İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

ÇOKYÖNLÜ DİZİLERİN YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM VE/VEYA AĞIRLIKLI İNDİRGEYİMCİL AYRIŞTIRIM TABANLI ANLATIMLARI VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Letisya DİVANYAN

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

HAZİRAN 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

ÇOKYÖNLÜ DİZİLERİN YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM VE/VEYA AĞIRLIKLI İNDİRGEYİMCİL AYRIŞTIRIM TABANLI ANLATIMLARI VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Letisya DİVANYAN
(702091016)

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. METİN DEMİRALP

HAZİRAN 2012

İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702091016 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Letisya DİVANYAN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"ÇOKYÖNLÜ DİZİLERİN YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM VE/VEYA AĞIRLIKLI İNDİRGEYİMCİL AYRIŞTIRIM TABANLI ANLATIMLARI VE UYGULAMALARI"** başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. METİN DEMİRALP** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. N.Abdülbaki BAYKARA** ....
Marmara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. F. Aylin KONUKLAR ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

....

Teslim Tarihi : **04 Mayıs 2012**
Savunma Tarihi : **07 Haziran 2012**

Aileme,

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimimde benim bu noktaya gelebilmemi sağlayan, bilgi birikimi ve görüşleri benim için çok önemli olan, desteklerini hiç esirgemeyen, bilime olan sevgimi bir adım daha arttıran değerli hocam, Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gerek tez çalışmalarımda, gerek diğer bildiri çalışmalarımda bana her zaman destek olan, yorum ve yönlendirimlerini esirgemeyen değerli hocam, Prof. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Değerli hocam Metin Demiralp'in kurmuş olduğu, bilgi, birikim, yorum, yönlendirim ve destek topluluğu olan BEBBYT'de geçirdiğim değerli zamanlarda bilgi, birikim ve aydınlık anlamında kendimi geliştirdiğim bu topluluğun üyelerine teşekkür ederim.

BEBBYT üyelerinden Ercan Gürvit, Yrd.Doç.Dr. Alper Tunga, Ayla Okan, Zeynep Gündoğar'a, gerek fikir danışıklıkları, gerek destekleri, gerek bilgi paylaşımlarından ötürü teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresince benden dostluklarını, bilgilerini, desteklerini esirgemeyen, mutluluklarımızı ve hüzünlerimizi beraber geçirdiğimiz Birkan Tunç, Şenol Pişkin, Fatih Yetkin, Yasemin Dönmezer, Dr.Burcu Tunga, Evrim Korkmaz, Süha Tuna, Volkan Dağlı ve Evangelos Sariyanidi'ye teşekkür ederim.

Beni dünyaya getiren, benim bu noktaya gelmemi ve hayatımdaki her anın kıymetini bilmemi sağlayan, maddi ve manevi destekçilerim, koruyucu meleklerim, biricik Annem İlda ve biricik Babam Murat Divanyan'a çok teşekkür ederim. Ailemin en değerli bir diğer üyesi olan benim hem oyun arkadaşım hem kahramanım olan sevgili ağabeyim Erol Divanyan'a teşekkür ederim.

Haziran 2012 — Letisya DİVANYAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

YBMG	**:**	Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
HDMR	**:**	High Dimensional Model Representation
ÇYÇG	**:**	Çokdeğişkenliliği Yükseltilmış Çarpımsal Gösterilim
EMPR	**:**	Enhanced Multivariance Product Representation
LYBMG	**:**	Logaritmik Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
MYBMG	**:**	Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
ÇDİA	**:**	Çokyönlü Dizilerin İndirgeyimcil Ayrıştırımı
RDMA	**:**	Reductive Decomposition of Multivariate Array
AİÇDA	**:**	Ağırlıklı İndirgeyimcil Çokludoğrusal Dizi Ayrıştırımı
WRDMA	**:**	Weighted Reductive Decomposition of Multivariate Array
YBMGKA	**:**	Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminin Katlıyöney Ayrıştırımı
HDMRFD	**:**	High Dimesional Model Representation Folvec Decomposition
DDTBDKYBMG	**:**	Dizi Düzleştirim Tabanlı Bir Değişkenlide Kesmeli YBMG
DYBMG	**:**	Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SİMGE DİZELGESİ (LİSTESİ)

$\widehat{I}$	:	Birim Operator
$\mathscr{H}$	:	Sürekli ve karesi tümlevlenebilir işlevlerin örttüğü Hilbert uzayı
f_0	:	YBMG'nin değişmez terimi
s_k	:	k. basamaktan YBMG yaklaştıranı
λ_k	:	k. basamaktan LYBMG yaklaştıranı
ν_0	:	0. basamaktan LYBMG nitelik ölçeni
σ_0	:	birinci basamaktan değişmezlik ölçeni
σ_k	:	k. basamaktan toplamsallık ölçeni
μ_k	:	k. basamaktan LYBMG nitelik ölçeni
W	:	Ağırlık işlevi
$\mathbf{a}$	:	Bir yöney
$\mathbf{f}$	:	Katlıyöney
$\mathbf{A}$	:	Bir dizey
$\mathbf{A}^{(k,\ell)}$	:	Katlıdizey
δ	:	Kronecker Delta simgesi
$\mathbf{U}_{i,j}$	:	Taban takımı
σ	:	Ölçekleyici(ing: scalar)
$P^{(n)}$	:	n boyutlu altuzaya izdüşüren operatör
$\mathbf{X}$	:	x bağımsız değişkenin matris gösterilimi
$f_{i_1,i_2,i_3;}$	:	Üç altsırasayılı Katlıyöney
$f^{(0,e)}_{i_1,i_2,i_3}$	:	Üçyönlü Katlıyöney
β_0	:	Dikgenlik Tabanlı Baskınlık Ölçeni

ÇOKYÖNLÜ DİZİLERİN YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM VE/VEYA AĞIRLIKLI İNDİRGEYİMCİL AYRIŞTIRIM TABANLI ANLATIMLARI VE UYGULAMALARI

ÖZET

Çokyönlü Dizilerin Yüksek Boyutlu Model Gösterilim ve/veya Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım Tabanlı Anlatımları ve Uygulamaları, başlığı altında Üçyönlü Çokludoğrusal Diziler ile çalışılmıştır.

Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG), Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG)'nin bir gelişmiş halidir, ÇYÇG'nin YBMG'den tek farkı ise belirli bir destek işlevi kullanmasıdır. Verilen bir çokdeğişkenli işlev için ÇYÇG'nin bileşenleri belirlenmek istenirse bu işlem sadece destek işlevleri verildiğinde başarılabilir. ÇYÇG bileşenleri belirlenirken, ÇYÇG bileşenlerinin kesimsel toplamı, (ing: truncated sum) verilen çokdeğişkenli işleve, kesim düzeyi arttırıldıkça, adım adım yaklaşmaktadır. Fakat bazı durumlarda bu yöntem de yeterli gelmeyebilmektedir, yani ÇYÇG bileşenlerinin az sayıda terim içeren kesimsel toplamları, sonlu sayıda olan tüm bileşenlerin toplamı onu verecek olmakla birlikte, çokdeğişkenli işleve yeteri kadar yaklaşamayabilmektedir. Diğer bir deyişle, yavaş yakınsama sözkonusu olabilmektedir. Bu durumda Demiralp'ler tarafından geliştirilen yöntem olan Çokyönlü Dizilerin İndirgeyimcil Ayrıştırımı kullanılmaktadır. Bu yöntem birbirinden bağımsız verilerin ayrıştırımını gerçekleştirmek amaçlıdır.

Çokyönlü Dizilerin İndirgeyimcil Ayrıştırımı (ÇDİA) özyineli bir düzeni adım adım N'den $(N-1)$'e kadar birer birer azalta azalta ilerler. Her bir yaklaşımda bir önce ürettiği çokyönlü diziyi kullanır. Öklid uzaklığına bakarak da çokyönlü dizinin başta verilen çokyönlü diziye olan benzerliğini ölçer. Ancak, asıl önemli olan olgu, bu adım adım ilerlemeyle erişilecek sonuca cebirsel özdeğer sorunu çözerek bir atakta ulaşabilmenin de olanaklı olmasıdır. Bu çalışmada Çokyönlü Dizilerin İndirgeyimcil Ayrıştırımına ağırlık çarpanı kullanımı da eklenmektedir, bu yeni yapıya Ağırlıklı İndirgeyimcil Çokludoğrusal Dizi Ayrıştırımı (AİÇDA) denir. Bu genişletimle, istenilen noktaya istenildiği kadar önem verilerek işlemler yapılacaktır, her nokta eş değer önem taşımayacaktır. Tezin sonunda verilen sonuçlardan da anlaşılacağı üzere AİÇDA'nın çarpımsal türdeki dizilerde olabildiğince az toplamsal terimle sağlanabileceği sonucuna varılmıştır.

Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi'ne yeni bir yaklaşım olarak, bilim bireylerince genel bilinen dalı "tansör" olan ama çalışmada "katlıyöney" olarak kullanılacak olan birden çok altsırasayıya sahip diziler ile birlikte çalışılacaktır ve yeni adı Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi'nin Katlıyöney Ayrıştırımı olacaktır. Ayrıca bu yöntemin anlatımı sırasında çokyönlü diziler üzerinde ayrıntılı bir anlatım sağlanmıştır. Burada YBMG'den farklı olarak üç boyutlu altsırasayılı dizilerin katlıyöneylere sırası ile sabit terim, bir altsırasayılı, iki altsırasayılı ve daha fazlası olarak ayrıştırımı sağlanır.

AİÇDA’nin aksine YBMGKA en etkin durumunu değişmez ya da arı toplamsal nitelikli çokludoğrusal dizilerde göstermektedir.

WEIGHTED REDUCTIVE AND HDMR BASED DECOMPOSITIONS OF MULTIWAY ARRAYS AND IT'S APPLICATION

SUMMARY

In this thesis Weighted Reductive and High Dimentional Model Representation Based Decomposition of Multiway Arrays and It's Application's is worked with Threeway Multilinear Array. Enhanced Multivariance Product Representation (EMPR) is an adaptation of the commonly known methodology High Dimensional Model Representation (HDMR) in a way that it tries to improve the representative capability of the High Dimensional Model Representation (HDMR) against functions consisting of multiplications over variables.

High Dimensional Model Representation (HDMR) as a general set of quantitative model assessment and analysis tools for capturing high-dimensional input– output system behavior has been introduced recently.

High Dimensional Model Representation (HDMR) is based on a divide–and–conquer idea. HDMR which was first proposed fifteen years ago is still under development for the construction of its new varieties. It is a finite term representation of a multivariate function in terms of less variate functions.

In this model it was brought the weight function concept to the HDMR definition. The weight functions to be used in HDMR ought to be a product of univariate weight functions each of which depends on a different independent variable of HDMR.

There have been great developments in the theory of multivariate functions especially in last two decades. High Dimensional Model Representation (HDMR) and its extensions occupy an important place amongst these. Although there have been abundant contributions from the Rabitz and Demiralp groups the initial concept stems from Sobol. Nowadays, the number of the groups studying HDMR and its applications is increasing and the number of published works is gaining momentum.

In the beginning of the new century there has been an increasing tendency to use three and four index entities. These are encountered in signal processing related issues. For example, pictures can be represented by a rectangular array of pixels and can be treated by using the methods of ordinary linear algebra. Whereas an animation or a movie can be considered as the sequence of frames, each of which is represented by matrices of same type, and therefore, their representations can be realized by using three index arrays where one index specifies the frame while the others define the pixel location in the specified frame.

Matrices are rectangular entities, hence they are in an orthogonal geometry. In explicit mathematical language, none of their indices are limited by the other. The domains are limited by some values which do not depend on indices. We are going to assume the

same thing for the multilinear arrays. A vector can be easily decomposed to some other vectors with much simpler structures. The same thing is also suitable for matrices.

It is always possible to convert a vector to an array with more than one indices by reindexing the vector elements. We can consider a vector of even number of elements. If we take the upper half of this vector as the first column of a two column matrix then the second column of the same matrix can be taken as lower half of the same vector. So a vector, which is a one index array, has been converted to a matrix, which is a two index array. If the original vector's number of elements were multiple of four then the uppermost and second uppermost quarters of the vector can be used to construct a two column matrix while the second bottommost and bottommost quarters of the same vector is used to construct another two column matrix. These two matrices can be considered as the subarrays of a three index array. Thus, for this case, a vector, which is a one index array, becomes a three index array. The actions to convert a vector to a more than one index array can be called "folding". In this sense, a multiindex array can be considered as a folded vector. The reverse action to folding procedure can be called "unfolding". It is always possible to convert a multiindex array to a vector by using an appropriate unfolding operation.

The HDMR framework is customized to be able to work with the multiway arrays. Instead of the commonly used term "tensor", we prefer to use a new term "folvec" to indicate the multiway vectors. The resulting method is called High Dimensional Model Representation Folvec Decomposition (HDMRFD). Similarly, a multiway matrix is considered as a "folmat". The text includes detailed explanations for these new terms along with their applications.

In this new approach, three-way arrays with three indices are decomposed into a constant term, one-way arrays, two-way arrays, and so on. Unlike Weighted Reductive Decomposition of Multivariate Array (WRDMA), High Dimensional Model Representation Folvec Decomposition (HDMRFD) achieves its best performance with arrays in additive forms.

Enhanced Multivariance Product Representation (EMPR) is an improved version of the commonly known methodology High Dimensional Model Representation (HDMR). The main improvement over the HDMR framework is that EMPR utilizes support functions to produce a multiplicative representation. For a multivariate function, the components of EMPR can be determined given those support functions. The components of the EMPR representation are summed in an iterative manner to provide a convergence to the given function. Even such an improved approach can fail depending on the structure of the function. In such case, a more sophisticated method like Reductive Decomposition of Multivariate Arrays (RDMA) (Demiralps) can be employed to get better approximations. RDMA performs the decomposition under the assumption of independent variables.

As an another improvement, RDMA progresses as recursively decreasing the dimension of the input array step by step starting from the initial size N. At every step, the previously produced array is used as the input. The Euclid distance is utilized at every step to measure the similarity to the initial array. The distance function or metric can be constructed with respect to the needs, the general tendency is to use the Euclidean distance (not itself but preferably its square for algebraic simplicity). Since the leading term is the support functions' product multiplied by the first component of EMPR, this minimization problem produces nonlinear algebraic set of equations if the number of the support functions is greater than 2 when the EMPR is discredited over a rectangular hyper prismatic grid. This problem is closely related to the multilinear singular value decomposition and the solution is quite hard unless the multilinear array unfolding and folding procedures are used. On the other hand, a decomposition method developed and named "Reductive Multilinear Array Decomposition Method" can be used for the same minimization and linear algebraic eigenpair search schemes can be successfully applied towards this end. With RDMA, a weighting scheme can be utilized to adjust the importance of the individual points in the input space. In this weighted mode, the method is called Weighted Reductive Decomposition of Multivariate Array (WRDMA).

Weighted Reductive Array Decomposition can be used in various areas. For example, the animations or movies are three index arrays. Their decomposition in this way can be used for compressing of the related data files. To this end, a few most dominant term of the decomposition can be used to approximately represent the original array under consideration. The eigenvalue distribution and the truncation location determine the efficiency of the approximation. This is somehow one variety of principal component analysis. It can be used not only to compress the files but also to investigate the certain features of the model giving the considered array.

The achieved experimental results illustrate the importance of this weighting procedure since the number of terms in the final summation decreases critically compared to the previous methods, especially for the arrays that are in a multiplicative form.

1. GİRİŞ

Uzayda, yeryüzünde, gökyüzünde, yaşamın olduğu veya olmadığı her alanda, sanal veya yapay ortamda yani etrafımızdaki her yerde pek çok problemler, koşullar veya yasalar veya rastsal durumlar bulunmaktadır. Bunları ise matematiksel olarak tanımlayabilmek için birbirine bağlı veya birbirinden bağımsız değişkenlere gereksinim duyulmaktadır. En basit haliyle, bir resmin tanımının yapılabilmesi için matematiksel olarak iki boyuta x ve y ye gereksinim vardır. Yatay ve dikey iki yönden oluşmaktadır. Bu iki boyut dışında kimyacılar, fizikçiler, biyologlar daha doğru anlatmak gerekirse bilim adamları veya mühendislerin çalışma alanlarına göre etrafta bulunan rüzgar, basınç, sıcaklık, nem, ... ve benzeri gibi pek çok koşulu içeren değişkenlere bağlı olarak boyut artımı yapmaları gerekebilir. Dolayısıyla çalışma alanlarına göre çoklu değişkenler ile çalışılmaktadır. Bu ise matematikçiler için çok değişkenli işlevler demektir.

Matematikçiler için çok değişkenli işlevler ile hesap yapılabiliyor gibi gözükse de burada bir takım sorunlar bulunmaktadır. Çok değişkenli işlevler isminden de anlaşılacağı gibi çok sayıda birbirinden bağımsız değişken bulunmaktadır. Burada sayı gün gelir 10, gün gelir 1000 veya gün gelir hesap yapmanın imkasız olabilecği düzeyde sayıdan oluşan değişkenlere sahip olabilir. Bu gibi büyük yapılar ile uğraşabilmek için günümüz teknolojisi çok gelişmiş olsa bile bunun için yeterli değildir. Burada büyük yapıların hesaplanabilmesi için çok fazla süper bilgisayarlara ve bu bilgisayarlarda bellek ve hız faktörlerinin en iyi durumda olması gerekir. Tezin asıl amacı çok yüksek boyutlu yapıların daha basit hallere çevirilmesini sağlamaktır. Bunun için iki çalışma yapılmıştır.

Birincisi, Çokdeğişkenliğiliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim(ÇYÇG)'nin artık çok yönlü dizilerde yeterli cevabı verememesi durumunda Demiralp'ler tarafından geliştirilen bir yöntem olan Çok Yönlü Dizilerin İndirgeyimcil Ayrıştırımı (ÇYDİA) dır. Bu yöntem ile çokyönlü dizilerin ardışık olarak, başta verilen çokyönlü dizi ile ayrıştırım arasındaki Öklid uzaklığı sıfır veya sıfıra yakın bir değer olana kadar devam etmesi ile oluşur. Altında doğrusal cebir yapısı bulunmaktadır. Bu çalışmada ÇYDİA' ya ek olarak ağırlık işlevi katılmıştır. Katılan ağırlık işlevi sayesinde verideki noktalara istenilen önem verilebilir.

İkinci çalışma ise, Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminin Katlıyöney Ayrıştırımıdır. Bu yapı sayesinde üç boyutlu dizinler üzerinde çalışmak kolaylaşmış ve katlıyöneylerle çalışma sağlanmıştır. Fakat ne kadar iyi olursa olsun gene sonunda mutlaka bu işlerde maliyet çok artmaktadır. Bu gibi zorlu yollar ile uğraşmaktansa matematikçiler çokdeğişkenli işlevleri basit yapılara ayrıştırabilmeye çalışmışlardır. Çokdeğişkenli işlevleri ayrıştırma tekniklerinin tarihçesi ise şu şekildedir. 1957 yılında ilk olarak A.N.Kolmogorov "On the Representation of Continous Functions of Many Variables by Superposition of One Variable and Addition" [1] bu tür yapılardan bahsetmiştir, bu yapının ingilizce çevirisi ise 1963 yılında yayınlanmıştır. Bu makalede sürekli çokdeğişkenli işlevi tekdeğişkenli sürekli işlevlerın toplamı olarak yazmıştır. I.M.Sobol 1993 yılında "Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models" [2] Kolmogorov'un yazısından, bu yöntemin duyarlılık çözümlemesine uyarlamıştır ve buradan da ilk defa bu sene Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG) modeli bilimsel yazıma girmiştir. Dolayısıyla bu kavram ilk defa Sobol tarafından kullanılmıştır. Bu yazıda Sobol, $[0,1]$ aralığında tanımlı çokdeğişkenli bir işlevin diklik koşulu ve birim ağırlığı altında daha az değişkenli işlevlerin toplamı olarak yazılabileceğini yani ayrıştırımın yapılabileceğinden bahsetmiştir. 1998 yılında Princeton Üniversitesi'nde H.Rabitz [3–19] ve grubu Sobol'un çalışmalarındaki ağırlık olgusunu geliştirerek daha genel bir ağırlık işlevi kullanılmasını sağlamıştır. Bununla beraber H.Rabitz ve ekibi farklı mühendislik problemleri için farklı YBMG ayrıştırım yöntemleri geliştirmiştir.

1.1 Tezin Amacı

Çokyönlü Dizilerin YBMG Tabanlı ve/veya Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırımı ve Uygulamaları başlığı altında çalışılmaya başlanan tez çalışması içerisinde, başlığından da anlaşılacağı gibi iki konu üzerinde çalışılmaktadır. Bu konular sırası ile Ağırlıklı

İndirgeyimcil Çokludoğrusal Dizi Ayrıştırımı ve YBMG Katlıyöney Ayrıştırımıdır. Bu çalışmalarda üç yönlü dizeyler ile çalışılmıştır.

Birinci olarak Ağırlıklı İndirgeyimcil Çokludoğrusal Dizi Ayrıştırımından çalışma yapılırken çokyönlü indirgeyimcil ayrıştırımlar temel alınarak çalışılmıştır. Buraya üçyönlü dizilere bir de üçyönlü ağırlık işlevi konmuştur. Bu sayede, üç yönlü dizeylerde istenilen yöne veya yönlere önem verilmiştir. Ayrıca ÇDİA'da olduğu gibi yarı ve tam çarpımsal yapılardan çok verimli sonuçlar alınacağı öngörülmektedir.

İkinci olarak, bilim adamları tarafından "tansör" olarak bilinen fakat tez çalışmasında "katlıyöney" olarak isimlendirilecek olan yapının YBMG üzerinde ayrıştırımına bakılacaktır. Burada ise, YBMG ayrıştırımı toplamsal modellerde çok daha verimli olduğundan YBMG Katlıyöney Ayrıştırımının da çarpımsal veri yerine toplamsal verilerde çok daha verimli ayrıştırım yapılabileceği öngörülmektedir.

1.2 Literatür Araştırması

Sobol'dan sonra Rabitz'in tek başına veya kendi çalışma grubu ile yapığı çalışmalardan bahsetmek gerekirse, bunların bir kısmı, ANOVA-HDMR [4, 5], CUT-HDMR [9–11], RS-HDMR(Random Sampling HDMR) [12–18] dır. Bu ayrıştırım teknikleri, atmosferik hareketlerde, finansal uygulamalarda, risk analizi araştırmalarında, ekonomik uygulamalarda, bir takım kimyasal uygulamalarda kullanılmıştır. H.Rabitz, M.Demiralp ile beraber 2003 yılında "High Dimensional Model Representation and Its Application Varieties" [20] yayınında hem YBMG'nin genel özelliklerinden hem de diğer YBMG türlerinden bahsetmişlerdir.

Metin Demiralp, kendi bulunduğu üniversitede kendi öğrencilerinden ve farklı üniversitelerde bulunan fakat aynı çalışma alanında çalışmak isteyen öğrenci ve öğretim görevlilerinden oluşan bir çalışma ekibi kurar. Bu topluluğun ismi ise Bilgisayım Bilimi ve Yöntemler Topluluğudur (BEBBYT). Topluluk 2000'li yılların başından beri çalışmalarını sürdürmektedir. Metin Demiralp ve BEBBYT grubu ile geliştirilen pek çok YBMG çeşidi bulunmaktadır. Bunlardan bahsedilmek istenirse; çok değişkenli işlevin yapısının çarpımsal baskın olduğu durumlar için Çarpımsallaştırılmış YBMG [21–23], Logaritmik YBMG [24, 25] ve Çarpımsal

YBMG yöntemlerinin birleşimi ile meydana gelen Melez YBMG [26, 27]. Geliştirilen bu yöntemlerde ağırlık işlevi çarpımsal yapıda olup bu durum çok da gerçekçi değildir. Bu durum için ise Genelleştirilmiş YBMG [28, 29] geliştirilmiştir. Birtakım çok yüksek girdi-çıktı dizelgelerinin mevcut olduğu yapılara karşılık Kesme YBMG [9] ve yöntemin genel hali Çoklu Kesme YBMG [10] yöntemleri geliştirilmiştir. Bunların yanında diğer yöntemler ise, Seçkisiz Örneklemeli YBMG [13, 14], Dönüşümsel YBMG [30, 31], Bütünleştirilmiş YBMG [32] dir. Biraz önce bahsedilen, geliştirilen yöntemlerin kullanıldığı alanlardan bahsetmek gerekirse, çokboyutlu veri bölüntülenmesinde ve modellenmesi, Schrödinger denkleminin çeşitli problemler için çözülmesi, optimal kontrol problemleri, özdeğer-özvektör problem modellenmesi, Laplace dönüşüm uygulamaları, üstel matris hesaplamaları, sayısal integrasyon hesaplamaları, parametrik duyarlılık analizi problemleri, evrim operatörü uygulamaları, diferansiyel denklemlerdir.

Tezde bahsedilen bir diğer yöntem Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG) [33–35] dir. Bu yöntem YBMG tabanlı yeni bir yöntemdir, Demiralp tarafından yaratılmıştır. ÇYÇG, birbirine dik ve bağımsız, değişken sayısı giderek artan daha basit yapılı işlevlerden oluşmaktadır. ÇYÇG, kesin tek değişkenli destek işlevi sayesinde YBMG'den daha çok esnektir. Dolayısıyla, ÇYÇG, YBMG'nin özel bir formudur.

ÇYÇG'de baskın terimin baskınlığını arttırmak için birinci terimin kesimi etkilidir. Bunun yapılabilmesi için ise ÇYÇG'nin uygulandığı işlev ile ÇYÇG'nin baskın terimi arasındaki uzaklık azaltılmalıdır. Bu uzaklık Öklid uzaklığı ile ölçülür. Baskın terimi ÇYÇG'nin ilk bileşeni ile çarpılır destek işlev bileşenleri olduğundan ÇYÇG dikdörtgen bir hiperprizmatik ızgara üzerinde ayrıklaştırıldığı zaman destek işlevleri sayısı 2'den büyük olur, bu sorunun en aza indirilmesi doğrusal olmayan denklemi, üretir cebirsel seti üretir. Bu problem tekil değer ayrıştırımı [36] ile ilgilidir. Bunun çözümü, çoklu doğrusal dizileri katlama (ing: folding) ve açma (ing: unfolding) süreçlerin kullanımı dışında zordur.

Ayrıştırım metodları arasında en çok bilinenlerden biri Tekil Değer Ayrıştırımı [37] dır. Tekil Değer ayrıştırımını genel olarak "tansör" [36, 38] terimi olarak kabul edilen fakat, bu çalışmada "katlıyöney" olarak kullanılacak olan yapı mevcuttur. Bunun bir farklı versiyonu olan "katlıdizey" lerdeki uygulamasını BEBBYT topluluğunda gerçekleştirilmiştir, ismi "Weighted Singular Value Decomposition for Folded Matrices" [39] dir. Metin Demiralp tarafından ayrıştırımlar için hem işlevlerde hemde dizilerde kullanılan bir bildiri, "Decomposing Functions, Arrays or Function Arrays" [40], yayınlanmıştır. Buna benzer çokyönlü yapılar ile ilgili bir başka çalışma da, "Elementwise Multiway Array High Dimensional Model Representation (EMAHDMR)" [41] dır. Gruptaki bir diğer çalışma ise ÇYÇG yi çokyönlü bir yapı üzerinde ayrıştırılmış olan "Numerical Studies on the Use of Enhanced Multivariance Product Representation as a Multiway Array Decomposer" [42] dir. Tez çalısmasında buna ek olarak, Demiralp'ler tarafından bulunan ve içinde yoğun bir biçimde çokyönlü yapıları içeren "İndirgemeyimcil Çoklu Doğrusal Dizi Ayrıştırımı metodu" [43–48] kullanılacaktır.

2. TANIMLAMALAR

Günümüzde, uygulamalarda karşılaşılan sorunların matematiksel modellemesinde, çoğu kez, çokdeğişkenli işlevler ile uğraşmak gerekmektedir. Ancak, böyle durumlarda, bilgisayar teknolojisindeki bellek ve hız sınırlandırmalarından dolayı büyük zorluklara katlanılmaktansa, matematiksel işlemleri kolaylaştıracak önlemler almaya önem vermek çok yeğlenen bir yoldur. Bu bölümde, tez içinde bu doğrultuda kullanılacak yöntemlere odaklanacaktır.

Bu çalışmada Yüksek Boyutlu Model Gösterilimin (YBMG) farklı bir türü olan, katlıyöney ayrıştırımından sözedilecektir. Bu yöntemin temel amacı, sözü edilen katlıyöneyin değişmez, bir altsırasayılı, iki, üç ve daha çok altsırasayılı öğelerden oluşan katlıyöneylere ayrıştırılmasıdır.

Çalışmadaki bir diğer yöntem ise ağırlıklı indirgeyimcil çokludoğrusal dizinin ayrıştırımıdır. İndirgemeli çokludoğrusal dizi ayrıştırımı Demiralp'lerce geliştirilmiştir. Tezde yöntem köşegen ağırlık dizeyleri altında sıradan (ing: ordinary) indirgemeli dizi ayrıştırımı yapılarak ayrıştırım gerçekleştirecek biçimde tasarlanmıştır.

Bu bölümde, yukarıda söz edilen yöntemler için gerekli olan YBMG, katlıyöneylere yönelik, Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG) gündeme getirilecektir.

2.1 Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

Yüksek boyutlu model gösterilimi (YBMG), çokdeğişkenli bir $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ işlevinin daha az değişkenli ve birbirine dik işlevlerin sonlu toplamı olarak yazılmasını sağlayan modeldir. Bu yönteme başka bir deyişle "Böl ve Yönet" demek çok doğrudur.

İlk olarak Sobol tarafından yalın hali ile önerilmiştir. Buradaki yalın hal deyimi birimsel hiperküp (birim uzunlukta tüm ayrıtları artı yarı eksenlerle çakışsa ve bir köşesi orijine yerleşik olsa) geometri üzerinde birim sabit ağırlık işlevi altında olmak anlamındadır. YBMG'nin yalın hali geometrinin genel bir dikdörtgensel hiperprizma ve birim olmayabilen ağırlığın kullanıldığı zamanlarda daha esnek hale gelmiştir. Bununla beraber, dikdörtgen hiperprizma ve çarpımsal türden ağırlıklar kullanılarak YBMG'nin önerilmesinde Rabitz ve grup arkadaşları katkıda bulunmştur. Rabitz ve arkadaşları aynı zamanda başka çeşit YBMG'ler de üretmiştir. Demiralp ve kendi grup arkadaşları da yeni YBMG türleri üretmiştir, bu üretimlerinin yanında bu konu için önem gösteren "Toplamsallık Ölçeni"ni sunmuşlardır. Destek işlevlerini de YBMG'ye ekleyerek daha nitelikli sonuçlar elde edilmiştir, işte bu çeşit YBMG'ye de "Çok Değişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG)" denir.

2.1.1 Yalın YBMG yöntemi

Sobol 1993 yılındaki yazısında, verilen analitik $f(x_1,x_2,...,x_N)$ işlevi için çokdeğişkenliliği artarak giden ve

$$f(x_1,...,x_N) = f_0 + \sum_{i_1=1}^{N} f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) + ... + f_{12...N}(x_1,...,x_N) \qquad \textbf{(2.1)}$$

eşitliliğiyle verilen açılımı önermiştir.

Eşitliğin sol tarafında $f(x_1,x_2,...,x_N)$, N bağımsız değişkenli karesi tümlevlenebilen bir işlev; sağ tarafında ise f_0 ile simgelenen sabit işlev sonraki N bileşen, $f_1(x_1),...,f_N(x_N)$ ile simgelenen ve bir tek bağımsız değişkene bağlı olan işlevler daha sonraki $N(N-1)/2$ bileşen, yanlızca iki bağımsız değişkene bağlı olan işlevler, diğerleri ise sayıların binom katsayıları olacak biçimde gittikçe artan bağımsız değişkene bağlı işlevlerin varolduğu varsayılmaktadır.

Bu eşitliğin sağ yanındaki bileşenler sıfırlama koşulu altında belirlenebilir. Sıfırlama koşulu ise, "YBMG bileşenlerinden değişmez terim dışındakilerden herhangi biri bağımsız değişkenlerden biri üzerinde verilen aralıkta ve ağırlık altında integre edilirse sonuç sıfır olmalıdır" anlatımıyla sunulur ve matematik bağıntılandırımı aşağdaki gibidir.

$$\int_{a_{i_s}}^{b_{i_s}} dx_{i_s} W_{i_s}(x_{i_s}) f_{i_1...i_k}(x_{i_1},...,x_{i_k}) = 0, \quad i_1 \le i_s \le i_k \qquad \textbf{(2.2)}$$

Sobol'dan sonra Rabitz de bu çalışmalarda yer almıştır. Sobol'dan farklı olarak ağırlıkları birim ağırlık ve aralığı da $[0,1]$ almaktansa, integral sınırları herhangi iki gerçel sayı olacağı varsayılarak ve integral altına değişik bağımsız değişkenlere bağlı tek değişkenli çarpanların çarpımından oluşan bir ağırlık işlevi sokularak genelleştirimeye gidilmiştir.

YBMG nin tümeyaygın ağırlık işlevi, aşağıda verildiği gibi, çarpımsaldır.

$$W(x_1,\ldots,x_N) \equiv \prod_{i=1}^{N} W_i(x_i), \qquad x_i \in [a_i, b_i], \qquad 1 \le i \le N \tag{2.3}$$

YBMG bileşenlerinin sıfırlanma koşulları, verilen ağırlık işlevi altında ve YBMG geometrisi üzerinde tanımlanan bir iççarpımlı Hilbert uzayı içerisinde birbirlerine dik olması ile aynı anlama gelmektedir. Diklik koşulları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}(f_{i_1\ldots i_k}, f_{i_1\ldots i_l}) \quad &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1,\ldots,x_N)\, f_{i_1\ldots i_k}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}) \\ &\times f_{i_1\ldots i_l}(x_{i_1},\ldots,x_{i_l}), \quad \{i_1,\ldots,i_k\} \not\equiv \{i_1,\ldots i_l\}, \quad 1 \le k,l \le N \end{aligned} \tag{2.4}$$

Hilbert uzayında iççarpım, $u(x_1,\ldots,x_N)$ ve $v(x_1,\ldots,x_N)$ Hilbert uzayından seçilmiş herhangi iki işlev olmak üzere,

$$(u,v) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \ldots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) u(x_1,\ldots,x_N) v(x_1,\ldots,x_N) \tag{2.5}$$

olarak tanımlanabilir. Burada $W_i(x_i)$ $(1 \le i \le N)$ her bir bağımsız değişkene bağlı ağırlık işlevi çarpanlarını simgelemekte olup anlatımların sade olabilmesi için, integrali 1 olarak kabul edilir.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1, \qquad 1 \le i \le N \tag{2.6}$$

Bu YBMG yönteminde ağırlık işlevi üzerinde normalizasyon koşulu olarak yorumlanır.

YBMG terimleri sonlu sayıda olmakla birlikte yüksek sayıda işlemden kaçınmak için gösterilim verimli olduğu bir yerde kesilerek işlemlere devam edilebilir. İşte bu kesme işleminin etkinliğinin de bir ölçümü vardır. YBMG açılımında kesim işlemi değişmez terimden hemen sonra olursa, bu yaklaştırım "Değişmez Yaklaştırım" olarak adlandırılır ve s_0 simgesi ile gösterilir. s_1 ile "Birinci Basamaktan YBMG Yaklaştıranı" gösterilir ve YBMG açılımının birinci terimden hemen sonra kesimine karşılık gelir. Yöntem için genel yaklaştırım tanımı s_k ile verilir ve "k. Basamaktan YBMG Yaklaştıranı" olarak adlandırılır. Bu yaklaştıranlara ait matematiksel anlatımlar aşağıdadır.

$$\begin{aligned}
s_0(x_1,...,x_N) &= f_0 \\
s_1(x_1,...,x_N) &= s_0(x_1,...,x_N) + \sum_{i_1=1}^{N} f_{i_1}(x_{i_1}) \\
s_2(x_1,...,x_N) &= s_0(x_1,...,x_N) + \sum_{i_1=1}^{N} f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) \\
&\vdots \\
s_k(x_1,...,x_N) &= s_{k-1}(x_1,...,x_N) + \sum_{\substack{i_1...i_k=1\\ i_1<\cdots<i_k}}^{N} f_{i_1...i_k}(x_{i_1},...,x_{i_k}), \quad 1 \le k \le N
\end{aligned} \qquad (\mathbf{2.7})$$

YBMG açılımı üzerinde kesme yapıldıktan sonraki asıl sorun, bu yaklaştıranların çok-değişkenli işlevi istenilen duyarlılıkta ne kadar iyi temsil edeceğidir.

Bu yakınsamayı ölçebilmek amacıyla bir takım ölçenler gündeme getirilmiştir. Bu ölçenlerin tanımı için norm tanımlanmalıdır. YBMG bileşenlerinin herhangi biri üzerindeki norm tanımı aşağıda verilmiştir.

$$\|f_{i_1 i_2 ... i_k}\|^2 = (f_{i_1 i_2 ... i_k}, f_{i_1 i_2 ... i_k}) \qquad (\mathbf{2.8})$$

Bu norm tanımı ile (**2.1**) ile verilen denklemin her iki yanında bulunan terimlerin kareleri ilgili ağırlık altında ve ilgili geometri üzerinde tüm $x_1,...,x_N$ bağımsız değişkenlerine göre integre edilirse;

$$\|f\|^2 = \|f_0\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \|f_i\|^2 + \sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{N} \|f_{i_1 i_2}\|^2 + \cdots + \|f_{12...N}\|^2 \qquad (\mathbf{2.9})$$

sonucuna varılır. Eşitliğin sağ tarafında bulunan tüm YBMG bileşenleri birbirine dik olduğundan karışık iççarpım terimleri sıfırlanacaktır. Sonrasında ise her iki taraf $\|f\|^2$ bölündüğünde,

$$1 = \frac{1}{\|f\|^2}\|f_0\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2}\sum_{i=1}^{N} \|f_i\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2}\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{N} \|f_{i_1 i_2}\|^2 + \cdots + \frac{1}{\|f\|^2}\|f_{12...N}\|^2 \qquad (\mathbf{2.10})$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafına kesme yapılırsa aşağıda verilen ölçenler, yani "Toplamsallık Ölçenleri" tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2}\|f_0\|^2 \\
\sigma_1 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2}\sum_{i=1}^{N}\|f_i\|^2+\sigma_0 \\
\sigma_1 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2}\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{N}\|f_{i_1i_2}\|^2+\sigma_1 \\
&\vdots \\
\sigma_N &\equiv \frac{1}{\|f\|^2}\|f_{12\ldots N}\|^2+\sigma_{N-1}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Yukarıda verilen "Toplamsallık Ölçenleri" teker teker yan yana yazıldığında görülecektir ki 0 ile 1 arasında yer alan iyi sıralı bir dizi oluştururlar.

$$0 \le \sigma_0 \le \sigma_1 \cdots \le \sigma_N = 1 \tag{2.12}$$

2.1.2 Çarpımsal YBMG yöntemi

Verilen çokdeğişkenli $f(x_1 \ldots x_N)$ işlevinde çarpımsal yapı baskın ise Çarpımsal YBMG (ÇYBMG) [21–23, 27] kullanılması yapılan yaklaştırımlarda daha iyi sonuç verir.

Çokdeğişkenli işlevinin ÇYBMG açılımı

$$\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_N) = r_0\left[\prod_{i=1}^{N}(1+r_i(x_i))\right]\left[\prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N}\left(1+r_{ij}(x_i,x_j)\right)\right] \\
\times\cdots\times(1+r_{12\ldots N}(x_1,\ldots,x_N))
\end{aligned} \tag{2.13}$$

şeklindedir. Açılımdaki bileşenlerin oluşma şekli. Çokdeğişkenli $f(x_1,\ldots,x_N)$ işlevinin $u_j(x_j)$ tekdeğişkenli işlevlerin çarpımından oluşan tamamen çarpımsal yapıda bir işlev olduğunu düşünelim. İşlev;

$$f(x_1,\ldots,x_N) = \prod_{j=1}^{N} u_j(x_j) \tag{2.14}$$

şeklinde yazılır. Bu işlevin YBMG bileşenleri

$$\overline{u}_i = \int_{a_i}^{b_i} u_i(x_i)dx_i, \qquad 1 \le i \le N \tag{2.15}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \prod_{k=1}^{N} \bar{u}_k \\
f_i(x_i) &= f_0 \left[\frac{u_i(x_i)}{\bar{u}_i} - 1 \right] \\
f_{ij}(x_{ij}) &= f_0 \left[\frac{u_i(x_i)}{\bar{u}_i} - 1 \right] \left[\frac{u_j(x_j)}{\bar{u}_j} - 1 \right]
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.16)}
$$

şeklinde ifade edilebilirler. Bu terimler ile genelleme oluşturulmak istenirse $f(x_1,\ldots,x_N)$'in k değişkenli YBMG bileşeni

$$
f_{i_1\ldots i_k}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}) = \frac{1}{{f_0}^{k-1}} f_{i_1}(x_{i_1}) \cdots f_{i_k}(x_{i_k}) \qquad \textbf{(2.17)}
$$

olur. Ortaya çıkanlar (**2.13**) eşitliğinde yazılırlarsa;

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_N) &= f_0 + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) + \cdots + f_{12\ldots N}(x_1,\ldots,x_N) \\
&= f_0 + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} \frac{f_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2})}{f_0} + \cdots + \frac{f_1(x_1)\cdots f_N(x_N)}{{f_0}^{N-1}} \\
&= f_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{f_i(x_i)}{f_0} + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} \frac{f_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2})}{{f_0}^2} + \cdots + \frac{f_1(x_1)\cdots f_N(x_N)}{{f_0}^{N}} \right] \\
&= f_0 \prod_{i=1}^{N} \left(1 + \frac{f_i(x_i)}{f_0} \right)
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.18)}
$$

ifadesi elde edilir. Bu anlatımda;

$$
\begin{aligned}
r_0 &= f_0 \\
r_i(x_i) &= \frac{f_i(x_i)}{f_0} \\
r_{ij}(x_i,x_j) &= \frac{f_0 f_{ij}(x_i,x_j) - f_i(x_i) f_j(x_j)}{\left(f_0 + f_i(x_i)\right)\left(f_0 + f_j(x_j)\right)}
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.19)}
$$

tanımlamaları yapılırsa yukarıdaki eşitlik,

$$
f(x_1,\ldots,x_N) = r_0 \prod_{i=1}^{N} (1 + r_i(x_i)) \qquad \textbf{(2.20)}
$$

haline gelir. Böylece çokdeğişkenli $f(x_1,\ldots,x_N)$ işlevinin YBMG açılımı çarpımsal hale getirilmiş olur. Tıpkı YBMG'de olduğu gibi Çarpımsal YBMG'de de istenilen mertebeden (kerteden) kesme yapıp bir yaklaştırım elde edilebilir. YBMG'dekine benzer olarak en genel haliyle k. mertebeden ÇYBMG yaklaştırımı için,

$$\begin{aligned} p_0 &= r_0 \\ p_1 &= r_0 \prod_{i=1}^{N} (1 + r_i(x_i)) = p_0 \prod_{i=1}^{N} (1 + r_i(x_i)) \\ &\vdots \\ p_k &= p_{k-1} \left[\prod_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ i_1<\ldots<i_k=1}}^{N} (1 + r_{i_1\ldots i_k}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})) \right] \end{aligned} \quad \mathbf{(2.21)}$$

yazılabilir. YBMG'de olduğu gibi ÇYBMG'de de çarpımsalık ölçenleri tanımlanabilmektedir. Bu ölçenler aşağıdaki gibidir.

$$\pi_k = \frac{||p_k||^2}{||f||^2}; \qquad k = 1,\ldots,N \quad \mathbf{(2.22)}$$

Fakat yaklaştırımın mertebesi arttıkça yeni işlevler açılıma çarpanlar olarak katılacaklarından toplamsallık ölçenleri gibi iyi sıralı bir dizi oluşturmazlar. Bu da ÇYBMG'nin bir eksikliğidir. Bu eksikliğin giderilmesi için Logaritmik YBMG düşüncesi ortaya atılmıştır.

2.1.3 Logaritmik YBMG yöntemi

Logaritmik (evriküstel) Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (LYBMG) [24–26] yöntemi, YBMG'de olan ve eksi olmayan çok boyutlu bir işlevin kendisinin yerine doğal logaritmasının YBMG'ye açılmasıdır. Eksi olmama evrensel bir özellik olmadığından, ama LYBMG için zorunlu bir durum olduğundan verilen işlevden daha basit yapılı bir işlev çıkartılır. Elde edilen sonuç ile açılım yapılır.

$f(x_1,x_2,...,x_N)$ işlecinin minorant işlevi yani, integrasyon aralığında daima $f(x_1,x_2,...,x_N)$ ya eşit veya ondan küçük olan işlevi $\phi(x_1,x_2,...,x_N)$ ile gösterilir. Aşağıda ise LYBMG yöntemininin bağıntısı verilmektedir.

$$ln\left[f(x_1,...,x_N) - \phi(x_1,...,x_N)\right] = \varphi_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \varphi_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} \varphi_{i_1,i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) + \cdots \quad \mathbf{(2.23)}$$

Burada da YBMG nin genel kuralları geçerlidir, bağıntının sağ tarafındaki bileşenler birbirine diktir ve bu bileşenlere LYBMG nin bileşenleri denir.

Burada $\phi\left(x_1,...,x_N\right)$ işlevi, verilen asıl işlev olan $f\left(x_1,...,x_N\right)$ işlevine alttan sınırlayıcı işlev (ing: minorant function) olarak görev yapmaktadır çünkü asıl işlev eksi sayılar ürettiğinde bu sayıların artı olması sağlar.

Dolayısıyla bu işlev referans işlevi (ing: Reference Function) olarak adlandırılabilir. (**2.23**)'de verilen denklem tekrar düzenlenirse Logaritmik YBMG eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f\left(x_1,...,x_N\right)=\phi\left(x_1,...,x_N\right)+\mathrm{e}^{\varphi_0}\left[\prod_{\mathrm{i}_1=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{e}^{\varphi_{\mathrm{i}_1}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{i}_1}\right)}\right]\left[\prod_{\substack{\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2=1\\ \mathrm{i}_1<\mathrm{i}_2}}^{\mathrm{N}}\mathrm{e}^{\varphi_{\mathrm{i}_1,\mathrm{i}_2}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{i}_1},\mathrm{x}_{\mathrm{i}_2}\right)}\right]\times\cdots \qquad (\mathbf{2.24})$$

YBGM de olduğu gibi LYBMG de de kesme yaklaştıranları vardır.

$$\begin{aligned}
\lambda_0(x_1,...,x_N) &= \mathrm{e}^{\varphi_0}\\
\lambda_1(x_1,...,x_N) &= \lambda_0(x_1,...,x_N)\prod_{i_1=1}^{N}\mathrm{e}^{\varphi_{\mathrm{i}_1}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{i}_1}\right)}\\
&\vdots\\
\lambda_k(x_1,...,x_N) &= \lambda_{k-1}(x_1,...,x_N)\prod_{\substack{i_1,...,i_k=1\\ i_1<\cdots<i_k}}^{N}\mathrm{e}^{\varphi_{\mathrm{i}_1,\cdots,\mathrm{i}_k}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{i}_1},\cdots,\mathrm{i}_k\right)} \qquad 1\leq \mathrm{k}\leq \mathrm{N}\ (\mathbf{2.25})
\end{aligned}$$

Burada altsırasayılı λ ifadeleri kesme yaklaştıranlarına karşılık gelmektedir. Verilen çarpımsal yapıdaki işlev, LYBMG yöntemi kullanılarak logaritma işlevi yardımı ile toplamsal bir yapıya kavuşturulduğu için Yalın YBMG yöntemindeki toplamsallık ölçenlerine benzer ölçenler aşağıdaki gibi tanımlanabilir ve bunlar "Nitelik Ölçenleri" olarak adlandırılırlar.

$$\begin{aligned}
\nu_0 &\equiv \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|ln\left(f-\phi\right)\|^2}\\
\nu_1 &\equiv \frac{\|\varphi_0\|^2+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\|\varphi_{i_1}\|^2}{|ln\left(f-\phi\right)\|^2}\\
\nu_2 &\equiv \frac{\|\varphi_0\|^2+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\|\varphi_{i_1}\|^2+\sum\limits_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{N}\|\varphi_{i_1,i_2}\|^2}{\|ln\left(f-\phi\right)\|^2}\\
&\vdots \qquad (\mathbf{2.26})
\end{aligned}$$

Nitelik ölçenleri aşağıdaki gibi düzgün sıralı bir dizi yapısı gösterirler.

$$0\leq\nu_0\leq\nu_1\leq\cdots\leq\nu_N\leq 1 \qquad (\mathbf{2.27})$$

2.1.4 Melez YBMG yöntemi

Verilen çokdeğişkenli işlev bazan tamamen toplamsal bazan da tamamen çarpımsal olmayabilir, karışık olabilir. Böyle durumlarda bu melezlik için YBMG'de yeni bir tür geliştirilmiştir, Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (MYBMG) [26, 27, 49–51]. MYBMG, içinde her türlü yapıya hazır bir yapı olduğundan YBMG, ÇYBMG veya LYBMG'nin tek başına ürettiklerınden daha iyi sonuç verir.

MYBMG, iki yapıdan meydana gelmektedir, birincisi yalın YBMG ile çarpımsal YBMG'nin meydana getirdiği gösterilim, ikincisi ise yalın YBMG ile Logaritmik YBMG meydana getridiği gösterilimdir.

Fakat dönüşüm kullanmanın getirdiği güçlükler sebebiyle bu yöntemden ilki olan yalın YBMG ile çarpımsal YBMG nin meydana getirdiği Melez YBMG yeğlenmektedir. Tezde MYBMG bu biçimde yer alacaktır.

N değişkenli bir $f(x_1,\ldots,x_N)$ işlevinin bir α değiştirgesi yardımıyla MYBMG açılımı;

$$f(x_1,\ldots,x_N) = \alpha f(x_1,\ldots,x_N) + (1-\alpha) f(x_1,\ldots,x_N) \tag{2.28}$$

yapısındadır. Buradaki eşitliğin sağ tarafındaki $f(x_1,\ldots,x_N)$ işlevi yerine toplamsal YBMG açılımı ve ikinci tarafındaki $f(x_1,\ldots,x_N)$ yerine de çarpımsal YBMG açılımı yazılır ise;

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots,x_N) &= \alpha \left[f_0 + \sum_{i_1=1}^{N} f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) + \cdots \right] \\ &+ (1-\alpha) \left[r_0 \left[\prod_{i=1}^{N} (1+r_i(x_i)) \right] \left[\prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \big(1+r_{ij}(x_i,x_j)\big) \right] \cdots \right] \end{aligned} \tag{2.29}$$

eşitliği elde edilir. Bu açılım Melez YBMG açılımıdır. Açılımda yer alan α "Melezlik Değiştirgesi" dir. Bu değiştirge $[0,1]$ arasında değer alır. α Melezlik değişkeni, açılımda YBMG ve ÇYBMG'nin MYBMG'ye olan etkisini göstermektedir.

MYBMG'de de diğer YBMG'lerde olduğu gibi kesme yapılmaktadır, dolayısıyla yaklaştırım kavramı burada da yer alacaktır.

$s_j(x_1,\ldots,x_N)$ ile Yalın YBMG, $p_k(x_1,\ldots,x_N)$ ile ise Çarpımsal YBMG yaklaştımı ifade ettiği kabul edilir. Bu durumda,

$$f(x_1\ldots x_N) \approx h_{jk}(x_1,\ldots,x_N;\alpha) = \alpha s_j(x_1,\ldots,x_N) + (1-\alpha)p_k(x_1,\ldots,x_N) \quad \textbf{(2.30)}$$

yaklaştırımları tanımlanabilir.

MYBMG yönteminde "Melezlik Ölçeni" olarak adalandırılan nitelik ölçeninden sözedilir ise, $(jk.)$ melezlik ölçeni aşağıda verilmektedir.

$$q_{jk} = \frac{\|f - h_{jk}\|^2}{\|f\|^2}, \qquad j,k = 1,\ldots,n \quad \textbf{(2.31)}$$

$$\lambda_{jk} = \alpha\sigma_j + (1-\alpha)\nu_k \quad \textbf{(2.32)}$$

Daha öncede belirtildiği gibi çarpımsallık ölçenleri düzgün sıralı bir dizi oluşturur. Burada α değerinin denklemde aldığı değerin de çok önemli olduğu unutulmamalıdır.

2.1.5 Diğer YBMG çeşitleri

Hayatta karşılaşılan sorunların her zaman belirli bir yapı içersinde olma zorunluluğu bulunmamaktadır. Bu gibi durumlarda bile çeşitlilik artmaktayken YBMG'nin kullanım alanlarına göre de onun çeşitliliğine olan gereksinim de artmaktadır.

Buraya kadar yapılan YBMG anlatımlarında ortak bir özellik olarak ağırlık işlevi sürekli çarpımsal bir durumdaydı. Ağırlığın çarpımsal olmadığı durumlar için "Genelleştirilmiş YBMG (GYBMG)" (ing:Generalized HDMR) [28] olarak isimlendirilen yöntem geliştirilmiştir. Burada sorunu çözme amacı ile ağırlık işlevi yerine onun YBMG açılımı yazılır. Bu anlatımda, M.Demiralp ve M.A. Tunga tarafından yazılan "Data Partitioning via Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR) and Multivariate Interpolative Applications"da sözedilebilir.

Bir başka gereksinim ise; çokyüksek boyutlu girdi-çıktı dizelgelerinin davranışlarının belirlenip yorumlanması olabilir. Bu durumda ise "Kesme YBMG" (ing: Cut HDMR) [9] adı verilen YBMG oluşturulmuştur. Bu yöntem ile YBMG bileşenleri, ilgili uzayda kesim merkezi (ing: cut center) ile adlandırılırlan $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \ldots, \bar{x_N})$ başlangıç konumuna bağlı girdi-çıktı tepkisi incelenerek belirlenir. Girdi uzay boyutu çok büyük olur ise bu durumda yöntem genelleştirilmiştir, "Çoklu Kesme YBMG" (ing: Multicut HDMR) [10]. Çoklu Kesme YBMG yöntemi tanım kümesinin birden fazla başlangıç konumunun belirlenmesi gereken durumlarda kullanılmaktadır. Girdilerin uzaya düzensiz olarak saçılmış olduğu durumlarda ise bir başka yöntem olan "Seçkisiz Örneklemeli YBMG" (ing: Random Sampling HDMR) [16, 17] YBMG çeşidi kullanılmaktadır. Buradaki düğüm noktalarındaki girdi sayısı arttıkça bileşenlerin tümlev hesabında zorluklar çıkmaya başlar, dolayısıyla maliyet artar.

Bir başka YBMG yöntemi "Dönüşümsel YBMG (DYBMG)" (ing: Transformational HDMR) [17, 31, 52–55] olarak adlandırılır. Bu yöntem, asıl işlevin YBMG yaklaştırımının niteliğini arttırmak amacıyla işlevin kendisine değil, herhangi bir dönüşüm altındaki görüntüsüne YBMG ile duyarlı bir yaklaştırım elde edip, daha sonra da bu yaklaştıran işlevinin evrik dönüşümünü alınarak asıl işlev için duyarlı bir yaklaştırım elde etmeye dayanmaktadır. Burada dönüşümün seçimi önemlidir. Dönüşümün eniyileme yapabilecek değiştirgeleri bulunması gerekmektedir. DYBMG'nin parametrelerinin YBMG açılımında kazandırdığı esneklik, YBMG yönteminden daha genel bir hal almasını olanaklı kılmaktadır.

Bir başka YBMG yöntemi ise, "Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG)" (ing: Enhanced Multivariance Product Representation)'dır. Bu yöntem ise aşağıdaki altbölümde anlatılmaktadır.

2.2 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim

Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG), Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminde de YBMG'nin temel mantığı olan "Böl-Yönet" mantığı devam etmektedir. Bu gösterilim yönteminde N değişkenli bir $f(x_1,\ldots,x_N)$ işlevi,

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_N) &= f_0 \prod_{j=1}^{N} s_j(x_j) + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} s_j(x_j) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i_1,i_2}}^{N} s_j(x_j) \\ &+ \ldots + f_{1\ldots N}(x_1,\ldots,x_N) \end{aligned} \quad \mathbf{(2.33)}$$

biçiminde bir takım destek işlevleri yardımıyla daha az değişkenli işlevlerin toplamı türünden belirtilebilmektedir. Her bir toplam destek işlevlerinin çarpımı ile beraber değişmez, tekdeğişkenli, ikideğişkenli ve işlevin değişken sayısı kadar çokdeğişkenlilikte işlevlerin toplamı olarak yazılır. Açılımdaki terimler ifade edilmek istenirse, f_0 değişmez terimi, $f_i(x_i)$'ler tekdeğişkenli terimleri, $f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$'ler ikideğişkenli terimleri ve sırasıyla $f_{1\ldots N}(x_1, \ldots, x_N)$'ler ise N değişkenli terimleri simgeler. Yukarıda sözü geçen her bir terim, bir takım $s_j(x_j)$ destek işlevleri yardımıyla bağlı olduğu bağımsız değişkenlerin $f(x_1, \ldots, x_N)$ işlevine yapmış oldukları katkıyı göstermektedir. Önemli ayrı bir nokta ise bu destek işlevlerinin $s_j(x_j) = 1$ alındığında ÇYÇG açılımının YBMG açılımına denk olmasıdır.

Sırasıyla yukarıda belirtilen terimler olan f_0 değişmez terimini, tekdeğişkenli $f_i(x_i)$ terimlerini, ikideğişkenli $f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ terimlerini ve bir diğer ÇYÇG terimlerini hesaplayabilmek için aşağıda verilen normalizasyon koşulu;

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1; \qquad 1 \le i \le N \tag{2.34}$$

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) s_i(x_i)^2 = 1; \quad 1 \le i \le N \tag{2.35}$$

ve bu tanımlamalara ek olarak,

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) s_i(x_i) f_{i_1 \ldots i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = 0, \;\; x_i \in (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), \; 1 \le i \le k \le N \tag{2.36}$$

biçimindeki tümlev altında sıfırlanma koşullarından faydalanılmaktadır. YBMG'ye benzer olarak tanımlanan işleçlerin (**2.33**) açılımına aşağıda formül biçiminde uygulanması sonucunda tüm ÇYÇG bileşenlerini tek türlü belirleyebilmek mümkündür.

$$\mathscr{I}_0 f(x_1, \ldots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^{N} s_j(x_j) f(x_1, \ldots, x_N) \tag{2.37}$$

Yukarıdaki tanım eşitliğinde yer alan $\mathscr{I}_0$ işleci ile yine yukarıda tanımlanan normalizasyon ve sıfırlanma koşulları yardımıyla f_0 değişmez terimi belirlenmek istenirse

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \ldots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^{N} s_j(x_j) f(x_1, \ldots, x_N) \tag{2.38}$$

sonucu elde edilir. Sabit terim için yapılanlarlar, $\mathscr{I}_i$ işleçleri yardımıyla $f_i(x_i)$ tekdeğişkenli terimlerinin elde edilmesinde yinelenebilirler. Bu işleçler;

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_i f(x_1, \ldots, x_N) \;\; &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \ldots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \ldots \\ &\times \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{N} s_j(x_j) f(x_1, \ldots, x_N) \end{aligned} \tag{2.39}$$

eşitlikleriyle verilebilir.

Bu uygulama sonucunda (**2.40**) bağıntısı ile gösterilen $f_i(x_i)$ tekdeğişkenli terimleri elde edilir.

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) ... \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) ... \\ &\times \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} s_j(x_j) f(x_1, ..., x_N) - s_i f_0 \end{aligned} \qquad (\mathbf{2.40})$$

Aşağıda (**2.41**) bağıntısı ile verilen denklemde ise, $\mathscr{I}_{i_1 i_2}$ ile simgelenen ve **2.39**'daki gibi ama i_1 ve i_2 üzerinde tümlev ve ağırlık içermeyen yapıda işleç kullanımı $f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ ikideğişkenli terimler içindir.

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) ... \int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}} dx_{i_1-1} W_{i_1-1}(x_{i_1-1}) \int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}} dx_{i_1+1} W_{i_1+1}(x_{i_1+1}) ... \\ &\times \int_{a_{i_2-1}}^{b_{i_2-1}} dx_{i_2-1} W_{i_2-1}(x_{i_2-1}) \times \int_{a_{i_2+1}}^{b_{i_2+1}} dx_{i_2+1} W_{i_2+1}(x_{i_2+1}) ... \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \\ &\times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^{N} s_j(x_j) f(x_1, ..., x_N) \\ &- s_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2}) - s_{i_2}(x_{i_2}) f_{i_1}(x_{i_1}) - s_{i_1}(x_{i_1}) s_{i_2}(x_{i_2}) f_0 \qquad (\mathbf{2.41}) \\ 1 &\leqslant i_1 < i_2 \leqslant N \end{aligned}$$

şeklinde yazılmasında olanak sağlar.

Benzer biçimde tüm ÇYÇG terimlerini elde etmek olanaklıdır. Tıpkı YBMG'de olduğu gibi, amaçlanan biçimde $f(x_1, ..., x_N)$ işlevine istenilen düzeyde kesme yapmak amacıyla bir takım ÇYÇG yaklaştıranları tanımlanabilmektedir. Bunlar sırasıyla değişmez, birinci ve en genel haliyle n. kerteden ÇYÇG yaklaştıranı adını almaktadır.

$$S_0(x_1, ..., x_N) = f_0 \prod_{j=1}^{N} s_j(x_j) \qquad (\mathbf{2.42})$$

$$S_1(x_1, ..., x_N) = S_0(x_1, ..., x_N) + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} s_j(x_j) \qquad (\mathbf{2.43})$$

$$S_2(x_1,...,x_N) = S_1(x_1,...,x_N) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i_1,i_2}}^{N} s_j(x_j) \qquad (\mathbf{2.44})$$

$$\vdots$$

Yukarıdaki (**2.42**) bağıntısı ile verilen ÇYÇG yaklaştıranı, eşitliğin sağ yanında yer alan f_0 değişmez teriminden dolayı "Değişmez Yaklaştıran" olarak adlandırılır. Anlatımlara ek olarak (**2.36**) bağıntısı yardımıyla $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq N$,
$1 \leq j_1 < ... < j_l \leq N$ ve $1 \leq k < l \leq$ olmak üzere ÇYÇG bileşenleri arasında,

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) ... \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_1,...,i_k}}^{N} s_i(x_i) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq j_1,...,j_l}}^{N} s_j(x_j) f_{i_1...i_k} f_{j_1...j_l} = 0 \qquad (\mathbf{2.45})$$

biçiminde bir diklik koşulu tanımlanmaktadır. Bu sayede, denklem tüm ÇYÇG bileşenlerinin birbirine dik olduğunu belirtmektedir. ÇYÇG bileşenlerinin dikliği yalnızca ÇYÇG hesaplamalarını kolaylaştırmakla kalmaz, buna ek olarak da aşağıdaki biçimde iççarpım i ler üzerinde, $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq N$, $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_l \leq N$ ve $1 \leq k < l \leq N$ koşullarının sağlanmasına olanak verir.

$$\begin{aligned}\left(f_{i_1...i_k} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_1,...,i_k}}^{N} s_i \; , \; f_{j_1...j_l} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq j_1,...,j_l}}^{N} s_j \right) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) ... \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \\ &\times \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_1,...,i_k}}^{N} s_i(x_i) f_{i_1...i_k}(x_{i_1},...,x_{i_k}) \\ &\times \prod_{\substack{j=1\\ j\neq j_1,...,j_l}}^{N} s_j(x_j) f_{j_1...j_l}(x_{j_1},...,x_{j_l}) \end{aligned} \qquad (\mathbf{2.46})$$

Bu iççarpım biçiminden faydalanarak $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq N$ ve $1 \leq k \leq N$ için (**2.47**) bağıntısı ile verilen yeni bir tanım olan boy tanımının yapılması olanaklı olur.

$$\left\| f_{i_1...i_k} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_1,...,i_k}}^{N} s_i(x_i) \right\|^2 = \left(f_{i_1...i_k} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_1,...,i_k}}^{N} s_i \; , \; f_{i_1...i_k} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_1,...,i_k}}^{N} s_i \right) \qquad (\mathbf{2.47})$$

Bunlara ek olarak tekrardan $f(x_1,...,x_N)$ işlevinin karesi tümlevlenebilen bir işlev olduğu kabul edilince, (**2.33**) bağıntısı ile verilen ÇYÇG açılımının her iki tarafının kendisi ve ağırlık işlevi ile çarpılarak tüm bağımsız değişkenlere göre ilgili aralıkta tümlevi alındığında, sıfırlanma koşulları yardımıyla,

$$\|f\|^2 = \left\| f_0 \prod_{j=1}^{N} s_j \right\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} s_j \right\|^2 + \cdots + \|f_{12\ldots N}\|^2 \qquad \textbf{(2.48)}$$

olacak biçimde $\|f\|^2$ anlatım yazılabilir. Bir önceki bölümde YBMG'de anlatıldığı gibi bu eşitliğin her iki tarafı $\|f\|^2$ 'ye bölündüğünde,

$$1 = \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^{N} s_j \right\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^{N} \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} s_j \right\|^2 + \ldots + \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12\ldots N}\|^2 \qquad \textbf{(2.49)}$$

ifadesi elde edilmektedir. (**2.49**) ile verilen bağıntı yardımıyla uygun kesmeler yardımıyla ÇYÇG yöntemi için "Nitelik Ölçenleri" tanımlanabilir.

$$\sigma_0 = \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^{N} s_j \right\|^2 \qquad \textbf{(2.50)}$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^{N} \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} s_j \right\|^2 \qquad \textbf{(2.51)}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} \left\| f_{i_1 i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i_1,i_2}}^{N} s_j \right\|^2 \qquad \textbf{(2.52)}$$

Yukarıda belirtilen ÇYÇG nitelik ölçenlerinin adlandırılması; "Değişmezlik Ölçeni" veya "Sıfırıncı Basamaktan Nitelik Ölçeni" , "Birinci Basamaktan Nitelik Ölçeni" , "İkinci Basamaktan Nitelik Ölçeni" ve benzer biçimde yapılan yinelemelerle elde edilen "n. Basamaktan Nitelik Ölçeni" yapısındadır.

YBMG yaklaştırımında olduğu gibi ÇYÇG'de de çokdeğişkenli bir işlev, daha az kerteden bileşenler yardımıyla temsil edilmek istenebilir. Böyle bir durumda ise kesmeler yapılmalıdır. Fakat bu kesmenin ne kadar iyi olduğu ÇYÇG nitelik ölçenlerinin 1'e ne denli yakın değerler aldığı ile ilgili olacaktır. Nitelik ölçenlerinin düzgün sıralı bir dizi oluşturduğu da göz ardı edilmemelidir ve bu gerçek kestirim (ing: estimation) amaçlı kullanılabilinir.

$$0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_N = 1 \qquad \textbf{(2.53)}$$

3. AYRIK YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ

Son yirmi yıldır çokdeğişkenli işlevler üzerinde pek çok gelişmeler yaşanmaktadır. YBMG ve onun diğer çeşitleri de bu durumdan faydalanmaktadırlar. Bu gelişmelerin temeli Sobol'a dayanmaktadır, ondan sonra ise bu gelişmeleri ağırlıklı olarak Rabitz ve grubu ile Demiralp ve grubu olan BEBBYT devralmıştır.

Bir üst bölümde YBMG'den yeteri kadar sözedildiğinden artık bu bölümde o ayrıntıya girilemeyecektir. Bu bölümde ilgilenilecek olan konu YBMG dizileridir ki bu dizilerde bağımsız değişkenler değerlerini tamsayıların alt kümelerinden almaktadır.

N altsırasayılı $a_{i_1 \ldots i_N}$ dizisi düşünülsün. Bu dizi, daha az sayıda altsırasayı içeren **a** ve altsırasayı sayısı artan biçimde sıralanan bir ayrıştırımla aşağıdaki gibi anlatılabilir.

$$a_{i_1,\ldots,i_N} = a^{(0)} + \sum_{j_1=1}^{N} a_{i_{j_1}}^{(j_1)} + \sum_{\substack{j_1,j_2=1 \\ j_1<j_2}}^{N} a_{i_{j_1} i_{j_2}}^{(j_1 j_2)} + \ldots + a_{i_{j_1} i_{j_2} \ldots i_{j_N}}^{(j_1 j_2 \ldots j_N)}$$
$$i_j = 1,2,\ldots,n_j,\ j = 1,2,\ldots,N \qquad \textbf{(3.1)}$$

Burada sağ yandaki üstsırasayılı ilk tek terim, sabit terimdir. Bu terim diğerlerinden farklıdır, bir sonraki N sayıda bileşen sıradan yöney niteliklidir. Daha sonraki terim tekli değişken, ikili değişken ve benzeri olarak devam eder. Tüm bileşenlerin sayısının 2^N olduğunu kanıtlamak hiç zor değildir.

(**3.1**)' de denklemin elemanlarını belirleyebilmek için Sobol'un oluşturduğu "Sıfırlanma Koşullarını " ortaya koymalıyız. Bu sıfırlanma koşulunu ise toplama işlemi altında kullanacağız. Bunun genel anlatımı,

$$\sum_{i_{j_l}=1}^{n_{j_l}} W_{i_{j_l}}^{(j_l)} a_{i_{j_1} i_{j_2} \ldots i_{j_k}}^{(j_1 j_2 \ldots j_k)} = 0$$
$$l = 1,2,\ldots,k, \quad k = 1,2,\ldots,N \qquad \textbf{(3.2)}$$

yapısındadır.

Buradaki W_s ler bir sırasayılı diziler yani sıradan yöneylerdir. Burada ağırlık koşulunun sağlanabilmesi için ağırlık dizisi artı tanımlı sayılardan oluşmalıdır. Bu koşul iki taraflı YBMG bilşenlerinin arasında diklik ile bağlantılıdır. Sözü edilen katlıyöneyler kartezyen uzayında yer aldıkları için Frobenius boyu ve iççarpımı kullanılabilir.

Yukarıda tanımlanan ağırlık ile ağırlıklı iççarpım tanımı,

$$(a^{(1)},a^{(2)}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_N=N}^{n_N} W_{i_1\ldots i_N} a^{(1)}_{i_1\ldots i_N} a^{(2)}_{i_1\ldots i_N},$$
$$a^{(1)}_{i_1\ldots i_N}, a^{(2)}_{i_1\ldots i_N} \in \mathscr{A}_N \qquad \mathbf{(3.3)}$$

yapısında verilebilir.

$\mathscr{A}_N$, N altsırasayılı bir dizi olup Hilbert uzayın niteliği taşıyan ve aslında Kartezyen türden de olsa uzayda yer alır. $\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)}$ dizilerinin bütünsel bir gösterilimi vardır. Öğeler için genel terim ise, $a^{(1)}_{i_1\ldots i_N}, a^{(2)}_{i_1\ldots i_N}$ dir. $W_{i_1\ldots i_N}$ ler ise,

$$W_{i_1\ldots i_N} \equiv \prod_{j=1}^{N} W^{(j)}_{i_j}, \quad W^{(j)}_{i_j} > 0 \qquad \mathbf{(3.4)}$$

ile gösterilir ki burada çarpımsal bir yapı bulunmaktadır. Dizinin herbir çarpımı sürekli işlevler üzerindeki YBMG'de olduğu gibi değişik altsırasayıla bağlıdır. Burada sözüedilen ağırlık işlevinin tüm artı tanımlı altsırasayılarının toplamı 1 olmalıdır.

$$\sum_{i_j=1}^{n_j} W^{(j)}_{i_j} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,N \qquad \mathbf{(3.5)}$$

Toplamdaki koşul (**3.2**) de kullanılırsa

$$(a^{(j_1\cdots j_{l_1})}, a^{(k_1\ldots k_{l_2})}) = 0,$$
$$\{ \quad (l_1 \neq l_2) \vee (l_1 = l_2)\} \wedge \{(j_1 \neq k_1) \vee (j_2 \neq k_2) \vee \ldots \vee (j_N \neq k_N)\},$$
$$l_1, l_2 = 0,1,\ldots,N \qquad \mathbf{(3.6)}$$

elde edilir.

Bu diklik koşulu anlamına gelir. Dizi Düzleştirim Tabanlı Bir Değişkenlide Kesmeli YBMG'nin kısayol gösterilimi aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(0)} + \sum_{j_1=1}^{N} \mathbf{a}^{(j_1)} + \sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1<j_2}}^{N} \mathbf{a}^{(j_1 j_2)} + \ldots + \mathbf{a}^{(j_1 j_2 \cdots j_N)}, \qquad \mathbf{(3.7)}$$

Her iki yanın boy karesi alınır ise;

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \left\|\mathbf{a}^{(0)}\right\|^2 + \sum_{j_1=1}^{N} \left\|\mathbf{a}^{(j_1)}\right\|^2 + \sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1<j_2}}^{N} \left\|\mathbf{a}^{(j_1 j_2)}\right\|^2 + \ldots + \left\|\mathbf{a}^{(j_1 j_2 \cdots j_N)}\right\|^2, \ \mathbf{(3.8)}$$

ve buradan da;

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &\equiv \frac{\left\|\mathbf{a}^{(0)}\right\|^2}{\|\mathbf{a}\|^2} \\
\sigma_1 &\equiv \sigma_0 + \sum_{j_1=1}^{N} \frac{\left\|\mathbf{a}^{(j_1)}\right\|^2}{\|\mathbf{a}\|^2} \\
\sigma_2 &\equiv \sigma_1 + \sum_{\substack{j_1,j_2=1 \\ j_1<j_2}}^{N} \frac{\left\|\mathbf{a}^{(j_1 j_2)}\right\|^2}{\|\mathbf{a}\|^2} \\
&\vdots \\
\sigma_N &\equiv \sigma_{N-1} + \frac{\left\|\mathbf{a}^{(j_1 j_2 \cdots j_N)}\right\|^2}{\|\mathbf{a}\|^2} \qquad \textbf{(3.9)}
\end{aligned}
$$

sonuçlarına varılır.

Bir önceki YBMG anlatımlarında olduğu gibi, en iyi yaklaştırımı verebilecek olan kesmeyi ölçmenin yöntemi, yukarıda verilen ölçenlerin kullanımıdır. Bu ölçenler de iyi sıralanmalıdırlar.

$$
0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_N = 1 \qquad \textbf{(3.10)}
$$

Kesenin sağlıklı olabilmesi için, 1 değerine istenilen duyarlılık çerçevesinde en yakın olan yerden kesme gerçkleştirilir. 1'e yakınlık sonucun başta verilen diziye olan yakınlık düzeyini göstermektedir.

4. ÇOKLUDOĞRUSAL DİZİLERDE KATSIZLAŞTIRIM (DÜZLEŞTİRİM) VE KATLILAŞTIRIM, KATLI YÖNEYLER, KATLI DİZEYLER VE KATLI DİZİLER

4.1 Giriş

Doğrusal cebirde iki temel büyüklükten sözedilir. Bunlardan birincisi yöney (ing: vector) olarak adlandırılır ve aslında, sonlu ya da sayılabilir sonsuzlukta sayıda öğeden oluşur. Öğeler, çok büyük bir çoğunlukla 1'den başlayıp birer biren artan artı tamsayılarla sırasayılandırılır. Diğer bir deyişle, yöney, öğeleri tek bir sırasayı ile kimliklendirilen (ing: identification) bir cebirsel büyüklüktür. Yöneydeki toplam öğe sayısına yöneyin boyutu (ing: dimension) adı da verilir. Yöneyler ya öğeleri alta doğru sıralanan bir dizilim (ing: sequency, ordering) ve onu çevreleyen köşeli ayıraçlarla ya da birbirlerini sağa doğru sırasayı artacak biçimde ve virgüllerle ayrılıp sıradan ayıraçlar arasında verilen dizilimlerle gösterilir. Birincisine cebirsel yöney gösterilimi gibi ad verilebilirken ikincisine çoklu (ing: tuple) gibi bir ad verilir. Çoklular Kartezyen uzay diye adlandırılan bir uzayda konumlandırımı eşsiz biçimde yansıtırlar. Diğer bir deyişle, yöneyler uzamsal (ing: geometrik) olarak konuma karşılık gelen ve tek bir sırasayıyla kimliklendirilen olgulardır.

Yöneyleri simgelemek için genellikle koyu ve küçük abecesel simgelerin kullanımı yeğlenir. Öğelerde ise koyuluk olmamasına karşın kimlik sırasayısı altsırasayı olarak yazılır. Bu bağlamda **a** bir yöneyi simgelerken a_j ile **a** yöneyinin 1'den başlayıp artan artı tamsayılı kimliklendirimde j. öğe anlatılmak istenir. Bu arada j'nin alacağı değerlerin ya küme gösterilimiyle ya da j için $j = 1, 2, ..., n$ gibi tanım bölgesi belirtimiyle belirtilmesinin gerekliliği vurgulanmalıdır.

Doğrusal cebirdeki diğer önemli büyüklük dizey (ing: matrix) adını alır ve her bir öğesi iki sırasayıyla kimliklendirilen düzlemsel bir dizilime karşılık gelir. Ancak, bu dizilim üzerinde biçimsel kısıtlama sözkonusudur. Biçim dikdörtgensel olmalıdır. Bu ise kimliklendirimde kullanılan ve çok büyük bir çoğunlukla herbiri 1'den başlayıp birer

birer artacak biçimde değer alabilen sırasayıların tanım kümelerinin büyüklüklerinin diğer sırasayıya bağlı olmamasının gerekliliğini gündeme getirir.

Dizeyler de, yöneyler gibi doğrusal bir yöney uzayı oluştururlar ve bir dizey içinde bulunduğu böyle bir uzayda bir konumu eşsiz olarak kimliklendirir. Yani onlar da yöney gibi betimleme özelliği taşırlar. Tek değişiklik içinde bulunulan uzaydır. Dizeylerin bu özelliklerine "konumsal özellik "denilebilir. Bir dizeyin öğeleri iki sırasayı ile kimliklendirildiğinden her bir sırasayının değişik bir yönde dizilim kimliklendirdiği öngörülebilir. Sırasayılar, altsırasayılar olarak yazılırlar. Bir dizeyin bütünsel simgelendirimi için, koyu ama büyük abecesel simgeler, öğeler içinse sıradan ama küçuk abecesel simgeler yeğlenir. Bu bağlamda, $\mathbf{A}$ bir dizeyi simgelerken $a_{j,k}$ bu dizeyin düzlemsel bir sıralandırımda (j,k) konumunda yerleşik öğesini gösterir. Burada aslında zorunlu olmamasına karşın virgül kullanımını yeğleyeceğiz ve bu virgülün belirgin ayırım dışında özel bir anlam taşımadığını vurgulayacağız. Birinci altsırasayı dikdörtgende düşey konumlandırmaya karşılık gelirken ikinci altsırasayı yatay konumlandırımı kimliklendirecektir. Birinci altsırasayısı aynı olan öğeler yataysıra oluştururlar. Duşeysıralarsa ikinci altsırasayısı aynı olan öğelerden oluşur.

Dizeylerin, yöneylerde olmayan bir başka özelliği daha bulunmaktadır. Bunu dile getirmek için önce dizeylerarası çarpımdan sözetmek gerekir. Aslında, yöneyleri de tek bir düşeysıralı dizey olarak yorumlamak olanaklı olduğundan, böyle bir çarpımın önem kazanacağı açıktır. İki dizeyin çarpımı değiştirimli değildir ve ilk çarpanın düşeysırasayısıyla ikinci çarpanın yataysırasayısı eşit olmalıdır. Yataysırasayısı ile düşeysırasayı ikilisine araya bir de çarpı simgesi koyarak "Dizeyin Türü" adı verilir. $m_1 \times n_1$ türünde bir dizeyle $m_2 \times n_2$ türünde bir dizeyin çarpımında $n_1 = m_2$ eşitliği geçerli olmalıdır. Yoksa çarpım tanımsızdır. Dolayısıyla, $m \times n$ türünde bir dizey ancak n öğeli bir yöneyi çarpabilir ve yöney ne olursa olsun sonuç m öğeli olmak zorundadır. Bu yüzden, $m \times n$ türünde bir dizey n öğeli yöneylerin örttüğü bir uzaydaki bir konumdan m öğeli yöneylerin örttüğü başka bir uzaydaki bir konuma dönüşüm gerçekleştirir. Dizeylerin bu olgusuna "Dönüşümsel Özellik" adı verilir. Eğer ille de yöneylerde bir dönüşümsel özellik arayışına girişilecek olursa yöneyin sayılla (ing: scalar) çarpımına gidilebilir. Ama bu çok kısıtlı ve biraz da yamacık sayılabilecek bir olgudur. Bu nedenle burada yoksaymayı yeğleyeceğiz.

Dizeylerin dönüşümsel özelliğine taban olan çarpma işleminde düşeykonum altsırasayısı toplama işleminin sessiz değişkenidir. Buna karşın, yataykonum altsırasayısı dönüşüm ürününde kimliklendirme görevi üstlenir. Bu bakış açısından, birinci altsırasayı kimliklendirim sırasayısı ikinci altsırasayı ise dönüşüm sırasayısı olarak nitelendirilebilir. Bu doğa ayrılığı nedeniyle burada virgül kullanımına gidilmektedir.

4.2 Çokyönlü ya da Çokludoğrusal Diziler

Doğrusal (ya da artık Sıradan Doğrusal olarak adlandıracağımız cebir), salt dizey ve yöneyleri odağa almıştır ve almaktadır. Ancak, son yüzyıl ve özellikle son yirmi yıl içinde dizey ve yöneylerin dışındaki dizilerle ilgilenilmesi de gündeme gelmiş ve gelmektedir. Sözgelimi, canlandırım verileri ardarda sıralanmış dikdörtgensel görüntülerden oluşur. Herbir görüntü ise dizey biçimli konumlandırılmış görüntübirimlerinden (ing: pixel) oluşur. Tüm canlandırımdaki herhangi bir görüntübiriminin konumunun kimliklendirimi için üç sırasayıya gereksinim duyulur. Bunlardan birisi görüntüyü kimliklendirirken diğer ikisi o görüntü içindeki konumu kimliklendirir. Yani bir canlandırım verisi 3 sırasayılı bir dizidir.

Yukarıdaki yorumlamalarımızda, açık olarak vurgulanmamış olsa da, görüntübirimlerinin ak ile kara arasında değerler aldığı varsayılmıştır yani tek bir tür boya düşünülmüştür. Oysa, boya denilince üç ana boyanın, sözgelimi al ile yeşil ve mavinin, değişik oranlarda karışımından oluşan bir olgu düşünülür. Bu durumda odaktaki verinin hangi veriye karşılık geldiğini kimliklemek için 3 ayrı değer alabilen bir sırasayıya gereksinim duyulur. Bu bağlamda bir canlandırımı, aslında, dört sırasayılı bir dizi olarak düşünmek daha uygun olur.

İşin içine parlaklık ve doygunluk ya da saydamlık gibi ögeler de katmak ve yine 3'ün üstünde sırasayıya çıkmak olanaklıdır.

Konumlandırma da içiçe görüntü dikdörtgenleri kullanarak sırasayılandırımı daha yüksek değerlere çıkarmak da olanaklıdır.

Genelde çok sayıda değiştirgeye bağlı dizgelerde sırasayılandırım da yüksek sayılara çıkar. Özetle, ikiden çok sırasayılı dizilere uygulamalarda karşılaşmak hiç de azımsanacak ya da gözardı edilecek bir olgu değildir. Bu nedenle onlar üzerinde de bir cebir tanımlamak ve kullanıp geliştirmek özellikle son yıllarda daha büyük önem kazanmıştır. Bu cebire "Çokludoğrusal Cebir"(ing: Multilinear Algebra) adı verilir. Burada da bu konunun yeni ve bazı özgün olgularına değineceğiz.

İkiden çok sırasayılı dizilere Çokludoğrusal (ing: multilinear) ya da Çokyönlü (ing: multiway) Dizi adını vereceğiz. Bilimsel yazında bunlara sıklıkla "Gerey" (ing: tensor) de denilmektedir. Ancak, bu yaklaşım BEBBYT üyelerince desteklenmemekte ve kullanımından kaçınılmaktadır. Bunun nedeni, gerey kavramının gövdelerin dayanıklılığı (mukavemet) gibi altkonuları da içeren sürekli ortamlar işleybiliminin (ing: continuum mechanics) sık kullanılan bir öğesi olması ve fiziksel nitelikler taşımasıdır. Her gereyin belli bir konaç dizgesinde (koordinat sisteminde) bir çokludoğrusal dizeyle betimlenmesi olanaklıdır. Ancak bu ilişki salt o konaçlar için geçerlidir. Konaç dizgesi değişince çokludoğrusal dizi de değişebilir. Üstelik gerey çok daha soyut nitelikler taşır. Oysa ki, çokludoğrusal dizi somut bir kavramdır. Bunun yanısıra çokludoğrusal dizilerle gereylerden çok değişik biçimde ilişkilendirilen spinor ingilizce adıyla anılan başka soyut kavramlar da vardır ve gerey yerine adlarının kullanılmıyor olması çok da anlamlı değildir.

Çokludoğrusal dizilerin bütünsel simgelemesi için yöneylerde olduğu gibi yine koyu ve küçük abecesel simgeler kullanacağız. Böyle bir dizinin öğelerini ise altsırasayılı ama koyu olmayan aynı abecesel simgelerle göstereceğiz. Bu bağlamda bir çokludoğrusal dizi için aşağıdaki anlatım yazılabilir.

$$\mathbf{a} \equiv \left[a_{i_1,\ldots,i_n} \right], \qquad 1 \leq i_j \leq k_j, \;\; j = 1,2,\ldots,n \tag{4.1}$$

Burada, görüldüğü gibi altsırasayılar 1'den başlayarak ardışık artan tamsayılardan oluşan tanım kümelerinden değer almaktadırlar. k_j ile simgelenen artı tamsayıların sırasayılardan bağımsız oldukları öngörülmektedir. Köşeli ayıraç kullanımı dizeylerdeki kullanımın buraya yansıtılmasıdır. Sırasayıların ayırdedilimini vurgulamak için yine virgül kullanılmaktadır.

Çokludoğrusal dizilerin bir sayılla çarpımı tanımlı olup çarpım dizinin herbir öğesi çarpılan dizinin karşılık gelen öğesinin çarpan sayıl ile çarpımı olarak tanımlanır. Öğelerde karşılık gelen sırayı ikililerinin tanım kümeleri eşit olmak üzere iki çokludoğrusal dizinin toplamı tanımlıdır ve toplamın her bir öğesi toplananların karşılık gelen öğelerinin toplamıdır. Bu iki tanım aynı türden yani altsırasayı sayıları ve onların tanım kümleri aynı olan çokludoğrusal dizilerin doğrusal bir yöney uzayı oluşturacağını güvence altına alır. Bu açıdan herbir çokludoğrusal dizi içerildiği uzayda bir konumu eşsiz olarak kimliklendirir. Dolayısıyla, bu açıdan, yöneylerle son derece koşut bir niteliktedirler.

4.3 Çokludoğrusal Dizilerin Çarpımı

İki çokludoğrusal dizi arasında çarpım tanımlanabilir. Ama bunun için altsırasayılardan en azından ikisinin tanım kümelerinin eşit olması gerekir. Bu bağlamda, sözgelimi (**4.1**)'teki anlatım çerçevesinde verilen bir **a** çokludoğrusal dizisi ile

$$\mathbf{b} \equiv \left[b_{\ell_1,\ldots,\ell_m} \right], \qquad 1 \leq \ell_j \leq p_j, \;\; j = 1,2,\ldots,m \tag{4.2}$$

ile verilen bir **b** çokludoğrusal dizisinin çarpımı

$$\mathbf{c} \equiv \mathbf{a} \times_{q,r} \mathbf{b} \equiv \left[\sum_{s=1}^{k_q} a_{i_1,\ldots,i_{q-1},s,i_{q+1},\ldots,i_n} b_{\ell_1,\ldots,\ell_{r-1},s,\ell_{r+1},\ldots,\ell_m} \right] \tag{4.3}$$

olarak verilir ve burada tüm altsırasayılar yukarıdaki tanım kümelerinden değer alırlar. Bu tanımın geçerli olması için $k_q = p_r$ olması gerektiğini yeniden vurgulamakta yarar bulunmaktadır. Bu tanımda $\times_{q,r}$ simgesi, **a** ile **b**'nin (q,r) yönlerindeki "Birli Çarpımı" olarak adlandırılabilir. "Birli" denilme nedeni birer sırasayının eşleştirilip üzerinde toplam tanımlanmış olmasıdır. Benzer biçimde, ikili, üçlü ve de çoklu tanımlamalar yapmak olanaklıdır. Burada q ve r değişik değerli olarak düşünülebilmekteyse de uygulamada çoklukla $q = r$ durumu gündeme getirilir ve o zaman, bir yön ikilisi yerine, salt bir yönde çarpımdan sözedilebilir.

Yukarıdaki tanımlamalar, çokludoğrusal dizilerin dönüşümsel özellikleriyle ilgilidir ve kullanılan çarpım türüne bağlı olarak değişik dönüşümler gündeme getirilebilir. Ancak, dönüşüm seçenek sayısı çokluluğun artımıyla çok tez bir biçimde yükselir ve bir yerden sonra neredeyse kullanılabilirliği tartışılabilir duruma gelebilir. Bu nedenle burada bu düzeyde bilgiyle yetinecek daha çok ayrıntıya girmeye ya da uygulamalara girişmeye yeltenmeyeceğiz. Ancak, yine de bu çarpımların bir kesim araştırmacı kesimince oldukça yoğun ve de biraz da çapraşık olarak kullanıldığını ve bunlara dayalı tekil değer ayrıştırımlarıyla ilgilenildiğinin bilinmesinde yarar bulunmaktadır.

4.4 Katlılaştırım, Düzleştirim, Katlıyöney

Daha önceden belirtiğimiz gibi, yöney bir düşeysıralı dizey olarak da düşünülebilir. Ama yöney–dizey ilişkisi bunun çok daha ötesindedir. Bir yöneyi altyöneylere ayrıştırıp bu altyöneyleri yanyana dizerek dizey oluşturmak da olanaklıdır. Bunu gösterebilmek için n öğeli bir yöneyi gözönüne alalım. n sayısının asal çarpanlarını kullanarak oluşturulan ve n_1 ile n_2 simgeleriyle gösterilen iki sayının çarpımının n olduğunu düşünelim. Bu durumda **a** ile simgelenen yöneyden **A** ile simgeleyeceğimiz ve açık yapısı aşağıda verilen bir dizey oluşturulabilir.

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & a_{n_1+1} & \cdots & a_{(n_2-1)n_1+1} \\ a_2 & a_{n_1+2} & \cdots & a_{(n_2-1)n_1+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1} & a_{2n_1} & \cdots & a_{n_2 n_1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(4.4)}$$

Burada önce düşeyde sonra sağa doğru yatayda yeniden sıralandırım yoluna gidilmiştir. Yatay ve düşey öncelik sıralamasını değiştirerek yukarıdaki dizeyin devriğine eşit olan bir dizey de üretilebilirdi. Bu biçimde oluşturulan dizeylerin öğelerini iki sırasayı kullanarak da tanımlamak olanaklıdır. Eğer

$$\mathbf{A} \equiv \left[a_{i,j} \right], \qquad 1 \leq i \leq n_1, \;\; 1 \leq j \leq n_2 \qquad \mathbf{(4.5)}$$

yazılacak olursa buradaki (i,j) sırasayı ikilisinin, (**4.5**)'deki i yerine k simgesi kullanıldığında $k = (j-1)n_1 + i$ eşitliğiyle ilişkilendirimin sözkonusu olacağını görmek hiç de zor değildir. Burada (i,j)'den k'ya geçiş essiz ve birebirdir. Yani evirtilebilir ve evriği, $/$ simgesi tamsayı bölme olmak üzere, $(i,j) = (mod(k,n_1), k/n_1 + 1)$ olarak verilir. Devrik durumda yapı yine bu türde olmakla birlikte n_1 ve n_2 yer değiştirir.

Yukarıda, ille de $n = n_1 n_2$ olmayabilir. Daha doğrusu böyle istenilen tamsayılar bulunmayabilir. Öyle bir durumda $n = n_1 n_2 + r$ kalanlı yapısına gidilebilir ve kalandan kaynaklanan eksiklik, dikdörtgen yapısına 0'lar eklenerek giderilebilir. 0 yerine değişik sayılar da eklenebilir ama buna bir neden bulmak gerekir. Neden çoğunlukla eniyileme tabanlı olabilir ama burada daha derine inemyeceğiz.

Yukarıda oluşturulan **A** dizeyinin bu kez her bir yatay ya da düşey sırasından dizeyler üreterek 3 sırasayılı dizilere veya bunu her iki sırada gerçekleştirerek 4 sırasayılı diziler yaratmak olanaklıdır. Bu biçimde yön arttırımına "Katlılaştırım"(ing: folding) demek olanaklıdır. Bu bağlamda düşünüldüğünde herhangi bir çokludoğrusal diziyi bir katlılaştırılmış yöney olarak görmek olanaklıdır. Böyle bir yöneye "Katlıyöney" (ing: folded vector, folvec) adını vereceğiz.

Katlılaştırım eyleminin evriğine yani katlıyöneyden yöneye geridönüme "Düzleştirim" (ing: unfolding) adını vereceğiz ve ayrıntılandırımı hiç de zor olmadığından burada üzerinde çok durmayacağız.

4.5 Yataysıra – Düşeysıra Ayırımı

Sıradan bir dizeydeki ilk sırasayı ya da yataysırasayı ile ikinci sırasayı ya da düşey sırasayı değişik görevler üstlenirler. Çokludoğrusal dizilerde de sırasayıların bir kesimi toplamlarda sessiz değişken olarak kullanılırken diğer kesimi çokludoğrusal dizi etkisi altında oluşan görüntü dizinin öğe konumlandırılmasında ya da kimliklendirilmesinde kullanılır. Bu biçimde ayrı nitelikli olan altsırasayıları bir noktalı virgül ile ayırmayı yeğleyeceğiz. Noktalı virgülün solunda virgüllerle ayrılmış olarak yerleşik sırasayılar yataysırasayılar; noktalı virgülün sağında virgüllerle ayrılmış olarak yerleşik sırasayılar da düşeysırasayılar olarak adlandıracağız. Bu durumda olan bir çokludoğrusal diziyi hem yataysıralarda hem de düşeysıralarda katlılaştırılmış bir dizey olarak düşünmek olanaklı olduğundan, bu tür dizilere "Katlıdizey" (ing: folded arrays, folmats) adını vereceğiz. Katlıdizeylerle katlıyöneylerden oluşan büyüklükler topluluğuna da "Katlıdizi" adını vereceğiz.

4.6 Üstsırasayılı Gösterilim

Son altbölümde anlatılanla daha önceki bölümlerde verilen olguları bir arada etkin bir biçimde toplamak amaçlı olarak aşağıdaki gösterilimi kullanım yoluna gidebiliriz.

$$\mathbf{A}^{(k,\ell)} \equiv \left[a_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_\ell} \right], \qquad 1 \le i_m \le p_m,\ 1 \le m \le k,\ 1 \le j_n \le q_n,\ 1 \le n \le \ell \quad \mathbf{(4.6)}$$

Burada k ve ℓ sırasıyla, "Yataylık Düzeyi" ve "Düşeylik Düzeyi" olarak adlandırılabilir. Bu tanımlama devrik tanımına da olanak verir. Eğer

$$\mathbf{B}^{(\ell,k)} \equiv \left[a_{j_1,\ldots,j_\ell;i_1,\ldots,i_k} \right], \qquad 1 \le i_m \le p_m,\ 1 \le m \le k,\ 1 \le j_n \le q_n,\ 1 \le n \le \ell \quad \mathbf{(4.7)}$$

yazılırsa devrik tanımı

$$\mathbf{A}^{(k,\ell)} \equiv \mathbf{B}^{(\ell,k)} \quad \mathbf{(4.8)}$$

özdeşliğiyle verilebilir. **B**'nin tanımında öğeler, aslında, **A**'nın düzleştirimiyle elde edilen dizeyin devriğinin eskiye dönük katlılaştırımıyla elde edilir. Bu biçimde yorum yapılmadan olayı anlatmak istenirse; noktalı virgülün solundaki ve sağındaki altsırasayıların, sıra koruyarak topluca, noktalı virgülün sırasıyla sağına ve soluna aktarıldığı yorumu yapılabilir. Yani devirme işlemi yataysırasayılar topluluğuyla düşeysıra sayılar topluluğunun sıra koruyarak yer değiştirmesidir. Kuşkusuz, bu yerdeğişimi sırasında noktalı virgülün konumu da değişebilmektedir. Bunlar, yukarıdaki devrik tanımının tutarlılığının kanıtıdır.

Üstsırasayılı gösterilim, kısıtlı bilgi verdiğinden oldukça kapalı bir yapıdır. Birinci ve ikinci üstsırasayılar, sırasıyla, yataysırasayıların ve düşeysırasayıların sayılarını kimliklendirir. Bu sırasayıların eksiksiz tanımları için herbirisinin tanım kümesinin ayrıca verilmesi gerekir ve çokludoğrusal dizilerin karşılaştırılmaları ya da türlendirimleri için kesin olarak bildirilmeleri gerekir.

Üstsırasayılardan ilki ya da sonuncusu 0 değerini alabilir. Böyle bir durumda, ikinci üstsırasayının 0 olması, odaktaki çokludoğrusal dizinin bir katlıdizey (folvec) olduğu anlamına gelir. Bu durumda, genel öğenin altsırasayılandırımında noktalı virgülün sağında bir altsırasayı bulunmaz.

Sıradan Doğrusal Cebir'de, bir yöneyin, genel olarak, öğeleri tek bir altsırasayıyla kimliklendirilen düşeysıralanımlı dizi olduğu öngörülür. Bu görüşe göre yatay sıralanımlı ve öğeleri tek bir altsırasayıyla kimliklendirilen bir dizi ayrı bir uzbilimsel nesne olarak düşünülmez. Öğeleri aynı olan bir yöneyin devriği olarak algılanır. Ancak, bunları ayrı nesneler olarak algılayıp yatay yöney ve düşey yöney adları altında ayırımı benimseyen bilim bireyleri de bulunmaktadır. Biz burada ayırım olgusunu benimsemeyen ve ayırım yerine devrik olgusunu onaylayan kesimden bireyler olarak tanımlarımızıyapacağız. Bu durum, "Yatay Katlıyöney" ve "Düşey Katlıyöney" adlandırımları altında yapılabilecek ayırımın da bizce benimsenmediği anlamına gelecektir. Böylece, bir katlıyöneyin ikinci üstsırasayısının 0 olarak alınması gerektiği ve öğesel altsırasayılandırımda noktalı virgülün sağında altsırasayı bulunmayacağı görüşü burada benimsenmiş olmaktadır. Buna uygun olarak, ilk üstsırasayısısı 0 olan ve dolayısıyla öğesel altsırasayılandırımında noktalı virgülün solunda altsırasayı içermeyen çokludoğrusal diziler ayrı yatay katlıyöneyler olarak değil düşeysırasayıları buradaki yataysırasayılarıyla özdeşleşen bir katlıyöneyin devriği olarak düşünülecektir.

Katlıyöneylerin katlıdizeylerin özel durumları olarak içerilmeleri dışında başka özel yapılardan da sözetmek olanaklıdır. Bunlar arasında kuşkusuz en önemlileri devriği ile özü (kendisi) aynı türden olan katlıdizeylerdir. Bunlara "Dördül (kare) Dizey" adını vereceğiz. Bir katlıdizeyin dördül olabilmesi için gerek koşul üstsırasayıların aynı olabilmesidir. Ancak, bu koşul dördüllük için yeterli değildir. Bu koşulun yanısıra karşılık gelen herbir yataysırayı ile düşeysırasayının tanım kümeleri de eşit olmalıdır. O zaman dördüllük güvence altına alınmış olur. Bir dördül dizey aynı zamanda devriğı özüne eşit olan bir yapıdaysa ona "Bakışık Dizey" (ing: Symmetric Matrix) adını vereceğiz. Bunlar, etki edebildikleri katlıdizilerin örttüğü uzaydan aynı uzaya dönüşüm tanımlarlar. Dolayısıyla bunların özdeğer ve katlıözyöneylerinden sözetmek olanaklıdır. Bakışık olmayan katlıdizeyler ise değişik türden yöneyleri olan uzaylar arasında özleri ve devrikleriyle dönüşüm yani gidiş ve dönüş sağlarlar. Dolayısıyla, bunlar için de özikililer yerine tekil değerler ve tekil katlıyöneyler tanımlamak ve dolayısıyla "İzgesel Ayrıştırım" yerine "Tekil Değer Ayrıştırımı" gerçekleştirmek olanaklıdır.

4.7 Yuvalanmış Altdiziler Gösterilimi

Çokludoğrusal dizilerin ikiden çok sayıda sırasayı aracılığıyla kimliklendirilebilmesi, bir anlamda çokyönlülüğü gerek bağıntılandırımda gerekse düşünsel canlandırımda önemli sorunlar yaratır. Çokboyutluluğun getirdiği sorunların giderilmesi için yaygın olarak izlenen yollardan birisi görünümün düzleme izdüşümüdür ve burada da uygulanabilir. Bu amaçla, genel öğesi $a_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_\ell}$ ile verilen bir $\mathbf{A}^{(k,\ell)}$ katlıdizeyini gözönüne alalım. Bu katlıdizeyden, birer yataysırasayı ve düşeysırasayıya, tanım kümlerinden alınan, birer değişmez değer atayarak, bir altkatlıdizey (ing: subfolmat) oluşturmak olanaklıdır. Sözgelimi sözü edilen katlıdizey için $i_1 = i$ ve $j_1 = j$ gibi değerler seçerek belli öğeleri, yataysırasayı sayısı $(k-1)$, düşeysırasayı sayısı ise $(j-1)$ olan bir katlıdizey oluşturmak olanaklıdır. Seçilen i ve j değerleri değiştikçe bu altkatlıdizeyde başka bir altkatlıdizey durumuna girecektir. Dolayısıyla oluşan altkatlıdizeyin tıkız gösterilimi için $\mathbf{A}_{i,j}^{(k-1,\ell-1)}$ simgelemesini kullanmak yerinde olacaktır. i değeri i_1'in tanım kümesi olan $\{1,2,...,m_1\}$'den, j değeri ise j_1'in tanım kümesi olan $\{1,2,...,n_1\}$'den seçilmesi gerekeceğinden $\mathbf{A}^{(k,\ell)}$ katlıdizeyinin $m_1 n_1$ sayıda altkatlıdizeyi olacağı ortaya çıkar. Dolayısıyla, altkesim (ing: block) öğeleri türünden aşağıdaki anlatım yazılabilir

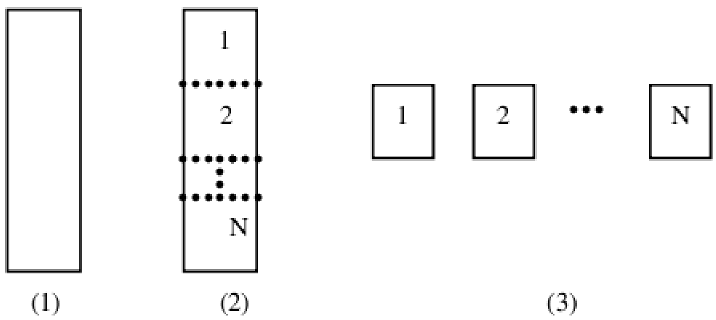
$$\mathbf{A}^{(k,\ell)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1}^{(k-1,\ell-1)} & \cdots & \mathbf{A}_{1,n_1}^{(k-1,\ell-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m_1,1}^{(k-1,\ell-1)} & \cdots & \mathbf{A}_{m_1,n_1}^{(k-1,\ell-1)} \end{bmatrix}. \qquad (\mathbf{4.9})$$

Görüldüğü üzere bu bir özyineleme (ing: recursion) yapısıdır ve her bir öğede içiçe kullanarak $\mathbf{A}^{(k,\ell)}$ katlıdizeyinin tüm öğelerini bir dikdörtgen içinde sıralama olanağı verir. Bu dikdörtgen, aslın Sıradan Doğrusal Cebir'deki dizeylerden başka bir olgu değildir. Bu, altkesimleyimden (ing: block structring) arındırılmış dizinin türü, kolayca çıkarılabileceği üzere, $m_1 m_2 ... m_k \times n_1 n_2 ... n_\ell$'dir. (**4.9**)'de verilen gösterilime "Yuvalanmış Altkesimler Gösterilimi" (ing: Nested Blocks Representation) ya da "Yuvalanmış Çerçeveler Gösterilimi" (ing: Nested Frames Representation) adını vereceğiz. Özellikle, bilgisayar betiklemesi (ing: scripting) ya da buyrukdizilemesinde (ing: programming) önemli kolaylıklar getirebilecek nitelikler taşımaktadır.

Bu gösterilimin Kronecker Çarpımı ya da "Gerey Çarpımı" olarak adlandırılan olguyla da yakın ilgisi bulunmaktadır ve BEBBYT çalışmalarında, özellikle "Olasılıksal Evrim" ile ilgili alanlarda, etkin olarak kullanılmaktadır.

4.8 Katlılaştırımın Uzamsal Açıklaması

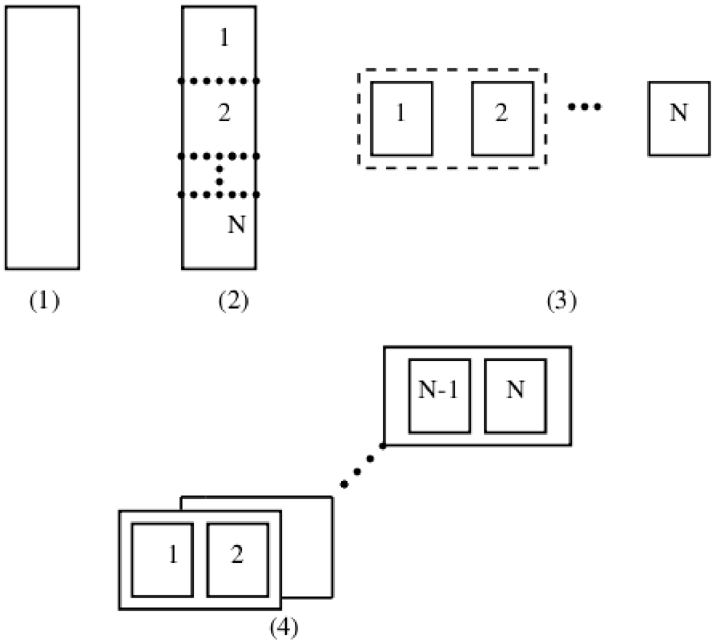
Yukarıda sözedilen katlılaştırım eylemini uzamsal (geometrik) olarak, yani çizimlerle destekleyerek, açıklama yoluna da gidilebilir. Bu amaçla, önce bir sıradan yöney düşünelim. Öğeleri alt alta sıralanarak köşeli ayıraçlar arasında gösterilebilen bu yöneyi düşey bir dikdörtgen çizimiyle de uzamsal olarak gösterebiliriz. Burada Şekil (4.1)'deki(1) numaradaki çizim bunu içermektedir. Bu dikdörtgeni üstten başlayarak, aşağıya doğru, eşit uzunluklu alt dikdörtgenlere ayırabiliriz. (2)'deki çizim bu durumu yansıtmaktadır. Daha sonra oluşan alt dikdörtgenleri soldan sağa sıralayarak bir dizey oluşturabiliriz. Bu son aşama ise çizim (3)'te verilmektedir. Altkesimlere ayırımda seçilen uzunluk (yani alt dikdörtgendeki öğe sayısı) asıl yöneydeki öğe sayısını tam bölerse tam bir dizey oluşturmak olanaklılaşır. Tam bölme söz konusu olmazsa yetersiz sayıda öğe içeren bir artık yöney kesimi kalır. Bu da oluşacak dizeyin son düşeysırasında boşluklara neden olur. Bunların giderilmesi için boşluklara bir takım öğeler yerleştirmek gerekir. Akla ilk gelen 0'ların yerleştirimidir. Bunun nedeni boşluk doldurumunun yapı üzerinde etkisiz kalmasının sağlanmasıdır. Oysa, yöney yapısının betimleme yetenekleriyle ilgili bilgi varsa, dizeyden bazı beklentiler oluşacaktır ve bu beklentileri olabildiğince sağlayacak öğelerin 0'lar yerine seçimi çok daha önemli duruma gelir. Dolayısıyla, doldurumun hangi öğelerle yapılması gerektiği bir eniyileme konusuna dönüşür. Ancak, burada daha çok ayrıntıya girilmeyecektir. Burada tek bir sırasayılı durumdan iki sırasayılı duruma geçilmiştir. Yani boyut artımı



Şekil 4.1: Bir yöneyin boyut artımı.

sağlanmıştır. Ancak yapılabilecek boyut artışı salt bu değildir. Oluşan dizeyi de sağa ya da aşağıya doğru alt dizeylere ayırıp oluşan altdizeyleri derinlemesine dizerek üç boyutlu yapılara geçilebilir. Artık bu yapılarda, öğeler 3 sırasayı ile kimliklendirilmek durumundadır. Burada anlatılanlar aşağıdaki yani Şekil 4.2'deki çizimlerle uzamsal olarak verilmektedir. Yine bir sıradan yöneyden yola çıkılmaktadır. Bu yöney çizim (1)'deki düşey dikdörtgen ile gösterilmektedir. Sonlu sayıda öğe içerdiği öngörülmekle birlikte burada gerçekleştirilecek eylemler açısından sonluluk ille de gerekli değildir. Aynı işlemler sayılabilir sonsuzlukta öğeleri olan yöneyler için de geçerli kalır. Bunun da ötesinde, bu tezle ilgili olmasa da süreklilik durumuna da belli gözetimler altında taşınabilirler.

(2)'deki çizim (1)'deki yöneyin N sayıda aynı türden altkesime ayrıştırılmasını betimlemektedir. (3) çizimi ayrıştırımdan doğan altyöneylerin soldan sağa düşeysıralar olarak yerleştirimini anlatmaktadır. Böylece yataysırasayı sayısı belirtilmeyen ama N düşeysıra içeren bir dizey elde edilmektedir. (4) çiziminde gösterildiği üzere bu dizey ikişer yataysıralı altdizeylere ayrıştırılmakta ve ayrıştırımlar derinlemesine, önden



Şekil 4.2: Bir yöneyin katlılaştırımı.

arkaya doğru yerleştirilmektedir. (4) çizimi bu durumu göstermektedir. Bu çizimde N'in 2'nin katı olduğu varsayımı altında çizim gerçekleştirilmiştir. Eğer bu geçerli değilse yani N tek ise en arkadaki dizeyde sağ düşeysıranın ya 0 ya da başka belirsiz bir yöney ile doldurulması gerekecektir. Belirsizlik durumunda, yukarıda sözedildiği gibi, bazı gereksinimler doğrultusunda eniyileme yoluna gidilebilir.

Burada çizimlerle anlatımı gerçekleştirilen katlılaştırım eyleminin eşsiz olmadığı daha önceden belirtilmişti. Sıradan Doğrusal Cebir, yöney ve dizey açık tanımlarında, düzlem üzerini kullanmayı yeğlediğinden ve burada katlılaştırımla yöney ve dizeylerin ötesine geçildiğinden katlılaştırımın da düzleme dik doğrultu da ve arkaya doğru gerçekleştirildiği gibi bir düşünsellik içinde bulunulmasında önemli yarar bulunmaktadır.

Yukarıda belirtildiği gibi katlılaştırım sonunda kaç boyuta, ya da diğer bir deyişle kata, çıkıldıysa, o düzeyde sırasayılandırım yapmak gerekir. Bu olgu öğeleri $a_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ olarak verilen bir çokludoğrusal dizinin aslında N katlı olduğunu söyler, yani bu dizi bir yöneyin N katlı duruma getirilmiş biçimidir. Kısaca özetlenirse

- a_{i_1,i_2} iki boyutta katlılaştırılmış

- a_{i_1,i_2,i_3} üç boyutta katlılaştırılmış

  $\vdots$

- $a_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ m boyutta katlılaştırılmış

çokludoğrusal dizilere karşılık gelir.

Bu bölümdeki anlatımlarımızı, dizeyler ya da katlıdizeyler bağlamında anımsarsak bir **a** katlı yöneyinin öğelerinin $a_{i_1,i_2,\ldots,i_N;}$ biçimli simgeleneceğini vurgulamak gerekir. Bu durumda devrik alım işlemi

$$a_{\overbrace{i_1,i_2,\ldots,i_N;}^{\text{Yatay}}} \rightarrow {}^{T}a_{\overbrace{;i_1,i_2,\ldots,i_N}^{\text{Düşey}}} \qquad \textbf{(4.10)}$$

yazılarak anlatılabilir. Sonuç olarak ; bulunduğu konumu ile (altsırasayılardan sonra ya da önce) bir katlıyöneyin devrik olup olmadığını göstermektedir.

4.9 İç Çarpım ve Boy Tanımları

Çokludoğrusal diziler ya da katlıdizeyler arasında iççarpım tanımlanabilir. Ancak bunun için katlıdizeyler aynı uzay içinden alınmalıdırlar. Tanım için İz tanımına da gereksinim duyulur. Bir katlıdizeyin izi onun yataysırasayıları ile düşeysırasayıları eşit olan öğelerinin toplamı olarak tanımlanır. Burada tanımı salt dördül katlıdizeyler için vermeyi yeğelemkteyiz. İlke olarak dikdörtgen durumlara genişletim söz konusu olabilse de burada ona gereksinim duymamaktayız. Böylece,

$$\text{İz}\left(\mathbf{A}^{(k,k)}\right) \equiv \sum_{\{i\}} a_{i_1,\ldots,i_k;i_1,\ldots,i_k} \qquad \textbf{(4.11)}$$

yazabiliriz. Burada toplam altsırasayıların alabildiği tüm değerler üzerinde alınmaktadır. Bu tanım aracığıyla $\mathbf{A}^{(k,\ell)}$ ve $\mathbf{B}^{(k,\ell)}$ ile verilen aynı uzaydan iki katlıdizeyin iççarpımı aşağıda verilen özdeşlikle tanımlanır

$$\left(\mathbf{A}^{(k,\ell)},\mathbf{B}^{(k,\ell)}\right) \equiv \text{İz}\left({\mathbf{A}^{(k,\ell)}}^{T}\mathbf{B}^{(k,\ell)}\right) \equiv \text{İz}\left({\mathbf{B}^{(k,\ell)}}^{T}\mathbf{A}^{(k,\ell)}\right) \qquad \textbf{(4.12)}$$

Bu tanım gerçel büyüklükler için geçerlidir. Eğer karmaşık değerlilik sözkonusu olursa bunun yerine

$$\left(\mathbf{A}^{(k,\ell)},\mathbf{B}^{(k,\ell)}\right) \equiv \text{İz}\left({\mathbf{A}^{(k,\ell)}}^{\dagger}\mathbf{B}^{(k,\ell)}\right) \equiv \text{İz}\left({\mathbf{B}^{(k,\ell)}}^{\dagger}\mathbf{A}^{(k,\ell)}\right) \qquad \textbf{(4.13)}$$

Burada † yani kama simgesi Hermite eşleniğini (devriğin karmaşık eşleniği) göstermektedir. Yukarıdaki iççarpım tanımı boy tanımına da olanak verir. Böylece,

$$\left\|\mathbf{A}^{(k,\ell)}\right\| \equiv \left(\mathbf{A}^{(k,\ell)}, \mathbf{A}^{(k,\ell)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(4.14)}$$

tanım eşitliği yazılabilir.

5. AĞIRLIKLI İNDİRGEYİMCİL ÇOKLUDOĞRUSAL DİZİ AYRIŞTIRIMI

5.1 Giriş

Dizeylerin ayrıştırımında değişik yöntemler kullanılır. Bunlar çoğunlukla çarpımsal tabanlıdır. Yani, dizeyin başka dizeylerin çarpımı olarak anlatımına gidilir ve çarpımın kullanımında kolaylaştırım sağlayacak çarpanların seçimine özen gösterilir. Bu bağlamda, üçgensel ayrıştırım, QR ayrıştırımı, izgesel ayrıştırım, tekil değer ayrıştırımı gibi yöntemlerde sözedilebilir.

Üçgensel ayrıştırım dördül dizeyler için tasarımlanmıştır. Sözgelimi n yataysıralı bir dördül dizey için uygulanabilir ve dizey altüçgensel bir dizeyle üstüçgensel bir dizeyin çarpımı olarak anlatılır. Toplamda $n(n+1)$ sayıda sayıl (ing: skaler) bilinmeyen içerir ve bunlar n^2 denklem üzerinden belirlenmeye çalışılır. Yani, n sayıda bilinmeyen belirsiz kalacak durumdadır. Ancak, uygulamada, bu belirsizliğin giderilmesi için n sayıda ek koşullama getirilir. Sözgelimi çarpan dizeylerden birisinin asal köşegen ögeleri 1 seçilir. Üçgensel ayrıştırımda iki üçgen çarpan dizey arasına köşegen bir dizey yerleştirilerek yöntemde genişletim (ing: extention) gerçekleştirmek de olanaklıdır. Ancak, bunlardan hangisi gündemde olursa olsun denklemlerin çözülebilirliği için ayrıştırılacak dizeyde bazı özelliklerin aranması gerekir. Sözgelimi evirtilebilirlik (ing: invertable) gibi.

QR yönteminde, Q sol çarpanın bir Döndürüm Dizeyi (ing: Orthogonal Matrix) olduğunu anlatırken, R sağ çarpanın bir sağ ya da üst üçgen olduğunu çağrıştırır. Eşsiz bir belirlenim için ayrıştırılacak dizeyin bütün (ya da tam veya dolu) özdüzeyli (ing: full rank) olmasına gereksinim duyulur. Bu da evirtilebilen dördül dizeylerin ayrıştırımı için kullanılan bir yöntemdir.

İzgesel ayrıştırım da dördül dizeyler için tasarımlanmıştır ve özdeğerlerle özyöneylere dayandırılır. Özdeğerlerinin cebirsel ve uzamsal katlılıkları eşit olan tüm özdeğerler için bu ayrştırım 3 çarpan dizey içerir. En sağdaki ve en soldaki çarpan dizeyler bir döndürüm dizeyinin özü ve devriği olarak tanımlanır. Ortadaki dizey ise özdeğerleri köşegen öğeleri olarak alan köşegen bir dizeydir. Özdeğer–özyöney ikililerinin sıralanımındaki seçenek çokluğundan dolayı ayrıştırım eşsiz değildir. Özdeğerlerin cebirsel ve uzamsal yani geometrik katlılıklarında eşitsizlikler oluşursa bu özdeğerlerin herbirine karşılık olan yerde orta çarpan dizeyin köşegenine Jordan altdizeyi yerleştirilmelidir.

Dördül olmayan dizeylere de uygulanabilen yöntemlerden en yaygın gündeme getirileni "Tekil Değer Ayrıştırımı"dır. Bu ayrıştırım izgesel gösterilime çok benzer. Yine 3 çarpan dizeyin çarpımı olan bir yapı kullanılır. Eğer ayrıştırılacak dizey dördül yapıda değilse en soldaki ve en sağdaki dizeyler artık aynı türden olamazlar. Yine de dördül olan bu çarpan dizeylerin yataysıra ya da düşeysıra sayıları eşit olamaz. Ancak bunların her biri, ayrıştırılacak dizeyden çarpımsal bakışıklaştırımla elde edilen dizeylerden birinin özyöneylerini düşeysıra olarak alır. Bu durumda ayrıştırımdaki orta çarpan dikdörtgen bir dizey olur ve asal köşegeni dışındaki öğeleri 0 olup asal köşegen öğeleri de tekil değerlerden oluşur.

Yukarıdaki çarpımsal ayrıştırımların bir kesimi toplamsal anlatım olarak da yazılabilirler ve kullanımda kolaylık getirebilirler. Bu durumda, genellikle dış çarpım türünde olan dizeylerin bir doğrusal birleşimi gündeme gelir. Doğrusal birleşimdeki dizeylerin dış çarpım olmaları onların özdüzeylerinin (ranklarının) de 1 olması anlamına gelir ve bu durum birçok kullanım kolaylığı sağlar.

Dış çarpımların doğrusal birleşimi türünde ayrıştırıma örnek olarak aşağıdaki eşitlik verilebilir

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mathbf{e}_i^{(m)} {\mathbf{e}_j^{(n)}}^T = \mathbf{e}_i^{(m)} \otimes \mathbf{e}_j^{(n)} \tag{5.1}$$

Burada $a_{i,j}$ ile dizeyin genel öğesi simgelenmekte, $\mathbf{e}_i^{(m)}$ ve $\mathbf{e}_j^{(n)}$ ile sırasıyla m ve n boyutlu kartezyen uzaydaki evrensel birim yöneylerden i.(yalnız i. öğesi 1, diğerleri 0) ve j. (yalnız j. öğesi 1, diğerleri 0) olanları simgelenmektedir. Burada ayrıca Kronecker çarpımı simgesi olan $\otimes$ da gündeme getirilmiştir.

Yukarıdaki eşitliğin geçerliliğini kanıtlamak hiçde zor değildir. Bu amaçla eşitliğin her iki yanı soldan $\mathbf{e}_k^{(m)}$'nın devriğiyle sağdan ise $\mathbf{e}_\ell^{(n)}$ yöneyiyle çarpılır ve $\mathbf{e}_k^{(m)}$'larla

$\mathbf{e}_k^{(m)}$'ların kendi aralarında diklikleri ve birimboylukları gözönüne alınırsa

$$a_{k,\ell} = \mathbf{e}_k^{(m)^T} \mathbf{A} \mathbf{e}_\ell^{(n)}, \qquad 1 \le k \le m, \; 1 \le \ell \le n \tag{5.2}$$

elde edilir ki bu da $a_{k,\ell}$'nin **A**'nın k. yataysırasıyla ℓ. düşeysırasının kesiştiği konumdaki öğesi olduğu ve dolayısıyla (**5.1**)'in gerçeği yansıttığı anlamına gelir.

(**5.1**)'de evrensel birim yöneyler kullanılmıştır. Bu nedenle de, doğrusal birleşim katsayıları dizeyin salt öğeleri olarak ortaya çıkmıştır. Bu kuşkusuz oldukça yalınlık getirir ama gösterilimdeki toplamsal terim sayısını da, dizey özel bir yapı göstermedikçe, azaltmaz. Bunun nedeni de birleşim katsayılarına etki yaratabilecek bir esnekliğin elde bulunmamasıdır. Esneklik sağlayabilmek için **e**'ler yerine m ve n boyutlu Kartezyen uzaylar (K_m ve K_n) için taban oluşturan yöney kullanmak düşünülebilir. Bu yöneyler **u**'larla simgelenecek olursa (**5.1**) yerine aşağıdaki gösterilim öngörülebilir

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \mathbf{u}_i^{(m)} \mathbf{u}_j^{(n)^T} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \mathbf{u}_i^{(m)} \otimes \mathbf{u}_j^{(n)} \tag{5.3}$$

(**5.1**) eşitliklerinin kolayca elde edilebilmesinin temel nedeni $\mathbf{e}^{(m)}$'lerin ve $\mathbf{e}^{(n)}$'lerin sırasıyla K_m ve K_n için dik ve birimboylu bir taban takımı oluşturmasıdır. Dolayısıyla, bu olgunun $\mathbf{u}^{(m)}$'ler ve $\mathbf{u}^{(n)}$'ler için de geçerli olduğunu öngörerek biraz kısıtlı kalmakta yarar bulunmaktadır. Böylece,

$$\alpha_{k,\ell} = \mathbf{u}_k^{(m)^T} \mathbf{A} \mathbf{u}_\ell^{(n)}, \qquad 1 \le k \le m, \; 1 \le \ell \le n \tag{5.4}$$

eşitlikleri elde edilir. Yani, doğrusal birleşim katsayıları kolayca belirlenmiş olur. Eğer $\mathbf{u}^{(m)}$'ler ve $\mathbf{u}^{(n)}$'ler **A** dizeyinin sırasıyla sol ve sağ tekil yöneyleri olarak seçilirse, α'lardan altsırasayıları aynı değerde olanlar dışındakileri sıfırlanır ve böylece en az sayıda terim içeren bir doğrusal birleştirim elde edilebilir. Bu durumda ayrıştırım Tekil Değer Ayrıştırımı olur. Bu, Tekil Değer Ayrıştırımı'nın büyük önem kazanmasının en başta gelen nedenidir.

5.2 Çokludoğrusal Dizilerin Dışçarpımlara Ayrıştırımı

(**5.4**)'ün sağ yanındaki anlatım için aşağıdaki eşitlikler de yazılabilir

$$\mathbf{u}_k^{(m)^T} \mathbf{A} \mathbf{u}_\ell^{(n)} = \text{İz}\left(\left[\mathbf{u}_k^{(m)} \mathbf{u}_\ell^{(n)^T} \right]^T \mathbf{A} \right), \qquad 1 \le k \le m, \; 1 \le \ell \le n \tag{5.5}$$

Bu eşitlikte sağyanda aynı türden birisinin devriği ile ikincisinin çarpımının izi bulunmaktadır. Bu izi içindeki çarpıma giren o aynı türden dizey arasında bir iççarpım olarak düşünmek olanaklıdır. Böylece

$$\mathbf{u}_k^{(m)^T}\mathbf{A}\mathbf{u}_\ell^{(n)} = \left(\mathbf{u}_k^{(m)}\mathbf{u}_\ell^{(n)^T}, \mathbf{A}\right), \qquad 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq n \tag{5.6}$$

yazılabilir. Burada, **B**, **A**'nın içinde bulunduğu $m \times n$ dizeyler uzayında ($M_{m\times n}$) bulunan bir dizey olmak üzere bu iki dizey arasındaki iççarpım

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \text{İz}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{A}_{i,j}B_{i,j} \tag{5.7}$$

Burada karmaşık değerlilik olasılığı da gözetilerek devrik işlemi yerine † ile simgelenen Hermit eşleniği kullanılmıştır. Üstçizgi ile de karmaşık eşleniklik simgelenmektedir. (**5.3**) eşitliği, aslında, $M_{m\times n}$ uzayı için tam bir taban takımı oluşturan bir dizey kümesi üzerinde bir doğrusal birleşimdir. Bu taban takımı aşağıdaki özdeşlik aracılığıyla tanımlanır

$$\mathbf{U}_{i,j} \equiv \mathbf{u}_i^{(m)} \otimes \mathbf{u}_j^{(n)}, \qquad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n. \tag{5.8}$$

Onları oluşturan çarpan yöneyler gibi bunlar da dik ve birimboylu bir taban kümesi oluşturur. Diğer bir deyişle, δ Kronecker simgesi olmak üzere,

$$\left(\mathbf{U}_{i,j}, \mathbf{U}_{k,\ell}\right) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}, \qquad 1 \leq i,k \leq m,\ 1 \leq j,\ell \leq n. \tag{5.9}$$

eşitlikleri geçerlidir. Yani, ancak ve ancak, iki dizeyin de ilk ve son altsırasayıları, aynı anda eşitlenirse 1 değeri yoksa 0 elde edilir. **U**'ların, herbirinin bir dışçarpım olması nedeniyle, özdüzeyleri 1'dir. Bu nedenle, (**5.3**)'e "Dışçarpımlara Açılım" ya da "1 Özdüzeyli Dizeylere Ayrıştırım" adı verilebilir.

Artık, çokludoğrusal dizilere geçebiliriz. Bu amaçla, tanımı aşağıda verilen diziye odaklanalım

$$\mathbf{a} \equiv \left[a_{i_1,\ldots,i_n}\right], \qquad 1 \leq i_j \leq m_j,\ 1 \leq j \leq n. \tag{5.10}$$

Bu türden dizilerin (altsırasayılarının sayısı ve tanım kümeleri aynı olan) bir doğrusal yöney uzayı oluşturabildiğini göstermek hiç de zor değildir. Üstelik bu uzayda bir iççarpım bile tanımlanabilir. Eğer

$$\mathbf{b} \equiv \left[b_{i_1,\ldots,i_n}\right], \qquad 1 \leq i_j \leq m_j,\ 1 \leq j \leq n. \tag{5.11}$$

ile tanımlanan **b** çokludoğrusal dizisi de gündeme getirilirse

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) \equiv \sum_{\{i_1\},\ldots,\{i_1\}} \overline{a}_{i_1,\ldots,i_n} b_{i_1,\ldots,i_n} \tag{5.12}$$

tanım özdeşliği yazılabilir.

Açılım için aşağıdaki 1 özdüzeyli taban takımını gündeme getirelim

$$\mathbf{U}_{i_1,\ldots,i_n} \equiv \mathbf{u}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_{i_n}, \qquad 1 \leq i_j \leq m_j,\ \ 1 \leq j \leq n. \tag{5.13}$$

u yöneylerinin aynı altsırasayıya karşılık gelenleri aralarında dik ve birim boyludur. **a** için bunlar türünden açılım aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$\mathbf{a} = \sum_{\{i_1\},\ldots,\{i_n\}} \alpha_{i_1,\ldots,i_n} \mathbf{U}_{i_1,\ldots,i_n} \tag{5.14}$$

Buradaki α katsayıları **U** dizilerinin aralarında dikliklerinden yararlanarak kolayca bulunabilir. Böylece,

$$\alpha_{i_1,\ldots,i_n} = (\mathbf{U}_{i_1,\ldots,i_n}, \mathbf{a}) \tag{5.15}$$

elde edilir. Bu sonuç, açılımın katsayılarının, **u** yöneylerinin verilmesi durumunda eşsiz olarak belirlenebileceğini gösterir. Ancak, **u**'larin verilen herhangi bir değer takımının bu katsayılarda en yüksek düzeyde sıfırlanma sağlayacağını düşünmek olanaklı değildir. En yüksek düzeyde sıfırlanmayı sağlayacak **u** yöneylerinin belirlenmesi, diklik ve birimboyluluk kısıtlaması altında bir eniyileme sorununun tasarımlanmasını ve çözümünü gerektirir. Ancak, bu sorunun çözümü n'in 2'den büyük olması durumunda doğrusal olmayan ve oldukça da zor bir sorundur. Çözüm için çokludoğrusal dizinin önce düzleştirilerek sıradan bir dizeye dönüştürülmesi, dizeyin ayrıştırılması ve daha sonra da, ortaya çıkan yöneylerin katlılaştırılmasıyla başlangıçtaki türe dönülmesi yaygın olarak izlenmiş bir yoldur. Ancak, bunda da oldukça önemli sorunlar bulunmaktadır. Bu ayrıştırım "Çokludoğrusal Dizilerin Tekil Değer Ayrıştırımı" olarak da bilinir ve azımsanmayacak sıkıntıları vardır. Bunun nedeni de sonuçlarda beklenenin dışında kısıtlarla karşılaşılma olasılığının var olmasıdır. Bu nedenle, burada ayrıntılandırıma girmeyeceğiz.

Öte yandan, $n \geq 2$ için yukarıda sözü edilen zorlukların çok önemli bir nedeni, aslında, 1 özdüzeyli çarpanlar üzerinden oluşan dış çarpımların kullanılmak istenmesidir. Oysa, taban takımında ikiçarpanlı dışçarpımlardan oluşan diziler kullanımı olabildiğince kolaylaştırır. Bu doğrultuda, birisi bir altsırasayılı, diğeriyse $(n-1)$ altsırasayılı dizi olan çarpanlar kullanılacak olursa, açılım öğelerini yani katsayıları ve taban dizilerini, belirlemek Sıradan Doğrusal Cebir kullanarak olanaklı duruma gelir. Bu yoldan, aslında, çarpanlardan birinde yön sayısı $(n-1)$'e düşer. Böylece indirgemeli bir ayrıştırım gerçekleştirilmiş olur. Bu konuda Metin ve Emre Demiralp'in yayınlanmış çalışmaları bilimsel yazında bulunmaktadır.

5.3 Çokludoğrusal Dizilerin İndirgeyimcil (ing: Reductive) Ayrıştırımı

(**5.14**) açılımındaki taban dizilerinin illede (**5.13**) ile verilen dışçarpım yapılarını taşımaları gerekmez. (**5.13**)'te n sayıda sıradan yöneyin dışçarpımı söz konusudur. Oysa ki, $(n-1)$ altsırasayılı bir dizi ile sıradan bir yöneyin dışçarpımı yapısında bir taban takımı da oluşturulabilir. Bu bağlamda,

$$\mathbf{U}_{i_1,\ldots,i_n} \equiv \mathbf{V}_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \otimes \mathbf{u}_{i_n}, \qquad 1 \le i_j \le m_j, \;\; 1 \le j \le n. \tag{5.16}$$

tanımlamaları gündeme getirilebilir. Burada, $\mathbf{V}$'ler $(n-1)$ altsırasayıyla kimliklendirilen çokludoğrusal diziler olarak, $\mathbf{u}$'lar ise bir tek altsayıyla kimliklendirilen diziler yani sıradan yöneyler olarak öngörülmektedirler. Ancak, bu tanımlarda, (**5.14**) ile (**5.15**) eşitliklerinin geçerli kalabilmesi için $\mathbf{V}$'lerin ve $\mathbf{u}$'ların, ayrı ayrı, iki, dik ve birimboylu dizi kümesi oluşturması gerekmektedir. Böyle bir durumda bunların verilmesi açılım katsayılarının eşsiz olarak belirlenmesine olanak sağlar. Bunların verilim durumu değil de ençok katsayıyı sıfırlayacak biçimde seçimi bir eniyileme sorununun çözümüyle sağlanabilir. Bu amaçla, bütünsel olarak altsırasayısız simgelenen yani salt tek bir $\mathbf{V}$, $(n-1)$ altsırasayılı dizisi, ile yine tek bir $\mathbf{u}$ sıradan yöneyinin çarpımının bir α ölçekleme sayılı ile çarpımının oluşturduğu dizi ile $\mathbf{a}$ arasındaki uzaklığı en küçük kılacak α, $\mathbf{V}$, ve de, $\mathbf{u}$ bilinmeyenlerinin saptanmasıyla açılımın en baskın terimi belirlenebilir. Bundan sonra ise, aşamalı olarak daha çok diklik koşulu vererek asıl dizi ile bu eniyilenmiş çarpım arasındaki sapma asıl dizi yerine kullanılır ve eniyileme işlemi tüm terimler bulunana dek sürdürülür. Bu anlatılanların bağıntılandırımı istenirse, aşağıdaki tanım eşitliği yazılabilir

$$\begin{aligned} uzkr(\alpha, \mathbf{V}, \mathbf{u}) &\equiv \|\mathbf{a} - \alpha \mathbf{V} \otimes \mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{a} - \alpha \mathbf{V} \otimes \mathbf{u}, \mathbf{a} - \alpha \mathbf{V} \otimes \mathbf{u}) \\ &= \sum_{\{i_1\},\ldots,\{i_n\}} \left(a_{i_1,\ldots,i_n} - \alpha V_{i_1,\ldots,i_{n-1}} u_{i_n}\right)^2 . \end{aligned} \quad \mathbf{(5.17)}$$

Burada dördül kullanım nedeni işlemlerin daha kolaylaştırılması içindir. Ayrıca yine kolaylık açısından gerçellik kısıtlaması da getirilmiştir. Yukarıdaki tanıma aşağıdaki birimboyluluk koşullarının eşlik etmesi gerekir

$$\|\mathbf{V}\|^2 = \sum_{\{i_1\},\ldots,\{i_{n-1}\}} V^2_{i_1,\ldots,i_{n-1}} = 1, \qquad \|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i_n=1}^{m_n} u^2_{i_n} = 1 \quad \mathbf{(5.18)}$$

Böylece eniyileme için kullanılacak amaç işlevimsisi (ing: functional) aşağıdaki eşitlikle tanımlanabilir

$$J(\alpha, \mathbf{V}, \mathbf{u}) \equiv uz^2(\alpha, \mathbf{V}, \mathbf{u}) + \lambda_1 \left(\|\mathbf{V}\|^2 - 1\right) + \lambda_2 \left(\|\mathbf{u}\|^2 - 1\right). \quad \mathbf{(5.19)}$$

Burada λ_1 ve λ_2 ile simgelenen sayıllar Lagrange çarpanlarını göstermektedir.

Eniyileme için $J(\alpha, \mathbf{V}, \mathbf{u})$ amaç işlevimsisinin α, $\mathbf{V}$, ve de, $\mathbf{u}$'ye göre yöneleğimlerinin (ing: gradient) belirlenip öğesel düzeyde ayrı ayrı 0'a eşitlenmesi gerekir. Böylece eniyileme için aranan denklemler bulunmuş olur. Bu denklemlerin çözümü, karışık gibi görünse de kolaydır ve iki dizeyin ayrı ayrı özdeğer sorunlarının çözümüyle gerçekleştirilebilir. Bu iki özdeğer sorunu ayrı ayrı olsa da birbirleriyle çok sıkı bir biçimde ilintilidir ve birisinin çözümü, aslında, diğerinin çözümünün neredeyse doğrudan olarak yazılabilmesine olanak sağlar. Ancak, bu altkesimde bu düzeyde ayrıntı ile yetinip daha ileri gitmemek eğilimi taşınmaktadır.

5.4 Ağırlık Katlıdizeyi ve Katlıyöneylerin Ağırlıklı İççarpımı

Yukarıda gündeme getirilen iççarpımlarda iki temel kavram gözetilmemişti. Bunlardan biri, altsırasayılandırımda (ing: subindexing) noktalı virgül kullanılmamış ve böylece altsırasayılarda yataysırasayı ile düşeysıra sayı ayırımına gidilmemişti. Aslında, bir anlamda, salt katlıyöneylerle ilgilenildiği varsayılmıştı. Diğer olgu ise iççarpım tanımında dizinin tüm öğelerinin salt dördüllerinin toplamıyla ilgilenilmiş olunmasıdır. Böyle yapılmakla tüm dördüllerin eşit önemde oldukları varsayılmaktadır. Diğer bir deyişle, tüm dördüller değişmez bir ağırlıklandırım altında devreye sokulmaktadırlar.

Oysa ki, hem ileride katlıdizey ayrıştırımına olanak sağlayabilmek hem de öğelere ayrı önemler verebilmek için hem katlıyöneylerle hem de ağırlıklarla çalışmak yerinde bir eylem olacaktır.

Böylece, öğeleri $a_{i_1,\ldots,i_n;}$ ve $b_{i_1,\ldots,i_n;}$ ile simgelenen **a** ve **b** katlıyöneylerinin ağırlıklı iççarpımı olarak aşağıdaki anlatımları yazabiliriz

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})_W = \mathbf{a}^T\mathbf{W}^{(n,n)}\mathbf{b} = \sum_{\{i_1\},\ldots,\{i_n\}}\sum_{\{j_1\},\ldots,\{j_n\}} a_{;i_1,\ldots,i_n}W_{i_1,\ldots,i_n;j_1,\ldots,j_n}b_{j_1,\ldots,j_n;} \qquad \mathbf{(5.20)}$$

Burada, iççarpımın ağırlıklı olduğu W altsimgesiyle belirtilmekte olup ögeleri $W_{i_1,\ldots,i_n;j_1,\ldots,j_n}$ sayıllarıyla verilen $\mathbf{W}^{(n,n)}$ katlıdızeyi ağırlık görevi üstlenmektedir. Burada salt gerçel değerli büyüklüklerle çalışıldığı öngörülmekle birlikte karmaşık değerliliğe geçmekte görünür bir zorluk bulunmamaktadır. İççarpımda bulunması gereken bakışım özelliğinin varolabilmesi için, dördül yapılı olan, $\mathbf{W}^{(n,n)}$ katlıdizeyinin bakışık olması gerekir. Ancak, bu yeterli değildir. **a** ya da **b**'den herhangi biri sıfır katlıyöneyi olmadıkça iççarpımın da sıfırdan değişik olabilmesi için $\mathbf{W}^{(n,n)}$ katlıdizeyinin sıfır uzaylarının boş olması da gerekir. Ancak, bu özellik de yeterli değildir. $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ olması durumunda bunların eşit yapıları ne olursa olsun iççarpımın artı değer üretebilmesi gerekir. Bu gerekliliğin yerine getirilebilmesi için $\mathbf{W}^{(n,n)}$ katlıdizeyinin "Artı Tanımlı" olması da gerekir. Dolayısıyla, sonuç olarak, $\mathbf{W}^{(n,n)}$ katlıdizeyinin ancak ve ancak bakışık ve artı tanımlı olması durumunda bir ağırlık katlıdizeyi olabileceğini dile getirebiliriz.

$\mathbf{W}^{(n,n)}$ katlıdizeyinin bakışık ve artı tanımlı olarak yapılandırılması çok da zor bir olgu değildir. Bir dik taban takımının üzerinde artı katsayılarla oluşturulacak bir doğrusal birleşim bu özelliği taşır. Ancak, burada bu olgunun yaratılması eyleminin ayrıntılarına girmeyeceğiz.

$\mathbf{W}^{(n,n)}$ ağırlığının oluşturumunda çok daha kolay algılanabilecek ve yapılandırımı da olabildiğince kolay olan seçenekler de bulunmaktadır. Bu bağlamda aşağıdaki köşegen dizeyleri oluşturarak yola çıkılabilir

$$\mathbf{W}_k \equiv \left[w_{i_k}^{(k)}\delta i_k, j_k\right], \qquad 1 \le i_k, j_k \le m_k, \;\; 1 \le k \le n. \qquad \mathbf{(5.21)}$$

Burada, $w_{i_k}^{(k)}$ ile simgelenen büyüklükler artı değer taşıyan sayılları göstermektedirler. Bu dizeylerden, Kronecker çarpımı ya da dışçarpım aracılığıyla, ağırlık katlıdizeyine aşağıdaki eşitlik üzerinden geçilebilir.

$$\mathbf{W}^{(n,n)} \equiv \mathbf{W}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{W}_n \qquad \textbf{(5.22)}$$

Bu eşitlik öğesel düzeyde yazılmak istenirse

$$W_{i_1,\ldots,i_n;j_1,\ldots,j_n} = w^{(1)}_{i_1} \ldots w^{(n)}_{i_n} \delta_{i_1,j_1} \ldots \delta_{i_n,j_n}, \qquad 1 \le i_k, j_k \le m_k, \;\; 1 \le k \le n. \qquad \textbf{(5.23)}$$

sonucuna varılır. Bu sonucun (**5.24**)'de kullanımı aşağıdaki indirgenmiş tanımın yazılmasına olanak sağlar

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})_W = \mathbf{a}^T \mathbf{W}^{(n,n)} \mathbf{b} = \sum_{\{i_1\},\ldots,\{i_n\}} a_{;i_1,\ldots,i_n} w^{(1)}_{i_1} \ldots w^{(n)}_{i_n} b_{i_1,\ldots,i_n;}. \qquad \textbf{(5.24)}$$

Bu iççarpımdan üretilecek boy tanımıda "Ağırlıklı Boy" olarak adlandırılabilir ve genel tanımı aşağıdaki özdeşlik ile verilebilir

$$\|\mathbf{a}\|_W \equiv (\mathbf{a},\mathbf{a})_W^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{a}^T \mathbf{W}^{(n,n)} \mathbf{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\{i_1\},\ldots,\{i_n\}} w^{(1)}_{i_1} \ldots w^{(n)}_{i_n} a^2_{i_1,\ldots,i_n;}. \qquad \textbf{(5.25)}$$

Bu alt bölümde anlatılan uzatımlar bir önceki altbölümde anlatılan olgu ve eylemlere, herhangi bir görünür sıkıntı yaşamaksızın uyarlanabilir. Burada daha çok ayrıntılandırıma geçmeyeceğiz. Ancak, bu tezin özgün uygulamalarından biri olan üç yönlü katlıyöneylerin ayrıştırımının anlatımına geçeceğiz. Aşağıdaki altbölümler bu odak üzerindeki anlatımlardan oluşturulmuştur.

5.5 Üç Yönlü Katlıyöneylerin Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırımı

Bu altbölümde $n = 3$ alarak yukarıda anlatılanların somut uygulamalarına geçeceğiz. Bu amaçla, öğeleri sırasıyla $a_{i_1,i_2,i_3;}$ ve $b_{i_1,i_2,i_3;}$ ile simgelenen, dolayısıyla "Üç Yönlü" ya da "Üç Katlı" olarak nitelendirebileceğimiz iki, değişik de olabilen, katlıyöney düşünelim. Yukarıda tanımlanan "Ağırlıklı İççarpım" bağlamında, aşağıdaki eşitlikle verilen tanımı gözönüne alabiliriz

$$uzkr(\mathbf{a},\mathbf{b}) \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w^{(1)}_{i_1} w^{(2)}_{i_2} w^{(3)}_{i_3} \left(a_{i_1,i_2,i_3} - b_{i_1,i_2,i_3}\right)^2. \qquad \textbf{(5.26)}$$

Bu büyüklük **a** ile **b** arasında bir uzaklık dördülü tanımlar. Tanımda görünen ve bir önceki alt bölümdeki açıklamalar bağlamında gündeme getirilen $w^{(1)}_{i_1}$, $w^{(2)}_{i_2}$, $w^{(3)}_{i_3}$

sayıllarının her biri, ağırlığın artı tanımlı olmasını sağlamak için, artı değerler almak zorundadır. Bu uzaklık tanımını birazdan eniyileme için kullanacağız.

a katlıyöneyi için "Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım" aşağıda verilen eşitlikle tanımlanabilir

$$a_{i_1,i_2,i_3;} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j b^{(j)}_{i_1,i_2;} c^{(j)}_{i_3;}, \qquad 1 \leq i_k \leq n_k, \;\; k = 1,2,3. \qquad \textbf{(5.27)}$$

Burada, ilk iki altsırasayı (iki yön) üzerinde ve de üçüncü altsırasayı (bir yön) üzerinde tanımlanan iki katlıyöneyin dışçarpımı (Kronecker çarpımı) yapısında katlıyöneylerin bir doğrusal gösterilimi gündeme getirilmektedir. Yani bu eşitlik kapalı biçimde verilmek istenirse

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \mathbf{b}^{(2,0)}_j \otimes \mathbf{c}^{(1,0)}_j \qquad \textbf{(5.28)}$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{b}^{(2,0)}_j$'lerin ve $\mathbf{c}^{(1,0)}_j$'lerin, ayrı ayrı, dik ve birimboylu katlıdizey kümeleri oluşturduğu öngörülmektedir. Bu öngörüm

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} w^{(1)}_{i_1} w^{(2)}_{i_2} \left(b^{(j)}_{i_2,i_3}\right)^2 = 1, \qquad \sum_{i_3=1}^{n_3} w^{(3)}_{i_3} \left(c^{(j)}_{i_3}\right)^2 = 1 \qquad \textbf{(5.29)}$$

yazılabilmesine ve, ayrıca, (**5.28**) ile (**5.27**) eşitliklerinde görünen σ sayıllarının "Ölçekleyici" (ing: scalar) ya da "Boy'a Katkı Düzeyini Veren" niteliklerini taşımasına olanak sağlar.

Yukarıdaki yapılandırımda $\mathbf{b}^{(2,0)}_j$ ve $\mathbf{c}^{(1,0)}_j$ katlıyöneylerinin verilmesi durumunda σ_j değiştirgeleri, daha önceden de gösterildiği üzere, kolayca saptanır. Ancak ayrıştırımdaki terim sayısı olan m, $(n_1 + n_2 + n_3)$ toplamına dek tırmanabilir. Oysa, genellikle gönülde yatan m sayısının olabildiğince küçük tutulabilmesidir. Bu ise, ancak, $\mathbf{b}^{(2,0)}_j$ ile $\mathbf{c}^{(1,0)}_j$ katlıyöneylerinin özel bir biçimde seçilmesiyle olanaklı kılınabilir. Eğer, (**5.28**) ile (**5.27**) eşitliklerinde görünen σ_j sayıllarının küçülerek sıralandığı öngörülürse en baskın terim $j = 1$'e karşılık gelen terim olur. Bu terimin **a** ile uzaklık dördülü σ_0 sayılı ile $\mathbf{b}^{(2,0)}_0$ ve $\mathbf{c}^{(1,0)}_0$ katlıyöneylerinin özel bir seçimiyle en küçük kılınabilir. Yani bunlar eniyileme ile saptanmalıdırlar. Bu amaçla,

$$\begin{aligned} \mathscr{J} \;\equiv\; & \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w^{(1)}_{i_1} w^{(2)}_{i_2} w^{(3)}_{i_3} \left(a_{i_1,i_2,i_3} - \sigma^{(0)} b^{(0)}_{i_1,i_2} c^{(0)}_{i_3}\right)^2 \\ & + \lambda_1 \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} w^{(1)}_{i_1} w^{(2)}_{i_2} \left(b^{(0)}_{i_1,i_2}\right)^2 - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i_3=1}^{n_3} w^{(3)}_{i_3} \left(c^{(0)}_{i_3}\right)^2 - 1 \right) \qquad \textbf{(5.30)} \end{aligned}$$

ile verilen amaç işlevimsisi eniyilemede kullanılabilir. Bu yapıda, daha önce de belirtildiği üzere, λ_1 ve λ_2 ile Lagrange çarpanları simgelenmektedir. Yukarıdaki $\mathscr{J}$'nin $\sigma^{(0}$'a, $b^{(0)}$'lar ve $c^{(0)}$'lara göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse aranan eniyileme denklemleri elde edilir. Bu eylemin ayrıntıları verilmeden aşağıdaki denklemlere ulaşmanın olanaklı olduğunu belirtmek olanaklıdır.

$$b_{j,k}^{(0)} = \frac{1}{\sigma^{(0)}} \sum_{i_3=1}^{n_3} a_{j,k,i_3} w_{i_3}^{(3)} c_{i_3}^{(0)}, \qquad j = 1,2,...,n_1, \; k = 1,2,...,n_2 \qquad \textbf{(5.31)}$$

$$c_{\ell}^{(0)} = \frac{1}{\sigma^{(0)}} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} a_{i_1,i_2,\ell} w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} b_{i_1,i_2}^{(0)}, \qquad \ell = 1,2,...,n_3 \qquad \textbf{(5.32)}$$

$$\sigma^{(0)} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} a_{i_1,i_2,i_3} b_{i_1,i_2} c_{i_3} \qquad \textbf{(5.33)}$$

Bu denklemler Lagrange çarpanlarının saptanması ve elde edilen değerlerin diğer denklemlerde kullanılarak denklem sayısının indirgenmesinden sonra ulaşılan sonuç denklemlerdir. Bunlardan (**5.31**) ile (**5.31**) arasında $b^{(0)}$ bilinmeyenlerinin giderilmesi aşağıdaki denklemin elde edilmesine olanak sağlar

$$c_j^{(0)} = \frac{1}{{\sigma^{(0)}}^2} \sum_{k=1}^{n_3} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} a_{i_1,i_2,j} w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} a_{i_1,i_2,k} w_k^{(3)} c_k^{(0)}, \qquad j = 1,2,...,n_3 \qquad \textbf{(5.34)}$$

Eğer burada

$$C_{j,k} \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} a_{i_1,i_2,j} w_{i_1}^{(1)} \sqrt{w_j^{(3)}} \sqrt{w_k^{(3)}} w_{i_2}^{(2)} a_{i_1,i_2,k}, \qquad j,k = 1,2,...,n_3 \qquad \textbf{(5.35)}$$

ve

$$\overline{c}_j \equiv \sqrt{w_j^{(3)}} c_j^{(0)}, \qquad j = 1,2,...,n_3 \qquad \textbf{(5.36)}$$

tanımlamaları yapılacak olursa (**5.34**) denklemi aşağıdaki yapıya bürünür:

$$\sum_{k=1}^{n_3} C_{j,k} \overline{c}_k = {\sigma^{(0)}}^2 \overline{c}_j, \qquad j = 1,2,...,n_3. \qquad \textbf{(5.37)}$$

Bu denklem $\mathbf{C}$ dizeyinin özdeğer sorunu olup $\overline{\mathbf{c}}$ özyöneye ${\sigma^{(0)}}^2$ ise özdeğere karşılık gelir. Özenli bir bakış, gerçel büyüklüklerle çalışıldığı öngörümü altında $\mathbf{C}$ dizeyinin bakışık olduğunu gösterir. Karmaşık değerlerin içerildiği durumlarda da, uygun iççarpım tanımı kullanarak bakışım sağlanabilir. Ayrıca, dördül işlev (ing: quadratic form) kullanımıyla, $\mathbf{C}$ dizeyinin artı yarı tanımlı (ing: positive semi definite) olduğu da gösterilebilir. Bu durum, $\sigma^{(0)}$'ın gerçel olmasını güvence altına alır. Ancak, belirleme de artı-eksi ikilemiyle karşılaşılabilir. Belirgin bir kısıtlama söz konusu olmadıkça artı işaret seçimi yeğlenir.

Burada öncelikle $c^{(0)}$ değerlerinin belirlenmesi yeğlenmiştir. Oysa $b^{(0)}$'lardan da yola çıkılabilirdi. Bu amaçla, $c^{(0)}$'ların giderilmesiyle salt $b^{(0)}$'ları içeren bir cebirsel özdeğer sorununa geçmek yeterlidir. Ancak, genelde, bu özdeğer sorunu çok daha yüksek boyutlu olur ve çözümünün daha zor olacağı düşünülebilir. Ama, aslında bu sorundaki dizeyin 0 olmayan özdeğerlerinin $\mathbf{C}$'nin 0 olmayan özdeğerleriyle örtüştüğü, 0 özdeğerlerin sayısının $\mathbf{C}$'dekinden değişik olabileceği bilinen bir gerçektir. Yani, değişiklik sıfır uzaylarında ortaya çıkar. Bu sorunun özyöneylerinin de $\bar{\mathbf{c}}$ yöneylerinden değişik olabileceğını görmek olanaklıdır. Sonuç olarak küçük olan özdeğer sorununu çözmek ve orada bulunan özyöneylerden (ya da özkatlıyöneylerden) özkatlıyöneylere (ya da özyöneylere) geçmek yeğlenen bir yaklaşımdır.

Yukarıdaki özdeğer sorununda birden çok sayıda özyöney daha doğrusu tüm özyöneyler, tek bir atılımda, saptanabilirler ve böylece ayrıştırım da bütünüyle gerçekleştirilmiş olur.

6. YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİNE DAYALI KATLIYÖNEY AYRIŞTIRIMI

6.1 Giriş

Önceki bölümlerde, BEBBYT'nda önerilen ve kullanılmaya başlanılmış olan, katlıyöney (ing: folvec), katlıdizey (ing: folmat), katlıdizi (ing: folarr) kavramları ve onlarla ilgili belli düzeyde ayrıntı verilmişti. Bu arada, Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG) (ing: High Dimensional Model Representation (HDMR)) ile ilgili de bir takım temel öğelerden sözedilmişti. Bu altbölümde bu bilgileri yinelemeyecek ancak katlıyöneylerin ayrıştırımında YBGM'nin nasıl devreye sokulabileceği üzerinde belli bir düzeyde duracağız.

6.2 YBMG Tabanlı Üçyönlü Dizi Ayrıştırımı

Bu altbölümde "Üçyönlü Dizi Ayrıştırımı'na" (ing: Decomposition of Three-way Arrays), özellikle de, bu tür dizilerin YBMG tabanlı ayrıştırımına odaklanacağız. Bunun nedeni üçyönlülüğün, çokyönlülüğün sıradan olmayan en alt düzeyi olması ve böylece anlatımın olabildiğince yalın olmasının istenmesidir.

Üçyönlü bir diziyi ya da daha doğrusu katlıyöneyi göstermek için, YBMG ile daha yoğun bir çağrıştırım sağlamak amacıyla, $\mathbf{f}$ simgesini kullanabiliriz. Ama bir katlıyöneyin bütünsel gösteriliminde daha önce önerdiğimiz gösterilim kurallarına uymak amacıyla daha iyi bir gösterilim olarak $\mathbf{f}^{(3,0)}$'ı da kullanabiliriz. Ancak, gerektiğinde başka amaçla üstsırasayı kullanımına olanak sağlayabilmek amacıyla, burada yine de, $\mathbf{f}$ kullanımını yeğleyeceğiz. Bu katlıyöneyin yani $\mathbf{f}$'nin öğelerinin genel yapısı ise, üç altsırasayı kullanarak, $f_{i_1,i_2,i_3;}$ ile simgelenebilir. Burada, daha önceden de belirtildiği gibi, katlıyöney tanımında yataysıra ile düşeysıra kimliklendiren altsırasayıları birbirinden ayırdedebilmek için noktalı virgül kullanılmaktadır. Noktalı virgülün solundaki ve sağındaki altsırasayılar, sırasıyla, yataysırasayı ve düşeysırasayı niteliklidirler. Katlıyöneylerde değişken düşeysırasayı bulunmamaktadır. Değişken yataysırasayı bulundurmayan diziler ise katlıyöney devrikleri olarak düşünülmektedirler. Burada altsırasayıları simgeleyen i_1, i_2, i_3 artı tamsayıları göstermekte olup (1'den başlayıp birer birer artan tamsayılardan oluşan) sonlu alt kümelerden değer almaktadırlar. Yani, n'ler aynı olmak zorunda bulunmayan artı tamsayılar olmak üzere, $1 \leq i_1 \leq n_1$, $1 \leq i_2 \leq n_2$, $1 \leq i_3 \leq n_3$ yazılabildiği varsayılmaktadır. i_1, i_2, i_3 büyüklükleri ayrık değişken görevi üstlenmekte olup, tanım bölgelerinin uçlarının değişmez olması nedeniyle de, dikgen (ing: orthogonal) bir uzamsal (geometrik) yapı taşımaktadırlar. **f**, yukarıda anlatılanlar bağlamında, üçdeğişkenli bir yapı taşımaktadır. Onun YBMG anlatımı yazılmak istenirse, tek bir değişmez terimden üreyen bir dizi, salt bir altsırasayıya göre değer değişimi gösteren üç dizi, yalnızca iki altsırasayıya göre değişim gösteren üç dizi, ve de, tüm altsırasayılara göre değişebilen tek bir dizinin toplamı gündeme getirilmeli yani YBMG ile tutarlı olarak sekiz terim içeren bir anlatım oluşturulmalıdır. Böylece, u'lar 1 değerini alan büyüklükler ($u_{i_j;}^{(j)}$'de üstsırasayı öğe sayısını belirtmek üzere tanımlanan bir yönlü katlıyöneyler, diğer bir deyişle sıradan yöneyler) olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{i_1,i_2,i_3;} &= f^{(0)} u_{i_1;}^{(1)} u_{i_2;}^{(2)} u_{i_3;}^{(3)} + \sum_{j=1}^{3} f_{i_j;}^{(j)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} u_{i_k;}^{(k)} + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{3} f_{i_j,i_k;}^{(j,k)} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j,k}}^{3} u_{i_\ell;}^{(\ell)} + f_{i_1,i_2,i_3;}^{(1,2,3)}, \\ & \quad 1 \leq i_j \leq n_j, \quad j = 1,2,3 \end{aligned} \qquad \textbf{(6.1)}$$

yazabiliriz. Burada, aslında herbiri 1 değerinde olduğu için yazılmasa da eşitliğin geçerli kalabilecek olmasına karşın, $u_{j_1;}^{(1)}$, $u_{j_2;}^{(2)}$ ve $u_{j_3;}^{(3)}$ simgelerinin açık olarak belirtilmesinin nedeni altsırasayılara bağımlılığın nasıl olduğunu kuşkuya yer bırakmayacak biçimde vurgulama amacıdır. Böylece, YBMG anlatımındaki ilk terim tüm öğeleri aynı bir değere, $f^{(0)}$'a eşit olan bir üçyönlü katlıyöney olma durumundadır. Diğer bir deyişle, değişmez bir katlıyöneydir. Anlatımda üç ayrı terimin toplamı olarak verilen ikinci kesim terimler, sırasıyla ikinci ile üçüncü, birinci ile üçüncü, birinci ile ikinci yönlerde, öğe değerleri değişmez kalan katlıyöneyler olma durumundadır. Öğelerin değerlerinin değişebildiği kalan yönlerde bu dizilerin aldığı öğe değerleriyse, sırasıyla, $f_{i_1;}^{(1)}$, $f_{i_2}^{(2)}$, $f_{i_3}^{(3)}$ olmaktadır. (**6.1**) eşitliğinin sağ yanındaki ikinci toplamda durum biraz daha değişiktir ve öğelerin değişmez kaldığı yönlerin sayısı herbir toplamsal terim için artık iki değil birdir. Değişimin varolduğu yönlerdeki öğe değerleriyse, sırasıyla $f_{i_1,i_2}^{(1,2)}$, $f_{i_1,i_3}^{(1,3)}$, $f_{i_2,i_3}^{(2,3)}$ olarak ortaya konulmaktadır. Tek bir bileşen olarak ortaya çıkan son terim ise, her üç yönde de değişim gösterebildiğinden, öğeleri salt $f^{(1,2,3)}_{i_1,i_2,i_3}$ ile simgelenmektedir.

Alt ve üst sırasayılarla kimliklendirilen f'ler katlıyöneylerdir ve türleri alt topluluklar oluşturacak biçimde aynı kalabilen ama genelde değişik olabilen büyüklüklerdir. Bunlar aslında, "YBMG Bileşenleri" olarak da adlandırılabilirler. Nedeni onların değerlerinin bilinmesiyle YBMG'nin anlam kazanacak olmasıdır. Bunlar, gösterilimde artan çokdeğişkenlilik sıralamasına göre yer alıyor olmalıdırlar. Öte yandan, (**6.1**)'in her iki yanı türleri bütünüyle aynı olan anlatımlardan oluşmaktadır. Yani, aslında, sağ yandaki herbir çarpımsal terimde, çarpım eylemi, aynı tür diziler yaratmaktadır. Bu nedenle, (**6.1**)'in sağ yanındaki herbir toplananın "Eştür YBMG Bileşeni" olarak adlandırılması akla uygun gelmektedir.

6.3 YBMG Eştür Bileşenlerinin Bütünsel Anlatımı

Kolayca ayırdına varılabileceği gibi (**6.1**) eşitliğinde "YBMG Öğesel Anlatımı" verilmektedir. Öğelerin ya da altsırasayıların açık olarak verilmediği, bir anlamda kısayol anlatımı olan, bir bağıntının yazılması da düşünülebilir. Bunun gerçekleştirilebilmesi için bazı ön bilgilerin elde edilmesi ya da oluşturulması gerekmektedir. Bu amaçla, ilk eştür bileşenle ilgilenerek yola çıkabiliriz. Eğer,

$$f^{(0,e)}_{i_1,i_2,i_3} \equiv f^{(0)} u^{(1)}_{i_1;} u^{(2)}_{i_2;} u^{(3)}_{i_3;}, \qquad 1 \leq i_j \leq n_j, \quad j = 1,2,3 \qquad \textbf{(6.2)}$$

$$\mathbf{u}^{(j)} \equiv \left[u^{(j)}_{1;} \; ... \; u^{(j)}_{n_j;} \right]^T, \qquad j = 1,2,3 \qquad \textbf{(6.3)}$$

tanımlamaları yapılacak olursa ve öğeleri $f^{(0,e)}_{i_1,i_2,i_3}$ ile verilen üçyönlü katlıyöney (burada (0) üstsırasayısı salt YBMG'nin değişmezini, bir anlamda sıfır yönlülüğü yansıtmak üzere kullanılmakta olup, katlıyöney türü, bu altbölümde aynı kaldığı yerlerde, üstsırasayı olarak ayrıca belirtilmek istenmediğinden, katlılık türüyle ilişkilendirilmemektedir) $\mathbf{f}^{(0,e)}$ ile simgelenecek olursa (**6.2**) tanımı aşağıdaki kısayol anlatımıyla verilebilir

$$\mathbf{f}^{(0,e)} = f^{(0)} \mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(2)} \otimes \mathbf{u}^{(3)}. \qquad \textbf{(6.4)}$$

Burada tam yapıyı çıkarabilmek için yetecek olan $\mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(2)}$ anlatımıyla verilen "Dışçarpım" ya da "Kronecker Çarpımı" denilen işlemin açık yapısı aşağıda verilmektedir

$$\mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(2)} \equiv \left[u^{(1)}_{1;} \mathbf{u}^{(2)^T} \; \ldots \; u^{(1)}_{n_1;} \mathbf{u}^{(2)^T} \right]^T \tag{6.5}$$

Bu çarpım sonucunda üretilen terim aslında $u^{(1)}_{i_1;} u^{(2)}_{i_2;}$ olmakta yani bir yönlü iki katlıyöneyin öğelerinin çarpımı olmaktadır. Ancak bu çarpımda i_1; ile i_2; altsırasayı kimlikleri, dışçarpımın tanımı gereği, çarpımda i_1, i_2; olarak gündeme gelmelidir. Bu durum, (**6.4**)'te neden dışçarpımın gündeme getirildiğinin açıklamasıdır. Ancak, orada bir de sayıl ile ($f^{(0)}$ ile) çarpma işlemi de söz konusudur. $\mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(2)} \otimes \mathbf{u}^{(3)}$ üçyönlü bir katlıyöney oluşturduğundan sayılla çarpım demek bu katlıyöneyin her bir öğesinin aynı sayılla çarpımı demektir. Yani YBMG eştür değişmez bileşeninin bütünsel anlatımı (**6.4**) eşitliğiyle doğru olarak verilmektedir.

Yukarıda da belirtildiği üzere, YBMG öğesel anlatımının salt bir yönde öğesel değer değiştirebilen terimleri (bunlara kısaca "Birli Terimler" adını verebiliriz) anlatımdaki ilk toplam altında bulunan üç eştür bileşendir. Bunlardan ilki için, üçyönlü bir katlıyöney anlatımı olarak,

$$f^{(1,e)}_{i_1,i_2,i_3;} \equiv f^{(1)}_{i_1;} u^{(2)}_{i_2;} u^{(3)}_{i_3;}, \qquad 1 \leq i_j \leq n_j, \;\; j = 1,2,3 \tag{6.6}$$

$$\mathbf{f}^{(1,e)} \equiv \mathbf{f}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(2)} \otimes \mathbf{u}^{(3)} \tag{6.7}$$

tanım eşitlikleri verilebilir. Bunlarda $\mathbf{f}^{(1)}$ ve $f^{(1)}_{i_1;}$ ile, sırasıyla, eştür bileşenin bir yöndeki (1 ile kimliklendirilen yön) değişiminin nedeni olan bir yönlü katlıyöney (ya da sıradan yöney) ve ona karşılık gelen bileşenleri simgelenmektedir. $\mathbf{f}^{(1,e)}$ 1 yönündeki eştür YBMG bileşenini simgelemek üzere (**6.6**) ile (**6.7**) ilk birli bileşenin, sırasıyla öğesel ve bütünsel anlatımlarını göstermektedir. Bu anlatımların ikinci ve üçüncü birli bileşenler için oluşturulması hiç de zor değildir. Sonuçlar, ara aşamalar verilmeksizin, aşağıda sunulmaktadır.

$$f^{(2,e)}_{i_1,i_2,i_3;} \equiv u^{(1)}_{i_1;} f^{(2)}_{i_2;} u^{(3)}_{i_3;}, \qquad 1 \leq i_j \leq n_j, \;\; j = 1,2,3 \tag{6.8}$$

$$\mathbf{f}^{(2,e)} \equiv \mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{f}^{(2)} \otimes \mathbf{u}^{(3)} \tag{6.9}$$

$$f^{(3,e)}_{i_1,i_2,i_3;} \equiv u^{(1)}_{i_1;} u^{(2)}_{i_2;} f^{(3)}_{i_3;}, \qquad 1 \leq i_j \leq n_j, \;\; j = 1,2,3 \tag{6.10}$$

$$\mathbf{f}^{(3,e)} \equiv \mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{u}^{(2)} \otimes \mathbf{f}^{(3)} \qquad \mathbf{(6.11)}$$

YBMG'nin öğesel anlatımındaki ikinci toplam iki yönde değişim gösterebilen katlıyöneylerden oluşmaktadır. Bunlara "İkili Bileşenler" denilebilir. Bunlardan birincisi ve üçüncüsü için aşağıdaki öğesel ve bütünsel tanım eşitlikleri yazılabilir.

$$f^{((1,2),e)}_{i_1,i_2,i_3;} \equiv f^{(1,2)}_{i_1,i_2;} u^{(3)}_{i_3;}, \qquad 1 \le i_j \le n_j, \quad j = 1,2,3 \qquad \mathbf{(6.12)}$$

$$\mathbf{f}^{((1,2),e)} \equiv \mathbf{f}^{(1,2)} \otimes \mathbf{u}^{(3)} \qquad \mathbf{(6.13)}$$

$$f^{((2,3),e)}_{i_1,i_2,i_3;} \equiv u^{(1)}_{i_1;} f^{(2,3)}_{i_2,i_3;}, \qquad 1 \le i_j \le n_j, \quad j = 1,2,3 \qquad \mathbf{(6.14)}$$

$$\mathbf{f}^{((2,3),e)} \equiv \mathbf{u}^{(1)} \otimes \mathbf{f}^{(2,3)} \qquad \mathbf{(6.15)}$$

Bu eşitliklerde üstsırasayısında e olan büyüklükler YBMG eştür bileşeni göstermekte olup, bir üstsırasayı ikilisiyle kimliklendiren f'ler ilgili katlıyöneyin o büyüklüğün üstsırasayısında belirtilen yönlerde değişimini yansıtan birer ikiyönlü katlıyöneyi simgelemektedir. Buraya dek görüldüğü gibi dışçarpımda sıra önem kazanmaktadır. Ancak, doğru kullanılsa da sıralamanın yetersiz kalabildiği durumlar da söz konusu olabilmektedir. Ikili YBMG bileşenlerinden ikincisi bu türden bir yapı göstermektedir. Bu durumda aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$f^{(1,3)}_{i_1,i_2,i_3;} \equiv u^{(2)}_{i_2;} f^{((1,3)y)}_{i_1,i_3;}, \qquad 1 \le i_j \le n_j, \quad j = 1,2,3 \qquad \mathbf{(6.16)}$$

Ancak, buradan salt dışçarpım kullanımıyla bütünsel bir anlatıma geçmek olanaklı değildir. Bunun nedeni de, i_1, i_2, i_3 altsırasayılarının bu sırayı koruduğu biçimde, yalnız dışçarpım içeren, bir anlatım yazmanın olanaksız olmasıdır. Burada $u^{(2)}_{i_2;}$'nin yerleşimi olarak iki seçenek söz konusudur ve bu seçeneklerde i'lerin sıralanımı ya i_2, i_1, i_3 ya da i_1, i_3, i_2 olmalıdır. Oysa dışçarpım sonucunda aranan yapı i_1, i_2, i_3'tür. Bu yapıya erişmek için yukarıda belirtilen seçeneklerden herbirinde altsırasayı değişimi yaratan işleçler kullanım yoluna gidilmelidir. Eğer öğelerinin genel anlatımı $a_{i_1,i_2,i_3;}$ ile verilen bir **a** üçyönlü katlıyöneyi gözönüne alınırsa ve işleç altında **a** üçyönlü katlı yöneyinin görüntüsü olan üçyönlü katlıyöney **b** ile simgelenirse, aşağıdaki altsırasayıda yerdeğiştirim sağlayan işleç (ing: operator) tanımları yapılabilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} &\equiv \widehat{Y}_{1,2}\mathbf{a} &\Longrightarrow\quad & b_{i_2,i_1,i_3} = a_{i_1,i_2,i_3}, \\
\mathbf{b} &\equiv \widehat{Y}_{1,3}\mathbf{a} &\Longrightarrow\quad & b_{i_3,i_2,i_1} = a_{i_1,i_2,i_3}, \\
\mathbf{b} &\equiv \widehat{Y}_{2,3}\mathbf{a} &\Longrightarrow\quad & b_{i_1,i_3,i_2} = a_{i_1,i_2,i_3}.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Bu altsırasayıda yerdeğiştirim işleçlerinin önemli bir özelliği 2 ile tam bölünebilen tüm üslülerinin (çift üslüler) etkisiz ya da birim işleç olmasına karşın, 2 ile kalanlı bölünebilen üslülerinin (tek üslüler) özüne yani kendine eşdeğer olmasıdır. Bu özellikler onların kullanımını olabildiğince kolaylaştırır.

Bu durumda, (**6.16**) eşitliğinin bütünsel karşılığı için aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklı olacaktır.

$$\mathbf{f}^{(1,3)} \equiv \widehat{Y}_{1,2}\left(\mathbf{u}^{(2)}\mathbf{f}^{((1,3)y)}\right) \equiv \widehat{Y}_{2,3}\left(\mathbf{f}^{((1,3)y)}\mathbf{u}^{(2)}\right) \tag{6.18}$$

Yukarıda anlatılanlar, YBMG bileşenlerinin bütünsel anlatımlarının üretiminde “Altsırasayısal Yerdeğiştirim İşleci” (ing: İndicial Permutation Operator) ya da “Yönde Yerdeğiştirim İşleci” (ing: Directional Permutation Operator) diye adlandırabileceğimiz, tür de değiştirebilen, işleçlerden yararlanmak gerekebileceğini göstermektedir. Bu gereksinimin her bileşende ortaya çıkmayabileceği yukarıda gösterilmişti. Burada üçyönlü katlıyöneylere odaklanılmış olunmakla birlikte olayın kavramsal olarak daha çok yönlü katlıyöneyler için de geçerli kalmakta olduğunu vurgulamakta yarar bulunmaktadır. Çokyönlülük arttıkça tek bir altsırasayı değişiminin yeterli kalamayabileceği de, burada açık kanıtı verilmemekle birlikte, gözlemlerimizden bilinmektedir. O durumlarda, anlatım için tek bir yerdeğiştirim kullanımı yeterli olmayabildiği, ancak birden çok ardışık altsırasayı yerdeğiştirimlerinin kullanımıyla anlatımın elde edilebileceği, yapıdan çok zorlanmadan çıkarılabilecek bir olgudur.

YBMG öğesel anlatımının son terimi tek bir katlıyöneyden oluşmakta olduğundan öğesel ve bütünsel anlatımlar kolaylıkla yazılabilir ve aşağıdaki özdeşlikler elde edilebilirler:

$$f^{((1,2,3),e)}_{i_1,i_2,i_3;} \equiv f^{(1,2,3)}_{i_1,i_2,i_3;} \tag{6.19}$$

$$\mathbf{f}^{((1,2,3),e)} \equiv \mathbf{f}^{(1,2,3)}. \qquad (\mathbf{6.20})$$

Buraya dek elde edilen bütünsel anlatımlar birleştirilecek olursa "YBMG Bütünsel Anlatımı" olarak aşağıdaki tanım eşitliğine varılabilir.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(0,e)} + \mathbf{f}^{(1,e)} + \mathbf{f}^{(2,e)} + \mathbf{f}^{(3,e)} + \mathbf{f}^{((1,2),e)} + \mathbf{f}^{((1,3),e)} + \mathbf{f}^{((2,3),e)} + \mathbf{f}^{((1,2,3),e)} \qquad (\mathbf{6.21})$$

6.4 Bileşen Belirlemede Temel Öğeler

(**6.21**)'de verilen **f** üçyönlü katlıyöneyinin belirlenimi için aynı türden sekiz bileşenin saptanımını gerekli kılar. (**6.21**)'in sağyanındaki tüm bileşenler aynı türden olmakla birlikte içlerinde, üstsırasayılarla kimliklendirilmiş ve f'lerle simgelendirilmiş değişik yönlülük ya da "çokdeğişkenlilik" gösteren çarpanlar barındırmaktadırlar. Bunun da ötesinde, bu çarpanlar, çokdeğişkenlilikleri artan topluluklar olarak sıralanmışlardır. Aynı çokdeğişkenlilik düzeyinde olanlar da aralarında yön sıralanımına göre sıralanmışlardır. Böylece, verilen tek bir büyüklük için sekiz bilinmeyen bileşen önerilmektedir. Bunların eşsiz olarak belirlenimi için, ister istemez, bileşenlerce sağlanımı gereken bir takım koşullar getirilmelidir. Sürekli işlevler üzerinde oluşturulan YBMG sıfırlanma ya da eşdeğer olarak dikgenlik koşulları olarak adlandırılan koşulların kullanımıyla bileşenlerin belirlenmesini amaçlar ve bu amaçla da eşsiz çözümü kolayca bulunabilen denklemler oluşturur. Bu yapılırken gerek sıfırlanma gerekse dikgenlik koşullarında tümlev kullanılır. Aynı tümlev dikgenlik ve onun içinde açı tanımına olanak sağlayacak iççarpımda ve ondan üretilecek boy tanımında da kullanılır. Bu yoldan ilerleyebilmek için tümlevin değişkenler üzerinde nasıl tanımlanacağının belirtilmesi de gerekir. Tümlev için herşeyden önce birbirlerinden aralıkları bağlamında da bağımsız olarak değişebilen bağımsız değişken kullanımı söz konusu edilmelidir. Bu tür bağımsız değişkenler, genel olarak, birbirlerine heryerde dik olan doğru ya da eğriler üzerinde değişmelidirler. Bu bağımsız değişkenlerin betimlediği yer kimliklendirimine "Dikgen Uzam" (ing: Orthogonal Geometry) denilir. Örnek olarak Kartezyen ya da Yuvarsal Uzam (ing: Spherical Geometry) verilebilir. Tümlev tanımında kullanılan uzam'a "YBMG Uzamı" (ing: HDMR Geometry) adını vereceğiz. Özel olarak belirtilmedikçe, kartezyen konaçların (koordinatların) kullanılmakta olduğunu öngöreceğiz.

YBMG tümlev tanımlarında ağırlık da kullanılabildiğini daha önceden belirtmiştik. Ağırlık kullanımını H. Rabitz gündeme getirmiştir. Bileşen belirlemede ortaya çıkabilen tutarsızlık sorunlarından kaçınmak için, tüm bağımsız değişkenlere bağımlı olan "Bütünsel Ağırlık İşlevi'nin" herbiri salt değişik bir bağımsız değişkene bağımlı olan ve tüm bağımsız değişkenleri ille de taramak zorunda olmayan (bazıları birim değişmez işlev olarak kalabilirler) bir değişkenli ağırlık işlevlerinin çarpımı olarak yazılabildiği öngörülür. Ayrıca YBMG bileşenleri için olabildiğince yalın anlatımlar elde edebilmek amacıyla bu herbir işlevin bağımsız değişkenine göre YBMG'nde tanımlı aralığı üzerinde tümlevi de 1 alınır (birim tümlevlileştirim).

Sıradan Doğrusal Cebir'deki yöneyler arasında ağırlıklı iççarpım anımsatılmak istenirse, **a** ve **b** aynı kartezyen uzayda bulunmak üzere, bu uzay için ağırlıklı iççarpım aşağıdaki özdeşlikle verilir

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})_W \equiv \mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{b} \qquad (\mathbf{6.22})$$

Eğer, kolaylık açısından, tanımlama gerçel öğeler üzerinde kısıtlanırsa, iççarpımda bakışımın sağlanması için **W** dizeyinin (Sıradan Doğrusal Cebir'deki dizey anlamında) bakışık olması gerekir. Öte yandan iççarpım işlevimsisinin (ing: functional) önemli bir özelliği herhangi bir yöneyin kendisiyle iççarpımının o yöneyin boy dördülünü verme zorunluluğudur. Bunun (**6.22**)'deki tanımca sağlanması için

$$\|\mathbf{a}\|_W^2 \equiv \mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i W_{i,j} a_j \qquad (\mathbf{6.23})$$

eşitliğinin sağ yanındaki anlatımın **a** yöneyi **0** olmadıkça hep artı değer üretmesi gerekir. Sağ yanda görünen dördül işlev'in (ing: quadratic form) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ için artı kalabilmesinin tek yolu **W** dizeyinin artı tanımlı olmasıdır. **W**'nin hem bakışıklığını hem de artı tanımlılığını güvence altına alabilmek için, Ω evirtilebilen (ing: invertable) bir dizey olmak üzere,

$$\mathbf{W} \equiv \Omega^T\Omega \qquad (\mathbf{6.24})$$

tanımı yapılabilir. Burada evirtilebilir olmak koşuluyla, Ω dizeyi istenildiği gibi seçilebilir. Ancak, ağırlık yapılandırımında temel düşünce dizilerle tanımlanan verilerin değerlerine değişik önemler vermek olduğundan, bu seçim sanıldığı düzeyde de belirsiz değildir. Verilerin ya da işlenmekte olan dizilerin yapısı oldukça belirleyici öğedir.

Burada, YBMG'deki tümlevlileştirim bir bağımsız değişkenli bir ağırlık çarpanı (sözgelimi $w(x)$) için, $u(x)$ ($x \in [a,b]$) hep 1 değerini alan işlevi simgelemek üzere,

$$\int_a^b dxw(x) =\equiv \int_a^b dxu(x)w(x)u(x) = 1 \tag{6.25}$$

eşitlikleriyle verilir. Bunun ayrık durum karşılığı, $\mathbf{u}$, n sayıda 1 öğeden oluşan yöney olmak üzere

$$\sum_{i,j=1}^{n} W_{i,j} = \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u} = 1 \tag{6.26}$$

cebirsel eşitliğidir. Sağyanda görünen dördül işlev artı olmak zorunda olacağından **W** yapılandırımında öğeler üzerine bu gerçekleştirilebilir koşulu da getirmek gerekir.

W'nin genellikle olabildiğince kolay yapıda seçilmesi yeğlenir. Onun bakışık ve artı tanımlı olması ω'lar bir takım artı özdeğerleri, **w**'ler onlara karşılık gelen birimboylulaştırılmış özyöneyleri simgelemek üzere

$$\mathbf{W} \equiv \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{w}\mathbf{w}^T, \qquad \omega_i > 0, \;\; 1 \le i \le n, \qquad \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{i,j}, \;\; 1 \le i,j \le n \tag{6.27}$$

yazmak olanaklıdır. Yukarıdaki kısıtlamaları sağlayacak yapılandırım için n sayıda doğrusal bağımsız yöney seçip onları dikgenleştirmek ve birimboylulaştırmak (burada kullanılan iççarpım birim ağırlık dizeylidir) yeterlidir. Ancak, artı değerli olarak seçilmesi gereken ω_i değiştirgeleri (parametreleri) aralarında bağımsız kalamazlar. (**6.26**) eşitliğini sağlayacak biçimde seçilmelidirler. Bu ise

$$\mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\mathbf{u}^T\right)^2 = 1 \tag{6.28}$$

anlamına gelir. Buradan ω'lardan birisinin diğerleri türünden seçilebilmesi yanısıra (**6.27**)'deki toplama giren herbir terimin (**6.28**)'teki toplamdan üretilen değere bölünmesiyle elde edilecek ağırlık dizeyini kullanmak da olanaklıdır. Bu ikinci durumda, ω değerlerinde artılık dışında başka bir kısıt kalmamış olur.

Yukarıda iççarpım tanımında kullandığımız ve içinden **a** ile **b** yöneylerini aldığımız uzay konaç eksenlerini (koordinat eksenlerini) **W** dizeyinin asal eksenleri (özyöneylerince örtülen bir boyutlu eksenler) olarak seçilecek olursa **W**'nin izgesel gösterilimdeki birimboylu **w** özyöneyleri yerine **e** ile simgelenen, birimboylu, yalnız bir öğesi 1 diğerleri 0 olan ve birbirine dik olan, yöneyler kullanılabilir. Bu ise **W** dizeyinin uygun bir döndürüm sonrasında köşegen dizey olarak seçilmesinin yerinde olacağı anlamına gelir. Bu olgu daha önce belki biraz daha değişik düzeyde dile getirmiş olduğumuz bir gerçektir.

Yukarıda, sıradan yöney ve dizey kullanımıyla dile getirilen olgular aslında salt bir sırasayılı yöneylerce örtülen uzaylarla ilgiliydi. Tek bir sırasayı içeren ya da sıradan diye nitelendirebileceğimiz bir yöneyin aslında bir yönlü bir katlıyöney olarak betimlenebileceği daha önceki anlatımlarımızdan da çıkarılabilecek bir başka olgudur. Bununla ilgili bilgiler çok zorluk çekmeden üçyönlü katlıyöneylere de aktarılabilir. Bu amaçla, **a** ile simgeleyeceğimiz üçyönlü bir katlıyöneyin ağırlıklı boy dördülü aşağıdaki tanım eşitliğiyle verilebilir.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\|^2 &\equiv \mathbf{a}^T\mathbf{W}\mathbf{a} \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\sum_{i_3=1}^{n_3}\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\sum_{j_3=1}^{n_3} a_{;i_1,i_2,i_3} \\ &\quad \times W_{i_1,i_2,i_3;j_1,j_2,j_3} a_{j_1,j_2,j_3;}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Burada **W** ile gösterilen ve dördül bir katlıdizey olan büyüklük “Ağırlık Katlıdizeyini” göstermektedir. Bu katlıdizeyin yataysıra katlılığı ile düşeysıra katlılığı eşit ve 3 değerindedir. **W**’nin bakışık ve artı tanımlı olması da gerekmektedir. Bunun yanısıra

$$\left[\mathbf{u}^{(1)}\otimes\mathbf{u}^{(2)}\otimes\mathbf{u}^{(3)}\right]^T \mathbf{W}\left[\mathbf{u}^{(1)}\otimes\mathbf{u}^{(2)}\otimes\mathbf{u}^{(3)}\right] = 1 \tag{6.30}$$

bütünsel eşitliğini de sağlamalıdır.

W katlıdizeyinin YBMG yapısına uygun biçimde çarpımsal olarak düşünülmesi daha uygun gözükmektedir. Böylece, burada, öğesel düzeyde

$$W_{i_1,i_2,i_3;j_1,j_2,j_3} \equiv W^{(1)}_{i_1,j_1}W^{(2)}_{i_2,j_2}W^{(3)}_{i_3,j_3} \tag{6.31}$$

dolayısıyla bütünsel düzeyde de

$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}^{(1)}\otimes\mathbf{W}^{(2)}\otimes\mathbf{W}^{(3)} \tag{6.32}$$

öngörümlerinin geçerli olduğunu varsayacağız. Bu öngörümün (**6.30**)’da kullanımı

$$\begin{aligned}&\left[\mathbf{u}^{(1)}\otimes\mathbf{u}^{(2)}\otimes\mathbf{u}^{(3)}\right]^T \left[\mathbf{W}^{(1)}\otimes\mathbf{W}^{(2)}\otimes\mathbf{W}^{(3)}\right]\left[\mathbf{u}^{(1)}\otimes\mathbf{u}^{(2)}\otimes\mathbf{u}^{(3)}\right] \\ &\quad = \left(\mathbf{u}^{(1)^T}\mathbf{W}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)}\right)\left(\mathbf{u}^{(2)^T}\mathbf{W}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)}\right)\left(\mathbf{u}^{(3)^T}\mathbf{W}^{(3)}\mathbf{u}^{(3)}\right) = 1\end{aligned} \tag{6.33}$$

eşitliğine götürür. Bunu tek bir eşitlik gibi kullanmak olanaklı olmakla birlikte son eşitliğin sol yanında bulunan her bir sayıl çarpanın ayrı ayrı 1'e eşit alınacak biçimde çarpan ağırlıklara bireysel koşul getirmek de olanaklıdır. Burada bu ikinci yolu yeğleyeceğiz. Böylece, son eşitlikten

$$\mathbf{u}^{(i)^T}\mathbf{W}^{(i)}\mathbf{u}^{(i)} = 1, \qquad i = 1,2,3 \tag{6.34}$$

eşitlikleri üretilebilir. Bunlar bütünsel değil, her bir çarpan üzerinde, ya da her bir yönde, verilen birimleştirim denklemleridir. Çarpanları, daha önce yukarıda ayrıntılandırılan biçimde, yapılandırmak olanaklıdır. Bu bağlamda, dolu bir dizey yerine köşegen dizey seçimine gitmek ve öğeleri de yukarıda belirtilen biçimde seçmek uygulamada önemli kolaylıklar sağlar.

6.5 İzdüşüm İşleçleri ve YBMG Koşulları

YBMG'nin bütünsel anlatımı, **f**'nin türünde üçyönlü bir katlıyöneysel eşitliktir ve $n_1n_2n_3$ bağımsız eşitliğe karşılık gelebilecek niteliktedir. Ancak, işlevler üzerindeki YBMG'nde bu öğesel eşitlikler yerine daha çok izdüşüm eylemine dayandırılmış denklemler kullanılmaktadır. Dolayısıyla, burada da aynı yaklaşımı sergilemek yerinde olacaktır.

İlk olarak, **f** türünde üçyönlü katlıyöneylerden yönsüz katlıyöneylere (sayıllar) izdüşüm sağlayacak bir izdüşüm işleci tanımlayalım. Bu bağlamda, **f** türünde herhangibir **a** yöneyine etkisi aşağıda verilen eşitlikle verilen bir $\widehat{P}_0$ işleci tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_0\mathbf{a} &\equiv \left[\mathbf{u}^{(1)}\otimes\mathbf{u}^{(2)}\otimes\mathbf{u}^{(3)}\right]^T\left[\mathbf{W}^{(1)}\otimes\mathbf{W}^{(2)}\otimes\mathbf{W}^{(3)}\right]\mathbf{a} \\
&= \left[\left(\mathbf{u}^{(1)^T}\mathbf{W}^{(1)}\right)\otimes\left(\mathbf{u}^{(2)^T}\mathbf{W}^{(2)}\right)\otimes\left(\mathbf{u}^{(3)^T}\mathbf{W}^{(3)}\right)\right]\mathbf{a}.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Bu eşitlikte **a** yerine $\mathbf{f}^{(0)}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_0\mathbf{f}^{(0)} &\equiv \left[\mathbf{u}^{(1)}\otimes\mathbf{u}^{(2)}\otimes\mathbf{u}^{(3)}\right]^T\left[\mathbf{W}^{(1)}\otimes\mathbf{W}^{(2)}\otimes\mathbf{W}^{(3)}\right]\mathbf{f}^{(0)} \\
&= \left[\left(\mathbf{u}^{(1)^T}\mathbf{W}^{(1)}\right)\otimes\left(\mathbf{u}^{(2)^T}\mathbf{W}^{(2)}\right)\otimes\left(\mathbf{u}^{(3)^T}\mathbf{W}^{(3)}\right)\right]f^{(0)} \\
&\quad\times\left[\mathbf{u}^{(1)}\otimes\mathbf{u}^{(2)}\otimes\mathbf{u}^{(3)}\right] = f^{(0)}\left(\mathbf{u}^{(1)^T}\mathbf{W}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)}\right) \\
&\quad\times\left(\mathbf{u}^{(2)^T}\mathbf{W}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)}\right)\left(\mathbf{u}^{(3)^T}\mathbf{W}^{(3)}\mathbf{u}^{(3)}\right) \quad = \quad f^{(0)}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

sonucuna ulaşılır. Burada, $\times$ ile sayılla çarpma işlemi simgelenmiş olup ağırlık çarpanlarının birimleştirilmişlikleri kullanılmıştır.

Benzer biçimde, birli katlıyöneyler için de $\widehat{P}_0$ işleci altında görüntü saptanabilir. Ara aşamaları açık olarak belirtmeksizin aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

$$\widehat{P}_0 \mathbf{f}^{(i,e)} = \mathbf{u}^{(i)^T} \mathbf{W}^{(i)} f^{(i)}, \qquad i = 1,2,3 \tag{6.37}$$

Yine benzer biçimde, ikililer için de;

$$\widehat{P}_0 \mathbf{f}^{((i,j),e)} = \left[\left(\mathbf{u}^{(i)^T} \mathbf{W}^{(i)} \right) \otimes \left(\mathbf{u}^{(j)^T} \mathbf{W}^{(j)} \right) \right] \mathbf{f}^{(i,j)}, \qquad 1 \leq i < j \leq 3 \tag{6.38}$$

eşitliklerine ulaşılabilir. Üçlü terim içinse

$$\widehat{P}_0 \mathbf{f}^{((1,2,3),e)} = \left[\left(\mathbf{u}^{(1)^T} \mathbf{W}^{(1)} \right) \otimes \left(\mathbf{u}^{(2)^T} \mathbf{W}^{(2)} \right) \otimes \left(\mathbf{u}^{(3)^T} \mathbf{W}^{(3)} \right) \right] \mathbf{f}^{(1,2,3)} \tag{6.39}$$

yazılabilir. (**6.37**), (**6.38**), (**6.39**) eşitliklerinde sağ yanların sıfırlanması durumunda $\widehat{P}_0 \mathbf{f}$ sayılı $f^{(0)}$ sayılıyla çakışır. Yani sayıla izdüşüm sayıl YBMG bileşeninin eşsiz olarak belirlenmesine olanak sağlar. Ancak, bu durum o belirtilen sağ yanlar sıfırlanırsa gerçekleşebilir.

(**6.36**), (**6.37**), (**6.38**) ve de, (**6.39**) eşitliklerindeki sonuç anlatımlar aşağıdaki işleçlerin tanımının işe yarayabileceği izlenimini verir:

$$\widehat{\Pi}_j \mathbf{a} = \mathbf{u}^{(j)^T} \mathbf{W}^{(j)} \times_j \mathbf{a}, \qquad j = 1,2,3. \tag{6.40}$$

Burada bir yönlü çarpım kullanılmakta olup $\times_j$ simgesi ile j. altsırasayının örttüğü doğrultu ya da yön üzerinde çarpım yapıldığı, diğer bir deyişle dizi çarpımlarındaki toplamanın o altsırasayı üzerinden gerçekleştirildiği, anlatılmaktadır. Çok yönlü çarpım tanımlamak da olanaklıdır. Ancak, o durumda, çokyönlü çarpımı, çokyönlülüğü oluşturan herbir yön üzerinde çarpımların ardışık uygulaması görmek olanaklıdır. Üstelik, bu ardışıklıkta sıra gözetim gereksinimi de yoktur. Dolayısıyla, altsırasayıda yerdeğiştirim işleci kullanımına da gereksinim duyurmaz.

Yukarıda tanımlanan bu işleçler bağlamında, gerçekten de, (**6.37**), (**6.38**), (**6.39**) eşitliklerinin sağ yanlarının sıfırlanması demek bu işleçlerin ya da bu işleçlerin ikili veya üçlü dışçarpımlarının altında ilgili YBMG bileşen katlıyöneylerinin görüntülerin (sayıl görüntüler) sıfırlanması demektir.

Ancak, bu sıfırlanmalar diğer bileşenlerin belirlenmesinde tam olarak işe yaramayabilir. Bunu anlayabilmek için $\mathbf{u}^{(i)}$ $(i = 1,2,3)$ türünden yöneylerce örtülen uzaya izdüşüm sağlayan ve $\widehat{P}_i$ $(i = 1,2,3)$ ile simgeleyeceğimiz işleçler tanımlamakta yarar bulunmaktadır. Bu doğrultuda **a**, **f** türünde olan üçyönlü katlıyöneylerden olmak üzere, aşağıdaki tanımları verebiliriz:

$$\widehat{P}_1\mathbf{a} \equiv \left[\mathbf{I}_{n_1} \otimes \left(\mathbf{u}^{(2)^T}\mathbf{W}^{(2)}\right) \otimes \left(\mathbf{u}^{(3)^T}\mathbf{W}^{(3)}\right)\right]\mathbf{a} = \widehat{\Pi}_2\widehat{\Pi}_3\mathbf{a}. \qquad \mathbf{(6.41)}$$

$$\widehat{P}_2\mathbf{a} \equiv \left[\left(\mathbf{u}^{(1)^T}\mathbf{W}^{(1)}\right) \otimes \mathbf{I}_{n_2} \otimes \left(\mathbf{u}^{(3)^T}\mathbf{W}^{(3)}\right)\right]\mathbf{a} = \widehat{\Pi}_1\widehat{\Pi}_3\mathbf{a} \qquad \mathbf{(6.42)}$$

$$\widehat{P}_3\mathbf{a} \equiv \left[\left(\mathbf{u}^{(1)^T}\mathbf{W}^{(1)}\right) \otimes \left(\mathbf{u}^{(2)^T}\mathbf{W}^{(2)}\right) \otimes \mathbf{I}_{n_1}\right]\mathbf{a} = \widehat{\Pi}_1\widehat{\Pi}_2\mathbf{a} \qquad \mathbf{(6.43)}$$

Buradan, öncelikle değişmezli bileşenden, $\widehat{\Pi}_i\mathbf{u}^{(i)} = 1$ gerçeğini kullanarak,

$$\widehat{P}_i\mathbf{f}^{(0,e)} = f^{(0)}\mathbf{u}^{(i)}, \qquad i = 1,2,3 \qquad \mathbf{(6.44)}$$

eşitliklerine; birli bileşenlerden, üretimin ara aşamaları verilmeksizin ve δ Kronecker simgesini göstermek üzere,

$$\widehat{P}_i\mathbf{f}^{(j,e)} = \mathbf{u}^{(i)^T}\mathbf{W}^{(i)}\mathbf{f}^{(j)}\left(1-\delta_{i,j}\right) + \mathbf{f}^{(i)}\delta_{i,j}, \qquad i,j = 1,2,3 \qquad \mathbf{(6.45)}$$

eşitliklerine ulaşılabilir.

İkili bileşenlerden elde edilecek sonuçlar yazım açısından hem daha kapsamlı hem de daha çok koşullamalıdır. Bu yüzden burada açık olara vermeye yeltenmeyeceğiz. Ancak, anlatımlarda ikili YBMG bileşenlerinin bir ya da iki tutarlı (yönleri tutan) $\widehat{\Pi}$ işleci altında görüntülerinin gözükeceğini söylemek olanaklıdır. Üçlülerde de benzer görüntülenim durumu söz konusudur.

Buradaki incelemeler, bileşen belirlenmesinde aranan yalınlık ve kolaylığın aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda elde edilebileceğini ortaya çıkarır:

$$\widehat{\Pi}_j\mathbf{f}^{(k_1,\ldots,k_m)} = \mathbf{0}, \qquad m = 1,2,3, \ \ j \in \{k_1,\ldots,k_m\}. \qquad \mathbf{(6.46)}$$

Burada 0 ile $\widehat{\Pi}_j$ altında izdüşüm eyleminin götürdüğü uzayın içindeki sıfır katlıyöneyi anlatılmaktadır.

6.6 YBMG Bileşenlerinin Saptanımı

Önceki altbölümdeki incelemelerden aşağıdaki özdeşliği üretmek olanaklıdır:

$$\widehat{P}_0 \equiv \widehat{\Pi}_1 \widehat{\Pi}_2 \widehat{\Pi}_3. \qquad \textbf{(6.47)}$$

Bu ise, yukarıdaki YBMG koşulları ve (kolaylık olsun diye, genellikten büyük yitim olmaksızın) köşegen ağırlık varsayımı altında,

$$f^{(0)} = \widehat{P}_0 \mathbf{f} = \widehat{\Pi}_1 \widehat{\Pi}_2 \widehat{\Pi}_3 \mathbf{f} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} f_{i_1,i_2,i_3;} \qquad \textbf{(6.48)}$$

eşitliğine götürür. Burada sağ yan, aslında, verilen katlıyöneyin bir ağırlıklı ortalamasıdır.

Birliler için YBMG'nin her iki yanının (i, j, k değişik artı tamsayılar olmak üzere) $\widehat{\Pi}_j \widehat{\Pi}_k$ altında izdüşümü alınır ve YBMG koşulları kullanılacak olursa, oluşan denklemden aşağıdaki sonuclara ulaşılabilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(i,e)} &= \widehat{\Pi}_j \widehat{\Pi}_k \mathbf{f} - \mathbf{f}^{(0,e)} \quad (i \neq j \neq k) \Longrightarrow \\
f_{i_1}^{(1)} &= \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} f_{i_1,i_2,i_3;} - f^{(0)} \\
f_{i_2}^{(2)} &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_1}^{(1)} w_{i_3}^{(3)} f_{i_1,i_2,i_3;} - f^{(0)} \\
f_{i_3}^{(3)} &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} f_{i_1,i_2,i_3;} - f^{(0)}.
\end{aligned} \qquad \textbf{(6.49)}$$

İkililer için elde edilebilecek sonuçlar da aşağıda sunulmaktadır:

$$\begin{aligned}
f_{i_1,i_2}^{(1,2)} &= \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_3}^{(3)} f_{i_1,i_2,i_3;} - f^{(0)} - f_{i_1}^{(1)} - f_{i_2}^{(2)} \\
f_{i_1,i_3}^{(1,3)} &= \sum_{i_2=1}^{n_2} w_{i_2}^{(2)} f_{i_1,i_2,i_3;} - f^{(0)} - f_{i_1}^{(1)} - f_{i_3}^{(3)} \\
f_{i_2,i_3}^{(2,3)} &= \sum_{i_1=1}^{n_1} w_{i_1}^{(1)} f_{i_1,i_2,i_3;} - f^{(0)} - f_{i_2}^{(2)} - f_{i_3}^{(3)}.
\end{aligned} \qquad \textbf{(6.50)}$$

Üçlü YBMG bileşeni ise, her zaman YBMG'nde yapıldığı gibi, salt bulunanları asıl diziden çıkararak belirlenebilir. Böylece tüm YBMG bileşenleri ve dolayısıyla eştür bileşenleri belirlenmiş olur.

6.7 Diklik Tabanlı Baskınlık Ölçenleri

YBMG koşullarının kullanımıyla, değişik YBMG eştür bileşenleri arasında, ağırlıklı dikgenlik (ing: orthogonality) bulunduğunu göstermek olanaklıdır. Son aşamada verilen açık anlatımlarla da bu kanıtlama oldukça kolay biçimde gerçekleştirilebilir. Bu durumda, bu dikgenlikten dolayı eştür YBMG bileşenlerinin ağırlıklı boy dördüllerinin asıl dizinin boy dördülüne eşit olacağını kanıtlamak oldukça kolaydır. Yani,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}\|_W^2 \;=\;& \left\|\mathbf{f}^{(0,e)}\right\|_W^2+\left\|\mathbf{f}^{(1,e)}\right\|_W^2+\left\|\mathbf{f}^{(2,e)}\right\|_W^2+\left\|\mathbf{f}^{(3,e)}\right\|_W^2+\left\|\mathbf{f}^{((1,2),e)}\right\|_W^2+\left\|\mathbf{f}^{((1,3),e)}\right\|_W^2\\ &+\left\|\mathbf{f}^{((2,3),e)}\right\|_W^2+\left\|\mathbf{f}^{((1,2,3),e)}\right\|_W^2 \end{aligned} \tag{6.51}$$

yazılabilir. Buradan "Dördülde Baskınlık Ölçenleri" ya da kısaca "Baskınlık Ölçenleri" olarak adlandırabileceğimiz aşağıdaki büyüklükleri tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}\beta_0 \;&\equiv\; \frac{\left\|\mathbf{f}^{(0,e)}\right\|_W^2}{\|\mathbf{f}\|_W^2},\;\; \beta_1\equiv\frac{\left\|\mathbf{f}^{(1,e)}\right\|_W^2}{\|\mathbf{f}\|_W^2},\;\; \beta_2\equiv\frac{\left\|\mathbf{f}^{(2,e)}\right\|_W^2}{\|\mathbf{f}\|_W^2},\;\; \beta_3\equiv\frac{\left\|\mathbf{f}^{(3,e)}\right\|_W^2}{\|\mathbf{f}\|_W^2},\\ \beta_{1,2} \;&\equiv\; \frac{\left\|\mathbf{f}^{((1,2),e)}\right\|_W^2}{\|\mathbf{f}\|_W^2},\;\; \beta_{1,3}\equiv\frac{\left\|\mathbf{f}^{((1,3),e)}\right\|_W^2}{\|\mathbf{f}\|_W^2},\;\; \beta_{2,3}\equiv\frac{\left\|\mathbf{f}^{((2,3),e)}\right\|_W^2}{\|\mathbf{f}\|_W^2},\\ \beta_{1,2,3} \;&\equiv\; \frac{\left\|\mathbf{f}^{((1,2,3),e)}\right\|_W^2}{\|\mathbf{f}\|_W^2}. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Bunlar ilgili oldukları bileşenin asıl katlıyöneyin boy dördülüne ne oranda katkıda bulunduğunu betimler ve toplamlarının 1 olması gerekir. YBMG'nin sekiz bileşeninden ilk birkaçı alınarak oluşturulan kesme yaklaştırımının niteliğinin ne olduğu alıkonan eştür bileşenlerin baskınlık ölçenleri toplamının 1 değerine ne düzeyde yakın olduğuna bakılarak anlaşılabilir.

7. UYGULAMA VE UYARILAR

7.1 Ağırlıklı İndirgeyimcil Çokludoğrusal Dizi Ayrıştırımı'nın Uygulama Olanakları

İndirgeyimcil Ayrıştırım, ağırlıklandırılmış olsun ya da olmasın, çarpımsal nitelikli dizilerde daha iyi sonuç verir. Bu altbölümde bu gerçeği yansıtacak kuramsal uygulamalara yer vereceğiz. Bu amaçla, önce "Tam Çarpımsallık" ve "Yarıçarpımsallık" kavramlarını gündeme getirmemiz gerekir. Eğer genel terimi a_{i_1,i_2,i_3} ile simgelenen bir çokludoğrusal dizi için, α'larla simgelenen büyüklükler sıradan yöneyler (yani tek bir altsırasayısı olan diziler) olmak üzere,

$$a_{i_1,i_2,i_3} = \alpha^{(1)}_{i_1}\alpha^{(2)}_{i_2}\alpha^{(3)}_{i_3}, \qquad 1 \le i_j \le n_j, \;\; j = 1,2,3 \tag{7.1}$$

yazılabiliyorsa a_{i_1,i_2,i_3} dizisine "Tam Çarpımsal" adını vereceğiz. Benzer biçimde, ama bu kez sözgelimi,

$$a_{i_1,i_2,i_3} = \alpha^{(1,2)}_{i_1,i_2}\alpha^{(3)}_{i_3}, \qquad 1 \le i_j \le n_j, \;\; j = 1,2,3 \tag{7.2}$$

yazılabiliyorsa a_{i_1,i_2,i_3} dizisine "Yarıçarpımsal" adını vereceğiz. Burada altsırasayılar ilk ikisinden oluşan ile salt sonuncusunu içeren iki ayrışık kümeye ayrılmaktadır. Ayrışımın, (**7.2**)'teki biçimde olması gerekli değildir. i_1 ile i_3'ün çarpanlardan birinde i_2'nin diğerinde olduğu bir ayrıştırım, ya da, i_2 ile i_3'ün çarpanlardan birinde i_1'in diğerinde olduğu diğer bir ayrıştırım Yarıçarpımsal Ayrıştırım türüdür ve dolayısıyla, üçyönlü bir çokludoğrusal dizi toplamda üç ayrı biçimde Yarıçarpımsal Ayrıştırım'a olanak verir. Diğer bir deyişle, bu ayrıştırımda, eşsizlik sözkonusu değildir. Burada odaklanılmamakla birlikte, çokyönlülük arttıkça, Yarıçarpımsal Ayrıştırım olanağı da artar. Dörtyönlü durumda bu tür ayrıştırım sayısı 4 olur. Ancak, (**7.2**) ile verilen tanımda yapısal seçenek sayısı da artar ve, onun yerine, genel anlatımı biri 3 diğeri 1 altsırasayılı olan iki çarpanın çarpımı olarak verilen bir tanım eşitliğiyle her iki çarpanın da 2 altsırasayılı olduğu çarpım içeren tanım eşitliği gündeme getirilebilir. Yani, Yarıçarpımsal Ayrıştırım'da çarpanlardan birisinin ille de 1 altsırasayılı olması gerekmemektedir. Ancak, İndirgeyimcil Ayrıştırım'ın doğasıyla (çokyönlülüğün 1 azaltılması öngörümü) uyumlu kalmak amacıyla burada Yarıçarpımsal Ayrıştırım'ın birisi ille de 1 altsırasayılı (yani sıradan yöney) olan çokludoğrusal iki dizinin çarpımı olan çokludoğrusal dizilerde söz konusu olacağını yani tanımda sıradan yöney çarpan içerim koşulunun varolduğu bir ayrıştırım olduğu tanımını yapacağız.

Verilen bir üçyönlü çokludoğrusal dizinin ille de yukarıda bu iki türden olması gerekmez. Yukarıdaki tanımların sağ yanlardaki türden anlatımların doğrusal birleşimi yapısında yani "Çarpımsallık ve Toplamsallık Karışımlı" nitelikte diziler en genel nitelikte olanlardır. Toplamsallığın artışı "İndirgeyimcil Ayrıştırımı, kavramsal olarak o düzeyde olmasa da, bilgisayım karmaşıklığı açısından kötüleştirir. Bunun nedeni de çözülmesi gereken cebirsel özdeğer sorununun boyutunun artmasıdır. Tam çarpımsal dizilerle toplamsallığı 2 ile kısıtlanan (yani iki çarpımsal terimin toplamı olarak anlatılabilen) dizilerde özdeğer sorununu çözümcül (ing: analytic) nitelikte yani kesin anlatımlı olarak çözmek olanaklıdır. Bu bölümde, "İndirgeyimcil Ayrıştırım" için bu olgulara daha çok odaklanılacak ama sonunda bir uziş (ing: algorithm) anlatımına da yer verilecektir.

7.2 Tam Çarpımsal Üçyönlü Çokludoğrusal Dizilerin Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırımı

(**7.1**) ile verilen yapının kullanımıyla Beşinci Bölüm'de tanımlanan **C** dizeyinin öğeleri için aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

$$C_{j,k} \equiv \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} w_{i_1}^{(1)} \alpha_{i_1}^{(1)^2}\right)\left(\sum_{i_2=1}^{n_2} w_{i_2}^{(2)} \alpha_{i_2}^{(2)^2}\right)\sqrt{w_j^{(3)}}\alpha_j^{(3)}\sqrt{w_k^{(3)}}\alpha_k^{(3)}. \qquad 1 \le j,k \le n_3 \tag{7.3}$$

Buradan kolayca ayırdına varılabileceği üzere, **C** dizeyi, gerçel öğelerden oluştuğu sürece, bakışıktır ve özdüzeyi (ing: rank) de 1'dir. Diğer bir deyişle, bir sıradan yöneyle onun devriğinin çarpımıyla orantılıdır. Bu nedenle, **C** dizeyinin sıfır olmayan yalnızca bir özdeğeri vardır ve o da bakışımdan dolayı gerçel değerlidir. Bu özdeğere karşılık gelen ve $\bar{\mathbf{c}}$ ile simgelenen birimboylulaştırılmış özyöneyinin öğeleri aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$\bar{c}_j = \left(\alpha^{(3)^T}\mathbf{W}^{(3)}\alpha^{(3)}\right)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{w_j^{(3)}}\alpha_j^{(3)}, \qquad j = 1,2,3,\ldots,n_3. \tag{7.4}$$

Burada $\mathbf{W}^{(3)}$, öğeleri $w_j^{(3)}$ ile simgelenen köşegen dizeyi simgelemektedir. **C** dizeyinin bu özyöneye karşılık gelen özdeğeri, Beşinci Bölüm'de belirtildiği üzere, ${\sigma^{(0)}}^2$ olmalıdır. $\mathbf{C}\overline{c}$ büyüklüğünün $\overline{c}$ ile orantılı olduğunu kanıtlamak hiç de zor değildir. O yapılır ve orantı katsayısına bakılırsa ${\sigma^{(0)}}^2$ bulunabilir. Bunun artı dördül kökü (karekökü) $\sigma^{(0)}$ değerini verir. Böylece,

$$\sigma^{(0)} = \left({\boldsymbol{\alpha}^{(1)}}^T \mathbf{W}^{(1)} \boldsymbol{\alpha}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}} \left({\boldsymbol{\alpha}^{(2)}}^T \mathbf{W}^{(2)} \boldsymbol{\alpha}^{(2)}\right)^{\frac{1}{2}} \left({\boldsymbol{\alpha}^{(3)}}^T \mathbf{W}^{(3)} \boldsymbol{\alpha}^{(3)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \mathbf{(7.5)}$$

sonucuna varılır.

Yukarıdaki sonuçlar, yine Beşinci Bölüm'de gündeme getirilmiş bulunan ve ayrıştırımın en baskın teriminde görünen, $\mathbf{c}^{(0)}$ yöneyi için öğesel anlatımın

$$c_j^{(0)} = \left({\boldsymbol{\alpha}^{(3)}}^T \mathbf{W}^{(3)} \boldsymbol{\alpha}^{(3)}\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha_j^{(3)}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n_3 \qquad \mathbf{(7.6)}$$

bağıntısıyla verilmesine olarak sağlar. Bunun kullanımıyla, yine Beşinci Bölüm'de verilmiş bulunan **B** dizeyinin öğelerinin genel anlatımı aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\begin{aligned} b_{j,k}^{(0)} &= \left({\boldsymbol{\alpha}^{(1)}}^T \mathbf{W}^{(1)} \boldsymbol{\alpha}^{(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left({\boldsymbol{\alpha}^{(2)}}^T \mathbf{W}^{(2)} \boldsymbol{\alpha}^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha_j^{(1)} \alpha_k^{(2)}, \\ & \qquad 1 \le j \le n_1, \ \ 1 \le k \le n_2. \end{aligned} \qquad \mathbf{(7.7)}$$

Bu ve (**7.6**)'daki sonuç aşağıdaki, ağırlık altında birimboylulaştırılmış, yöney tanımlarına itekler:

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)} \equiv \left({\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}^T \mathbf{W}^{(1)} \boldsymbol{\alpha}^{(j)}\right)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\alpha}^{(j)}, \qquad j = 1, 2, 3. \qquad \mathbf{(7.8)}$$

Bunların kullanımıyla, (**7.6**) aşağıdaki anlatımlarla yeniden yazılabilirler:

$$\mathbf{B}^{(0)} = \overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} {\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}}^T \equiv \overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \otimes \overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)}, \qquad \overline{\mathbf{c}}^{(0)} = \overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(3)}. \qquad \mathbf{(7.9)}$$

Bu durumda tüm ayrıştırım aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\mathbf{a} = \sigma^{(0)} \mathbf{B}^{(0)} \otimes \mathbf{c}^{(0)} = \sigma^{(0)} \overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} \otimes \overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(2)} \otimes \overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(3)}. \qquad \mathbf{(7.10)}$$

Burada, görüldüğü gibi tek bir ayrıştırım bileşeni bulunmaktadır. Üçlü çarpım, ağırlıklı boyu 1 olan, yapıdadır. $\sigma^{(0)}$, ayrıştırım bileşeninin ölçeği durumunda olup, bir anlamda, tekil değere karşılık gelmektedir. Aslında, "Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım" bu eşitliklerden en solda olanıdır. Yine tek terimlidir. Ama iki çarpandan oluşan bir dışçarpımdır. Çarpanlardan biri olan $\mathbf{B}^{(0)}$, ağırlıklı boyu 1 olan, sıradan bir dizeydir. Ama bu dizey de tek bir dışçarpımdan oluşan ve $n_1 \neq n_2$ geçerli oldukça dikdörtgen nitelikli kalan yapıdadır. Dolayısıyla, özdüzeyi 1 olup sıfır olmayan yalnızca bir tekil değeri vardır ve o da 1'dir. Dolayısıyla yukarıdaki eşitliklerden sonuncusu bu dizeyin tekil değer ayrıştırımının kullanımıyla elde edilen, daha doğrusu, daha da indirgenmiş olan bir anlatımdır.

Yukarıdaki ayrıştırımda, (n_1, n_2) öğeli bir sıradan dizeyle n_3 öğeli bir sıradan yöney varsayımı yapılmıştı. Ama (n_1, n_3) öğeli bir sıradan dizeyle n_2 öğeli bir sıradan yöney varsayımı ya da (n_2, n_3) öğeli bir sıradan dizeyle n_1 öğeli bir sıradan yöney varsayımı da kullanılabilirdi. Ama bu durumlarda da aynı sonuçlara varılacağını görmek hiç de zor değildir.

Yukarıdaki incelemelerimizde "Üçyönlü Ağırlık Çoklu Doğrusal Dizisi" üç sıradan dizeyin dışçarpımı olarak varsayılmış, üstelik de, bu sıradan dizeylerin herbiri köşegen olarak alınmıştı. Ama köşegenlik kısıtlamaları sonuçlarda görünmemektedir. Bunun nedeni, dördül köklü köşegen ağırlık öğelerinin dördüllerinin alınmasıdır. Dolayısıyla, köşegenlik kısıtlaması kaldırılsa da bu sonuçlar, aslında, geçerliliğini korur. Ama bunun için herbir ağırlık sıradan dizeyinin bakışık ve artı tanımlı olması gerekir.

Yukarıdaki incelemelerimizde (0) üstsırasayılı büyüklükler, Beşinci Bölüm'de sözü edilen en baskın terimdeki çarpanlar olarak gündeme getirilmişti. Ama bunların belirlenmesinden sonra aynı düşünsel yolu izleyerek ve her yeni aşamada yeni bir dikgenlik koşulu ekleyerek, baskınlıkta ikincil, üçüncül ve daha artçıl olan toplamsal bileşenlerin çarpanlarının da belirlenebileceği ve böylece tüm ayrıştırıma erişilebileceği de vurgulanmıştı. Sonunda ise bu tür ardışık işlemler yerine salt $\mathbf{C}$ dizeyinin özikililerinin belirlenmesiyle tüm ayrıştırımın bir çırpıda bulunabileceğinden de dem vurulmuştu. Burada da, $\mathbf{C}$ dizeyinin özikililerine bakılmıştır. Ama sıfır olmayan salt bir özdeğer bulunduğundan ona karşılık gelen özikiliyle yetinilmiştir. Bunun nedeni diğer özikililerden ayrıştırıma herhangi bir katlı gelmiyor olmasıdır. Bunu tam olarak gösterebilmek için $\mathbf{C}$ dizeyinin sıfır olmayan özdeğerine karşılık gelen tek bir özyöneyi olan $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(3)}$'e dik olan ve ağırlıklı boyu da 1 olan herhangi bir yöneyi (böyle olan ve aralarında doğrusal bağımsız bulunan $n_3 - 1$ sayıda sıradan yöney vardır, bunlardan herhangi biri olabilir) düşünecek olursak, böyle bir yöneye karşılık gelen **C** özdeğerin sıfır olacağı ve dolayısıyla bunlara karşılık gelen σ değerlerinin de sıfır olacağı görmek hiç de zor değildir. Yani, ayrıştırımda böyle çarpan içeren terimler görünmez. Ama, ayrıştırımda görünmeyen başka terimler de bulunur. Onlarda, $\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \otimes \boldsymbol{\alpha}^{(2)}$ çokludoğrusal dizisine dik olan bir ikiyönlü çokludoğrusal dizi çarpanı bulunur. Sonuç olarak, "bu türde ya ikiyönlü ya da bir yönlü çarpanı bulunan tüm dışçarpımlar ayrıştırımda görünmezler" diyebiliriz.

Sıfır olmayan σ değiştirge değerleri **C** dizeyinin sıfır olmayan özdeğerleriyle aynı sayıda olmak zorundadır. Ama onların sıfır değer alanları ilgili toplamsal terimlerin görünmemesine neden olur. Yani toplamsal terimlerin asıl diziye katkı oranları bu ölçekleme değişkenlerince saptanmaktadır. Dolayısıyla, Tam Çarpımsal durumda salt bir tek toplamsal terim olması, tek biri dişında tüm σ ölçekleme değiştirgelerinin sıfırlanmasından kaynaklanır.

7.3 Yarıçarpımsal Üçyönlü Çokludoğrusal Dizilerin Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırımı

Bu altbölümde (**7.2**) ile verilen yapıdaki çoklu doğrusal dizilere odaklanacağız. Bu durum için (**7.2**) eşitliği aşağıdaki tıkız biçimde yeniden yazılabilir

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \otimes \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \tag{7.11}$$

Bu durum için **C** dizeyi aşağıdaki tıkız (ing: compact) yapıya bürünür:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \text{İz}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(1)^T}\mathbf{W}^{(2)}\mathbf{W}^{(1)}\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\right)\left[\mathbf{W}^{(3)}\right]^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\boldsymbol{\alpha}^{(2)^T}\left[\mathbf{W}^{(3)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\|\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\right\|^2_{W^{(1)}\otimes W^{(2)}}\left[\mathbf{W}^{(3)}\right]^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\boldsymbol{\alpha}^{(2)^T}\left[\mathbf{W}^{(3)}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Burada görünen boy, altsimgesinden de anlaşılacağı gibi, $\mathbf{W}^{(1)} \otimes \mathbf{W}^{(2)}$ ile tanımlanan ikiyönlü çokludoğrusal ağırlık dizisi üzerinde tanımlanmaktadır. İççarpım tanımı ilk eşitlikte açık olarak gösterilmekte olup dördüllerin ağırlıklı toplamının dördülkökü olarak verilmektedir. Bu eşitlikteki yapı da bakışık bir dışçarpımla orantılı bir sıradan dizey demektir. Dolayısıyla, Tam Çarpım durumunda olduğu gibi burada da sıfır olmayan tek bir σ değeri ortaya çıkmaktadır. Burada verilmeyecek olmasına karşın $\mathbf{B}^{(0)}$ dizeyi artık bir dışçarpım olmak zorunda değildir. Ama bakışık ve ağırlık altında boyu 1 olan bir yapıdadır. Dolayısıyla onu da ayrıştırarak indirgemeyi daha ileri götürmek istenirse onun sıfır olmayan tekil değer sayısı düzeyinde toplamsal terim üretecek bir ayrıştırıma ulaşılabilir. Ama burada asıl amaç, salt bir aşama indirgeme ile yetinmektir. Dolayısıyla, burada bu düzeyde bilgi ile yetinilecektir.

7.4 Çarpımsallık ve Toplamsallık Karışımlı Üçyönlü Çokludoğrusal Dizilerin Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırımı

Bu konuyla kuramsal düzeyde daha çok ilerlemek istemememize karşın toplamsallığın yapıya eklenmesiyle ayrıştırımdaki toplamsal terimin sayısının artacağını vurgulamakta yarar bulunmaktadır. Ancak, artış n_3 değerine dek tırmanmak zorunda değildir. Sayıyı belirleyen birbirinden doğrusal bağımsız olarak ortaya çıkan dışçarpımların sayısıdır. Bu doğrultuda biraz bilgi vermek istenirse dizinin öğelerinin

$$a_{i_1,i_2,i_3} \equiv \alpha^{(1)}_{i_1,i_2}\alpha^{(2)}_{i_3} + \alpha^{(3)}_{i_1,i_2}\alpha^{(4)}_{i_3}, \qquad \textbf{(7.13)}$$

eşitliğiyle verildiği durum gündeme getirilebilir. Bunun üzerinde daha önce izlenen yollardan ilerlenirse **C** dizeyinin özdüzeyinin 2 değerinde olacağı görülür. Bu ise σ değerlerinden yalnızca ikisinin sıfır olmayan değer taşıyacağı anlamına gelir. Dikkat edilirse yapıda çarpımlarda sırasayı ayrıştırımı aynı tutulmakta yani i_1 ile i_2 ikilisi ayrı i_3 ayrı çarpanlarda gözükmekte ve bu durum her iki toplamsal terim için de korunmaktadır. Altsırasayı ayrıştırımında ille de bu öngörüm yapılması söz konusu olmayabilir. Ancak, öyle durumlarda özdüzeyin ne olacağı konusu böylesine kolayca incelenemeyebilir. Biz salt buradaki türde ama daha çok sayıda toplamsal terim içeren yapıların yeğlenmesinin yerinde olacağını belirtmekle yetinip daha çok ayrıntıya girmeyeceğiz.

7.5 Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım İçin Uziş Oluşturumu

Buraya dek altbölümlerde verilen özel durumların ötesinde, en genel durumu betikleyerek ayrıştırımı sayısal olarak gerçekleştirmek için, öncelikle bir uziş (ing: algorithm) oluşturmakta yarar bulunmaktadır. Daha sonra bu uziş bilgisayarda kullanım için buyrukdizilenerek (programlanarak) ya da betiklenerek (ing: scripting) uygulayımcıl eylemlere girişilebilinecek bir duruma gelinilebilir. Uziş için aşamalar aşağıda sırasayılandırılmaktadır.

1. İlk olarak ayrıştırılacak olan üçyönlü çokludoğrusal dizinin verilmesi gerekir. Bunun için herbir yönü tarayan herbir altsırasayının alacağı en büyük değerin, yani n_1, n_2, n_3 artı tamsayılarının tanımlanması (verilmesi) sağlanmalıdır.

2. Daha sonra dizinin (**a**: a_{i_1,i_2,i_3}), i_1, i_2, i_3 altsırasayılarının alabileceği herbir değer üçlüsü için, alabileceği değerlerin tanımlanması (verilmesi) gerçekleştirilmelidir.

3. İzleyen aşama için, ağırlığı bir dışçarpım üzerinden tanımladığı varsayılan (bundan daha genel yapılı ağırlıklar da öngörülebilmekle birlikte bu uziş içinde gündeme getirilmeyecektir) sıradan köşegen dizeylerin köşegen öğelerinin (w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3}) tanımlanması (verilmesi) sağlanmalıdır.

4. Buraya dek olan aşamalarda atamaların doğru yapıldığını sınama amaçlı ara denetleme aşamaları eklenmesinde yarar bulunmaktadır.

5. Bundan sonraki aşama, açık yapısı aşağıda verilen **C** dizeyinin tanımlanmasıdır:
$$C_{j,k} \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} a_{i_1,i_2,j} w_{i_1}^{(1)} \sqrt{w_j^{(3)}} \sqrt{w_k^{(3)}} w_{i_2}^{(2)} a_{i_1,i_2,k}, \qquad i,j = 1,2,...,n_3. \quad \textbf{(7.14)}$$

6. Tanımından sonra **C** dizeyinin özdeğerlerinin belirlenmesi gerekir. Bakışıklıktan ve artı yarıtanımlılıktan dolayı özdeğerlerin eksi olmayan gerçel değerler alması gerekir. Bu belirleme eylemi ya kullanılacak buyrukdizileme ya da betikleme dilinde hazır olarak varolabilen ya da kullanıcı tarafından yazılacak altyordamlarla gerçekleştirilebilir.

7. **C** dizeyinin sıfır olmayan özdeğerlerinden dördülkök alarak σ değerlerine geçmek gereklıdir. Sıralamanın, baskınlık incelemesindeki önemi açısından, azalan biçimde gerçeklenmesi gerekmektedir.

8. Sıfır olmayan herbir özdeğere karşılık gelen özyöneyler $\mathbf{W}^{(3)}$ ağırlığı altında birimboylu olacak biçimde saptanmalıdır. Özdeğer belirleniminde yazılanlar burada da geçerlidir.

9. Belirlenen birimboylu özyöneyler $\overline{c}^{(k)}$, $k = 1,2,...,m$ (m sıfır olmayan özdeğer sayısını göstermektedir) ile simgelenirse

$$B^{(k)}_{\ell_1,\ell_2} \equiv \frac{1}{\sigma^{(k)}}\sum_{i_3=1}^{n_3} a_{\ell_1,\ell_2,i_3}\sqrt{w^{(3)}_{i_3}}\overline{c}^{(k)}, \qquad \ell_1 = 1,2,...,n_1;\ \ell_2 = 1,2,...,n_2, \quad k = 1,2,...,m \tag{7.15}$$

eşitlikleriyle tanımlanan sıradan dizeylerin belirlenmesi gereklidir. Ancak, bu dizeyin ağırlıklı boyunun 1 olması gerektiği unutulmamalıdır. Dolayısıyla, bu birimboyluluk da denetlenmelidir.

10. Yukarıdaki işlemler altsırasayıların (n_1,n_2) ile n_3 biçimli ayrıştırımı için geçerlidir. n_3 yerine n_1 ile n_2'nin ayrı ayrı yalnız bırakıldığı durumlar için de yukarıdaki uzişin uyarlanması ve ya ayrı ayrı ya da bir tek büyük yapıda devreye sokulmasında yarar bulunmaktadır. Böylece, hangi ayrıştırımda daha az sayıda toplamsal terimle daha iyi gösterilim sağlanabileceğini sınamak da olanaklı duruma gelmiş olur.

7.6 Üçyönlü Çokludoğrusal Dizilerde Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi Tabanlı Ayrıştırım Uygulamaları

Yukarıda Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım için verilen türden bir uzişin bu durum için de oluşturulması olanaklıdır. Bu amaçla, altıncı bölümde verilmiş bulunan bağıntılandırım taban alınarak uzişin adımları ayrıntılandırılabilir. Ancak, bu eylem yukarıdaki yapıya göre, sözgelimi özdeğer sorunu çözme gereksinimi doğurmayacak düzeyde, daha kolayca kestitilebilecek aşamalardan oluşmaktadır. Bu nedenle, burada bu doğrultuda ayrıntı verilmesine gerek görülmemektedir. Ancak, ilgili MuPAD betiği edinilebilecek durumdadır. Ürettiği sonuçlar aşağıdaki altbölümde verilmektedir.

7.7 Sayısal Uygulamalar

Bu kesimde öncelikli olarak öğeleri, aşağıda verilen işlevsel yapı üzerinden tanımlanan çoklu dizilerle ilgilenilmekte ve bu dizilerin hem Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım hem de Yüksek Boyutlu Model Gösterilim Tabanlı Ayrıştırım kullanılarak elde edilen anlatımlarındaki toplamsal terimlerin ölçekleme değiştirgeleri saptanmaktadır.

$$a_{i1,i2,i3} \equiv (x_1 + x_2 + x_3)^p \tag{7.16}$$

Çizelge 7.1: Uygulama AİÇDA - Ağırlıksız.

$p \downarrow$	σ_1	σ_2	σ_3
0	1.0	0	0
1	0.99906	$93x10^{-5}$	0
2	0.99859	0.00140	$7x10^{-7}$
5	0.99899	0.00100	$1x10^{-6}$
10	0.99952	0.00047	$4x10^{-7}$
20	0.99992	$7x10^{-5}$	$1x10^{-8}$
30	0.99998	$1x10^{-5}$	$1x10^{-10}$
40	0.99999	$1x10^{-6}$	0
50	0.99999	$1x10^{-7}$	0

7.1 deki çizelgede bu işlevsel yapı için Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırımı gündeme getirmektedir. Bu çizelgede sunulan değerler tüm ağırlıkların birim değişmez işlev olarak alındığı durum için düzenlenmiştir. p'nin 0, 1, 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50 değerleri için elde edilen 3 toplamsal bileşenin oransal katsayıları, azalan sıralamalı olarak, verilmektedirler. $p = 0$ için yalnızca tek bir terimin varolduğu görülmektedir. $p = 1$ durumunda toplamsal terim sayısı 2'ye çıkmakta ve daha büyük p değerlerinde 3'e erişip orada kalmaktadır. Yukarıdaki işlev YBMG uygulamalarında da sık sık sınama amaçlı gündeme getirilen oldukça evrensel bir yapıdır. $p = 0$ için değişmez olan niteliği $p = 1$ değerinde arı toplamsallığa dönüşmekte; p arttıkça çarpımsallık niteliği önce görünür duruma gelip gittikçe baskınlaşmaktadır. Bu durum çizelgedeki yapıdan da sezilmektedir. Ancak burada p'nin 50 gibi çok büyük değerler alması durumdaki ezici çarpımsallık niteliğinin belirmesi ayrıştırımı da tek terime doğru itmektedir. İkinci ve üçüncü toplamsal bileşenlerin oransal katsayılarının en belirgin olduğu p değerleri 3 dolaylarında gözlenmektedir. Buralarda tek terim alıkoyarak yapılacak yaklaştırımın yaklaştırım niteliği neredeyse en az düzeyde gibi görüntü vermektedir.

Çizelge 7.2: Uygulama AİÇDA - Ağırlıklı.

$q \downarrow$	σ_1	σ_2	σ_3
1	0.99695	0.00303	$5x10^{-6}$
2	0.99555	0.00443	$8x10^{-6}$
3	0.99506	0.00492	$7x10^{-6}$
4	0.99529	0.00470	$5x10^{-6}$

Yukarıdaki gözlemler olan 7.2 de birim değişmez ağırlıklar için elde edilen sonuçlara dayalıdır. Ağırlıkların değişik alınması durumunda gözlem sonuçlarında değişimler beklemekte yarar bulunmaktadır. Bu amaçla,

$$w_j \equiv i_j^q, \qquad j = 1,2,3 \tag{7.17}$$

tanımları kullanılarak uygulamalar gerçekleştirilmiş ve sonuçlar ikinci çizelgede sunulmuş bulunmaktadır. Bu uygulamalarda daha önce değişken alınan $p =$ 3 değerinde tutulmuş q artı tamsayısıysa 1, 2, 3, 4 değerlerinde gezdirilmiştir. Kestirilmesinin çok zor olmadığı gibi artan q değerleri ilk terimin baskınlığını arttırmaktadır. Bu ise, ağırlık kullanımıyla, Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım'ın terim sayısının azaltılmasının, yani, etkinliğinin arttırılmasın olanaklı olması demektir ve ağırlık kullanımı için önemli bir gerekçedir.

Yukarıdaki gözlemler, burada verilmemekle birlikte yönlülüğü 3'ten büyük olan dizilerde de gerçekleştirilmiş ve benzer yorumlara yolaçacak olgular getirmiştir. Tüm bunlar, Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım'ın çarpımsal niteliği yüksek olan dizilerde daha iyi sonuç vereceği ve etkinliğinin uygun ağırlık seçimiyle eniyilenebileceği yargısına, bu an için kesin bir kanıt verilememekle birlikte, götürmektedir.

(**7.16**)'daki sınama işlevi üzerine YBMG Tabanlı Ayrıştırım da uygulanmış ve ilk çizelgedeki p değerlerine (birinci düşeysıra) karşılık gelen sekiz YBMG bileşeninin oransal katkıları ikinci ve onu izleyen düşey sıralarda, yükselen çokdeğişkenlilik sıralamalı olarak üçüncü çizelgede verilmiştir. Bilindiği gibi, YBMG, etkinliği toplamsallığın baskın olan yapılarda, yüksek olan bir ayrıştırımdır. Böyle dizilerde ilk YBMG terimlerinin olabildiğince baskın olması beklenilen bir olgudur. Çarpımsallığın artması durumundaysa, etkinliğin azalmasıyla yüzleşmek beklenilen bir durumdur. Bu durum 7.3 numaralı çizelgede gözlenmektedir. Öte yandan, ikinci çizelge yapısının YBMG için uyarlanarak yinelendiği 7.4 numaralı çizelgede ağırlığın ayrıştırıma olan etkilerinin gözlemlenmesi sağlanmaktadır. Kolayca ayırdına varılacağı gibi, ağırlık değişmezlikten uzaklaşıp oldukça bükümlü duruma geldikçe ilk YBMG bileşenlerinin baskınlığıda artmaktadır.

Çizelge 7.3: Uygulama YBMGKA - Ağırlıksız.

$p\downarrow$	β_0	β_1	β_2	β_3	$\beta_{1,2}$	$\beta_{1,3}$	$\beta_{2,3}$	$\beta_{1,2,3}$
0	1.0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.95026	0.00785	0.02094	0.02094	0	0	0	0
2	0.83852	0.02503	0.06693	0.06693	0.00055	0.00055	0.00147	0
5	0.48544	0.06847	0.17902	0.17902	0.01828	0.01828	0.04836	0.00310
10	0.20386	0.07781	0.18794	0.18794	0.06568	0.06568	0.16066	0.05038
20	0.08203	0.06297	0.13424	0.13424	0.10208	0.10208	0.21812	0.16419
30	0.06183	0.05755	0.11719	0.11719	0.10899	0.10899	0.22197	0.20652
40	0.05716	0.05608	0.11270	0.11270	0.11057	0.11057	0.22220	0.21797
50	0.05597	0.05569	0.11153	0.11153	0.11097	0.11097	0.22222	0.22110

Çizelge 7.4: Uygulama YBMGKA - Ağırlıklı.

$q\downarrow$	β_0	β_1	β_2	β_3	$\beta_{1,2}$	$\beta_{1,3}$	$\beta_{2,3}$	$\beta_{1,2,3}$
1	0.80701	0.03194	0.07687	0.07687	0.00162	0.00162	0.00399	0.00002
2	0.88017	0.02052	0.04828	0.04828	0.00062	0.00062	0.00148	$6x10^{-6}$
3	0.92621	0.01182	0.03048	0.03048	0.00021	0.00021	0.00056	$1x10^{-6}$
4	0.95361	0.00636	0.01982	0.01982	0.00007	0.00007	0.00022	$2x10^{-7}$

Tüm bunlar çarpımsallık için Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım'ın, toplamsallık içinse YBMG Tabanlı Ayrıştırı'mın etkin olduğu ve bu etkinliklerin ağırlık kullanımıyla değiştirilebileceği ve özellikle yüseltilebileceğinin olanaklı olduğu izlenimini verir. Bunların kanıtsavlar olarak ilerisürülüp kanıtlanması uzbilimsel olarak önemli bir olgu olmakla birlikte, bu tezin kapsam ve amacının oldukça dışında olması nedeniyle, burada ayrıntıda kapsam dışı tutulmaktadır.

Yukarıdaki örnek çarpımsallık ve toplamsallık tabanlı ve bir anlamda ak – kara nitelikli bir ayırım olgusuna dayandırılmış görünmektedir. Ama olay ak ile kara arasında değildir. Diğer bir deyişle, bozluk düzeyi de devreye sokularak nitelendirimin tam kılınması olanaklı değildir. Eğer öyle olsaydı olaya yukarıdaki iki ayrıştırımı melezlik katarak birleştiren bir yaklaştırım yapısı tüm olayları açıklayacak düzeye gelebilirdi. Ama işin için de bozun düzeyleri olarak nitelendirilemeyen başka bileşenler de vardır, al gibi. Ancak, burada daha çok ayrıntıya girilmeyecektir. Yine de aşağıdaki çizelgelerde başka altsırasayı anlatımlı yapılardan bazıları için uygulama sonuçları ek yorum katmaksızın verilmektedir.

Burada yapılan uygulama MatLab denilen yazılım ile yapılmıştır. Ayrıca bu yazılıma benzer olan açık kaynaklı yazılım ise Octave dır. Farklı işlevlerin yer aldığı 7.5 ve 7.6 numaralı çizelgeler dışında bir de eşit boylu üçyönlü diziler üzerinde çalışılmıştır

Çizelge 7.5: Uygulama AÇDİA - Farklı İşlevli.

İslev	σ_1	σ_2	σ_3
$2*i_1+3*i_2-i_3$	0.916	0.083	0
$2*i_1^2*3*i_2+i_3$	0.998	0.001	0
$2*i_1*3*i_2+i_3$	0.998	0.001	0

Çizelge 7.6: Uygulama YBMGKA - Farklı İşlevli.

İslev	β_0	β_1	β_2	β_3	$\beta_{1,2}$	$\beta_{1,3}$	$\beta_{2,3}$	$\beta_{1,2,3}$
$2*i_1+3*i_2-i_3$	0.864	0.017	0.105	0.011	0	0	0	0
$2*i_1^2*3*i_2+i_3$	0.659	0.208	0.096	0.000	0.034	0	0	0
$2*i_1*3*i_2+i_3$	0.805	0.072	0.108	0.001	0.012	0	0	0
$log(1+i_1^2)*3*i_2+i_3$	0.867	0.049	0.052	0.023	0.008	0	0	0
$log(i_1^2)*3*i_2+i_3$	0.742	0.167	0.027	0.034	0.027	0	0	0

bunlar ise 7.7, 7.8, 7.9 ve 7.10 numaralı çizelgelerdir. Ve burada görülmüştür ki, YBMDKA ayrıştırımında birli, ikili terimlerde hep aynı değerleri almaktadır.

Çizelge 7.7: Uygulama AİÇDA - Ağırlıksız - Eşit Boylu.

$p\downarrow$	σ_1	σ_2	σ_3
0	1.0	0	0
1	0.99913	0.00086	
2	0.99811	0.00188	$6x10^{-7}$
5	0.99933	0.00066	$6x10^{-7}$
10	0.99937	0.00062	$8x10^{-7}$
20	0.99995	0.00004	$4x10^{-9}$
30	0.99999	$2x10^{-6}$	$1x10^{-11}$
40	0.99999	$1x10^{-7}$	$1x10^{-14}$
50	0.99999	$6x10^{-9}$	$1x10^{-17}$

Çizelge 7.8: Uygulama AİÇDA - Ağırlıklı-Eşit Boylu.

$q\downarrow$	σ_1	σ_2	σ_3
1	0.99501	0.00497	$6x10^{-6}$
2	0.99278	0.00720	0.00001
3	0.99195	0.00803	0.00001
4	0.99215	0.00783	$7x10^{-6}$

Çizelge 7.9: Uygulama YBMGKA - Ağırlıksız -Eşit Boylu.

$p\downarrow$	β_0	β_1	β_2	β_3	$\beta_{1,2}$	$\beta_{1,3}$	$\beta_{2,3}$	$\beta_{1,2,3}$
0	1.0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.9375	0.02083	0.02083	0.02083	0	0	0	0
2	0.80618	0.06320	0.06320	0.06320	0.00139	0.00139	0.00139	0
5	0.42548	0.15065	0.15065	0.15065	0.03873	0.03873	0.03873	0.00632
10	0.15005	0.13854	0.13854	0.13854	0.11600	0.11600	0.11600	0.08631
20	0.04208	0.07987	0.07987	0.07987	0.14883	0.14883	0.14883	0.27177
30	0.02393	0.05929	0.05929	0.05929	0.14628	0.14628	0.14628	0.35932
40	0.01873	0.05184	0.05184	0.05184	0.14331	0.14331	0.14331	0.39580
50	0.01687	0.04891	0.04891	0.04891	0.14180	0.14180	0.14180	0.41097

Çizelge 7.10: Uygulama YBMGKA - Ağırlıklı-Eşit Boylu.

$q\downarrow$	β_0	β_1	β_2	β_3	$\beta_{1,2}$	$\beta_{1,3}$	$\beta_{2,3}$	$\beta_{1,2,3}$
1	0.78865	0.06734	0.06734	0.06734	0.00308	0.00308	0.00308	0.00004
2	0.86983	0.04227	0.04227	0.04227	0.00110	0.00110	0.00110	$9x10^{-6}$
3	0.91612	0.02751	0.02751	0.02751	0.00044	0.00044	0.00044	$2x10^{-6}$
4	0.94313	0.01875	0.01875	0.01875	0.00019	0.00019	0.00019	$6x10^{-7}$

8. SONUÇLAR VE UYARILAR

Bu tez çalışmasında Üçyönlü Çokludoğrusal Dizilerin ayrıştırımına odaklanılmıştır. Ayrıştırım için Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım (ing: Weighted Reductive Decomposition) ve Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG) Tabanlı Ayrıştırım (ing: High Dimensional Model Gösterilim (HDMR) Based Decomposition) adlarını taşıyan yöntemler gündeme getirilmiştir. Bu yöntemler Metin Demiralp ve onun yönetimindeki Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) üyelerince geliştirimlerine çok önemli katkılar getirilmiş olan olgulardır.

8.1 Özgün Bulgular, Katkılar

Bu iki yöntemle bu tez çalışması bağlamında getirilen özgün katkılar aşağıda sıralanmaktadır.

1. Çokludoğrusal dizilerde İndirgeyimcil Ayrıştırım yeni bir olgu değildir. Ancak, burada ağırlık kullanımıyla etkinlik arttırımı sağlanabileceği gösterilmiş bulunmaktadır. Bu özgün bir katkıdır.

2. Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım'ın Tam Çarpımsal ya da Yarıçarpımsal türden dizilerde olabildiğince az sayıda toplamsal terimle gerçekleştirilebileceği kanıtlanmıştır. Bu önemli bir bulgu ve katkıdır.

3. Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım'ın çarpımsallığı yüksek olan dizilerde ve özellikle çok yüksek olan dizilerde çok etkin olduğu sayısal olarak da gösterilmiştir.

4. Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım'ın toplamsallığı daha baskın olan ama çarpımsallık da içeren durumlarda toplamsal bileşenlere baskınlık dağılımının en az düzeyde kalabileceği ama bu durumun ağırlık kullanımıyla baskınlık yoğunlaşmasına dönüştürülebileceği sayısal olarak gösterilmiştir.

5. YBMG çok daha önceden yalnız BEBBYT değil başkalarınca da geliştirilmiş ve geliştirilmekte olan bir olgudur. Ancak, bunun çokludizi ayrıştırımında önemi ilk kez buradaki düzeyde vurgulanmakta ve ayrıştırım yöntemi olarak önerilmektedir. Bu özgün bir katkı olmak durumundadır.

6. YBMG Tabanlı çokludoğrusal dizi ayrıştırımı en etkin durumunu değişmez ya da arı toplamsal nitelikli çokludoğrusal dizilerde göstermektedir. Toplamsallık azalımı genelde çarpımsallık artımı getirmekte olup bu durumlar için kesme yaklaştırımlarıyla elde edilecek niteliğin çarpımsallık arttıkça keskin bir biçimde azalacağı sayısal olarak da gösterilmiştir. Bu olgu çok yeni bir gözlem olmasa da çokludoğrusal diziler için yeni ve özgün bir katkıdır.

7. YBMG Tabanlı çokludoğrusal dizi ayrıştırımının etkinliğinin ağırlık seçimi üzerinden olumlu bir biçimde değiştirilebileceği sayısal olarak gösterilmiştir. Ama bunun kuramsal bir gerçek olduğu olgusunun tüm belirtileri de elde bulunmaktadır. Bu açıdan da tez özgün bulgu ve katkılar içermektedir.

8. Yukarıda belirtilenler yanısıra uziş (ing: algorithm) oluşturumu gerçekleştirilmiş ve çalıştırımıyla etkinliği sınanmış iki MuPAD betiği üretilmiştir.

8.2 Uyarılar

Tezde yukarıda belirtilen özgün bulgu ve katkılar üretilmiş olsa da her soruna umar (çare) getirecek bir, deyim yerindeyse, Lokman Hekim reçetesi oluşturulmuş değildir. Ancak, azımsanmayacak bir yol aşılmıştır. Yine de bazı uyarı belirtimlerinde yarar bulunmaktadır.

1. Burada üçyönlülük kısıtlaması söz konusudur. Ancak, bu uygulayımsal bir kısıtlama olup ne kuramsal genel yapıya ne de betiklere büyük sorunlar getirmektedir. Yeterince özen gösterilerek uyarlamalar gerçekleştirilebilir.

2. Ağırlıklı İndirgeyimcil Ayrıştırım'da indirgemenin tek aşamalı olarak gerçekleştirilmesiyle yetinilmiştir. Yinelemeli bir yapıda aşama sayısı çoğaltılabilir. Ancak bu toplamsal terim sayısının da artışına neden olur. Dolayısıyla, ne düzeyde

yineleme yapılacağı bir yeğleme konusudur ve bu doğrultuda gereksinimler oldukça belirleyici görev üstlenirler.

3. Burada ağırlık bir dışçarpım alınmıştır. Alınmasa da olabilir, ancak artı tanımlılık ve bakışımın elde bulunması gerekir ve bu düzeyde genellik ağırlık seçimini ya da tanımını zor bir duruma taşıyabilir.

4. Ağırlığın dışçarpımsal olmasının yanısıra dışçarpanlardan her birinin köşegen alınması da oldukça kısıtlayıcıdır. Ancak, üzerinde çalışılan sonlu kartezyen uzayda uygun eksen döndürümleriyle köşegenlik sağlanabilir. Bu açıdan bakıldığında ilk bakışta sanılan düzeyde bir genellik yitimi söz konusu değildir.

5. Uygulamalarda MuPAD yazılımı yeğlenmiştir. Ama ille de onun kullanımı gerekli değildir. Simgesel yorumlama ve yüksek duyarlılık düzeyli sayısal yorumlama nitelikleri olan herhangi bir yazılım bu amaçla, yani bilgisayım (hesaplama) için kullanılabilir.

6. Sayısal bilgisayımda duyarlılık düzeyinin yeterince büyük tutulması olası sayısal yanılgı yığılmalarından (ing: error accumulation) kaçınmak için bir gereksinim olarak düşünülmelidir. Yoksa, beklenmedik sonuçlara, yanlış oldukları sezilmeden varılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Kolmogorov, A.** (1963). On the Representation of Continous Functions of Many Variables by Superposition of One Variable and Addition, *English Translation: American Math. Soc.*, ***2***, 55–59.

[2] **Sobol, I.M.** (1993). Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, ***1***, 407–414.

[3] **Rabitz, H.**, **Alis, O.F.**, **Shorter, J. ve Shim, K.** (1999). Efficient Input-Output Model Representations, *Computer Phys. Comm.*, ***117***, 11–20.

[4] **Shorter, J.**, **Ip, P.C. ve Rabitz, H.** (1999). An Efficient Chemical Kinetics Solver Using High Dimensional Model Representation, *J. Phys. Chem. A*, ***103***, 7192–7198.

[5] **Rabitz, H. ve Alis, O.F.** (1999). General Foundations of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, ***25***, 197–233.

[6] **Rabitz, H. ve Alis, O.F.** (1999). Additive and Multiplicate High Dimensional Representation General Foundations of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, ***25***, 197–233.

[7] **Alis, O.F. ve Rabitz, H.** (2001). Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, ***29***, 127–142.

[8] **Li, G.**, **Rosenthal, C. ve Rabitz, H.** (2001). High Dimensional Model Representations, *J. Phys. Chem. A*, ***105***, 7765–7777.

[9] **Li, G.**, **Wang, S.W.**, **Rosenthal, C. ve Rabitz, H.** (2001). High Dimensional Model Representations Generated from Low Dimensional Data Samples I. mp-Cut-HDMR, *J. Math. Chem*, ***30***, 1–30.

[10] **Li, G.**, **Schoendorf, J.**, **Ho, T. ve Rabitz, H.** (2004). Multicut–HDMR with an Application to an Ionospheric Model, *Journal of Computational Chemistry*, ***25***, 1149–1156.

[11] **Li, G.**, **Wang, S.W.**, **Rabitz, H.**, **Wang, S. ve Jaffe, P.** (2002). Global uncertainty assessments by high dimensional model representations (HDMR), *Chem. Eng. Sci.*, ***57***, 4445–4460.

[12] **Li, G.**, **Wang, S.W. ve Rabitz, H.** (2002). Practical Approaches To Construct RS-HDMR Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, ***106***, 8721–8733.

[13] **Li, G.**, **Artamonov, M.**, **Rabitz, H.**, **Wang, S.W.**, **Georgopoulos, P.G. ve Demiralp, M.** (2002). High-Dimensional Model Representations Generated from Low Order Terms lp RS HDMR, *Journal of Computational Chemistry*, ***24***, 647–656.

[14] **Li, G.**, **Wang, S.W. ve Rabitz, H.** (2002). Practical Approaches To Construct RS-HDMR Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, ***106***, 8721–8733.

[15] **Li, G.**, **Rabitz, H.**, **Wang, S.W. ve Georgopoulos, P.G.** (2003). Correlation Method for Variance Reduction of Monte Carlo Integration in RS-HDMR, *J. Comp. Chem.*, ***24***, 277–283.

[16] **Wang, S.W.**, **Georgopoulos, P.G.**, **Li, G. ve Rabitz, H.** (2003). Random Sampling-High Dimensional Model Representation (RS-HDMR) with Nonuniformly Distributed Variables: Application to an Integrated Multimedia/Multipathway Exposure and Dose Model for Trichloroethylene, *J. Phys. Chem. A*, ***107***, 4707–4716.

[17] **Li, G.**, **Wang, S.**, **Georgopoulos, P.**, **Schoendorf, J. ve Rabitz, H.** (2006). Random Sampling–High Dimensional Model Representation (RS-HDMR) and Orthogonality of Its Different Order Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, ***110***, 2474–2485.

[18] **Hayes, M.Y.**, **Li, B. ve Rabitz, H.** (2006). Estimation of Molecular Properties by High-Dimensional Model Representation, *J. Phys. Chem. A*, ***110***, 264–272.

[19] **Bieniasz, L.K. ve Rabitz, H.** (2006). High Dimensional Model Representation of Cyclic Voltammograms, *Anal. Chem.*, ***78***, 1807–1816.

[20] **Demiralp, M.** (2003). High Dimensional Model Representation and its Application varieties, *Mathematical Research*, ***9***, 146–159.

[21] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2004). A Factorized High Dimensional Model Representation on the Partitioned Random Discrete Data, *Appl. Num. Anal. Comp. Math.*, ***1***, 231–241.

[22] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2005). A Factorized High Dimensional Model Representation on the Nodes of a Finite Hyperprismatic Regular Grid, *Applied Mathematics and Computation*, ***164***, 865–883.

[23] **Kurşunlu, A. ve Demiralp, M.** (2003). Additive and Factorized High Dimensional Model Representation Applications to the Multivariate Diffusion Equation under Vanishing Derivative Boundary Conditions, *Mathematical Research*, ***9***, 315–327.

[24] **Demiralp, M.** (2006). Illustrative Implementations to Show How Logarithm Based High Dimensional Model Representation Works for Various Function Structures, *WSEAS Transaction on Computers*, ***5***, 1333–1338.

[25] **Demiralp, M.** (2006). Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representation and the Effect on Their Types on Univariance Level, *WSEAS Transaction on Mathematics*, ***5***, 582–588.

[26] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2007). A Novel Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) Based on the Combination of Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representations, *WSEAS-2007 Proceedings, WSEAS 12-th International Conference on Applied Mathematics for Science and Engineering*, cilt 1, s.157–161.

[27] **Tuna, S.**, **Tunga, B.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2009). Fluctuation Free Matrix Representation Based Univariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) Over Plain and Factorized HDMR, *2nd WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '09)*, s.112–117.

[28] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2003). Data Partitioning via Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR) and Multivariate Interpolative Applications, *Mathematical Research*, ***9***, 447–462.

[29] **Kanmaz, A.A. ve Demiralp, M.** (2003). Symbolic Computer Programming for Generalized High Dimensional Model Representation, *Mathematical Research*, ***9***, 281–289.

[30] **Demiralp, M.** (2006). Transformational High Dimensional Model Representation, *Lecture Series on Computer and Computational Sciences, Recent Progress in Computational Science and Engineering*, ***7A***, 128–131.

[31] **Baykara, N.**, **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2011). Conic Transformational High Dimensional Model Representation in Comparison with Hermite-Pade Approximants, *AICT 2nd International Conf. On Applied Informatics and Computing Theory*, s.45–51.

[32] **Korkmaz, E.**, (2009), Bütünleştirilmiş Küçük Ölçekli Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi ve çok Değişkenli İşlev Yaklaştırımında Kullanımı .

[33] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2010). The Influence of the Support Functions on the Quality of Enhanced Multivariate Product Representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, ***48***, 827–840.

[34] **Baykara, N.A.**, **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2010). Weight Optimization in Enhanced Multivariance Product Representation for Given Supports at the Fluctuation Free Integration Limit, *AICT 2nd International Conf. On Applied Informatics and Computing Theory*, s.52–57.

[35] **Baykara, N.A.**, **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2010). Weight Optimization in Enhanced Multivariance Product Representation Method, *Int. Conf. On Numeric Anal. And Appl. Math., AIP Conference Proceedings*, cilt1281, s.1935–1938.

[36] **Bowen, R. ve Wang, C.** (1980). Introduction to Vectors and Tensors, Linear and Multilinear Algebra, *Plenum Press, NY*.

[37] **L, D.L., B, D.M. ve J, V.** (2000). A Multilinear Singular Value Decomposion, *SIAM J.Matrix Anal. Appl.*, cilt 21, s.1253–1278.

[38] **T.G., K. ve B.W., B.** (2008). Tensor Decomposition and Applications, *SIAM Review*, cilt 51, s.455–500.

[39] **Tuna, S.**, **Baykara, N. ve Demiralp, M.** (2011). Weighted Singular Value Decomposition for Folded Matrices, ***N.B. S. Tuna ve M. Demiralp**, (düzenleyenler), Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT'11), IEEEAM*, Prague, Czech Republic, s.70–75.

[40] **Demiralp, M.** (2011). Decomposing Functions, Arrays or Function Arrays",, *AIP Proceedings for the 9th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2011)*, cilt1389, Halkidiki, Greece, s.1138–1138, lecture Talk based on the symposium 48's preface.

[41] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2011). Towards a New Multiway Array Decomposition Algorithm: Elementwise Multiway Array High Dimensional Model Representation (EMAHDMR), *Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT'11),IEEEAM*, Prague, Czech Republic, s.76–81.

[42] **Gözükırmızı C. ve Demiralp, M.** (2010). Numerical Studies on the Use of Enhanced Multivariance Product Representation as a Multiway Array Decomposer, *AIP Proceedings for the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2010), Symposium 112, Recent Developments in Hilbert Space Tools and Methodology for Scientific Computing*, cilt112-1, Rhodes, Greece.

[43] **Divanyan, L. ve Demiralp, M.** (2011). Weighted Reductive Multilinear Array Decomposition, *AIP Proceedings for the 9th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2011), 1389*, Halkidiki, Greece, s.1156–1159.

[44] **Divanyan, L. ve Demiralp, M.** (2011). High Dimensional Model Representation (HDMR) Based Folded Vector Decomposition, *Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT'11), IEEEAM*, Prague, Czech Republic, s.39–44.

[45] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2009). An Orthonormal Decomposition Method For Multidimensional Matrices, *AIP Proceedings for the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2009)*, Rethymno, Crete, Greece, s.424–427.

[46] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2009). Dimensionality Reduction and Approximation via Space Extension And Multilinear Array Decomposition, *AIP*

Proceedings for the International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE 2009) Mini Symposium on Recent Developments in Numerical Schemes for Hilbert Space Related Issues in Science and Engineering, Rhodes, Greece, s.424–427.

[47] **Demiralp, E.** (2009). Application of Reductive Decomposition Method for Multilinear Arrays(RDMMA) to Animations, *MMACTEE'09 Proceedings of the 11th WSEAS international conference on Mathematical methods and computational techniques in electrical engineering*, Wisconsin, USA.

[48] **Demiralp, E. ve Demiralp, M.** (2010). Reductive Multilinear Array Decomposition Based Support Functions in Enhanced Multivariance Product Representation (EMPR), *Proceedings for the 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS)*, Malta, s.448–454.

[49] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2003). Hybrid High Dimensional Model Representation Approximats and their Utilization in Applications, *Mathematical Research*, ***9***, 438–446.

[50] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2006). Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) on the Partitioned Data, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, ***185***, 107–132.

[51] **Demiralp, E. ve Tunga, M.A.** (2003). A Hybrid Programming for Projective Displaying of High Dimensional Model Representation Approximants, *Mathematical Research*, ***9***, 132–145.

[52] **Gündoğar, Z.**, (2011), Fundamental Properties of the Conical Transformations in Transformational High Dimensional Model Representation.

[53] **Baykara, N. ve Demiralp, M.** (2011). Function Flattening Transformational High Dimensional Model Representation, *Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT'11), IEEEAM*, Prague, Czech Republic,, s.64–69.

[54] **Gündoğar, Z.**, **Baykara, N. ve Demiralp, M.** (2010). Basic Features of Conic Transformational High Dimensional Model Representation, *AIP Proceedings for the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2010), Symposium 112, Recent Developments in Hilbert Space Tools and Methodology for Scientific Computing*, 112-3, Rhodes, Greece.

[55] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2010). Affine Transformational Enhanced Multivariance Product Representation (ATEMPR) and Its Relation to Rational Approximants, *Proceedings for the 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS)*, Malta, s.336–340.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Letisya Divanyan

Doğum Yeri ve Tarihi:01.04.1987 İstanbul

Adres:İstanbul

E-Posta:letisya.divanyan@be.itu.edu.tr, letisya.divanyan@gmail.com

Lisans:İstanbul Kültür Üniversitesi- Matematik- Bilgisayar

Y. Lisans:İstanbul Teknik Üniversitesi- Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Mesleki Deneyim:
Istanbul Teknik Üniversitesi - 01.01.2010 - Kısmı Öğrenci Asistanlığı
Elan Bilişim Projeleri - 01.04.2011-29.02.2012 - ERP Danışman

Tezden Türetilen Yayınlar/Sunumlar

▪ Metin Demiralp, **Letisya Divanyan**, 2011: *High Dimensional Model Representation (HDMR) Based Folded Vector Decomposition*, IEEEAM (AICT), September 26-28, 2011 Prague, Czech Republic
Yüksek Boyutlu Model Gösterilimin Katlı Yöney Ayrıştırımı üzerine yazılan bu bildiri ile YBMG ye yeni bir çalışma alanı oluşturulmuştur. Bu bildiride katlı yöneyleri YBMG de kullanarak, verilen üç boyutlu alt dizinli dizilerin sırası ile sabit terim, birli dizin, ikili dizin ve daha fazla bileşenlere ayrıştırmını sağlar.

▪ Metin Demiralp, **Letisya Divanyan**, 2011: *Weighted Reductive Multilinear Array Decomposition*, ICNAAM, September 19-25, 2011 Halkidiki, Greece
Ağırlıklı Çok Yönlü Dizilerin İndirgemeli Ayrıştırımı (AÇYİA) isimli bildiride, Demiralpler tarafından geliştirilen ÇYİA ya Ağırlık işlevi katılarak çok yönlü dizilerin ardışık olarak, başta verilen çok yönlü dizi ile ayrıştırım arasındaki Öklid uzaklığı sıfır veya sıfıra yakın bir değer alana kadar devam etmesidir.