İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

SAYILABİLİR SONSUZ SIRALI DİZEYLERDE ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR OKUÇLULANDIRIMLI DİZEY GÖSTERİLİMLERİ (ÇYÇODG)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gizem ÖZDEMİR

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

ARALIK 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

SAYILABİLİR SONSUZ SIRALI DİZEYLERDE ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR OKUÇLULANDIRIMLI DİZEY GÖSTERİLİMLERİ (ÇYÇODG)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gizem ÖZDEMİR
(702121006)

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

ARALIK 2014

İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702121006 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Gizem ÖZDEMİR**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"SAYILABİLİR SONSUZ SIRALI DİZEYLERDE ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR OKUÇLULANDIRIMLI DİZEY GÖSTERİLİMLERİ (ÇYÇODG)"** başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Metin DEMİRALP** İstanbul Teknik Üniversitesi
Jüri Üyeleri :	**Doç. Dr. Adem TEKİN** İstanbul Teknik Üniversitesi
	Yrd. Doç. Dr. Özlem YILMAZ Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

Teslim Tarihi : **15 Aralık 2014**
Savunma Tarihi : **22 Ocak 2015**

Aileme...

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince bana yol gösteren ve gereksinim duyduğum her an bilgilerini cömertçe paylaşarak ilerlememi sağlayan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm çalışmalarım sırasında görüş ve yardımlarını esirgemeyen İTÜ Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Beni aralarına alarak, gerek tezime destek veren, gerekse küçük kardeş gibi sakınan, bu süreçte manevi olarak yanımda olan Ayla OKAN, Zeynep GÜNDOĞAR ve Derya BODUR'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında yanımda olan, bana olan inançlarını hiçbir zaman yitirmeyen çok sevgili aileme ve onların uzaklığında ailem olmuş arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Aralık 2014 Gizem ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

YBBG	**:** Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim
HDMR	**:** High Dimensional Model Representation
ÇYBBG	**:** Çarpımsal Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim
EMPR	**:** Enhanced Multivariance Product Representation
ÇYÇG	**:** Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi
LYBBG	**:** Evrik üstel Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim
LHDMR	**:** Logarithmic High Dimensional Model Representation
MYBBG	**:** Melez Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim
HHDMR	**:** Hybrid High Dimensional Model Representation
GYBBG	**:** Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim
GHDMR	**:** Generalized High Dimensional Model Representation
DYBBG	**:** Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim
THDMR	**:** Transformational High Dimensional Model Representation
MTEMPR	**:** Möbius Transformational Enhanced Multivariance Product Representation
ATEMPR	**:** Affine Transformational Enhanced Multivariance Product Representation
TMEMPR	**:** Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Product Representation
ÇYÇÜDG	**:** Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi
TKEMPR	**:** Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariance Product Representation
AEMPRK	**:** Arrowheading Enhanced Multivariance Product Representation for Kernel
AEMPRM	**:** Arrowheading Enhanced Multivariance Product Representation for Matrix
ÇYÇODG	**:** Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlulandırımlı Dizey Gösterilimi

SAYILABİLİR SONSUZ SIRALI DİZEYLERDE ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR OKUÇLULANDIRIMLI DİZEY GÖSTERİLİMLERİ (ÇYÇODG)

ÖZET

Bu çalışmada, Sobol'ca önerilen ve bilimcil yazında, artık, önemli bir konumda olan ve ingilizcesi "High Dimensional Model Representation (HDMR)" olan "Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim (YBBG)" yaklaşımının Demiralp ve topluluğunca önerilen ve genişletilmiş biçimi olan "Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG)" yöntemi araç olarak alınmıştır. ÇYÇG'nin özyineleyişli biçimi olarak çok yakınlarda geliştirilmiş olan üçköşegenleştirim amaçlı yeni bir olgu da, özel olarak, sayılabilir sonsuz sayıda yatay ve düşey sıraları olan dizeylerin okuçlu (ing: arrowheaded) dizey çekirdekli çarpımcıl ayrıştırıma götürülebilişine olanak sağlayacak biçimde uyarlanmış ve böylece yeni bir alanda yeni ve özgün bir gösterilim elde edilmiştir. Ortaya çıkan yeni yönteme "Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlulandırımlı Dizey Gösterilimi" adı verilmiştir.

ÇYÇG böl–yönet düşüncesine dayanan bir toplamcıl ayrıştırımdır. Çokdeğişkenli işlevlerin destek işlevi adı verilen, her biri değişik tek bir değişkene bağımlı yapılar yardımıyla daha az değişkenli işlevlerin çokdeğişkenliliği asıl işlevinkine eşdeğer olan çarpımcıl terimlerin toplamı türünden anlatımında kullanılır. Her bir toplananda (ing: summand), sırasıyla, değişmez, tek değişkenli, iki değişkenli ve bu biçimde ilerleyerek sonunda odak işlevinkine eşdeğer çok değişekenlilikte işlevlerden biri bilinmeyen çarpan olarak görünür. Her bir çarpımcıl toplanan, çokdeğişkenlilik düzeyi odaktaki işlevinkine eşdeğer olacak biçimde destek işlevi çarpanı içermek durumundadır. Çokdeğişkenliliğin yükseltimi olgusu bu gerçeği yansıtmaktadır.

Gösterilimde toplamcıl terimler arasında, odaktaki işlevin içinde uzandığı Hilbert uzayını tanımlayan iççarpım altında, toplamcıl terimlerin aralarında dikgen oldukları kanıtlanmış bir ilerisürümdür (ing: conjecture). Bu dikgenlik kullanılarak oluşturulan nitelik ölçenleri ile açılımdaki her bir toplamcıl terimin gösterilimdeki katkısı incelenebilmektedir.

ÇYÇG yönteminin özel durumlar için geliştirilmiş birçok türü vardır. Özdüzeyce baskın dizeyler için geliştirilen Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi de bunlardan biridir. Herhangi bir dizey ÇYÇÜDG ile üçköşegencil duruma getirilip, dizey yaklaştırımı elde edilebilir.

Bir dizey, özel olarak yalnızca dışçarpımlardan oluştuğunda, ÇYÇÜDG yöntemine benzer olarak geliştirilen ve savın asıl konusu olan, Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlulandırımlı Dizey Gösterilimi kullanılmaktadır. Savdaki özgün görüşün çıkış konumu bu düşünceye dayanmaktadır.

Savın ana bölümü olan dördüncü bölümde, ÇYÇODG ayrıntılı olarak anlatılmış, yöntemin özel durumlarına yer verilmiştir. Okuçlu bir dizeyin ÇYÇÜDG yardımıyla üçköşegencil duruma getirilişi ve iki yöntem arasındaki geçiş gösterilmiştir.

Savın beşinci bölümünde, yöntemlerin üzerinden uygulayışlar gerçekleştirilerek, alınan sonuçların geliştirilen yöntemin betikler aracılığıyla etkinliği incelenmiş ve çok destekleyici görünümler elde edilmiştir.

Sonuçlar bölümünde, savdaki bulgu ve başarımların incelenimi sonucunda elde edilen durumlara ve yorumlara yer verilmiştir.

ARROWHEADED ENHANCED MULTIVARIANCE PRODUCTS REPRESENTATIONS for MATRICES in DENUMERABLY INFINITE MATRICES

SUMMARY

In this work, Enhanced Multivariance Products Representation (EMPR) approach which is a Demiralp–and–his–group extension to the Sobol's High Dimensional Model Representation (HDMR) has been used as the basic tool. Even though HDMR was first proposed by Sobol its first version was constructed on the unit hypercube geometry whose edges lie on the positive halves of the cooerdinate axes while its one corner was located on the origin. It was also assuming the unit constant weight function(s). H. A. Rabitz and has changed the orthogonal geometry from Sobol's case to a general hyperprism which can stand anywhere, as an extension. In addition, semi infinite or completely infinite geometries have been allowed by Rabitz who has also added the nonunit constant weight functions as an extension even though these functions should have been the product of univariate weight functions each of which depends on a different independent variable.

EMPR which is an extended form of HDMR involves univariate support functions each of which depends on a different independent variable such that all possible univariances in the support functions appear at the end. EMPR like HDMR is not developed for only continuous entities like functions. Their discrete form have also been developed and used in practice by Demiralp and his group in addition to some other authors for the decomposition of the arrays like vectors, matrices, or multiway arrays. This work specifically focuses on the decomposition of infinite matrices involving denumerable infinitely many rows and columns. To this end the target matrix is first decomposed to the sum of certain outer products and then each outer product is treated by Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation (TMEMPR) which has been developed by Demiralp and his group. The result is a three–matrix–factor–product whose kernel (the middle factor) is an arrowheaded matrix while the pre and post factors are invertable matrices decomposed of the support vectors of TMEMPR. This new method is called as Arrowheaded Enhanced Multivariance Products Representation for Matrices. The general purpose is approximation of denumerably infinite matrices with the new method.

EMPR is a method which is based on a divide-and-conquer philosophy and is used for representing a given multivariate function in terms of less variate functions with the support functions. In the expansion, one unknown constant factor containing term, N number of unknown univariate factor involving terms, $N(N-1)/2$ number of unknown bivariate factor including terms and so on. 2^N additive terms each of which is a product which may contain at most N number of factors appear in the EMPR expansion. The main goal is to obtain the general structure of these constant, univariate and the higher variate terms of the expansion. In this work we do not focus on continuous target functions but denumerable infinitely many rows and colums involving matrices. Hence, not functions but denumerably infinite vectors and matrices are considered. Similarly

not support functions but infinite support vectors are under consideration. It is also proven that the additive terms of TMEMPR are mutually orthogonal in the denumerably infinite (separable) Cartesian space. Using this orthogonality it is possible to analyse the truncation approximation quality of TMEMPR. To this end, so–called Quality Measuerers which are the cumulative sum of ratios of the norm squares of TMEMPR summands to the norm square of TMEMPR focus function can be effectively used.

We have not mentioned specifically the weight matrix utilization in the inner products of TMEMPR even though they may be employed to get better efficiency. This works basically uses unit matrix weight. Hence, the target matrix and the support vectors must have some bounded norms to proceed through the scheme presented here.

There are various versions of EMPR method for the specific cases. Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation is one of theme, we have told something above. There are some other works in Demiralp's group under intense study. Tridiagonal Kernel EMPR is one of these extension. The purpose therein is to decompose of the kernel of an integral operator acting on univariate functions. The resulting decomposition, in denumerable infinite matrix notation, is composed of three factors the middle one of which is a denumerably infinite tridiagonal matrix. Another work in this framework has been quite recently launched and aims at the three folmat (folded matrix) factorization of a given folmat which is considered composed of as if folded rows and columns.

When the target matrix is consisted of only outer products, Arrowheaded Enhanced Multivariance Products Representation for Matrices (AEMPRM) which uses the basic philosophy of TMEMPR method almost exactly in the same way becomes the target object of the study like in this thesis.

In the fourth section, AEMPRM mehod and its special cases are described in detail. Transformation of arrowhead matrix to tridiagonal form by using TMEMPR method and relation between these two methods have also been indicated.

In the fifth section, implementation results of these methods, realized via Mathematica, and efficiency of the results are analysed.

In conclusion, the new and original findings with an emphasis on somehow revolutionary aspects in AEMPRM are given in this thesis at a state–of–art status as much as we can do within today's findings.

1. GİRİŞ

Doğadaki problemler genellikle birden çok sayıda değişkenin birbirleriyle etkileşimi ile anlatılır. Çokdeğişkenli yapılar ile çalışmak, gerek sorun çözümleyişinin güçleşmesinden gerekse karmaşıklığı arttırıp oluşan yüksek bilgisayım tümleyiminden (ing:computational cost) dolayı güçtür. Bu nedenle, çokdeğişkenli işlevleri özlerinden daha yalın yapıda işlevlere ayrıştıracak yöntemler geliştirilmiştir. Bu amaçla, 1957 yılında "On the representation of continous functions of many variables by superposition of continous functions of one variable and addition" [1] adlı makale A.N. Kolmogorov'ca yayınlanmıştır. Kolmogorov, çokdeğişkenli sürekli bir işlevin tek değişkenli işlevlerin toplamı biçiminde yazılabileceğini göstermiştir. Daha sonra, çok değişkenli sürekli bir işlevin bir değişmez işlev ve değişken sayısı ilgili işlevinkinden az olan daha yalın yapılı işlevlerin toplamı olarak yazılabileceğini Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim (ing:High Dimensional Model Representation) [3, 5–13]olarak adlandırılan yeni bir yöntem ile anlatmıştır. Kolmogorov'un bu düşüncesi doğrultusunda, 1993 yılında I.M. Sobol YBBG üzerinde duyarlılık çözümlemesi uygulayarak "Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models" [2] adlı yazısı ile YBBG yöntemini ilk olarak bilimsel yazına geçirmiştir. Sobol, birim ağırlık işlevi ile $[0,1]$ aralığında çalışmıştır. 1998 yılında ise H. Rabitz [3–7], ağırlık işlevlerinin üzerinde durarak genelleştirimler ile her türlü sonlu aşkınçokyüzlüyü kullanabilecek bir yapıyı ele almıştır. Bununla birlikte Rabitz, YBBG bileşenlerinin dikgenlik(ing:orthogonality) özellikleri üzerine M. Demiralp ile çalışmalar yapmıştır. 2003 yılında Demiralp, "High Dimensional Model Representation and Its Application Varieties" [8] adlı bildirisinde YBBG özelliklerine ve yeni YBBG türlerine yer vermiştir. Demiralp ve İTÜ Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) bu konu üzerindeki çalışmalarını sürdürmektedir.

YBBG yöntemi, çokdeğişkenli bir işlevin özündekinden daha az değişkenli birbirine dik işlevlerin sonlu toplamı olarak yazılabileceği olgusuna dayanmaktadır. Çalışılan N değişkenli işlev, $[a,b]^N \equiv [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_N,b_N]$ biçiminde alt aralıkların kartezyen çarpımı olarak tanımlanan, N boyutlu bir aşkınçokyüzlü üzerinde tanımlanmıştır. N değişkenli bir işlevin YBBG açılımı, bir değişmez işlev, N sayıda tek bağımsız değişkenli işlev, $N(N-1)/2$ sayıda iki bağımsız değişkenli işlev ve benzer biçimde ilerlenilerek, giderek artan sayıda bağımsız değişkene bağlı 2^N sayıda terim içeren bir sonlu toplam ile gösterilebilir. Her bir YBBG bileşeninin belirlenimi için çok katlı belirli tümlevlere gereksinim duyulmaktadır. Amaç tüm bileşenleri açık yapıları ile yazabilmektir. Ancak N boyutta belirleyişler gerçekleştiriminin birçok güçlüğü oluşu nedeniyle kesme yaklaşımına başvurulmuştur. Gerçekleştirilen birçok araştırım sonucunda birinci ve ikinci kerteden (mertebeden) yaklaştırımın bileşenleri anlatabilmek için yeterli olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum YBBG yönteminin, ilgili işleve özünden daha az sayıda değişkene bağlı işlevler ile yaklaştırımın da etkili bir yöntem olduğunu göstermiştir. Bileşenlerin eşsiz olarak belirlenimi için bir takım ön koşulların oluşturumu gerekmektedir. Kökeninde bunlar sıfırlanım koşullarıdır ve "Sobol Koşulları" olarak da bilinirler.

YBBG temel olarak, toplamcıl yapısı baskın olan çokdeğişkenli işlevlere dayalı bir yöntem olarak öne sürülmüştür. Bu nedenle, toplamcıl olmayan yapıların gösterilimi için yeni yöntemlerin gerekliliği görüşü oluşmuştur. En genel durum olan Yalın YBBG, baskın olarak çarpımcıl işlevler için Çarpımcıl YBBG(ÇYBBG) [11–13], eksi olmayan çok değişkenli işlevin doğal evrik üsteli için Evriküstel (ing:Logarithm) YBBG(LYBBG) [14, 15], bütünüyle toplamcıl ya da tamamen çarpımcıl olmayan işlevler için ise Melez YBBG(MYBBG) [14, 16, 18] yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerde ağırlık işlevi çarpımcıl yapıda alınmıştır. Genelleştirmek adına Genelleştirilmiş YBBG [19], yüksek boyutlu girdi-çıktı dizgeleri için Kesimcil YBBG [20], Kesimcil YBBG'nin genelleştirilmiş durumu Çoklu Kesimcil YBBG [21], girdilerin uzaya düzensiz olarak saçılmış olduğu durumlar için Seçkisiz Örnekleyişli YBBG [22, 23] ve işlevin herhangi bir dönüşüm altındaki görüntüsü kullanılarak yazılan Dönüşümcül YBBG [24–27] diğer türler arasında yer almaktadır.

Bir diğer YBBG türü Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi [28–31] yöntemidir. Yöntem 2. bölümde ayrıntılı olarak verilmiştir. ÇYÇG yönteminde, YBBG'ye benzer olarak, çokdeğişkenli bir işlev birbirine dik ve bağımsız, değişken sayısı giderek artan daha yalın yapılı işlevler aracılığı ile anlatılmaktadır. Burada da var olan çok katlı tümlev belirleyişleri, tümdeğeri yüksek işlemler olduğu için, ÇYÇG yöntemi de YBBG gibi yaklaştırım yöntemi olarak düşünülmektedir. Amaç, ilgili işlevi daha az sayıda bileşen kullanarak en iyi biçimde gösterilmektir. Genel eğilim, en çok iki değişkene bağlı bileşenler düzeyinde kesme yaklaştırımı uygulayarak, olabildiğince yüksek nitelikli yaklaştırımlar gerçekleştirmektir.

Bileşenlerin belirlenimi için YBBG'ye benzer olarak ÇYÇG'de de ön koşullar tanımlanmıştır. YBBG yönteminden değişik olarak, açılımın niteliğini yükseltme amaçlı, destek işlevi adı verilen yapılar kullanılmaktadır. Yöntemin etkinliği açısından destek işlevleri çarpımcıl yapıda seçilmiştir.

Çokdeğişkenli işlevin yapısına göre biçimlendirilip geliştirilen ÇYÇG türleri vardır. Dönüşümcül ÇYÇG, ilgili işlevin özüne değil, herhangi bir dönüşüm altındaki görüntüsüne ÇYÇG ile yaklaştırım yapılıp, sonrasında elde edilen yaklaştıran işlevinin evrik dönüşümü ile ilgili işleve nitelikli bir yaklaştırım yapmaya dayanmaktadır. Örnek olarak, Möbius Dönüşümcül YBBG(MTEMPR) [32, 33], Birinci Derece Çokterimli Dönüşümcül YBBG(ATEMPR) [34], özdüzeyce baskın dizeyler için Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi(TMEMPR) [35–38], Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi(TKEMPR) [39, 40], Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlulandırımlı Dizey Gösterilimi (AEMPRM) ve Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlulandırımlı Çekirdek Gösterilimi(AEMPRK) [40] gösterilebilir.

Savın 2. bölümünde iççarpım uzayında herhangi bir yöney takımın dikgenleştiriminden, sonsuz boyutlu dizeylerde dikgen ayrıştırımdan söz edilmiştir.

3. bölümde, ÇYÇG yönteminin genel yapısı, bileşenlerin elde edilişi, nitelik ölçenleri ve ÇYÇG yaklaştırımlarından söz edilmiştir. Bu bölümde ayrıca ÇYÇG türlerinden biri olan ÇYÇÜDG yöntemi ayrıntılı olarak verilmiştir.

4. bölümde tezin ana konusu olan Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlulandırımlı Dizey Gösterilimi (ÇYÇODG) incelenmiştir. Sonsuz boyutlu dizeylerin ayrıştırımı göz önünde bulundurulmuştur. Ek olarak herhangi bir okuçlu dizeyden üçköşegencil yapıya nasıl geçiş yapılabileceği anlatılmıştır.

5. bölümde ise, ÇYÇÜDG, ÇYÇODG ve okuçlu bir yapıdan üçköşegencil bir yapıya geçiş durumlarını inceleyen uygulamalara yer verilmiştir.

Ekler bölümünde ise, çalışmada kullanılmış olan Riemann Zeta işlevlerinin Fourier serileri ile elde ediliş biçimleri ve bu işlevlerin dikgenleştirimi verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 İççarpım uzayında dikgenleştirim

Hilbert uzayında, birbirine dik olmak koşulu olmayan ama doğrucul bağımsız olan n öğeli yöneyler takımı alalım. Bu uzay, içerisinde iççarpım tanımlanabilen ayrıştırılabilir bir uzaydır. Dolayısıyla burada en çok sayılabilir sonsuzlukta yöney barındırabilir. Sonlu sayıda da olabilir, ama genellikle Hilbert uzayları sonsuz uzaylardır ve kesme yaklaştırımı uygulayabilmek için Hilbert uzaylarının altuzayları ile çalışılır.

$$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in \mathscr{H} \tag{2.1}$$

Doğrucul bağımsızlığın sınayış tabanlı tanımlayışına girmeden, iççarpım uzayının özelliklerini ve doğrucul cebir kullanarak, doğrucul bağımsızlığı somut bir biçimde görebilmek olanaklıdır. Burada, bunun ötesinde, yöney takımının doğrucul bağımsızlık düzeyini verebilecek bir yol bulunabilir mi, bunu inceleyeceğiz.

v yöneylerinin doğrucul birleşimi, altsırasayılı katsayılar α'lar olmak üzere, yine bir yöney verecektir.

$$\mathbf{d} \equiv \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \tag{2.2}$$

Uygulamada, genelde, sayıcıl değerler elde etmek gerektiğinde izlenen yol sayıllara (ing:scalars) geçmektir. Tek bir yapı yazarak α değerlerinin ne olduğunu sınamak yerine, eşitlikler oluşturup, bunların sıfır olup olmama durumu ile ingilenelim.

d yöneyi soldan $\mathbf{v}_j^T$ ile çarpıldığında,

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{d} = \alpha_1 (\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n (\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_n), \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.3}$$

elde edilir. Burada **v** yöneyinin salt devriğinin kullanılışı gerçel değerler ile çalışıldığını gösterir niteliktedir. Eğer karmaşık değerler söz konusu olsaydı, karmaşık eşleniğin devriğini kullanmak gerekecekti. (**2.3**) eşitliğindeki sayılların sıfır olabilme koşullarını araştıralım. Bunları sıfır yapan α değerlerini inceleyelim. Tüm α değerleri sıfır olursa, doğrucul bağımsızlık var demektir. Dolayısıyla, bu sayılların sıfırlanış biçimlerini taban alarak bir yapı oluşturmak istemekteyiz.

(**2.3**) eşitliği dizey biçiminde de yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_n \\ \vdots & \ddots & & \\ \mathbf{v}_n^T\mathbf{v}_1 & & \cdots & \mathbf{v}_n^T\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{2.4}$$

(**2.4**) eşitliğinin sol yanındaki katsayılar dizeyi **v** yöneyleri arasındaki iç çarpımlardan oluşmaktadır. Bu dizey, bilimsel yazında karşımıza çıkış biçimi ile, Gram dizeyi olarak adlandırılıp, $\mathbf{G}(\mathbf{v})$ ile simgelenebilir. Bu demektir ki, n boyutlu bir **v** yöney takımının, tüm olası ikili iç çarpımlarından oluşan dizey Gram dizeyidir. Burada, Gram dizeyi α yöneyine etki ettiğinde sıfır yöneyi üretilsin istenmektedir. **v** yöneylerinin hangi durumunda α'ların sıfırlandığını inceleyeceğiz. Bunun için Gram dizeyinin özelliklerinden yararlanılabilir.

Bir Gram dizeyinin özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Gram dizeyi bakışıktır.

$$\mathbf{G}(\mathbf{v})^T = \mathbf{G}(\mathbf{v}) \tag{2.5}$$

2. Gram dizeyinin tüm özdeğerleri gerçeldir.

3. Gram dizeyinin sıfır özdeğerleri olabilir, ancak eksi özdeğeri yoktur:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{G}(\mathbf{v})\mathbf{c} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{v}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{v}_i^T\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{v}_j\right) \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{v}_i\right\|^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Burada eşitliğin geçerli olabilişi için boyu alınan doğrucul birleştirimin sıfırlanımı gerekir. Bu da, ancak, **v**'ler aralarında doğrucul bağımlı ise ve **c**'ler o bağımsızlığa karşılık geliyorsa gerçekleşebilir.

Eğer (**2.6**) eşitliği sıfır değerine eşit ise, bakışık $\mathbf{G}(\mathbf{v})$ dizeyinin sağ ve sol sıfır uzayları(ki bunlar örtüşen uzaylardır) boş değil demektir. Sıfır uzayının boyutu sıfır özdeğerli özyöneylerin sayısına denktir. α sıfır uzayında ise tümü birden sıfır olmaksızın, (**2.6**) eşitliğinin sıfırlanımını sağlar. Ancak bu, (**2.2**) eşitliğindeki doğrucul birleşimin aslında doğrucul bağımlılık anlamına geldiğini yargısına götürür. Diğer bir deyişle, Gram dizeyinin sıfır uzay yöneyleri doğrucul bağımlılık katsayılarını üreten olgulardır. Gram dizeyinin artı özdeğerlerine karşılık gelen α'lar ile oluşturulan yöneyler ise kesinlikle doğrucul bağımsız yapılara karşılık gelmektedir. Tek bir yapı, bir Gram dizeyi, özdeğerleri ve özyöneyleri bağlamında doğrucul bağımsızlık olgusunu somut bir biçimde söyleyebilmektedir. Gram dizeyinin özdüzeyi boyutuna eşit ise, sıfır uzayı boş demektir ve alınan bütün **v** yöneyleri aralarında doğrucul bağımsızdır. Eğer sıfır uzayı boş değilse, sıfır uzayının boyutuna bağlı olarak, yöneyler arasında o kadar sayıda ilişki var demektir ve bu ilişkiler birbirlerinden bağımsız olmak zorundadır. Bağımsız ilişkilerden yararlanılarak **v** yöneyleri birbiri türünden anlatılabilir ve bu da doğrucul bağımlılığa karşılık gelmektedir.

4. Gram dizeyinin sıfır uzay boyutu, ilgili yöneylerin aralarındaki doğrucul bağımlılık düzeyidir.

5. Gram dizeyinin sıfır uzay boyutunun belirlenimindeki belirsizlik durum sayısı (condition number) ile ilgilidir. Bu sayı arttıkça belirsizlik de artar.

Gram dizeyininin sıfır uzayı boş ise, dizey artı tanımlı, dolu ise artı yarı tanımlıdır. Artı tanımlılığın bazı yöntemlerde önemli getirileri vardır. Örneğin artı tanımlı bakışık bir dizey Cholesky ayrıştırımı ile ayrıştırılabilir.

Bu durumda, verilen **v** taban takımının Gram dizeyi $\mathbf{G}(\mathbf{v})$, doğrucul bağımsızlık nedeniyle, artı tanımlılığı güvence altına aldığı için, Cholesky yöntemi ile çarpanlarına ayrıştırılabilir.

$\mathbf{G}(\mathbf{v})$ dizeyinin Cholesky ayrıştırımı ile içerisinde tekillik barındırmayan, alt üçgensel **L** dizeyi elde edilir. Gram dizeyinin artı tanımlı oluşu tekillik oluşumunu engellemektedir. Bu durum **L** dizeyinin evirtilebilirliğini güvence altına almaktadır. Bu durumda $n \times n$'lik Gram dizeyi aşağıdaki gibi anlatılabilir.

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \qquad (\mathbf{2.7})$$

Bu açılımdan yola çıkarak, **v** taban takımının yerine, **v**'lerden üretilen dikgen ve birimboylu yeni **u** yöneylerine nasıl ulaşılabileceğini inceleyeceğiz.

Gram dizeyinin Cholesky ayrıştımı birim dizey elde edilecek biçimde yazıldığında,

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{v})(\mathbf{L}^{T})^{-1} = \mathbf{I} \tag{2.8}$$

elde edilir. Öte yandan, Gram dizeyi verilen taban küme öğelerini öğe alan bir dizeyden oluşturulan bakışık bir dış çarpım biçiminde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{v}) \tag{2.9}$$

v taban kümesinden oluşan dizey **V** ile gösterilmek üzere,

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{V}^{T}\mathbf{V}(\mathbf{L}^{T})^{-1} = \mathbf{I} \tag{2.10}$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{V}(\mathbf{L}^T)^{-1}$ çarpımı **U** dizeyi ile simgelenebilir. Bunlardan,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \mathbf{I} \tag{2.11}$$

çıkarımına ulaşılabilir. Bu, **u** yöneylerinin iç çarpımının Kronecker delta işlevi ile belirtilebileceğini anlatmaktadır.

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{i,j} \tag{2.12}$$

Böyle bir durumda, **u** yöneyleri aralarında dikgendirler.

Başka bir deyişle **U** dizeyi, **v** taban takımları ile Cholesky dizeyinin birleşiminden oluşmaktadır. **v**'lerin üzerindeki Cholesky yapısı dikgenliği sağlamaktadır.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} (\mathbf{L}^T)^{-1} \tag{2.13}$$

(**2.13**) eşitliğindeki sağdaki büyüklük **v**'ler üzerinde birer doğrucul birleşim içeren yöney oluşturmaktadır.

L dizeyinin devriğinin evriğinin üst üçgencil yapısından ötürü, $\mathbf{u}_1$ $\mathbf{v}_1$ ile orantılı; $\mathbf{u}_2$ $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ ile orantılı; ve benzer olacak biçimde gelişen yapılar ortaya çıkacaktır.

2.2 Sonsuz dizeylerde ayrıştırım

A sonsuz boyutlu bir dizey olsun. i ve j'ler tamsayı uzayında olmak üzere, $a_{i,j} = a(i,j)$ işlevcil gösterilimi daha da açıklayıcı olabilir. İncelemelerimizde $a(i,j)$ değerlerinin belirlenimi için iki yol vardır. Birincisi, $a(i,j)$'ler i ve j'ye bağlı olarak çizelge biçiminde verilebilir, ancak bu sonsuz boyutta çalışılmak istendiği için güç, onun da ötesinde, olanaksız bir durumdur. Diğeri ise, $a(i,j)$'nin i ve j'ye olan bağımlılığı çözümcül (ing:analytic) olarak belirtilerek verilebilir.

Söz gelimi, değişmez ağırlık işlevi altında genel yapısı aşağıdaki gibi olan bazı **A** dizeylerinin yakınsaklık durumlarını inceleyelim. Dizey boyuna aşağıdaki yargılara varabiliriz.

1. $a(i,j) = 1$ ıraksaktır.
2. $a(i,j) = \frac{1}{i}$ ıraksaktır.
3. $a(i,j) = \frac{1}{ij}$ yakınsaktır.
4. $a(i,j) = \frac{1}{\sqrt{ij}}$ ıraksaktır.

Bununla birlikte, bu dizeyler, boyda yakınsayış niteliği olan ağırlık dizeyleri altında, yakınsayabilirler. Ağırlık, öğeleri hızla küçülecek şekilde belirlendiğinde, yakınsayış niteliği artmaktadır.

$\mathbf{v}_k$ yöney takımı aşağıdaki gibi seçilsin.

$$\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2^k} \\ \frac{1}{3^k} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Bu durumda $\mathbf{v}_k$ taban takımı en genel durumuyla,

$$[\mathbf{v}_k]_i \equiv \frac{1}{i^k} \tag{2.15}$$

biçiminde yazılabilir. Gram dizeyini oluşturmak için **v** yöneylerinin iç çarpımlarından yararlanalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_k &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^j} \frac{1}{i^k} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{j+k}} \\ &= \zeta(j+k) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.16)}$$

Burada ζ Riemann zeta işlevlerini simgelemektedir.

Bu durumda $[\mathbf{v}_k]_i$ yöney takımının Gram dizeyi Zeta işlev değerlerinden oluşacaktır.

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) \equiv \begin{bmatrix} \zeta(2) & \zeta(3) & \zeta(4) & \cdots \\ \zeta(3) & \zeta(4) & & \\ & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.17)}$$

Yalnızca Zeta değerlerini kullanarak Gram dizeyini oluşturmak ve onun üzerinden sonlulaştırım olanaklıdır. Sonlulaştırılmış Gram dizeyine Cholesky ayrıştırımı uygulayarak birbirine dik yöneylerden oluşan yeni bir yöney takımı elde edilebilir. Bu yeni taban takımı ile **A** dizeyini anlatabilmek olanaklıdır.

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i,j} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j^T \qquad \textbf{(2.18)}$$

Bu öngörüldüğünde, eşitliğin iki yanı dikgenlik özelliğini de kullanarak, soldan $\mathbf{u}_i^T$ sağdan $\mathbf{u}_j$ ile çarpıldığında α değerlerine ulaşılabilir.

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_j = \alpha_{i,j} \qquad \textbf{(2.19)}$$

Bu biçimde, sonsuz boyutlu yapıları dikgen ayrıştırımlarla ifade edip, ÇYÇÜDG açılımı yapmak olanaklıdır.

3. ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR GÖSTERİLİMİ YÖNTEMLERİ

3.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi

Çokdeğişkenliliği yükseltilmiş çarpımlar gösterilimi bir böl-yönet uzişidir (ing:algorithm) ve çokdeğişkenli işlevlerin daha az değişkenli işlevler ile anlatımında kullanılır. Bu yöntem uygun destek işlevleri altında baskın veya arı çarpımcıl işlevler için iyi çalışır.

N sayıda bağımsız değişkeni olan bir işlevin ÇYÇG açılımı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} f\left(x_1,...,x_N\right) &= f_0 \prod_{j=1}^{N} s_j\left(x_j\right) + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} s_j\left(x_j\right) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} f_{i_1,i_2}\left(x_{i_1},x_{i_2}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i_1,i_2}}^{N} s_j\left(x_j\right) \\ &\quad + \cdots + f_{12\cdots N}\left(x_1,x_2,\cdots,x_N\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$s_j(x_j)$ler $(1 \leq j \leq N)$ destek işlevi olarak adlandırılmaktadır. Burada tüm bu destek işlevleri tek değişkenli işlevler olarak alınmaktadır. Bu kaçınılmaz bir durum olmayışla birlikte, iki ya da daha çokdeğişkenli olarak da seçilebilse de; oluşacak yöntemin kullanımı çok güçleşebilmektedir. Birim değişmez destek işlevleri kullanılırsa yöntem Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim yöntemine dönüşmüş olacaktır.

Açılımda bir sayıda değişmez terim f_0, N sayıda tek değişkenli terim $(f_1, f_2, ..., f_N)$, $N(N-1)/2$ sayıda iki değişkenli terim $(f_{12}, ..., f_{1N}, f_{23}, ..., f_{2N}, ..., f_{NN-1})$ vardır. Bu biçimde ilerlenerek 2^N sayıda terim içeren bir sonlu toplama ulaşılır. Amaç tüm bileşenleri açık olarak yazabilmektir. Ancak N boyutta bunun güç oluşu nedeniyle kesme yaklaşımına gidilecektir.

Eğer $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ değişmez işlev olarak alınırsa, sıfırıncı kerteden kesme tam sonucu verecektir. Genel eğilim tek veya en çok iki değişkenli düzeyde kesmeler yapmaktır. Uzbilimcil karmaşıklığı azaltmak amacıyla, bu an için, daha yüksek değişkenli seçilebilse de ilgilenilenilmemiştir.

ÇYÇG yönteminde destek işlevleri ağırlık işlevleri gibi kullanılabilse de böyle bir zorunluluk yoktur.

Bileşenlerin eşsiz olarak belirlenimi için bir takım ön koşullar verilmelidir. Sonlu sayıda noktada sıfır değerini alan ve diğer noktalarda artı tanımlı olan bir bağımsız değişkenli işlev ağırlık işlevi olarak seçilebilir. Ağırlık işlevi, bir kesim uyumsuzluklara neden olmayışı için, aşağıdaki gibi çarpımcıl seçilir.

$$w(x_1,\ldots,x_N)=\prod_{i=1}^{N}w_i(x_i),\qquad x_i\in[a_i,b_i],\qquad 1\le i\le N \tag{3.2}$$

Dikgen uzamcıllığı (ing:orthogonal geometry) bağımsız değişkenlerin her biri birbirinden bağımsız bir alt aralık içerisinde tanımlıdır. Buna ek olarak a_i ve b_i değerleri birbirleri ile ilintili olmak zorunda değildir. Bu ağırlık işlevinin her bir çarpanı bulunduğu aralıkta tümlevi bir olacak biçimde seçilirse işlemler ve anlatımlar yalınlaşır.

$$\int_{a_i}^{b_i}dx_iw_i(x_i)=1 \tag{3.3}$$

Ağırlık işlevi altında destek işlevlerinin dördüllerinin tümlevi 1 olmalıdır.

$$\int_{a_i}^{b_i}dx_iw_i(x_i)s_i(x_i)^2=1 \tag{3.4}$$

Değişmez işlev dışındaki işlevlerin ağırlık işlevi ile çarpımının aynı aralıkta bağımsız değişkenlerin biri üzerinde tümlevi alındığında, sonucun sıfır olma koşuluna “tümlev altında sıfırlanım koşulu” adı verilmektedir.

$$\int_{a_{i_l}}^{b_{i_l}}dx_{i_l}w_{i_l}(x_{i_l})s_{i_l}(x_{i_l})^2f_{i_1,\ldots,i_k}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})=0 \tag{3.5}$$

Bu koşullar altında ÇYÇG bileşenlerinin belirlenimi için izdüşüm işleçlerinden (ing:operator) yararlanılabilir. Öncelikle, çok değişkenli işlevleri bağımsız değişken sayısı boyutunda boyutlu tam sayılar uzayından değişmez işlevlerin altuzayına götüren bir izdüşüm işleci tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} f_0 &= \mathscr{P}_0f(x_1,\ldots,x_N)\\ &\equiv \int_{a_1}^{b_1}dx_1w_1(x_1)\cdots\int_{a_N}^{b_N}dx_Nw_N(x_N)\prod_{j=1}^{N}s_j(x_j)f(x_1,\ldots,x_N) \end{aligned} \tag{3.6}$$

İlgili çok değişkenli işlevi, bağımsız değişken sayısı boyutunda tam sayılar uzayından tek değişkenli işlevlerin altuzayına götüren bir $\mathscr{P}_i$ izdüşüm işleci tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= \mathscr{P}_i f(x_1,\ldots,x_N) \\ &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 w_1(x_1)\cdots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1}w_{i-1}(x_{i-1})\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1}w_{i+1}(x_{i+1})\cdots \\ &\quad\times\int_{a_N}^{b_N} dx_N w_N(x_N)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} s_j(x_j) f(x_1,\ldots,x_N) - f_0 s_i(x_i) \end{aligned} \quad \textbf{(3.7)}$$

$\mathscr{P}_{i_1 i_2}$ izdüşüm işlecinin yardımı ile bulunan iki değişkenli bileşenlerin genel yapısı ise (**3.8**) eşitliğindeki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 w_1(x_1)\cdots\int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}} dx_{i_1-1}w_{i_1-1}(x_{i_1-1}) \\ &\quad\times\int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}} dx_{i_1+1}w_{i_1+1}(x_{i_1+1})\cdots\int_{a_{i_2-1}}^{b_{i_2-1}} dx_{i_2-1}w_{i_2-1}(x_{i_2-1}) \\ &\quad\times\int_{a_{i_2+1}}^{b_{i_2+1}} dx_{i_2+1}w_{i_2+1}(x_{i_2+1})\cdots\int_{a_N}^{b_N} dx_N w_N(x_N) \\ &\quad\times\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i_1,i_2}}^{N} s_j(x_j) f(x_1,...,x_N) \\ &\quad - s_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2}) - s_{i_2}(x_{i_2}) f_{i_1}(x_{i_1}) - s_{i_1}(x_{i_1}) s_{i_2}(x_{i_2}) f_0 \end{aligned} \quad \textbf{(3.8)}$$

Üç ve daha çok sayıda değişkenli işlevler için de benzer biçimde izdüşüm işleçleri tanımlanabilir.

N sayıda bağımsız değişkenden olşan $f(x_1,...,x_N)$ işlevine yaklaştırım için istenilen kertede kesme yapabilmek amacıyla aşağıdaki ÇYÇG yaklaştıranları tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \pi_0(x_1,\ldots,x_N) &= f_0\prod_{j=1}^{N} s_j(x_j) \\ \pi_1(x_1,\ldots,x_N) &= \pi_0(x_1,\ldots,x_N) + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} s_j(x_j) \\ &\vdots \\ \pi_k(x_1,\ldots,x_N) &= \pi_{k-1}(x_1,\ldots,x_N) \\ &\quad + \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1\\ i_1<\ldots<i_k}}^{N} f_{i_1\ldots i_k}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i_1,\ldots,i_k}}^{N} s_j(x_j), \\ 1 \le k \le N. \end{aligned} \quad \textbf{(3.9)}$$

π_0'ın değişmez işlev olmayışına karşın değişmez yaklaştıran olarak adlandırılır. Bu yalnızca, sağ yanın f_0 değişmez terimi içermesinden kaynaklanan bir durumdur.

Ayrıca (**3.5**) eşitliği verilen tümlev altında sıfırlanım koşulları üzerinden ÇYÇG bileşenleri arasında bir diklik koşulu tanımlanabilir.

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 w_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N w_N(x_N) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1,\ldots,i_k}}^{N} s_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1,\ldots,j_l}}^{N} s_j(x_j) f_{i_1 \ldots i_k} f_{j_1 \ldots j_l} = 0 \quad (\mathbf{3.10})$$

Diklik koşulu belirleyiş yalınlığına ek olarak, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq N$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_l \leq N$ ve $1 \leq k < l \leq N$ olmak üzere aşağıdaki gibi bir iççarpım yazılabilmesine olanak tanımaktadır.

$$\begin{aligned}\left(f_{i_1 \ldots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1,\ldots,i_k}}^{N} s_i \ , \ f_{j_1 \ldots j_l} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1,\ldots,j_l}}^{N} s_j \right) \quad &= \quad \int_{a_1}^{b_1} dx_1 w_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N w_N(x_N) \\ &\quad \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1,\ldots,i_k}}^{N} s_i(x_i) f_{i_1 \ldots i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \\ &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1,\ldots,j_l}}^{N} s_j(x_j) f_{j_1 \ldots j_l}\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}\right)\end{aligned} \quad (\mathbf{3.11})$$

İççarpım tanımından yararlanılarak (**3.12**) eşitliğinde verilen biçimde bir boy tanımı yapılabilir.

$$\left\| f_{i_1 \ldots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1,\ldots,i_k}}^{N} s_i(x_i) \right\|^2 = \left(f_{i_1 \ldots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1,\ldots,i_k}}^{N} s_i \ , \ f_{i_1 \ldots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1,\ldots,i_k}}^{N} s_i \right) \quad (\mathbf{3.12})$$

$f(x_1, \ldots, x_N)$ işlevinin Hilbert uzayında olduğu varsayımı dikdörtgencil bir çokyüzlü üzerinde dördülü tümlevlenebilir bir yapıda olması durumunu getirmektedir. Bu durumda, sıfırlanma koşulu yardımı ile (**3.1**) ile verilen ÇYÇG açılımının her iki yanının özü ve ağırlık işlevi ile çarpılarak her bir bağımsız işleve göre tümlevi alındığında f işlevinin boy dördülü için, ara sıfırlanışları da göz önüne alarak,

$$\|f\|^2 = \left\| f_0 \prod_{j=1}^{N} s_j \right\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} s_j \right\|^2 + \cdots + \|f_{12 \ldots N}\|^2 \quad (\mathbf{3.13})$$

yazılabilir. (**3.13**) eşitliğinin her iki yanı $||f||^2$'ye bölündüğünde elde edilen yapı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$1 = \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^{N} s_j \right\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^{N} \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} s_j \right\|^2 + \cdots + \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12 \ldots N}\|^2 \quad (\mathbf{3.14})$$

(**3.14**) eşitliğini üzerinde uygun kesmeler yapıldığında nitelik ölçenleri olarak adlandırılan yapılar elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &= \frac{1}{\|f\|^2}\left\| f_0 \prod_{j=1}^{N} s_j \right\|^2 \\
\sigma_1 &= \frac{1}{\|f\|^2}\sum_{i=1}^{N}\left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} s_j \right\|^2 + \sigma_0 \\
&\vdots \\
\sigma_N &= \frac{1}{\|f\|^2}\|f_{12\ldots N}\|^2 + \sigma_{N-1}
\end{aligned}
\qquad (\mathbf{3.15})
$$

Nitelik ölçenleri, sırasıyla, değişmezlik ölçeni, birinci kerteden nitelik ölçeni ve benzer biçimde ilerleyerek N. kerteden nitelik ölçeni olarak adlandırılır ve iyi sıralı bir dizi oluşturur. (Burada, uzbilimcil anlamda gerçek iyi sıralı bir dizi, eşitliklerin varlığı nedeniyle, gündemde değildir. Ama uygulayımcıl açıdan iyi sıralı gibi nitelendirimde sakınca yoktur.)

$$
0 \leq \sigma_0 \leq \ldots \leq \sigma_N \leq 1 \qquad (\mathbf{3.16})
$$

ÇYÇG açılımında çok değişkenli bir işlev daha az değişkeni olan bileşenlerle anlatılmaktadır. Bu nedenle yapılan kesmenin niteliği, nitelik ölçenlerinin 1 değerine ne kadar yakın olduğu ile doğru orantıda olacaktır.

ÇYÇG açılımının niteliği, bir yandan, aynı zamanda destek işlevlerinin seçimine de bağlıdır. Başka bir deyişle, destek işlevinin yapısı yöntemin niteliğini doğrudan etkiler. Bu ana dek yapılan araştırımlar sonucunda değişmez ağırlık altında destek işlevlerinin çarpımcıl olarak alınmasının yöntemin etkinliği açısından daha yararlı olduğu gözlemlenmiştir. Bu durumda destek işlevi aşağıda verilen biçimde seçilebilir.

$$
s_j(x_j) = \frac{\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} dx_{j-1} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} dx_{j+1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N f(x_1,\ldots,x_N)}{\left[\int_{a_j}^{b_j} dx_j \left[\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} dx_{j-1} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} dx_{j+1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N f(x_1,\ldots,x_N)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (\mathbf{3.17})
$$

3.1.1 İki Değişkenli İşlevlerde ÇYÇG

İki bağımsız değişkene bağlı bir işlevin $[0,1]$ aralığında ÇYÇG açılımı aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= f_0 u(x_1)v(x_2) + f_1(x_1)v(x_2) + u(x_1)f_2(x_2) + f_{1,2}(x_1,x_2) \\
& \quad x_i \in [0,1],\ i = 1,2
\end{aligned}
\qquad (\mathbf{3.18})
$$

Birim ağırlık altında destek işlevleri u ve v belirleyiş yalınlığı açısından birim boylu olarak alınmıştır. Birim boyluluk burada zorunlu bir koşul değildir.

$$\int_0^1 dx_1 u(x_1)^2 = 1 \qquad \int_0^1 dx_2 v(x_2)^2 = 1 \tag{3.19}$$

f bileşenlerinin belirlenimi için Sobol'un vermiş olduğu sıfırlanım koşulları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dx_1 f_1(x_1)u(x_1) = 0 \\
&\int_0^1 dx_2 f_2(x_2)v(x_2) = 0 \\
&\int_0^1 dx_1 f_{1,2}(x_1,x_2)u(x_1) = 0 \\
&\int_0^1 dx_2 f_{1,2}(x_1,x_2)v(x_2) = 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Belirtilen koşullar altında iki bağımsız değişkene bağlı bir işlevin değişmez, tek değişkenli ve iki değişkenli ÇYÇG bileşenleri eşsiz bir biçimde bulunabilir:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f(x_1,x_2)u(x_1)v(x_2) \\
f_1(x_1) &= \int_0^1 dx_2 f(x_1,x_2)v(x_2) - f_0 u(x_1) \\
f_2(x_2) &= \int_0^1 dx_1 f(x_1,x_2)u(x_1) - f_0 v(x_2) \\
f_{1,2}(x_1,x_2) &= f(x_1,x_2) - f_0 u(x_1)v(x_2) - f_1(x_1)v(x_2) - f_2(x_2)u(x_1).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Bu yazımda f_0 bileşenin f işlevinin ortalama değerine karşılık gelmektedir. u ve v destek yöneyleri birer ağırlık olmamalarına karşın, bir tür ağırlıklandırım söz konusudur. Ama bu ağırlıklandırımlı ağırlık katsayıları eksi değerler de alabilmektedir. Bu durumda f_0'a destek ortalama denebilir. f_1 bileşeni x_1 yönünde ve f_2 bileşeni x_2 yönünde değişen ortalamaları göstermektedir.

Bileşenler saptandıktan sonra süreklilikten ayrıklığa geçilebilir. Ayrıklık derken yalnızca bir işlev değil, bir ya da birden çok sırasayıya bağımlı olan bir işlevden söz edilmektedir. Bu durumda dış çarpımlar söz konusu olacaktır.

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= a_0 u_i v_j + a_i^{(1)} v_j + u_i a_j^{(2)} + a_{i,j}^{(1,2)} \\
&\quad i = 1,\cdots,l \quad j = 1,\cdots,m
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Destek yöneylerinin birim boyluluğu koşulu aşağıdaki gibi anlatılabilir.

$$\sum_{i=1}^{l} u_i^2 = 1 \qquad \sum_{j=1}^{m} v_j^2 = 1 \tag{3.23}$$

Sıfırlanım koşulları ayrık bir yapıda çalışıldığı için sonlu toplamlar ile dile getirilen yapılar haline dönüşmüş olur:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l} u_i a_i^{(1)} &= 0 \\
\sum_{j=1}^{m} v_j a_j^{(2)} &= 0 \\
\sum_{i=1}^{l} u_i a_{i,j}^{(1,2)} &= 0 \\
\sum_{j=1}^{m} v_j a_{i,j}^{(1,2)} &= 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Sıfırlanım koşullarında birinci eşitliğe bakıldığında, birinci bileşen ile birinci destek yöneyinin iç çarpımının sıfır olduğu görülmektedir. Bu durum gösteriyor ki, birinci bileşen birinci destek yöneyine dik olmalıdır. Benzer biçimde ikinci eşitlikten ikinci bileşenin ise ikinci destek yöneyine dik olması, gerekliliği sonucu çıkarılabilir. Üçüncü eşitlik ise birinci destek yöneyinin artık terimin sol sıfır uzayında bulunması ve dördüncü eşitlik sağ sıfır uzayında bulunması anlamına gelmektedir. Bu özellikler ÇYÇÜDG'nin gelişimini sağlamaktadır. Bu koşullandırımlar altında bileşen eşitlikleri aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} u_i v_j a_{i,j} \\
a_i^{(1)} &= \sum_{j=1}^{m} v_j a_{i,j} - a_0 u_i \\
a_j^{(2)} &= \sum_{i=1}^{l} u_i a_{i,j} - a_0 v_j \\
a_{i,j}^{(1,2)} &= a_{i,j} - a_0 u_i v_j - a_i^{(1)} v_j - a_j^{(2)} u_i
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Burada a_0 bileşeni **A** dizeyi aracılığı ile v'nin bulunduğu uzaydan u'nun bulunduğu uzaya dönüşümü sağlayan bir geçiş bileşenidir. Bu da Rayleigh oranının iki uzay arasındaki karşılığına denk gelmektedir.

(**3.22**) eşitliği ile verilen ÇYÇG açılımında $a_{i,j}$'yi elde edebilmek için dört toplamcıl terim kullanılmaktadır. Kesme yaklaştırımı yapabilmek için, yalnızca **u** ve **v** işlevlerinin dış çarpımlarını içeren değişmez bileşen alınabilir. Eğer dizeyin özdüzeyi ve boyu yeterince düşük değilse, son terimi içeren dizey bileşeni gösterim için önemli bir rol oynayacaktır. Bu demektir ki, dizeyin bileşeni boy ve/veya özdüzeyde baskın olduğunda, ÇYÇG yöntemi dizeylerde etkili olarak kullanılamamaktadır. Bu da yeni bir yöntem geliştirilmesinin gerekliliğini ortaya çıkarmıştır.

3.2 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi

Bu bileşenler dizey bağlamında yazılacak olursa **A** dizeyi daha tıkız bir anlatım ile verilebilir:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A} = a_0 \mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{a}_1\mathbf{v}^T + \mathbf{u}\mathbf{a}_2^T + \mathbf{A}_{1,2} \\
&\qquad \mathbf{u}, \mathbf{a}_1 \in \mathscr{R}^l \\
&\qquad \mathbf{v}, \mathbf{a}_2 \in \mathscr{R}^m \\
&\qquad a_0 \in \mathscr{R} \\
&\qquad \mathbf{A}, \mathbf{A}_{1,2} \in \mathscr{R}^{l \times m}
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

u ve **v** yöneyleri sırasıyla l ve m boyutlu uzaylarda yer alan destek yöneyleridir. Değişmez ÇYÇG bileşeni a_0 bir sayılı, $\mathbf{a}_1$ ve $\mathbf{a}_2$ bileşenleri sırasıyla l ve m boyutlu yöneyleri ve $\mathbf{A}_{1,2}$ bileşeni $l \times m$ boyutlu bir dizeyi simgelemektedir. Bu durumda bir dizey, üç dış çarpım ve bir dizey yani artık terim ile anlatılabilir bir yapı durumuna getirilebilmiş olmaktadır.

Destek yöneyleri üzerinde birim boyluluk koşulu,

$$
\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1, \qquad \mathbf{v}^T\mathbf{v} = 1 \tag{3.27}
$$

biçiminde verilebilir. Ayrıca ÇYÇG bileşenleri üzerindeki sıfırlanım koşulları daha öncekilere benzer biçimde ama tıkız anlatımlarla yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^T\mathbf{a}_1 &= 0 \\
\mathbf{v}^T\mathbf{a}_2 &= 0 \\
\mathbf{u}^T\mathbf{A}_{1,2} &= \mathbf{0}_m^T \\
\mathbf{A}_{1,2}\mathbf{v} &= \mathbf{0}_l
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

a_0, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ve $\mathbf{A}_{1,2}$'nin sıfırlanım koşullarını kullanarak ÇYÇG denkleminden elde ediliminde bileşen eşitlikleri bu biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = a_0 + \mathbf{u}^T\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2^T\mathbf{v} + \mathbf{u}^T\mathbf{A}_{1,2}\mathbf{v} \tag{3.29}$$

(**3.27**), (**3.28**) ve (**3.29**) eşitlikleri kullanılarak a_0 sayıl değişkeni belirlenmek istenirse

$$a_0 = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} \tag{3.30}$$

elde edilir. (**3.30**) eşitliği sağdan $\mathbf{v}$ ile çarpılarak $\mathbf{a}_1$ bileşeni elde edilebilir:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = a_0\mathbf{u} + \mathbf{a}_1 \tag{3.31}$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v} - a_0\mathbf{u} \tag{3.32}$$

Benzer biçimde (**3.30**) eşitliği soldan $\mathbf{u}^T$ ile çarpılarak $\mathbf{a}_2$ bileşeni elde edilebilir:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{A} = a_0\mathbf{v}^T + \mathbf{a}_2^T \tag{3.33}$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{A}^T\mathbf{u} - a_0\mathbf{v} \tag{3.34}$$

Artık terim, yani $\mathbf{A}_{1,2}$ bileşeni, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A} - a_0\mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{a}_1\mathbf{v}^T - \mathbf{u}\mathbf{a}_2^T \tag{3.35}$$

Bileşenler açık yapıları ile yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v}\mathbf{u} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} \\
&= (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{A}\mathbf{v} \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı biçimde,

$$\mathbf{a}_2 = (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{A}^T\mathbf{u} \tag{3.37}$$

$$\mathbf{A}_{1,2} = (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{A}(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \tag{3.38}$$

eşitlikleri de üretilebilir. $(\mathbf{I}_l - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)$ bir izdüşüm dizeyidir. Bu dizey, l öğeli yöneylerin bulunduğu uzay içerisinde, $\mathbf{u}$ yöneyinin örtmüş olduğu eksene dik olan alt uzaya iz düşürür. Benzer biçimde $(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)$ dizeyi de bir izdüşüm dizeyidir ve m öğeli yöneylerin bulunduğu uzay içerisinde $\mathbf{v}$ yöneyinin örtmüş olduğu eksene dik olan altuzaya iz düşürür. Bu durumda artık dizey bir altdüzeye düşürülmüş ve özdüzeyi ise başlangıç dizeyinden 1 düşmüş olur. Özyineleyiş ile özdüzey her aşamada bir düşürülerek, dizey yalnızca dış çarpımlardan oluşan bir yapı haline getirilebilir ve bu anlatımdan kesmelerle yaklaştırım sağlanabilir.

$$\begin{aligned} ||\mathbf{a}_1|| &\equiv (\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1)^{1/2} & \qquad ||\mathbf{a}_2|| &\equiv (\mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2)^{1/2} \\ &= (\mathbf{v}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{I}_l-\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{A}\mathbf{v})^{1/2} & &= (\mathbf{u}^T\mathbf{A}(\mathbf{I}_m-\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{A}^T\mathbf{u})^{1/2} \end{aligned} \tag{3.39}$$

olmak üzere, yeni destek yöneyleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &\equiv \frac{1}{||\mathbf{a}_1||}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{v}_2 &\equiv \frac{1}{||\mathbf{a}_2||}\mathbf{a}_2 \end{aligned} \tag{3.40}$$

$\alpha_1 = a_0$, $\beta_1 = ||\mathbf{a}_1||$ ve $\gamma_1 = ||\mathbf{a}_2||$ olarak tanımlandığında $\mathbf{A}$ dizeyinin ayrıştırım yapısı (**3.41**) eşitliğindeki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{A} = \alpha_1\mathbf{u}\mathbf{v}^T + \beta_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}^T + \gamma_1\mathbf{u}\mathbf{v}_2^T + \mathbf{A}_{1,2} \tag{3.41}$$

Burada α_1, β_1 ve γ_1 birer özdeğer ya da özdeğer görevini üstlenen değiştirgeler konumundadır.

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}_2 \equiv \frac{(\mathbf{I}_l-\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T)\mathbf{A}\mathbf{v}_1}{[\mathbf{v}_1^T\mathbf{A}^T(\mathbf{I}_l-\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T)\mathbf{A}\mathbf{v}_1]^{1/2}} \tag{3.42}$$

$$\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}_2 \equiv \frac{(\mathbf{I}_m-\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T)\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1}{[\mathbf{u}_1^T\mathbf{A}(\mathbf{I}_m-\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T)\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1]^{1/2}} \tag{3.43}$$

ÇYÇG ayrıştırımı yapıldığında yeni destek işlevleri özyineli olarak üretilebilmektedir. Yeni destek yöneyleri $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{v}_2$'yi kullanarak artık terim $\mathbf{A}_{1,2}$ ayrıştılabilir. $\mathbf{A}^{(0)} \equiv \mathbf{A}$ ve $\mathbf{A}^{(1)} \equiv \mathbf{A}_{1,2}$ olarak tanımlandığında özyineleyiş tabanı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{A}^{(0)} = \alpha_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \beta_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_1^T + \gamma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_2^T + \mathbf{A}^{(1)} \tag{3.44}$$

İkinci aşama ayrıştırım yapılırsa, elde edilecek olan yapı aşağıdaki biçimde olacaktır.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= (\mathbf{I}_l-\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T)\mathbf{A}(\mathbf{I}_m-\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T) \\ \mathbf{A}^{(1)} &= \alpha_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \beta_2\mathbf{u}_3\mathbf{v}_2^T + \gamma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_3^T + \mathbf{A}^{(2)} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Bu durumda ikinci aşama değiştirgeler (**3.46**) eşitliğindeki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha_2 &\equiv \mathbf{u}_2^T\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{v}_2 \\ \beta_2 &\equiv ||(\mathbf{I}_l-\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T)\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{v}_2|| \\ \gamma_2 &\equiv ||(\mathbf{I}_m-\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T)\mathbf{A}^{(1)^T}\mathbf{u}_2|| \end{aligned} \tag{3.46}$$

İkinci aşamada yeni elde edilen destek yöneyleri ve artık dizey aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{u}_3 \equiv \frac{1}{\beta_2}(\mathbf{I}_l - \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T)\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{v}_2 \tag{3.47}$$

$$\mathbf{v}_3 \equiv \frac{1}{\gamma_2}(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T)\mathbf{A}^{(1)^T}\mathbf{u}_2 \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(2)} &= (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T)\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T)\\ &= (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T - \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T)\mathbf{A}(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T)\end{aligned} \tag{3.49}$$

Her aşamada özdüzey düşecek ve artık dizeyin özdüzeyi 1'e eşit olduğunda durulacaktır. Genel olarak özyineleyiş tabanı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{A}^{(j)} = \alpha_{j+1}\mathbf{u}_{j+1}\mathbf{v}_{j+1}^T + \beta_{j+1}\mathbf{u}_{j+2}\mathbf{v}_{j+1}^T + \gamma_{j+1}\mathbf{u}_{j+1}\mathbf{v}_{j+2}^T + \mathbf{A}^{(j+1)} \tag{3.50}$$

$(j+1)$. aşama değiştirgeleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1} &\equiv \mathbf{u}_{j+1}^T\mathbf{A}^{(j)}\mathbf{v}_{j+1}\\ \beta_{j+1} &\equiv ||(\mathbf{I}_l - \mathbf{u}_{j+1}\mathbf{u}_{j+1}^T)\mathbf{A}^{(j)}\mathbf{v}_{j+1}||\\ \gamma_{j+1} &\equiv ||(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_{j+1}\mathbf{v}_{j+1}^T)\mathbf{A}^{(j)^T}\mathbf{u}_{j+1}||\end{aligned} \tag{3.51}$$

Bu durumda $(j+1)$. aşama sonucunda destek yöneyleri ve artık dizey, genel yapıları ile, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{u}_{j+2} \equiv \frac{1}{\beta_{j+1}}(\mathbf{I}_l - \mathbf{u}_{j+1}\mathbf{u}_{j+1}^T)\mathbf{A}^{(j)}\mathbf{v}_{j+1} \tag{3.52}$$

$$\mathbf{v}_{j+2} \equiv \frac{1}{\gamma_{j+1}}(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_{j+1}\mathbf{v}_{j+1}^T)\mathbf{A}^{(j)^T}\mathbf{u}_{j+1} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(j+1)} &= (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}_{j+1}\mathbf{u}_{j+1}^T)\mathbf{A}^{(j)}(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_{j+1}\mathbf{v}_{j+1}^T)\\ &= (\mathbf{I}_l - \sum_{k=1}^{j+1}\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^T)\mathbf{A}(\mathbf{I}_m - \sum_{k=1}^{j+1}\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T)\end{aligned} \tag{3.54}$$

Birim dizey, birbirine dik doğrultulara iz düşüren bir boyutlu tüm olabilecek dizeylerin toplamına özdeş olmak zorundadır.

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I}_l - \sum_{k=1}^{l}\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^T\right) &= \mathbf{0}_{l\times l}\\ \left(\mathbf{I}_m - \sum_{k=1}^{m}\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T\right) &= \mathbf{0}_{m\times m}\end{aligned} \tag{3.55}$$

Yatay bir dikdörtgen yapısında çalışıldığında, yani $l < m$ iken bulunan **u** ve **v** destek yöneyleri **A** dizeyini aşağıdaki biçimde anlatacaktır.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{l-1} \beta_i \mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{l} \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_{i+1}^T \\ &= \mathbf{U\Sigma V}^T, \qquad l < m \end{aligned} \tag{3.56}$$

$\mathbf{\Sigma}$ üçköşegenli çekirdek dizey olarak adlandırılmak üzere, genel olarak aşağıdaki eşitlikle verilebilmektedir.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \gamma_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{l-1} & \alpha_l & \gamma_l & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

4. ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR OKUÇLULANDIRIMLI DİZEY GÖSTERİLİMİ

4.1 Tek Dış Çarpımdan Oluşan Dizeylerde Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlulandırımlı Dizey Gösterilimi

$l \times m$ boyutlu bir $\mathbf{A}$ dizeyi özel olarak, tek dış çarpımdan oluşacak biçimde, (**4.1**) eşitliğindeki gibi tanımlansın.

$$\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}^T \tag{4.1}$$

$\mathbf{A}$ dizeyinin ÇYÇG açılımı aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{A} \equiv a_0\mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{a}_1\mathbf{v}^T + \mathbf{u}\mathbf{a}_2^T + \mathbf{A}_{1,2} \tag{4.2}$$

ÇYÇÜDG anlatımında verilen birim boyluluk ve sıfırlanım koşulları altında bileşen denklemleri aşağıdaki gibi anlatılabilir.

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} \\ \mathbf{a}_1 &= (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{A}\mathbf{v} \\ \mathbf{a}_2 &= (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{A}^T\mathbf{u} \\ \mathbf{A}_{1,2} &= (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{A}(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Özel yapıda seçilen $\mathbf{A}$ dizeyi bileşen denklemlerinde yerine konulup bileşenler yeniden düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T)\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{a}_2 &= (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T)\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}^T\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{A}_{1,2} &= (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}^T(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{A}$ dizeyi (**4.5**) eşitliğindeki biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{A} = \alpha_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \beta_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_1^T + \gamma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_2^T + \alpha_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T \tag{4.5}$$

$\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ destek yöneylerinden oluşan dizeyleri simgelerse

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &\equiv \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} &\equiv \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

yazılabilir. $\mathbf{U\Sigma V}^T = \mathbf{A}$ olmak üzere okuçlulandırım dizeyi $\mathbf{\Sigma}$ aşağıdaki biçimde üretilebilir.

$$\mathbf{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

4.1.1 Birden Çok Dış Çarpımdan Oluşan Dizeylerde ÇYÇODG

A birden çok dış çarpımdan oluşan bir dizey olsun.

$$\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\eta}_1^T + \boldsymbol{\xi}_2 \boldsymbol{\eta}_2^T \tag{4.8}$$

A dizeyindeki iki dış çarpım bir önceki açılımdan yararlanılarak ayrı ayrı yazılabilir.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\eta}_1^T &= \alpha_1^{(1)} \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \beta_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1^T + \gamma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2^T + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T \\ \boldsymbol{\xi}_2 \boldsymbol{\eta}_2^T &= \alpha_1^{(2)} \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \beta_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1^T + \gamma_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_3^T + \alpha_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3^T \end{aligned} \tag{4.9}$$

U ve **V** dizeyleri destek yöneylerinden oluşmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\mathbf{U} \equiv [\ \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad 0 \quad \cdots\ ] \qquad \mathbf{V} \equiv [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad 0 \quad \cdots\ ] \tag{4.10}$$

$\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ yöneyleri $\mathbf{u}_1$'e dik, eş biçimde $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ yöneyleri $\mathbf{v}_1$'e dik olup, aralarında dik olmak zorunda değillerdir.

$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$ olmak üzere $\mathbf{\Sigma}$ dizeyi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma} &= \mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{\Sigma}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} & 0 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Burada $\alpha 1 = \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}$ tanımı kullanılmıştır.

4.1.2 Okuçlulandırımlı Yapıdan Üçköşegencilliğe Geçiş

Dizey sonlu ya da sonsuz sayıda dış çarpımlardan oluşuyor ise, her bir dış çarpımı ÇYÇÜDG ile ayrıştırarak bir çekirdek dizey oluşturulabildiğinden bir önceki altbölümde söz edilmiştir. Sonrasında ise bu çekirdek dizeylerin birleşiminden okuçlu (ing:arrowheaded) yapıda bir gösterilim üretilebilmektedir. Okuçlu dizeyin sol üst köşesinden kesme yapılarak, yine okuçlu yapıda sonlu boyutta bir dizey elde etmek ve bununla yaklaştırım yapmak olanaklıdır. Diğer yandan, okuçlu dizeyi üçköşegencil yapıya getirip, kesme yaparak bir yaklaştırım yapmak da olanaklıdır. Okuçlu üzerinden yapılan yaklaştırım mı yoksa üçköşegencil ile yapılan yaklaştırım mı daha iyi yakınsar incelemek istiyoruz. Kesmeden kaynaklanan yanılgı yakınsayış niteliğini etkilemektedir. Üçköşegencilliğe geçişte var olan dönüşüm, bilgisayım karmaşıklığını (ing:computational complexity) arttıracaktır.

2×2'lik bir dizey hem okuçlu hem de üçköşegencil yapıdadır. Bu nedenle inceleyişe başlayabileceğimiz en yalın yapı 3×3'lük bir dizeydir:

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

(**4.12**) eşitliği ile verilen okuçlu **A** dizeyini üçköşegencil duruma getirmek istiyoruz. Burada yalın bir biçimde, **A**, "üzerinde bir dönüşüm yapılarak üçköşegencil duruma getirilebilir mi?" diye sorgulanmaktadır. Öncelikle birinci yatay sıra ile ikinci yatay sırayı yer değiştirerek, sonrasında ilk iki düşey sırayı yer değiştirerek üçköşegencil yapıya geçiş sağlanabilmektedir.

$$\mathbf{\Pi A} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \beta_2 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$\mathbf{\Pi A \Pi} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_1 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Burada, yerdeğiştirim dizeyi olan $\mathbf{\Pi}$, bir yandan da, döndürüm dizeyi niteliği taşımaktadır. 3×3'lük okuçlu bir dizeyi, $\mathbf{\Pi}$ döndürüm dizeyi ile yer değiştirim yapılarak üçköşegencil bir dizey haline getirilebildiğini görebiliriz. $\mathbf{\Pi}$, dördülü birim dizeye eşit olan, diğer bir deyişle, evriği devriğine eşit bir dizeydir.

$$\mathbf{\Pi} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

3×3'lük boyuttaki bu olguya karşın, daha yüksek boyutlarda yalnızca yer değiştirim ile üçköşegencil yapıyı elde etmek yalın olarak olanaklı bir durum değildir. Sonsuz boyutta araştırımlar gerçekleştirmek istendiği göz önüne alındığında ise bu daha da güçleşecek ve döndürüm yetersiz kalacaktır.

Genel durumuyla bir m. aşamada elde edilen okuçlu dizeyi inceleyelim.

$$\mathbf{A}_m \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{m-1} \\ \beta_1 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \beta_{m-1} & & & \alpha_m \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

(**4.16**) eşitliğindeki gibi tanımlanan bir dizeyi üçköşegencil bir dizey durumuna getirmek istemekteyiz. m sayısı verilen bir değer olduğunda, bu dizey, soldan ve sağdan uygun birer dizey ile çarpım yardımıyla, üçköşegencil duruma getirilebilmektedir. Sonsuz bir dizey üzerinden kesmelerle oluşturulan dördül dizeyler olarak yorumlandığında, $\mathbf{A}_{m+1}$ dizeyi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\mathbf{A}_{m+1} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_m \\ \beta_1 & \alpha_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_m & & & \alpha_{m+1} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$\mathbf{A}_{m+1}$ ile $\mathbf{A}_m$ arasında bir özyineleyiş yazılabilir mi diye incelemek istiyoruz.

$$\mathbf{A}_{m+1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \gamma_m \mathbf{e}_1^{(m)} \\ \beta_m \mathbf{e}_1^{(m)T} & \alpha_{m+1} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Bu, uzbilimcil tümevarım yardımı ile kanıtlayışa götürülebiliyorsa doğru demektir. Doğruluk durumunda, baştan belirli m değerleri için doğru olduğu gösterildiğinde, m'den sonraki değer için de doğru olacaktır. Diyelim ki, $\mathbf{A}_m$ dizeyi üçköşegencil yapıya dönüşebiliyor olsun. Bu durumda, dönüşümü gerçekleştiren öyle bir dizey kümesi vardır ki, üçköşegencil $\mathbf{B}_m$ dizeyi elde edilsin.

$$\mathbf{B}_m \equiv \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{m-1} \\ 0 & & b_{m-1} & a_m \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Öyleyse dönüşüm aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\mathbf{U}_m \mathbf{A}_m \mathbf{V}_m = \mathbf{B}_m \tag{4.20}$$

Bu durumda, $\mathbf{U}_{m+1}$ ve $\mathbf{V}_{m+1}$ dizeyleri nasıl olmalıdır?

$$\mathbf{U}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m^T & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m^T & 1 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

$\mathbf{U}_{m+1}$ ve $\mathbf{V}_{m+1}$ dizeylerinin (**4.21**) eşitliğindeki gibi olduğunu varsayarsak, $\mathbf{U}_{m+1}$ dizeyinin soldan $\mathbf{A}_{m+1}$ ile çarpımı aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{m+1}\mathbf{A}_{m+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \gamma_m \mathbf{e}_1^{(m)} \\ \beta_m \mathbf{e}_1^{(m)T} & \alpha_{m+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_m\mathbf{A}_m & \gamma_m \mathbf{U}_m \mathbf{e}_1^{(m)} \\ \beta_m \mathbf{e}_1^{(m)T} & \alpha_{m+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.22}$$

(**4.22**) eşitliği sağdan $\mathbf{V}_{m+1}$ dizeyi ile çarpılırsa,

$$\mathbf{U}_{m+1}\mathbf{A}_{m+1}\mathbf{V}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_m\mathbf{A}_m\mathbf{V}_m & \gamma_m \mathbf{U}_m \mathbf{e}_1^{(m)} \\ \beta_m \mathbf{e}_1^{(m)T}\mathbf{V}_m & \alpha_{m+1} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

elde edilir. (**4.20**) eşitliği ile sol üst köşenin $\mathbf{B}_m$'ye eşit olduğu ve öbek olarak kendi içerisinde üçköşegencil bir yapı oluştuğu gözlemlenmektedir. Bu dizeyin üçköşegencil olabilmesinin tek yolu, $\gamma_m \mathbf{U}_m \mathbf{e}_1^{(m)}$ çarpımının $\mathbf{e}_m^{(m)}$'ye ve benzer biçimde $\beta_m \mathbf{e}_1^{(m)T}\mathbf{V}_m$ çarpımının ise $\mathbf{e}_m^{(m)T}$'ye eşit olmasıyla gerçekleşir. Başta varsayılan $\mathbf{U}_m$ ve $\mathbf{V}_m$ dizeylerinin bunu sağlayacağının güvencesi verilememektedir. Bu da öbekleme yolu ile amaca ulaşmanın olanaklı olmadığını göstermektedir. Bu durumda bu dizeyi sağdan ve soldan öyle iki dizeyle çarptığımızda üçköşegencillik sağlanabilir mi diye inceleyelim.

$\gamma_m \mathbf{U}_m \mathbf{e}_1^{(m)}$ dizeyini $\boldsymbol{\xi}_m$ ile, $\beta_m \mathbf{e}_1^{(m)T}\mathbf{V}_m$ dizeyini $\boldsymbol{\mu}_m^T$ ile gösterildiğinde, (**4.20**) eşitliği ile birlikte (**4.23**) eşitliğinde bulunan dizey,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & \boldsymbol{\xi}_m \\ \boldsymbol{\mu}_m^T & \alpha_{m+1} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

biçiminde yazılabilir.

Üçköşegencil geçiş dizeyleri aşağıdaki gibi genel biçimde alındığında, (**4.24**) ile birlikte, bir sonraki aşama elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{X}_m^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & \boldsymbol{\xi}_m \\ \boldsymbol{\mu}_m^T & \alpha_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{Y}_m^T & 1 \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & \boldsymbol{\xi}_m^T \\ \mathbf{X}_m^T \mathbf{B}_m + \boldsymbol{\mu}_m^T & \alpha_{m+1} + \mathbf{X}_m^T \boldsymbol{\xi}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{Y}_m^T & 1 \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} \mathbf{B}_m + \boldsymbol{\xi}_m \mathbf{Y}_m^T & \boldsymbol{\xi}_m \\ \mathbf{X}_m^T \mathbf{B}_m + \boldsymbol{\mu}_m^T (\alpha_{m+1} + \mathbf{X}_m \mathbf{X}_m^T \boldsymbol{\xi}_m) \mathbf{Y}_m & \alpha_{m+1} + \mathbf{X}_m^T \boldsymbol{\xi}_m \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (\mathbf{4.25})$$

Son aşamada üçköşegencil öbek kalmadığı ve içi dolu bir dizey bulunduğu gözlemlenmektedir. Üçköşegencil bir yapıya geçiş yalın dönüşümlerle sağlanamamaktadır. Bu durumda döndürümün yetersiz kaldığı gözlemlenmektedir. Bu yüzden, bu anlatılanları, uygun bir çizem olarak düşünebilmek olanaksızdır.

Öte yandan verilen dördül ya da dikdörtgencil herhangi bir dizeyin ÇYÇÜDG aracılığıyla üçköşegencil bir çekirdek dizeye dönüştürülebildiğini bilmekteyiz. ÇYÇODG kullanmaksızın, var olan herhangi bir bakışık olmayan okuçlu dizeyi ÇYÇÜDG ile üçköşegencil hale getirilebiliriz. Ancak, burada önemli bir olguyu gözardı etmemek gerekir. ÇYÇÜDG izgeyi korumak zorunda değildir. Destek yöneylerinin seçimine bağımlı olarak asıl dizey ile karşılık gelen üçköşegencil dizey eş izgeli olmayabilir. İzge korunumunun gerekli olduğu durumlarda bu gerçek akılda tutulmalıdır.

Okuçlu dizey kaç dış çarpım varsa ona bağlı olarak oluşmuştu. Buna ek olarak, okuçlu yapının kendisinde bir asal köşegen ve iki dış çarpım bulunmaktadır. Bu durumda **A** dizeyi,

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{K} + \mathbf{b}\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_1 \mathbf{c}^T \quad (\mathbf{4.26})$$

biçiminde yazılabilir ve **K**, **b** ve **c** dizeyleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{K} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{4.27})$$

A dizeyine ÇYÇÜDG yöntemi uygulandığında elde edilecek olan üçköşegencil $\boldsymbol{\Sigma}$ dizeyinin α, β ve γ değiştirgeleri **K**, **b** ve **c** dizeylerinin terimleri ile orantılı biçimde olmaktadır. Başlangıç destek yöneyleri olarak,

$$\mathbf{u}_1 \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_1 \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

biçimde tanımlandığında, α_1 sayıl değeri (**3.51**) eşiliğine göre hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\equiv \mathbf{u}_1^T \mathbf{A}\mathbf{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 a_1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_i x_{i+1} & a_2 x_2 + c_1 x_1 & \cdots & +a_m x_m + c_{m-1} x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i x_i y_i + y_1 \sum_{i=1}^{m-1} b_i x_{i+1} + x_1 \sum_{i=1}^{m-1} c_i y_{i+1} \end{aligned} \tag{4.29}$$

(**3.51**) eşitliği doğrultusunda, β_1 değiştirgesi için öncelikle$(\mathbf{I}_m - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T)\mathbf{A}\mathbf{v}_1$ belirlenmelidir.

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I}_m - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T)\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_m \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & x_m^2 \end{bmatrix} \right) \mathbf{A}\mathbf{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1-x_1^2 & -x_1x_2 & \cdots & -x_1x_m \\ -x_2x_1 & 1-x_2^2 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-x_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1y_1 + c_1y_2 + \cdots + c_{m-1}y_m \\ a_2y_2 + b_1y_1 \\ \vdots \\ a_my_m + b_{m-1}y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-x_1^2)(a_1y_1 + \sum_{i=1}^{m-1} c_iy_{i+1} - x_1 \sum_{i=1}^{m-1} (a_{i+1}y_{i+1} + b_iy_1)x_{i+1} \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.30}$$

(**4.30**) eşitliğinin boyu β_1 değerini vermektedir. Benzer biçimde γ_1 değiştirgesinin de **A** dizeyiyle olan bağıntısı bulunabilir.

Bununla birlikte, (**4.29**) eşitliğinin gösterdiği üzere, $\mathbf{\Sigma}$ dizeyindeki α değerlerinin bulunmasında okuçlu **A** dizeyinin köşegen değerlerinin önemi büyüktür.

Öte yandan, (**4.26**) biçiminde gösterildiğinde iki durum ortaya çıkmaktadır: Boyda yakınsaklık ve boyda ıraksaklık.

4.1.2.1 Boyda yakınsaklık durumu

Boyda yakınsak durumda hem **K** dizeyi, hem de **b** ve **c** yöneyleri boyda yakınsak olmak durumunda kalmaktadırlar.

Bu durumda, başlangıç destek yöneyleri sonsuz boyutlu uzaydaki $\mathbf{e}_1$ yöneyi olarak seçilirse, ÇYÇÜDG ayrıştırımı yapıldığında özel bir durum ile karşılaşılmaktadır. Birinci aşama ayrıştırım değiştirgeleri belirlendiğinde, α_1, $\mathbf{K}$ köşegen dizeyinin ilk elemanı olan a_1 sayılına karşılık gelmektedir. Benzer biçimde β_1 ve γ_1 değerleri belirlendiğinde, sırasıyla, $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ yöneylerinin boylarına eşit oldukları sonucuna varılmıştır. Bu durumda yeni bulunan destek yöneyleri $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ yöneylerinin, sırasıyla, özlerinin boylarına bölümü ile elde edilecektir.

Eğer baştaki okuçlu dizeyin $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ yöneyleri birbirlerine dik olarak öngörülüp, $\mathbf{u}_1$ sol destek yöneyi $\mathbf{c}$ yöneyi ile ve $\mathbf{v}_1$ sağ destek yöneyi $\mathbf{b}$ yöneyi ile orantılı olarak seçilirse oluşacak olan durumu inceleyelim. Bu durumda (**4.29**) diklik durumu göz önünde bulunudurulduğunda, α_1 sayılı 0'a eşit olarak bulunmaktadır. Benzer biçimde eşitliklere uygun olarak β_1 ve γ_1 değiştirgeleri hesaplandığında 0 elde edilmektedir. Bu koşullar altında yeni destek yöneylerinin bulunmasında sorun çıkmaktadır. β ve α değiştirgelerinin sıfırlandığı durumlar söz konusu olduğunda başlangıç destek yöneylerine dik olacak biçimde yöneyler belirlenip destek yöneyi olarak ayrıştırımda kullanılmaktadır.

Daha başka özel durumlardan da söz edilebilir. Ancak, burada bu düzeyde bilgi ile yetinilecektir.

5. UYGULAMALAR

ÇYÇÜDG ve ÇYÇODG üzerine, simgecil ve bir yandan da sayıcıl işlem yapabilen bir uzbilimcil yazılım olan Mathematica aracılığı ile türlü uygulamalar gerçekleştirilip, sonuçlara bu bölümde yer verilmiştir. Mathematica'nın kendi bilgisayım donanımcıl duyarlılığı olan 16 anlamlı basamak düzeyinde çalışılmıştır.

5.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi

ÇYÇÜDG için n boyutta genelleştirilmiş, verilen çokdeğişkenli işlevin ya da, daha doğrusu dizinin ayrıştırımının elde edilimini sağlayan bir betik oluşturulmuştur. Bu betik, öncelikle başta belirlenen $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ destek yöneylerini birimboylu duruma getirip, ayrıştırım yapılacak olan $n \times n$ türünde $\mathbf{A}$ dizeyine ilk aşama ayrıştırımda yardımcı destek yöneyleri olarak hazır duruma getirmektedir. Önceki bölümde verilmiş olan eşitliklere uygun olarak, ilk aşama α, β ve γ değerleri belirlenip kullanılarak, bir sonraki aşama ayrıştırım için yeni destek yöneyleri bulunmaktadır. Bulunan yeni destek yöneyleri $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'ler aralarında birbirlerine dik olarak belirlenmektedir. Ancak, β ve γ değiştirgelerinin sıfırlandığı durumlar söz konusu olabilmektedir. Böyle durumlarda, β ve γ değiştirgelerini kullanmak yerine, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ yöney kümeleri için aralarında dik olacak yöneyler seçilip ayrıştırım işlemi sürdürülmektedir. $\mathbf{A}$ dizeyinin ayrıştırımından bir sayıl çarpanlı terim, iki dış çarpımdan oluşan sayıl çarpanlı terim ve bir artık terim elde edilmektedir. Bu artık terim bir önceki aşamada ayrıştırılan dizeyden bir özdüzey düşük olan dizeydir. Ve yeni destek yöneyleri aracılığı ile yeniden ayrıştırılan yapıdır. Özyineli yapı özdüzey 1'e eşit olduğunda duracak şekilde düzenlenmiştir. Sonuçta elde edilen tüm α, β ve γ değiştirgelerinin oluşturduğu üçköşegencil yapıdaki dizey ve tüm destek yöneyleri ile baştaki $\mathbf{A}$ dizeyine ulaşılabilmektedir. Bu durum, doğrulayış amaçlı uygulayışlarla sınanmıştır.

Amaç, sonsuz boyutlu dizeylere ÇYÇÜDG yöntemi aracılığı sonsuzluktan kesme yapmaksızın yaklaştırım yapabilmektir. Bu nedenle, destek yöneyleri evrik üslü sırasayılar öğeli yöneylerle orantılı (boylar Riemann Zeta işlevi değerlidirler) Riemann

Zeta işlevleri seçilerek açılım uygulanmak istenmiştir. Sonsuz boyuta geçiş yapmadan önce, daha küçük boyutlarda çalışılarak oluşturulan betiğin uygunluğu sınanmıştır.

Başlangıç olarak 10 boyutta çalışılıp, **u** ve **v** ilk destek yöneyleri olmak üzere, Zeta işlevlerine benzer olarak genel yapıları aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$[u_n]_i \equiv \frac{1}{i^3} \qquad [v_n]_j \equiv \frac{1}{j^5} \tag{5.1}$$

Ayrıştırım yapılmak istenen dizey, c herhangi bir sayıl olmak üzere,

$$a_{ij} \equiv \frac{c}{i+j} \tag{5.2}$$

biçiminde seçilmiştir. Yapılan özyineli ayrıştırımdan sonra 5 aşamada **A** dizeyi elde edilmiş ve üçköşegencil **T** dizeyi aşağıdaki gibi bulunmuştur. Bu dizey bölünerek de yazılabilir. $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &\equiv \begin{bmatrix} 0.0807108 & 0.0884068 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0739928 & 0.118173 & 0.0169547 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0153904 & 0.00932039 & 0.000846513 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000737934 & 0.000395137 & 0.000036798 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000318009 & 0.0000148625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_2 &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Bulunan dizey ile başta alınan dizey arasındaki sapışın boyu 1.46429×10^{-10} olarak elde edilmiştir.

5.2 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlulandırımlı Dizey Gösterilimi

ÇYÇÜDG yöntemi için oluşturulan betiğe benzer biçimde bir betik oluşturulmuştur. Değişik olarak, ayrıştırılmak istenen çokdeğişkenli daha özel bir yapıda seçilmiştir. Bu yöntem, ÇYÇÜDG yöntemine göre daha yalın belirleyişli, oluşuna ek olarak, daha verimli bir sonuç elde edebilmek için dikgen taban takımları ile çalışmak istenilmiştir. Dikgen yöney kümelerinin dış çarpımlarından oluşan bir çokdeğişkenliye ÇYÇODG açımı uygulanarak elde edilen okuçlulandırımlı dizey ve destek yöneyleri ile gösterilim sağlanmış olmaktadır. Betikte, çokdeğişkenlinin belirlenimi için seçilen yöney kümeleri öncelikle Cholesky yöntemi ile dikgen taban kümeleri durumuna getirilmektedir. Her bir dış çarpıma ayrı ayrı ÇYÇODG açılımı uygulanıp, elde edilen α, β ve γ değiştirgelerinin biraraya getirilişi ile okuçlulandırımlı dizey yapısı elde edilmiştir. Bu dizey ve tüm destek yöneylerinin yardımı ile, ÇYÇODG üzerinde, dış çarpımlar toplamından oluşan çokdeğişkenli başarılı bir biçimde elde edilmiştir.

ÇYÇÜDG'dekine benzer biçimde, sonsuz boyuta geçilmeden önce sonlu küçük boyutlarda denemeler yapılmıştır. Dikgen taban takımı için Zeta işlevlerinden yararlanmak amaçlanmıştır.

$$[y]_j \equiv \frac{1}{i^j} \qquad \mathbf{(5.4)}$$

eştliği ile verilen yöney takımı Cholesky ile dikgenleştirilip kullanılmıştır.

Örneğin, 10 boyutlu bir çokdeğişkenli 4 adet dış çarpımdan oluşacak biçimde, dış çarpım katsayıları aşağıdaki gibi verildiğinde yöntemi uygulamak istediğimizi düşünelim.

$$\mu_{ij} = \frac{1}{i^2 + j} \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2 \qquad \mathbf{(5.5)}$$

Destek yöneyleri **5.1** eşitliğindeki gibi seçilip birimboylulaştırıldıktan sonra, her bir dış çarpım için yeni destek yöneylerinin oluşturulmasında kullanılmıştır. Her bir dış çarpım için bulunan destek yöneyleri başta alınan destek yöneyine diktir. Her dış çarpım için elde edilen α, β ve γ değiştirgelerinden oluşan dizey (**5.6**)'deki gibi okuçlulandırımlı bir yapıdadır.

$$
\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.64232216 & 0.2485752 & 0.2377574 & 0.05803099 & 0.06938191 \\ 0.20720407 & 0.1463502 & 0 & 0 & 0 \\ 0.09490060 & 0 & 0.1399811 & 0 & 0 \\ 0.14119600 & 0 & 0 & 0.0997281 & 0 \\ 0.08083568 & 0 & 0 & 0 & 0.1192350 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{5.6})
$$

$\mathbf{\Sigma}$ dizeyi ve tüm destek yöneyleri ile dış çarpımlar toplamından oluşan $\mathbf{A}$ dizeyinin anlatımı yeniden elde edilebilmiştir. Başlangıçtaki dizey ile yeni oluşturulan dizey arasındaki sapışın boyu 1.61441×10^{-16} olarak bulunmuştur.

5.3 Okuçlulandırımlı Yapıdan Üçköşegencilliğe Geçiş

Okuçlu dizey yapısından ÇYÇÜDG yöntemi ile üçköşegencil dizey yapısına geçiş yapılabileceğine 4. bölümde yer verilmişti. Bu bölümde bununla ilgili uygulamalara değinilmiştir.

Destek yöneyleri (**5.1**) sırasayılı eşitliklerle anlatılan biçimde ve $\mathbf{A}$ dizeyi okuçlu yapıda (**5.7**) eşitliğinde verilen dizey ile çalışılsın. $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$ biçiminde gösterilmek üzere aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$
\mathbf{A}_1 \equiv \begin{bmatrix} 0.142857 & -0.166667 & -0.0555556 & -0.0238095 & -0.0119048 \\ 0. & 0.285714 & 0. & 0. & 0. \\ 0.693147 & 0. & 0.428571 & 0. & 0. \\ 1.09861 & 0. & 0. & 0.571429 & 0. \\ 1.38629 & 0. & 0. & 0. & 0.714286 \\ 1.60944 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1.79176 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1.94591 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 2.07944 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 2.19722 & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_2 \equiv \begin{bmatrix} -0.00666667 & -0.00406504 & -0.0026455 \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0.857143 & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 1.14286 \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{A}_3 \equiv \begin{bmatrix} -0.00181159 & -0.00129199 \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 1.28571 & 0. \\ 0. & 1.42857 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Bu koşullar altında tekillik olmayan **A** okuçlu dizeyine ÇYÇÜDG yöntemi uygulandığında, 10 aşamada, $\mathbf{\Sigma} = [\mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{\Sigma}_2]$ olmak üzere,

$$\mathbf{\Sigma}_1 \equiv \begin{bmatrix} 0.212101 & 0.143278 & 0 & 0 & 0 \\ 4.72284 & 0.0949904 & 1.1335 & 0 & 0 \\ 0 & 0.322099 & 0.131966 & 0.135423 & 0 \\ 0 & 0 & 0.480788 & 0.633925 & 0.749139 \\ 0 & 0 & 0 & 0.167566 & -0.763806 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.296682 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26887 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.872145 & 0.46389 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0546475 & -0.877396 & 0.224551 & 0 & 0 \\ 0 & 0.243144 & -0.906329 & 0.146182 & 0 \\ 0 & 0 & 0.245606 & -0.884681 & 0.114817 \\ 0 & 0 & 0 & 0.398589 & 0.86659 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

üçköşegencil çekirdek dizeyi elde edilmektedir. Her aşamada yeni oluşturulan destek yöneylerinin anlattığı **U** ve **V** dizeyleri aşağıdaki biçimde bulunmaktadır.

$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3]$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}_1 &\equiv \begin{bmatrix}
0.99144 & -0.0154486 & 0.128352 & -0.0115334 \\
0.12393 & -0.00367607 & -0.898849 & 0.226273 \\
0.03672 & 0.145416 & -0.365892 & -0.185561 \\
0.0154913 & 0.231924 & -0.154673 & -0.357091 \\
0.00793152 & 0.293076 & -0.0524256 & -0.395602 \\
0.00459 & 0.340425 & 0.0024464 & -0.338891 \\
0.0028905 & 0.379076 & 0.0345968 & -0.202827 \\
0.00193641 & 0.411737 & 0.0549035 & 0.00549671 \\
0.00136 & 0.440019 & 0.0685709 & 0.282851 \\
0.00099144 & 0.464961 & 0.0782782 & 0.627853
\end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_2 &\equiv \begin{bmatrix}
-0.0132844 & -0.00421695 & -0.00232182 \\
0.311365 & 0.135362 & 0.095092 \\
-0.566281 & -0.457544 & -0.461134 \\
-0.417254 & 0.0481469 & 0.458337 \\
-0.0668508 & 0.385462 & 0.272508 \\
0.2203 & 0.316114 & -0.243869 \\
0.354797 & -0.0429713 & -0.396822 \\
0.307686 & -0.410998 & 0.00722934 \\
0.0701656 & -0.407237 & 0.480553 \\
-0.360033 & 0.429975 & -0.214597
\end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_3 &\equiv \begin{bmatrix}
-0.000559164 & -0.0000712714 & 0.0000160798 \\
0.0333599 & 0.00846971 & 0.000240708 \\
-0.240282 & -0.0928639 & -0.013089 \\
0.525853 & 0.348917 & 0.0988844 \\
-0.293819 & -0.579648 & -0.324288 \\
-0.344887 & 0.322943 & 0.581434 \\
0.266138 & 0.280564 & -0.615806 \\
0.38389 & -0.516739 & 0.386514 \\
-0.470848 & 0.283641 & -0.133522 \\
0.139476 & -0.0555918 & 0.0196247
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (\mathbf{5.9})
$$

biçiminde elde edilir.

$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3]$ olmak üzere,

$$\mathbf{V}_1 \equiv \begin{bmatrix} 0.999503 & 0.0310361 & 0.00101598 & -0.00492605 \\ 0.0312345 & -0.95239 & -0.0489838 & 0.258613 \\ 0.00411318 & -0.280681 & 0.0621221 & -0.603534 \\ 0.000976077 & -0.104417 & 0.121927 & -0.545686 \\ 0.000319841 & -0.0433098 & 0.187144 & -0.367157 \\ 0.000128537 & -0.0188625 & 0.258563 & -0.197933 \\ 0.0000594695 & -0.00804285 & 0.334911 & -0.0556134 \\ 0.0000305024 & -0.00290548 & 0.415288 & 0.0630552 \\ 0.0000169267 & -0.00035669 & 0.499092 & 0.163795 \\ 9.99503 \times 10^{-6} & 0.00093031 & 0.585897 & 0.251375 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_2 \equiv \begin{bmatrix} 0.00160453 & 0.00146049 & 0.000523493 \\ -0.0985384 & -0.101995 & -0.0438521 \\ 0.365543 & 0.514678 & 0.311643 \\ 0.111496 & -0.228788 & -0.441919 \\ -0.18643 & -0.4778 & -0.185432 \\ -0.386097 & -0.270833 & 0.321897 \\ -0.438566 & 0.10857 & 0.392008 \\ -0.311458 & 0.383889 & -0.0915941 \\ 0.0265576 & 0.308979 & -0.564761 \\ 0.608569 & -0.340718 & 0.294357 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_3 \equiv \begin{bmatrix} 0.000248707 & 0.0000804301 & -0.0000350776 \\ -0.0238065 & -0.00882148 & 0.00413372 \\ 0.212907 & 0.0974333 & -0.0512887 \\ -0.504443 & -0.336847 & 0.220137 \\ 0.258691 & 0.476676 & -0.486541 \\ 0.39286 & -0.12191 & 0.631167 \\ -0.261853 & -0.454903 & -0.501375 \\ -0.414492 & 0.583774 & 0.241226 \\ 0.469621 & -0.290227 & -0.0646092 \\ -0.13216 & 0.0540508 & 0.00749053 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

biçiminde elde edilir.

$\mathbf{\Sigma}$ dizeyi soldan $\mathbf{U}$ ile, sağdan $\mathbf{V}$ dizeyinin evriği ile çarpıldığında, $\mathbf{A}$ dizeyi ile arasındaki sapışın boyu 1.19471×10^{-14} olarak elde edilebilmektedir.

$\mathbf{A}$ dizeyinin köşegeninde sıfırlar olduğunda tekillik oluşmakta olduğu ve $\mathbf{A}$ dizeyinin tekilliğe karşın ÇYÇÜDG yöntemi ile üçköşegencil biçimde anlatılabilir olduğu gözlemlenmiştir. Bu da, yöntemin gerçekten iyi çalıştığının bir göstergesi niteliğindedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu sav, aslında, iki önemli yöntemin birlikte ele alınarak tutarlılıklı birleştirimi sonucu oluşturulmuştur. Bu yöntemlerden ilki, özdüzeyce baskın yapılı (bu baskınlık ille de gerekli değildir, ama ne düzeyde yüksek özdüzey baskınlığı varsa, üçköşegencil çekirdek dizeyde öylesine çok sayıda sıfır olmayan terim ortaya çıkmaktadır) dizeylere yaklaştırım ile ayrıştırımını veren Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi ve bu yöntemin daha özel durumu olan yalnızca dışçarpımlardan oluşan dizeylerin ayrıştırımını olanaklı kılan, yeni geliştirilen Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlulandırımlı Dizey Gösterilimini içermektedir.

İncelenen çokdeğişkenli için ÇYÇG türünün seçimi, ilgili işleve yaklaştırımda daha iyi sonuçlar elde edebilmek adına önemli bir durumdur. 3. bölümde anlatıldığı gibi, uygun destek işlevleri altında baskın veya arı çarpımcıl işlevlerin yaklaştırımı için yalnızca ÇYÇG yöntemi oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Özdüzeyce baskın dizeylerin yaklaştırımı için ise ÇYÇÜDG yöntemi geliştirilmiştir. Dizey sonlu ya da sonsuz sayıda dışçarpımlardan oluştuğunda, her bir dış çarpımı ÇYÇÜDG ile ayrıştırarak bir çekirdek dizey oluşturulabilmektedir. Bu çekirdek dizeylerin birleşiminden okuçlu yapıda bir gösterilim üretilebilmektedir. Bu yeni yönteme ÇYÇODG adı verilmiştir.

Savda dikgen ayrıştırımlarla anlatılabilen sonsuz boyutlu yapılar üzerinde, öğelerde sonsuzluktan kesim almaksızın ÇYÇÜDG ve ÇYÇODG açılımları gerçekleştirilerek, yaklaştırımlar incelenmiştir. Bunun sayılı uygulayımcıl sağlanışı için, destek yöneyleri sırasayılarının evrik tamsayı üslülerini öğe alan yöneylerle orantılı yapılar kullanılmıştır. Bunların boyları ve aralarındaki iççarpımlar Riemann Zeta işlevinin tamsayı değişkenler üzerindeki değerlerinin kullanımını gündeme getirmiştir. Bu biçimde uygulayışlar gerçekleştirilmiştir.

Savın 5. bölümünde betikler aracılığıyla elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Her iki yöntem için de elde edilen sonuçlara bakıldığında, ayrıştırılmak istenen dizey ve ayrıştırım sonucu bulunan yapı arasındaki sapışın oldukça küçük, neredeyse sıfıra yakın düzeyde olduğu gözlemlenmiştir.

Bu iki yöntemin anlatımının yanı sıra, yöntemler arası geçişin olanaklı olup olmadığı araştırılmak istenmiştir. İki yöntem arasındaki yakınsaklık niteliğine yer verilmiştir. Okuçlu dizeyin sol üst köşesinden sonlu kesim alınarak, yine okuçlu yapıda sonlu boyutta bir dizey elde etmek ve bununla yaklaştırım yapmak olanaklıdır. Öte yandan, okuçlu dizeyi üçköşegencil yapıya getirip, sol üstten sonlu kesim alarak bir yaklaştırım yapmak da olanaklıdır. Okuçlu üzerinden yapılan yaklaştırım mı yoksa üçköşegencil çekirdek ile yapılan yaklaştırım mı daha iyi yakınsar diye incelenmiştir. Kesimden kaynaklanan yanılgı yakınsayış niteliğini etkilediğine ve üçköşegencilliğe geçişte var olan dönüşümün, bilgisayım karmaşıklığını arttıracağına dikkat çekilmiştir. İnceleyişler sonucunda, sonsuz boyutta okuçlu bir yapıdan üçköşegencil yapıya geçişin yalın dönüşümlerle sağlanamayacağı, döndürümün yetersiz kaldığı düşüncesine varılmıştır. Öte yandan, herhangi bir okuçlu dizeyin, ÇYÇODG kullanmaksızın, ÇYÇÜDG yöntemi ile ayrıştılabileceği olgusu biçimlenmiş ve bunun üzerine uygulayışlar gerçekleştirilmiştir. Uygulayışlar sonucunda herhangi bir okuçlu dizeyin, tekillik kısıtı olmaksızın ÇYÇÜDG yöntemi ile ayrıştırılabildiği ve bulunan dizeydeki sapışın bir önceki uygulamalara oranla çok daha küçük olduğu gözlemlenmiştir. Bu da, yöntemin gerçekten iyi çalıştığının bir göstergesi olarak yorumlanmıştır.

4. bölümde ayrıca, okuçlu bir dizeye ÇYÇÜDG uygulandığında sonuçta elde edilen dizeyin başlangıç dizeyinin terimleri ile ilintili olduğu düşüncesine yer verilmiştir. Dizey belirleniminde boyda yakınsaklık durumuna bağlı olarak seçimler yapıldığında, ÇYÇÜDG ayrıştırımı sonucunda özel durumlarla karşılaşılmıştır. Bunların birkaçına bu savda değinilmiş olup, üzerindeki araştırımlar sürdürülmektedir.

Sonuç olarak, sayılabilir sonsuz sayıda yatay ve düşey sıradan oluşan dizeylerin ayrıştırımına bir yaklaşım getirilmiştir. ÇYÇÜDG çok yeni olarak Demiralp ve onun topluluğundaki başkalarınca önerilmiş ve geliştirilmiş olsa da buradaki yapılardaki uygulanışı ve buna ek olarak ÇYÇODG de uygulayımcıl açıdan geliştirimde ve ayrık dizgeler üzerinde kullanımda bütünüyle özgündür.

KAYNAKLAR

[1] **Kolmogorov, A.N.** (1963). On the Representation of Continous Functions of Many Variables by Superposition of One Variable and Addition, *English Translation: American Math. Soc.*, ***2***, 55–59.

[2] **Sobol, I.M.** (1993). Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, ***1***, 407–414.

[3] **Rabitz, H. ve Alis, O.F.** (1999). General Foundations of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, ***25***, 197–233.

[4] **Rabitz, H.**, **Alis, O.F.**, **Shorter, J. ve Shim, K.** (1999). Efficient Input-Output Model Representations, *Computer Phys. Comm.*, ***117***, 11–20.

[5] **Shorter, J.**, **Ip, P.C. ve Rabitz, H.** (1999). An Efficient Chemical Kinetics Solver Using High Dimensional Model Representation, *J. Phys. Chem. A*, ***103***, 7192–7198.

[6] **Alis, O.F. ve Rabitz, H.** (2001). Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, ***29***, 127–142.

[7] **Li, G.**, **Rosenthal, C. ve Rabitz, H.** (2001). High Dimensional Model Representations, *J. Phys. Chem. A*, ***105***, 7765–7777.

[8] **Demiralp, M.** (2003). High Dimensional Model Representation and its Application varieties, *Mathematical Research*, ***9***, 146–159.

[9] **Tuna, S.** (2010). Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilim Yönteminde Çok Değişkenli İntegrallerin Sendelenimsizlik Yaklaştırımı ile Hesaplanması, *YL Tezi*, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.

[10] **Bodur, D.** (2013). Çarpımcıl Yapıda Olmayan Ağırlık İşlevleri Altında Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi ve Saptırım Açılımları, *YL Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.

[11] **Kurşunlu, A. ve Demiralp, M.** (2003). Additive and Factorized High Dimensional Model Representation Applications to the Multivariate Diffusion Equation under Vanishing Derivative Boundary Conditions, *Mathematical Research*, ***9***, 315–327.

[12] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2004). A Factorized High Dimensional Model Representation on the Partitioned Random Discrete Data, *Appl. Num. Anal. Comp. Math.*, ***1***, 231–241.

[13] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2005). A Factorized High Dimensional Model Representation on the Nodes of a Finite Hyperprismatic Regular Grid, *Applied Mathematics and Computation*, ***164***, 865–883.

[14] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2007). A Novel Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) Based on the Combination of Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representations, *WSEAS-2007 Proceedings, WSEAS 12-th International Conference on Applied Mathematics for Science and Engineering*, ***1***, 157–161.

[15] **Demiralp, M.** (2006). Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representation and the Effect on Their Types on Univariance Level, *WSEAS Transaction on Mathematics*, ***5***, 582–588.

[16] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2003). Hybrid HDMR Approximants and Their Utilizationin Applications, *Mathematical Research*.

[17] **Yaman, I. ve Demiralp, M.** (2004). High Dimensional Model Representation Approximation of an Evolution Operator with a First Order Partial Differential Operator Argument, *Appl. Num. Anal. Comp. Math.*, ***1***, 280–289.

[18] **Tuna, S.**, **Tunga, B.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2009). Fluctuation Free Matrix Representation Based Univariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR) Over Plain and Factorized HDMR, *2nd WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '09)*, 112–117.

[19] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2003). Data Partitioning via Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR) and Multivariate Interpolative Applications, *Mathematical Research*, ***9***, 447–462.

[20] **Li, G.**, **Wang, S.W.**,**Rosenthal, C.**, **ve Rabitz, H.** (2001). High-Dimensional Model Representations Generated from Low Order Dimensional Data Samples I.mp-CUT-HDMR, *J. Math. Chem.*, ***30***, 1–30.

[21] **Li, G.**, **Schoendorf, J.**, **Ho, T. ve Rabitz, H.** (2004). Multicut–HDMR with an Application to an Ionospheric Model, *Journal of Computational Chemistry*, ***25***, 1149–1156.

[22] **Li, G.**, **Wang, S.W. ve Rabitz, H.** (2002). Practical Approaches To Construct RS-HDMR Component Functions, *J. Phys. Chem. A*, ***106***, 8721–8733.

[23] **Li, G.**, **Artamonov, M.**, **Rabitz, H.**, **Wang, S.W.**, **Georgopoulos, P.G. ve Demiralp, M.** (2002). High-Dimensional Model Representations Generated from Low Order Terms lp RS HDMR, *Journal of Computational Chemistry*, ***24***, 647–656.

[24] **Demiralp, M.** (2006). Transformational High Dimensional Model Representation, *Lecture Series on Computer and Computational Sciences, Recent Progress in Computational Science and Engineering*, ***7A***, 128–131.

[25] **Yaman, I. ve Demiralp, M.** (2009). A New Rational Approximation Technique Based on Transformational High Dimensional Model Representation, *Numerical Algorithms*, ***52***(3), 385–407.

[26] **Gündoğar, Z.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2010). Basic Features of Conic Transformational High Dimensional Model Representation, *AIP Conf.*, ***1281***, 1930–1934.

[27] **Gündoğar, Z.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2011). Conic Transformational High Dimensional Model Representation in Comparison with Hermite-Pade Approximants, *AICT 2nd International Conf. On Applied Informatics and Computing Theory*, 45–51.

[28] **Demiralp, M.** (2010). New Generation HDMR Based Multiway Array Decomposers: Enhanced Multivariance Products Representation(EMPR), *Proceedings for 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science(ACS)*, 16.

[29] **Demiralp, M.** (2011). High Dimensional Model Representation (HDMR) and Enhanced Multivariate Product Representation(EMPR) as Small Scale Multivariate Decomposition Methods, *Proceedings of the 4th WSEAS International Conference on Finite Differences-Finite Elements-Finite Volumes-Boundary Elements(ECC'11 and F-and-B'11)*, 12–13.

[30] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2010). The Influence of the Support Functions on the Quality of Enhanced Multivariate Product Representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, ***48***, 827–840.

[31] **Okan, A.** (2011). Çok Değişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim Yönteminde Ağırlık Optimizasyonu, *YL Tezi*, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.

[32] **Tunga, B.** (2013). Möbius Transformational Enhanced Multivariance Product Representation Through Fluctuation Free Integration, *Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG '13)*, 196–200.

[33] **Özdemir, G ve Tunga, B.** (2013). Möbius Transformational Enhanced Multivariance Product Representation, *Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG '13)*, 217–221.

[34] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2010). Affine Transformational Enhanced Multivariance Product Representation(ATEMPR) and Its Relation to Rational Approximants, *Proceedings for 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science(ACS)*, 336–340.

[35] **Demiralp, E. ve Demiralp, M.** (2014). Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation(TMEMPR) for Matrix Decomposition, *Proceedings of 14th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, ***2***, 446–455.

[36] **Demiralp, E.** (2014). Weighted Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation of Finite Interval Data, *Proceedings of 14th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, ***2***, 441–445.

[37] **Özay, E.K. ve Demiralp, M.** (2014). Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation (TMEMPR) Studies: Decomposing the Planarly Unfolded Three-way Arrays, *Proceedings of 14th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, ***3***, 785–793.

[38] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). The influence of initial vector selection on Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation (TMEMPR), *The Proceedings of International Conference on Mathematics and Computers in Science and Industry*.

[39] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2014). Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariance Products Representation (TKEMPR) for Univariate Integral Operator Kernels, *The Proceedings of International Conference on Mathematics and Computers in Science and Industry*.

[40] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2014). Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariance Products Representation (TKEMPR) for Outer Product Sums: Arrowheading EMPR for Kernel(AEMPRK).

[41] **Segarra, E.** (2006). An Exploration of the Riemann Zeta Function and its Application to the Theory of Prime Number Distribution.

[42] **Edwards, H. M.** (2001). Riemann's Zeta Function.

EKLER

EK A.1

Riemann Zeta [41, 42] işlevinin tamsayılardaki değerleri Fourier taban kümesi kullanılarak belirlenebilmektedir.

C ile gösterilen c_k işlevlerinden oluşan bir taban kümesi düşünelim.

$$C \equiv \{c_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \tag{A.1}$$

Öyle ki, c_k işlevleri, x $[-\pi, \pi]$ kapalı aralığında tanımlı olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanabilir. Kosinüs salınım yapan ve salınımların sayısı birbirleri ile tamsayı ilişkiler içerisinde olan bir yapıya sahiptir. Öte yandan önemli nokta devirli oluşudur. Bu taban kümesi devirli işlevler için kullanılması gereken bir taban kümesidir.

$$c_k(x) \equiv a_k \cos(kx); \qquad k = 0, 1, ... \quad x \in [-\pi, \pi] \tag{A.2}$$

Buradan bir açılım yapıp, cos'ların doğrusal birleşimi olan bir anlatım elde edilirse, bu anlatım devirlilikten dolayı, yalnızca $[-\pi, \pi]$ aralığda değil tüm uzay için geçerli olur. Ancak asıl işlevi bir tek asal aralıkta, $[-\pi, \pi]$ aralığında gösterir.

c'lerin aralarındaki iç çarpım aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
(c_j, c_k) &\equiv a_j a_k \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(jx)\cos(kx) \\
&= a_j a_k \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\cos[(j+k)x] + \cos[(j-k)x]}{2} \\
&= \frac{a_j a_k}{2} \left(\frac{\sin[(j+k)x]}{j+k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin[(j-k)x]}{j-k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} \right) \\
&= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} & j = k \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \pi & j = k \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

j, k değerine eşit olduğu durumda, $(c_j, c_k) = 1$ olarak öngörülürse, c_k'nın boyu 1 olmuş olacaktır. Bu durumda,

$$\alpha_k^2 2\pi = 1 \qquad \alpha_k = \pm\sqrt{\frac{1}{\pi}} \tag{A.4}$$

olarak bulunacaktır. Buradaki iki im değişik seçeneğinden artılı olanın seçilişi yeğlenir. Bu biçimde burada bir c_k taban kümesi oluşturulmuş olunur.

$$c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \tag{A.5}$$

(**A.5**) eşitliği ile verilen yapılara, Fourier kosinüs toplamdizileri adı verilir. Çift işlevleri yansıtmak için kullanılırlar. Tek işlevler için ise, sinüse bağlı bir taban kümesi kullanılır.

Benzer biçimde S taban kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$S \equiv \{s_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{A.6}$$

Bu durumda, Fourier sinüs serileri, $k = 1, \ldots$ olmak üzere,

$$s_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \tag{A.7}$$

biçinde yazılabilir.

Bundan sonra, $x \in [-\pi, \pi]$ olacak biçimde, bir f işlevinin aşağıdaki gibi tanımlandığını öngörelim.

$$f(x) \equiv x^m \tag{A.8}$$

f işlevinin Fourier açımını yapabilmek için, $f(x)$ işlevi

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(c)} c_j(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(s)} s_k(x) \tag{A.9}$$

biçiminde genel olarak yazılabilir. İki değişik c_k'nın iççarpımın sıfır olması durumu, s_k'lar için de geçerlidir. Üstelik, iki farklı taban kümesinden seçilen herhangi iki terimin de iç çarpımı sıfır değerini verir. Bu demektir ki, kosinüs ve sinüs taban kümeleri aralarında dik olup, oluşturdukları kümeler birbirlerine dik özellik göstermektedir.

$f_j^{(c)}$ katsayısı (**A.9**) eşitliğinin her iki yanını c'lerden herhangi biri ile çarparak ve benzer biçimde $f_j^{(s)}$ katsayısı ise s'lerden herhangi biri ile çarpılarak elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \\
f_j^{(c)} &= (f, c_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(jx) && \text{(A.10)} \\
f_j^{(s)} &= (f, s_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(jx) && \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

$f(x)$ işlevi tanımdaki gibi yerine yazılarak katsayılara ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}
f_{j,m}^{(c)} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^m \cos(jx) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{j} \sin(jx) x^m \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m}{j} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^{m-1} \sin(jx) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m}{j} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^{m-1} \sin(jx) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m}{j^2} \cos(jx) x^{m-1} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m(m-1)}{j^2} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^{m-2} \cos(jx) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m}{j^2} [(-1)^j \pi^{m-1} - (-1)^j (-\pi)^{m-1}] - \frac{m(m-1)}{j^2} f_{j,m-2}^{(c)} \\
&= \frac{\pi^{m-\frac{3}{2}} m}{j^2} (-1)^j [1 + (-1)^m] - \frac{m(m-1)}{j^2} f_{j,m-2}^{(c)} && \text{(A.12)}
\end{aligned}$$

Bu özyineleyiş,

$$f_{j,0}^{(c)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(jx) \tag{A.13}$$

tümlevinin bilinişi durumunda eşsiz olarak çözülebilir. $m = 0$ ise,

$$f_{j,0}^{(c)} = \delta_{j,0} 2\sqrt{\pi} \tag{A.14}$$

$$\text{m çift ise} \quad f_{j,2m}^{(c)} \neq 0 \tag{A.15}$$

$$\text{m tek ise} \quad f_{j,2m+1}^{(c)} = 0 \tag{A.16}$$

olmak durumundadır.

Benzer biçimde,

$$\begin{aligned}
f_{j,m}^{(s)} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^m \sin(jx) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{j} \cos(jx) x^m \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m}{j} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^{m-1} \cos(jx) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{j} [(-1)^j \pi^m - (-1)^j (-\pi)^m] + \frac{1}{\pi} \frac{m}{j^2} \sin(jx) x^{m-1} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m(m-1)}{j^2} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^{m-2} \sin(jx) \\
&= \frac{\pi^{m-\frac{1}{2}} m}{j^2} (-1)^j [1 + (-1)^m] - \frac{m(m-1)}{j^2} f_{j,m-2}^{(s)}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Bu özyineleyiş,

$$f_{j,0}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(jx) \tag{A.18}$$

tümlevinin bilinişi durumunda eşsiz olarak çözülebilir

$$\text{m çift ise} \quad f_{j,2m}^{(s)} = 0 \tag{A.19}$$

$$\text{m tek ise} \quad f_{j,2m+1}^{(s)} \neq 0 \tag{A.20}$$

olmak durumundadır.

Buradan gidilerek Zeta işlevleri çözümcül olarak belirlenebilir.

Eğer m tek sayı ise $[-\pi, \pi]$ aralığında gerekli düzenleyişler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2\pi^m}{m+1} \\
f_j^{(c)} &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2i+1} \frac{(-1)^{j+i} (2i+1)! \pi^{m-2i-1}}{j^{2i+2}}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

elde edilir. Bu durumda, $f(x) = x^m$ işlevi için,

$$\sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2i+1} (-1)^i (2i+1)! \pi^{m-2i-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^{2i+2}} \cos(jx) = \frac{\pi}{2} \left(x^m - \frac{\pi^m}{m+1} \right) \tag{A.22}$$

Benzer biçimde, m değeri tek ise,

$$f_j^{(s)} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} \binom{m}{2i} \frac{(-1)^{j+i+1} (2i)! \pi^{m-2i}}{j^{2i+1}} \tag{A.23}$$

ile bulunan katsayılar yardımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} \binom{m}{2i} (-1)^{i+1} (2i)! \pi^{m-2i} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^{2i+1}} \sin(jx) = \frac{\pi}{2} x^m \qquad \textbf{(A.24)}$$

(**A.22**) eşitliğinde $x = \pi$ ve $m = 2$ alındığında,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \qquad \textbf{(A.25)}$$

olacaktır. Bu durumda $\zeta(2)$ işlevi yazılabilir.

$$\zeta(2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \textbf{(A.26)}$$

En genel durumuyla, (**A.22**) eşitliği $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x = \pi$ ve $m = 2k$ için aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{2k}{2i-1} (-1)^{i-1} (2i-1)! \pi^{2k-2i-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2i}} = \frac{k\pi^{2k+1}}{2+1} \qquad \textbf{(A.27)}$$

Zeta işlevleri (**A.27**) eşitliğinden gelmektedir.

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} k \pi^{2k}}{(2k+1)!} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^{k+j+1} \pi^{2k-2j}}{(2k-2j+1)!} \zeta(2i) \qquad \textbf{(A.28)}$$

EK A.2

Savda Riemann Zeta iļevleri kullanılarak sonsuz dizeylerde ayrıştırım yapılmıţır. Bu ayrıştırım için öncelikle dikgenleştirim yapılmaktadır.

Riemann Zeta işlevlerine uyumlu olarak $\mathbf{v}_k$ yöney takımının aşağıdaki gibi seçildiği düşünülsün.

$$\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2^k} \\ \frac{1}{3^k} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \textbf{(A.29)}$$

En genel durumuyla, $\mathbf{v}_k$ taban takımı

$$[\mathbf{v}_k]_i \equiv \frac{1}{i^k} \qquad \textbf{(A.30)}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{v}$ yöneylerinin iççarpımlarından oluşan dizey Gram dizeyi olarak adlandırılmaktadır ve her bir elemanı, ζ Riemann zeta işlevlerini simgelemek üzere, (**A.31**) ile anlatılır.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_k &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^j} \frac{1}{i^k} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{j+k}} \\ &= \zeta(j+k) \end{aligned} \qquad \textbf{(A.31)}$$

$\mathbf{G}(\mathbf{v})$, Gram dizeyini simgelemek üzere, dizey (**A.32**) eşitliği biçiminde yazılmaktadır.

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_n \\ \vdots & \ddots & & \\ \mathbf{v}_n^T\mathbf{v}_1 & & \cdots & \mathbf{v}_n^T\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \tag{A.32}$$

Yalnızca Zeta değerlerini kullanarak Gram dizeyini oluşturmak ve onun üzerinden sonlulaştırım olanaklıdır. Sonlulaştırılmış Gram dizeyine Cholesky ayrıştırımı uygulayarak birbirine dik yöneylerden oluşan yeni bir yöney takımı elde edilebilir.

Cholesky ayrıştırımı ile içerisinde tekillik bulundurmayan, alt üçgensel $\mathbf{L}$ dizeyi elde edilir.

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \tag{A.33}$$

Bu açılımdan yararlanılarak, $\mathbf{v}$ taban takımından dikgen ve birimboylu yeni $\mathbf{u}$ yöneyleri üretilebilir. $\mathbf{v}$ taban takımı üzerindeki Cholesky yapısı dikgeniği sağlamaktadır.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} (\mathbf{L}^T)^{-1} \tag{A.34}$$

$\mathbf{L}$ dizeyinin devriğinin evriğinin üst üçgencil yapısından ötürü, $\mathbf{u}_1$ $\mathbf{v}_1$ ile orantılı; $\mathbf{u}_2$ $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ ile orantılı; ve benzer olacak biçimde gelişen yapılar ortaya çıkmaktadır.

$\mathbf{u}$ yöney takımının ilk dört teriminin $\mathbf{v}$ yöney takımı ile olan ilişkisi aşağıdaki biçimde verilmektedir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{\zeta(2)}} \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}} - \frac{\mathbf{v}_1\zeta(3)}{\zeta(2)\sqrt{\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}} \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\sqrt{\zeta(6) - \frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)} - \frac{\left(\zeta(5) - \frac{\zeta(4)\zeta(3)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}}} \\
&- \frac{\mathbf{v}_2[\zeta(2)\zeta(5) - \zeta(3)\zeta(4)]}{\zeta(2)\left[\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}\right]\sqrt{\zeta(6) - \frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)} - \frac{\left(\zeta(5) - \frac{\zeta(4)\zeta(3)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}}} \\
&+ \frac{\mathbf{v}_1\left[\zeta(2)\zeta(3)\zeta(5) - \zeta(3)^2\zeta(4) - \zeta(2)\zeta(4)\left(\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}\right)\right]}{\zeta(2)^2\left[\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}\right]\sqrt{\zeta(6) - \frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)} - \frac{\left(\zeta(5) - \frac{\zeta(4)\zeta(3)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}}} \\
\mathbf{u}_4 &= \frac{\mathbf{v}_4}{\sqrt{\zeta(8) - \frac{\zeta(5)^2}{\zeta(2)} - \frac{\left(\zeta(6) - \frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}} - \frac{\left[\zeta(7) - \frac{\zeta(4)\zeta(5)}{\zeta(2)} - \frac{\left(\zeta(6) - \frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)\left(\zeta(5) - \frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)}{\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]^2}{\zeta(6) - \frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)} - \frac{\left(\zeta(5) - \frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4) - \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mathbf{v}_3\left[\zeta(7)-\frac{\zeta(4)\zeta(5)}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]}{\left[\zeta(6)-\frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]} \\
&\times\frac{1}{\sqrt{\zeta(8)-\frac{\zeta(5)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}-\frac{\left[\zeta(7)-\frac{\zeta(4)\zeta(5)}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]^2}{\zeta(6)-\frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}}}} \\
&+\frac{\mathbf{v}_2}{\left(\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}\right)\left[\zeta(6)-\frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]} \\
&\times\frac{1}{\sqrt{\zeta(8)-\frac{\zeta(5)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}-\frac{\left[\zeta(7)-\frac{\zeta(4)\zeta(5)}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]^2}{\zeta(6)-\frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}}}} \\
&\times\left[\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)\left[\zeta(7)-\frac{\zeta(4)\zeta(5)}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]\right. \\
&\left.-\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)\left[\zeta(6)-\frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]\right] \\
&+\frac{\mathbf{v}_1}{\zeta(2)\left(\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}\right)\left[\zeta(6)-\frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]} \\
&\times\frac{1}{\sqrt{\zeta(8)-\frac{\zeta(5)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}-\frac{\left[\zeta(7)-\frac{\zeta(4)\zeta(5)}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right]^2}{\zeta(6)-\frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}}}} \\
&\times\left[\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(4)^2}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^2}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right)\left(\zeta(3)\zeta(6)-\sqrt{\zeta(2)}\zeta(3)^2\zeta(5)\right.\right. \\
&\left.-\zeta(5)\left(\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}\right)\right)-\left(\zeta(3)\zeta(5)-\sqrt{\zeta(2)}\zeta(3)^2\zeta(4)-\zeta(4)\left(\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}\right)\right) \\
&\left.\left(\zeta(7)-\frac{\zeta(4)\zeta(5)}{\zeta(2)}-\frac{\left(\zeta(6)-\frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\zeta(2)}\right)\left(\zeta(5)-\frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)}{\zeta(4)-\frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)}}\right)\right]
\end{aligned}
\qquad \textbf{(A.35)}
$$

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Gizem ÖZDEMİR

Doğum Yeri ve Tarihi: Zonguldak 01/06/1990

Adres: İstanbul

E-Posta: gizmozdemir@gmail.com

Lisans: Galatasaray Üniversitesi Matematik Bölümü

Y. Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Mesleki Deneyim ve Ödüller:
Galatasaray Üniversitesi Matematik Bölümü - Bölüm Birincisi

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- Metin Demiralp, **Gizem Özdemir**, 2015: *Arrowheaded Enhanced Multivariance Products Representation for Matrices (AEMPRM): Specifically Focusing on Infinite Matrices and Converting Arrowheadedness to Tridiagonality*, ICCMSE, March 20-23, 2015 Athens, Greece