İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN OLASILIKSAL EVRİMİNİN İZGESEL NİTELİKLERİNDE YÖNEY VE KATLIDİZİ TABANLI İNCELEMELER

DOKTORA TEZİ

Coşar GÖZÜKIRMIZI

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

EKİM 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN OLASILIKSAL EVRİMİNİN İZGESEL NİTELİKLERİNDE YÖNEY VE KATLIDİZİ TABANLI İNCELEMELER

DOKTORA TEZİ

Coşar GÖZÜKIRMIZI
(702082003)

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

EKİM 2014

İTÜ, Bilişim Enstitüsü’nün 702082003 numaralı Doktora Öğrencisi **Coşar GÖZÜKIRMIZI**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **“SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN OLASILIKSAL EVRİMİNİN İZGESEL NİTELİKLERİNDE YÖNEY VE KATLIDİZİ TABANLI İNCELEMELER”** başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Metin DEMİRALP** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri :	**Doç. Dr. Ahmet DURAN** İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Doç. Dr. F. Aylin Sungur KONUKLAR İstanbul Teknik Üniversitesi	....
	Yrd. Doç. Dr. Özlem YILMAZ Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi	....
	Yrd. Doç. Dr. Eylem Yücel DEMİREL İstanbul Üniversitesi	....

Teslim Tarihi : **20 Şubat 2014**
Savunma Tarihi : **22 Ekim 2014**

ÖNSÖZ

Bu tezin birincil ilgi alanı sağ yan işlevi özerk (ing: autonomous) ve sonlu bir aralıkta çözümcül (ing: analytic) bir işlev olan açık sıradan türevli denklem (ing: ordinary differential equation) içeren başlangıç değer sorunudur. Bu sorunun çözümü için, Metin Demiralp'in öncülük ettiği çalışmalar yapılmakta ve olasılıksal evrim (ing: probabilistic evolution) adlı sayısal yöntem geliştirilmektedir. Bilimsel yazında bu ve benzeri uzbilimsel (ing: mathematical) sorunlar için birçok yöntem vardır, ama bu yöntemlerin olumsuzlukları bilinmektedir ve olabildiğince evrensel en genel anlamda yaklaşık olarak çözüm üretebilecek bir yaklaşım olasılıksal evrime kadar söz konusu olamamıştır.

Olasılıksal evrim ile başlangıç değer sorununun çözümü için olasılıksal evrim denkleminin oluşturulması söz konusudur. Sıradan türevli denklem olasılıksal yapı içermeyen bir dizgeyi (ing: system) betimler. Bu olgu belirli noktalarda sonsuza giden, diğer noktalarda ise sıfırlanan dağılım olarak da nitelendirilebilir. Bu bağlamda, sıradan türevli denklemlerin olasılıksal evriminde oluşan ve başlangıç koşulunu betimleyen sonsuz öğeli yöney delta işlevi altında ağırlıklara karşılık gelir. Daha somut olarak söylemek gerekirse, sıradan türevli denklemin başlangıç değeri, olasılıksal evrim denkleminde belirli bir yapının eksi değerli olmayan üslüleri olarak ortaya çıkar. Eğer dizgede olasılıksal yapı varsa bu yöneyin değerleri belirli beklenen değerler (ing: expectation value) olarak ortaya çıkacaktır ve hiç de üslü yöney olarak belirmeyecektir. Aslında bu bağlamda olasılıksal olmayan yapının başlangıç değerini betimleyen yöney, delta işlevleri altındaki beklenen değerler olarak yorumlanabilir.

Doğada olasılıksallığın iki kaynağı vardır. Nicemsel işleybilimin tabanında bulunan bu olgu, uzbilimsel olarak değiştirim (ing: commutation) ilkesine dayanır. Bunun somut karşılığı ise bir ölçümde ölçülen yapının ölçüm aygıtına göre çok küçük olmasıdır. Bu durumda gözlem, dizgenin yapısını değiştirecektir. Bunun uzbilimsel karşılığı ise dizgenin Hamiltonian işlecinin (ing: operator) dizgenin ölçülen değerini betimleyen bağımsız değişkeni ile çarpma işleci ile değiştirimli olmamasıdır. Çok küçük dünya ile iletişim göz ardı edilemeyecek bir değişeç (ing: commutator) yaratır. Bu olgu, nicemsel işleybilim (ing: quantum mechanics) alanının temel öğesidir. Diğer olasılıksallık kaynağı ise sayıtsal işleybilim (ing: statistical mechanics) olarak anılan alanın konusudur. Eğer bir dizgedeki bilinmeyen sayısı çok fazla ise, belirli sayıtsal ortalamalar alarak yalınlaştırmaya gidilir. Bu sayıtsal ortalamalardan dolayı olasılıksal yapı içerilir.

Dolayısıyla, bu çalışma doğrudan veya dolaylı olarak üç alanın sorunları ile ilintilidir. Bu alanlar, başal (ing: classical) işleybilim (ing: mechanics), sayıtsal işleybilim ve nicemsel işleybilim olarak sıralanabilir. Bu üç yaklaşım da, doğrudan ya da beklenen değerler üzerinden sıradan türevli denklem takımı ve bu denklemlere karşılık gelen başlangıç koşulları üretir. Olasılıksal evrim, bu üç yaklaşımı da aynı potada eritebilecek özellikleri olan bir yöntem olarak belirmektedir.

Bu çalışmaya katkı sağlayan tez izleme komitesine ve benim de üyesi bulunduğum, Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğuna (BEBBYT) teşekkür ederim.

Ekim 2014 Coşar GÖZÜKIRMIZI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

OEY	**:** Olasılıksal evrim yaklaşımı
PEA	**:** Probabilistic evolution approach
STD	**:** Sıradan türevli denklem
ODE	**:** Ordinary differential equation
OED	**:** Olasılıksal evrim denklemi
PEE	**:** Probabilistic evolution equation
DEUG	**:** Değişmezlik eklenimli uzay genişletim
CASE	**:** Constancy adding space extension
YBBG	**:** Yüksek boyutlu biçe gösterilimi
HDMR	**:** High dimensional model representation
ÇYÇG	**:** Çokdeğişkenliliği yükseltilmiş çarpımlar gösterilimi
EMPR	**:** Enhanced multivariance products representation
BEBBYT	**:** Bilişim enstitüsü bilgisayım bilimi ve yöntemleri topluluğu
G4SMC	**:** Group for science and methods of computing

SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN OLASILIKSAL EVRİMİNİN İZGESEL NİTELİKLERİNDE YÖNEY VE KATLIDİZİ TABANLI İNCELEMELER

ÖZET

Olasılıksal evrim yaklaşımı, birinci kerte açık ve sağ yan işlevleri çözümcül olan sıradan türevli denklemlerin başlangıç değer sorunlarında etkin bir biçimde kullanılabilir. İlgilendiğimiz sıradan türevli denklem takımı

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

olarak gösterilebilir. Sağ yan işlevlerinin dolaysızüslü açılımı

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j \mathbf{x}^{\otimes j} \tag{2}$$

biçimindedir. Olasılıksal evrim yaklaşımı, denklem çözümü için, bu açılım üzerinden türevleyim ve dizeysel gösterilim elde edinimine dayanır.

Bu tezde özellikle sağ yanı ikinci derece çokçokterimli olan sıradan türevli denklem takımlarına eğilinmiş ve önemli bulgular elde edilmiştir. Bu bulgular, gerek biçimsel olarak kesin çözüm elde etmek, gerek kesme yaklaştırımı ile yaklaşık çözüm elde etmek, gerekse de yaklaşık çözüm elde ediniminde bilgisayım çabasını azaltmaya yönelik elde edilmiştir. Birbirleri ile yakından bağlantılı bu üç koldan ilerleyen çalışmada, yöntemin sunulması ve kesin çözümün biçimsel olarak gösterilmesi bağlamında atılan adımlar ve bu adımlar ile elde edilen özgün bulgular şöyledir.

- Dolaysızüslü toplamdiziler ile Taylor toplamdizileri arasındaki ilişki bazı işleç tanımlarından yararlanılarak ayrıntılı bir biçimde ortaya kondu.
- Dolaysızüslü toplamdizilerin katsayılarının da Kronecker üslüler olduğu, Taylor açılımından değişik olarak, dolaysızüslü toplamdizilerde esneklikler bulunduğu gösterildi.
- Bu esnekliğin düzeyinin belirlenimi için izlenmesi gereken yol, somut olarak verildi.
- Eşbölünüm kanıtsavı, uzbilimcil yapıda, bir enküçükleme sorununun çözümü olarak ortaya kondu.
- Konik sağ yan işlevleri olan denklem takımlarına eğilindi. Bu durum için biçimcil çözüm elde edildi. Tümlev işleçlerinin başlangıç yöneyinin Kronecker üslülerine etkisini barındıran sonsuz bir toplamdizinin soldan bir üstel dizey ile çarpımının söz konusu olduğu gözlemlendi.

Yaklaşık çözüm (kesme yaklaştıranları) elde edinimi ile ilgili ise bulgular aşağıda verilmiştir.

- Çokbilinmeyenlilik durumundaki üçgencil ikinci derecelilik ayrıntılı olarak işlendi. Bu durum, konik sağ yan işlevi kullanımı ve ilgili toplamdizi açılımı noktası belirlenimi ile sağlanmaktadır. Oldukça kısıtlı olan bu yapıda yakınsama ile ilgili bazı kuramsal olgular söylenebilmiştir.

- Bir bilinmeyenli üçgencil ikinci derecelilik durumu için yakınsama bölgesinin sağ yan işlevlerinin kökleri tarafından belirlendiği gösterildi, bu bölge dışında da yakınsama elde edebilmek için çözümcül sürdürüm yöntemi önerildi.

- Sonlu sayıda köşegenliliğin getirileri somutlaştırıldı. Bu durumda çözüm üretimi için özyinelemeli bir çizem oluşturuldu.

- Üçgencil ikinci dereceliliğin olmadığı durumlarda, üçgencil ikinci dereceliliğin getirilerinden yararlanabilmek için uzay genişletim öngörüldü.

Bilgisayımı yalınlaştırıcı olgular bağlamında yapılanlar aşağıda belirtildiği gibidir. Yine, üçgencil ikinci derecelilik durumuna eğilinmiştir.

- Birbirinden değişik boyuttaki dizeyler için değiştirim tanımı yapıldı. Bu özelliğe dikdörtgencil değiştirimlilik adı verildi.

- Kronecker toplamdizisi katsayılarının dikdörtgencil değiştirimli olmaları durumunda biçimcil çözümdeki toplamdizide bulunan yapının çarpımcıl olarak, zamana bağımlı dördül (ing: square) çarpan ve zamandan bağımsız dikdörtgencil çarpan olarak ayrıştırılabileceği gösterildi.

- Zamana bağımlı dördül çarpanda bulunan dizey çekirdekli tümlev yapısının daha kolay işlenebilmesi için dizge yöneyinin bir sayıl ile genişletimi önerildi (DEUG yöntemi).

- Bu uzay genişletimli yapıyı kullanarak dolaysızüslü toplamdizinin ilk katsayısının (0 sırasayılı katsayı) sıfırlanabileceği gösterildi.

- Bu yapıdaki esnekliklerin 1 sırasayılı katsayıyı birim dizey ile orantılı yapmak için kullanılabileceği gösterildi.

- Bu seçimlerin sonucunda toplamdizinin terimlerinin tümlevden arındırılabileceği gösterildi.

- Dikdörtgencil bir dizeyin Kronecker üslü yöneye etki ettirilmesini içeren dikdörtgencil özdeğer sorunu tanımlandı.

- Bu adımlarla yalınlaştırılmış çözümdeki 2 sırasayılı katsayının dikdörtgencil özdeğer sorununun başlangıç değer sorununun çözümü ile ilintili olduğu belirlendi. Başlangıç koşulunun belirli eğriler üzerinde verilmesi durumunda, çözümün bu dizeyin dikdörtgencil özyöneyleri olacağı gösterildi.

- Başlangıç koşulu üzerinde bir kısıt koşmadan yalınlaştırım için Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi tabanlı yöntem oluşturuldu, bu yöntemin etkin biçimde kullanımı için izlenmesi gereken adımlar belirtildi.

  Üçgencil olmayan ikinci derecelilik durumu için önerilen değişmezlik eklenimli uzay genişletimi bağlamında ayrıntılandırılan olgular şöyledir.

- Değişmezlik eklenimli uzay genişletimi (DEUG) yöntemi olasılıksal evrim yaklaşımından bağımsız olarak yeniden ele alındı ve esnekliklerin görünenin ötesinde olduğu belirlendi.
- DEUG bağlamında kullanılan indirgeyim, dördüllüğe indirgeyim kanıtsavı olarak ortaya kondu. Bu kanıtsav ile, bütün çokçokterimli sağ yan işlevli STD takımlarının, yalnızca ikinci derece terimler içeren çokçokterimli STD takımları olarak gösterilebileceği vurgulandı.
- Boy çözümlemesi ile OEY'nin yakınsayım bölgesi yeniden vurgulandı.
- Boy dördülü enküçükleyimi ile DEUG bağlamındaki olasılıksal evrim yaklaşımında ortaya çıkan esneklikler eniyilendi. Dolayısıyla yöntem eşsizleştirildi.

Olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamında, sağ yanları ikinci derece çokçokterimli işlevler olan birinci kerte açık özerk sıradan türevli denklem takımlarının çözümü için etkin bir yöntem geliştirilmiştir. Bu çaba ile, önemli kanıtsavlar ileri sürülmüş, özellikle doğrusal olmama olgusunun doğrusallığın olguları kullanılarak daha iyi işlenmesi sağlanmıştır.

VECTOR AND FOLDED ARRAY BASED INVESTIGATIONS ON SPECTRAL PROPERTIES OF PROBABILISTIC EVOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Differential equations play an important role in modelling natural phenomena. Ordinary differential equations first came about in problems of mechanics about three centuries ago. Nowadays, differential equations are the primary tools in all engineering disciplines. To name a few, quantum mechanics, neuroscience, all areas involving signal processing provide the need to form more precise methods to solve differential equations.

In a purely mathematical sense, the unknowns are related to one another through differential operators. From a dynamical system point of view, one needs to find out about the state of a system at a certain time. So, there are certain unknowns of a system or namely state variables and these state variables form a space. At a certain time, the state of the system is described by a point in this space and as time goes by the point describing the current state moves in this space. If the place of the point at all possible times may be given by a rule, then it is possible to say that system may be solved analytically. Usually, this is not the case. In most models, the number of unknowns are less than the unknowns in the physical phenomena thus approximations are performed. Approximations may be performed in the modelling thus in the formation of the equation set and also in the solution of the equation set. It is more practical to consider these two different and subsequent steps together because from a purely engineering standpoint the model is not usable if the equation set may not be solved at a certain accuracy in a reasonable amount of time. To exemplify this concept, consider the Schrödinger equation. This equation is the mathematical formulation of a quantum system and is given by a partial differential equation. The complexity comes from the number of unknowns. As the number of the particles in the system increases, the amount of time to solve the system even by numerical methods at a certain accuracy increases drastically. This is the main motivation behind numerical methods, truncations and ignoring the effects that are relatively small next to greater effects.

The autonomous first order ordinary differential equations are important. The reason is that as long as certain analyticity conditions are satisfied, all differential equations and differential equation sets may be converted to a set of autonomous first order ordinary differential equations. Autonomous means that the dependence to the time is not explicitly shown in the right hand side functions. The price of such conversions is an increase in the number of unknowns and the number of equations. Although such a conversion is possible, there may be infinite number of unknowns and infinite number of equations as a result. Then, there is the need to tackle with the newly formed set so that the system may be solved.

Another important concept is the linearity concept. There is a great accumulation of literature on linear differential equations and they can be solved algorithmically. Therefore nonlinearity creates the problem. From a linear algebraic point of view of the

dynamical system, the simplification provided by the linearity is obvious. The evolution of a system is given by the evolution operator. From the probabilistic evolution approach used in this work, the evolution matrix appears as the power of the mathematical constant e. If there is linearity, this matrix is a diagonal matrix and the fact that it is given as the power of a constant provides not much of a challenge. If there is nonlinearity, there will be elements above and below the diagonal. Then finding the matrix power of a constant becomes a challenge and depending on the structure and the nonzero elements of the matrix, it may take a great amount of time. Note that the evolution matrix is a matrix with infinite number of rows and infinite number of columns. Unless the structure of the matrix and the initial conditions is very specific, a truncation should be performed forming the probabilistic evolution truncation approximant.

Currently initial value problems of ordinary differential equations and determination of quantum mechanical system motions by using expectation values are the two main areas of application of probabilistic evolution approach. There are similarities and differences in these applications for the quantum world and the classical mechanical world. Direct power series is a series expansion that is crucial in probabilistic evolution approach, and therefore in all applications involving probabilistic evolution approach. "Direct product and power" statement has a broader meaning, what we have use here is peculiar to vectors and matrices of ordinary linear algebra and is widely known as Kronecker products and powers. The necessities of probabilistic evolution gave way to the introduction of direct power series. On the other hand, direct power series may be considered as a series expansion at its own right and it is an important tool for the formation of new approximation methods.

First order ODE sets with analytic descriptive functions (which do not contain derivatives of unknowns at the right hand side while the left hand side includes only one unknown's derivative) can be converted to an infinite linear set of first order autonomous and homogeneous ODEs with a constant infinite coefficient matrix. The accompanying initial conditions are also populated to an infinite set of initial conditions. All these can be accomplished by using a complete basis set of terms functionally depending on unknown functions such that a new ODE is constructed for each element of this set. The constant infinite coefficient matrix depends on only the functional structures of the descriptive functions. The infinite linear ODE set can be formally solved in an analytic form which expresses the solution as the image of infinite initial vector under an exponential matrix whose argument is the abovementioned infinite coefficient matrix multiplied by time. The exponential matrix describes the propagation of the system while its argument is related to the rate of the propagation, in other words, the evolution. We call the infinite coefficient matrix "Evolution Matrix".

If the starting point for the PEA equations is a single ODE then there is just a single unknown and the basis set is composed of natural number powers of the difference between the unknown function and the Taylor series expansion point on the real axis. In this case, the initial vector is composed of the natural number powers of the initial value of the unknown while the evolution matrix becomes having an upper Hessenberg form whose each diagonal is generated by just a single term which is in fact proportional to the Taylor series of the descriptive function. The term, generating the lower neighbor diagonal to the main diagonal, vanishes when the descriptive function has a zero at the expansion point. Then upper Hessenberg form turns out to be upper triangular form which facilitates the spectral analysis of the evolution matrix and generally a discrete spectrum can appear only. Otherwise a possibility for the existence of continuous spectrum may arise. We mostly avoid continuous spectrum which corresponds to the singularities. Hence all analyses for PEA until now have been intensified at the focus of triangular block cases.

If the target initial ODE set is composed of not just a single but more than one equations and accompanying initial conditions then the analysis conceptually remains the same but the formulae become more comprehensively complicated. This may necessitate the use of the many indices and multiple sums if the Taylor series expansion is used as the mathematical tool. This may be avoided, by introducing the Kronecker power series which enables us to use just a single index in the sums, with the aid of the vectors and matrices of ordinary linear algebra. Thus, the resulting structures in the ultimate infinite linear ODE set contain an evolution matrix which is again in an upper Hessenberg form but this time not in scalar elements, instead, in block elements. The initial vector of this case also takes a block form composed of the Kronecker power of the initial vector appearing in the original ODE set's accompanying initial impositions. These are the important differences immediately coming to mind in the case of more than one unknowns.

The main conceptual line of the probabilistic evolution approach (PEA) is as follows. Consider the initial value problem of a set of explicit first order autonomous ordinary differential equations with analytic right hand side functions given by

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t)), \qquad \boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{a}_{in} \tag{3}$$

where all entities symbolized by boldface characters are assumed to be composed of n elements, all of which are temporally varying except the ones in $\mathbf{a}_{in}$. While $\boldsymbol{\xi}(t)$ stands for the unknown vector varying in time the vector valued function $\mathbf{f}$ is assumed to be explicitly known. On the other hand, $\mathbf{a}_{in}$ which specifies the initial value of the unknown vector is assumed to be given.

The direct (Kronecker) power expansion of the right hand side (descriptive function vector) can be explicitly written as follows

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j \mathbf{s}^{\otimes j} \tag{4}$$

where each term of the expansion has the product of a coefficient matrix and a direct power of the system vector. The proposed method relies on this series expansion.

What we have accomplished by our new method may be itemized as follows:

- We have obtained the analytic form of the solution for the initial value problem of a finite number of explicit conical ODEs. We now know that the solution can be written in a Kronecker power series form where the summand has analytical expression.

- The summand or (additive) kernel of the solution series can be simplified if the coefficient matrices of the originally given ODE set satisfy certain commutativity (rectangular commutativity) relations. If this happens then the temporal behavior of the kernel is condensed in the first factor of a binary product which has also square matrix structure. The second factor does not contain the time and shows rectangular matrix structure whose number of columns increases as we proceed amongst the summands of the relevant Kronecker power series in ascending power direction.

- We know that the addition of a constant temporal function to the unknowns as a new member and therefore increase in the dimension of the unknowns' space by one, enable us to get rid of the constant matrix component ($\mathbf{F}_0$). Beyond that, by using the flexibilities appearing in the resulting matrix structures, we can change the first degree terms coefficient matrix to an identity matrix premultiplied by an arbitrary constant (β). This structuring facilitates our analysis pretty much and separates the matrix algebraic nature from the temporal behavior in the kernel, by transferring the squareness to the rectangularity. This is the full separation of matrix algebra and temporal change.

- We now know that the full kernel separability takes us to the constant solution of the original ODEs if we use the so-called "Rectangular Eigenvalue Problem". This also urges us to define rectangular eigencurves or shortly reigencurves.

- Even though we have not intended to go beyond the constant solution, what we have obtained here implies that we can possibly obtain different specific structure solutions by tracing the route we followed when we get the constant solution within certain level of deviations in methodology. We started to work on these issues, to get new horizons in the ODE theory.

- We do not need to get constant solution and we have the expressions to get the solutions without assuming any rectangular eigen structure. The algorithm seems to be simple conceptually while certain precautions should be taken for the practical evaluations in the sense of computation time and the memory utilization in computers.

1. GİRİŞ

Türevli denklemler, devingen dizgelerin (ing: dynamical systems) yapılarının incelenmesinde sıklıkla kullanılır. Sıradan türevli dizey (ing: matrix) denklemlerin incelenmesi, göretürevli denklemlerin (ing: partial differential equations) çözümü gibi konular aslında birçok fiziksel olgunun yorumlanabilmesi için yapılan çalışmaların itici gücü ile kapsamlı bir noktaya gelmişlerdir. Türevli denklemler kullanılarak bir dizgenin incelenebilmesi olgusu 1700'lü yıllara dayansa da, asıl gelişme geçen yüzyılın ikinci yarısından itibaren olmuştur. Bu gelişmede nicemsel işleybilim (ing: quantum mechanics) ve daha sonra da sinirbilim (beyinbilim, ing: neuroscience) alanında yapılan çalışmaların öncülüğünü özellikle belirtmek gerekir. Geçen yüzyıl oldukça ön plana çıkan ve halen de sürmekte olan yeni teknolojiler kullanarak savaşma arzusu, bilim insanlarının atomu incelemeye yöneltilmesine yol açmıştır. Atomun incelenmesi ise varolan uzbilimsel (ing: mathematical) yapıların hızla gelişmesini sağlamıştır. Sinirbilim üzerine yapılan araştırmalar ve bu araştırmaların da uzbilime (ing: mathematics) yaptığı katkılar da benzer bir yaklaşımla yorumlanabilir.

Türevli denklem ile modellemedeki yargı, bir dizgenin (ing: system) belli bir andaki durumunu belirtmek için bir türevli denklem çözümünün yeterli olacağıdır. Bu denklemin nasıl oluşturulacağı, oluşturulduktan sonra da nasıl çözüleceği gündeme getirilmelidir. Bazı dizgeler için dizgeyi betimleyen (ing: describing) denklem oluşturulmuş durumdadır. Kullanılan fiziksel model denklemi bir yaklaştırım (ing: approximation) kullanmadan oluşturabilmeyi çok özel durumlarda sağlayabilir. Başka bir yaklaşım ise, dizgenin fiziksel özelliklerini göz önünde bulundurarak, belli değiştirgelere (ing: parameter) bağlı bir yapı önermektir. Bu değiştirgelerin, eğer öyle bir olanak varsa, deneysel verilerin de yardımıyla belirlenmesi, ve de, ondan sonra ortaya çıkan yapının incelenmesi söz konusu olur. Oluşturulan modelin gerçekten de dizgeyi istenilen ölçüde betimleyip betimlemediğiyse, eğer öyle bir olanak varsa, yine deneysel olarak değerlendirilir.

Türevli denklem kullanarak model oluşturma tek yol değildir. Dizge ile ilgili türevli denklemi oluşturma aslında dizgeyi çözmek demektir ve yapıyı çözmek için fiziksel olguların nedenlerini uzbilimsel olarak anlatma isteğinin sonucudur. İncelemeye nedenden değil, sonuçtan başlamak da olanaklıdır. Bu bağlamda, dizgeden elde edilen veriler incelenir. Deneyin her adımından elde edilen sayısal değerler alt alta dizilip bir yöney (ing: vector) oluşturulabilir. Bu yöneyler kaç öğeli ise, o kadar boyutlu bir doğrusal yöney uzayında (ing: linear vector space) bulunuyor diye düşünülebilir ve doğrusal cebrin olguları ile dizgeyi betimleyen bazı değiştirgelerin değerleri incelenebilir. Bu tür bir yaklaşım, dizgeyi betimleyen türevli denklemi oluşturma isteğini barındırmayabilir. Deneysel verileri kullanarak dizge ile ilgili birşeyler söyleyebilmek için olasılık kuramı (ing: probability theory) ile ilgilenmek gerekir. Bazı durumlarda ise, olasılık dizgenin yapısında halihazırda bulunur. Nicemsel dizgeler böyle dizgelere örnektir. Bu durumda, dizgenin denklemi ile ilgili birşeyler söyleyip daha sonra da bu denklemin çözümünü kesin olarak ya da yaklaşık olarak bulabilmek için olasılık kuramı ile ilgili olguları da yoğun bir biçimde kullanmak gerekir.

Bilimsel yazında (ing: scientific literature) sıradan türevli denklem (STD, ing: ordinary differential equation) olgusu ile ilgili birçok çalışma vardır. Ama çözümü olan herhangi bir sıradan türevli denklemin çözümünü verebilecek, sıradan türevli denklemler konusunda her derde deva denebilecek, bir uziş (ing: algorithm) bu ana dek üretilememiştir. Eğer bazı temel yöntemlerle sonuç elde edilemiyorsa, denklemler ayrı ayrı değerlendirilmekte, sayısal ya da kesin çözüm elde edebilmek için çalışmalar yapılmaktadır. Eğilim göretürevli denklem çözümü için sıradan türevli denklemler ile ilgili olguları kullanmaya götürecek indirgemeler yapmaktır. Sıradan türevli denklemlerin çözümü içinse, hakkında daha çok bilgi bulunan doğrusal sıradan türevli denklemlerin olgularını kullanmaktır. İlle de böyle bir yol izlenmesi gerekmez, ama az bildiğimiz bir yapıyı daha iyi bildiğimiz bir yapı biçiminden betimlemeye (ing: describe) çalışmak doğal bir yoldur. Bu biçimde incelemenin amacı, denklemi doğrusal cebir kullanarak çözme isteğidir. Dizey (ing: matrix) işlemleri bilgisayarda buyrukdizileme (ing: programming) için uygun bir yapı içerir. Simgesel incelemeler de günümüz bilgisayarlarında yapılabilmesine karşın hem buyrukdizici (ing: programmer) hem de bilgisayar açısından daha kapsamlı ve zordur.

Bu bağlamda, sıradan türevli denklemlerde doğrusallığın ne anlama geldiğini ayrıntılı olarak incelemek gerekir. Doğrusallığın tanımı kolaylıkla yapılabilse de doğrusallığın denklemden oluşturulan dizey (ing: matrix) cebrine nasıl yansıdığı, başka bir deyişle doğrusal olmamanın dizey cebrine nasıl yansımadığı yeterince incelenmemiştir. Bunun nedeni, doğrusal olmamak ile çokdeğişkenlilik arasında yakın bir ilişki olması ve bu tür durumların incelemeyi iki sırasayılı (ing: index) yapılardan daha çok sırasayılı yapılara aktarmasıdır. Çok yönlü dizi, tansör, katdizey ya da katlıdizey gibi kavramlar hemen hemen aynı anlamı verir ve bu çok sırasayılılığı betimler. Bu yapılar ile ilgili cebir oluşturma girişimi kabaca son on yılın ürünüdür ve hızla gelişen bir alan olarak dikkat çekmektedir. Bu olguların uygun bir biçimde biraraya getirilmesi, sıradan türevli denklem çözümü için hızlı yakınsayan sayısal yöntem geliştirilmesini sağlayacaktır ve bu yönde çalışmalar başlamıştır.

Dolayısıyla denklem çözümünde izlenebilecek yol şu biçimde sıralanabilir. Eğer bir göretürevli denklem söz konusu ise, yapıyı birden çok sıradan türevli denklem olarak anlatma yoluna gidilebilir. Eğer bir sıradan türevli denklem söz konusu ise ve denklemde tekillik (ing: singularity) varsa, denklem sayısını ve dolayısıyla değişkenliliği arttırarak bu tekilliğin etkilerini azaltıcı bir yol izlenebilir. Eğer doğrusal olmayan bir sıradan türevli denklem varsa, benzer bir biçimde değişkenlilik arttırılarak doğrusal cebirin öğelerini kullanabilmek için önlemler alınabilir. Ortaya çıkacak olan doğrusal cebir işlemlerini bilgisayım (ing: computation) açısından kolaylaştıracak bazı ara işlemler yapmak da olanaklıdır. Çokdeğişkenliliğin katlıdiziler (ing: multilinear arrays) oluşturacağı ve bu alanın da henüz tam olarak oturuşmamış ama hızla ilerleyen bir alan olduğu göz önünde bulundurulmalıdır.

2. AMAÇ

Bu tez, verilen bir sıradan türevli denklem (STD) ya da denklem takımı ve ona eşlik eden başlangıç koşulu ya da koşul takımı için, herşeyden önce doğrusallık ve doğrusal yöney uzaylarının (ing: linear vector spaces) temel öğe ve aygıtlarından yararlanarak doğrusal ama sonsuz sayıda sıradan türevli denklem içeren başlangıç koşullu bir denklem yapısı oluşturmak, daha sonra da, bu yapıdan sonlu kesmelerle elde edilecek denklemlerin çözümlerinin yaklaştıran dizisi olarak gündeme getirildiği bir yaklaştırım yöntemi oluşturmayı amaçlamaktadır. Bu yapılırken değişmez katsayılı bir STD takımı oluşturmak ve üstelik bu yapıdaki sonsuz öğeli katsayı dizeyini üçgensel yapıda gündeme getirmek çok önemli bir olgudur. Nedeni de bu yapılarda kesme yaklaştıranlarının çok daha kolay ve çözümcül (ing: analytic) olarak oluşturulabilmesidir. Üçgensellik yakalamanın koşulları iyice incelenecek ve STD ya da STD takımlarında hangi özelliklerin varolmasının genellik yitimine yol açmayacağı ya da en az düzeyde yitimle çalışma olanağını getireceği çok önemli bir incelik olarak gündeme getirilecektir.

Bu arada genellik yitimlerinden ve tekilliklerden olabildiğince kaçınacak, onları salt başlangıç koşullarına taşıyacak yöntemlerden yararlanılacaktır. Bu doğrultuda, Prof. Dr. Metin Demiralp'in yalnız ve oğlu Emre Demiralp ile birlikte geliştirdiği olgular taban olarak alınacak, oralarda yaratılan ufuklara doğru ilerlenecektir. Bu bağlamda, uzay genişletim (ing: space extension) olgusuna kapsamlı olarak başvurulacak, üçgenselliğin ötesinde ikiköşegenlilik indirgemesine de başvurulacak, diğer bir deyişle, sağyan işlevlerinin doğrusal olmama özelliklerinin ikinci derece çokçokterimli (ing: multinomial) düzeyinde kısıtlanması ve bu yapılırken de genellikten yitim olmamasına ya da olsa bile düzeyinin en azda tutulmasına özen gösterilecektir.

2.1 Bilimsel yazın ile çalışmanın ilişkisi

Sıradan türevli denklem çözümü, gerek kuramcıl, gerekse de uygulayımcıl özellikleri bakımından, oldukça geniş bir alandır. Bu alanda başlıca kaynaklar olarak [1–9] gösterilebilir. Çoğunluğu kitap olan bu kaynaklar, günümüzde sıklıkla kullanılan sayısal yöntemleri ayrıntılandırmaktadır. Bu yöntemlerin çoğunluğu ayrıklaştırım tabanlı yöntemlerdir. Bu tez bağlamında oluşturulan yöntem ise, ayrıklaştırım tabanlı değildir. Ayrıklaştırımın getirebileceği olumsuzluklardan kaçınıma yönelinmiştir. Tezde verilen kaynakların ağırlıklı olarak BEBBYT'nin çalışmalarından oluşuyor olması, geliştirilen yapının bu çalışmalara dayanışından dolayıdır.

Bu çalışmanın amacının irdenebilmesi için, bu çalışmadan önce olasılıksal evrimde ne konumda olunduğu ve gerek tez yazarının gerekse de BEBBYT'nin diğer bileşenlerinin katkılarıyla nereye gelindiği vurgulanmalıdır. Zamansal olarak bu tezin başlangıç evresinde bilimsel yazına giren başlıca çalışmalar iki ana topluluğa ayrılabilir. Olasılıksal evrim yaklaşımı üçlemesinde nicem beklenen değer devinimi, evrim dizeyinin izgesel (ing: spectral) özellikleri, uzay genişletim (ing: space extension) ve Liouville denklemi bağlamında olasılıksal evrim yaklaşımı gündemdedir [10–12]. Daha ayrıntılı olarak gündeme getirmek gerekirse, üçlemenin birinci yazısında, dalga işlevi doğrudan kullanılmadan, beklenen değer devinimi bağlamında, olasılıksal evrim yaklaşımı ile, bir işlecin beklenen değerinin yaklaştırım bağlamında nasıl gündeme getirilebileceği olgusu vurgulanmıştır [10]. İkinci yazıda, birinci yazıda sunulan yöntem ayrıntılandırılmıştır. Yöntem bağlamında gündeme getirilen ve dizgenin evrimini betimleyen evrim dizeyinin izgesel özellikleri, dizgedeki büyüklüklerin zamana bağlı beklenen değerlerini içeren dizge yöneyinin genişletilerek, tekillik içeren sorunların da işlenimi gündeme getirilmiştir [11]. Üçlemenin üçüncü yazısı ise olasılıksal evrim yaklaşımının Liouville denklemi bağlamında gündeme getirimini içermektedir. Başal işleybilimin ilgi alanına giren, ve olasılıksallığın sayıtım bağlamında gündeme geldiği bu çalışmada uyumlu salınıcı dizgesinin çözümü, örnek bir uygulama olarak sunulmuştur [12].

Diğer ana topluluk ise Metin Demiralp'in Emre Demiralp ile birlikte yaptığı çalışmalardır [13–16]. Bir yazı ikilisi olarak gündeme gelen çalışmaları, konu ile ilgili yazı niteliğindeki ilk kapsamlı çalışmalardır [13, 14]. Yazı ikilisinin ilki, beklenen değer devinimi olgusunun gündeme getirildiği, sıradan türevli denklem takımının oluşturumunu da içeren bir yazıdır [13]. Nicemsel işleybilim bağlamında olasılıksal evrim yaklaşımı için temel kaynak olarak gündeme gelen bu yazı, kuramcıl olguları gündeme getirmektedir. Yazı ikilisinin ikincisi, olasılıksal evrim yaklaşımı ile devingen dizgeler arasındaki bağın sıradan türevli denklem takımları aracılığı ile kurulumunu sunmakta, ayrıca beyinbilimde gündeme gelen devingen nedencil biçeleyim konusunu olası bir uygulama alanı olarak gündeme getirmektedir [14]. Olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamındaki ilk düşünler bu yazılarda sunulmuştur. Metin Demiralp ve Emre Demiralp'in diğer yazı ikilisi ise, sıradan türevli denklem çözümü bağlamında olasılıksal evrim yaklaşımı için temel oluşturan ve ilk düşünleri sunan yazılardır [15, 16]. Bu yazıların ilkinde bir bilinmeyenli bir denklem durumu için Taylor açılımı kullanılarak, olasılıksal evrim yaklaşımı yönteminin oluşturumu sunulmuştur. Çokbilinmeyenlilik durumu için de giriş niteliğinde bazı olgular belirtilmiştir. Bu yazıdaki en önemli olgu, olasılıksal evrim denkleminin oluşturumu ve yaklaşık çözümün bu bağlamda elde edinimidir [15]. İkinci yazı ise çokbilinmeyenlilik olgusunu ayrıntılandırmıştır. Bir bilinmeyenlilikten çokbilinmeyenliliğe geçişte olasılıksal evrim denkleminde ne gibi yansımalar olduğunu sunmuştur. Kabaca söylemek gerekirse, bu geçişte, dizey öğelerinin dolaysızüslülerle tanımlanan öbek dizeyler, yöney öğelerinin ise dolaysızüslülerle tanımlanan öbek yöneyler olması söz konusudur [16].

Şu anda inceliyor olduğunuz tez, bu çalışmaların ardılı olarak değerlendirilmelidir. Bu tez çalışmasında birincil olarak, olasılıksal evrim yaklaşımı yönteminin daha kolay uygulanabilir bir yapıya getirimi gündeme getirilmiştir. Bu daha kolay uygulanabilirlik olgusu birkaç başlık altında toplanabilir. Bunlardan en önde geleni, bilgisayım karmaşıklığını azaltıcı olgulardır. Daha somut olarak gündeme getirmek gerekirse, olasılıksal evrim denkleminin çözümü bağlamında gündeme gelen özikili sorununun yineleyişli yapısından kaçınmaktır. Bu bağlamda, denklem takımı için belirli kısıtların gündeme getirimi olgusu ile karşılaşılmıştır. Bu kısıtların sağlanmadığı durumlarda neler yapılabileceği ise başlı başına bir konu olarak gündeme gelmiş ve bu tez bağlamında incelenmiştir. Bir diğer önemli olgu olan yakınsayış olgusu ise, ayrıntılı olarak, uzbilimcil nitelikte belirli üst kıyılandırımlar ile sunulmuş, istenen düzeyde yakınsayış elde edilemediği durumlarda neler yapılabileceği ise ayrı bir çalışma başlığı olarak gündeme gelmiştir. Özet olarak, olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamında sıradan türevli denklem takımı çözümü için bilgisayım karmaşıklığını azaltıcı adımlar atılmış, yöntemin daha genel yapılara uygulanımı için neler yapılabileceği ve yakınsayışın istenen düzeyde olmadığı durumlarda nasıl istenen düzeye getirilebileceği ayrıntılı olarak işlenmiştir. Bu adımlar atılırken, yöntemin yapısı daha ayrıntılı biçimde yeniden gündeme getirilmiş, daha somut olarak belirtmek gerekirse, çokbilinmeyenliliğin bir yansıması olarak gündeme gelen katsayılardaki esneklikler ve belirlenimi olgusu bu tez bağlamında işlenmiştir.

Tez süresince gerek tez yazarınca, gerekse de BEBBYT'nin diğer bileşenlerince yapılan olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamındaki çalışmalar aşağıda kısaca örneklenmiştir. Olasılıksal evrim yaklaşımının uzbilimsel sendelenim kuramı (ing: mathematical fluctuation theory) ile ilgili bağıntılarını da ortaya koyan ve işlev evirtimini de gündeme getiren çalışmalar [17–19] örnek gösterilebilir. [17] çalışmasında, başlangıç koşulunun esnek olduğu öngörülmüş, bu esnekliğin de bir eniyileyiş sorununun çözümü ile bulunumu önerilmiştir. [18] ise [17] çalışmasında üretilen olguların işlev evirtimi sorununa uygulanışını içermektedir. [19], başlangıç yöneyinin kesilmiş evrim dizeyinin özyöneylerinden biri olması durumunda oluşabilecek yalınlaştırımları gündeme getirmektedir. [20] ise bildiri düzeyinde, olasılıksal evrimin ayrıntılı olarak sunulduğu, doğrusal olmamaktan doğrusallığa geçişin getiri ve götürülerini ve yöntemin adının neden olasılıksal evrim yaklaşımı olduğunu açıklayan temel bir kaynaktır. İncelenen dizgenin belirli özelliklerinden dolayı yalınlaştırmalar oluşturulumuna yönelik çalışmalar [21–24] da ayrıca gündemdedir. [21] çalışmasında, iki yapışık olmayan köşegenli evrim dizeyi oluşturan yapıda özyineleyiş oluşturumu ve çözümü söz konusudur. [22] ise bu oluşturulan yapının Van der Pol denklemini betimleyen denklem takımında kullanımını, [23] daha genel bir denklem takımında kullanımını içermektedir. [24] çalışması, bir bilinmeyenli durum için, elde edilen kesme yaklaştırımlarının, kesin sonuçlarla karşılaştırımını içermektedir. Bir diğer alan, dizgedeki tekilliklerin doğuracağı sorunların giderimine yönelik çalışmalardır. [25] çalışması dizge yöneyinin genişletimini taban alır. Başal (ing: classical) işleybilim (ing: mechanics) ve Liouville işleybilimi bağlamındaki çalışmalar [26, 27] da önemli çalışmalar olarak gündeme gelmiş ve bu bildirilerde sunulan yapılar daha sonra yazıya dönüşmüştür. Liouville işleybilimi bağlamında yapılan bu çalışmalarda başal uyumlu salınıcının çözümü örneklenmiştir. Nicem işleybilimde ilgili denklemlerin oluşturulumuna yönelik çalışmalar için ise [28] örneklenebilir. Beklenen değer devinimi bağlamında sıradan türevli denklem takımı oluşturumunu içeren bu çalışma, nicemsel işleybilim bağlamında olasılıksal evrim yaklaşımı çalışacaklar için bir başvuru kaynağıdır. Gökcisim işleybilimine uygulama için adımları öngören çalışma olarak [29] gösterilebilir. Açkıcıl konuşma olarak gündeme gelen bu yapıda, bir uygulama alanı olarak, n-cisim sorunu gündeme gelmektedir. Çokbilinmeyenliliğe uygulanım için ilk düşünleri içeren ve özel olarak iki bilinmeyenliliğin ele alındığı [30], sıradan türevli denklem takımı çözümü bağlamındadır. Belirli başal ve nicem dizgelere uygulanıma yönelik çalışmalar uygulayım açısından önemlidir [31–35]. [31], birden çok evrim dizeyi kullanarak yüksek kerteliliğin işlenimini de içermektedir. [32–35] çalışmalarında ise değişik gizilgüç ve Hamilton işleçlerinin yapıyı oldukça değiştirdiği gözlemlenmiş, burada yapılan gözlemler daha sonra uzay genişletimi, genişletilmiş uzayda beklenen değer tanımı gibi yeni kavramlara temel oluşturmuştur. [36] çalışması ise, yaklaştırım olarak, sağ yan işlevinin değişmez ya da bir bilinmeyenli yaklaştırımını gündeme getirip, olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamında kolaylaştırım sağlamayı öngörmektedir. Başlangıç koşulları ile ilgili olguları gündeme getiren çalışmalar ise yakınsayış ile ilgili olgulara da temel olacak niteliktedir. [37] belirli başlangıç koşulları için evrim dizeyinin köşegendışı katkılarının bastırılabileceğini konu almaktadır. [38] ise, bu tezde ayrıntılandırılan çözümcül uzatım ile etkinleştirimi içermektedir. Ayrıca, [39] özerklik söz konusu olmadığı durumlarda özerklik elde edinimini, [40] ise yalnızca ikinci kerteliliğinin bulunduğu durumlarda olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamında çözüm elde edinimini içermektedir. [41] ise bu tez bağlamında sunulan, evrim dizeyine karşılık gelen işlecin özişlevlerini kullanarak yakınsayış inceleyişini amaçlamaktadır. [42] ise, sağ yan işlevlerinin yüksek dereceli çokçokterimli olduğu durumlarda, bilinmeyen sayısını arttırarak ikinci dereceliliğin nasıl elde edilebileceğini gösteren bir çalışmadır.

Zamancıl sıralayışa özen gösterilerek bir araya getirilen ve yukarıda sunulan bu dizin, zamancıl olarak tezin öncesi, başlangıçı ve gelişimi süreçlerine karşılık gelmektedir. 2013 ve 2014 yılları ise, deyim yerindeyse, en olgun sonuçların elde edildiği ve paketin kapatıldığı sürece karşılık gelmektedir. 2013 itibariyle olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamında gündeme gelen yayınlar şöyledir. Nicem dizgeler için beklenen değer devinimi bağlamında olasılıksal evrim yaklaşımı ile çözüm elde edinimi üzerine bir bildiri üçlemesi olan çalışmanın ilki, bir boyutlu dördüncü derece bakışık nicem uyumsuz salınıcının çözümü üzerinedir [43]. İkincisi ise gizilgüç işlevinde üstel bir terim olan uyumsuz salınıcıya odaklanmaktadır [44]. Üçüncü çalışmada ise dizge yöneyine işleç evriği eklemlenerek iyileştirim öngörülmektedir. Bu üç çalışmada da nicem yapının doğasından kaynaklanan yakınsayış sorununun çözümüne eğilinmiştir

[45]. Gizilgüç işlevinin yapısına göre özünü daha değişik bir yapıda gösteren yakınsayış sorunu için, bu çalışmalarda gösterilen ana yol sendelenim bastırımıdır. [46] ise, katsayı dizeylerinin esnekliklerini kullanarak, bu dizeylerin tekil yöneylerinin birinin başlangıç yöneyi ile orantılı olmasını sağlayıp bilgisayımcıl kolaylık getirmeye yönelik bir çalışmadır. [47] bildirisinde, bir toplamın Kronecker üslüsünün nasıl belirlenebileceği anlatılmaktadır. Bu olgu, Kronecker cebri üzerinden olasılıksal evrim yaklaşımı için bazı indirgeyimler oluşturmaya yönelik ortaya çıkmıştır. [48] ise, bu tezde de işlenip daha geliştirilen, çekirdek ayrıştırılabilirliği olgusu ile ilgili temel düşünleri içermektedir. [49], dizge yöneyinin üslülerini de dizge yöneyine katarak yakınsayışı hızlandırmayı amaçlamaktadır. Ayrıca, olasılıksal evrim yaklaşımı için uygulama alanı sunmasından ötürü önemli bir çalışmadır. [50], değişmezlik eklenimli uzay genişletimine giriş niteliğinde bir çalışmadır. Bu aşamada, olasılıksal evrim yaklaşımı ile bağdaştırım söz konusu değildir. [51], olasılıksal evrim yaklaşımı ve beklem sorununun olgularını kullanarak, bir çokdeğişkenli işlevin tümlev gösterilimini oluşturmaya yönelik bir çalışmadır. [52] ise işlev yaklaştırımına yöneliktir. Dolaysızüs işleminin özelliklerini kullanarak, Padé oranlarına benzer bir yaklaştırım oluşturmayı amaçlamaktadır. [53] çalışmasında, özerk olmayan üçüncü derece bir denklem takımının, özerk ikinci derece bir denklem takımına getirimi inceleme altındadır. [54], nicem işleybilim bağlamında, olasılıksal evrim denkleminin çözümünün beklem sorunu ile ilişkilendirimi ve çözümü ile ilintilidir. 2013 ve 2014 yıllarında tez yazarının da yazarı olduğu iki yazı ve iki bildiri bulunmaktadır [55–58]. Bu çalışmaların içeriği bu tez bağlamında ayrıntılı olarak gündeme getirilmiştir.

3. OLASILIKSAL EVRİM YAKLAŞIMI

3.1 Sorunun tanımı

İlgilenilen uzbilimsel sorun

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t)), \qquad \xi(0) = a \tag{3.1}$$

biçimindeydi. Burada t'nin zamanı simgelediği düşünülmektedir. Zamana yalnızca ξ işlevi üzerinden bağımlı olan sağ yan işlevinin ise zamana göre karmaşık düzlemin herhangi bir sonlu bölgesinde bir tekilliği olmadığı durum göz önüne alınacaktır. Olasılıksal evrim yöntemi, toplamdizi açılımı (ing: series expansion) olgusunu temel alır. Bu bağlamda sağ yan işlevinin, bağlı olduğu işlevin eksi değerli olmayan üslüleri biçiminden toplamdiziye açılması söz konusudur.

3.2 Taylor açılımı belirlenimi ve sonsuz sayıda denklem içeren doğrusal denklem takımının oluşturumu

Sağ yan işlevinin bir sonlu $x^{(r)}$ noktasındaki Taylor açılımı

$$f(\xi(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(\xi(t) - x^{(r)}\right)^j \tag{3.2}$$

biçimindedir. $\left(\xi(t) - x^{(r)}\right)$ işlevlerinin eksi değerli olmayan üslülerin birbirinden doğrusal bağımsız olduğu olgusunu göz önünde bulundurarak, bu işlevlerin bir taban takımı oluşturduğu söylenebilir. Bu aşamada, uygulamaya yoğunlaşmak bakımından, bu taban takımının nasıl bir uzayı örttüğü ve bu uzayın özelliklerinin ne olduğu olgusuna girilmeyecektir. Dolayısıyla, taban işlevleri

$$x_j(t) \equiv \left(\xi(t) - x^{(r)}\right)^j, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{3.3}$$

olarak simgelenebilir. Başlangıç zamanı olan $t = 0$ durumunda ise bu taban işlevleri

$$x_j(0) = \left(a - x^{(r)}\right)^j, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{3.4}$$

biçimindedir. Taban işlevlerinin zamana göre türevlerini elde ederek, bu taban işlevleri üzerinde sıradan türevli denklem elde edilmesi olgusunu gündeme getirerek

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_j(t) &= j x_{j-1}(t)\,\dot{\xi}(t) \\
&= j \sum_{k=0}^{\infty} \left(\xi(t) - x^{(r)}\right)^{j-1} f_k \left(\xi(t) - x^{(r)}\right)^{k} \\
&= j \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\xi(t) - x^{(r)}\right)^{k+j-1} \\
&= j \sum_{k=0}^{\infty} f_k x_{k+j-1}(t)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.5)}
$$

bağıntısı elde edilebilir. Bu bir sıradan türevli denklem takımıdır. Dolayısıyla, bir adet sıradan türevli denklem yerine sonsuz adet sıradan türevli denklemden oluşan bir sıradan türevli denklem takımı söz konusu olmuş oldu. Sonsuzluk önemli bir olumsuzluk olarak gözükse de ona karşılık gelen olumluluk olarak ise doğrusal cebirin kavramlarını kullanma olanağı gösterilebilir. Bilinmeyen ve denklem sayısını bir adetten sonsuza çıkarma doğrusallık sağladı ve bu doğrusallığı yaklaşık olarak değil, kesin olarak sağladı. Bunun tam evriği yaklaşımın da işe yarar olduğu durumlar düşünülebilir. Sonsuz sayıda denklem yerine, bir adet denklem kullanarak ama doğrusal olmamanın düzeyini arttırarak ilerlenebilir. Böyle bir anlayışın da dizgeyi daha iyi anlamakta yararı olacağı düşünülebilir. Aslında doğrusal olan yapılar istenmesinin önemli nedeni bu konudaki birikimin dolgun olması, ama daha önemli bir neden ise doğrusal cebir olgularının bilgisayarda belirlenmek için elverişli yapılar olması. En baştaki doğrusal olmayan yapının belirli ara işlemler ile kesin çözümü bulunabilse bile, olasılıksal evrim yaklaşımı anlamlı olabilir. Çünkü buradaki amaç belirli bir denklemi ya da denklem takımını çözmek değil, oluşturulabilecek türlü denklem yapılarında uygulanmasında istenilen duyarlıkta sonuçlar üretebilecek bir yöntem geliştirmektir.

(5) sırasayılı bağıntı,

$$
\dot{x}_j(t) = j \sum_{k=0}^{\infty} f_k x_{k+j-1}(t), \quad j = 0, 1, \ldots, \qquad \textbf{(3.6)}
$$

yapısını üretir. Buna karşılık gelen başlangıç koşulu ise

$$
x_j(0) = \left(a - x^{(r)}\right)^{j} \qquad \textbf{(3.7)}
$$

olarak karşımıza çıkar. Bu, dizey gösterilimi için uygun bir yapıdır. Soyut cebir öğeleri üzerinden belirtmek gerekirse, taban öğelerine bir işlecin etki ettirilmesi taban öğelerinin türevlerini oluşturmaktadır. Somut olarak ise

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_0 & f_1 & f_2 & \cdots \\ 0 & 2f_0 & 2f_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 3f_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

söz konusudur. Bu yapı, daha kapalı olarak

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{x}(t), \tag{3.9}$$

gösterilebilir.

3.3 Biçimsel çözüm

Burada **E** dizeyi, dizgenin evrimini betimler. Bu yöneysel yapıda verilen sıradan türevli denklemin çözümü biçimsel olarak

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{E}}\mathbf{x}(0) \tag{3.10}$$

gösterilebilir. Bu yapıdan doğrudan çözüme geçmeyi engelleyen olgu, kapalı yapıda yazınca pek de hemen görülmeyen sonsuzluk olgusudur.

3.4 Sonlu kesmeler ile yaklaşık çözüm elde edinimi

Bu bağlamda, dizeyden yapılacak $n \times n$ kesme ve yöneylerden yapılacak n öğeli kesmeler kesme yaklaştıranını üretecektir. Üstel dizey belirlenimi için evrim dizeyinin özikilileri kullanılabilir. Bilimsel yazında üstel dizey belirlenimi için birçok yol bulunmaktadır [59, 60]. Bunların bir bölümü sıradan türevli yapılara geçişi, bir bölümü de toplamdizilerle ilerlemeyi öngörmektedir. Burada, bilgisayım açısından kolaylıklar sağlayan doğrusal cebircil yapılara geçiş istendiği için, evrim dizeyinin özikililerini belirleyip ilerlemek daha uygun görünmektedir. Bu yol, ne kadar buyrukdizileyim bakımından uygun olsa da, bilgisayım karmaşıklığı bakımından yeğlenebilecek bir yol değildir. Kolaylık için, evrim dizeyinin özel yapısını gündeme almak gerekir. Kesme yaklaştıranının, denklemin çözümünü ne kadar iyi yansıttığı ise ayrı bir konudur. Bu çalışmada bu konu uzbilimsel olarak önemli ayrıntılara girerek işlenecektir.

3.5 Olasılıksal evrim dizeyi ile ilgili izgesel olgular

Evrim dizeyi, üst Hessenberg yapısındadır. Bu yapının sıfır öğelerinin çokluğundan öte, sıfır olmayan öğeler de oldukça düzenli bir biçimde bulunmaktadır. Dolayısıyla, özikililerin de belirli bir yapıda olması beklenebilir. Bu çalışmada özellikle üçgensel yapıdaki evrim dizeyi ile ilgilenilecektir çünkü üçgensel yapıdaki dizeylerin özikilileri ile ilgili bir çırpıda yorumlarda bulunabilmek olanaklıdır. Özikilileri incelerken bakacağımız iki önemli olgu var. Bunlardan birisi, n kerte kesme yaklaştıranından $(n+1)$ kerte kesme yaklaştıranına geçerken nelerin gündeme geldiği. İkinci olgu ise sonsuz dizeyin özikililerinin ne olduğu. Eğer n kerte kesme yaklaştıranından $(n+1)$ kerte kesme yaklaştıranına geçerken yakınsamayı bozabilecek bir olgu söz konusu olmuyorsa ve kesme yaklaştıranının kertesi arttırıldığında erey olarak nereye vardığımız konusunda bir yanılgıya varılmıyorsa, yakınsama olduğu rahatlıkla söylenebilir. Bu bağlamda evrim dizeyi ile başlangıç yöneyinin çarpımı incelenmelidir.

$$\mathbf{Ex}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_0 & f_1 & f_2 & \cdots \\ 0 & 2f_0 & 2f_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 3f_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a - x^{(r)} \\ \left(a - x^{(r)}\right)^2 \\ \left(a - x^{(r)}\right)^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Bu yapı daha açık olarak

$$\mathbf{Ex}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(a - x^{(r)}\right)^j \\ \sum_{j=0}^{\infty} 2f_j \left(a - x^{(r)}\right)^{j+1} \\ \sum_{j=0}^{\infty} 3f_j \left(a - x^{(r)}\right)^{j+2} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

biçiminde gösterilebilir. Buradan da,

$$\mathbf{Ex}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ f\left(a - x^{(r)}\right) \\ f\left(a - x^{(r)}\right) 2\left(a - x^{(r)}\right) \\ f\left(a - x^{(r)}\right) 3\left(a - x^{(r)}\right)^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

elde edilebilir. Yöneydeki bütün terimler $f\left(a - x^{(r)}\right)$ yapısını çarpan olarak içermektedir. Bu nedenle,

$$\mathbf{Ex}(0) = f\left(a - x^{(r)}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\left(a - x^{(r)}\right) \\ 3\left(a - x^{(r)}\right)^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

söz konusudur. Bu yapı ise türev işleci altında görüntü olarak yeniden yazılabilir.

$$\mathbf{Ex}(0) = f\left(a - x^{(r)}\right) \frac{\partial}{\partial a} \begin{bmatrix} 1 \\ a - x^{(r)} \\ \left(a - x^{(r)}\right)^2 \\ \left(a - x^{(r)}\right)^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Kapalı olarak

$$\mathbf{Ex}(0) = f\left(a - x^{(r)}\right) \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{x}(0) \tag{3.16}$$

gösterilebilir. Dolayısıyla $f\left(a - x^{(r)}\right) \frac{\partial}{\partial a}$ işleci söz konusu ve bu işlecin özişlevlerinin yakınsamada belirleyeci olduğu söylenebilir. Bir işlevin özünün üslü açılımı olarak yazılabileceği söylenebilir. Elbette bunun için bazı çözümcüllük koşullarının sağlanması gerekir. Bir $g(a)$ işlevi,

$$g(a) = g_0 + g_1 a + g_2 a^2 + \cdots \tag{3.17}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla işlev, bir katsayı yöneyi ile üslü yöneyin iççarpımıdır. Kapalı yapıda

$$g(a) = \mathbf{g}^T \mathbf{a} \tag{3.18}$$

olarak gösterilebilir. Burada $\mathbf{g}$ yöneyi

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \cdots \end{bmatrix}^T \tag{3.19}$$

ve üslü yöney

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & a & \cdots \end{bmatrix}^T \tag{3.20}$$

öğelerinden oluşmaktadır. Evrim dizeyinin bir katsayı yöneyinin devriği ile soldan çarpıldığı ve bu yöneyin evrim dizeyinin sol özyöneyi olduğu durumu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^T \mathbf{Ea} &= \mathbf{g}^T f(a) \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{a} \\ &= f(a) \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{g}^T \mathbf{a} \\ &= f(a) \frac{\partial g(a)}{\partial a} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Burada evrim dizeyine karşılık gelen işlecin kullanımı bu sonucu üretmektedir. Bu olgu, açılım katsayılarının işlevin bağlı olmamasından dolayı rahatlıkla yapılabilmektedir. Eğer **g** yöneyinin evrim dizeyinin sol özyöneyi olduğu olgusu göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{g}^T \mathbf{E} = \lambda \mathbf{g}^T \tag{3.22}$$

yazılabilir. Az önce elde edilen yapının kullanımı ile de

$$f(a)\frac{\partial g(a)}{\partial a} = \lambda g(a) \tag{3.23}$$

elde edilebilir. Bu iki bağıntı aslında şunu söylemektedir: Eğer **g**, evrim dizeyinin sol özyöneyi ise, bu yöneyin öğelerini üslülerin katsayıları olarak alan işlev bir üslü yöneye etki eden $f(a)\frac{\partial}{\partial a}$ işlecinin özişlevidir. Bu özdeğer denklemi, işlecin yapısından dolayı birinci kerte sıradan türevli denklemdir. Taylor açılımının gerçel eksen üzerindeki sıfır noktasında yapıldığı öngörülerek

$$g(a) = g(0)\mathrm{e}^{\lambda \int_0^a d\alpha \frac{1}{f(\alpha)}} \tag{3.24}$$

yazılabilir. En genel bağlamda izge ile ilgili birşeyler söylemek zordur. Bu nedenle betimleyici işlevin (ing: descriptive function) açılım noktasında katlı olmayan kökü olduğu durum incelenecektir. Bu elbette bir kısıtlamadır. Ama üçgensel evrim dizeyi oluşturacak bu durumun getirileri oldukça fazladır. Bu kısıtlanmış duruma indirgenemeyecek durumlar için ise uzay genişletme yöntemi ile ilerlenmesi ve olasılıksal evrimin blok yapılar kullanılarak ortaya çıkması söz konusudur. Üçgensellik kısıtı, açılımın karmaşık düzlemin kökeninde (ing: origin) yapıldığını düşünerek

$$f(0) = 0 \tag{3.25}$$

olarak verilebilir. Bu durumda

$$f(\alpha) = \alpha\varphi(\alpha), \ \ \varphi(0) \neq 0 \tag{3.26}$$

durumu söz konusudur. Bu yapıyı yazarken kökte katlılık olmadığı göz önünde bulundurulmalıdır. Katlı kök, bütün özdeğerlerin sıfır değerinde olmasına karşılık gelmektedir. Bu kısıtlı durumda $1/f(\alpha)$ aşağıdaki biçimde ayrıştırılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(\alpha)} &= \frac{1}{\alpha\varphi(\alpha)} \\ &= \frac{1}{\alpha f_1} + \bar{\varphi}(\alpha) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Burada işlevin tekil düzgün yapısının toplamsal olarak ayrıştırımı söz konusudur. Buradaki $\bar{\varphi}(\alpha)$ yapısı kesirlere ayrıştırım ile belirlenebilir. Burada, $f(\alpha)$ yapısının açılım noktasında α'ya göre türevi $\varphi(0)$ olarak ortaya çıkar. Bu ise açılımda f_1 olarak gösterilen katsayıdır.

(3.27) ve (3.23) kullanılarak

$$a\varphi(a)g'(a) = \lambda g(a) \qquad \textbf{(3.28)}$$

yazılabilir. Bu sıradan türevli denklemin sıfır noktasında tekilliği vardır. Bunu çözümde yansıtacak olgu, bağımsız değişkenin üslüsüdür.

$$\frac{g'(a)}{g(a)} = \frac{\lambda}{a f_1} + \lambda\bar{\varphi}(a) \qquad \textbf{(3.29)}$$

yapısının çözümü

$$g(a) = c\, a^{\frac{\lambda}{f_1}}\, \mathrm{e}^{\lambda \int_0^a d\alpha \bar{\varphi}(\alpha)} \qquad \textbf{(3.30)}$$

olarak ortaya çıkar. $g(a)$ çözümcül olduğundan dolayı Maclaurin toplamdizisine açılabilir. Bunun için gerek koşul $\frac{\lambda}{f_1}$ yapısının, eksi değerli olmayan tam sayı olmasıdır. Bunun doğal sonucu ise, özdeğerlerin f_1'in eksi değerli olmayan tam sayı katları olarak belirmesidir. Dolayısıyla evrim dizeyinin üçgensellik kısıtı altındaki özdeğerleri ile ilgili bazı olguları bir türev içeren işleci inceleyerek ve sıradan türevli denklem çözerek söyleyebilmiş olduk. Yakınsama ile ilgili de bazı şeyler söyleyebilmek için incelemeyi ayrıntılandırmak gerekir.

3.6 Olasılıksal evrimin yakınsama çözümlemesi

Evrim dizeyinin sol özyöneyleri bulunan özişlevlerin katsayıları olarak gündeme gelmektedir. Özdeğerler ise f_1'in katları olarak ortaya çıkmaktadır ve kf_1 olarak gösterilebilir. Burada k eksi değerli olmayan bir tam sayıdır. k'nin en küçük olduğu durumu göz önüne alalım. kf_1 olan özdeğer bu durumda sıfır değerinde olacaktır. Bu olgu, gözlemsel olarak da elde edilebilecek olan, evrim dizeyinin ilk yatay sırasının sıfırlardan oluştuğu olgusu ile uyum içindedir. Karşılık gelen özyöney ise $g(a)$'nın λ'nın sıfır olduğu durumdaki katsayılarıdır. Bu durumda özişlev c ile gösterilebilecek değişmez işlevdir. Bu işlevin açılımından oluşacak katsayılar ise ilk katsayı dışında sıfırlanacaktır. Bu nedenle, ilk özyöney en üst öğesi c, diğer bütün öğeleri sıfır olan yöney olarak karşımıza çıkar. Bir sonraki durum k'nin 1 olduğu durumdur. Bu durumda ise kf_1 değerinde olduğu gösterilen özdeğer, f_1 olarak bulunacaktır. Karşılık gelen özişlev ise

$$g(a) = c\,a\,e^{\lambda \int_0^a d\alpha \bar{\varphi}(\alpha)} \tag{3.31}$$

biçimindedir.

3.6.1 Sağ yan işlevlerinin sıfırlandığı noktaların önemi

Özişlevin bağlı olduğu değişken sıfırlandığında, özişlevin de sıfırlandığı görülmektedir. Bu nedenle, Taylor katsayılarını içeren özyöneyin en üst terimi sıfır olacaktır. Bir sonraki değer ise sıfır olmayan bir sayıl olan c olarak karşımıza çıkacaktır. Bu bağlamda k arttıkça özyöneylerde üstten başlayarak k adet sıfırlanma olduğu söylenebilir. (3.24)'te belirtilen yapıyı göz önüne alalım. $f(x)$ Taylor toplamdizisine açılır ve ilk terim alıkonursa,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f_1\left(x - x^{(r)}\right)} + \cdots \tag{3.32}$$

yapısı ortaya çıkacaktır. Bu incelemede yine üçgensellik kısıtı söz konusudur. Yukarıda belirtilmeyen ve kapalı olarak üç nokta yan yana imi ile belirtilen olgu, sol yandan, sağ yandaki öğeyi çıkararak,

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f_1\left(x - x^{(r)}\right)} = \frac{f_1\left(x - x^{(r)}\right) - f(x)}{f_1\left(x - x^{(r)}\right) f(x)} \tag{3.33}$$

olarak bulunabilir. Sağ yanın payındaki terim, $f(x)$ içermektedir. Bu işlevin yerine özünün Taylor açılımı yazılırsa, ilk terim $f_1\left(x - x^{(r)}\right)$ olacaktır. Bu terim özünün toplamaya göre evriği ile toplandığı için bu terimden gelen katkı sıfırlanacaktır. Dolayısıyla pay bölümünde bulunan en baskın katkı dördüllü terimden gelecektir. Benzer bir inceleme payda için de yapılabilir. Paydada ise çarpımsal bir yapı söz konusudur. Benzer bir inceleme ile paydada da en baskın terimin dördüllü (ing: squared) terim olacağı söylenebilir. Bu olgu $f(x)$'in özünün Taylor açılımı olarak yazılıp, sıfır sırasayılı katsayının sıfırlandığı göz önünde bulundurulup ve saf birinci derece yapının çarpan olduğu gözlenerek söylenebilir. Yalnız, $f(x)$'in paydada bulunmasından dolayı, $f(x)$ işlevinin olabilecek diğer sıfırları paydada sıfırlanma yaratarak tanımsızlık olgusunu gündeme getirecektir. Bu olgu, tanım bölgesinde kısıtlamaya gidilerek aşılabilir. Bu bağlamda denebilir ki üçgensel evrim dizeyi oluşturan olasılıksal evrim, özeği Taylor açılım noktası olan ve betimleyici işlevin açılım noktasının kendisi olmayan en yakın sıfırını dışlayan en büyük teker üzerinde yakınsaktır. Bu olgu, olasılıksal evrim yöntemi ile ne zaman nasıl duyarlılık elde edilebileceği hakkında ipuçları vermektedir. Aslında yakınsama bölgesinin bu biçimde olması, olasılıksal evrimin bir özelliği olarak değerlendirilmekten çok, başlangıç değer sorununun bir özelliği olarak değerlendirilmelidir. Betimleyici işlevin sıfırlanması tekillik yaratmaktadır ve tekillikler bir çok yöntem için sorun yaratan olgulardır. Bu yakınsama bölgesi, aşılamaz bir sorun olarak, yöntemin bir zayıflığı olarak değerlendirilmemelidir. Aşılabilir bir sorundur ve bu bağlamda ilk akla gelen olgular uzay genişletme ve dönüşümsel olgulardır. Bu olgulara ileriki bölümlerde değinilecektir. (3.24) sırasayılı bağıntı üzerinde çalışarak,

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0)e^{\int_0^x d\xi \, \frac{\lambda}{f_1 x} + d\xi \, \lambda F(\xi)} \\ &= g(0)x^{\lambda/f_1} e^{\int_0^x d\xi \, \lambda F(\xi)} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.34)}$$

elde edilebilir. Bu bağıntı az önce sözü edilen olguları yansıtmaktadır. $f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ işlecinin bir işlevler çarpımı üzerindeki etkisini göz önüne alalım. Buradaki amaç bu işlecin özikililerinin oldukça özel bir yapıda olduğunu göstermektir. Bu işleç Leibniz kuralı ile ayrıştırılabilir. Özenli bir inceleme bu işlecin Leibniz kuralını sağladığını gösterecektir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} f(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big(g(x)h(x)\Big) &= \left(f(x)\frac{\partial}{\partial x}g(x)\right)h(x) \\ &\quad + g(x)\left(f(x)\frac{\partial}{\partial x}h(x)\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.35)}$$

söz konusudur. Burada, $g(x)$ ve $h(x)$ işlevinin özişlevi olduğunu düşünelim. O zaman bu işlevlerin işleç altındaki görüntüleri, kendilerinin özdeğer denklemindeki sağ yanları olarak yazılabilir. Dolayısıyla (3.35)'deki ayıraçlar arasındaki yapılar özdeğer denklemlerinin sağ yanları olarak yazılabilir. Daha sonra ayıraçları açıp, sağ yanda değiştirimliliği göz önünde bulundurup, $g(x)h(x)$ yapısını çarpan olarak sağ yanda yazma işlemi gerçekleştirilirse, yeni bir özdeğer bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, eğer $g(x)$ ve $h(x)$ bu işlecin özişlevi ise, bu işlevlerin çarpımının da işlecin özişlevi olduğunu söyler. Leibniz kuralını işlevin özişlevi olan işlevlerin çarpımına uygulanması gösterecektir ki, aslında bir adet üretici işlevin eksi değerli olmayan üslüleri söz konusudur. Bu bağlamda,

$$g(x) = \left(x e^{f_1 \int_0^x d\xi F(\xi)}\right)^k, \; k = 0, 1, \ldots \qquad \textbf{(3.36)}$$

biçiminde sonsuz özişlev vardır. Bütün sol özyöneyler, bu işlevlerin Taylor açılımı katsayılarını sırasıyla bu yöneylere yerleştirerek oluşturulabilir. Dolayısıyla sonsuzluk düzeyinde olasılıksal evrimin nereye vardığı incelenmiş olundu. Bu yeterince geniş kapsamlı bir yakınsama incelemesi değildir, çünkü önemli bir durum olan üçgensel olmama durumunu dışlamaktadır. Aslında gerek yöntemin kendisinde, gerekse de yakınsama incelemesinde üçgensel olmama durumundan kaçınılmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi üçgensel olmama durumu çok değişkenliliğe açılan yol olarak değerlendirilmektedir. Dolayısıyla, bu yakınsama bölgesi ve üçgensellik kısıtı bağlamında, sıradan türevli denklem için belirli bir n değeri için evrim dizeyi oluşturulabilir. Bu evrim dizeyi kullanılarak, kertesi n olan kesme yaklaştıranı elde edilebilir. İstenilen duyarlılık elde edilemez ise $(n+1)$ değeri için evrim dizeyi oluşturulup kertesi $(n+1)$ olan kesme yaklaştıranı elde edilebilir. Bu bir yinelemeli yöntem olarak değerlendirilebilir ve sonlandırma koşulu olarak belirli bir uzaklık bağıntısına göre $(n+1)$'inci kerte kesme yaklaştıranı ile n'inci kerte kesme yaklaştıranı arasındaki uzaklığın önceden belirlenmiş bir değer altında kalması konulabilir.

3.7 Çözümcül uzanım ile etkinleştirim

3.7.1 Sorunun belirtimi ve dönüşüm uygulanımı

Üçgensellik kısıtı altında yakınsama ile ilgili önemli olgular elde edilmiş olundu. Bu aşamada düşünülmesi gereken olgu, daha iyi yakınsamanın, daha geniş yakınsama bölgesinin nasıl elde edilebileceği olgusudur. Açılım noktası bir değiştirge gibi düşünülebilir. Bazı açılım noktaları daha iyi yakınsama üretecektir ve bu bağlamda açılım noktasının eniyilenmesi olgusu gündeme getirilebilir. Ama aslında elimizde daha güçlü olgular bulunmaktadır. Bu bağlamda, yine bir kısıtlamaya giderek, belirli bir betimleyici işlev üzerinden anlatımı ilerletmek bazı kolaylıklar sağlayacaktır. Sağ yan işlevinin

$$f(\xi) \equiv \alpha(\xi - x_1)(\xi - x_2), \qquad x_1 \neq x_2 \tag{3.37}$$

olduğu durum göz önüne alınabilir. Bu işlev aslında doğrusal olmamanın en düşük yapılarından biri olarak değerlendirilebilecek olan ikinci derece çokterimli yapısındadır. x_1 ve x_2 büyüklükleri bilinen gerçel büyüklükler olarak değerlendirilmelidir. Evrim dizeyinin özikilileri ve yöntemin yakınsaması ile ilgili incelemelerde evrim dizeyinin etki ettirilmesinin bir işlecin özikili sorunu ile ilintili olduğu belirtilmişti. Yinelemek gerekirse,

$$f(\xi)\,\frac{d\varphi}{d\xi} = \lambda\,\varphi \tag{3.38}$$

yapısı ilgi alanımızdaydı. Sağ yan işlevi

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \alpha\,(\xi - x_1)\,(\xi - x_1 + x_1 - x_2) \\ &= \alpha\,(\xi - x_1)^2 + \alpha\,(x_1 - x_2)\,(\xi - x_1) \end{aligned} \tag{3.39}$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Bu yapıda, işlevin ξ'ye göre birinci türevi alınıp, oluşan yapıda ξ yerine x_1 konulması ile

$$f'(x_1) = \alpha\,(x_1 - x_2) \tag{3.40}$$

elde edilir. Sağ yan işlevi x_1 noktasında sıfırlanan bir işlevdir. Dolayısıyla x_1 noktasında Taylor açılımı söz konusu olduğunda üçgensellik kısıtını sağlamaktadır. Bu bağlamda, $x^{(r)}$ olarak gösterilen Taylor açılım noktasının x_1 olarak seçildiği durum incelenecektir. Açılım noktasının x_2 olarak seçilmesi de aynı olguları üretecektir.

Üçgensellik kısıtı sağlandığına göre, evrim dizeyinin ve dolayısıyla buradaki işlecin özdeğerleri f_1'in eksi değerli olmayan katları olarak gündeme gelecektir. f_1'in işlecin özdeğerlerinden biri olduğu ve dolayısıyla işlecin özikili denklemini sağladığı göz önüne alınırsa,

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{f_1}{f(x)}dx \tag{3.41}$$

yazılabilir. İşlecin birinci kerte türev içermesinden dolayı bu özikili denklemi de birinci kerte sıradan türevli denklem olarak ortaya çıkmaktadır ve çözümü için adımlar atılabilir.

$$\ln\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_1)} = \int_{x_1}^{x} d\bar{x}\frac{f_1}{f(\bar{x})} \tag{3.42}$$

biçiminde yapılan düzenleme ile, sonuç

$$\varphi(x) = \varphi(x_1)\mathrm{e}^{\int_{x_1}^{x} d\bar{x}\frac{f_1}{f(\bar{x})}} \tag{3.43}$$

olarak elde edilebilir. Bu aşamada, betimleyici işlevde yapılmış olan özelleştirme kullanılarak ilerlenebilir. e değişmezinin üssü olarak beliren yapıyı özelleştirmeyi de kullanarak daha ayrıntılı olarak ele almak gerekirse,

$$\int_{x_1}^{x} d\bar{x}\frac{f_1}{\alpha\,(\bar{x} - x_1)\,(\bar{x} - x_2)} \tag{3.44}$$

yapısı gözlemlenebilir. Yakınsama incelemesinde olduğu gibi, ucaysal (ing: polar) tekillik içeren yapının işlevden toplamsal olarak ayrıştırımı söz konusudur. Bu bağlamda, değişmezin üssü olarak görülen yapı yalın oranlara ayrıştırım ile

$$\frac{f_1}{\alpha}\int_{x_1}^{x} d\bar{x}\,\frac{\frac{1}{x_1-x_2}}{\bar{x}-x_1}+\frac{-\frac{1}{x_1-x_2}}{\bar{x}-x_2} \tag{3.45}$$

olarak gözlemlenebilir. Tümlev değişkenine bağlı olmayan ortak yapıyı tümlevin dışına alarak

$$\frac{f_1}{\alpha\left(x_1-x_2\right)}\int_{x_1}^{x} d\bar{x}\left[\frac{1}{\bar{x}-x_1}-\frac{1}{\bar{x}-x_2}\right] \tag{3.46}$$

yazılabilir. (3.40) bağıntısının (3.46)'da kullanımı ile tümlevin solundaki çarpanın 1 değerinde olduğu gözlemlenebilir. Dolayısıyla e'nin üssü olan yapı

$$\ln\left(\bar{x}-x_1\right)\Big|_{x_1}^{x}-\ln\left(\bar{x}-x_2\right)\Big|_{x_1}^{x} \tag{3.47}$$

biçimindedir. Buradaki ilk terim tekilliği içerir. x_1 değerinde olan açılım noktasını $x^{(r)}$ olarak göstererek, üstelde bulunan yapının

$$\ln\left(\frac{\left(x-x_1\right)}{x^{(r)}-x_1}\right)-\ln\left(\frac{\left(x-x_2\right)}{x^{(r)}-x_2}\right) \tag{3.48}$$

olduğu söylenebilir. Bu yapıyı (3.43)'te yerine koyarak

$$\varphi(x)=\varphi\left(x^{(r)}\right)\left(\frac{x^{(r)}-x_2}{x^{(r)}-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right) \tag{3.49}$$

elde edilebilir. Daha tıkız (ing: compact) olarak ise

$$\varphi(x)=c\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right) \tag{3.50}$$

gösterilimi söz konusudur. Burada c,

$$c=\varphi\left(x^{(r)}\right)\left(\frac{x^{(r)}-x_2}{x^{(r)}-x_1}\right) \tag{3.51}$$

yapısındadır. (3.50) sırasayılı bağıntı, daha sonra yapılacak olan toplamdiziye açma işlemini gösterebilmek için

$$\varphi(x)=c\left(\frac{x-x_1}{x-x_1+x_1-x_2}\right) \tag{3.52}$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu yapı $(x-x_1)$'in üslüleri biçiminden toplamdiziye açılabilir. x_1 noktasında toplamdiziye açma söz konusu olduğunda x_1 özekli (ing:

centered) olan ve x_2'yi dışlayan en büyük teker üzerinde yakınsama söz konusudur. Bu olgu, daha önce yapılan yakınsama incelemesi ile uyum içerisindedir. x_2 noktasında yapılacak açılım ise x_2 özekli olan x_1'i dışlayan en büyük teker (ing: disk) üzerinde yakınsama sağlayacaktır. Dolayısıyla, bu betimleyici işlev için gerektiğinde x_1'de, gerektiğinde x_2'de açılım yaparak, bu iki tekerin kapladığı bölgede yakınsama elde edilebilir. Bu birbirleriyle kesişen iki teker üzerinde yakınsamanın nasıl elde edileceği gösterilmiş olundu. Önemli bir olgu ise karmaşık düzlemde bu iki tekerin birleşimini tümleyen sonsuz bölgedir. Bu bölgede yakınsama elde etmek için çarpmaya göre evirtme dönüşümünün karmaşık düzlemde getirdiği olgulardan yararlanılabilir.

$$F(z) \equiv \frac{1}{1-z} \tag{3.53}$$

işlevini ele alalım. Eğer kökende bağımsız değişkenin eksi değerli olmayan üslülerini kullanarak bir açılım yapılması söz konusu ise, karmaşık düzlemin kökeninde özeklenen birim yarıçaplı bir teker üzerinde yakınsama söz konusudur. Bu tekerin dışında çalışabilmeye yönelik adımlar atmak için işlev

$$F(z) = \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \tag{3.54}$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu yapı ise

$$F(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots \tag{3.55}$$

olarak toplamdiziye açılabilir. Dolayısıyla, gerektiğinde z'nin artı değerli üslülerini, gerektiğinde ise $(1/z)$'nin artı değerli (ing: positive) üslülerini kullanarak hem tekerde hem tekerin dışında yakınsama elde edilebilir. Bu aslında olasılıksal evrimi Laurent toplamdizileri kullanarak yeniden ele almayı gündeme getirecektir. Bu olgu şu anda incelenmeyecektir. İncelenecek olgu, istenilen yakınsama bölgesine göre bazen z'nin artı değerli üslülerinin, bazen de eksi değerli üslülerinin kullanılacağı yapıyı yaratma olgusudur. Bunu yapmanın bir yolu, incelediğimiz uzbilimsel sorunun (3.1)'de gösterilen sorun olduğunu anımsayarak,

$$\eta(t) \equiv \frac{1}{\xi(t) - x_1} \tag{3.56}$$

tanımlamasına gitmektir. Bu yeni tanımlanan yapının t'ye göre türevi ise

$$\dot{\eta}(t) = -\eta(t)^2 \dot{\xi}(t) \tag{3.57}$$

biçimindedir. (3.1)'in ve (3.56)'nın (3.57)'de kullanımı ile

$$\dot{\eta}(t) = -\eta(t)^2 f\left(\frac{1}{\eta(t)} + x_1\right) \tag{3.58}$$

elde edilebilir. Dolayısıyla tekerin dışında yakınsama elde edinimi için olasılıksal evrim doğrudan (3.1)'e değil, (3.58)'e uygulanmalıdır. (3.58) bağıntısı, olasılıksal evrimin uygulanmasına olanak sağlayan, birinci kerte açık ve özerk sağ yanlı bir sıradan türevli denklemdir.

3.7.2 Çözümcül uzanım bağlamında olasılıksal evrim yaklaşımı ile çözüm

Örnekte verilen ikinci derece çokterimli betimleyici işlev kullanılarak özelleştirme yapılırsa,

$$\dot{\eta}(t) = -\eta(t)^2 \alpha \frac{1}{\eta(t)}\left[\frac{1}{\eta(t)} + x_1 - x_2\right] \tag{3.59}$$

bağıntısı ortaya çıkar. Yalınlaştırmalar ile

$$\dot{\eta}(t) = -\alpha - \alpha(x_1 - x_2)\eta(t) \tag{3.60}$$

yapısı gündeme getirilebilir. Bu yapı daha tıkız biçimde

$$\dot{\eta}(t) = g(\eta(t)) \tag{3.61}$$

olarak da gösterilebilir. Olasılıksal evrim bu denklem üzerinde uygulanacaktır. Buradaki $g(\eta)$ ise, verilen asıl sağ yan işlevi için

$$g(\eta) = -\alpha - \alpha(x_1 - x_2)\eta \tag{3.62}$$

yapısındadır. Oluşturulan sıradan türevli denklemin başlangıç koşulu ise (3.56)'da t yerine 0 yerleştirerek

$$\eta(0) = \frac{1}{a - x_1} \tag{3.63}$$

biçiminde elde edilebilir. Oluşan yeni betimleyici işlevin $\eta = \frac{1}{x_2 - x_1}$ noktasında kökü bulunmaktadır. Bu noktada yapılacak olan açılım, üçgensellik sağlayacaktır.

3.7.3 Çözümcül uzanım bağlamında yakınsaklık bölgesi

Bu biçimde bir evirtim kullanarak, asıl yapı göz önünde bulundurulduğunda, başlangıç koşulunu betimleyen üslü yöneyin $(a-x_1)$'in üslüleri yerine $(a-x_1)$'in çarpmaya göre evriğinin üslülerini içerecek biçimde gündeme gelmesi sağlandı. Eğer $(a-x_1)$ mutlak değerce 0 ila 1 arasında değil ise, (3.1) denklemine olasılıksal evrim doğrudan uygulandığında, üslü yöneyler yakınsak bir toplamdizinin katsayıları olmaz. Bu durumda, burada önerilen evirtim, yakınsak olmayan bir üslü yöneyden dönüşüm ile yakınsak olan bir üslü yöney üretilmesini sağlar. Üslü yöneyin eşlik ettiği evrim dizeyi ise, yeni oluşan sıradan türevli denklemin betimleyici işlevinin Taylor açılımı katsayılarından oluşacaktır.

Bu olgular, yalnızca ikinci derecede sağ yanlı sıradan türevli denklem içeren başlangıç değerler sorunları için geçerli değildir. Yüksek dereceli çokterimliler için bazıları birbirleriyle kesişen tekerler söz konusu olacaktır ve eksi değerli üslülerin kullanımı, yine bu tekerlerin birleşimini tümleyen sonsuz bölgede yakınsamayı gündeme getirecektir. Değişik türdeki sağ yan işlevleri için ise inceleme yinelenebilir ama işlevin yapısına göre oldukça çapraşık anlatımlar söz konusu olabilir. Kısıtlama bağlamında gündeme getirilecek olgu, (3.1) sırasayılı denklemdeki sağ yan işlevinin bütün sonlu bölgelerde çözümcül olmasıdır. Tekilliklerin nasıl işlenebileceği olgusu burada gündeme getirilmemiştir. Ama temel anlayış olarak şunu belirtmek gerekir ki, tekil betimleyici işlevi olan yapılar, uzay genişletme ile, tekil olmayan betimleyici işlevi olan yapılara çoğu zaman dönüştürülebilir.

3.8 Örnek uygulamalar

Bu bölüm, olasılıksal evrim yaklaşımı ile sıradan türevli denklem çözümü üzerine bazı uygulamalar içermektedir. MuPAD dizgesi olarak bilinen betikleme aracı ile simgesel düzeyde ve ayarlanabilir sayısal duyarlılık olgusunu içerecek biçimde betikleme yapılmıştır.

3.8.1 Çözümü bilinen başlangıç değer sorunları için kesme yaklaştıranları elde edinimi

İncelenebilecek en yalın yapılardan biri, ikinci derece çokterimli sağ yan işlevi olan

$$\dot{\xi}(t) = (\xi(t) - 0.5)(\xi(t) + 0.5), \qquad \xi(0) = a \tag{3.64}$$

biçimindeki başlangıç değer sorunudur. Bu sıradan türevli denklemin çözümü olasılıksal evrim yaklaşımı ile elde edilebilir. Sağ yan işlevinin kökü olan bir noktada Taylor açılımı oluşturmak üçgencil olasılıksal evrime karşılık gelmektedir. Üçgencil olasılıksal evrimin yakınsaması ile ilgili inceleme bir önceki evre bildiriminde verilmişti ve üçgencil olmayan yapının zorluklarına da sözel olarak değinilmişti. Eğer açılım, $\xi(t) = -0.5$ noktasında yapılır ise, oluşacak evrim dizeyinin sol üst bölümünü içeren sonlu kesmesi

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

yapısındadır. Sağ yan işlevinin ikinci derece çokterimli olduğu yalnızca bu evrim dizeyine bakılarak söylenebilir. Bir sonraki adım, bu dizeyin özikililerinin belirlenmesidir. Özikililerinin belirlenmesinin amacı üstel dizey içeren yapının belirlenmesi gerekliliğidir. Belirlenecek olan üstel dizeyin başlangıç değer ile ilgili olan üslü yöneye etki ettirilip, oluşan yapıya 2 altsırasayılı Kartezyen birim yöney devriğinin soldan etki ettirilmesi olasılıksal evrim kesme yaklaştıranını oluşturacaktır.

(3.65) bağıntısında görüldüğü üzere, burada onuncu kerte olasılıksal evrim yaklaştıranının belirlenmesi söz konusudur. (3.64)'te verilen başlangıç değer sorunu için onuncu kerte olasılıksal evrim yaklaştıranı

$$\begin{aligned} \xi(t) &\approx 0.5 - 0.3326822917e^{t} + 0.0485404362e^{2t} - 0.0093008767e^{3t} \\ &+ 0.0023886774e^{4t} - 0.0007484225e^{5t} + 0.0002660597e^{6t} \\ &- 0.0001023455e^{7t} + 0.0000413523e^{8t} - 0.0000172163e^{9t} \end{aligned} \tag{3.66}$$

biçimindedir. Burada, işlemler 100 basamak duyarlılık ile yapılmıştır. Yalnızca gösterilimi sağlayabilmek için noktadan sonra 10 basamak kullanılmıştır. Bu çözüm, bir yaklaşık çözümdür. Yaklaştırımın kertesi arttırıldıkça, karmaşık düzlem üzerinde açılım noktası olan kökü özek alan ve öbür kökü dışlayan teker ile belirlenen bölgede, kesin sonuca yaklaşma beklenmelidir.

Aynı sorun için çözümcül sürdürüm uygulaması sonucu etkileyecektir. Çözümcül sürdürüm, yeni bilinmeyen tanımlamaları ile olasılıksal evrimin yakınsama bölgesini değiştirmeyi amaçlayan bir yöntem olarak ortaya konmuştu. Çözümcül sürdürümün (3.64)'te uygulanması

$$\xi(t) = \frac{1}{2e^t + 1} - 0.5 \tag{3.67}$$

yaklaştıranını üretmektedir. Bu sonuç için, yine -0.5 noktasında açılım ve 10'uncu kerte olasılıksal evrim yaklaşımı kullanılmıştır. Burada önemli olgu, kesin sonucun elde edilmesidir. İkinci derece sağ yan işlevi içeren yapılar için karmaşık düzlemin bütün sonlu bölgelerinde yakınsamayı amaçlayan bu yapı, bu örnek için kesin sonucu üretmektedir.

4. OLASILIKSAL EVRİM YAKLAŞIMI: ÇOK BİLİNMEYEN ve ÇOK DENKLEM İÇEREN BAŞLANGIÇ DEĞER SORUNU

4.1 Dolaysızüslü toplamdizi açılımı

Bu altkesimde Taylor toplamdizileri ve dolaysızüslü toplamdiziler arasındaki ilişkinin, belirli işleç tanımları üzerinden yalın ve tıkız biçimde verilmesi ve dolaysızüslü toplamdizilerin ayrıntılı olarak incelenmesi söz konusudur.

Olasılıksal evrim Taylor toplamdizisine dayanır [10–58,61,62]. Taylor açılımı denilince, iki ayrı olgu düşünülmelidir. Biri, eğer özel bir yapı söz konusu değilse sonsuz terim içeren Taylor açılımının özüdür. Bu açılımdan yapılacak sonlu kesmeler, eğer yakınsama söz konusu ise anlamlıdır. Diğer olgu ise, Taylor toplamdizisinden bir kesmenin söz konusu olduğu; dolayısıyla sonlu sayıda terim içeren ve bu yapıya bir kalan terimin eklenmesi ile oluşan kesin anlatımdır. Bu anlatımda toplamdizinin yakınsaması önem içermez, o olgu kalan terime yansımaktadır. Yapıya göre bir tümlev olarak anlatılan kalan terimin belirlenmesi hiç de kolay olmayabilir ve bu konu ile ilgili az sayıda çalışma bulunmaktadır. Örnek olarak [63] verilebilir.

Olasılıksal evrim bağlamında çokdeğişkenlilik söz konusu olduğunda çokdeğişkenli Taylor açılımı söz konusu olacaktır. Bu yapıda yığınla göre türev (ing: partial derivative) gündeme gelir. Bu göre türevlerin bağıntı içerisinde görünümü, işlevin bağlı olduğu değişken sayısı olan N ne kadar büyükse, o kadar artacaktır. Örneğin N bağımsız değişkeni olan bir Taylor toplamdizisi düşünülecek olursa, sıfırıncı kerteden göre türev içeren terim sayısı birdir. Birinci kerteden göre türev sayısı N'dir. İkinci kertede ise, göre türev işleçlerinin sırasının değişimi değişiklik yaratacak olsaydı N^2 terim olacak iken, değişiklik yaratmadığı için $\frac{N(N-1)}{2}$ terim gündeme gelir ve bu biçimde ilerler. Terim sayısının çok büyük olması başlı başına bir sorundur. Bu nedenle, şu an için, çokdeğişkenlilik durumu bağlamında çokdeğişkenli Taylor toplamdizisini taban alan güçlü bir araç bulunmamaktadır. Olasılıksal evrim bağlamında kullanabilmek için daha yalın ve kolay işlenebilir bir yapı gereklidir. Bu yeni yapı Kronecker çarpımlara dayanır.

Yapı, tek bir büyüklüğün Kronecker üslülerini içermektedir. Bunun ederi ise dizeylerle uğraşmaktır.

4.1.1 Çokdeğişkenli işlevlerin Taylor gösterilimleri

Taylor açılımında, kullanılan açılım noktasının etkisinin yalın yazım amacı ile açılımı oluşturulacak işlevin değişkenine toplamsal olarak eklenimi olanaklıdır. Başka bir deyişle, x'e bağımlı olan bir işlevi a noktası yöresinde toplamdiziye açmak, $(x+a)$'ya bağımlı olan işlevi uzayın köken (ing: origin) noktasının yöresinde toplamdiziye açmak ile eşdeğerdir. Bu değişken dönüşümünün amacı, genellikten yitim olmaksızın yazım yalınlığı yaratmaktır. $(x+a)$'ya bağımlı olan işlevin x'in üslüleri biçiminden, açılım noktası özek olarak düşünülerek bir doğrusal birleştirim olarak anlatımı Maclaurin açılımıdır. Bu açılım

$$f(x+a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a) x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j \frac{\partial^j}{\partial a^j} f(a) \tag{4.1}$$

biçimindedir. Yazımda $f(a)$ üzerine etki eden bir türev yapısı oluşturumu, işleç (ing: operator) gösterilimi sağlama amaçlıdır. Açılım noktasına göre türev ve bağımsız değişken ile çarpma içeren

$$\mathscr{L}(x,a) \equiv x \frac{\partial}{\partial a} \tag{4.2}$$

işleci tanımı ile (4.1) bağıntısını

$$f(x+a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j \frac{\partial^j}{\partial a^j} f(a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathscr{L}(x,a)^j f(a) \tag{4.3}$$

olarak yazmak olanaklıdır. Dolayısıyla, Taylor açılımı, (4.2) tanımında verilen işlecin eksi değerli olmayan tam sayı üslülerini içeren bir açılımdır. Burada, a noktasına x uzaklıkta bulunan konumdaki değerin elde edinimi söz konusudur. Bu incelemenin geçerli olabilmesi için a noktasının x değişkenine bağımlı olmadığı öngörülmelidir. İşlecin üstelinin Taylor açılımı olan

$$\mathrm{e}^{\mathscr{L}(x,a)} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathscr{L}(x,a)^j \tag{4.4}$$

yapısının kullanımı ile

$$f(x+a) = \mathrm{e}^{\mathscr{L}(x,a)} f(a) \tag{4.5}$$

bağıntısına geçilebilir. (4.5) Taylor açılımı için oldukça tıkız bir anlatımdır. Dolayısıyla, bir işlecin açılım noktasına belirli bir uzaklıktaki değerinin elde edinimi, işlecin açılım noktasındaki değerinin bir üstel işleç altındaki görüntüsünün belirlenmesidir. f işlecinin gerçel eksen üzerinde a konumundan x uzaklıktaki bir konumda aldığı değer, $f(a)$ üzerinde $\mathscr{L}(x,a)$ işlecince bütün doğalsayı kertelerde türevler alarak yaratılan görüntüdür. Daha incelikli bir yorumlayım için, f değerleri üzerinden bir yayılım içeren

$$f(a+tx) \equiv \widehat{E}(t,a)f(a) \equiv e^{t\mathscr{L}(x,a)}f(a), \qquad t \in [0,1] \tag{4.6}$$

yapısına geçmek olanaklıdır. Bu genişletimde, $t=0$ durumunda $f(a)$ üretilirken, t'nin değeri 0'dan yükselişe geçtiğinde $f(a)$'dan $f(a+x)$'e doğru sürekli bir değişim söz konusudur. $t=1$ durumunda $f(a+x)$ değerine ulaşılır. f işlevinin değerleri $f(a)$'nın $\widehat{E}(t,a)$ işleci altındaki görüntüleridir. Bu işleç yayılım işleci (ing: propagator) olarak adlandırılabilir. Yayılım işleci etki ettiği işlevden bağımsızdır. t değiştirgesine ve başlangıç konumuna bağımlıdır. t değiştirgesine, bir devinimi tanımlar niteliğinden dolayı "zaman değişkeni" adı verilebilir. Yayılım işlecinin konumcul davranışını ise $\mathscr{L}(x,a)$ betimler. Yayılım, bir dizgenin belli bir sürenin başındaki ve sonundaki durumlarını birbirine bağlayan olgu ise de, sürenin sonsuz küçük herhangi bir altkesimdeki yayılım olayını $\mathscr{L}(x,a)$ gösterir. Bu nedenle, $\mathscr{L}(x,a)$ işlecini ileri evrim işleci (ing: forward evolution operator) olarak adlandırmak yerindedir.

Bu olgular ışığında, toplamdizi açılımının çokdeğişkenli karşılığı gündeme getirilebilir. İki bağımsız değişkenli bir çözümcül işlevin Taylor açılımında

$$f(a_1+x_1,a_2+x_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{j_1!}x_1^{j_1}\frac{\partial^{j_1}}{\partial a_1^{j_1}}f(a_1,a_2+x_2) \tag{4.7}$$

yapısı gündemdedir.

$$\mathscr{L}_1(x_1,a_1) \equiv x_1\frac{\partial}{\partial a_1} \tag{4.8}$$

işlecinin tanımlanarak, (4.7) bağıntısında kullanılması ile

$$f(a_1+x_1,a_2+x_2) = \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{j_1!}\mathscr{L}_1(x_1,a_1)^{j_1}\right)f(a_1,a_2+x_2) \tag{4.9}$$

elde edilir. $f(a_1,a_2+x_2)$'den $f(a_1+x_1,a_2+x_2)$'e dönüşümü sağlayan işleç, ileri evrim işlecine bağımlı olan bir üstel işleçtir. Dolayısıyla buradaki yayılım işleci

$$e^{\mathscr{L}_1(x_1,a_1)} \equiv \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{j_1!}\mathscr{L}_1(x_1,a_1)^{j_1} \tag{4.10}$$

olarak tanımlanabilir. (4.9)'un sağ yanında görünen $f(a_1,a_2+x_2)$ yapısı için de benzer adımlar atılabilir. Bu yapının Taylor açılımı

$$f(a_1,a_2+x_2) = \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{j_2!}x_2^{j_2}\frac{\partial^{j_2}}{\partial a_2^{j_2}}f(a_1,a_2) \tag{4.11}$$

biçimindedir. Tanımlanması gereken ileri evrim işleci ise x_2 ve a_2'ye bağımlı olan

$$\mathscr{L}_2(x_2,a_2) \equiv x_2 \frac{\partial}{\partial a_2} \quad \textbf{(4.12)}$$

işlecidir. Bu işlecin (4.11)'de kullanımı ile

$$f(a_1,a_2+x_2) = \left(\sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{j_2!} \mathscr{L}_2(x_2,a_2)^{j_2} \right) f(a_1,a_2) \quad \textbf{(4.13)}$$

oluşur. x_2'ye göre yayılımı betimleyen işleç ise

$$\mathrm{e}^{\mathscr{L}_2(x_2,a_2)} \equiv \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{1}{j_2!} \mathscr{L}_2(x_2,a_2)^{j_2} \quad \textbf{(4.14)}$$

olarak tanımlanmalıdır. Dolayısıyla x_2'ye göre açılım tıkız bir biçimde

$$f(a_1,a_2+x_2) = \mathrm{e}^{\mathscr{L}_2(x_2,a_2)} f(a_1,a_2) \quad \textbf{(4.15)}$$

olarak ortaya çıkar. Bu yapının (4.9)'da yerine yerleştirimi

$$f(a_1+x_1,a_2+x_2) = \mathrm{e}^{\mathscr{L}_1(x_1,a_1)} \mathrm{e}^{\mathscr{L}_2(x_2,a_2)} f(a_1,a_2) \quad \textbf{(4.16)}$$

eşitliğini yaratır. Bu, iki değişkenli bir çözümcül işlevin Taylor açılımı gösterilimidir. Çözümcül işlevlere etki eden $\mathscr{L}_1(x_1,a_1)$ ile $\mathscr{L}_2(x_2,a_2)$ işleçleri değiştirimlidir (ing: commutative). Bu olgu aşağıdaki eşitliğin yazımını olanaklı kılar.

$$\mathrm{e}^{\mathscr{L}_1(x_1,a_1)} \mathrm{e}^{\mathscr{L}_2(x_2,a_2)} = \mathrm{e}^{\mathscr{L}_1(x_1,a_1)+\mathscr{L}_2(x_2,a_2)} \quad \textbf{(4.17)}$$

Çokdeğişkenlilik, bazı yöney tanımlamaları ile de gösterilebilir. Böylece, iki değişkenliliğin ötesindeki çokdeğişkenlilik de kolaylıkla betimlenebilir bir konuma gelir. Bu erek (hedef) doğrultusunda

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.18)}$$

tanımları ile ilerlenebilir. Hem x_1'e hem de x_2'ye bağlı olan evrim işleci ise bu durumda

$$\mathscr{L}(\mathbf{x},\mathbf{a}) \equiv \mathscr{L}_1(x_1,a_1) + \mathscr{L}_2(x_2,a_2) \quad \textbf{(4.19)}$$

olarak ortaya çıkacaktır. Eğer

$$\nabla_{\mathbf{a}} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial a_1} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial a_2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.20)}$$

tanımıyla verilen yöneleğim (ing: gradient) işleci gündeme getirilecek olursa (4.19) yerine daha tıkız bir anlatım olan

$$\mathscr{L}(\mathbf{x},\mathbf{a}) = \mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{a}} \tag{4.21}$$

eşitliği yazılabilir. Bu işleç, daha önce bir bağımsız değişkenli işlevler için gündeme getirilen $\mathscr{L}(x,a)$ işlecinin iki bağımsız değişkenli işlevler için olan karşılığıdır. Bu durumda, (4.6) eşitliğinin karşılığı aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f(\mathbf{a}+t\mathbf{x}) \equiv \widehat{E}(t,\mathbf{a})f(\mathbf{a}) \equiv e^{t\mathscr{L}(\mathbf{x},\mathbf{a})}f(\mathbf{a}), \qquad t \in [0,1] \tag{4.22}$$

Bu eşitlik, bağımsız değişken sayısına bağımlılığı açık olarak yansıtmamaktadır. O bağımlılığın kökeni **x** ile **a** yöneylerinin, ortak bir değer olan, öğe sayısıdır. Dolayısıyla, (4.22) eşitliğinin

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \qquad \nabla_{\mathbf{a}} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial a_N} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

tanımları ve (4.21) eşitliği altında geçerliliğini koruyacağını belirtmek olanaklıdır. **x** yöneyi dizge yöneyi, bu yöneyin öğe sayısı ise dizge boyutudur. (4.22) eşitliği bir evrim tanımlamakla birlikte, aslında, onun $t = 1$ değerine karşılık gelen yapısı gereksinim duyulan eşitliktir. Dolayısıyla, boyutu N olan bir dizge için, N boyutlu Kartezyen (daha geniş anlamda, Öklid uzayı da denebilir) uzaydaki konuma bağımlı olan bir işlevin $(\mathbf{x}+\mathbf{a})$ ile betimlenen bir konumdaki değerinin, **a** ile betimlenen konumdaki özünün ve türevlerinin değerleri türünden anlatımı aşağıdaki eşitlikle verilebilir.

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{a}) = e^{\mathscr{L}(\mathbf{x},\mathbf{a})}f(\mathbf{a}) \tag{4.24}$$

Çokdeğişkenli Taylor açılımı, bu bağlamda, bir f işlevinin açılım noktasındaki değerinin türevler içeren bir üstel işleç altındaki görüntüsü olarak yorumlanabilir.

4.1.2 Dolaysızüslü toplamdizi oluşturumu

(4.24) bağıntısının sağ yanının Taylor açılımında bulunan $\mathscr{L}(\mathbf{x},\mathbf{a})$ işlecinin doğal sayı üslülerinin belirlenmesi, açılımın terimlerinin belirlenmesi için gereklidir. Bu amaçla kullandığımız ve dolaysızüs olarak adlandırdığımız eylem, dolaysızüssü elde edilecek olan öğenin üs olarak belirtilen doğal sayının bir eksiği kez özü ile dolaysız çarpımını oluşturur. Dolaysızüs,

$$\mathbf{s}^{\otimes j} = \begin{bmatrix} s_1 \mathbf{s}^{\otimes j-1} \\ \vdots \\ s_N \mathbf{s}^{\otimes j-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{s}^{\otimes 0} = 1 \tag{4.25}$$

özyineli ilişkisi ve başlangıç değeri ile belirlenebilir. Bu bağlamda (4.24) bağıntısını çözümlemek için, sağ yandaki üstel işlevin Taylor açılımını inceleme altına alalım. Bu açılımın terimleri $\mathscr{L}(\mathbf{x},\mathbf{a})$ üslülerini içerecektir. Bu yapının üsikisi

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\mathbf{x},\mathbf{a})^2 &= \left(\mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{a}}\right)\left(\mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{a}}\right) = \left(\mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{a}}\right) \otimes \left(\mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{a}}\right) = \left(\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{x}^T\right)\left(\nabla_{\mathbf{a}} \otimes \nabla_{\mathbf{a}}\right) \\ &= \left(\mathbf{x}^{\otimes 2}\right)^T \left(\nabla_{\mathbf{a}}^{\otimes 2}\right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

biçiminde gündeme getirilebilir. Burada, sayılların dolaysız çarpımının, sayılların çarpımı ile eşdeğer olduğu ve çarpım ile dolaysız çarpımın birbirleri üzerinde dağılma özelliği olduğu kullanılmıştır. Yöney ve dizeyler için dolaysız çarpım Kronecker çarpımıdır. Dolaysız çarpım daha soyut bir kavram olup, daha geniş bir küme üzerinde tanımlıdır. (4.26) bağıntısında üsiki için verilen olgu, k. üs için genelleştirilebilir ve

$$\mathscr{L}(\mathbf{x},\mathbf{a})^k = \left(\mathbf{x}^{\otimes k}\right)^T \left(\nabla_{\mathbf{a}}^{\otimes k}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{4.27}$$

üretir. (4.27) ve (4.24) bağıntılarını kullanarak ve üstel işlevin Taylor açılımını göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{x}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathscr{L}(\mathbf{x},\mathbf{a})^j f(\mathbf{a}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\mathbf{x}^{\otimes j}\right)^T \left(\nabla_{\mathbf{a}}^{\otimes j}\right) f(\mathbf{a}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\nabla_{\mathbf{a}}^{\otimes j} f(\mathbf{a})\right)^T \mathbf{x}^{\otimes j} \end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilebilir. Tıkız bir yazım için, katsayılara

$$\mathbf{F}_j \equiv \frac{1}{j!} \nabla_{\mathbf{a}}^{\otimes j} f(\mathbf{a}), \qquad j = 0,1,2,\ldots \tag{4.29}$$

tanımı yapılır ise, dolaysızüslü açılımı

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j^T \mathbf{x}^{\otimes j} \tag{4.30}$$

olarak gündeme gelir. (4.23) bağıntısında N'nin 1 olduğu durum alışılagelmiş bir değişkenli Taylor açılımına karşılık gelmektedir.

4.1.3 Dolaysızüslü toplamdizilerde esneklikler

Dolaysızüslü toplamdiziler aslında Taylor açılımının bir yeniden yazımıdır. Dolaysızüslü toplamdizilerde olan ama Taylor toplamdizilerinde olmayan olgu, katsayılardaki esnekliklerdir. Dolaysızüslü toplamdizilerin katsayıları (4.29)'da gösterildiği gibi elde edilebilir. Ama bu yol, eşsiz değildir. Katsayıların elde edinimi başka biçimlerde de gündeme getirilebilir. Bu eşsiz olmama durumu, açılımın değişmez ve birinci derece terimi dışındaki bütün terimlerinde kendini gösterir. Eşsiz olmama durumunun nedeni ise dolaysızüs alma işleminin yapısıdır.

Dolaysızüslü toplamdizinin sonsuz toplamının sessiz değişkeni olan j'nin 0 olduğu terimi ele alalım. Bu terim bir yöneyin sayıl ile çarpımından oluşmaktadır. Bir sonraki terime karşılık gelen $j = 1$ durumunda ise katsayı yöneyinin dizge yöneyi ile iççarpımı söz konusudur. Dolayısıyla N adet öğesi olan yöneyler iççarpılmaktadır. $j = 2$ durumuna karşılık gelen terimde ise $\mathbf{x}^{\otimes 2}$ bulunmaktadır. Bu yöneyin N^2 öğesi vardır. Esnekliği yaratan önemli olgu, bu yöneyin öğeleri arasında doğrusal bağımsızlık bulunmayışıdır. Yöneyde bulunan ve j'nin i'den değişik olduğu bütün $x_i x_j$ ikili çarpımlarına karşılık, bir $x_j x_i$ ikili çarpımı bulunmaktadır.

Olguyu daha somutlaştırma amacı ile iki bağımsız değişkenli bir çözümcül işlevin dolaysızüslü açılımını ele alalım.

$$f(a_1 + x_1, a_2 + x_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j^T \mathbf{x}^{\otimes j} \qquad \textbf{(4.31)}$$

biçimindeki bu açılımda yöney katsayıların belirlenmesi söz konusudur. İşlevin Taylor gösterilimi ise

$$f(a_1 + x_1, a_2 + x_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} f_{j_1, j_2} {x_1}^{j_1} {x_2}^{j_2} \qquad \textbf{(4.32)}$$

biçimindedir. Taylor katsayıları eşsiz olarak

$$f_{j_1, j_2} = \frac{1}{j_1! j_2!} \left(\frac{\partial^{j_1 + j_2} f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \qquad \textbf{(4.33)}$$

biçiminde elde edilebilir. (4.31) ve (4.32) birer özdeşlik olarak gündeme getirildiğinden dolayı, bu bağıntıların sağ yanları da kendi aralarında eşit olmalıdır. Dolayısıyla

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\otimes j} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} f_{j_1, j_2} {x_1}^{j_1} {x_2}^{j_2} \qquad \textbf{(4.34)}$$

söz konusudur. Buradaki bilinmeyenler $\mathbf{F}_j^T$ ile gösterilen yöney devrikleridir. Aynı üslüleri içeren terimlerin katsayılarının birbirine eşit olması gerektiğinden, yöney devrikleri için değer elde edilebilir. Açılımların değişmez terimleri $j = 0$, $j_1 = 0$, $j_2 = 0$ durumuna karşılık gelmektedir. Bu durumda (4.33)'ü de gündeme getirerek

$$\mathbf{F}_0^T = f_{0,0} = f(0,0) \tag{4.35}$$

elde edilebilir. Dolayısıyla, $\mathbf{F}_0^T$ bir yöney devriği değil, aslında bir sayıldır. Bir sonraki katsayı için de benzer bir inceleme yapılabilir. j_1 ve j_2'nin toplamının 1 olduğu bu durumda, ilgili yöney devriğinin

$$\mathbf{F}_1^T = \left[\begin{array}{cc} f_{1,0} & f_{0,1} \end{array} \right] \tag{4.36}$$

olarak belireceği gözlemlenebilir. Dolaysızüslü toplamdizinin bir sonraki teriminin üslüleri Taylor açılımındaki j_1 ve j_2'nin toplamlarının 2 olduğu terimlere karşılık gelmektedir. $\mathbf{x}$ yöneyinin dolaysız üsikisinin ikinci ve üçüncü öğelerinin değiştirimlilik dolayısıyla eşdeğer olmalarından dolayı, iki öğe de aynı Taylor terimine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, ilgili terimler için sağ yanların eşitlenmesi ile

$$\mathbf{F}_2^T \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right]^{\otimes 2} = f_{2,0} x_1^2 + f_{1,1} x_1 x_2 + f_{0,2} x_2^2 \tag{4.37}$$

biçiminde bir bağıntı ortaya çıkmaktadır. Dolaysızüslü açılımın yöney devriği katsayısının öğeleri için

$$\mathbf{F}_2^T \equiv \left[\begin{array}{cccc} F_1^{(2)} & F_2^{(2)} & F_3^{(2)} & F_4^{(2)} \end{array} \right] \tag{4.38}$$

tanımı yapılır ise, yöney devriğinin öğelerinin elde edinimi için çözülmesi gereken denklemlerin

$$F_1^{(2)} = f_{2,0} \tag{4.39a}$$

$$F_4^{(2)} = f_{0,2} \tag{4.39b}$$

$$\left(F_2^{(2)} + F_3^{(2)} \right) = f_{1,1} \tag{4.39c}$$

olduğu gözlemlenebilir. Yöney devriğinin ilk ve son öğeleri eşsiz olarak elde edilebilirken, ikinci ve üçüncü öğelerin toplamı için bir kısıt gelmekte, öğe sayısından bir eksik sayıda denklem oluşmaktadır. Dolayısıyla, eşsizlik yoktur.

Aslında bir sayıl olan $\mathbf{F}_0^T$ ve N öğeli bir yöney devriği olan $\mathbf{F}_1^T$ için eşsizliği bozacak herhangi bir durum söz konusu değildi. Ama $\mathbf{F}_2^T$'in elde ediniminde bir belirsizliğin olduğu (4.39)'da görülmektedir. Sayısal sonuç elde edinimi için bu belirsizliğin giderimi gereklidir. Bu olgu, Taylor toplamdizisi oluşturulabilen bütün işlevler için geçerlidir.

Yapıyı daha iyi irdeleyebilmek için dolaysızüslü toplamdizinin terimlerinde ilgili dolaysızüssün belirlenmiş olduğu, iççarpım içeren yapıları düşünelim. Dizge yöneyinin dolaysızüslülerinde, dizge değişkeninin üssünü içeren çarpımcıl terimlerin bulunduğu yerde dizge değişkeninin art arda çarpımları olarak yazıldığını düşünelim. Bu yapıda, katsayı belirleniminde belirsizliğe neden olan öğeler, en az iki ayrı x_i çarpanı içeren öğelerdir. Birbirleriyle doğrusal bağımlı olan öğeler, aynı çarpanları aynı sayıda ama değişik sırada içerenlerdir. $N = 2$ ve ayrıca $(j_1 + j_2) = 2$ durumunda, başka bir deyişle $j = 2$ durumunda, bir adet iki öğeli bir doğrusal bağımlılık kümesi vardır. Eğer bir öğede x_k'nin kaç kez bulunduğu m_k ile gösterilirse, $m_1 + \cdots + m_N = j$ bağıntısının sağlanması gereklidir. Dolayısıyla, herhangi bir j değeri için, birbirleri ile doğrusal bağımlı olan öğeleri içeren kümenin öğe sayısı, bu öğelerde x_k'nin m_k kez göründüğü göz önünde bulundurularak

$$\overline{n} = \frac{j!}{m_1!...m_N!} \tag{4.40}$$

olarak belirlenebilir. Birbirleri ile doğrusal bağımlı öğeleri içeren bütün kümelerin birleşiminin toplam öğe sayısı ise j'inci dolaysızüssün öğe sayısından yalnızca tek bir dizge değişkeninin özüyle çarpımlarını içeren öğelerin sayısını eksilterek bulunabilir. N öğeli dizge yöneyinin j'inci dolaysızüslüsünün N^j öğeli olduğu düşünülür ise, bu öğelerden yalnızca N adedi yöneyin diğer bütün öğelerinden doğrusal bağımsızdır. $(N^j - N)$ adedi diğer en az bir öğe ile doğrusal bağımlıdır. Belirli bir öğenin kaç diğer öğe ile doğrusal bağımlı olduğu (4.40) ile belirlenebilir.

Bir yerdeğiştirim (ing: permutation) işleci tanımı ile inceleme sürdürülebilir. Yerdeğiştirim işleci etki ettiği çarpımda çarpanların aralarında yerdeğişimi eylemini gerçekleştirmekte olup k değiştirgesi 1'den $\overline{n}$'e dek değiştikçe olası bütün sıralanımları üretecek biçimde tanımlanmaktadır. Eğer, u_k işlevleri üzerinde, αlar bir takım değişmezler olmak üzere,

$$u \equiv \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{\overline{n}} u_{\overline{n}} \tag{4.41}$$

yapısında bir işlev tanımlanırsa; tüm u_k işlev değerlerinin, aslında, eşdeğer oluşundan dolayı;

$$u \equiv (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\overline{n}}) x_1^{m_1} ... x_N^{m_N} \tag{4.42}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, toplamları 0 olan herhangi $\overline{n}$ sayıda değiştirgeyi katsayı olarak kullanan ve $u_k$lar üzerinde oluşturulan bir doğrusal birleşimin sıfırlanacağı ortaya çıkar. Diğer bir deyişle, $\overline{n}$ sayıdaki işlevler takımının doğrusal bağımsızlık düzeyi 1'dir.

Böylece, eğer,

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\bar{n}} = 0 \tag{4.43}$$

eşitliğini sağlayan αlar kullanılacak olursa,

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}} \alpha_k u_k(x_1, ..., x_N) = 0 \tag{4.44}$$

yazılabilir. Burada görünen u_k için, Kartezyen birim yöneylerin dolaysız çarpımdaki konumlarında yerdeğiştirim eylemine girişerek

$$u_k(x_1, ..., x_N) = \widehat{\pi}_k \left(\mathbf{e}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_N^{\otimes m_N}\right)^T \mathbf{x}^{\otimes j} \tag{4.45}$$

ve buna dayanarak

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}} \alpha_k \widehat{\pi}_k \left(\mathbf{e}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_N^{\otimes m_N}\right)^T \mathbf{x}^{\otimes j} = 0 \tag{4.46}$$

eşitliği yazılabilir. Bundan yararlanarak

$$\mathbf{F}_j^T \mathbf{x}^{\otimes j} = \left(\mathbf{F}_j^T - \sum_{k=1}^{\bar{n}} \alpha_k \widehat{\pi}_k \left(\mathbf{e}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_N^{\otimes m_N}\right)^T\right) \mathbf{x}^{\otimes j} \tag{4.47}$$

bağıntısına ulaşılabilir. Bu bağıntı,

$$\overline{\mathbf{F}}_j(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \mathbf{F}_j - \sum_{k=1}^{\bar{n}} \alpha_k \widehat{\pi}_k \left(\mathbf{e}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_N^{\otimes m_N}\right) \tag{4.48}$$

ile tanımlanan $\overline{\mathbf{F}}_j(\boldsymbol{\alpha})$ yöneyinin $\mathbf{F}_j$ yöneyi yerine, açılımı bozmaksızın, kullanılabileceği anlamına gelir.

4.1.4 Esneklik giderimi için eşbölünüm

Esneklik içeren en küçük dereceli terim olan ikinci derece terimdeki esnekliğin kaynağı (4.26) sırasayılı bağıntıda kendini göstermektedir. Bu bağıntıda bulunan $\left(\mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{a}}\right) \otimes \left(\mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{a}}\right) = \left(\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{x}^T\right) \left(\nabla_{\mathbf{a}} \otimes \nabla_{\mathbf{a}}\right)$ yapısında iki iççarpımın dolaysız çarpımının, dolaysız çarpımların iççarpımı olduğu görülmektedir. Bu olgu, yöneyleri açık olarak öğecil yazarak, ve iççarpım ve dolaysız çarpım işlemlerini gerçekleştirerek görülebilir. Ama, dolaysız çarpımların iççarpımı elde edilirken, daha geniş bir uzayda çalışılması ve en son aşamada sayıl elde edinimi söz konusudur. Örneğin $N = 2$ durumu için, $\left(\nabla_{\mathbf{a}} \otimes \nabla_{\mathbf{a}}\right)$ yöneyinin ikinci öğesine bir sayıl değer eklenip, aynı sayıl değerin $\left(\nabla_{\mathbf{a}} \otimes \nabla_{\mathbf{a}}\right)$ yöneyinin üçüncü öğesinden çıkarılmasının eşitliği bozmayacağı gözlemlenebilir. Dolayısıyla, katsayıların (4.29)'da belirtildiği gibi belirlenimi aslında bir seçimdir ve eşbölünüm durumuna karşılık gelmektedir.

4.1.4.1 Eşbölünüm kanıtsavı

Akla doğal olarak gelen düşünlerden biri $\overline{\mathbf{F}}_j(\boldsymbol{\alpha})$ yöneyinin boy enküçüklenimidir. İşlem kolaylığı açısından, boyun üsikilisini amaç işlevimsisi olarak almak düşünülebilir. Ancak, α'ların toplamının sıfırlanımı kısıtı da işlevimsi yapısına sokulmalıdır. Böylece, aşağıdaki işlevimsi tanımına geçilebilir.

$$J(\boldsymbol{\alpha},\lambda) \equiv \left\|\overline{\mathbf{F}}_j(\boldsymbol{\alpha})\right\|^2 + \lambda\left(\sum_{k=1}^{\overline{n}} \alpha_k\right) \quad . \tag{4.49}$$

Bu yapının, Lagrange çarpanı olan, λ'ya göre sıfırlanımı, beklenildiği gibi,

$$\sum_{k=1}^{\overline{n}} \alpha_k = 0 \tag{4.50}$$

denklemini verir. Öte yandan, J'nin α_k'ya göre türevlenimi aşağıdaki eşitliği verir.

$$\frac{\partial\left\|\overline{\mathbf{F}}_j(\boldsymbol{\alpha})\right\|^2}{\alpha_k} + \lambda = 0, \qquad k = 1,2,...,\overline{n} \quad . \tag{4.51}$$

Bunun daha açık yapısı

$$2\alpha_k - 2\widehat{\pi}_k\left(\mathbf{e}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_N^{\otimes m_N}\right)^T \mathbf{F}_j + \lambda = 0, \qquad k = 1,2,...,\overline{n} \tag{4.52}$$

anlatımıyla verilebilir. Bu denklemden, her iki yanın k'nın alabileceği tüm değerler üzerinde toplam alarak,

$$2\sum_{k=1}^{\overline{n}} \alpha_k - 2\sum_{k=1}^{\overline{n}} \widehat{\pi}_k\left(\mathbf{e}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_N^{\otimes m_N}\right)^T \mathbf{F}_j + \overline{n}\lambda = 0 \tag{4.53}$$

ve, ilk toplamın sıfırlanımı nedeniyle,

$$-2\sum_{k=1}^{\overline{n}} \widehat{\pi}_k\left(\mathbf{e}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_N^{\otimes m_N}\right)^T \mathbf{F}_j + \overline{n}\lambda = 0 \tag{4.54}$$

arasonucuna varılabilir. Eğer, sürekli bir çokdeğişkenli işlevde türevalımının sırasının sonucu değiştirmeyeceği anımsanırsa, k'nın 1'den $\overline{n}$'ye dek değişebilen herhangi bir değeri için,

$$\widehat{\pi}_k\left(\mathbf{e}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_N^{\otimes m_N}\right)^T \mathbf{F}_j = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j f(\mathbf{a})}{\partial a_1^{m_1} \cdots \partial a_N^{m_N}} \tag{4.55}$$

yazılabilir. Bunun (4.54)'te kullanımı

$$\lambda = \frac{2}{j!}\frac{\partial^j f(\mathbf{a})}{\partial a_1^{m_1} \cdots \partial a_N^{m_N}} \tag{4.56}$$

ve (4.52)'den de

$$\alpha_k = 0, \qquad k = 1,2,...,\overline{n} \tag{4.57}$$

sonuçlarını üretir. α değerlerinin tümünün sıfır olarak belirleniminin anlamı $\mathbf{F}_j$ yöneyinin $\overline{\mathbf{F}}_j(\boldsymbol{\alpha})$ dizeyinin en küçük boylu durumu olduğudur. Bu olgu tüm j değerleri ve $m_1,...,m_N$ değer takımları için geçerlidir. Dolayısıyla, tüm bu inceleyimler aşağıdaki kanıtsavın geçerliliğini gösterir.

Eşbölünüm Kanıtsavı:

Karşılık geldiği dizge boyutu N olan çokdeğişkenli bir f işlevinin dolaysızüslü toplamdizi gösterilimi

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{F}_j^T \mathbf{x}^{\otimes j}$$

eşitliğiyle verilir ve bu eşitlikte N^j öğeli bir yöney olan $\mathbf{F}_j$

$$\mathbf{F}_j \equiv \frac{1}{j!} \nabla_{\mathbf{a}}^{\otimes j} f(\mathbf{a})$$

eşitliğiyle tanımlanır. $\mathbf{F}_j$ yerine, $\mathbf{x}^{\otimes j}$'de varolan öğe eşdeğerliliklerine dayalı bir takım sıfırlanımlar nedeniyle ortaya çıkan eşitliklerden yararlanarak, değiştirgeler içeren daha kapsamlı bir yöney de kullanılabilir. Ancak, $\mathbf{F}_j$ bu yöneyler arasında en küçük boylu olanıdır. Enküçükboyluluk dizge yöneyinin dolaysızüslülerindeki eşdeğer öğelerin katsayılarında eşitlik anlamına gelir. Dolayısıyla, toplam katsayı değeri eşdeğer terimlerde bölünür.

4.2 Dolaysızüslü toplamdizilerin kullanımı ile olasılıksal evrim yaklaşımının oluşturumu

Olasılıksal evrim yaklaşımının birinci kerte açık ve sağ yan işlevleri çözümcül olan sıradan türevli denklemlerin başlangıç değer sorunlarında kullanımında esnekliklerin nasıl kullanılabileceği üzerinde durulması gereken bir olgudur. İlgilendiğimiz sıradan türevli denklem takımı

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \textbf{(4.58)}$$

olarak gösterilebilir. Sağ yan işlevlerinin dolaysızüslü açılımı

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j \mathbf{x}^{\otimes j} \qquad \textbf{(4.59)}$$

biçimindedir. Üçgencil ikinci derecelilik durumu için,

$$\overline{\mathbf{F}}_2(t) \equiv \mathrm{e}^{-t\mathbf{F}_1} \mathbf{F}_2 \left[\mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1}\right]^{\otimes 2} \qquad \textbf{(4.60)}$$

$$\overline{\mathbf{E}}_j(t) \equiv \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \overline{\mathbf{F}}_2(t) \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes(j-k-1)} \tag{4.61}$$

$$\mathbf{S}_j\mathbf{u}(t) \equiv \int_0^t d\tau \overline{\mathbf{E}}_j(\tau)\mathbf{u}(\tau), \quad j = 1,2,3,\ldots \tag{4.62}$$

tanımları ile ilerlenirse, taban işlevlerinin tıkız bir biçimde

$$\mathbf{x}_j(t) = \left\{e^{t\mathbf{F}_1}\right\}^{\otimes j}\left[\mathbf{a}^{\otimes j} + \mathbf{S}_j\mathbf{a}^{\otimes j+1} + \mathbf{S}_j\mathbf{S}_{j+1}\mathbf{a}^{\otimes j+2} + \cdots\right], \quad j = 0,1,2,\ldots \tag{4.63}$$

olarak gündeme geleceği görülebilir.

4.3 Sıradan türevli denklem takımlarının olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamında çözümü

Buradan $\mathbf{x}_1(t)$'yi kullanarak başlangıç değer sorununun çözümüne geçmek olanaklıdır. Bu toplamdan yapılacak kesmeler, kesme yaklaştıranlarını üretir. (4.63) sırasayılı bağıntıda görüldüğü gibi, kesme yaklaştıranlarını elde edebilmek için, dizey nitelikli bir takım tümlev işleçlerinin **a**'nın dolaysızüslülerine etkisinin belirlenmesi söz konusudur. Kesme kertesi arttırıldıkça bu işleçlerin art arda etkisinin belirlenmesi gerekir. Tümlev işleci içeren ilk yapı $\mathbf{S}_j\mathbf{a}^{\otimes j+1}$ yapısıdır. Burada sorulması gereken soru, tümlev çekirdeğinde bulunan dizey özel bir yapıda olsaydı, bazı yalınlaştırmaların olup olamayacağıdır. Tümlev çekirdeğinde bulunan $\overline{\mathbf{E}}_j(t)$ dizeyinin etkisi sanki bir sayılın etkisi gibi olsaydı yalınlaştırmalar olabilirdi. Sayıl etki yaratmayı engelleyen olgu $\overline{\mathbf{F}}_2(t)$'nin sağında ve solunda dolaysız çarpımlarla gündeme gelen birim dizeyler değildir, çünkü birim dizeylerin yöneye etkisi yine aynı yöneyi yaratır. Bu nedenle, sayıl nitelikli bir tümlev işleci gündeme getirmeyi engelleyen yapı $\overline{\mathbf{F}}_2(t)$'dir. Dolayısıyla $\overline{\mathbf{F}}_2(t)\mathbf{a}^{\otimes 2}$ gündemdedir ve bu yapı doğrusal cebirin olguları olan dizey ve yöney cebirini kullanmayı gerektirmektedir. Daha büyük kerte kesmelerde, burada bulunan dikdörtgen dizey ve yöney çarpımı, tümlevler iç içe geldikçe yapı içerisinde kendisini göstermektedir. Eğer $\overline{\mathbf{F}}_2(t)\mathbf{a}^{\otimes 2}$ terimi

$$\overline{\mathbf{F}}_2(t)\mathbf{a}^{\otimes 2} = \gamma\mathbf{a} \tag{4.64}$$

biçiminde yazılabilseydi, sayıl nitelik gündeme gelebilecekti. Dolayısıyla esneklik gideriminde erek olarak düşünülecek olgulardan en öne çıkanı (4.64) sırasayılı bağıntıda verilen yapıdır. Bunun olabilirliğine ileriki bölümlerde değinilecektir.

4.4 Üçgencil ikinci derecelilik durumunun ayrıntılandırımı

Bu bölümde iki öbek terimli özyineleme ile gösterilebilen olasılıksal evrim denklemlerinin çözümü olgusuna eğilinecektir. Bu tür özyineleme, sağ yan işlevi konik bir yapıda olan sıradan türevli denklem takımlarının başlangıç değer sorunlarının çözümünde kendiliğinden ortaya çıkmaktadır. Başka türden olan ve özellikle sağ yan işlevi çokterimli olan birçok denklem takımı bu yapıya uzay genişletme yöntemleri ile indirgenebilir.

4.4.1 Kesme yaklaştıranlarının elde edinimi

Olasılıksal evrimde ikinci derecelilik kısıtlı ya da indirgenmiş bir yapı olarak düşünülmelidir. Bu, sağ yan işlevlerinin ikinci derece çokçokterimli olduğu duruma karşılık gelmektedir. Ayrıca sağ yanın belirli bir değer için sıfırlanma yaratması ve dolayısıyla bütün f değerlerinin orada sıfır olması gereklidir. Dolayısıyla $\mathbf{F}_0$ sıfır dizeyi olmalıdır. $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ sıfır dizeyi olmak zorunda değildir. İkiden büyük altsırasayılı bütün katsayı dizeyleri sıfırlanmalıdır.

$$\mathbf{F}_j(t) \equiv 0, \qquad (j>2) \vee (j=0), \quad j=0,1,2,\ldots \tag{4.65}$$

Bu da yalnızca asal köşegendeki ve onun hemen üzerindeki öbeklerin var olduğu yapıya karşılık gelmektedir. Erek, bu yapıdan kesme yaklaştıranları elde etmek ve çözümün yakınsamasını göstermek olarak özetlenebilir. Aşağıdaki bağıntının sağ yanındaki ilk terim asal köşegen üzerindeki öbeklere, ikinci terim ise asal köşegenin hemen üzerindeki köşegen üzerindeki öbeklere karşılık gelmektedir. Olasılıksal evrim denklemi, bu biçimde sonsuz denklemin bir arada düşünüldüğü yapı olarak öngörülebilir.

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{E}_{j,j}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{E}_{j,j+1}\mathbf{x}_{j+1}(t), \quad j=0,1,2,3,\ldots \tag{4.66}$$

Burada bilinmeyen olarak j'inci ve $(j+1)$'inci öğeler bulunmaktadır. Bu iki terimli bir özyinelemedir ve bu özyinelemenin kesin çözümü bulunabilir. Yalnızca j'inci öğeler göz önüne alınırsa, $\mathbf{x}_j(t)$ üzerine bir işlecin etki ettirilmesinin söz konusu olduğu düşünülebilir. Dolayısıyla $\mathbf{x}_j(t)$'yi yalın olarak bırakmak için sıradan türevli işlecin evirtilmesi gereklidir. Bunu yapabilmek için

$$\mathbf{x}_j(t) \equiv e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\overline{\mathbf{x}}_j(t), \quad \overline{\mathbf{x}}_j(0) = \mathbf{x}_j(0) = \mathbf{a}^{\otimes j} \tag{4.67}$$

tanımlaması yapılmalıdır. Bu yapılırsa $\dot{\overline{\mathbf{x}}}_j(t)$ üzerindeki denklem

$$e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\dot{\overline{\mathbf{x}}}_j(t) = \mathbf{E}_{j,j+1}\mathbf{x}_{j+1}(t), \quad j=0,1,2,3,\ldots \tag{4.68}$$

yapısında oluşur ve tümlevleyerek

$$\overline{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{a}^{\otimes j} + \int_0^t d\tau \, \mathrm{e}^{-\tau \mathbf{E}_{j,j}} \mathbf{E}_{j,j+1} \mathbf{x}_{j+1}(\tau), \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(4.69)}$$

elde edilebilir. Dolayısıyla $\mathbf{x}_j(t)$'nin türev bulunmadan anlatıldığı bir yapı elde edilmiş olundu. Burada, yapıyı üstel dizey ile soldan çarparak $\mathbf{x}_j(t)$ için

$$\mathbf{x}_j(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{E}_{j,j}} \mathbf{a}^{\otimes j} + \int_0^t d\tau \, \mathrm{e}^{(t-\tau)\mathbf{E}_{j,j}} \mathbf{E}_{j,j+1} \mathbf{x}_{j+1}(\tau), \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(4.70)}$$

anlatımı elde edilebilir. Dolayısıyla $\mathbf{x}_j(t)$, $\mathbf{x}_{j+1}(t)$'ye türev işleci yerine tümlev işleci ile ilişkilendirilmiş olundu. Eğer tümlev çekirdeğinde tekillik yoksa, bir tümlev işleci sınırlıdır. Dolayısıyla boyu sonlu kalan bir öğedir. $\mathbf{x}_j(t)$'yi $\mathbf{x}_{j+1}(t)$'ye boyu sonlu kalan bir öğe ile ilişkilendirmek, yakınsama ile ilgili bazı belirtimlerde bulunmayı sağlayacak olan olgudur. Bir sonraki aşama (4.70)'te bulunan üstel dizeyin açık yapısının belirlenmesidir. Bu üstel dizey

$$\mathrm{e}^{t\mathbf{E}_{j,j}} = \exp\left(t \left[\sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes (j-k-1)} \right] \right), \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(4.71)}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu toplamda, birbirinden değişik k'ler için olan Kronecker çarpımlar birbirleri ile değiştirimlidir. Eğer bir üstel işlevde değiştirimli dizeyler toplamsal olarak bulunuyorsa, o üstel yapı çarpanlara ayrılabilir. Dolayısıyla

$$\left[\mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes (j-k-1)}, \mathbf{I}_n^{\otimes l} \otimes \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes (j-l-1)} \right] = \mathbf{0} \qquad \textbf{(4.72)}$$

olarak gösterilebilecek olan değiştirim olgusu

$$\mathrm{e}^{t\mathbf{E}_{j,j}} = \prod_{k=0}^{j-1} \exp\left(t \left[\mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes (j-k-1)} \right] \right), \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(4.73)}$$

biçiminde üstellerin çarpımı olarak gösterilimi sağlamaktadır. Burada aynı tür terimlerin m'inci üslüsü gelecektir. Kronecker çarpımı için geçerli olan kurallar kullanılarak, üssün yalnızca $\mathbf{F}_1$ üzerine geleceği gündeme getirilebilir. Bunun nedeni Kronecker çarpımın birim dizeyler ile olduğu olgusudur.

$$\left[\mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes (j-k-1)} \right]^m = \mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{F}_1^m \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes (j-k-1)} \qquad \textbf{(4.74)}$$

Terimlerde bulunan yapının üslülerinin (4.74)'teki gibi yazılabilmesinden dolayı üstelin

$$\exp\left(t \left[\mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes (j-k-1)} \right] \right) = \mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1} \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes (j-k-1)} \qquad \textbf{(4.75)}$$

biçiminde yazılabileceği söylenebilir. Burada $(k+1)$'inci konumda $\mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1}$ olması ve k'nin aralığı taraması gündemdedir. Her çarpımda bir birim dizey yerine üstel gelecektir ve hepsi birden çarpıldığında bütün üstellerin Kronecker çarpımları oluşacaktır. Dolayısıyla bu yapı, üstellerin Kronecker üslüsüdür.

$$\mathrm{e}^{t\mathbf{E}_{j,j}} = \left\{\mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1}\right\}^{\otimes j}, \quad j = 0,1,2,3,\ldots \tag{4.76}$$

Bunun anlamı j'inci asal köşegen öbeğin $\left\{\mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1}\right\}$'in j'inci Kronecker üslüsü olmasıdır. $\mathbf{F}_1$ sağ yan yöneyindeki işlevler üzerinden oluşturulan Jakobiyen dizeyi idi. $\mathbf{F}_1$ elde edildikten sonra, üstelinin Kronecker üslülerine geçilebilir ve yargıda bulunulabilir. Dolayısıyla sorunun çözümü (4.76)'daki üstel terimin sonsuzdaki davranışına bağlıdır. Bu davranışı da $\mathbf{F}_1$'in özdeğerleri betimler. Eğer bu özdeğerlerin gerçel kesimlerinin bütününde eksideğerlilik söz konusu ise kararlılık vardır. Sıfır özdeğeri varsa, salınım gündeme gelecektir. Eğer özdeğerlerde artıdeğerlilik de varsa, sonsuz büyümeler de gündeme gelecektir ve bu kararlı olmayan durumlara karşılık gelir. Tümlevin içerisinde bulunan terimle ilgilenerek üstelin asal köşegenin komşuları üzerine etkisi gündeme getirilirse

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-t\mathbf{E}_{j,j}}\mathbf{E}_{j,j+1} &= \left\{\mathrm{e}^{-t\mathbf{F}_1}\right\}^{\otimes j}\sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_n^{\otimes k}\otimes\mathbf{F}_2\otimes\mathbf{I}_n^{\otimes(j-k-1)} \\
&= \sum_{k=0}^{j-1}\left\{\mathrm{e}^{-t\mathbf{F}_1}\right\}^{\otimes k}\otimes\left\{\mathrm{e}^{-t\mathbf{F}_1}\right\}\mathbf{F}_2\otimes\left\{\mathrm{e}^{-t\mathbf{F}_1}\right\}^{\otimes(j-k-1)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_n^{\otimes k}\otimes\left\{\mathrm{e}^{-t\mathbf{F}_1}\mathbf{F}_2\left[\mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1}\right]^{\otimes 2}\right\}\otimes\mathbf{I}_n^{\otimes(j-k-1)}\right)\left\{\mathrm{e}^{-t\mathbf{F}_1}\right\}^{\otimes(j+1)}
\end{aligned} \tag{4.77}$$

yapısı oluşur. Burada asal köşegene komşu olan köşegenin üretecinin $\mathbf{F}_2$ olduğu olgusu kullanılmıştır ve dağılma özelliği ile yapı yalınlaştırılmıştır. Daha sonraki yalınlaştırma ise Kronecker çarpımının yönlülüğünün sonucudur. Eğer üç terimin Kronecker çarpımı varsa ve bunlardan birinci ve üçüncüsü birim dizey ise, birinci terim üzerindeki çarpan üçüncü terime aktarılabilir. Bu yapılırsa $\mathbf{F}_2$ dikdörtgen dizeyinin, boyut da gözeterek, bir üstelin kendisi ve evriğinin arasına girmesi söz konusudur. Sonuçta

$$\overline{\mathbf{F}}_2(t) \equiv \mathrm{e}^{-t\mathbf{F}_1}\mathbf{F}_2\left[\mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1}\right]^{\otimes 2} \tag{4.78}$$

tanımı yapılabilir. Bu yeni tanımlanan dikdörtgen dizeyin köşegen olasılıksal evrimden değişimi yarattığı vurgulanmalıdır. (4.77)'deki sağ yanda ayıraçlar içerisindeki yapıyı (4.78)'i kullanarak

$$\overline{\mathbf{E}}_j(t) \equiv \sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_n^{\otimes k}\otimes\overline{\mathbf{F}}_2(t)\otimes\mathbf{I}_n^{\otimes(j-k-1)} \tag{4.79}$$

olarak yazmak olanaklıdır. Bu, (4.70)'te yerine konulursa

$$\mathbf{x}_j(t) = \left\{ \mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1} \right\}^{\otimes j} \left[\mathbf{a}^{\otimes j} + \int_0^t d\tau \overline{\mathbf{E}}_j(\tau) \left\{ \mathrm{e}^{\tau\mathbf{F}_1} \right\}^{\otimes (j+1)} \mathbf{x}_{j+1}(\tau) \right], \quad j = 0,1,2,3,\ldots \tag{4.80}$$

anlatımı ile $\mathbf{x}_j(t)$ elde edilebilir. Böylece $\mathbf{x}_j(t)$, $\mathbf{x}_{j+1}(t)$'e tıkızlaştırılmış bir yapı ile bağlanmış oldu. Burada, j yerine $(j+1)$ koyarak, $\mathbf{x}_{j+1}(t)$ yapısı $\mathbf{x}_{j+2}(t)$'ye bağlanabilir. Bu yeni bağıntı (4.80)'de kullanılırsa $\mathbf{x}_j(t)$, $\mathbf{x}_{j+2}(t)$'ye bağlanmış olur.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j(t) = \left\{ \mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1} \right\}^{\otimes j} \Bigg[& \mathbf{a}^{\otimes j} + \int_0^t d\tau \overline{\mathbf{E}}_j(\tau) \mathbf{a}^{\otimes (j+1)} + \int_0^t d\tau_1 \overline{\mathbf{E}}_j(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \overline{\mathbf{E}}_{j+1}(\tau_2) \\ & \times \left\{ \mathrm{e}^{\tau_2\mathbf{F}_1} \right\}^{\otimes (j+2)} \mathbf{x}_{j+2}(\tau_2) \Bigg], \quad j = 0,1,2,3,\ldots \end{aligned} \tag{4.81}$$

Burada, sağ yanda $\mathbf{a}$'nın j'inci Kronecker üslüsü bulunmaktadır. Ayrıca $(j+1)$'inci Kronecker üslüsünün tümlev işleci altındaki görüntüsü de bulunmaktadır. Tümlev işleci altındaki bu görüntü, işlecin dizeyselliğinden dolayıdır. $\mathbf{a}$ içerisinde zamana bağımlılık bulunmamaktadır. Ayrıca zamana bağımlı olan ve $\mathbf{a}$ içermeyen iki tümlev vardır. Daha yalın yazım için, tümlev işlecinin etkisi

$$\mathbf{S}_j \mathbf{u}(t) \equiv \int_0^t d\tau \overline{\mathbf{E}}_j(\tau) \mathbf{u}(\tau), \quad j = 1,2,3,\ldots \tag{4.82}$$

olarak nitelenebilir. Bu yeni tanımlama ile oluşacak yapı

$$\mathbf{x}_j(t) = \left\{ \mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1} \right\}^{\otimes j} \left[\mathbf{a}^{\otimes j} + \mathbf{S}_j \mathbf{a}^{\otimes j+1} + \mathbf{S}_j \mathbf{S}_{j+1} \mathbf{a}^{\otimes j+2} + \cdots \right], \quad j = 0,1,2,\ldots \tag{4.83}$$

biçimindedir ve her yeni gelen terimde yeni bir $\mathbf{S}$ çarpanının oluştuğu görülmektedir. Genel terim olarak yazılırsa

$$\mathbf{x}_j(t) = \left\{ \mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1} \right\}^{\otimes j} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\prod_{l=0}^{k-1} \mathbf{S}_{j+l} \right] \mathbf{a}^{\otimes (j+k)}, \quad j = 0,1,2,3,\ldots \tag{4.84}$$

$$\prod_{l=k}^{j} \equiv \widehat{I}, \quad j < k \tag{4.85}$$

biçiminde, toplamdizi içeren bir anlatım oluşur. Böylelikle genel çözüm bulunmuş olundu. Buradan sayısal bir sonuç elde edilmesi için toplamdiziden kesme yapılması gereklidir. Baştan belirli sayıda, $\mathbf{a}$'nın belirli bir Kronecker üslüsüne kadar giden terimler alıkonabilir. Tek terimli yaklaştırım yalnızca $\mathbf{a}_j$'yi içerecektir ve bu durum bir tek asal köşegenin varolduğu duruma karşılık gelmektedir. Buna sıfırıncı düzey yaklaştırım da denebilir. Birinci düzey yaklaştırım, bu terimin yanında $\mathbf{S}_j\mathbf{a}^{\otimes(j+1)}$'i de içerecektir. Kesme düzeyini artırarak yeni yaklaştırımlar yapılabilir. Bu biçimde yapılacak yaklaştırımların bir yakınsama görüntüsü vermemesi durumunda, bu yapı sayısal olarak sonuç elde edinimi için kullanılamaz. Dolayısıyla yöntemin işleyip işlemeyeceği ile ilgili birşeyler söyleyebilmek için yakınsamanın incelenmesi gereklidir. Bunun için boy çözümlemesi (ing: analysis) yapılmalıdır.

4.4.2 Yakınsaklık çözümlemesi

$\overline{\mathbf{E}}_j(t)$ dizeyi $\overline{\mathbf{F}}_2(t)$ dizeyini içeren bir yapıdadır. Yapısı (4.79) tanımında görülebileceği gibi bir dizeyin sağında ve solunda birim dizeylerin Kronecker üslülerinin Kronecker çarpımlarının bulunduğu bir yapıdadır. Burada vurgulanması gereken bir olgu da bir birim dizeyin Kronecker üslüsünün yine bir birim dizey oluşudur. $\mathbf{I}_n$ birim dizeyinin k'inci Kronecker üslüsünün $\mathbf{I}_{n^k}$ olacağı yalın bir inceleme ile görülebilir. Dolayısıyla birim dizeylerin Kronecker üslüleri daha yalın biçimde yalnızca birim dizeylerin tanımlı oldukları uzayı gündeme getirerek irdelenebilir. Böylece $\overline{\mathbf{E}}_j(t)$ dizeyinin yapısında nasıl dizeylerin Kronecker çarpımının bulunduğu daha ayrıntılı olarak görülebilir. Bir dizey çarpımı üzerinde boy tanımı yapıldığında bazı önemli olgular söz konusudur. Eğer bir altçarpımcıl (ing: submultiplicative) boy kullanılıyorsa, çarpımın boyu, çarpanların boylarının çarpımından küçüktür. Özel durumlarda bu boy çarpımına eşit de olabilir. Sayıl düzeyde geçerli olan bu olgu, Kronecker çarpımlarında da geçerlidir. Bir Kronecker çarpımının boyu, çarpanların boylarının çarpımından eşit veya küçüktür. Bunun gündeme getirilmesinin nedeni, $\overline{\mathbf{E}}_j(t)$'yi, $\overline{\mathbf{F}}_2(t)$'nin boyu ile ilişkilendirme çabasıdır. Bu olgular, (4.79) bağıntısı bağlamında göz önüne alınırsa,

$$\left|\left|\overline{\mathbf{E}}_j(t)\right|\right| \leq j\left|\left|\overline{\mathbf{F}}_2(t)\right|\right|, \qquad j=0,1,2,\ldots \tag{4.86}$$

gündeme getirilebilir. Burada birim dizeylerin boylarını birim sayı yapan bir boy kullanıldığı öngörülmüştür. Çünkü o durumda birim dizeylerden bir katkı gelmeyecek, j terimde $\left|\left|\overline{\mathbf{F}}_2(t)\right|\right|$ gündeme gelecektir. $\overline{\mathbf{E}}_j(t)$ ile ilgili bu eşitsizliği kullanarak, $\overline{\mathbf{E}}_j(t)$ üzerinde tanımlı olan $\mathbf{S}_j$ için de benzer yargılara varılabilir.

$$\left|\left|\mathbf{S}_j\right|\right| \leq j\int_0^t d\tau \left|\left|\overline{\mathbf{F}}_2(\tau)\right|\right|, \qquad j=0,1,2,\ldots \tag{4.87}$$

eşitsizliği $\mathbf{S}_j$'nin tümlev üzerinden tanımlı olduğunu gündeme getirerek oluşturulabilir. $\mathbf{S}$'lerin çarpımı için ise

$$\left|\left|\prod_{l=0}^{k-1}\mathbf{S}_{j+l}\right|\right| \leq \begin{pmatrix} j+k-1 \\ k \end{pmatrix}\left(\int_0^t d\tau \left|\left|\overline{\mathbf{F}}_2(\tau)\right|\right|\right)^k \tag{4.88}$$

biçiminde oluşur. (4.87)'de $||\mathbf{S}_j||$ için j çarpanı gündemdedir. $||\mathbf{S}_{j+1}||$ için de $(j+1)$ çarpanı oluşur. $\mathbf{S}_j$'den $\mathbf{S}_{j+k-1}$'e kadar olan terimler için j'den $(j+k-1)$'e kadar olan çarpanlar bulunacaktır. (4.88)'de j'den $(j+k-1)$'e kadar olan çarpanlar bir ikili terim açılımı katsayısı ile gösterilmektedir. Boy çözümlemesini sağlayacak olgu, bu ikili terim katsayılarından oluşacak çarpınım (ing: factorial) yapısıdır. Başlangıç yöneyinin Kronecker üslülerindeki boy eşitsizliği ise o başlangıç yöneyinin boyu biçiminden

$$\left|\left|\mathbf{a}^{\otimes j}\right|\right| \leq ||\mathbf{a}||^j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.89}$$

olarak yazılabilir. Bu olgular bir araya getirilirse

$$\left|\left|\mathbf{x}_j(t)\right|\right| \leq \left|\left|e^{t\mathbf{F}_1}\right|\right|^j \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} j+k-1 \\ k \end{pmatrix} \left(\int_0^t d\tau \left|\left|\overline{\mathbf{F}}_2(\tau)\right|\right|\right)^k ||\mathbf{a}||^{j+k}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.90}$$

eşitsizliği oluşur. Buradaki toplamdizi, uzamcıl (ing: geometric) toplamdizinin özü (kendisi) ve türevleri biçiminden bir doğrusal birleştirimdir. Uzamcıl toplamdizinin (ing: geometric series) yakınsaması için geçerli olan koşullar, uzamcıl toplamdizinin türevleri için de geçerlidir. Bu koşul da,

$$\int_0^t d\tau \left|\left|\overline{\mathbf{F}}_2(\tau)\right|\right| ||\mathbf{a}|| < 1 \tag{4.91}$$

koşuludur. Burada $\overline{\mathbf{F}}_2(\tau)$'nin yapısı önem kazanmaktadır. Bu yapı bir dizeyin solunda ve sağında üstellerin içerildiği bir yapı idi. Bu beklenen değer ile ilintili olan yapıdan dolayı, eğer kararlılık varsa, t'den bağımsız olarak yakınsama gündeme gelecektir. Üstel terim ne olursa olsun, 1'den küçük değer elde edinimi söz konusu olacaktır. Bu durumda, yalnızca başlangıç koşulunun seçimi belirleyici olur. Kararsızlık varsa, (4.91)'deki tümlevde t'ye bağımlılık oluşur. t arttıkça artan sınır, sağ yanda paydanın büyümesine neden olacaktır ve yakınsama bölgesi küçülecektir. Bu durumda, başlangıç koşulu belli bir t'ye kadar yakınsamayı sağlayacaktır.

4.4.3 Kesme yaklaştıranlarının yeniden yazımı

Eğer

$$\overline{\mathbf{E}}_{j,j+1}(\tau) \equiv e^{-\tau\mathbf{F}_1}\mathbf{E}_{j,j+1}\left\{e^{\tau\mathbf{F}_1}\right\}^{\otimes 2}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.92}$$

tanımı yapılır ise, özyineleme biraz daha tıkız bir biçimde

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_j(t) &= e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\mathbf{x}_j(0) + \int_0^t d\tau e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\overline{\mathbf{E}}_{j,j+1}(\tau)\mathbf{x}_{j+1}(0) \\
&+ \int_0^t d\tau e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\overline{\mathbf{E}}_{j,j+1}(\tau)\int_0^\tau d\tau_1\overline{\mathbf{E}}_{j+1,j+2}(\tau_1)\mathbf{x}_{j+2}(\tau_1), \\
&\quad j = 0,1,2,... \qquad \textbf{(4.93)}
\end{aligned}$$

olarak gündeme getirilebilir. Buradan terim sayısı arttırıldıkça eklenen terimdeki ardışık tümlev sayısının arttığı görülmektedir. Bundan dolayı tümlev işleçlerini

$$\mathscr{I}_j\mathbf{f}(t) \equiv \int_0^t d\tau\overline{\mathbf{E}}_{j,j+1}(\tau)\mathbf{f}(\tau), \quad j = 0,1,2,..., \qquad \textbf{(4.94)}$$

tanımı ile gündeme getirerek, çözümü oldukça tıkız bir biçim olan

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_j(t) &= e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\left[\mathbf{x}_j(0) + \mathscr{I}_j\mathbf{x}_{j+1}(0) + \mathscr{I}_j\mathscr{I}_{j+1}\mathbf{x}_{j+2}(\tau_1)\right], \\
&\quad j = 0,1,2,... \qquad \textbf{(4.95)}
\end{aligned}$$

anlatımı ile göstermek olanaklıdır. Ama, bu yapı hala bir özyinelemedir. Bu özyinelemenin genel çözümünün gündeme getirilmesi gereklidir. Burada elde edilen gözlemler ile, her sırasayı kaydırıp yerine koyma işlemi sonrasında yeni bir tümlev işleci ve başlangıç koşulu yöneyi Kronecker üslüsü gündeme geldiği sonucu ortaya çıkmaktadır. m ardışık yerine koyma sonrasında, $\mathbf{x}_{j+m+1}$ oluşacak, m sonsuza götürüldüğünde ise sağ yanda bilinmeyen kalmayacaktır. Bu gözlem ile sağ yanda tümlev işleçleri altında başlangıç değerlerine bağlı büyüklüklerin olduğu

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_j(t) &= e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{\ell=1}^{k}\mathscr{I}_{j+\ell-1}\right)\mathbf{x}_{j+k}(0)\right] \\
&\quad j = 0,1,2,... \qquad \textbf{(4.96)}
\end{aligned}$$

yapısı ile, çözüm gösterilebilir. Bu biçimcil bir çözümdür. Burada herhangi bir yaklaştırım olgusu kullanılmamıştır. Eğer $\mathbf{x}_j(0)$ yöneyinin açık yapısı gündeme getirilirse, çözüm,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_j(t) &= e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{\ell=1}^{k}\mathscr{I}_{j+\ell-1}\right)\mathbf{a}^{\otimes j+k}\right] \\
&\quad j = 0,1,2,... \qquad \textbf{(4.97)}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Olasılıksal evrim denkleminin çözümü olan bu çözümden, açılım noktasının 0 noktası olduğu olgusunu gündeme getirerek, yalnızca $\mathbf{x}_1(t)$ terimini kullanarak asıl başlangıç değer sorununun çözümüne geçilebilir. (4.97) bağıntısında j yerine 1 koyarak elde edilen bu çözüm,

$$\boldsymbol{\xi}(t) \equiv \mathbf{x}_1(t) = e^{t\mathbf{F}_1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{\ell=1}^{k}\mathscr{I}_\ell\right)\mathbf{a}^{\otimes k+1}\right] \qquad \textbf{(4.98)}$$

yapısında ortaya çıkmaktadır. Bu yapı, birinci kerte konik sıradan türevli denklem takımlarının başlangıç değer sorununun olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamındaki çözümü olarak adlandırılmaktadır.

4.4.4 Dikdörtgencil değiştirimlilik ve çekirdek ayrıştırılabilirliği

(4.98) bağıntısının kullanımı, ve bu bağıntıda bulunan sonsuz toplamdiziden sonlu kesmeler alımı ile kesme yaklaştıranları elde etmek olanaklıdır. Bu bölümde başka yalınlaştırımların elde edilip edilemeyeceği olgusu incelenecektir. Önce bazı öngörümlerde bulunulacak, bu öngörümlerin ne gibi kısıtlamaları gündeme getireceği bölümün sonunda vurgulanacaktır. $\mathbf{F}_2$ dizeyinin dikdörtgencil, $\mathbf{F}_1$ dizeyinin ise dördül bir dizey olduğunu göz önünde bulundurarak, çözümde görünen bu iki dizey arasında özel bir değiştirimlilik tanımına gidilmesi gündemdedir. Dikdörtgencil değiştirimlilik, tanım olarak,

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{F}_1) = \mathbf{F}_1\mathbf{F}_2 \qquad \textbf{(4.99a)}$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{I}_n) = \mathbf{F}_1\mathbf{F}_2 \qquad \textbf{(4.99b)}$$

bağıntılarının sağlanmasıdır. Bu bağıntıların sağlandığı varsayılır ise, çözümde bir çarpanlara ayırma olgusuna aşağıdaki adımlarla gidilebilir. Öncelikle, (4.99) bağıntılarındaki özelliğin, üstel işlevlerin toplamdizi açılımlarını gündeme getirerek

$$\mathbf{F}_2\left\{\mathbf{I}_n \otimes e^{t\mathbf{F}_1}\right\} = e^{t\mathbf{F}_1}\mathbf{F}_2, \qquad \textbf{(4.100a)}$$

$$\mathbf{F}_2\left\{e^{t\mathbf{F}_1} \otimes \mathbf{I}_n\right\} = e^{t\mathbf{F}_1}\mathbf{F}_2, \qquad \textbf{(4.100b)}$$

$$\mathbf{F}_2\left\{e^{t_1\mathbf{F}_1} \otimes e^{t_2\mathbf{F}_1}\right\} = e^{(t_1+t_2)\mathbf{F}_1}\mathbf{F}_2. \qquad \textbf{(4.100c)}$$

bağıntılarının da sağlanmasını sağlayacağı gündeme getirilmelidir. (4.100c) bağıntısı, (4.100c)'de eşitliğin sol yanında $\mathbf{F}_2$ dizeyinin sağında bulunan çarpanın, çarpım ve Kronecker çarpım arasındaki dağılma özelliğini kullanarak iki ayrı çarpan olarak yazılabilmesine dayanır. Daha somut olarak belirtmek gerekirse, bu çarpan, üstellerden birinin sağdan, öbürünün soldan birim dizey ile Kronecker çarpıldığı iki ayrı çarpan olarak yazılır. Daha sonra, (4.100a) ve (4.100b)'nin kullanımı ile (4.100c)'nin sağ yanı oluşturulabilir.

Bu olguların kullanımı ile, önemli bir indirgeme olarak gündeme gelen

$$\overline{\mathbf{E}}_{1,2} = \overline{\mathbf{F}}_2(t) = e^{t\mathbf{F}_1}\mathbf{F}_2, \qquad \textbf{(4.101)}$$

olgusu ortaya çıkacaktır. Dördül dizey olarak gündeme gelen üstel yapı, dikdörtgencil yapının yalnızca bir yanında görülmektedir. Buradan, bir genelleştirim ile

$$\overline{\mathbf{F}}_2\left(t_1\right)e^{t_2(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{F}_1)+t_3(\mathbf{F}_1\otimes\mathbf{I}_n)} = e^{(t_2+t_3-t_1)\mathbf{F}_1}\mathbf{F}_2 \qquad \textbf{(4.102)}$$

olgusu elde edilebilir.

4.4.5 Çekirdeğin zamana bağlı dördül çarpan ve zamandan bağımsız dikdörtgencil çarpan olarak ayrıştırımı

$\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ dizeylerinin dikdörtgencil değiştirimli olduğu varsayımı ile tümlev işleçi altındaki görüntüler

$$\mathscr{I}_1\mathbf{a}^{\otimes 2} = \left(\int_0^t d\tau e^{\tau\mathbf{F}_1}\right)\mathbf{F}_2\mathbf{a}^{\otimes 2} \qquad \textbf{(4.103)}$$

$$\mathscr{I}_1\mathscr{I}_2\mathbf{a}^{\otimes 3} = \frac{1}{2!}\left(\int_0^t d\tau e^{\tau\mathbf{F}_1}\right)^2\mathbf{F}_2\left(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_2\otimes\mathbf{I}_n\right)\mathbf{a}^{\otimes 3} \qquad \textbf{(4.104)}$$

olarak indirgenebilir. Dikdörtgencil değiştirimliliğin kullanımı ile, tümlev işleçlerinin ardışık etkisinin

$$\mathscr{I}_1\ldots\mathscr{I}_k\mathbf{a}^{\otimes k+1} = \frac{1}{k!}\left(\int_0^t d\tau e^{\tau\mathbf{F}_1}\right)^k\mathbf{T}_k\mathbf{a}^{\otimes k+1} \qquad \textbf{(4.105)}$$

olduğu gündeme getirilebilir. Daha tıkız yazım amaçlı olarak

$$\mathbf{T}_k \equiv \prod_{\ell=1}^{k}\mathbf{M}_\ell, \qquad k = 0,1,2,\ldots \qquad \textbf{(4.106)}$$

$$\mathbf{M}_j \equiv \sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_n^{\otimes k}\otimes\mathbf{F}_2\otimes\mathbf{I}_n^{\otimes j-1-k} \qquad \textbf{(4.107)}$$

tanımları ile ilerlemek olanaklıdır. Bu tanımlarda, üst kıyısı alt kıyısından küçük olan toplam işleçlerinin $\widehat{0}$ işleci, üst kıyısı alt kıyısından küçük olan çarpım işleçlerinin birim işleci üreteceği olgusu bir uylaşım olarak gündemdedir. Burada $\mathbf{T}_j$ dikdörtgencil dizey cebircil yapıdadır ve zamandan bağımsızdır. Dolayısıyla dikdörtgencil dizey cebircil yapının, dördül dizey cebircil yapıdan çarpımcıl olarak ayrıştırımı gündemdedir. $\mathbf{T}_j$ dizeyleri altsırasayıları arttıkça yatay dikdörtgencillik düzeyi de artan $\mathbf{M}_l$ dizeylerinin çarpımı ile tanımlanmıştır. $\mathbf{M}_l$ dizeyinin etki ettirimi uzay boyutu düşürücü bir öğe olarak gündeme getirilebilir. $n^l \times n^{l+1}$ bir dizey olan $\mathbf{M}_l$ dizeyi n^{l+1} boyutlu Kartezyen uzaydan öğe alıp n^l boyutlu Kartezyen uzayda öğe üretir.

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{F}_1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\int_0^t d\tau \mathrm{e}^{\tau \mathbf{F}_1} \right)^j \mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes j+1} \qquad \textbf{(4.108)}$$

bağıntısı ile verilen çözümde ise, $\mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes(j+1)}$ gündemdedir. Buradaki $\mathbf{T}_j$ dizeyleri $\mathbf{M}_j$'den $\mathbf{M}_1$'e dek dizeylerin sıralı etki ettirimlerini gündeme getirir. Bu etki ettirim, sonuç olarak, n^{j+1} boyutlu uzaydan, n boyutlu Kartezyen uzaya geçişi sağlar. Dolayısıyla boyut düşüren dizeylerin sıralı çarpımı ile gündeme gelen $\mathbf{T}_j$ dizeylerine, bu özelliğinden dolayı Irakgörür (ing: Telescope) Dizeyleri demek olanaklıdır. Özetlemek gerekirse, elde edilen olgu, Kronecker toplamdizi çözümünün, dikdörtgencil değiştirimlilik durumunda, zamana bağlı bir dördül dizey ile zamandan bağımsız bir dikdörtgencil dizeyin çarpımı olarak yazılabileceğidir.

4.4.6 Dikdörtgencil değiştirimliliğin getirilerinden yararlanmak için uzay genişletim tabanlı yöntem oluşturumu

$\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ dizeylerinin dikdörtgencil değiştirimli olması zamana bağlı ve zamandan bağımsız iki ayrı çarpan olarak yazımı sağlamaktadır. Ama bu yazım çarpanlardaki dizey niteliği korumaktadır. Yalnızca zamana bağlılık zamandan bağımsızlıktan, ve dördül nitelik dikdörtgencil nitelikten çarpımcıl olarak ayrıştırılmıştır. Buradan daha ileriye gidebilmek için uzay genişletim tabanlı bazı olgular gündeme getirilebilir. Konik sıradan türevli denklem takımının Kronecker toplamdizi gösterilimi

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{F}_2 \boldsymbol{\xi}(t)^{\otimes 2}, \qquad \boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{a} \qquad \textbf{(4.109)}$$

biçiminde idi.

4.4.6.1 Değişmezlik eklenimli uzay genişletimi

n boyutlu Kartezyen uzayda bulunan dizge yöneyine bir öğe daha ekleniminin getirilerini incelemek için

$$\mathbf{x}_{aug}(t) \equiv \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \\ \xi_{n+1}(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \xi_{n+1}(t) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.110)}$$

biçimindeki genişletilmiş dizge yöneyinin tanımlanması söz konusudur. (4.110) bağıntısında en genel biçimiyle zamana bağlı olarak gösterilse de, inceleyimde eklemlenen öğenin zamandan bağımsız olduğu öngörülmektedir. Zamana göre değişmez olan bu büyüklüğün $t = 0$ anındaki değerinin $a_{n+1}^{(in)}$ olarak gösterilmesi yeğlendiğinden dolayı, bu sayılın yöneyin sonuna eklemlenen öğe olduğu söylenebilir. Bu uzay genişletim yöntemi, Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletim (DEUG) olarak adlandırılmıştır.

İnceleyimde Kronecker dördülün öğelerinin sıralarının değiştirildiği bir yapı kullanılacaktır. Eğer

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1^T \\ \boldsymbol{\pi}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi}_{(n+1)^2}^T \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.111)}$$

biçiminde bir yerdeğiştirim dizeyi tanımlanırsa ve bu yerdeğiştirim dizeyinin yataysıraları

$$\boldsymbol{\pi}_i = \begin{cases} \mathbf{e}_{n^2+i/(n+1)} & \text{eğer } i = kn+k, k = 1,\ldots,n \\ \mathbf{e}_{i-\lfloor i/(n+1) \rfloor} & \text{eğer } i \neq kn+k, k = 1,\ldots,n \text{ ve } i < n^2+n \\ \mathbf{e}_i & \text{eğer } i \geq n^2+n \end{cases} \qquad \textbf{(4.112)}$$

biçimindeki Kartezyen birim yöneylerden oluşursa, bu dizeyin evriğinin Kronecker dördül üzerine etki ettirimi, uzay genişletimde eklemlenen öğeyi içeren terimlerin yöneyin sonuna itilmesini sağlar. İncelemede bu yapı yeğlenecektir.

(4.110) bağıntısının her iki yanının da türevlenimi ve (4.109) ile gösterilen olasılıksal evrim denkleminin açık yapısının kullanımı ile

$$\dot{\mathbf{x}}_{aug}(t) = \mathbf{F}_1^{(aug)} \mathbf{x}_{aug}(t) + \mathbf{F}_2^{(aug)} \mathbf{x}_{aug}(t)^{\otimes 2}, \qquad \mathbf{x}_{aug}(0) = \mathbf{a}_{aug} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{in} \\ a_{n+1}^{(in)} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.113)}$$

başlangıç değer sorunu elde edilebilir. Burada

$$\mathbf{F}_1^{(aug)} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \frac{1}{a_{n+1}^{(in)}} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0}_{1\times n} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}_2^{(aug)} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times n^2} & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{0}_{1\times n} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^{-1} \qquad \textbf{(4.114)}$$

dizeyleri kendini katsayı olarak göstermektedir. Bütün öğeleri sıfır olan dizey öbeklerinin boyutları altsimge ile gösterilmiştir. Bu genişletilmiş yapılar kullanılarak ilerlenebilir. Ama bazı doğrusal bağımlılıkları göz önünde bulundurarak esneklikler içeren katsayı tanımlamaları yapılabilir. Bu bağlamda aşağıdaki yöney tanımları yapılmıştır.

$$\mathbf{u}_j \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n^2\times 1} \\ \mathbf{e}_j \otimes 1 \\ \mathbf{0}_{n\times 1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{n+j} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n^2\times 1} \\ \mathbf{0}_{n\times 1} \\ 1 \otimes \mathbf{e}_j \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_{2n+1} \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n^2\times 1} \\ \mathbf{0}_{n\times 1} \\ \mathbf{0}_{n\times 1} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad j = 1, 2, ..., n; \tag{4.115}$$

$$\mathbf{v}_j \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2, ..., n, \qquad \mathbf{v}_{n+1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.116}$$

Burada $\mathbf{e}_j$, n öğeli j'inci Kartezyen birim yöneyi simgelemektedir.

(4.115) ve (4.116) sırasayılı bağıntılarda verilen yöneylerin kullanımı ile, genişletilmiş bilinmeyen yöneyi ve Kronecker dördülü üzerinde

$$\mathbf{u}_{2n+1}^T \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{x}_{aug}(t)^{\otimes 2} - \xi_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}^T \mathbf{x}_{aug}(t) = 0, \tag{4.117a}$$

$$\mathbf{u}_j^T \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{x}_{aug}(t)^{\otimes 2} - \xi_{n+1} \mathbf{v}_j^T \mathbf{x}_{aug}(t) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n \tag{4.117b}$$

$$\mathbf{u}_{n+j}^T \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{x}_{aug}(t)^{\otimes 2} - \xi_{n+1} \mathbf{v}_j^T \mathbf{x}_{aug}(t) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n \tag{4.117c}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu $(2n+1)$ sayıl eşitlik,

$$\mathbf{v}_i \mathbf{u}_{2n+1}^T \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{x}_{aug}(t)^{\otimes 2} - \xi_{n+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{n+1}^T \mathbf{x}_{aug}(t) = \mathbf{0}_{(n+1)\times 1}, \tag{4.118a}$$

$$\mathbf{v}_i \mathbf{u}_j^T \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{x}_{aug}(t)^{\otimes 2} - \xi_{n+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T \mathbf{x}_{aug}(t) = \mathbf{0}_{(n+1)\times 1}, \tag{4.118b}$$

$$\mathbf{v}_i \mathbf{u}_{n+j}^T \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{x}_{aug}(t)^{\otimes 2} - \xi_{n+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T \mathbf{x}_{aug}(t) = \mathbf{0}_{(n+1)\times 1}, \quad i = 1, \ldots, (n+1);\ j = 1, \ldots, n \tag{4.118c}$$

biçimindeki yöney eşitlikler olarak da gündeme getirilebilir. (4.118) sırasayılı eşitliklerin sol yanlarının bir doğrusal birleştirimi, (4.113) denkleminin sağ yanına, yapıyı bozmadan eklenebilir. Dolayısıyla, bu eklenim ile üretilen esneklikli genişletilmiş olasılıksal evrim denklemi

$$\dot{\mathbf{x}}_{aug}(t) = \mathbf{F}_1^{(faug)} \mathbf{x}_{aug}(t) + \mathbf{F}_2^{(faug)} \mathbf{x}_{aug}(t)^{\otimes 2}, \tag{4.119a}$$

$$\mathbf{x}_{aug}(0) = \mathbf{a}_{aug} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{in} \\ a_{n+1}^{(in)} \end{bmatrix} \tag{4.119b}$$

biçimindedir. Bu genişletim, açık olarak,

$$\mathbf{F}_1^{(faug)} \equiv \mathbf{F}_1^{(aug)} + a_{n+1}^{(in)} \sum_{i=1}^{n+1} \left(b_{i,2n+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{n+1}^T + \sum_{j=1}^{n} \left(b_{i,j} + b_{i,n+j} \right) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T \right), \qquad \textbf{(4.120a)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2^{(faug)} \equiv\ & \mathbf{F}_2^{(aug)} - \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_{i,2n+1} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_{2n+1}^T \right. \\ + & \left. \sum_{j=1}^{n} \left(b_{i,j} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_j^T + b_{i,n+j} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_{n+j}^T \right) \right) \mathbf{P}_2^{-1} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.120b)}$$

ile gösterilebilir.

4.4.6.2 $\mathbf{F}_1$ dizeyinin birim dizey ile orantılandırımı

(4.120a) bağıntısındaki b simgeleri, değiştirgeleri betimlemektedir. Bu değiştirgeler $\mathbf{F}_1^{(faug)}$ dizeyinin birim dizey ile orantılı olmasını sağlayacak biçimde seçilebilir. Dolayısıyla istenen özellik

$$\mathbf{F}_1^{(faug)} \equiv -\beta \mathbf{I}_{n+1} \qquad \textbf{(4.121)}$$

özelliğidir. Bu özellik, $\mathbf{F}_1^{(faug)}$ dizeyinin, $\mathbf{F}_2^{(faug)}$ dizeyinin öğelerinden bağımsız olarak, $\mathbf{F}_2^{(faug)}$ dizeyi ile dikdörtgencil değiştirimli olmasını sağlayacaktır. (4.121) eşitliğinin sağlanması durumunda,

$$b_{n+1,2n+1} = -\frac{\beta}{a_{n+1}^{(in)}} \qquad \textbf{(4.122a)}$$

$$b_{i,2n+1} = -\frac{[\mathbf{F}_0]_i}{a_{n+1}^{(in)}}, \qquad b_{n+1,n+i} = -b_{n+1,i}, \qquad i = 1,2,...,n \qquad \textbf{(4.122b)}$$

$$b_{i,n+j} = -\frac{\beta}{a_{n+1}^{(in)}} \delta_{i,j} - \frac{[\mathbf{F}_1]_{i,j}}{a_{n+1}^{(in)}} - b_{i,j}, \qquad i,j = 1,2,...,n \qquad \textbf{(4.122c)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2^{(faug)} =\ & \mathbf{F}_2^{(aug)} + \left(\frac{\beta}{a_{n+1}^{(in)}} \mathbf{v}_{n+1} \mathbf{u}_{2n+1}^T + \sum_{i=1}^{n} \frac{[\mathbf{F}_0]_i}{a_{n+1}^{(in)}} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_{2n+1}^T \right. \\ - & \sum_{j=1}^{n} b_{n+1,j} \mathbf{v}_{n+1} \left(\mathbf{u}_j^T - \mathbf{u}_{n+j}^T \right) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \mathbf{v}_i \left(\mathbf{u}_j^T - \mathbf{u}_{n+j}^T \right) \\ + & \left. \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{[\mathbf{F}_1]_{i,j}}{a_{n+1}^{(in)}} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_{n+j}^T + \frac{\beta}{a_{n+1}^{(in)}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_{n+i}^T \right) \mathbf{P}_2^{-1} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.123)}$$

söz konusudur. Bu eşitliklerin incelenimi ile

$$\left(\mathbf{u}_j^T - \mathbf{u}_{n+j}^T \right) \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{x}_{aug}(t)^{\otimes 2} = 0, \qquad j = 1,2,...,n \qquad \textbf{(4.124)}$$

elde edilebilir. Dolayısıyla $\mathbf{F}_2^{(faug)}$'nin anlatımında kendini gösteren bu sıfırlanımlardan yararlanarak, esneklikli genişletilmiş ikinci katsayı dizeyi için

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2^{(faug)} &= \mathbf{F}_2^{(aug)} + \left(\frac{\beta}{a_{n+1}^{(in)}} \mathbf{v}_{n+1} \mathbf{u}_{2n+1}^T + \sum_{i=1}^{n} \frac{[\mathbf{F}_0]_i}{a_{n+1}^{(in)}} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_{2n+1}^T \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{[\mathbf{F}_1]_{i,j}}{a_{n+1}^{(in)}} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_{n+j}^T + \frac{\beta}{a_{n+1}^{(in)}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_{n+i}^T \right) \mathbf{P}_2^{-1} \qquad \textbf{(4.125)}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki tek değiştirge β değiştirgesidir.

4.4.6.3 Çözüm anlatımının tümlevden arındırımı

Esneklikli genişletim bağlamında katsayı dizeyleri (4.125) ve (4.121) bağıntılarında gösterildiği biçimdedir. Bu dizeylerin kullanımı ile oluşturulacak çözüm

$$\mathbf{x}_{aug}(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\prod_{k=1}^{j} \widehat{\mathbf{J}}_k \right] \mathbf{a}_{aug}^{\otimes j+1} \qquad \textbf{(4.126)}$$

olarak gündeme gelir. (4.126) bağıntısında açık olarak gösterilmeyen tümlev işleçlerinin uygun boyutta bir yöney değerli işleve etkisi ise

$$\widehat{\mathbf{J}}_j \mathbf{g}(t) \equiv \int_0^t d\tau \, \mathrm{e}^{-\beta\tau} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{F}_2^{(faug)} \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes j-1-k} \right) \mathbf{g}(\tau) \qquad \textbf{(4.127)}$$

yapısındadır. Burada hem ilgili 0 sırasayılı katsayının sıfırlanması, hem de 1 sırasayılı katsayı dizeyinin birim dizey ile orantılı belirleniminin getirilerinden yararlanılmıştır. Bu tümlev işleçlerinin sıralı çarpımının etkisi ise, ilgili tümlevleri çözümcül olarak belirleyerek,

$$\widehat{\mathbf{J}}_1 \ldots \widehat{\mathbf{J}}_k \mathbf{a}_{aug}^{\otimes k+1} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\beta t}}{\beta} \right)^k \mathbf{T}_k \mathbf{a}_{aug}^{\otimes k+1} \qquad \textbf{(4.128)}$$

biçiminde tümlevden arınmış bir yapı olarak elde edilebilir. Buradaki ırakgörür dizeyleri olan dizeyler, bu durum için, esneklikli genişletimli dizeylerden üretilen dikdörtgencil dizeylerin çarpımından oluşmaktadır. Dolayısıyla,

$$\mathbf{T}_k \equiv \prod_{\ell=1}^{k} \mathbf{M}_\ell, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(4.129)}$$

ve

$$\mathbf{M}_j \equiv \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{F}_2^{(faug)} \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes j-1-k} \qquad \textbf{(4.130)}$$

tanımları ile, başlangıç değer sorununun çözümü

$$\mathbf{x}_{aug}(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta t}}{\beta} \right)^{j} \mathbf{T}_j \mathbf{a}_{aug}^{\otimes j+1} \qquad \textbf{(4.131)}$$

olarak elde edilebilir. Burada, bir zamana göre üstel davranış gösteren bir sayıl ile başlangıç değer yöneyinin Kronecker üslülerinin ırakgörür dizeyleri altındaki görüntülerinin toplamı olan n öğeli bir yöneyin çarpımı bulunmaktadır. Dolayısıyla, zamancıl ve dizey cebircil yapı bütünüyle ayrışmıştır.

4.4.7 Öte yalınlaştırımlar için dikdörtgencil özdeğer tanımı ve belirlenimi

4.4.7.1 Dikdörtgencil özdeğer sorunu

(4.131) bağıntısından daha da ileri gidebilmek için, bir özdeğer sorununu andıran, ama bir dikdörtgencil dizey ve yöney Kronecker üslüsü içeren

$$\mathbf{F}_2^{(faug)} \boldsymbol{\phi}^{\otimes 2} = \varphi \boldsymbol{\phi} \qquad \textbf{(4.132)}$$

sorun ele alınmalıdır [64–66]. Burada,

$$\boldsymbol{\phi} \equiv \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{\phi}} \\ \phi_{n+1} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.133)}$$

biçiminde bir bölüntülendirim kullanılmıştır. Bu eşitliği sağlayan yöneylerin bulunumu daha öte yalınlaştırımlara olanak sağlayacaktır.

4.4.7.2 Çözüm anlatımının sonsuz toplamdan arındırımı

Eğer dikdörtgencil özdeğer sorunu olarak adlandıracağımız bu sorunun, bir ya da daha çok çözümü var ise, bu durumda,

$$\mathbf{M}_k \boldsymbol{\phi}^{\otimes k+1} = k\varphi \boldsymbol{\phi}^{\otimes k}, \qquad \mathbf{T}_k \boldsymbol{\phi}^{\otimes k+1} = k!\varphi^k \boldsymbol{\phi} \qquad \textbf{(4.134)}$$

yalınlaştırımına gidilebilecektir. Tümlev işleçlerinin ardışık etkisi

$$\widehat{\mathbf{J}}_1 \ldots \widehat{\mathbf{J}}_k \boldsymbol{\phi}^{\otimes k+1} = \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta t}}{\beta} \right)^{k} \varphi^k \boldsymbol{\phi} \qquad \textbf{(4.135)}$$

olarak yazılabilecek ve eğer $\boldsymbol{\phi}$ ile $\mathbf{a}_{aug}$ örtüşüyor ise sıradan türevli denklemin çözümü sonsuz toplamdan arınmış bir biçimde

$$\mathbf{x}_{aug}(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta t}}{1 - \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta t}}{\beta} \right) \varphi} \boldsymbol{\phi} \qquad \textbf{(4.136)}$$

olarak gündeme gelecektir. Dolayısıyla ırakgörür dizeylerini oluşturan dizeylerin dikdörtgencil özdeğer sorununun çözümü, başlangıç değer sorununun çözümündeki sonsuz toplamın bir uzamcıl toplamdizi olarak yazılmasını, ve sonsuz toplam içermeyen bir çözüm gösterimini sağlamaktadır. Dolayısıyla, dikdörtgencil özdeğer sorununun çözümünün varlığı incelenmelidir. Bu da, daha somut olarak, (4.134) sırasayılı olarak verilen denklemlerdeki φ ve $\boldsymbol{\phi}$'nin alabileceği değerlerin bulunumudur. $\mathbf{M}$ dizeylerinin izgesini belirleyecek olan dizeyin $\mathbf{F}_2^{(faug)}$ dizeyi olduğunu göz önünde bulundurarak, açık yapısı

$$\mathbf{F}_2^{(faug)} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{0}_{n\times n} & \frac{1}{a_{n+1}^{(in)}}(\mathbf{F}_1+\beta\mathbf{I}_n) & \frac{1}{a_{n+1}^{(in)}}\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0}_{1\times n^2} & \mathbf{0}_{1\times n} & \mathbf{0}_{1\times n} & \frac{\beta}{a_{n+1}^{(in)}} \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^{-1} \tag{4.137}$$

olan, ikinci esneklikli genişletilmiş katsayı dizeyinin (4.132) sırasayılı bağıntıda verilen dikdörtgencil özdeğer denkleminde kullanımı,

$$\mathbf{F}_2\overline{\boldsymbol{\phi}}^{\otimes 2} + \frac{\overline{\phi}_{n+1}}{a_{n+1}^{(in)}}(\mathbf{F}_1+\beta\mathbf{I}_n)\overline{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\overline{\phi}_{n+1}^{2}}{a_{n+1}^{(in)}}\mathbf{F}_0 = \varphi\overline{\boldsymbol{\phi}} \tag{4.138a}$$

$$\frac{\overline{\phi}_{n+1}^{2}}{a_{n+1}^{(in)}}\beta = \varphi\overline{\phi}_{n+1} \tag{4.138b}$$

denklemlerini oluşturacaktır. (4.134) sırasayılı denklemlerdeki $\boldsymbol{\phi}$ yöneylerinin alabileceği değerlere dikdörtgencil özyöneyler, karşılık gelen φ sayıllarının alabileceği değerlere dikdörtgencil özdeğerler denmesi öngörülmektedir. (4.133) bağıntısında gösterilen dikdörtgencil özyöneyin $(n+1)$'inci öğesinin değerinin uzay genişletimi bağlamında dizge yöneyine eklemlenen sayıl değer olması söz konusudur. Dolayısıyla

$$\overline{\phi}_{n+1} = a_{n+1}^{(in)} \tag{4.139}$$

ve bundan dolayı

$$\varphi = \beta \tag{4.140}$$

eşitliği geçerlidir. Bunun (4.138a) bağıntısında kullanımı ile

$$\mathbf{F}_2\overline{\boldsymbol{\phi}}^{\otimes 2} + \mathbf{F}_1\overline{\boldsymbol{\phi}} + a_{n+1}^{(in)}\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}_{n\times 1} \tag{4.141}$$

biçiminde ikinci derece çokçokterimli elde edilebilir. Olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamında ve belirtilen kısıtlar altında oluşan dikdörtgencil özdeğer sorununun çözümü, n bilinmeyenli n adet doğrusal olmayan cebircil sayıl nitelikli denklem çözümünü gerekli kılmaktadır. Bu tür denklemlerin çözümü var ise, o çözümü kesin olarak bulabilecek uzişler (ing: algorithms) bulunmaktadır. Bu erekle, Gröbner taban takımı kullanan yöntemlerden yararlanılabilir. Çözüm, karmaşık değerli de olabilir. Eğer karmaşık değerli çözümler de değerlendirilirse, çözüm kümesi boş olamaz. Dolayısıyla, dikdörtgencil özdeğer sorununun en az bir çözümü bulunmaktadır. $\mathbf{F}_0$ yöneyinin bütün öğeleri sıfır olmadıkça, bu yöney $a_{n+1}^{(in)}$ sayılına bağlıdır. Eğer sıfırlanım söz konusu ise, bu değiştirgenin bütün değerleri için $\overline{\boldsymbol{\phi}}$ yöneyinin aynı kalması söz konusudur.

4.4.7.3 Başlangıç değeri ile ilgili olgular

Bu olgular, eğer $\mathbf{F}_0$ yöneyinin bütün öğeleri 0 ise, doğrusal olmayan cebircil denklem takımı çözümü ile bulunacak olan dikdörtgencil özyöneyin bir doğru üzerinde kalması anlamına gelmektedir. Diğer durumda ise $a_{n+1}^{(in)}$ tarafından betimlenen bir eğri üzerinde bulunum söz konusudur. Bu eğrilere dikdörtgencil eğriler denilebilir. Eğer başlangıç yöneyi dikdörtgencil eğri üzerinde ise yalınlaştırım söz konusu olacaktır. Ayrıca, (4.140) eşitliğinin (4.136) sırasayılı bağıntıda kullanımı ile

$$\mathbf{x}(t) = \overline{\boldsymbol{\phi}} \tag{4.142}$$

sonucu elde edilebilecektir. Bu sonuç, doğrudan başlangıç değer sorunundan da elde edilebilirdi. Bu yolla elde edilerek, çekirdek ayrıştırımı olgusu vurgulanmış olundu.

4.5 Tümlev sayıllaştırımı için ayrık çokdeğişkenliliği yükseltilmiş çarpımsal gösterilim (ÇYÇG)

4.5.1 Ayrık ÇYÇG: Tanım ve bileşenlerin belirlenimi

Çokdeğişkenliliği yükseltilmiş çarpımsal gösterilim, ya da çokdeğişkenliliği yükseltilmiş çarpımlar gösterilimi (ÇYÇG), yüksek boyutlu biçe gösterilimini (YBBG) taban alır. YBBG, Sobol tarafından önerilmiş bir çokdeğişkenli çözümcül işlev ayrıştırım yöntemidir. Bu yöntemde çokdeğişkenli işlevin, YBBG bileşenleri olarak adlandırılan değişmez işlev, bir değişkenli işlevler,...,asıl işlevin değişken sayısı kadar değişken içeren işlev olmak üzere 2^N adet işlevin toplamı olarak yazımı söz konusudur. N, asıl işlevin değişken sayısıdır. Bu kesin bir gösterilimdir ve bu gösterilimden yapılacak kesmelerin kullanımı ile yaklaştırım yöntemleri geliştirilmiştir ve geliştirilmektedir. Bileşenlerin elde edinimi tümlevler aracılığıyladır ve Hilbert uzaylarında diklik koşulunun konması ile ilintilidir. ÇYÇG ise, bileşenlerin belirli bir değişkenli işlevler ile çarpıldığı benzer bir açılımdır. Bu bir değişkenli işlevlerin kullanımının amacı, yapılacak kesmelerin asıl işlevi daha iyi yansıtmasını sağlamaktır. Bu anlamda YBBG, ÇYÇG'nin özel bir durumudur.

ÇYÇG dizi ayrıştırımı amaçlı da kullanılabilir. Bu olgu, ÇYÇG mantığının dizi ayrıştırımına aktarımı olarak değerlendirilebileceği gibi, aslında işlev ayrıştırımı için olan yapıda tümlevlerde δ işlevlerinin çarpımı olan genelleştirilmiş ağırlık kullanımına karşılık gelmektedir. Ayrıklaştırılmış yapı üzerinde uygulanan bu yönteme ayrık ÇYÇG denilmektedir. Dizey ayrıştırımı bağlamında yaklaştırım

$$\mathbf{F} \approx f_0 \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2^T + \mathbf{f}_1 \mathbf{z}_2^T + \mathbf{z}_1 \mathbf{f}_2 \tag{4.143}$$

olarak kullanılabilir. Eğer (4.143)'ün sağ yanı sol yanından çıkarılıp yeni bir bileşen elde edilip, (4.143)'ün sağ yanına eklenirse, kesin bir gösterilim elde edilmiş olunur. Bileşenler ise, diklik koşullarının kullanımı ile

$$f_0 = (\mathbf{W}_1 \mathbf{z}_1)^T \mathbf{F} \mathbf{W}_2 \mathbf{z}_2 \tag{4.144}$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{F} \mathbf{W}_2 \mathbf{z}_2 - f_0 \mathbf{z}_1 \tag{4.145}$$

$$\mathbf{f}_2 = (\mathbf{W}_1 \mathbf{z}_1)^T \mathbf{F} - f_0 \mathbf{z}_2^T \tag{4.146}$$

olarak bulunabilir. Altsırasayısı da olan $\mathbf{W}$ dizeyleri ağırlıklandırım içindir. Asal köşegeninin üzerinde toplamı 1 olan artı değerli sayılar bulunan, diğer bütün öğeleri 0 olan dizeyler olarak kullanımı söz konusudur. $\mathbf{z}$ yöneyleri ise birim boylu destek yöneyleridir ve seçimlerinde esneklik söz konusudur.

4.5.2 Çözüm anlatımının ayrık ÇYÇG ile dizey tümlev çekirdeğinden arındırımı

Olasılıksal evrim denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{t\mathbf{F}_1} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\prod_{k=1}^{j} \widehat{\mathbf{J}}_k \right] \mathbf{a}^{\otimes(j+1)} \\ &= e^{t\mathbf{F}_1} \left[\mathbf{a} + \widehat{\mathbf{J}}_1 \mathbf{a}^{\otimes 2} + \left(\sum_{j=2}^{\infty} \left[\prod_{k=1}^{j} \widehat{\mathbf{J}}_k \right] \right. \right. \\ &\times \left. \left. \mathbf{a}^{\otimes(j+1)} \right) \right] \end{aligned} \tag{4.147}$$

idi. Burada iki ana zorluk bulunmaktadır. Birincisi sonsuz terimin bulunuşu, ikincisi ise zamana bağlı tümlev işleçlerinin dizey çekirdekli oluşudur. Tümlev çekirdeklerinin bağlı olduğu $\overline{\mathbf{F}}_2(t)$ dizeyleri ayrık ÇYÇG aracılığı ile, bir yaklaştırım olarak

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}}_2(t) &\approx \gamma_0(t)\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2^T+\boldsymbol{\gamma}_1(t)\mathbf{z}_2^T+\mathbf{z}_1\boldsymbol{\gamma}_2(t),\\ &\quad \mathbf{z}_1 : n\times 1, \quad \mathbf{z}_2 : n^2\times 1,\\ &\quad \boldsymbol{\gamma}_1(t) : n\times 1,\ \boldsymbol{\gamma}_2(t) : 1\times n^2 \end{aligned} \tag{4.148}$$

yazılabilir. Sayılın bir dış çarpım ile çarpımını içeren birinci bileşenin

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{t\mathbf{F}_1}\left[\mathbf{a}+\int_0^t d\tau\overline{\mathbf{F}}_2(\tau)\mathbf{a}^{\otimes 2}\right.\\ &+ \left.\left(\sum_{j=2}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{j}\widehat{\mathbf{J}}_k\right]\mathbf{a}^{\otimes(j+1)}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.149}$$

yapısında kullanımı ile, kaba bir yaklaştırım olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{t\mathbf{F}_1}\left[\mathbf{a}+\int_0^t d\tau\left[\gamma_0^{(1)}(\tau)\mathbf{z}_1^{(1)}\mathbf{z}_2^{(1)^T}\right.\right.\\ &+ \left.\mathbf{R}^{(1)}(\tau)\right]\mathbf{a}^{\otimes 2}+\left(\sum_{j=2}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{j}\widehat{\mathbf{J}}_k\right]\right.\\ &\times \left.\left.\mathbf{a}^{\otimes(j+1)}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.150}$$

elde edilebilir. Burada $\mathbf{R}$ simgesi ile gösterilen zamana bağlı dizey, artık terim olarak nitelendirilmektedir. Bu yapı

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{t\mathbf{F}_1}\left[\mathbf{a}+\int_0^t d\tau\gamma_0^{(1)}(\tau)\mathbf{z}_1^{(1)}\mathbf{z}_2^{(1)^T}\mathbf{a}^{\otimes 2}\right.\\ &+ \int_0^t d\tau\mathbf{R}^{(1)}(\tau)\mathbf{a}^{\otimes 2}+\left(\sum_{j=2}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{j}\widehat{\mathbf{J}}_k\right]\right.\\ &\times \left.\left.\mathbf{a}^{\otimes(j+1)}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.151}$$

olarak yeniden yazılabilir. (4.127) bağıntısında görülen tümlev işleci ise bu yaklaştırım bağlamında

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{J}}_j\mathbf{g}(t) &= \int_0^t d\tau\left(\sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_n^{\otimes k}\otimes\left(\left(\gamma_0^{(j)}(\tau)\right.\right.\right.\\ &\times \left.\mathbf{z}_1^{(j)}\mathbf{z}_2^{(j)^T}\right)+\left.\mathbf{R}^{(j)}(\tau)\right)\\ &\otimes \left.\mathbf{I}_n^{\otimes(j-1-k)}\right)\mathbf{g}(\tau),\quad j=0,1,2,\ldots\end{aligned} \tag{4.152}$$

biçimindedir. ÇYÇG bağlamında yaklaştırım olarak sayıllaştırım, DEUG sonrasında oluşan yapıya uygulanabileceği gibi, DEUG kullanılmadan da gündeme getirilebilir. Destek yöneylerinde zamana bağımlılık bulunmadığı için, özenli bir inceleme ile

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{J}}_j\mathbf{g}(t) \;&\approx\; \left(\sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_n^{\otimes k}\otimes\left(\mathbf{z}_1^{(j)}\mathbf{z}_2^{(j)^T}\right)\right.\\ &\otimes\; \left.\mathbf{I}_n^{\otimes(j-1-k)}\right)\int_0^t d\tau\,\gamma_0^{(j)}(\tau)\mathbf{g}(\tau),\\ &\qquad j=0,1,2,\ldots \end{aligned}\tag{4.153}$$

bağıntısının geçerli olduğu gözlemlenebilir. Irakgörürün parçaları olan dizeyler, destek yöneylerinin ve birim dizeylerin biçiminden

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_j \;&\equiv\; \sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_n^{\otimes k}\otimes\left(\mathbf{z}_1^{(j)}\mathbf{z}_2^{(j)^T}\right)\otimes\mathbf{I}_n^{\otimes(j-1-k)}\\ &\qquad j=0,1,2,\ldots\end{aligned}\tag{4.154}$$

tanımlanırsa, zamana bağımlı tümlev işleçleri, dizeycil ve sayıl çarpan olarak iki ayrı çarpana ayrıştırılabilir. Tümlev işleci

$$\widehat{\mathbf{J}}_j\mathbf{g}(t)\approx\mathbf{M}_j\int_0^t d\tau\,\gamma_0^{(j)}(\tau)\mathbf{g}(\tau)\tag{4.155}$$

yapısındadır. Bu işleçlerin değişik sırasayılılarının art arda uygulanımında ortaya çıkan ırakgörür dizeyleri ise

$$\mathbf{T}_k=\prod_{\ell=1}^{k}\mathbf{M}_\ell,\qquad k=0,1,2,\ldots\tag{4.156}$$

olarak tanımlanabilir. Bu art arda uygulanım tıkız olarak

$$\widehat{\mathbf{J}}_1\ldots\widehat{\mathbf{J}}_k\mathbf{g}(t)\;\approx\;\mathbf{T}_k\left(\int_0^t d\tau\,\gamma_0^{(j)}(\tau)\right)^k\mathbf{g}(\tau)\tag{4.157}$$

gösterilirse, bir yaklaştırım olarak sayıllaştırımın getirisi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)\;&\approx\; e^{t\mathbf{F}_1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_0^t d\tau\,\gamma_0^{(j)}(\tau)\right)^j\\ &\times\;\mathbf{T}_j\mathbf{a}^{\otimes(j+1)}\end{aligned}\tag{4.158}$$

biçiminde, zamana bağımlı sayıl yapının, zamandan bağımsız dizeycil yapıdan koparımını gündeme getirir. Düzeltme olarak gündeme getirilebilecek olan bir sırasayılı bileşenlerin gündeme getirimi, bir yöneyin soldan ve sağdan değişik boyutlardaki birim dizeylerle Kronecker çarpılıp toplanımını gündeme getirecektir. Bu yapıların kolayca eklenimi için yöneylerin birim dizeylerle Kronecker çarpımlarından doğan **M** dizeylerinin, dizeylerin birim dizeylerle Kronecker çarpılımlarından doğan **M** dizeylerine göre ne gibi bilgisayım olumlulukları olduğu incelenmelidir.

Parçala ve yönet yaklaşımının OEY bağlamında kullanımını sağlayan ve koşutlaştırım için de bir pencere açan bu yöntemin yakınsayım incelenimi gerçekleştirilmemiştir.

4.6 Sonlu sayıda köşegenlilik durumunda çözüm üretimi

4.6.1 Sağ yan işlevlerinin ikinci dereceleleştirimi için uzay genişletim

İkinci dereceliliğin getirdiği olgu, evrim dizeyinin iki yapışık köşegen biçiminde anlatılabilmesidir. Dolayısıyla, iki yapışık köşegen dizeylerin üst Hessenberg biçimindeki dizeylere göre bulundurduğu kolaylıkların yansımaları söz konusu olacaktır. Buradaki ana amaç iki köşegenliliğin getirilerini kullanarak başlangıç değer sorununun çözümünü bir özyineleme aracılığı ile elde etmektir. Her adımda bir özikili sorunu çözerek de ilerlemek olanaklıdır, ama bilimsel yazındaki diğer yöntemlerle yarışabilecek bir olgu elde edilmek isteniyorsa, ikinci derecelilik gibi bazı getirilerden yararlanmak gerekir.

Aslında ikinci derece sağ yan işlevleri kullanmak önemli bir kısıtlama olsa da, bu yapıları incelemek yine de anlamlıdır. Bunun nedeni bazı sorunların uygun dönüşüm ve uzay genişletimler ile bu yapıya getirilmesidir. Dolayısıyla bu bölümde, uzay genişletim ile ikinci dereceleştirim için genel bir uziş (ing: algorithm) üretimine yönelik başlangıç adımları diye adlandırılabilecek olgular gündeme getirilecektir.

Burada özellikle vurgulanması gereken olgu, uzay genişletimin eşsiz olmayışıdır [42,67–70]. Seçime göre yapısal sonuçlar değişebilir. Genişletim sürecinde atılan adımlar evrik sırada olmak koşuluyla geriye döndürülürse başlangıçtaki soruna ulaşılabilir. Uzay genişletim ile denklem takımı genişletilmektedir. Bu genişletme daha kapsamlı bir denklem soyocağını (aile) yansıtır. Genişletim öncesindeki denklem ya da denklemler bu soyocağı içinde salt dar kapsamlı bir kesime karşılık gelir. Uzay genişletimde izlenilen yol ise varolan bilinmeyenlere işlevsel bağımlı ama doğrusal bağımsız yeni bilinmeyenler tanımlamaktır.

Aşağıda verilen m'inci dereceden eşüslü (ing: homogeneous) sıradan türevli denklemi inceleyelim.

$$\dot{x} = x^m \tag{4.159}$$

Sağ yan işlevinin birinci zamancıl türevi

$$\frac{d\left(x^m\right)}{dt} = mx^{m-1}x^m \tag{4.160}$$

biçimindedir. Oluşan x^{m-1} yapısının türevi ise

$$\frac{d\left(x^{m-1}\right)}{dt} = (m-1)x^{m-2}x^m \tag{4.161}$$

olarak ortaya çıkar. Bu özyineli yapıdan esinlenerek, yeni bilinmeyen tanımlamaları ile ilerlenebilir. Burada,

$$x^m \equiv x_1,\; x^{m-1} \equiv x_2,\; \ldots \tag{4.162}$$

yapısı öngörülebilir. Bu yapı eşsiz değildir. x^{2m-2}, hem x^{m-1}'in üstikisi, hem de x^{m-2} ve x^m terimlerinin çarpımı olarak gösterilebilir. Bu yapıdan genelleştirme yapılırsa,

$$\dot{x}_n = (m-n+1)\,x^{m-n}x^m, \qquad n = 1,\ldots,m \tag{4.163}$$

elde edilebilir. Bu yeni yapı, yeni tanımlanan bilinmeyenlere göre ikinci derece sağ yan işlevleri içerir. Benzer olgular, çokdeğişkenlilik durumu için de öngörülebilir. Aşağıdaki biçimde verilmiş denklem takımını göz önüne alalım.

$$\dot{x}_1(t) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j} a_k^{(1,j)} u_k^{(j)}\left(x_1(t), x_2(t)\right) \tag{4.164}$$

$$\dot{x}_2(t) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j} a_k^{(2,j)} u_k^{(j)}\left(x_1(t), x_2(t)\right) \tag{4.165}$$

İki adet birinci kerte açık eşüslü sıradan türevli denklem ve ilgili başlangıç koşullarından oluşan başlangıç değer sorununun incelenmesi için, benzer bir biçimde uzay genişletimin olanakları kullanılabilir. Buradaki m artıdeğerli tam sayısı, yapının çokdeğişkenlilik düzeyini betimler. $a_k^{(1,j)}$ ve $a_k^{(2,j)}$ ise bilinen birleştirim katsayıları olarak gündeme gelmektedir. $u_k^{(j)}\left(x_1, x_2\right)$ ise

$$u_k^{(j)}\left(x_1, x_2\right) \equiv x_1^k x_2^{j-k}, \qquad k = 0,1,2,...,j \tag{4.166}$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu terimler,

$$\dot{u}_j^{(k)}\left(x_1(t), x_2(t)\right) = \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_1}(t)\dot{x}_1(t) + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_2}(t)\dot{x}_2(t), \qquad j = 0,1,2,...,k \tag{4.167}$$

bağıntısını sağlar. Sağ yandaki terimlerin ilk çarpanlarını, bilinmeyene göre türevleyerek

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_1}(t) &= jx_1(t)^{j-1}x_2(t)^{k-j} = ju_{j-1}^{(k-1)}(x_1(t),x_2(t)), \\
\frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_2}(t) &= (k-j)x_1(t)^{j}x_2(t)^{k-j-1} = (k-j)u_{j}^{(k-1)}(x_1(t),x_2(t)) \\
& j=0,1,2,...,k \qquad \mathbf{(4.168)}
\end{aligned}
$$

elde edilebilir. Bu yapı ise, (4.167), (4.164) ve (4.165) ile bütünleştirilerek

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_j^{(k)}(x_1(t),x_2(t)) &= ju_{j-1}^{(k-1)}(x_1(t),x_2(t))\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell^{(1,k)}u_\ell^{(k)}(x_1(t),x_2(t)) \\
& +(k-j)u_{j}^{(k-1)}(x_1(t),x_2(t))\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell^{(2,k)}u_\ell^{(k)}(x_1(t),x_2(t)) \\
& j=0,1,2,...,k \qquad \mathbf{(4.169)}
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir. Burada bir kısıtlama söz konusudur. Sağ yan çokterimlilerinin bütün terimlerinin çokdeğişkenlilik düzeyinin eşit olduğu durum incelenmiştir. Genel yapıdaki sağ yan çokterimlileri için de, benzer ama daha çok terim içerecek yapılar ile ikinci derecelilik elde edilebilir. Daha yalın bir anlatım için

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}^{(1,k)} &\equiv \left[a_0^{(1,k)} \,...\, a_k^{(1,k)}\right]^T, \qquad \mathbf{a}^{(2,k)} \equiv \left[a_0^{(2,k)} \,...\, a_k^{(2,k)}\right]^T, \\
\mathbf{u}^{(k)}(t) &\equiv \left[u_0^{(k)}(x_1(t),x_2(t)) \,...\, u_k^{(k)}(x_1(t),x_2(t))\right]^T \qquad \mathbf{(4.170)}
\end{aligned}
$$

tanımlamaları yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_j^{(k)}(x_1(t),x_2(t)) &= \mathbf{u}^{(k-1)}(t)^T\left\{j\mathbf{e}_{j-1}^{(k+1)}\mathbf{a}^{(1,k)^T}+(k-j)\mathbf{e}_{j}^{(k+1)}\mathbf{a}^{(2,k)^T}\right\}\mathbf{u}^{(k)}(t) \\
&= \mathbf{u}^{(k-1)}(t)^T\mathbf{A}_j^{(k)}\mathbf{u}^{(k)}(t) \\
& k=1,2,...,m, \;\; j=0,1,2,...,k \qquad \mathbf{(4.171)}
\end{aligned}
$$

anlatımı söz konusu olur. Burada, $\mathbf{e}_j^{(k+1)}$ yöneyi, $(k+1)$ boyutlu uzayın j'inci Kartezyen birim yöneyini simgelemektedir. Eğer taban çokterimlilerine yeni bilinmeyenler gözü ile bakılırsa, yeni oluşan sıradan türevli denklem takımı ikinci derece sağ yan işlevleri içerir. $\mathbf{A}_j^{(k)}$ dizeyleri iki dış çarpımın toplamıdır. Özdüzeyleri (ing: rank) iki değerindedir. Dolayısıyla sağ sıfır uzayları $(k-1)$ doğrusal bağımsız yöney ile örtülür. Bu dizeylerin sıfır uzaylarının dolu olması, bazı indirgemelere yol açabilir ve erişilmek istenen bir amaç olarak uzay genişletimde eniyileme sorunu ile ilgili bazı bilgiler verebilir.

İkiden daha çok bilinmeyen ve denklem olduğu durumda da, eğer yapı yine benzer biçimde ise, benzer adımlarla ikinci derecelilik elde edilebilir. Aslında buradaki olgu görünenin daha ötesindedir. Eğer asıl sorundaki sağ yan işlevleri türev altında kapalı bir küme oluşturuyorsa, yeni tanımlamalar ile yeni bilinmeyenler üzerinden çokterimliliğe geçilebilir. Oluşan çokterimli sağ yan işlevleri içeren yapı da, burada belirtilen adımlarla ikinci dereceleleştirilebilir. Çalışmayı ilerletici bu olgular ile ilgili kısaca şunlar söylenebilir. Sıradan türevli denklemler için olasılıksal evrim kullanımında erek, bir İsviçre çakısından çıkarır gibi uygun aygıtı çıkararak bizi başlangıç değer sorununun çözümüne götürecek olguları yakalamaktır. Uzay genişletim ve çözümcül sürdürüm (ing: analytic continuation) başlı başına bir inceleme konusu olabileceği gibi, olasılıksal evrimin aygıtları olarak da değerlendirilebilir.

4.6.2 Sonlu sayıda köşegenli üçgen evrim dizeylerinde özyinelemeli çözüm üretimi

Eğer üçgencil evrimde çokköşegenlilik söz konusu ise

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{E}_{j,j}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{E}_{j,j+1}\mathbf{x}_{j+1}(t) + \cdots + \mathbf{E}_{j,j+m}\mathbf{x}_{j+m}(t), \ \mathbf{x}_j(0) = \mathbf{a}^{\otimes j}, \ j = 0, 1, 2, \ldots \quad \textbf{(4.172)}$$

biçiminde bir özyineleme oluşur. Bu özyineleme m'inci kerte sıradan türevli bir özyinelemedir. Bu yapıyı türevden arındırmak için yapılması gereken bağdaşık (ing: homogeneous) çözümü gündeme getirerek

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j(t) =& e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\left(\mathbf{a} - \mathbf{x}^{(r)}\right)^{\otimes j} + \int_0^t d\tau\, e^{(t-\tau)\mathbf{E}_{j,j}}\mathbf{E}_{j,j+1}\mathbf{x}_{j+1}(\tau) \\ &+ \int_0^t d\tau\, e^{(t-\tau)\mathbf{E}_{j,j}}\mathbf{E}_{j,j+2}\mathbf{x}_{j+2}(\tau) + \cdots + \int_0^t d\tau\, e^{(t-\tau)\mathbf{E}_{j,j}}\mathbf{E}_{j,j+m}\mathbf{x}_{j+m}(\tau), \\ & j = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \quad \textbf{(4.173)}$$

eşitliğini oluşturmaktır. Bu yeni özyinelemede sağ yanda tümlev işleçleri ve başlangıç koşulları ile ilintili bir terim görülmektedir. Burada $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_{j+1}$'e bağlanıyor olsaydı, özyinelemenin iki terimli olmasının getireceği olumluluklar kullanılabilirdi. Ama, burada $\mathbf{x}_{j+m}$'ye dek terimler bulunmaktadır. Bu nedenle, yeni tanımlamalar yapıp denklem takımını genişletme ederini göze alarak, iki terimliliğin getireceği olumluluklardan yararlanmaya çalışılmalıdır.

$$\mathbf{y}_j^{(1)} \equiv \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{y}_j^{(2)} \equiv \mathbf{x}_{j+1}, \quad \ldots, \quad \mathbf{y}_j^{(m)} \equiv \mathbf{x}_{j+m-1}, \quad \ldots, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \quad \textbf{(4.174)}$$

biçiminde m adet büyüklük tanımlanabilir. Katsayılarda görünen tümlevler ise iki altsırasayılı tümlev işleçleri olarak değerlendirilebilir.

$$\widehat{\mathscr{I}}_{j,k}(.) \equiv \int_0^t d\tau\, e^{(t-\tau)\mathbf{E}_{j,j}}\mathbf{E}_{j,j+k}(.), \qquad k = 1, 2, \ldots, m \quad \textbf{(4.175)}$$

(4.174)'de birinci bağıntıda j yerine $(j+1)$ yerleştirildiğinde oluşan sağ yan, ikinci bağıntıdaki sağ yana eşittir. Bu olguyu ardışık her ikili için göz önüne alarak $(m-1)$ değişik özyineleme yazılabilir. Bu $(m-1)$ özyineleme, asıl özyineleme ile bütünleştirilirse

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_j^{(1)}(t) =& \widehat{\mathscr{I}}_{j,1}\mathbf{y}_{j+1}^{(1)}(t) + \widehat{\mathscr{I}}_{j,2}\mathbf{y}_{j+1}^{(2)}(t) + \cdots + \widehat{\mathscr{I}}_{j,m}\mathbf{y}_{j+1}^{(m)}(t) + e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\left(\mathbf{a}-\mathbf{x}^{(r)}\right)^{\otimes j} \\
\mathbf{y}_j^{(2)} =& \mathbf{y}_{j+1}^{(1)} \\
\vdots =& \vdots \\
\mathbf{y}_j^{(m)} =& \mathbf{y}_{j+1}^{(m-1)}, \qquad j = 0,1,2,...
\end{aligned} \tag{4.176}$$

takımı oluşur. Bu eşitlikler, j'inci terim ile $(j+1)$'inci terimi ilişkilendiren eşitliklerdir. Dolayısıyla ilişkilendirilen terimlerin yöneysel olarak ele alınması yolu ile

$$\mathbf{y}_j(t) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{j+1}^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{j+1}^{(m)}(t) \end{bmatrix}, \qquad \widehat{\mathscr{L}_j} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{\mathscr{I}}_{j,1} & \widehat{\mathscr{I}}_{j,2} & \widehat{\mathscr{I}}_{j,3} & \cdots & \widehat{\mathscr{I}}_{j,m} \\ \mathbf{I}_{j+2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{j+3} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{j+4} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \tag{4.177}$$

tanımları yapılabilir. $\widehat{\mathscr{L}_j}$ katsayı dizeyi en üst yataysırada tümlev işleçleri, onun altındaki öbeklerde ise birim dizeyleri içermektedir. Böylece $\mathbf{y}_j(t)$, $\mathbf{y}_{j+1}(t)$'ye $\widehat{\mathscr{L}_j}$ aracılığı ile

$$\mathbf{y}_j(t) = \widehat{\mathscr{L}_j}\mathbf{y}_{j+1}(t) + e^{t\mathbf{E}_{j,j}}\left(\mathbf{a}-\mathbf{x}^{(r)}\right)^{\otimes j}\mathbf{e}_1^{(m)}, \qquad j = 0,1,2,\ldots \tag{4.178}$$

$$\mathbf{y}_j(t) = \widehat{\mathscr{L}_j}\mathbf{y}_{j+1}(t) + \left\{e^{t\mathbf{F}_1}\left(\mathbf{a}-\mathbf{x}^{(r)}\right)\right\}^{\otimes j}\mathbf{e}_1^{(m)}, \qquad j = 0,1,2,\ldots \tag{4.179}$$

biçiminde bağlanabilir. Bu iki terimli bir özyinelemedir. Burada yakınsama için belirleyici olan öğe $\widehat{\mathscr{L}_j}$ dizeyinin boyudur.

5. DEĞİŞMEZLİK EKLENİMLİ UZAY GENİŞLETİMİ YÖNTEMİNİN AYRINTILANDIRIMI

5.1 Sorunun tanımı

Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletimi (DEUG), OEY araştırımları bağlamında ilerisürülmüşse de, aslında, OEY'den bağımsız olarak, doğrudan, STDlerin başlangıç değer sorunlarına uygulanabilir. Tezin bu bölümünde önceki bölümlerde sunulan esneklik yönetiminin daha etkin bir biçiminde yapılandırımı ve tıkız sunumu bulunmaktadır. Bu amaçla, ikinci derece sağyanlı açık STDlerin aşağıda verilen genel yapısını uygulayımcıl olarak gündeme getirebiliriz.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \tag{5.1}$$

Burada, $\mathbf{x}(t)$ ile, bilinmeyen işlevleri öğe alarak alan n öğeli yöney simgelenmektedir. $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_1$, ve de, $\mathbf{F}_2$ ile simgelenen ve t bağımlılığı bulunmayan büyüklükler, sırasıyla, $n \times 1$, $n \times n$, ve de $n \times n^2$ türünde dizeylerdir. Diğer bir deyişle, $\mathbf{F}_0$ n öğeli bir değişmez yöneyi simgelerken; $\mathbf{F}_1$, n^2 öğeli değişmez öğeli bir dördül dizeyi göstermektedir. $\mathbf{F}_2$ ile simgelenen büyüklük ise değişmez öğelerden oluşan bir dikdörtgen dizeyi, ya da, n^3 öğeli (kübik) üçyönlü bir çokludizinin düzleme katlanmışını betimlemektedir.

(5.1)'e bir koşul eşlik ettirmedikçe, eşsiz çözümden sözetmek olanaklı değildir. Burada başlangıç koşullu sorunlara odaklanım istendiğinden, $\mathbf{a}$ değişmez öğelerden oluşan bir yöney olmak üzere,

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{bmatrix}^T \tag{5.2}$$

öngörümünden sözetmek gerekir.

5.2 Dördüllüğe indirgeyim

5.2.1 Uzay genişletim

(5.1) ve (5.2) ile verilen denklemlerle betimlenen dizgenin dizge yöneyinin $\mathbf{x}(t)$ olacağını görmek hiç de zor değildir. Bu denklemlere DEUG uygulanımına geçilecek olursa, dizge yöneyini aşağıdaki biçimde genişletmek gerekir.

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ a_{n+1} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Burada a_{n+1} zamanla değişmez olan bir değiştirgeyi göstermekte olup değeri bu an için belirsiz olarak düşünülmektedir. Zamana göre türev alarak (5.3)'ten aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Burada, başta verilen STD'in geçerliliğinden yararlanılmıştır. Özenli bir inceleyiş, aşağıdaki ilişkinin geçerliliğini ortaya koyar.

$$\mathbf{s}(t)^{\otimes 2} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \\ a_{n+1}\mathbf{x}(t) \\ a_{n+1}\mathbf{x}(t) \\ a_{n+1}^2 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Burada, $\mathbf{P}$ ile uygun biçimde tanımlanan $(n+1)^2 \times (n+1)^2$ türünde bir yerdeğiştirim dizeyi simgelenmektedir. Bu yerdeğiştirim ilişkisi ve yukarıdaki (5.4) eşitliği, $\mathbf{s}(t)$ ile simgelenen ve DEUG ile oluşturulan dizgenin "Dizge Yöneyi" olarak adlandırılan büyüklük için, aşağıdaki STD'nin yazılabileceği öngörümüne götürür.

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{G}_1\mathbf{s}(t) + \mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{s}(t)^{\otimes 2} \tag{5.6}$$

5.2.2 Katsayıların belirlenimi

Burada, $\mathbf{G}_1$ ve $\mathbf{G}_2$ ile, sırasıyla, $(n+1)\times(n+1)$ ve $(n+1)\times(n+1)^2$ türünde, değişmez öğeli, dizeyler gösterilmektedir. Bu dizeylerin öğelerinin, sonuçta, (5.4) ile verilen denklemle tutarlı olarak belirlenimi gerekmektedir. Bu doğrultuda ilerleyebilmek için aşağıdaki öbekçil ayrıştırım öngörümlerinden yararlanmak gerekir.

$$\mathbf{G}_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{(1)} & \mathbf{G}_{1,2}^{(1)} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{(1)} & \mathbf{G}_{2,2}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$\mathbf{G}_2 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{(2)} & \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} & \mathbf{G}_{1,3}^{(2)} & \mathbf{G}_{1,4}^{(2)} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{(2)} & \mathbf{G}_{2,2}^{(2)} & \mathbf{G}_{2,3}^{(2)} & \mathbf{G}_{2,4}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Burada öbekçil ayrıştırım, (5.7)'de $(n,1)\times(n,1)$; (5.8)'de ise $(n,1)\times(n^2,n,n,1)$ türünde öngörülmektedir. Öte yandan, (5.5)'te de dizge yöneyinin Kronecker dördülü için, tek yönlü, yani düşeyde, $(n^2,n,n,1)$ türünde bir ayrıştırım söz konusudur. Dizge yöneyinin özünde ise $(n,1)$ türünde bir ayrıştırım doğal olarak bulunmaktadır.

5.2.3 Esneklik yönetimi

Bu ayrıştırımlar (5.7) ve (5.8)'le birleşik olarak (5.6)'da bütünleştirilirse aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{(2)}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} + \left[\mathbf{G}_{1,1}^{(1)}\mathbf{x}(t) + a_{n+1}\left(\mathbf{G}_{1,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{1,3}^{(2)}\right)\right]\mathbf{x}(t) + a_{n+1}\mathbf{G}_{1,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{1,4}^{(2)} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{(2)}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} + \left[\mathbf{G}_{2,1}^{(1)}\mathbf{x}(t) + a_{n+1}\left(\mathbf{G}_{2,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{2,3}^{(2)}\right)\right]\mathbf{x}(t) + a_{n+1}\mathbf{G}_{2,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{2,4}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(5.9)}$$

Bunun sağ yanının (5.4)'ün sağ yanıyla karşılaştırımı aşağıdaki eşitliklerin yazımına olanak verir.

$$\mathbf{G}_{1,1}^{(2)}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} + \left[\mathbf{G}_{1,1}^{(1)}\mathbf{x}(t) + a_{n+1}\left(\mathbf{G}_{1,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{1,3}^{(2)}\right)\right]\mathbf{x}(t) + a_{n+1}\mathbf{G}_{1,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{1,4}^{(2)}$$

$$= \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \quad \mathbf{(5.10)}$$

$$\mathbf{G}_{2,1}^{(2)}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} + \left[\mathbf{G}_{2,1}^{(1)}\mathbf{x}(t) + a_{n+1}\left(\mathbf{G}_{2,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{2,3}^{(2)}\right)\right]\mathbf{x}(t) + a_{n+1}\mathbf{G}_{2,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{2,4}^{(2)} = 0 \quad \mathbf{(5.11)}$$

Bu eşitlikler, $\mathbf{x}(t)$ yöneyinin 0ncı, 1nci, ve de, 2nci Kronecker üslüleri üzerinde oluşturulmuş doğrusal birleşimler arasında eşitlikler tanımlamaktadır. Bunların her birinden üç öbekçil katsayı denklemi elde edilebilir.

$$\mathbf{G}_{1,1}^{(2)} = \mathbf{F}_2, \qquad \mathbf{G}_{1,1}^{(1)} + a_{n+1}\left(\mathbf{G}_{1,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{1,3}^{(2)}\right) = \mathbf{F}_1, \qquad a_{n+1}\mathbf{G}_{1,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{1,4}^{(2)} = \mathbf{F}_0 \quad \mathbf{(5.12)}$$

$$\mathbf{G}_{2,1}^{(2)} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{G}_{2,1}^{(1)} + a_{n+1}\left(\mathbf{G}_{2,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{2,3}^{(2)}\right) = \mathbf{0}, \qquad a_{n+1}\mathbf{G}_{2,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{2,4}^{(2)} = \mathbf{0} \quad \mathbf{(5.13)}$$

Bu denklemlerde bilinmeyen olarak toplamda 12 öbek bulunmaktadır. Oysa varolan denklem sayısı 6'dır. Dolayısıyla, 12 öbekten, yalnızca, altısı diğer öbekler türünden belirlenebilir. 6 öbek ise belirsiz kalır. Burada, $\mathbf{G}_1$ dizeyinin öbekleri de belirsizler arasında seçilebilir. Bu ise $\mathbf{G}_1$ dizeyinin bütünüyle belirsiz kalacağı anlamına gelir. Bu belirsizlik istenildiği gibi kullanılabilir.

5.2.4 Birinci katsayının birim dizey ile orantılandırımı

Burada birim dizeyle orantılılık yeğlenecektir. Böylece, β bu an için bilinmeyen bir değiştirge olmak üzere,

$$\mathbf{G}_1 \equiv \beta\mathbf{I}_{n+1} \quad \mathbf{(5.14)}$$

öngörümü gündeme getirilebilir. Bu öngörüm, (5.6) denklemini aşağıdaki yapıya büründürür.

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \beta \mathbf{I}_{n+1}\mathbf{s}(t) + \mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{s}(t)^{\otimes 2} \qquad \textbf{(5.15)}$$

Burada bilinmeyen üzerinde

$$\mathbf{s}(t) \equiv \mathrm{e}^{\beta t}\bar{\mathbf{s}}(t) \qquad \textbf{(5.16)}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\dot{\bar{\mathbf{s}}}(t) = \mathrm{e}^{\beta t}\mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{s}}(t)^{\otimes 2} \qquad \textbf{(5.17)}$$

elde edilir. Burada,

$$u(t) \equiv \frac{\mathrm{e}^{\beta t} - 1}{\beta} \qquad \textbf{(5.18)}$$

ile tanımlanan işlevle t'ye bağlanan yeni bir bağımsız değişkene geçilecek olursa

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{s}}(u)}{du} = \mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1}\widetilde{\mathbf{s}}(u)^{\otimes 2} \qquad \textbf{(5.19)}$$

denklemine ulaşılır. Burada $\widetilde{\mathbf{s}}(u)$ ile $\bar{\mathbf{s}}(t)$ işlevinde t'den u'ya geçişle elde edilen yapı anlatılmak istenmektedir. Açık olarak bu durum

$$\widetilde{\mathbf{s}}(u) \equiv \bar{\mathbf{s}}\left(\frac{\ln(1+\beta u)}{\beta}\right) \qquad \textbf{(5.20)}$$

tanım eşitliği ile verilebilir. Yukarıda izlenen yollara özenle bakarak (5.19)'a eşlik edecek başlangıç koşulunun

$$\widetilde{\mathbf{s}}(0) = [a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_{n+1}]^T \qquad \textbf{(5.21)}$$

eşitliğiyle verileceği yargısına güçlük çekmeden ulaşılabilir.

(5.21)'in eşlik ettiği (5.19) denkleminin sağ yanında bilinmeyene göre salt dördül terimlerin bulunduğu bir yapı var görünmektedir.

5.2.5 Dördüllüğe indirgeyim kanıtsavı

Böylece, buradan önemli bir kanıtsava erişmiş bulunmaktayız:

Dördüllüğe İndirgeyim Kanıtsavı:

Herhangi verilen özerk ikinci derece sıradan türevli denklem takımı, Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletimi'yle, bir dördül sıradan türevli denklem takımına indirgenebilir.

Bu olgu, göründüğünün ötesinde getirileri olan bir olgudur. Dördüllüğe indirgeyim kanıtsavının [69, 70] sırasayılı kaynaklardaki çıkarımlarla bütünleştirimi, aslında bütün çokçokterimli sağ yan işlevleri içeren denklem takımlarının, uzay genişletim tabanlı yöntem ile dördül sağ yan işlevleri içeren denklem takımlarına dönüştürülebileceği olgusunu üretir.

(5.19) denklemini daha yalınlaştırmak için aşağıdaki tanım yapılabilir.

$$\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1} \tag{5.22}$$

Buradaki $\mathbf{M}_1$ dizeyi, daha önceki araştırımlarımızda gündeme getirdiğimiz, bir aşamalı ırakgörüre karşılık gelmektedir. Bu tanımın yanısıra,

$$\widetilde{\mathbf{a}} = \left[a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_{n+1} \right]^T \tag{5.23}$$

tanımı da yapılırsa, artık, odak denklemimiz aşağıda verilen yapıda olur.

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{s}}(u)}{du} = \mathbf{M}_1\widetilde{\mathbf{s}}(u)^{\otimes 2}, \qquad \widetilde{\mathbf{s}}(0) = \widetilde{\mathbf{a}} \tag{5.24}$$

5.3 Özyineleyim ile çözüm

Bu denklem ve eşlik eden başlangıç koşulu aşağıdaki tümlev denkleme dönüştürülebilir.

$$\widetilde{\mathbf{s}}(u) = \widetilde{\mathbf{a}} + \int_0^u d\overline{u}\mathbf{M}_1\widetilde{\mathbf{s}}\left(\overline{u}\right)^{\otimes 2} \tag{5.25}$$

Burada ilerleyebilmek için $\widetilde{\mathbf{s}}\left(\overline{u}\right)^{\otimes 2}$ bilinmezinin belirlenimi gerekmektedir. Bu amaçla (5.24)'ten aşağıdaki denkleme geçilebilir.

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{s}}(u)^{\otimes 2}}{du} = \mathbf{M}_2\widetilde{\mathbf{s}}(u)^{\otimes 3}, \qquad \widetilde{\mathbf{s}}(0)^{\otimes 2} = \widetilde{\mathbf{a}}^{\otimes 2} \tag{5.26}$$

Burada

$$\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{I}_n \tag{5.27}$$

tanımı geçerli olup aşağıdaki tümlev denkleme geçmek de olanaklıdır.

$$\widetilde{\mathbf{s}}(u)^{\otimes 2} = \widetilde{\mathbf{a}}^{\otimes 2} + \int_0^u d\overline{u}\mathbf{M}_2\widetilde{\mathbf{s}}\left(\overline{u}\right)^{\otimes 3} \tag{5.28}$$

Bunun (5.25)'te kullanımı, bazı ara işlemler sonrasında,

$$\widetilde{\mathbf{s}}(u) = \widetilde{\mathbf{a}} + u\mathbf{M}_1\widetilde{\mathbf{a}}^{\otimes 2} + \int_0^u du_1 \int_0^{u_1} du_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\widetilde{\mathbf{s}}\left(u_2\right)^{\otimes 3} \tag{5.29}$$

ve buradan da, kesimcil tümlevleyimle,

$$\widetilde{\mathbf{s}}(u)=\widetilde{\mathbf{a}}+u\mathbf{M}_1\widetilde{\mathbf{a}}^{\otimes 2}+\int_0^u du_1\,(u-u_1)\,\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\widetilde{\mathbf{s}}\,(u_1)^{\otimes 3} \qquad \textbf{(5.30)}$$

denklemine ulaşılır. Bu kez dizge yöneyinin Kronecker üçüslüsü için denklem oluşturup denklemin sağ yanını salt dizge yöneyinin Kronecker dörtüslüsüne bağımlı duruma getirmek ve bu yolu yineleyişli olarak izleyerek aşağıdaki denkleme ulaşmak olanaklıdır.

$$\widetilde{\mathbf{s}}(u)=\sum_{k=0}^{j-1}\frac{u^k}{k!}\mathbf{T}_k\widetilde{\mathbf{a}}^{\otimes k+1}+\frac{1}{(j-1)!}\int_0^u du_1\,(u-u_1)^{j-1}\,\mathbf{T}_j\widetilde{\mathbf{s}}\,(u_1)^{\otimes j+1}, \qquad j=0,1,2,... \qquad \textbf{(5.31)}$$

Burada

$$\mathbf{T}_j=\prod_{k=1}^{j}\mathbf{M}_k, \qquad j=0,1,2,... \qquad \textbf{(5.32)}$$

$$\mathbf{M}_j=\sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_n^{\otimes k}\otimes\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{I}_n^{\otimes j-k-1}, \qquad j=1,2,... \qquad \textbf{(5.33)}$$

tanımları geçerli olup "Bir çarpımda sırasayının alacağı değerlerin enbüyüğü enküçüğünden küçükse çarpım 1 alınır" uylaşımına uyulmaktadır. $\mathbf{M}_j$ bir yatay dikdörtgen dizey olup n^{j+1} boyutlu bir Kartezyen uzaydan n^j boyutlu uzaya dönüşüm yapmakta, diğer bir deyişle, ırakgörmektedir. Bu yüzden ona, "Bir aşamalı ırakgörür" adını vermek olanaklıdır. $\mathbf{T}_j$ ise j sayıda ardışık bir aşamalı ırakgörürün toplam etkisini yansıtmakta, diğer bir deyişle "j aşamalı ırakgörür" niteliği taşımaktadır.

5.3.1 Yakınsayış inceleyimi

(5.31)'de yakınsayış durumunu saptamak için sağ yanın başındaki sonlu toplamlar üzerindeki "kesimcil toplamlar dizisinin yakınsadığını" kanıtlamak yeterlidir. Bu amaçla, altçarpımcıl bir boy tanımı kullanarak aşağıdaki boy eşitsizliklerini yazmak olanaklıdır.

$$\left\|\mathbf{M}_j\right\|\leq j\left\|\mathbf{M}_1\right\|, \qquad j=1,2,... \qquad \textbf{(5.34)}$$

$$\left\|\mathbf{T}_j\right\|\leq j!\left\|\mathbf{M}_1\right\|^j, \qquad j=1,2,... \qquad \textbf{(5.35)}$$

Bunlarsa aşağıdaki yakınsaklık koşuluna götürür.

$$\|\mathbf{M}_1\|\,\|\widetilde{\mathbf{a}}\|\,|u|<1 \qquad \textbf{(5.36)}$$

Artık, belirsiz büyüklüklerin belirlenimine geçebiliriz.

5.4 Boy dördülü enküçükleyimi ile esnekliklerin belirlenimi

Bu amaçla, (5.36) eşitsizliğinin sol yanındaki anlatımın olabildiğince küçültümünü erek olarak seçebiliriz. Bu yolda, zamandan bağımsız bir küçültüm kullanmak yeğlenecek olursa, salt $\mathbf{M}_1$ dizeyi ile $\widetilde{\mathbf{a}}$ yöneyinin boylar çarpımını en küçük değerine bastırmak gündeme getirilmelidir. Bunun için de, dördül işlevlere götürdüğü için, Frobenius boyu ile çalıştığımızı öngörelim. Bu boy için

$$\|\mathbf{M}_1\|^2 \equiv \dot{\mathrm{I}}\mathrm{z}\left(\mathbf{M}_1^T\mathbf{M}_1\right) \equiv \dot{\mathrm{I}}\mathrm{z}\left(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1^T\right) \quad \textbf{(5.37)}$$

yazılabilir. Bu tanıma göre, öbekçil ayrıştırımlı verilen bir dizeyin boyunun dördülü öbeklerin boy dördüllerinin toplamına eşittir. Açık anlatım için önce $\mathbf{M}_1$ dizeyinin öbeklerinin açık anlatımlarının verilimi gerekir. Bu doğrultuda, ilk olarak $\mathbf{G}_1$ dizeyinin öbeklerinin, (5.14) öngörümü altında, aşağıdaki gibi yazılabileceğini bağıntıya dökmekte yarar bulunmaktadır.

$$\mathbf{G}_{1,1}^{(1)} \equiv \beta\mathbf{I}_n, \qquad \mathbf{G}_{1,2}^{(1)} \equiv \mathbf{0}, \qquad \mathbf{G}_{2,1}^{(1)} \equiv \mathbf{0}, \qquad \mathbf{G}_{2,2}^{(1)} \equiv \beta \quad \textbf{(5.38)}$$

Bunların ve (5.12) ile (5.13) denklemlerinin çözümlerinin kullanımı $\mathbf{G}_2$ dizeyi için aşağıdaki açık öbekçil yapıya götürür.

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} & \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} & \frac{1}{a_{n+1}^2}\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{2,2}^{(2)} & -\mathbf{G}_{2,2}^{(2)} & -\frac{\beta}{a_{n+1}} \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.39)}$$

Buradan

$$\|\mathbf{G}_2\|^2 = \|\mathbf{F}_2\|^2 + \left\|\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 + \left\|\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 + \frac{1}{a_{n+1}^4}\|\mathbf{F}_0\|^2 + 2\left\|\mathbf{G}_{2,2}^{(2)}\right\|^2 + \frac{\beta^2}{a_{n+1}^2} \quad \textbf{(5.40)}$$

yapısı elde edilir. $\mathbf{P}$ ile simgelenen yerdeğiştirim dizeyinin bir döndürüm dizeyi oluşu onun evriğinin devriğine eşit oluşunu gerektirir. Bu ise $\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1}$ özdeşliğinden dolayı (5.40) yerine

$$\|\mathbf{M}_1\|^2 = \|\mathbf{F}_2\|^2 + \left\|\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 + \left\|\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 + \frac{1}{a_{n+1}^4}\|\mathbf{F}_0\|^2 + 2\left\|\mathbf{G}_{2,2}^{(2)}\right\|^2 + \frac{\beta^2}{a_{n+1}^2} \quad \textbf{(5.41)}$$

yazımına olanak verir. Bu ve (5.40)'ta belirsiz değiştirgeler, β ve a_{n+1} sayılları yanısıra, $n \times n$ türündeki $\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}$ dizeyinin n^2 sayıda öğesiyle $1 \times n$ türünde dizey ya da n öğeli bir yöney devriği olan $\mathbf{G}_{2,2}^{(2)}$'nin n sayıda öğesinden oluşur. Yukarıda sözü edilen eniyileyiş bu değiştirgelere göre yapılmalıdır. Bu değiştirgelerden, $\widetilde{\mathbf{a}}$'da da içerilen a_{n+1} dışındakilerin tümü yalnızca (5.40) ve (5.41)'in sağ yanlarında görünür. Diğer bir deyişle, onlar salt $\mathbf{M}_1$ dizeyinin boyunu etkileyebilirler. Bu yüzden bu boyu enküçükleyecek biçimde seçilebilirler.

$\mathbf{M}_1$ dizeyinin boy dördülünün $\mathbf{G}_{2,2}^{(2)}$ bilinmeyeninin öğelerinden herhangi birine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse o öğenin değerinin sıfır oluşu yargısına varılır. Bu ise

$$\mathbf{G}_{2,2}^{(2)} = \mathbf{0} \tag{5.42}$$

arasonucuna götürür. Bu ise (5.41) yerine

$$\|\mathbf{M}_1\|^2 = \|\mathbf{F}_2\|^2 + \left\|\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 + \left\|\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 + \frac{1}{a_{n+1}^4}\|\mathbf{F}_0\|^2 + \frac{\beta^2}{a_{n+1}^2} \tag{5.43}$$

yazımına olanak sağlar. İlerleyebilmek için β değiştirgesine göre türevleyişten yararlanabiliriz. Bu doğrultuda önce aşağıdaki eşitliği yazmakta yarar vardır.

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 + \frac{\beta^2}{a_{n+1}^2} = \frac{n+1}{a_{n+1}^2}\beta^2 - \text{İz}\left(\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right)\frac{\beta}{a_{n+1}} \\ + \text{İz}\left\{\left(\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right)^T\left(\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right)\right\}\end{aligned} \tag{5.44}$$

Buradaki anlatımın sağ yanının β'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\beta = \frac{1}{2(n+1)}\text{İz}\left(\mathbf{F}_1 - a_{n+1}\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right) \tag{5.45}$$

biçiminde bir anlatım ortaya çıkar. $\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}$ dizeyine göre eniyileme için önce aşağıdaki eşitliği yazmakta yarar bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 + \left\|\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 = \frac{n}{a_{n+1}^2}\beta^2 - \text{İz}\left(\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right)\frac{\beta}{a_{n+1}} \\ + \text{İz}\left\{\left(\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right)^T\left(\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right)\right\} + \text{İz}\left(\mathbf{G}_{1,2}^{(2)T}\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right)\end{aligned} \tag{5.46}$$

Buradaki sağ yan anlatımının ilk iki teriminde $\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}$ dizeyinin köşegen dışı öğeleri bulunmamaktadır. Dolayısıyla, bu anlatımın bu köşegen dışı öğelerden herhangi birine göre türevinin sıfıra eşitlenimi aşağıdaki arasonuca götürür.

$$\left[\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right]_{j,k} = \frac{1}{2a_{n+1}}\left[\mathbf{F}_1\right]_{j,k}, \qquad j,k = 1,2,...,n, \;\; j \neq k \tag{5.47}$$

Köşegen öğeler için elde edilen sonuçlar biraz daha değişik olmakla birlikte aynı düşüncül yoldan belirlenebilirler.

$$\left[\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right]_{j,j} = \frac{1}{2a_{n+1}}\left[\mathbf{F}_1\right]_{j,j} - \frac{\beta}{4a_{n+1}}, \qquad j = 1,2,...,n \tag{5.48}$$

Böylelikle $\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}$ dizeyinin tüm öğeleri β türünden belirlenmiş olur. Ancak, β bu anda yine de bilinmez gibi durduğundan açık olarak belirlenimine geçmek gerekir. Bu amaçla, (5.48)'in her iki yanı j üzerinde 1'den n'ye dek toplanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\text{İz}\left(\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right) = \frac{1}{2a_{n+1}}\text{İz}\left(\mathbf{F}_1\right) - \frac{n}{4a_{n+1}}\beta \tag{5.49}$$

Bu eşitlik (5.45) ile bütünleştirilirse

$$\beta = \frac{2}{7n+8}\text{İz}\left(\mathbf{F}_1\right) \tag{5.50}$$

elde edilir. Böylece, daha önceden β türünden saptanmış olan herşey belirsizlik içermeksizin saptanmış olur ve verilen bir a_{n+1} değeri için $\mathbf{M}_1$ dizey boyunun enküçüklenimi gerçekleştirilmiş olur. Geriye a_{n+1}'in belirlenimi kalır.

Bu ana dek izlenen yoldaki adımlardan sonra, (5.47), (5.48), ve de, (5.50)'nin bütünleştirimine geçilebilir ve aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathbf{G}_{1,2}^{(2)} = \frac{1}{2a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{1}{7n+8}\frac{1}{2a_{n+1}}\text{İz}\left(\mathbf{F}_1\right)\mathbf{I}_n \tag{5.51}$$

Artık, $\mathbf{M}_1$ dizeyinin boyuna dönülebilir ve belirlenmiş bulunulan tüm büyüklüklerin bulunmuş olan değerleri kullanılarak, belirsiz değiştirge olarak yalnızca a_{n+1}'e bağımlı olan bir anlatıma varılabilir. Bu yolda, önce aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\left\|\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 = \frac{1}{4a_{n+1}^2}\left\|\mathbf{F}_1\right\|^2 - \frac{(13n+16)}{(7n+8)^2}\frac{1}{4a_{n+1}^2}\text{İz}\left(\mathbf{F}_1\right)^2 \tag{5.52}$$

$$\left\|\frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\right\|^2 = \frac{1}{4a_{n+1}^2}\left\|\mathbf{F}_1\right\|^2 - \frac{(33n+48)}{(7n+8)^2}\frac{1}{4a_{n+1}^2}\text{İz}\left(\mathbf{F}_1\right)^2 \tag{5.53}$$

$$\frac{\beta^2}{a_{n+1}^2} = \frac{4}{(7n+8)^2} \frac{1}{a_{n+1}^2} \dot{\mathrm{I}}\mathrm{z}\left(\mathbf{F}_1\right)^2 \qquad \textbf{(5.54)}$$

Bunların (5.43)'te kullanımı aşağıdaki eşitliğe götürür.

$$\|\mathbf{M}_1\|^2 (a_{n+1}) = \|\mathbf{F}_2\|^2 + \frac{1}{2a_{n+1}^2} \|\mathbf{F}_1\|^2 - \frac{(23n+24)}{(7n+8)^2} \frac{1}{2a_{n+1}^2} \dot{\mathrm{I}}\mathrm{z}\left(\mathbf{F}_1\right)^2 + \frac{1}{a_{n+1}^4} \|\mathbf{F}_0\|^2 \qquad \textbf{(5.55)}$$

Burada, a_{n+1}'e olan bağımlılık boy simgesini izleyen ayıraçlar arasında yazımla vurgulanmış olup, sağ yanın ortasındaki iki terim, (5.52), (5.53), ve de, (5.54)'ün sağ yanlarının toplamından gelen, dolayısıyla, aslında, üç artı değerli anlatımın toplamı olan bir yapı taşır. Bu ise

$$\|\mathbf{F}_1\|^2 - \frac{(23n+24)}{(7n+8)^2} \dot{\mathrm{I}}\mathrm{z}\left(\mathbf{F}_1\right)^2 > 0 \qquad \textbf{(5.56)}$$

yazılabileceği anlamına gelir. Bu da, $\mathbf{M}_1$ dizeyinin boy dördülünün $1/a_{n+1}^2$ büyüklüğüne göre ikinci dereceden, salt artı katsayılı, bir çokterimli olduğunu anlatır.

a_{n+1} değerinin belirlenimi için aşağıdaki eşitliğin de gözönüne alınımı gerekir.

$$\|\widetilde{\mathbf{a}}\|^2 (a_{n+1}) = \|\mathbf{a}\|^2 + a_{n+1}^2 \qquad \textbf{(5.57)}$$

Böylece, açık yapısı aşağıda verilen büyüklük bir değişkenli bir işlevimsi olarak kullanılabilir.

$$\begin{aligned} J(a_{n+1}) &\equiv \|\mathbf{M}_1\|^2 \|\widetilde{\mathbf{a}}\|^2 (a_{n+1}) \\ &\equiv \left(\|\mathbf{F}_2\|^2 + \frac{1}{2a_{n+1}^2} \|\mathbf{F}_1\|^2 - \frac{(23n+24)}{(7n+8)^2} \frac{1}{2a_{n+1}^2} \mathrm{tr}\left(\mathbf{F}_1\right)^2 + \frac{1}{a_{n+1}^4} \|\mathbf{F}_0\|^2 \right) \\ &\times \left(\|\mathbf{a}\|^2 + a_{n+1}^2 \right). \end{aligned} \qquad \textbf{(5.58)}$$

Eniyilenmiş değeri saptamak için (5.58)'in sağ yanının a_{n+1}^2'ye göre türevlenip sıfıra eşit kılınarak elde edilen denklemin çözümü gereklidir. Bu değerin imsiz dördülkök değerinin artı ve eksi imlisi a_{n+1}'in aranan eniyileyim değerleridir. Hangisi alınırsa alınsın J'nin en küçük değeri eşdeğer kalır. Böylece, tüm belirsizlikler kaldırılıp somut anlatımlara erişilim olanağı yaratılmış olur. a_{n+1}^2'nin eniyilenen değerinin çözümcül anlatımı ilke olarak elde edilebilir olsa da uygulayımcıl olarak sayısal elde edilim yeğlenebilir. Tıpkı, üçüncü derece çokterimlilerinin köklerinin belirleniminde olduğu gibi.

6. SONUÇLAR

Bu tezde başlangıç değer sorunlarının çözümü için olasılıksal evrim yaklaşımının etkinliğinin artırımına eğilindi. En genel anlamda bir etkinlik artırımın oldukça ayrıntılı bir sorun olmasından dolayı, sağ yanı ikinci derece çokçokterimli olan denklem takımlarına odaklanıldı. Bu özel yapının olasılıksal evrim yaklaşımı ile çözümünde yakınsayım ve bilgisayım karmaşıklığı bakımından getiriler sağlayacak adımlar atıldı.

Olasılıksal evrim yaklaşımı, ayrıklaştırım tabanlı bir yöntem değildir. Ayrıklaştırım, doğası gereği, yerel bir yöntemdir. OEY ise tümeyaygın yapıdadır. Bu nedenle, ayrıklaştırım tabanlı yöntemlerin ana sorunu olan yanılgı yığılımı, OEY'de bulunmamaktadır. OEY'yi ayrıcalıklı bir yöntem yapan en önemli olgu budur. Bu tez, OEY'nin sıklıkla kullanılan yöntemlerle yarışabilir bir duruma gelmesi için yakınsayım ve bilgisayım karmaşıklığı bağlamında ne gibi adımlar atılabileceğinin bulunup, ayrıntılı olarak incelenimidir.

Geliştirilen olgular ve elde edilen bulgular aşağıdaki gibi topluluklandırılabilir.

Yöntemin sunulması ve kesin çözümün biçimsel olarak gösterilmesi bağlamında atılan adımlar ve bu adımlar ile elde edilen özgün bulgular şöyledir.

- Dolaysızüslü toplamdiziler ile Taylor toplamdizileri arasındaki ilişki bazı işleç tanımlarından yararlanılarak ayrıntılı bir biçimde ortaya kondu.

- Dolaysızüslü toplamdizilerin katsayılarının da Kronecker üslüler olduğu, Taylor açılımından değişik olarak, dolaysızüslü toplamdizilerde esneklikler bulunduğu gösterildi.

- Bu esnekliğin düzeyinin belirlenimi için izlenmesi gereken yol, somut olarak verildi.

- Eşbölünüm kanıtsavı, uzbilimcil yapıda, bir enküçükleme sorununun çözümü olarak ortaya kondu.

- Konik sağ yan işlevleri olan denklem takımlarına eğilindi. Bu durum için biçimcil çözüm elde edildi. Tümlev işleçlerinin başlangıç yöneyinin Kronecker üslülerine etkisini barındıran sonsuz bir toplamdizinin soldan bir üstel dizey ile çarpımının söz konusu olduğu gözlemlendi.

Yaklaşık çözüm (kesme yaklaştıranları) elde edinimi ile ilgili ise bulgular aşağıda verilmiştir.

- Çokbilinmeyenlilik durumundaki üçgencil ikinci derecelilik ayrıntılı olarak işlendi. Bu durum, konik sağ yan işlevi kullanımı ve ilgili toplamdizi açılımı noktası belirlenimi ile sağlanmaktadır. Oldukça kısıtlı olan bu yapıda yakınsama ile ilgili bazı kuramsal olgular söylenebilmiştir.
- Bir bilinmeyenli üçgencil ikinci derecelilik durumu için yakınsama bölgesinin sağ yan işlevlerinin kökleri tarafından belirlendiği gösterildi, bu bölge dışında da yakınsama elde edebilmek için çözümcül sürdürüm yöntemi önerildi.
- Sonlu sayıda köşegenliliğin getirileri somutlaştırıldı. Bu durumda çözüm üretimi için özyinelemeli bir çizem oluşturuldu.
- Üçgencil ikinci dereceliliğin olmadığı durumlarda, üçgencil ikinci dereceliliğin getirilerinden yararlanabilmek için uzay genişletim öngörüldü.

Bilgisayımı yalınlaştırıcı olgular bağlamında yapılanlar aşağıda belirtildiği gibidir. Yine, üçgencil ikinci derecelilik durumuna eğilinmiştir.

- Birbirinden değişik boyuttaki dizeyler için değiştirim tanımı yapıldı. Bu özelliğe dikdörtgencil değiştirimlilik adı verildi.
- Kronecker toplamdizisi katsayılarının dikdörtgencil değiştirimli olmaları durumunda biçimcil çözümdeki toplamdizide bulunan yapının çarpımcıl olarak, zamana bağımlı dördül (ing: square) çarpan ve zamandan bağımsız dikdörtgencil çarpan olarak ayrıştırılabileceği gösterildi.
- Zamana bağımlı dördül çarpanda bulunan dizey çekirdekli tümlev yapısının daha kolay işlenebilmesi için dizge yöneyinin bir sayıl ile genişletimi önerildi.
- Bu uzay genişletimli yapıyı kullanarak dolaysızüslü toplamdizinin ilk katsayısının (0 sırasayılı katsayı) sıfırlanabileceği gösterildi.

- Bu yapıdaki esnekliklerin 1 sırasayılı katsayıyı birim dizey ile orantılı yapmak için kullanılabileceği gösterildi.

- Bu seçimlerin sonucunda toplamdizinin terimlerinin tümlevden arındırılabileceği gösterildi.

- Dikdörtgencil bir dizeyin Kronecker üslü yöneye etki ettirilmesini içeren dikdörtgencil özdeğer sorunu tanımlandı.

- Bu adımlarla yalınlaştırılmış çözümdeki 2 sırasayılı katsayının dikdörtgencil özdeğer sorununun başlangıç değer sorununun çözümü ile ilintili olduğu belirlendi. Başlangıç koşulunun belirli eğriler üzerinde verilmesi durumunda, çözümün bu dizeyin dikdörtgencil özyöneyleri olacağı gösterildi.

- Başlangıç koşulu üzerinde bir kısıt koşmadan yalınlaştırım için Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi tabanlı yöntem oluşturuldu, bu yöntemin etkin biçimde kullanımı için izlenmesi gereken adımlar belirtildi.

Üçgencil olmayan ikinci derecelilik durumu için önerilen değişmezlik eklenimli uzay genişletimi bağlamında ayrıntılandırılan olgular şöyledir.

- Değişmezlik eklenimli uzay genişletimi (DEUG) yöntemi olasılıksal evrim yaklaşımından bağımsız olarak yeniden ele alındı ve esnekliklerin görünenin ötesinde olduğu belirlendi.

- DEUG bağlamında kullanılan indirgeyim, dördüllüğe indirgeyim kanıtsavı olarak ortaya kondu. Bu kanıtsav ile, bütün çokçokterimli sağ yan işlevli STD takımlarının, yalnızca ikinci derece terimler içeren çokçokterimli STD takımları olarak gösterilebileceği vurgulandı.

- Boy çözümlemesi ile OEY'nin yakınsayım bölgesi yeniden vurgulandı.

- Boy dördülü enküçükleyimi ile DEUG bağlamındaki olasılıksal evrim yaklaşımında ortaya çıkan esneklikler eniyilendi. Dolayısıyla yöntem eşsizleştirildi.

Olasılıksal evrim yaklaşımı bağlamında, sağ yanları ikinci derece çokçokterimli işlevler olan birinci kerte açık özerk sıradan türevli denklem takımlarının çözümü için etkin bir yöntem geliştirilmiştir. Bu çaba ile, önemli kanıtsavlar ileri sürülmüş, özellikle doğrusal olmama olgusunun doğrusallığın olguları kullanılarak daha iyi işlenmesi sağlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Hairer, E.**, **Nørsett, S.P. ve Wanner, G.** (2008). *Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems*, cilt 1, Springer Science & Business.

[2] **Wanner, G. ve Hairer, E.** (1991). *Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential algebraic problems*, Springer, Berlin.

[3] **Vigo-Aguiar, J. ve Ferrándiz, J.** (1998). VSVO multistep formulae adapted to perturbed second-order differential equations, *Applied mathematics letters*, *11*(3), 83–87.

[4] **Butcher, J.** (2003). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. 2003*, J. Wiley Ltd.

[5] **Stoer, J. ve Bulirsch, R.** (2002). *Introduction to numerical analysis*, cilt 12, Springer.

[6] **Coddington, E.A. ve Carlson, R.** (1997). *Linear ordinary differential equations*, SIAM.

[7] **Boyce, W.E.**, **DiPrima, R.C. ve Haines, C.W.** (1992). *Elementary differential equations and boundary value problems*, cilt 9, Wiley New York.

[8] **Lambert, J.D.** (1991). *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*, John Wiley & Sons, Inc.

[9] **Iserles, A.** (2009). *A first course in the numerical analysis of differential equations*, 44, Cambridge University Press.

[10] **Demiralp, M.** (2012). A probabilistic evolution approach trilogy, part 1: quantum expectation value evolutions, block triangularity and conicality, truncation approximants and their convergence, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*(4), 1170–1186.

[11] **Demiralp, M. ve Baykara, N.** (2012). A probabilistic evolution approach trilogy, part 2: spectral issues for block triangular evolution matrix, singularities, space extension, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*(4), 1187–1197.

[12] **Demiralp, M. ve Tunga, B.** (2012). A probabilistic evolution approach trilogy, part 3: temporal variation of state variable expectation values from Liouville equation perspective, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*(4), 1198–1210.

[13] **Demiralp, M.**, **Demiralp, E. ve Hernandez-Garcia, L.** (2012). A probabilistic foundation for dynamical systems: theoretical background and mathematical formulation, *Journal of Mathematical Chemistry*, *50*, 850–869.

[14] **Demiralp, E.**, **Demiralp, M. ve Hernandez-Garcia, L.** (2012). A probabilistic foundation for dynamical systems: phenomenological reasoning and principal characteristics of probabilistic evolution, *Journal of Mathematical Chemistry*, *50*, 870–880.

[15] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2012). A contemporary linear representation theory for ordinary differential equations: probabilistic evolutions and related approximants for unidimensional autonomous systems, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*, 58–72.

[16] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2012). A contemporary linear representation theory for ordinary differential equations: multilinear algebra in folded arrays (folarrs) perspective and its use in multidimensional case, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*, 38–57.

[17] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2011). Increasing the Qualities of the Truncated Probabilistic Evolutions by Controlling Fluctuations, *AIP Proceedings for the 9th International Conference on Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE2011)*, Halkidiki, Yunanistan, s.basımda.

[18] **Gürvit, E.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2011). Employing the Probabilistic Evolutions of ODEs in Function Inversion under Fluctuation Control, *AIP Proceedings for the 9th International Conference on Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE2011)*, Halkidiki, Yunanistan, s.basımda.

[19] **Baykara, N.A.**, **Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2011). Axial and Planar Probabilistic Evolutions in Explicit Ordinary Differential Equations, *AIP Proceedings for the 9th International Conference on Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE2011)*, Halkidiki, Yunanistan, s.basımda.

[20] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2011). Probabilistic Evolutions: The Ultimate, Natural and Exact Linearisation of ODEs, *AIP Proceedings for the 9th International Conference on Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE2011)*, Halkidiki, Yunanistan, s.basımda.

[21] **Hunutlu, F.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Truncation Approximants to Probabilistic Evolution for ODEs Having Two Diagonal Banded Evolution Matrices Under Initial Conditions: Simple Case, ***J. Vigo-Aguiar***, *(düzenleyen), Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012*, cilt 2 of *ISBN: 978-84-615-5392-1*, Murcia, İspanya, s.720–731.

[22] **Hunutlu, F.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Truncation Approximants and Their Qualities in the Probabilistic Evolution of Van der Pol Equation Under Initial Conditions, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.256–261.

[23] **Hunutlu, F.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Conicalization of the Probabilistic Evolutions for the ordinary and forced Van der Pol equation

under given initial conditions, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry*, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.39–44.

[24] **Tuna, S. ve Demiralp, M.** (2012). Certain Validations of Probabilistic Evolution Approach for Initial Value Problems, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.246–249.

[25] **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Taking Care of the Singularities in the Probabilistic Evolutionary Quantum Expectation Value Dynamics, ***J. Vigo-Aguiar**, (düzenleyen), Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012*, cilt 1 of *ISBN: 978-84-615-5392-1*, Murcia, İspanya, s.153–156.

[26] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic Evolution of the State Variable Expected Values in Liouville Equation Perspective, for a Many Particle System Interacting Via Elastic Forces, ***J. Vigo-Aguiar**, (düzenleyen), Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012*, cilt 3 of *ISBN: 978-84-615-5392-1*, Murcia, İspanya, s.1186–1197.

[27] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic evolutions in classical dynamics: Conicalization and block triangularization of Lennard-Jones systems, *AIP Conference Proceedings*, *1479*(1), 1986–1989.

[28] **Demiralp, M.** (2012). Quantum Expected Value Dynamics in Probabilistic Evolution Perspective, ***J. Vigo-Aguiar**, (düzenleyen), Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012*, cilt 2 of *ISBN: 978-84-615-5392-1*, Murcia, İspanya, s.449–459.

[29] **Demiralp, M.** (2012). Singing in the Magic Empire of Stars: Probabilistic Evolution Approach to Celestial Mechanical Problems, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.14–14, açkıcıl konuşma.

[30] **Bodur, D. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic Evolution Approach to First Order Explicit Ordinary Differential Equations for Two Unknown Case, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.203–207.

[31] **Öztürk, T.N. ve Demiralp, M.** (2012). Classical Dynamics of Isolated Univariate Quartic Anharmonic Oscillator via Probabilistic Evolution, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.224–228.

[32] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2012). Quantum Expected Value Dynamics in Probabilistic Evolution Perspective for Systems under Dynamic Weak External Fields, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.241–245.

[33] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2012). Getting Triangularity and Conicality in the Probabilistic Evolutionary Expectation Dynamics of the Purely Quartic Quantum Anharmonic Oscillator, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.268–271.

[34] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2012). Quantum Optimal Control Theoretical Observable Transitions Between State and Costate in Probabilistic Evolution Perspective, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.272–277.

[35] **Baykara, N.A.**, **Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2012). Univariate single quantum harmonic oscillator from probabilistic evolution perspective, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry*, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.27–32.

[36] **Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2012). Enhanced Multivariate Product Representation at Constancy Level in Probabilistic Evolution Approach to First Order Explicit ODEs, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.229–234.

[37] **Okan, A.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Fluctuation suppression to optimize initial data to increase the quality of truncation approximants in probabilistic evolution approach for ODEs: Basic philosophy, *AIP Conference Proceedings*, *1479*(1), 2007–2010.

[38] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2012). Analytic continuation possibilities for divergent initial vectors in the probabilistic evolution of explicit ODEs, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.181–186.

[39] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic evolution for the most general first order single unknown explicit ODEs: Autonomization, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry*, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.57–62.

[40] **Öztürk, T. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic evolution in purely second order one unknown autonomous explicit ODEs under initial conditions, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics

and Computers in Biology and Chemistry, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.63–68.

[41] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2012). Convergence of Probabilistic Evolution Truncation Approximants via Eigenfunctions of Evolution Operator, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry*, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.45–50.

[42] **Gözükırmızı, C.** (2012). Space extension possibilities for probabilistic evolution with multinomial right hand side functions, *AIP Conference Proceedings*, *1479*(1), 2019–2022.

[43] **Demiralp, M. ve Ayvaz, M.** (2013). Expectation Value Dynamics for Isolated Quantum Systems in the Fluctuationlessness Perspective: One Dimensional Symmetric Quartic Anharmonic Oscillator, *Proceedings of the 12th International Conference on Applied Computer and Applied Computational Science*, ACACOS'13, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Malezya, s.195–200.

[44] **Demiralp, M. ve Bayat, S.** (2013). Fluctuation Free Limit Behavior of the One Dimensional Quantum Systems in Space Extension Perspective: Exponentially Anharmonic Symmetric Oscillator, *Proceedings of the 12th International Conference on Applied Computer and Applied Computational Science*, ACACOS'13, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Malezya, s.201–206.

[45] **Demiralp, M. ve Kalay, B.** (2013). Singular One Dimensional Quantum Systems in Fluctuation Free Expectation Dynamics: Reciprocal Interparticle Distance Dependent Systems, *Proceedings of the 12th International Conference on Applied Computer and Applied Computational Science*, ACACOS'13, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Malezya, s.207–211.

[46] **Demiralp, M.** (2013). Enforcing the core rectangular matrices to be in most reductive structures in probabilistic evolution approach, via mathematical fluctuations, *Proceedings of the 2013 International Conference on Applied Mathematics and Computational Methods in Engineering*, s.171–178.

[47] **Demiralp, M.** (2013). Binomial expansion for the Kronecker powers of vector sums, *Recent Advances in Finite Differences and Applied and Computational Mathematics*, ISBN: 978-1-61804-184-5, s.140–145.

[48] **Demiralp, M.** (2013). Kernel separability in Kronecker power solutions for conical explicit ordinary differential equations, *Proceedings of the 13th conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, s.504–512.

[49] **Demiralp, E.**, **Hernandez Garcia, L. ve Demiralp, M.** (2013). Using population level models to characterize individual behavior with space extension

and PEA, *Proceedings of the 13th conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, s.487–495.

[50] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2013). Governing the reductive flexibilities in the Kronecker power representation of ODEs, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.120–124.

[51] **Pehlivan, A. ve Demiralp, M.** (2013). Integral Representation Varieties for Kronecker Power Series, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.155–159.

[52] **Kirkin, M.E. ve Demiralp, M.** (2013). Reciprocal approximants for Kronecker power series, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.166–170.

[53] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2013). Reducing multinomiality into conicality in autonomous explicit ODEs, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.187–191.

[54] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2013). Multivariate Hausdorff Moment Problem Arising From Quantum Mechanical Applications of Probabilistic Evolution Approach, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.201–205.

[55] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations. Part 1: Arbitrariness and equipartition theorem in Kronecker power series, *Journal of Mathematical Chemistry*, *52*(3), 866–880.

[56] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations. Part 2: Kernel separability, space extension, and, series solution via telescopic matrices, *Journal of Mathematical Chemistry*, *52*(3), 881–898.

[57] **Gözükırmızı, C.** (2013). Enhanced Multivariance Products Representation based Scalarization of Integrals Appearing in Solutions of Probabilistic Evolution Equations of Conical ODEs, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.79–84.

[58] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Constancy adding space extension for ODE sets with second degree multinomial right hand side functions, *AIP Proceedings for the 10th International Conference on Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE2014)*, cilt1618, Atina, Yunanistan, s.875–878.

[59] **Moler, C. ve Van Loan, C.** (1978). Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, *SIAM Review*, *20*(4), 801–836.

[60] **Moler, C. ve Van Loan, C.** (2003). Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later, *SIAM Review*, *45*(1), 3–49.

[61] **Demiralp, M.** (2012). Preface of the Third ICNAAM symposium on recent developments in Hilbert space tools and methodology for scientific computing, *AIP Conference Proceedings*, *1479*(1), 1981–1981.

[62] **Demiralp, M.** (2013). Constancy adding space extension (CASE) to get Kronecker Power Series kernel separability in conical explicit ordinary differential equations, *Proceedings of the 13th conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, s.496–503.

[63] **Baykara, N.A.**, **Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2011). The fluctuationlessness approach to the numerical integration of functions with a single variable by integrating Taylor expansion with explicit remainder term, *J. Math. Chem.*, *49(2)*, 393–406.

[64] **Gündoğar, Z. ve Baykara, N.** (2013). Initial Value Kronecker Power Images Under Telescope Matrix in Probabilistic Evolution Approach for One Variable Conical ODEs, *Recent advances in systems theory, signal processing and computation*, s.106–110.

[65] **Özdemir, G. ve Gürvit, E.** (2013). First degree reigenvalue problems of unfolded cubic multiway arrays: generalization, *Recent advances in systems theory, signal processing and computation*, s.121–126.

[66] **Bodur, D. ve Baykara, N.** (2013). A rather general look at the second degree rectangular eigenproblems of cubic multiway arrays, *Recent advances in systems theory, signal processing and computation*, s.103–105.

[67] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.** (2008). Conversion of PDEs to certain universal and easily handleable forms via space extension, *Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering*, MAASE'08, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.179–182.

[68] **Üsküplü Altınbaşak, S. ve Demiralp, M.** (2010). Solutions to linear matrix ordinary differential equations via minimal, regular, and excessive space extension based universalization, *Journal of Mathematical Chemistry*, *48*, 266–286, 10.1007/s10910-010-9667-5.

[69] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.** (1993). Lie algebraic factorization of multivariable evolution operators: Definition and the solution of the canonical problem, *International Journal of Engineering Science*, *31*(2), 307 – 331.

[70] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.** (1991). Factorization of certain evolution operators using lie algebra: Formulation of the method, *Journal of Mathematical Chemistry*, *6*, 165–191, 10.1007/BF01192579.

EKLER

EK A: Uzay Genişletim
EK B: Olasılıksal evrim yaklaşımı MuPAD betiği

EK A: Uzay genişletim

Uzay genişletimle özerklik elde edinimi

Buradaki incelemelerimizde özerk (ing: autonomous) STDlerle ilgileneceğiz. Bu tür bir bilinmeyenli açık (ing: explicit) denklem aşağıdaki eşitlikle verilebilir.

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t)), \qquad \xi(0) = a \tag{A.1}$$

Burada özerkliği sağlayan, sağyan işlevinin t bağımsız değişkenine açık olarak bağımlı olmamasıdır.

Özerklik varsayımı genellik yitimine neden olmaz. Bunu kanıtlamak amacıyla

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t),t), \qquad \xi(0) = a \tag{A.2}$$

denklemi gözönüne alınıp

$$\xi_1(t) \equiv \xi(t), \;\; \xi_2(t) \equiv t \tag{A.3}$$

tanımlamaları yapılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= f_1(\xi_1,\xi_2) \equiv f(\xi_1,\xi_2), \qquad && \xi_1(0) = a \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(\xi_1,\xi_2) \equiv 1, && \xi_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{A.4}$$

denklemlerine ulaşılır ve bu denklemlerin sağyan işlevlerinde t değişkenine açık bağımlılık yoktur. Böylece bilinmeyen sayısının 1 arttırılmasıyla özerklik sağlanmış olur. Bu yeni denklem takımı iki bilinmeyenli olduğundan durum uzayı da (ing: state space) iki boyutludur. Oysa, (**A.2**) denklemi bir bilinmeyenli olduğundan durum uzayının boyutu 1 değerindedir. Ama bu bir boyutlu uzayda denklem yapısı durağan değildir. Zamandan zamana değişir. Özerklik sağyan işlevlerinin ve dolayısıyla STDin durağan yani zamanla değişmez olmasını sağlar. Durum uzayı boyutundaki bu artış "Uzay Genişletim" olarak nitelendirilebilir. Dolayısıyla, uzay genişletim yapısal kolaylıklar getirici bir yaklaşım olarak ortaya çıkar.

Uzay genişletimle sıfırlanma oluşturumu

Eğer x_r $f(x)$ işlevini sıfırlayan bir konum değilse f_0 sıfırlanmayacak ve Evrim Dizeyi üst Hessenberg yapısında olacaktır. Bu durumdan kaçınmak için uzay genişletimiyle sağyan işlevlerinde sıfırlanma özelliği olan bir denklem takımına ulaşmak olanaklıdır.

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t)) \tag{A.5}$$

denkleminde

$$\xi_1(t) = \xi(t) \tag{A.6}$$

ve

$$\xi_2(t) = f(\xi(t)) \tag{A.7}$$

tanımlamaları yapılırsa

$$\dot{\xi}_2(t) = f'(\xi(t))\dot{\xi}(t) = f(\xi(t))f'(\xi(t)) \tag{A.8}$$

ve buradan

$$\dot{\xi}_2(t) = \xi_2(t)f'(\xi_1(t)) \tag{A.9}$$

ile

$$\dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) \tag{A.10}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu son iki denklemin sağyanları, artık, yeni bilinmeyenlerde, sıfırlanan konumlar barındırmaktadır. Dolayısıyla bu genişletilmiş denklemlerde Hessenberg blok yapısından kaçınılmış bulunulmaktadır.

EK B: Olasılıksal evrim yaklaşımı MuPAD betiği

```
/* ******************************** */
/* Bu betik, sag yani ikinci derece  */
/* cokcokterimli olan bir 2 bilinme- */
/* yenli dizgenin olasiliksal evrim  */
/* yaklasimi ve degismezlik eklenim- */
/* li uzay genisletimi ile cozumu i- */
/* cin atilan adimlari icermektedir. */
/* bita ve ksi eniyileyimi eklenmis- */
/* tir. Ksi, DEUG baglaminda eklem-  */
/* lenen sayildir.                   */
/* Son guncelleyim: 3 Ocak 2014      */
/* ******************************** */

DIGITS:=40:

/* ******************************** */
/* Goreturev isleclerinin tanimi     */
/* ******************************** */

D1 := (y) -> diff(y,x1):
D2 := (y) -> diff(y,x2):

/* ******************************** */
/* Sag yan islevlerinin belirtimi    */
/* ******************************** */

r1:= (x1,x2)-> x1+x2+x1*x2:
r2:= (x1,x2)-> x1-x2^2+1:

Mat := Dom::Matrix():

/* ******************************** */
/* Yonelegim yoneyinin tanimi        */
/* ******************************** */

GradYoneyi := () -> Mat([[args()]]):

/* ******************************** */
/* Sag yan isleverini iceren yoney   */
/* ******************************** */

R := ()-> Mat([r1(args()),r2(args())]):

/* ******************************** */
/* Islec yoneyinin iccarpim ile yo-  */
/* neye etki ettirimi                */
/* ******************************** */

uygula := proc(u_gy, u_f)
```

```
begin
 u_retvec:=Mat(nops(u_gy),1):
  for u_i from 1 to nops(u_gy) do
   u_retvec[u_i]:=u_gy[u_i](u_f)
  end_for:
 return(u_retvec):
end_proc:

/* ******************************** */
/* Islec yoneyinin Kronecker uslusu- */
/* nun belirlenimi                  */
/* ******************************** */

kroneckerPowerOp := proc(krpo_u,krpo_j)
begin
 if krpo_j = 0 then
  print("kroneckerPowerOp not defined for 0"):
 end_if:
 krpo_ret_vec:=krpo_u:
 if krpo_j = 1 then
  return( krpo_ret_vec ):
 end_if:

 for krpo_it1 from 2 to krpo_j do
  krpo_ret_vec2:=Mat(nops(krpo_ret_vec)
             *nops(krpo_u),1):
  krpo_ind:=1:
  for krpo_it2 from 1 to nops(krpo_ret_vec) do
   for krpo_it3 from 1 to nops(krpo_u) do
    krpo_ret_vec2[krpo_ind]:=krpo_ret_vec[krpo_it2] \
                          @ krpo_u[krpo_it3]:
    krpo_ind:=krpo_ind+1:
   end_for:
  end_for:
  krpo_ret_vec:=krpo_ret_vec2:
 end_for:
return(krpo_ret_vec2)
end_proc:


/* ******************************** */
/* Yoney Kronecker uslusunun belir-  */
/* lenimi                           */
/* ******************************** */

kroneckerPower := proc(krp_u,krp_j)
begin
 if krp_j < 0 then
  return(Mat([0])):
 elif krp_j = 0 then
  return(Mat([1])):
 end_if:
```

```
 krp_retvec := krp_u:
 for krp_i from 2 to krp_j do
  krp_retvec:=linalg::kroneckerProduct(krp_retvec
             , krp_u)
 end_for:
return(krp_retvec):
end_proc:

/* ******************************** */
/* Kronecker uslu toplamdizi katsayi */
/* belirlenimi (bir islev icin)      */
/* ******************************** */

F_bul := proc(rx, F_bul_it1)
begin
 if F_bul_it1 = 0 then
  return(evalAt(rx, (x1=0,x2=0))):
 end_if:
 tmp_F_bul:=(1/(F_bul_it1!) \
          * uygula(kroneckerPowerOp(GradYoneyi(D1,D2)
          , F_bul_it1), rx)):
 return(evalAt(tmp_F_bul,(x1=0, x2=0))):
end_proc:


/* ******************************** */
/* Butun dizey katsayilarin belirle- */
/* nimi                              */
/* ******************************** */

F_asil(0):=Mat(nops(R(x1,x2)),1):
for iter_Fa_all from 1 to nops(R(x1,x2)) do
 F_asil(0)[iter_Fa_all]:=evalAt(R(x1,x2)[iter_Fa_all]
                      , (x1=0,x2=0) ):
end_for:
for iter_F_ind from 1 to 2 do
 F_asil(iter_F_ind):=Mat(nops(R(x1,x2))^iter_F_ind
                 , nops(R(x1,x2))):
 for iter_F_all from 1 to nops(R(x1,x2)) do
  F_asil(iter_F_ind):=linalg::setCol(F_asil(iter_F_ind)
                   , iter_F_all, F_bul(R(x1,x2)[iter_F_all]
                   , iter_F_ind)):
 end_for:
end_for:

F_asil(1):=linalg::transpose(F_asil(1)):
F_asil(2):=linalg::transpose(F_asil(2)):

/* ******************************** */
/* DEUG ile genisletilmis dizey kat- */
/* sayilara gecis                    */
/* ******************************** */
```

```
F_asil_aug(1):=Mat::concatMatrix(F_asil(1), 1/ksi*F_asil(0)):
F_asil_aug(1):=Mat::stackMatrix(F_asil_aug(1)
             , Mat(1,Mat::matdim(F_asil(1))[2]+1)):


/* ******************************** */
/* En bastaki denklem sayisi tanimi  */
/* ******************************** */

n:=Mat::matdim(F_asil(1))[1]:

/* ******************************** */
/* Esneklikli genisletilmis birinci  */
/* katsayi dizeyinin belirtimi       */
/* ******************************** */

F_asil_faug(1):=bita*Mat::identity(n):

/* ******************************** */
/* Yerdegistirim dizeyi tanimi       */
/* ******************************** */

permat:=proc(pm_n)
begin
pm_retmat:=Mat(1,pm_n^2+2*pm_n+1):
pm_retmat[1,1]:=1:
 for pm_i from 2 to (pm_n+1)^2 do
  pm_temp := Mat(pm_n^2+2*pm_n+1,1):
  if (pm_i mod pm_n+1)=0 and pm_i<(pm_n^2+pm_n) then
   pm_temp[pm_n^2+pm_i/(pm_n+1),1]:=1:
  elif (pm_i<pm_n^2+pm_n) then
   pm_temp[pm_i-floor(pm_i/(pm_n+1)),1]:=1:
  else
   pm_temp[pm_i,1]:=1:
  end_if:
  pm_retmat:=Mat::stackMatrix(pm_retmat
           , linalg::transpose(pm_temp)):
 end_for:
end_proc:

/* ******************************** */
/* Ikinci katsayi dizeyinin bulunumu */
/* ******************************** */

G12(2):=1/(2*ksi)*F_asil(1)-1/(7*n+8)*1/(2*ksi)\
       *linalg::tr(F_asil(1))*Mat::identity(n):
G22(2):=Mat(1,n):
F_asil_faug(2):=Mat::concatMatrix(F_asil(2),G12(2)):
F_asil_faug(2):=Mat::concatMatrix(F_asil_faug(2)
,1/ksi*F_asil(1)-bita/ksi*Mat::identity(n)-G12(2)):
```

```
F_asil_faug(2):=Mat::concatMatrix(F_asil_faug(2)
,1/(ksi^2)*F_asil(0)):
F_asil2_alt:=Mat::concatMatrix(Mat(1,n^2+2*n),[-bita/ksi]):
F_asil_faug(2):=Mat::stackMatrix(F_asil_faug(2),F_asil2_alt):
F_asil_faug(2):=F_asil_faug(2)
              *(permat(Mat::matdim(F_asil(1))[1]))^(-1):

/* ******************************** */
/* bita belirleyim                  */
/* ******************************** */

bita := 2/(7*nops(R(x1,x2))+8)*linalg::tr(F_asil(1)):

/* ******************************** */
/* bita'nin sifirlanimi celiski ure- */
/* tebilecek bir olgudur. Dolayisiy- */
/* sifirlanima karsi onlem alimi ge- */
/* reklidir.                        */
/* ******************************** */

if bita = 0 then
 bita := bita + 0.00001:
end_if:

/* ******************************** */
/* Irakgorurun bolumlerini betimle-  */
/* yen dizeylerin tanimi            */
/* ******************************** */

M := proc(M_j)
begin
 M_rv:=0:
 M_I_n := Mat::identity(n+1):
 for M_k from 0 to M_j-1 do
  M_rv:=M_rv
       +linalg::kroneckerProduct(linalg::kroneckerProduct(
        kroneckerPower(M_I_n,
        M_k),F_asil_faug(2)), kroneckerPower(M_I_n, M_j-1-M_k)):
 end_for:
 return(M_rv):
end_proc:

/* ******************************** */
/* Irakgorur dizeylerinin tanimi    */
/* ******************************** */

T := proc(T_k)
begin
 T_ret:=1:
 for T_l from 1 to T_k do
  T_ret:=T_ret*M(T_l):
 end_for:
```

```
return(T_ret):
end_proc:

/* ******************************** */
/* Dizgenin cozumunu                */
/* ureten asil yapi                 */
/* ******************************** */

hhc := proc(hhc_k)
begin
 hhc_rv:=0:
 hhc_a_aug:=linalg::stackMatrix(Mat([a1,a2]),[ksi]):
 hhc_summand:=0:
 hhc_ret:=0:
 for hhc_j from 0 to hhc_k do
  hhc_summand:=1/(hhc_j!)\
  *(((1-exp(bita*t))/(-bita))^hhc_j)*T(hhc_j)
  *kroneckerPower(hhc_a_aug, hhc_j+1):
  hhc_ret:=hhc_ret+hhc_summand:
 end_for:
 return(exp(bita*t)*hhc_ret):
end_proc:

/* ******************************** */
/* Asil yapiya yapilan cagri. Prose- */
/* durun degistirgeni, kesme kerte-  */
/* sidir.                           */
/* ******************************** */

cozum:=hhc(4):

/* ******************************** */
/* DEUG baglaminda eklemlenen sayi-  */
/* lin eniyileyimi icin amac isle-   */
/* vimsisinin belirtimi.            */
/* ******************************** */

J:=((norm(F_asil(2),Frobenius)^2+1/2*(1/bk)\
*norm(F_asil(1),Frobenius)^2-(23*n+24)/((7*n+8)^2)\
*1/2*(1/bk)*linalg::tr(F_asil(1))^2+((1/bk)^2)
*norm(F_asil(0),Frobenius)^2))\
*(norm(Mat([a1,a2]),Frobenius)^2+bk):

Jdiff:=diff(J,bk):

/* ******************************** */
/* Baslangic kosullari burada be-   */
/* lirtilebilir, ya da simgecil du-  */
/* zeyde birakilabilir.             */
/* ******************************** */

a1:=.1:
```

```
a2:=.2:

/* ********************************* */
/* Amac islevimsisinden gelen eniyi- */
/* lenmis degerlerin dordul islev    */
/* koku belirlenimi ile bulunmasi    */
/* ********************************* */

tmpkok:=(numeric::realroots(Jdiff,bk=0..100)[2]):

/* ********************************* */
/* Eniyilenmis degerin atanimi. Sim- */
/* gecil duzeyde tutmak icin bu ata- */
/* mayi yapmamak yeterlidir.         */
/* ********************************* */

//ksi:=sqrt((tmpkok[1]+tmpkok[2])/2):

/* ********************************* */
/* Belirli t degerleri icin cozumun  */
/* ekrana yazimi                     */
/* ********************************* */

plotdataF:=[ ]:
plotdataS:=[ ]:

for it_i from 0 to 1 step 0.1 do
 print(NoNL,expr2text(it_i)."\t".expr2text(evalAt(cozum[1,1]
  ,[t=it_i]))."\t".expr2text(
  evalAt(cozum[2,1],[t=it_i]))."\n"):
 plotdataF := plotdataF . [[it_i, evalAt(cozum[1,1],[t=it_i])]]:
 plotdataS := plotdataS . [[it_i, evalAt(cozum[2,1],[t=it_i])]]:
end_for:

/* ********************************* */
/* Baslangic deger sorununun cizim   */
/* amacli yeniden belirtimi          */
/* ********************************* */

f := (t, Y) -> [Y[1]+Y[2]+Y[1]*Y[2],Y[1]-Y[2]^2+1]:
t0 := 0: Y0 := [a1, a2]:

/* ********************************* */
/* Ayriklastirim tabanli yontem ile  */
/* cozum ve cizim                    */
/* ********************************* */

p1 := plot::Ode2d(f,[i/10 $ i = 0..10], Y0
                ,PointSize = 1.5*unit::mm
                , LineWidth = 0.2*unit::mm
                , GridVisible = TRUE
                ):
```

```
p2 := plot::Function2d(cozum[1,1]
, t=0..1, LineWidth = 0.2*unit::mm
, LegendText="x1 by PEA"):
p2::LineColor := RGB::VioletRedPale:
p2d := plot::PointList2d(plotdataF
,PointColor = RGB::VioletRedPale
, PointStyle = Diamonds,PointSize = 3*unit::mm):

p3 := plot::Function2d(cozum[2,1], t=0..1
, LineWidth = 0.2*unit::mm
, LegendText="x2 by PEA"):
p3::LineColor := RGB::ManganeseBlue:
p3d := plot::PointList2d(plotdataS, PointStyle = Diamonds
,PointColor = RGB::ManganeseBlue,PointSize = 3*unit::mm):

plot(p1, p2, p2d, p3, p3d
    , OutputFile = "mypicture.jpg", LegendVisible=TRUE):

quit:

/* ********************************* */
/* Betik sonu                        */
/* ********************************* */
```

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Coşar GÖZÜKIRMIZI

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul, 1982

Adres: Necmettin Sadak Sk. Doğan Apt. No: 8 D: 17 Bakırköy, İstanbul

E-Posta: cosargozukirmizi@gmail.com, cosar.gozukirmizi@be.itu.edu.tr

Lisans: Işık Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği (2006)

Y. Lisans: İTÜ Bilişim Enstitüsü Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik (2009)

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- **Gözükırmızı, C.** ve Demiralp, M. (2014) Constancy adding space extension for ODE sets with second degree multinomial right hand side functions, *AIP Proceedings of the 10th International Conference on Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE2014)*, *1618*(1), s.875–878.

- **Gözükırmızı, C.** ve Demiralp, M. (2014) Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations, Part 1: Arbitrariness and equipartition theorem in Kronecker power series, Journal of Mathematical Chemistry, *52*(3), s.866–880.

- **Gözükırmızı, C.** ve Demiralp, M. (2014) Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations, Part 2: Kernel separability, space extension, and, series solution via telescopic matrices, Journal of Mathematical Chemistry, *52*(3), s.881–898.

- **Gözükırmızı, C.** (2013). Enhanced multivariance products representation based scalarization of integrals appearing in solutions of probabilistic evolution equations of conical ODEs, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.79–84.

- **Gözükırmızı, C.** (2012). Space extension possibilities for probabilistic evolution with multinomial right hand side functions, *AIP Conference Proceedings*, *1479*(1), s.2019–2022.

- **Gözükırmızı, C.** ve Demiralp, M. (2012). Analytic continuation possibilities for divergent initial vectors in the probabilistic evolution of explicit ODEs, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.181–186.

▪ **Gözükırmızı, C.** ve Demiralp, M. (2012). Convergence of probabilistic evolution truncation approximants via eigenfunctions of evolution operator, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12)*, WSEAS Press, Yaş, Romanya, s.45–50.