsizliği elde edilir. $\rho^2 \equiv t$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\theta}_{0,0}\|_F^2 &< \frac{B^2}{(m+1)^2} \sum_{i=1}^m i t^{i-m} \\
&= \frac{B^2}{(m+1)^2 t^{m-1}} \sum_{i=1}^m i t^{i-1} \\
&= \frac{B^2}{(m+1)^2 \rho^{2m-2}} \left[\frac{-m\rho^{2m-2}(1-\rho^2) + (1-\rho^{2m})}{(1-\rho^2)^2} + m\rho^{2m-2} \right] \\
&= \frac{B^2}{(m+1)^2 \rho^{2m-2}} \left[\frac{\rho^{2m}(-m\rho^{-2} + m - 1 + m\rho^{-2} - 2m + m\rho^2) + 1}{(1-\rho^2)^2} \right] \\
&= \frac{B^2}{(m+1)^2 (\rho^2 - 1)^2} \left[\frac{1}{\rho^{2m-2} + \rho^2(m\rho^2 - m - 1)} \right] \tag{C.28}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Sevda ÜSKÜPLÜ ALTINBAŞAK

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul, 1980

Lisans Üniversitesi: Y.T.Ü, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (1997-2001)

Yüksek Lisans Üniversitesi: İ.T.Ü, Bilişim Enstitüsü, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı, (2001-2004)

Yayın Listesi:

- **Altınbaşak S. Ü.**, Demiralp M., 2010. Solutions To Linear Matrix Ordinary Differential Equations Via Minimal, Regular, And Excessive Space Extension Based Universalization: Convergence and Error Estimates For Truncation Approximants In The Homogeneous Case with Premultiplying Polynomial Coefficient Matrix, J. Math. Chem., Vol. 48(2), p.266-286.
- **Altınbaşak S. Ü.**, Demiralp M., 2010. Solutions To Linear Matrix Ordinary Differential Equations Via Minimal, Regular, And Excessive Space Extension Based Universalization: Perturbative Matrix Splines, Convergence And Error Estimate Issues For Polynomial Coefficients In The Homogeneous Case, J. Math. Chem., Vol. 48(2), p.253-265.
- **Üsküplü S.**, Demiralp M., 2009. Truncation Approximations For Two Term Recursive Universal Form Of Matrix Ordinary Differential Equations, WSEAS Transactions on Mathematics, Vol. 8(5), p.219-223.
- **Üsküplü S.**, Demiralp M., 2009. Basic Components In Fluctuation Free Integration of Highly Oscillatory Functions, International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering, Rhodes, Greece.
- **Üsküplü S.**, Demiralp M., 2008. Univariate Integration Via Space Extension Based No Fluctuation Approximation, American Institute of Physics Conf. Proc., Numerical Analysis and Applied Mathematics, p. 566-569.
- Demiralp M., **Üsküplü S.**, 2005. Matrix Algebraic Infinite Product Representation for Generalized Hypergeometric Functions of Type ${}_{p+1}F_p$, Appl. Num. Anal. Comp. Math. 2, No.2 212-226.
- **Üsküplü S.**, Demiralp M. 2008. Conversion of PDEs to Certain Universal and Easily Handlable Forms Via Space Extension, International Conference on Multivariate Analysis and Its Application in Science and Engineering (MAASE'08), 27 -30 May 2008, İstanbul, Türkiye.

- **Üsküplü S.**, Demiralp M., 2007. Conversion of Matrix ODEs to Certain Universal and Easily Handlable Forms Via Space Extension, Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Cairo, Egypt.
- **Üsküplü S.**, Demiralp M., 2007. Transformation of Ordinary Differential Equations into Okubo Universal Form with Space Extension and Its Truncating Approximations, International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2007), Corfu, Greece.
- **Üsküplü S.**, Kanal M. E., Demiralp M., 2005. Extension of A Finite Regular Data Given To Determine A Univariate Function By Using Forward and Backward Differences, International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2005), Rhodes, Greece.
- Kanal M. E., **Üsküplü S.**, Demiralp M., 2005. Precision Increased Truncated Derivative Formulae in Terms of Forward and Backward Difference Operators, International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2005), Rhodes, Greece.
- **Üsküplü S.**, Demiralp M., 2004. A Factorization Method for ${}_{p+1}F_p$ Type Hypergeometric Function Evaluations, International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, Chalkis, Greece.
- **Üsküplü S.**, Saygın H., Ergintav S., 2003. Three Dimensional Simulation of Elastic Wave Propagation in The Izmit Bay, Applied Simulation and Modelling Conference, Marbella, Spain.
- Taşkın G., **Üsküplü S.**, Saygın H., Ergintav S., 2003. Optimization of GPS Observation Strategy for Improvement of Tectonic Measurements, Applied Simulation and Modelling Conference, Marbella, Spain.

