

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**ÇOK YÖNLÜ DİZİLERİN ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ
ÇARPIMLAR GÖSTERİLİMİ ARACILIĞIYLA
AYRIŞTIRIMI ve UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

Evrım KORKMAZ ÖZAY

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

NİSAN 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**ÇOK YÖNLÜ DİZİLERİN ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ
ÇARPIMLAR GÖSTERİLİMİ ARACILIĞIYLA
AYRIŞTIRIMI ve UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

**Evrım KORKMAZ ÖZAY
(702082004)**

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

NİSAN 2015

İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702082004 numaralı Doktora Öğrencisi **Evrin KORKMAZ ÖZAY**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**ÇOK YÖNLÜ DİZİLERİN ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR GÖSTERİLİMİ ARACILIĞIYLA AYRIŞTIRIMI ve UYGULAMALARI**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Metin DEMİRALP**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA**
Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Zehra ÇATALTEPE
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. F. Aylin SUNGUR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Tolga Esat Özkurt
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **15 Aralık 2014**

Savunma Tarihi : **10 Nisan 2015**

Erdoğan Özyay'ın anısına,

ÖNSÖZ

Doktora süreci boyunca bana her türlü desteği vermiş, tez çalışması sırasında bana cesaret ve yön veren değerli hocam, Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması sırasında bana daima yol göstermesi, desteği, tez çalışmama ve bana yapmış olduğu bilimsel katkıları nedeniyle değerli hocam, Prof. Dr. Zehra ÇATALTEPE'ye çok teşekkür ederim.

Doktora tez çalışmama bakış açısı, yorumları, yönlendirmesi ile eşsiz katkılar sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Bülent SANKUR'a çok teşekkür ederim. Yüksek Lisans'tan bu yana her türlü bilimsel desteği benden esirgemeyen değerli hocam N. Abdülbaki BAYKARA'ya tez çalışmasında vermiş olduğu desteğinden ötürü çok teşekkür ederim.

Her ihtiyacım olduğunda tez konusunda bilimsel destek sağlayan değerli hocam, M. Alper TUNGA'ya çok teşekkür ederim.

Hocam ve aynı zamanda sevgili arkadaşım Yard. Doç. Dr. Burcu TUNGA'ya tez süresi boyunca daima yanımda olduğu için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması sırasında her türlü zorluklarda yanımda olan sevgili arkadaşım Süha TUNA'ya, çok uzaklardayken bile beni dinleyen değerli arkadaşım Dr. Birkan TUNÇ'a çok teşekkür ederim.

İTÜ Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu'nun tüm üyelerine güzel ve verimli bir araştırma ortamı oluşturdukları için en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez çalışması kapsamında araştırmalarım için gerekli ortamı ve makina desteğini sağlayan İTÜ Bilişim Enstitüsü Müdürlüğü'ne ve çalışanlarına çok teşekkür ederim.

Annem Saher AL'a ve kardeşlerim, Eylem, Gül, Ezgi, Eda, Mahsun'a her ihtiyacım olduğunda desteklerini benden esirgemedikleri için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak sevgili eşim Serdar ÖZAY'a ve canım kızım Mira'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım, bu çalışma sizinle mutlu bir teze dönüştü.

Nisan 2015

Evrin KORKMAZ ÖZAY

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ.....	1
2. PROBLEMİN ALTYAPISI.....	7
2.1 Problemin Amacı ve Önemi	7
2.2 Çok Yönlü Diziler	8
2.3 Ayırıştırım Yöntemleri.....	11
2.3.1 Dizey ayırıştırım yöntemleri.....	11
2.3.2 Çok yönlü dizilerde ayırıştırım yöntemleri	13
3. AYRIŞTIRIM TEKNİĞİ OLARAK YBBG ve ÇYÇG.....	17
3.1 Ayrık Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi.....	17
3.1.1 YBBG bileşenlerinin hesaplanması.....	18
3.1.1.1 Örnek	20
3.2 Ayrık Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi	22
3.2.1 ÇYÇG bileşenlerinin belirlenimi.....	23
3.2.1.1 Örnek	25
3.2.2 YBBG ve ÇYÇG yöntemlerinin sayıclı karşılaştırımı	27
4. ÇYÇG TABANLI YENİ AÇILIMLAR	29
4.1 ÇYÇG Tabanlı Yeni Açılımlar	29
4.1.1 Küçük Ölçeklerde ÇYÇG.....	29
4.1.2 İndirgeyimci Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi ...	29
4.1.2.1 3-Yönlü diziler için uygulama-1.....	32
4.1.2.2 3-Yönlü diziler için uygulama-2 : Elemeli İ-ÇYÇG	33
4.1.2.3 Örnek	34
4.1.2.4 3-Yönlü diziler için uygulama-3 : Yineleyişli İ-ÇYÇG	34
4.1.2.5 Örnek	34
4.1.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi.....	35
4.1.3.1 Örnek	38
4.1.4 ÇYÇÜDG'de ağırlık kullanımı.....	39
5. ÇOK YÖNLÜ DİZİLERDE ÇYÇG TABANLI AYRIŞTIRIM UYGULAMALARI.....	41

5.1 Çok Yönlü Dizilere Yaklaştırım	41
5.2 Görüntü Yapılandırımı.....	44
5.2.1 KÖ-ÇYÇG ile görüntü yapılandırımı	45
5.2.2 ÇYÇÜDG ile görüntü yapılandırımı	50
5.3 Yüz Tanıma.....	55
6. SONUÇLAR.....	59
KAYNAKLAR.....	63
EKLER	67
ÖZGEÇMİŞ	79

KISALTMALAR

YBBG	: Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi
HDMR	: High Dimensional Model Representation
ÇYÇG	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi
İ-ÇYÇG	: İndirgemeli Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi
ÇYÇÜDG	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi
KÖ- ÇYÇG	: Küçük Ölçeklerde Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi
TDA	: Tekil Değer Ayırıştırımı
TBA	: Temel Bileşen Analizi
CP	: Candecomp & Parafac
BEBBYT	: Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1: Çok Yönlü Dizi Ayırıştırım Yöntemleri.....	14
Çizelge 3.1: Farklı Veri Kümeleri için YBBG ve ÇYÇG Karşılaştırması.	27
Çizelge 4.1: Farklı Yapay Veriler İçin İndirgemeli Ayırıştırım ve ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.....	33
Çizelge 4.2: Farklı Sentetik Veriler ($\mathcal{X}^{(3,4,5)}$) İçin Elemeli İndirgemeli Ayırıştırım ve ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.....	34
Çizelge 4.3: $\mathcal{X}^{(3,4,5)}(i, j, k) = i^3 + j^2 + k^2$ Dizisi İçin Elemeli İndirgemeli Ayırıştırım Bağlı Yanılgı Değerleri ve Açılım Yönleri.....	35
Çizelge 5.1: Toplamsal Nitelikte Çok Yönlü Veri Kümeleri için ÇYÇG Yaklaşırımı.....	42
Çizelge 5.2: Çarpımsal Nitelikte Çok Yönlü Veri Kümeleri için ÇYÇG Yaklaşırımı.....	42
Çizelge 5.3: Amino Veri Kümesi için Bağlı Yanılgı Değerleri.....	43
Çizelge 5.4: Amino Veri Kümesi için İndirgemeli Ayırıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.....	43
Çizelge 5.5: Amino Veri Kümesi için Elemeli İndirgemeli Ayırıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.....	43
Çizelge 5.6: Nose Veri Kümesi için Bağlı Yanılgı Değerleri.....	43
Çizelge 5.7: Nose Veri Kümesi için İndirgemeli Ayırıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.....	43
Çizelge 5.8: Nose Veri Kümesi için Elemeli İndirgemeli Ayırıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.....	44
Çizelge 5.9: Bonnie Veri Kümesi için Bağlı Yanılgı Değerleri.....	44
Çizelge 5.10: Bonnie Veri Kümesi için İndirgemeli Ayırıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.....	44
Çizelge 5.11: Bonnie Veri Kümesi için Elemeli İndirgemeli Ayırıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.....	44
Çizelge 5.12: ÇYÇÜDG ile 25, 50, 100 Özyineleyiş ile Yaklaşırımın Bağlı Yanılgı Değerleri.....	51
Çizelge 5.13: Golfer Görüntüsü için ÇYÇÜDG'nin Farklı Özyineleyişlerinden Elde Edilen Bağlı Yanılgı Değerleri.....	53
Çizelge 5.14: Tiger Görüntüsü İçin ÇYÇÜDG'nin Farklı Özyineleyişlerinden Elde Edilen Bağlı Yanılgı Değerleri.....	54
Çizelge 5.15: ORL Veri Tabanı için TDA ile ÇYÇÜDG Başarım Karşılaştırması (Accuracy) (%)......	56

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : 3-Yönlü Dizi.....	9
Şekil 2.2 : 3-Yönlü Tucker Ayrıştırımı.	14
Şekil 2.3 : 3-Yönlü CP Ayrıştırımı.....	15
Şekil 5.1 : Asıl Görüntü.	46
Şekil 5.2 : Yalın ÇYÇG Yaklaştrarı ve 25 Altkesimde ÇYÇG Yaklaştrarı.	46
Şekil 5.3 : 900 Altkesimde ve 2500 Altkesimde ÇYÇG Yaklaştrarı.	47
Şekil 5.4 : Asıl Görüntü.	48
Şekil 5.5 : ÇYÇG Yaklaştrarı ve 16 Altkesimde ÇYÇG-0 Yaklaştrarı.	48
Şekil 5.6 : 256 Altkesimde ve 4096 Altkesimde ÇYÇG-0 Yaklaştrarı.	49
Şekil 5.7 : 256 Altkesimde İ-ÇYÇG-2 Yaklaştrarı.	49
Şekil 5.8 : 100 Altkesimde ÇYÇG-0 Yaklaştrarı.	50
Şekil 5.9 : 3600 Altkesimde ÇYÇG-0 Yaklaştrarı.	51
Şekil 5.10 : Asıl Görüntü ve 25 Özyineleyiş ile ÇYÇÜDG Yaklaştrarı.	51
Şekil 5.11 : 50 ve 100 Özyineleyiş ile ÇYÇÜDG Yaklaştrarı.	52
Şekil 5.12 : Esas Görüntü ve 5 Özyineleyiş ile ÇYÇÜDG Yaklaştrarı.....	52
Şekil 5.13 : 25 ve 150 Özyineleyiş ile ÇYÇÜDG Yaklaştrarı.	53
Şekil 5.14 : Esas Görüntü ve 5 Özyineleyiş İçin ÇYÇÜDG Yaklaştrarı.	54
Şekil 5.15 : 25 ve 150 Özyineleyiş İçin ÇYÇÜDG Yaklaştrarı.	54
Şekil 5.16 : ORL Veritabanından Seçilmiş Eğitim Kümesinden Örnekler.	55
Şekil A.1 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile ÇYÇÜDG Yaklaştrarı.	74
Şekil A.2 : 10 ve 150 Özyineleme ile ÇYÇÜDG Yaklaştrarı.	74
Şekil A.3 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile TEMPLR Yaklaştrarı.	75
Şekil A.4 : 10 ve 150 Özyineleme ile TEMPLR Yaklaştrarı.	75
Şekil A.5 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile TEMPLR Yaklaştrarı.	76
Şekil A.6 : 25 ve 150 Özyineleme ile TEMPLR Yaklaştrarı.	76
Şekil A.7 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile TEMPLR Yaklaştrarı.	77
Şekil A.8 : 10 ve 150 Özyineleme ile TEMPLR Yaklaştrarı.	77
Şekil A.9 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile TEMPLR Yaklaştrarı.	78
Şekil A.10 : 10 ve 150 Özyineleme ile TEMPLR Yaklaştrarı.	78

ÇOK YÖNLÜ DİZİLERİN ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR GÖSTERİLİMİ ARACILIĞIYLA AYRIŞTIRIMI ve UYGULAMALARI

ÖZET

Bu savın düzenlenim aşamasında, günümüzde yüksek boyutlu veri çözümleğinde (analizde) ve işleyişinde sıklıkla kullanılan çok yönlü dizi yapılarının ayrıştırımı için Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) tabanlı ayrıştırım yönteminin uygulanım olanakları araştırılmıştır. Çok yönlü dizi, 1-yönlü dizi olarak tanımlayabileceğimiz yöneylerin (vektörler) ve 2-yönlü dizi olarak tanımlayabileceğimiz dizelerin (matrisler) genelleştirilmiş durumudur. Çok yönlü dizi ayrıştırımı ise dizey ayrıştırımında olduğu gibi, N -yönlü bir diziyi her biri özüne özgü değişik nitelikleri taşıyacak biçimde ögelere ya da bileşenlere ayırmaktır. Genel olarak N -yönlü dizilerin ayrıştırımı için çokludoğrusal cebir (ing: multilinear algebra) tabanlı yöntemler kullanılmaktadır. Sav kapsamında gündeme alınan ayrıştırım yöntemleri ise sayıtçıl (istatistiksel) bir açılım yöntemi olan ÇYÇG'ni taban almaktadır. Bir N -yönlü dizi için ÇYÇG ise N sayıda destek yöneyi ve bunların dışında bir değişmez bileşen, N sayıda 1-yönlü bileşen, $N(N-1)/2$ sayıda 2-yönlü bileşen ve bu biçimde gittikçe artan yönlülüğü olan 2^N sayıda bileşenden oluşmaktadır. Kuşkusuz, uygulamalarda bu düzeyde çok bileşen ile çalışmak sayısal bir indirgeyiş sağlamayacağından bu gösterilimi kesimcil uygulayarak ilgili çok yönlü diziyi en iyi biçimde anlatabilen sayıda bileşen kullanılmaktadır.

Sav düzenleyişi kapsamında ÇYÇG ile çok yönlü dizilerin ayrıştırımı dışında ÇYÇG tabanlı 3 değişik ayrıştırım yöntemi türetilmiştir. Bunlardan ilki olan İndirgeyimcil ÇYÇG (İ-ÇYÇG), ÇYÇG'nin sayıtçıl (istatistiksel) özelliklerinin yanısıra izgecil özellikler de taşıdığından melez bir yöntem olarak görülebilir. Bu yöntemde, erekteki (hedefteki) çokludizi, iki çarpanlı toplamlar yapısında ayrıştırılır. Çarpımdaki toplam yön sayısı değişmemek koşuluyla, çarpanların her birinde istenilen sayıda yön alınabilir. Ancak, ilk çarpanlarda hep eş sayıda yön bulunmalıdır. Buradaki uygulamalarda, çarpanlardan biri yöney (bir yönlü dizi) alınmış ve böylece diğer çarpanda yön sayısı 1 düşürülebilmştir. Savda, bu biçimdeki İndirgeyimcil ÇYÇG çok yönlü dizi yaklaşıtırmında uygulanmış ve sonuçları uygulama bölümünde verilmiştir. Yönlerin iki çarpana dağıtımı olgusu eşsiz değildir. Üstelik, ardışık olarak yön değişimlerine yol açabilen seçimler de gündeme getirilebilmiş ve yaklaşıtırm niteliği olumlu etkilenebilmiştir.

Öbür açılım yöntemlerinden biri olan Küçük Ölçeklerde ÇYÇG (KÖ-ÇYÇG) ise veri küme'sini altkesimlere ayırarak her bir altkesimde ÇYÇG yöntemini uygulayış görüşüne dayanmaktadır. KÖ-ÇYÇG yöntemi daha küçük bir uzamcıl alanda (geometrik bölgede) ÇYÇG'nin daha iyi yakınsayış sağlayacağını kanıtlar niteliktedir. Ayrıca bu ilerisürümün doğruluğu görüntü geri çatma (ing : image reconstruction) gibi gerçek yaşam uygulayışları üzerinde gösterilmiştir. Bu yöntem köklerini Sav Danışmanı olan Metin Demiralp'in önderliğindeki Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) araştırmalarında yer alan "Sıfır Oylumda ÇYÇG"

inceleyişlerinden almaktadır. Bu ise “Sıfır Oylumda YBBG (Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim, ing: High Dimensional Model Representation–HDMR)” inceleyişlerinin ÇYÇG uyarlanmasıdır. Bu araştırmalarda, YBBG ya da ÇYÇG’nin üzerine kurulduğu uzamcıl (geometrik) bölgenin uygun bir biçimde ölçeklendiğinde ve, ölçeğin bölgeyi noktaya dönüştüreceği biçimde sıfıra götürülüşünde, değişmezliğin sonsuz baskınlığa erişeceği gösterilmiştir. Yazarın da bu doğrultuda bir yazısı bulunmaktadır. Bu baskınlık, “Sıfır Oylum Yaklaşırımı” olarak adlandırılan bir çizemin (ing: scheme) ÇYÇG uygulamalarında kullanılabileceğini akla getirmiş ve savda bu doğrultuda da adımlar atılmıştır.

Savda kullanılan ve ÇYÇG’nden türetilmiş üçüncü yöntem olan Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇGÜDG) ise her ne düzeyde ÇYÇG tabanlı olsa da özüne özgü özyineleyişli bir yapı olarak ortaya çıkmıştır. Dizelerin dördül (kare) de olsalar dikdörtgen de olsalar, üçköşegencil (ing: tridiagonal) bir yapıya dönüştürülüşleri için geçerli olan ve işlerlik düzeyi yüksek olan bir araç olarak yapılandırılmıştır. ÇYÇÜDG’nin çok yönlü dizi ayrıştırım yöntemi olarak başarımı görüntü geri çatış ve yüz görüntüsü irdeleyiş (ing : face image retrieval) sistemi çalışmalarında gözlemlenmiştir. Savda bu doğrultuda yeterince bildirim verilmektedir.

Bu çalışma kapsamında üretilen her bir yöntem özgün olup her birinin değişik alanlardaki başarımı ilgili çok yönlü dizinin nicel ve nitel özelliklerine bağlı olduğu düzeyde kullanılan ayrıştırım yönteminin niteliğine de bağlıdır. Bu nedenle, çok yönlü dizi biçiminde anlatılabilen bir veri küme’sinin ayrıştırımının nasıl yapılacağı sorusu da aslında bu ayrıştırımın bileşenlerinin ya da tümünün ne amaçla kullanılacağı ile ilintilidir. Savda, olgunun bu yanına da özen gösterimi için ilgi çekici bir anlatım sergilenimine çabalanmıştır.

MULTI-WAY ARRAY DECOMPOSITION via ENHANCED MULTIVARIANCE PRODUCT REPRESENTATION and APPLICATIONS

SUMMARY

The basic focus of this PhD thesis is the Multi-way Array Decomposition which is frequently used for high dimensional data analysis and processing. High dimensionality can be considered in two different ways. First of all very large data sets can be categorized in high dimensionality. Secondly, matrices which have more than two directions can be considered as high dimensional and these data sets are expressed by multi-way data sets or multi-way arrays. A multi-way array can be taken as generalization of vectors which can be defined 1-way arrays and matrices that can be defined as 2-way arrays. Generally analyzing or processing a multi-way array needs a decomposition technique to get clear idea on relationships of different components or different ways. Decomposition of a multi-way array is to separate a multi-way array into components such that each of them shows different characteristics. Most of the recent researches on the applied sciences shows that matrix decomposition based methods are insufficient for multi-dimensionality in terms of ways. The underlying reason is that the matrix based methods do not capture the correlations between the ways. This causes information loss while analyzing data set with multi-way structure and it may cause wrong inference. Thus, multi-way array decomposition is an important area for dimensionality reduction of high dimensional data sets.

Multi-way array decomposition based on Enhanced Multivariate Product Representation (EMPR) has been kept at the focus in this thesis study. Generally multi-linear algebra based methods are used for multi-way array decomposition. However for this study a statistical expansion, EMPR, based methods have been chosen for decomposing multi-way arrays. EMPR is a generalization of High Dimensional Model Representation (HDMR). HDMR is proposed by Sobol to represent multivariate functions with the less variate function components and its usage has been pervaded for different applications. The basic property of HDMR is that the determination of the components can be accomplished if the geometry is orthogonal. However even if the geometry is orthogonal HDMR can be still insufficient for the representation. This kind of situations occur if the target function structure is far from the additivity because HDMR is purely an additive expansion. That is the reason why EMPR has been arisen.

The main difference between EMPR and HDMR is the existence of the support terms of EMPR. Support terms participate in HDMR expansion as multiplication of one-way arrays. However this participation is done in such a way that all terms have the same number of ways. The efficiency of support terms has been shown for multi-way arrays by comparing HDMR and EMPR approximation results on synthetic multi-way data sets. The results are supported for the conjecture that HDMR works better on multi-way arrays which have additive structure.

EMPR for an N -way array comprises 2^N additive terms each of which is a product of an EMPR component with a sufficient number of compatible support arrays. Amongst the components, one is a scalar which is multiplied by all support arrays to form the first additive term of EMPR while N number of components are one-way arrays which are multiplied by the all support arrays except the one depending on the same independent variable of the relevant component to form the univariate terms. The number of the bivariate terms is $N(N - 1)/2$ each of which contains a bivariate component as the factor and other additive terms contain components with increasing number of ways. Despite EMPR is an expansion composed of a finite number of additive terms, this number may be extremely big in the practical applicational sense when the number of the independent variables grows. Then, certainly this kind of expansion is needed to be truncated such that it approximates the target multi-way array in the best approximation quality. This truncation is necessary because in practice; ity a decomposition technique with so many omponents does not provide any efficient numerical reduction on multi-way data.

Another necessity for the usage of EMPR on multi-way array is to find the optimal support terms to catch the best approximation with truncation. During the research of this necessity different kind of methods have been arosen for different kind of applications. In this manner three different EMPR based decomposition techniques have been developed apart from EMPR itself for multi-way arrays and they are reported in this thesis.

First of these methods is Reductive Enhanced Multivariance Product Representation (R-EMPR), R-EMPR can be regarded as a hybrid method because of it's spectral features as well as statistical structure. With Reductive Multilinear Array Decomposition (RMAD) it is possible to decompose an N -way array into a 1-way array and $(N - 1)$ -way array by using spectral features of N -way array. However R-EMPR offers a different utilization of RMAD. R-EMPR uses the 1-way outputs of RMAD as support terms. This kind of support array determination gives the flexibility to algorithm for choosing different combination of RMAD outputs. For example, support arrays can be changed in accordance with the order of reduced ways. Also it is possible to design a tree algorithm to choose for best support array determination. R-EMPR is applied on the approximation problem of multi-way arrays. The multi-way arrays are chosen from the real chemical experiments and the results are reported on the applications section.

The second method, Small Scale EMPR, is based on a philosophy such that dividing the data set into small sub-datasets and applying EMPR on each piece. Small Scale philosophy was first used for HDMR and quite remarkable results have been produced. However small scale HDMR was developed for multivariate functions, thus continuous entries.

This is the first study that implements Small Scale philosophy on multi-way arrays. The basic idea of Small Scale EMPR is that, on smaller geometries, EMPR (or HDMR) gets better convergence for constant approximation (Zero degree truncation of EMPR expansion). According to this idea a multi-way array has been divided into small pieces and on each sub-array EMPR has been applied at most first order approximation. After combining the components of sub-array decompositions then the entire approximation has been calculated cumulatively. The algorithm's performance has been shown on real-life applications such as image reconstruction in this thesis'

relevant sections.

Third of the developed methods is Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR). TMEMPR has specific features compared with the other EMPR based decomposition techniques. First of all, TMEMPR is always first order approximation because it has been constructed for matrices which are bivariate entities in elements. Thus the matrix EMPR contains just four additive terms. However its consecutive use in the decomposition of the residual matrices increases the number of the additive terms. This recursive scheme stops at the smallest edge of the rectangularity if the matrix has an empty null space adjoint to the smallest edge. The resulting decomposition's kernel matrix is however in a tridiagonal format and therefore it has been named as Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation.

Despite TMEMPR has been designed for only two-way arrays its utilization can be extended for multi-way array decomposition and it can be done by using planar unfoldings of three-way arrays. In this sense it has been focused on the decomposition of the planarly unfolded three-way arrays with an application on images.

TMEMPR is constructed on the EMPR method base however it's main properties are quite different. For example while EMPR terms go to the number of way, TMEMPR terms can go to the number of small dimensionality of the array. Another difference between EMPR and TMEMPR is the determination of the components, EMPR components are found via statistical perspective while TMEMPR uses linear algebraic methods like matrix-vector multiplications to find the components. In this thesis we also have studied how to use this new method on the multi-way arrays. To this end a known transformation technique from multi-way arrays to matrices has been used. We first unfold the multi-way array and then use TMEMPR, after the truncation matrix is folded back into the multi-way array we obtain the approximation. With various application results of the algorithm on multi-way arrays have been collected by taking the certain three-way data sets which correspond to RGB images. TMEMPR method has also been used for face image retrieval system for greyscale image database. The results show the efficiency of TMEMPR is competitive with Singular Value Decomposition (SVD).

Support arrays play a fundamental role in the approximation quality of EMPR truncations and therefore TMEMPR truncations. In the case of continuity the target is a multivariate function and the supports become univariate functions. The construction of the support entries in both continuous and discrete cases is a serious problem and is quite nonlinear as we have mentioned a little bit in this study. One of the most recent research studies in the Demiralp Group (Group for Science and Methods of Computing) focuses on the support function construction at the zero volume limit where the all volume element subintervals are taken to zero. This study is in progress and it is expected that certain splinewise structures seem to be constructed. Until now we have behaved pragmatically and chosen the support functions mostly as directional fluctuations.

In the case of TMEMPR, the effect of the support arrays on the tridiagonal kernel matrices is such that the tridiagonality can be taken away towards diagonal form. This happens by changing the dominancy of the diagonal elements of the kernel matrix. In other words, the lower and upper diagonals of the tridiagonal kernel matrix can be reduced through appropriate choices of support vectors.

In this study, different divide-and-conquer algorithms have been designed for decomposition of multi-way arrays which are explained above. The main aim is to work with less terms and getting more accuracy for different real life data sets. Designed methods efficiency have been showed on different data sets which come from different application fields, however a point to be noted is the structure of data sets, which is as effective as the structure of these designed algorithm. As an example a statistical expansion may not be appropriate to represent a multi-way data set which have dominant spectral properties. Therefore these important details are also considered in this study while developing the decomposition algorithms.

Each of the methods that developed under this study is original and their performance is related to the field that they are used, the quantitative and qualitative characteristics of the multi-way array and the main properties of the decomposition technique. Thus the question that how is it possible to decompose and reduce a multi-way data, is related to how the components will be used and how the all decomposed array will be used. Specified examples have been taken for each case to explain these ideas clearly and the some of the algorithms' performances are showed on tables and some of them illustrated on images.

1. GİRİŞ

Bilimde uygulama alanları teknolojinin gelişmesi ile birlikte genişledikçe, veri işlenişi tüm bilim dallarında önemli duruma gelmiştir. Karmaşık ya da çoklu veri yapıları ile ilgili çalışmalar ise tüm uygulamalı alanlarda öncelik taşımaktadır. Çok yönlü dizi ya da çoklu dizi (ing : multiway array, multilinear array, tensor*) yapısındaki verilerle ilgili çalışmalar 1990'lı yıllarda önemli bir araştırma konusu olmuştur ve bu anda da güncelliğini korumaktadır. İki yönlü dizi (dizey, ing: matrix) yapısında elde edilen veriler için yapılan çalışmalarda ortaya konulan başarılı sonuçların daha yüksek boyutlu veri yapıları için de geçerli olup olmadığı sorusu bilim insanlarını çok yönlü dizi alanına yöneltmiştir. Bu sav (tez) çalışmasında da ele alınan konunun temel kaynağı bu sorudur. Bilimsel yazın bölümünde de anlatılacağı gibi iki yönlü dizilere uygulanan ayrıştırım ve indirgeyiş yöntemleri gibi çok yönlü dizilere uygulanabilecek yöntemlere alması (alternatif) yeni bir yöntem geliştirmek tezin ana izdemidir (temasıdır). Geliştirimi hedeflenen yöntem en kolay biçimde ayrıştırım sağlayacak ve bilgi yitimini en aza indirgeyecek biçimde tasarlanmıştır. Bu amaçla bilimsel yazında kullanılan izgesel (ing : spectral) yöntemlerden farklı olarak istatistiksel bir yapı kurma üzerinde durulmuş, bu yapının değişik veri kümelerinde nasıl davrandığı gözlemlenmiştir. Ayrıca kurulan bu yapının veri kümelerinin izgesel yapısı ile olan ilişkisi de araştırılmış ve yöntem olarak ortaya konmuştur. İstanbul Teknik Üniversitesi, Bilişim Enstitüsü, Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu'nca üretilen, bilimsel yazında ve uygulamalarda yer edinmiş bir yöntem olan Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) daha önceleri sürekli işlevlerde kullanmış ve işlerliği gösterilmiştir [1]. İstatistiksel altyapısı bir ayrıştırım yöntemi olarak istenilen özellikleri taşımaktadır ve bu nedenle çok yönlü dizi ayrıştırımı için taban yöntem olarak seçilmiştir. ÇYÇG açılımı aslında, Sobol tarafından önerilmiş olan yine de kökeni Kolmogorov'un çalışmalarına dayanan Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi'ne (YBBG) dayanmaktadır [2]. Bu nedenle

*Burada kullanılan tensor (gery) kelimesi fizikteki (stress tensor) gerilim geryi ile karıştırılmamalıdır.

ÇYÇG'yi tüm çizgileri ile açıklamadan önce YBMG'nin ana çizgilerini aktarmak yerinde olacaktır.

Çok değişkenli işlevler için bir böl-ve-yönet algoritması olarak nitelendirilen YBBG Sobol tarafından çok değişkenli bir $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevi için, bir değişmez işlev, N tekdeğişkenli işlev, $(N^2 - N)/2$ iki değişkenli işlev ve bu biçimde değişkenliliği artan işlevlerin sonlu toplamı olarak birim ağırlık altında ve $[0, 1]$ aralığında aşağıdaki biçimde gösterilmiştir [3].

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + f_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (1.1)$$

Sobol'dan sonra H. Rabitz ve grubu yöntemi genelleştirmiş, yeni YBBG yöntemleri geliştirmiş ve bu yeni yöntemleri Kimya alanında istatistiksel bir yapı olarak kullanmışlardır [4–6]. YBBG tabanlı yöntemler yalnızca Kimya alanında değil aynı zamanda, veri kümelerinin biçelendirimi, havayubar (atmosfer) devinim (hareket) modellenmesi, finansal uygulamalar, çekince ya da dokunca olasılığı (risk) çözümlenmeleri (analizleri), vb. çalışma alanlarında da kullanılmıştır [7–11].

YBBG tabanlı yöntemler üzerine etkin olarak çalışan diğer bir grup ise Demiralp ve topluluğudur. Topluluk yeni YBBG yöntemleri üretmek ile kalmayıp YBBG için eniyileme çalışmaları yaparak yaklaştırım yöntemleri olarak YBBG tabanlı yöntemleri ölçmenlik (mühendislik) çalışmalarında kullanmıştır, örneğin türevli (diferansiyel) denklem çözümleri, eniyilemeli denetim sorunları (optimal kontrol problemleri), özdeğer-özyöney sorunları, tümlevlerin sayısal olarak belirlenimi topluluğun yöntemi kullandığı alanlardan bazılarıdır [12–15].

YBBG üzerine yapılan çalışmalarda geliştirilen tüm YBBG türleri burada anlatılmakla birlikte [16–20] savın ilerleyen kesimlerinde Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) ile ayrıntılı olarak gündeme geleceğinden yukarıdaki eşitliğin sağ yanındaki YBBG bileşenleri ile ilgili bazı konulara değinilmelidir. YBBG açılımındaki bileşen işlevler N boyutlu bir Hilbert uzayında tanımlı ve birbirlerine diktirler. YBBG uzamcılığı (geometrisi) üzerinde dikgenlik belirli bir ağırlık işlevi altında iççarpımın sıfır olmasıyla eşdeğerdir. Dikgenlik koşulu YBMG bileşenlerinin eşsiz biçimde belirlenimini sağlar. Bileşenlerin belirleniminde tekdeğişkenli işlevlerinin çarpımı yapısında tanımlanan ağırlık işlevleri kullanımı sorun yaratmayan ve hesaplamaları kolaylaştıran bir olgu olarak bilinmektedir. Bu kolaylıktan ödü

verilmesi halinde bileşen belirleme işleminin yeniden yapılandırılması ve biraz da karmaşılaştırılması gerekir.

Sav çalışmasına ise Demiralp ve topluluğunca geliştirilen YBMG tabanlı Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) konu olmaktadır [21, 22]. ÇYÇG’de, YBBG’den değişik olarak, tekdeğişkenli destek işlevleri kullanılmaktadır. ÇYÇG bir çokdeğişkenli işlev için aşağıdaki anlatımla verilir.

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_N) = & f_0 \prod_{i=1}^N s_i(x_i) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) \\
& + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) + \dots + f_{12\dots N}(x_1, x_2, \dots, x_N)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ yanındaki tüm terimlerin alınmasıyla çokdeğişkenli işlevin aslı üretilir, eğer terimler üzerindeki toplamda kesme yapılırsa işleve yaklaştırım yapılmış olur, yaklaştırım için alınan terim sayısı arttıkça bilgisayarım (hesaplama) karmaşıklığı da artacaktır. Bu yüzden en çok istenen durum olabildiğince az sayıda terimle en iyi yaklaştırımı sağlayabilmektir.

Destek işlevlerinin tümünün birim değişmez işlev olduğu düşünülürse YBBG, ÇYÇG’nin özel bir durumu olarak görülebilir, aslında destek işlevlerinin çarpan olarak açılıma katılımıyla YBBG’ye esneklik getirilmiştir. Böylece açılımın sağ yanı artık artan değişkenlilikli bir yapıda değildir ve destek işlevleri uygun seçildiğinde yaklaştırıma konu olan çokdeğişkenli işlevin yapısına çok daha yakın bir yapı elde edilebilir. YBBG’de olduğu gibi ÇYÇG’de de açılımın bileşenlerini eşsiz yapıda belirlemek için bazı koşullar getirilmiştir. Bunlardan ilki aşağıdaki eşitliklerde gösterilmiş olan birim tümlelendirim koşuludur.

$$\int_{a_j}^{b_j} dx_j W_j(x_j) = 1, \quad \int_{a_j}^{b_j} dx_j W_j(x_j) s_j(x_j)^2 = 1, \quad 1 \leq j \leq N \tag{1.3}$$

ÇYÇG terimlerini eşsiz biçimde belirlemek için diğer bir öngörüm c koşuludur.

$$\int_{a_{i_l}}^{b_{i_l}} dx_{i_l} W_{i_l}(x_{i_l}) s_{i_l}(x_{i_l}) f_{i_1, \dots, i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = 0, \quad 1 \leq i, k \leq N, \quad 1 \leq l \leq k \tag{1.4}$$

Sıfırlandırım koşulu aracılığıyla (1.2) eşitliğinin her iki yanının tüm ÇYÇG uzamcılığında (geometrisinde) ya da alt uzamcılığında tümlevi alındığında o

uzamcılığa karşılık gelen ÇYÇG bileşeni bulunmaktadır. Örneğin değişmez terim ve tekdeğişkenli terimler sırasıyla eşitlik (1.5) ve (1.6)'da olduğu gibi bulunur. İki veya daha çok sayıda değişkenli terimlere gereksinim varsa onlar da benzer biçimde belirlenebilir, ama yüksek sayıda değişken içeren terimleri kullanmak uygulamalarda bilgisayım (hesaplama) karmaşıklığını arttıracığından, genelde, yeğlenmez.

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.5)$$

$$f_i(x_i) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N W_j(x_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) \\ \times f(x_1, \dots, x_N) - f_0 s_i(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.6)$$

Tüm YBMG tabanlı yöntemler gibi ÇYÇG yöntemi ile de çok değişkenli işlevler için yaklaştırım gerçekleştirmek ereklenmektedir (hedeflenmektedir). Yukarıda verilen (1.2) eşitliğinin sağ yanında belirli terimler alınarak kesme yapılırsa ÇYÇG yaklaştıranları elde edilir. Örnek olarak değişmez terim ya da tekdeğişkenli terimler sonrasındaki bileşenler gözardı edilirse aşağıdaki yaklaştıranlar elde edilir.

$$S_0(x_1, \dots, x_N) = f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j) \\ S_1(x_1, \dots, x_N) = S_0(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) \quad (1.7)$$

Elde edilen yaklaştıranların etkinliğini ya da, diğer bir deyişle, niteliğini ölçmek için altsırasayıllı σ simgeleriyle gösterilen bir takım “ölçenler” tanımlanmıştır. σ lar 0 ile 1 arasında değer almaktadırlar ve değerleri 1'e ne düzeyde yakınsa yaklaştırimın o düzeyde iyi olduğu söylenir. “Nitelik Ölçenleri” olarak adlandırılan σ büyüklükleri iyi sıralı bir dizi oluştururlar.

$$\sigma_0 = \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j) \right\|^2 \quad (1.8)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \left\| f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) \right\|^2 + \sigma_0 \quad (1.9)$$

$$0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_N = 1. \quad (1.10)$$

Bu bölümde verilen ayrıntılar sürekli işlevler için olup çalışmaya konu olan yöntemlerin altyapısı niteliğini taşımaktadır. Çalışmanın temel amacı çok yönlü dizilerin ÇYÇG yöntemi kullanılarak ayrıştırımı, oluşturulan ayrıştırımdan yola çıkarak bir tür temel bileşen çözümleyişi yapılmasıdır. Bu nedenle çalışmaya taban olan yöntem olan ÇYÇG sürekli işlevler için temellendirilmiş olsa da ayrık veriler için de kullanımı gerçekleştirilmiş olduğundan çoklu diziler için uygun bir yöntem olarak görülmektedir. Sıradan yöneyler bir, sıradan dizeler ise iki altsırasayı (indis) içerirler. Çok yönlü diziler altsırasayı ikiden çok da olabilen dizi yapıları olarak tanımlanırlar. Tansör (ing: tensor) olarak adlandırılan büyüklükler benzeri bir yapıyı anlatsa da konaç dizgelerindeki (koordinat sistemlerindeki) dönüşümler altında kısıtlayıcı özellikleri olan yapılardır. Dönüşüm altındaki görüntüleri konuma bağlı olarak değişmezler. Oysa herhangi bir çoklu dizinin (ing: multilinear array, multiway array) böyle bir kısıtlayıcı özelliği oluşu gerekmez. Buna karşın bilimsel yazında bir kesimce yaygın olarak kullanılmaktadırlar ve bu kullanım Demiralp ve topluluğunca benimsenmemektedir. Bu yüzden, bu çalışmada da bu sözcüğün kullanımından, gerçek bir gereksinim doğmadıkça, kaçınılacaktır. Onun yerine zaman zaman “çoklu dizi” zaman zaman da “çok yönlü dizi” deyimini kullanılacaktır.

N boyutlu bir uzayda bir çoklu dizinin bir ögesi genel olarak $\mathcal{X}_{i_1, \dots, i_N}$ ile simgelenebilir. Her bir altsırasayı diğerinden bağımsız olarak değer alabilir. Bu diziler için “Çoklu Doğrusal Cebir’in (ing: Multilinear Algebra)”temel özellikleri geçerlidir ve bölüm 2’de sözü edilecektir. Sav çalışmasının düzenleyişinde bir sonraki bölümde sav konusunun önemini daha iyi açıklamak amacıyla savın amacı, güncelliği ve matematiksel altyapısı anlatılmıştır. Bölüm 3 ile YBBG ve ÇYÇG yöntemlerinin ayrık yapılarda ne şekilde uygulanması gerektiğini ayrıntılandırmaktadır. Bölüm 4 sav kapsamında üretilen özgün ÇYÇG tabanlı açılımları tanıtmayı hedeflemektedir. Bu özgün açılımların bilinen gerçek yaşam sorunları karşısında gösterdiği başarımlar ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması ise bölüm 5’te verilmiştir. Çalışmanın tüm sonuçlarının derlenerek yorumlanması ise bölüm 6’nın konusudur.

2. PROBLEMİN ALTYAPISI

2.1 Problemin Amacı ve Önemi

Gelişen veri toplayış ve çözümleyiş teknikleri ile birlikte başal (klasik) veri anlatım teknikleri yerine yenileri gelmiş, veri kullanım alanlarının gittikçe artmasıyla yeni veri anlatım biçimleri üzerinde yapılan çalışmalar yoğunlaştırılmıştır. Üzerine yoğunlaşılın alanlardan biri de çok yönlü dizilerdir (tansör, çoklu dizi, ing : multiway array, tensor). Çok yönlü diziler iki yönü (ya da kipi, modu) olduğu bilinen dizeylerden (ing : matrix) daha çok yön içerirler ve çok yönlü veri çözümleyiş konusudurlar. Çok yönlü veri çözümleyiş ikiden çok yönü olan yüksek boyutlu veri kümelerindeki çoklu doğrusal yapıları tanımlayış ve açıklayış amaçlar. Böylelikle yüksek boyutluluk içeren veri içindeki saklı yapıların ve bağıntıların ortaya çıkış söz konusu olur.

Günümüzde kullanılan çok yönlü veri analizi yöntemleri genellikle iki yönlü veriler için kullanılan yöntemlerin genelleştiriminden oluşturulmuştur. Bu yöntemler geliştirilmeden önce kullanılan yöntemlerin (örneğin, çarpan çözümleyiş (faktör analizi), temel bileşen çözümleyiş, tekil değer ayrıştırmı vb.) çok yönlü verilerde ön kısıtlar ve varsayımlar altında doğrudan kullanımına çalışılmış, yeterince iyi sonuçlar oluşmadığından yöntemleri çok yönlü dizi yapısına uyarlamak (ya da genelleştirmek) yoluna gidilmiştir. Çünkü çok yönlü dizileri iki yönlü diziye çevirerek sözü edilen yöntemleri (temel bileşen çözümleyiş gibi) uygulamak bilgi yitimine neden olabileceği gibi gürültülü bir veride yanlış çıkarsayıslara yol açabilmektedir [23]. Dolayısıyla, çok yönlü diziler için geliştirilen yöntemler (ya da çok yönlü biçeler) veriyi açıklama ve yaklaşırm açısından daha getirilidir. Çok yönlü dizi ayrıştırmı ise tüm bu genelleştirim çalışmaları sonucu ortaya çıkmış bir olgudur. Her ne kadar alternatif yöntemler bulunsa da bilimsel yazında en iyi bilinen ve sıklıkla kullanılan iki ayrıştırm yöntemi Tucker ayrıştırmı ve Parafac ayrıştırmıdır (CP). Bir çok ayrıştırm yöntemi bu iki yöntemden türetilmiştir ve daha sonraki bölümde de

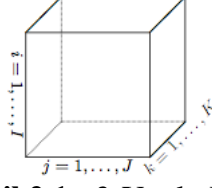
anlatılacağı gibi her birinin kendine özgü üstünlükleri ve eksiklikleri vardır. Bu sav çalışmasında ise çok değişkenli işlevlerden (ing : function) esinlenerek yeni bir ayrıştırım yöntemi önerilmektedir.

Çok değişkenli işlevlerde kullanımı gittikçe yaygınlaşan Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi (YBBG) tabanlı çalışmalar yakın zamanda veri kümelerinde de kullanılmış ve yadsınamayan bir başarımla elde edilmiştir [24]. YBBG'nin genelleştirilmiş durumu da diyebileceğimiz Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) bu sav çalışmasında çok yönlü dizilerde kullanılarak, çok yönlü diziler için ÇYÇG ayrıştırımı yapısı irdelenmektedir. Sözü edilen diğer çok yönlü dizi ayrıştırım yöntemlerinden değişik olarak YBBG ve ÇYÇG ayrıştırımlarının kullanımı veriyi izgesel değil istatistiksel olarak ayrıştırmayı bunu yaparken de çok yönlü diziyi en iyi şekilde yaklaşımla gösterişi amaçlamaktadır. Sav çalışması boyunca YBBG ve ÇYÇG tabanlı yöntemler değişik alanların veri kümeleri üzerinde incelenerek yöntemlerin işlerliğini artıran özellikler ve ortamlar irdelenmiştir.

2.2 Çok Yönlü Diziler

Çok yönlü diziler (çoklu diziler, N-yönlü diziler, tansörler, ing: Multi-way arrays, tensors) yöneylerin ve dizelerin daha yüksek kerteğe genelleştirimidir, ($N > 2$). Bir N-yönlü dizi N sayıda yöney uzayının dış çarpımlarının bir üyesidir [25]. Doğrusal cebirden bildiğimiz yöneyler (ing : vectors) 1-yönlü diziler, dizeler (ing : matrices) 2-yönlü dizilerdir. Daha yüksek sayıda yön içeren çok yönlü dizilerin ise bildiğimiz doğrusal cebir yapısı ile işlenmesi olanaklı olmamakla birlikte çoklu doğrusal cebir (multilinear algebra) konusuna girerler. Bilimsel yazında toplanan verinin yönünün birden çok olduğu tüm alanlarda çoklu dizi uygulamaları ile karşılaşılır. Bunlardan bazıları; hesaplamalı kimya, psikoloji, biyobilişim (ing: bio-informatics), beyinbilim (ing: neuroscience), veri madenciliği, bilgisayarlı görüdür (ing: computer vision). Bir çok yönlü dizinin nasıl konumlandığına örnek vermek gerekirse; EEG (Elektroensefalografi) ölçümlerinden gelen veri 3-yönlü (kanal, zaman, frekans; koşul, zaman, frekans vb.) ya da daha fazla yönlü dizi (kanal, zaman, koşul, deneme, frekans, nesne) şeklinde düzenlenebilir. Şekil 2.1'de 3- yönlü bir dizinin genel yapısı görünmektedir.

Çok yönlü diziler her ne kadar başal doğrusal cebirin konusu olmasa da bir kesim



Şekil 2.1 : 3-Yönlü Dizi.

özellikleri benzeşim göstermektedir. Örneğin N -yönlü bir dizi ele alalım, $\mathcal{X} \in \mathcal{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$, bu çok yönlü dizi için de boy (ing : norm) tanımı yapılır ve öğelerinin dördülleri (kareleri) toplamının dördülkökü (karekökü) biçiminde belirlenir ve bu dizeylerdeki Frobenius boyu ile eşdeğerdir.

$$\|\mathcal{X}\| = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1 i_2 \dots i_N}^2}, \quad \mathcal{X} \in \mathcal{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N} \quad (2.1)$$

Çok yönlü dizilerde iç çarpım tanımı da yöneylerden bilinen iç çarpım gibi, iki farklı ancak yön sayısı ve her yöndeki öğe sayısı eş çok yönlü dizilerin eş sırasayılı öğelerinin çarpımlarının toplamından oluşmaktadır.

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1 i_2 \dots i_N} y_{i_1 i_2 \dots i_N}, \quad \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N} \quad (2.2)$$

Yukarıda anlatılan özellikler yöney ve dizeylerle benzeşim gösterse de yön sayısı ikiden çok yönlü dizilerde özdüzey (ing : rank) tanımında değişik açıklamalar vardır. Bunlardan en çok benimseneni ve daha sonra sözü edilecek olan bazı ayrıştırım tekniklerinde de kullanılan özdüzey tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{X} = \mathbf{a}^{(1)} \circ \mathbf{a}^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{a}^{(N)} \quad (2.3)$$

şeklinde her yönde bir yöneyin dış çarpımları, (\circ) biçiminde yazılabilen N -yönlü dizinin, $\mathcal{X} \in \mathcal{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$, özdüzeyi 1'dir. 1-özdüzeyli N -yönlü bir dizinin öğeleri aşağıdaki biçimde hesaplanabilir.

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} = a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \dots a_{i_N}^{(N)} \quad (2.4)$$

Eğer her yönde R sayıda bağımsız yöney bulunabiliyorsa ve verilen çok yönlü dizi bu yöneylerin her N 'inin dış çarpımlarından oluşan R sayıda çoklu dizinin toplamı biçiminde yazılabilir özdüzey R 'dir denir. Bilimsel yazındaki çok yönlü dizi ayrıştırım yöntemlerinde doğrusal cebirin özelliklerinden yararlanabilmek için çoklu diziyi açma (ing: matricization, unfolding, flattening, vectorization) işlemi

yapılır. Örneğin iki ön yüzü aşağıda verilen $\mathcal{X}^{3 \times 4 \times 2}$ çoklu dizisini ele alalım. (:) imi belli bir yöndeki tüm elemanları göstermek üzere iki çok yönlü dizinin iki önyüzü aşağıdaki gibi olsun.

$$\mathbf{X}_{:,1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_{:,2} = \begin{bmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Bu çoklu diziyi 3 değişik yönde dizelere aşağıdaki gibi açabiliriz, her bir açışta ilgili yönün sırasayısı değişmezken diğer iki yönün sırasayısı birleştirilerek dizey haline getirilir. Burada $\mathbf{X}_{(1)}$ dizeyi verilen çok yönlü dizinin 1. yönde açılmış biçimidir ve $3 \times (4 \times 2)$ boyutlarındadır. Aynı şekilde 2. yönde açılım dizeyi $\mathbf{X}_{(2)}$ $4 \times (3 \times 2)$ ve 3. yöndeki açılım dizeyi $\mathbf{X}_{(3)}$ ise $2 \times (3 \times 4)$ boyutlarındadır.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{bmatrix} \\ \mathbf{X}_{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 & 22 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 & 23 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \end{bmatrix} \\ \mathbf{X}_{(3)} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & \dots & 24 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Aynı çoklu diziyi yöney biçiminde ise aşağıdaki gibi açabiliriz.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 24 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Bir çok yönlü dizi açılabilirdiği gibi yeniden katlanarak altsıra sayısı artırılabilir. Bilimsel yazında sıklıkla kullanılan çok yönlü dizi ayrıştırım yöntemleri açma ve katlama olgularına dayandırılarak yapılır. Tucker ve PARAFAC (CP) tabanlı yöntemler esasında çok yönlü dizilerin dizelere açılması ve açılmış hallerinin uygun çarpımlar kullanarak, belli kısıtlar altında dizeler için bilinen ayrıştırım yöntemlerini uygulayarak çoklu doğrusal biçeler üretme temeline dayanmaktadır. Bu şekilde ayrıştırım yöntemi üretiminde kullanılan ve her biri değişik bir yapı taşıyan çarpma işlemlerinden bazıları ise Kronecker çarpımı, Khatri-Rao çarpımı, Hadamard Çarpımı, n-mod çarpımı'dır. Bu çarpımlardan ilki olan Kronecker çarpımı iki dizinin

çarpımında birini diğerinin her bir ögesi ile çarparak boyut genişletimine neden olmaktadır. Khatri-Rao çarpımı ise ele alınan iki dizinin bloklarının Kronecker çarpımı ile çarpılması ile elde edilir. Üçüncü çarpım biçimi olan Hadamard çarpımında eş yönlü ve eş boyutlu iki dizi arasında ögecil düzeyde çarpım söz konusudur. Savın konusu olan ÇYÇG yönteminde ise dış çarpım kullanılmaktadır, bu nedenle sözü edilen bu çarpımlar savın ana kapsamına alınmayarak okuyucunun bilgilendirilmesi amacıyla Ek-1’de anlatılmıştır.

2.3 Ayrıştırım Yöntemleri

2.3.1 Dizey ayrıştırım yöntemleri

Dizeyler için en çok bilinen ve sıklıkla kullanılan ayrıştırım yöntemlerinden biri tekil değer ayrıştırımıdır (TDA), (ing : Singular Value Decomposition, (SVD)). TDA $m \times n$ türünde r özdüzeyle bir dizeyin tekil yöneylerini içeren iki izdüşüm dizeyi ve tekil değerlerini içeren bir çekirdek dizey olmak üzere çarpanlarına ayrıştırımıdır. TDA bilinen diğer dizey ayrıştırım yöntemlerine taban olmak ile birlikte çok yönlü diziler için de genelleştirilmiştir [26]. Bir A dizeyi için TDA aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \times \mathbf{\Sigma} \times \mathbf{V}^T \quad (2.8)$$

Bu yazımda \mathbf{U} ve \mathbf{V} sırasıyla sağ ve sol tekil yöneyleri içeren birimcil (ing: unitary) ve dikgen izdüşüm dizeyleri, $\mathbf{\Sigma}$ ise tekil değerlerden oluşan ve eksi içermeyen köşegen bir dizeydir. Eğer \mathbf{A} tam özdüzeyle değilse ($r < m$), $\mathbf{\Sigma}$ köşegeninde belli bir yerden sonra sıfırlar içerecektir. Böylelikle bir dizeyin özdüzeyle TDA ile kolaylıkla belirlenebilir. Ayrıca $\mathbf{\Sigma}$ 'nın köşegen yapısı ve \mathbf{U} ve \mathbf{V} 'nin üzerindeki düşey sıra dikgenliği Temel Bileşen Çözümlemesi (ing: Principal Component Analysis, PCA) ve Tucker ayrıştırımı gibi diğer yöntemlere taban olması açısından TDA'yı kullanışlı kılmıştır. Bu yönüyle TDA, eğri uydurma, en küçük kareler eniyilemesi, görüntü işleme vb. birçok uygulamada kullanılan bir yöntem olmuştur.

TDA tabanlı bir ayrıştırım yöntemi olan Temel Bileşen Çözümlemesi (TBCÇ) doğrusal bir nitelik özütleyiş yöntemidir [27]. Bu yöntem ile dizey değişimin en yoğun olduğunu gösteren ve birbirlerinden bağımsız (ing : uncorrelated) olan özyöneyleleri üzerine sırasıyla izdüşürülerek temel bileşenler elde edilir (Eckart,Young). Böylece

değişim belli ilk sayıdaki temel bileşenlerle açıklanarak, düzey için doğrusal bir yaklaştırım elde edilmektedir. Ayrıca doğrusal olmayan boyut indirgeme sorunu için de özelleştirilen (Schölkopf, Smola) TBC'nin farklı uygulamalarda esas yöntem olarak kullanılabilceği gibi (Yüz tanıma, gürültü temizleme vb.), boyut indirgeme için veri analizinde bir ön işleme tekniği olarak da kullanılmaktadır. TBC, TDA bileşenleri ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$TBA(\mathbf{A}) = \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \quad (2.9)$$

Bu gösterimde \mathbf{U} ve $\mathbf{\Sigma}$ sırasıyla TDA'nın izdüşüm ve köşegen çekirdek düzey bileşenleridir. TBA uygulayışından önce merkezlendirim gerçekleştirmek özyöneyleerin değişimi betimleyişini güvence altına alacağı gibi ortak değişinti (ing : covariance) düzeyinin izgesel ayrıştırmı ile de bir düzeyin TBC'si belirlenebilir.

TBC yöntemi birbirinden bağımsız alt uzaylara izdüşüm uygulasa da, istatikselle olarak bağımsızlığı güvence altına almaz. Bulunmak istenen değişkenlerin istatikselle bağımsızlığı varsayımı altında kullanılan ayrıştırm yöntemine Bağımsız Bileşen Çözümlemesi (ing : Independent Component Analysis) denir [28]. \mathbf{x} örneğini bilinmeyen (ya da saklı) değişkenlere (ya da kaynaklara) ayırmak için

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (2.10)$$

biçiminde bulunacak olan ayrıştırmada \mathbf{s} bileşenlerinin başlangıçta istatikselle olarak bağımsız olduğu varsayılarak ayrıştırm uygulanır ve özellik sayısı korunur.

Bir ayrıştırm yöntemi için kullanılacak alana ya da veri kümesine göre yukarıda anlatıldığı gibi değişik kısıtlar konulabilir. Örneğin gerçek yaşamda birçok alanda ölçülen verilerin eksi olmayışı sonucu, bulunmak istenen ayrıştırm öğelerinin de doğabilimcille anlamının çıkarılabilmesi için eksi olmayan bileşenler oluşu istenebilir (görüntü işleme, bilgisayarlı görü vb.).

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{E} \quad (2.11)$$

biçiminde yazılacak olan bir eşitlikte \mathbf{A} ve \mathbf{X} düzeyleri eksi olmayan ayrıştırm öğeleri ve \mathbf{E} düzeyi yaklaştırım için yanlığ düzeyidir. Üzerinde durulan sorunun niteliğine göre bu düzeylerin doğabilimcille anlamları vardır ve negatif olmamak dışında dikgenlik, bakışıklık, 3-bileşenlilik gibi kısıtlar konularak değişik yöntemler elde edilebilir.

Yukarıda anlatılan dizey ayrıştırım yöntemleri üç veya daha çok yön içeren veri kümelerinde yönler arasındaki ilişkiyi gözlemleyememek, bilgi kaybı gibi sonuçlar doğurmaktadır. Dolayısıyla bu yöntemler çok yönlü diziler için genelleştirilmiş ve bu tür veri kümelerinin çözümleyişinde kullanılabilir duruma getirilmiştir.

2.3.2 Çok yönlü dizilerde ayrıştırım yöntemleri

Günümüzde yapılan deneylerde ve uygulamalarda üretilen veri kümeleri çok yönlü ve (veya) çok boyutlu olabilmektedir. Yön kavramı boyut kavramından farklı olarak uygulamalarda birden fazla özellik uzayı olduğunun belirtimidir, oysa boyut bir özellik uzayı üzerinden tanımlanır. Çok yönlü diziler birden çok özellik uzayı içeren veri kümeleri için en uygun gösterilimdir. Hesaplamalı kimyadan beyinbilime (ing : neuroscience) bir çok uygulama alanında kendine yer edinmiş çok yönlü dizi ayrıştırımının kökeni Hitchcock'un çalışmalarına dayanmaktadır [29]. Daha sonra Cattelin [30] ve Tucker [31] tarafından değişik biçimlerde yeni ayrıştırım yöntemleri geliştirilmiştir. Çok yönlü dizi ayrıştırımında birbirinden bağımsız olarak yapılmış ama oldukça benzer iki çalışma çok yönlü dizi ayrıştırımının daha sık kullanımını sağlamıştır. Bu iki çalışmadan ilki Carrol ve Chang [32] tarafından önerilen CANDECOMP (Canonical Decomposition) ve Harshman tarafından önerilen PARAFAC (Parallel Factor Analysis) biçimidir [33]. Mocks beyin görüntüleyiş çalışmalarında PARAFAC yöntemini kullanmıştır [34] ve daha sonra bir çok değişik katkı ile yöntemler iyileştirilmeye ve yeni yöntemler geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu gelişmelerden birçoğu psikometri çalışmalarında ortaya çıkmış, daha sonra hesaplamalı kimya alanındaki katkılar sayesinde çok yönlü dizi ayrıştırımı sıkça kullanılan bir veri analizi yöntemi olmuştur.

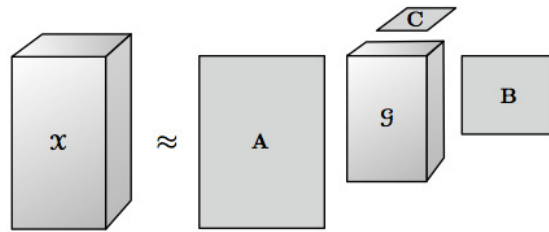
Daha önceleri veri çözümlemede kullanılan ayrıştırım yöntemleri olarak genellikle iki yönlü ayrıştırım (ing : matrix factorization) kullanılmıştır, örneğin 'Tekil Değer Ayrıştırımı', 'Temel Bileşen Analizi', 'LU ayrıştırımı', vb. Veri yönünün artışıyla ve bilim insanlarınca yönler arasındaki ilişkinin daha ayrıntılı bir biçimde incelenmek istenishiyle iki yönlü ayrıştırım teknikleri genelleştirilmiş ve çok yönlü dizilere uygulanmıştır. Ayrıca verinin ve uygulanacak olan ayrıştırımın niceliği dışında niteliği de düşünülerek çok yönlü diziler için genelleştirimler gerçekleştirilmiştir. Veri çözümlemesinde en çok kullanılan dizey ayrıştırım yöntemleri (PCA/SVD, ICA,

NMF ve bunların türevleri gibi) birçok veri çözümleyiş yöntemine taban olmakla birlikte çok yönlü dizi ayrıştırımı için de kaynak alınan yöntemlerdir. Örneğin CP (CANDECOM/PARAFAC) yöntemi çoklu doğrusal tekil değer ayrıştırımı yönteminin (ing : multilinear singular value decomposition) üç ya da daha çok yönlü dizilere genelleştirimidir, benzer biçimde Tucker yöntemi 3-yönlü dizi için etmen çözümlemesi (ing : Factor Analysis) olarak ortaya çıkmıştır [35]. Bu biçimde geliştirilen çok yönlü dizi ayrıştırım yöntemleri ile veri içindeki gizli değişkenler ve bu değişkenler arasındaki ilişkiler ortaya çıkarılmaktadır. Bu temel ayrıştırımların değişik kısıtlar ve koşullar altında irdelenişi ile değişik ayrıştırım yöntemleri ortaya çıkmıştır ve bunlara alternatif yöntemlerle birlikte aşağıdaki çizelgede en sık kullanılanlar verilmiştir.

Çizelge 2.1 : Çok Yönlü Dizi Ayrıştırım Yöntemleri.

PARAFAC Tabanlı	Tucker Tabanlı	Alternatif Biçeler
PARAFAC	Tucker3	Çoklu Doğrusal Makine
S-PARAFAC	Tucker2	STATIS Tabanlı Çok Yönlü Biçe
C-PARAFAC	S-T3/S-T2	Çok Parçalı Çok Yönlü Bileşen Çözümlemesi
PARALIND		
Parça-kısıtlı PARAFAC		

Tucker ayrıştırımına TBC'nin çok yönlü diziler için geliştirilmiş durumu da denilebilir. 3-yönlü bir dizi, $\mathcal{X} \in \mathcal{R}^{I \times J \times K}$, için Tucker ayrıştırımı bir çekirdek çoklu dizi ve her bir yönde çarpan olarak bulunan dizelerle şekil 2.2'deki gibi gösterilebilir. Bu ayrıştırımın matematiksel anlatımı \times_n n-mod çarpım (bkz: Ek-1) olmak üzere



Şekil 2.2 : 3-Yönlü Tucker Ayrıştırımı.

aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{X} \approx \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{B} \times_3 \mathbf{C} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \sum_{r=1}^R g_{pqr} \mathbf{a}_p \mathbf{b}_q \mathbf{c}_r$$

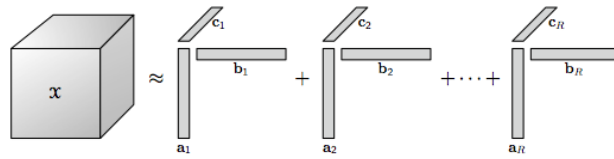
$$\mathcal{X} \in \mathcal{R}^{I \times J \times K}, \quad \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{I \times P}, \quad \mathbf{B} \in \mathcal{R}^{J \times Q}, \quad \mathbf{C} \in \mathcal{R}^{K \times R} \quad (2.12)$$

Burada $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ dizeleri $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ yöneylerinden oluşan çarpan dizelerdir ve her biri ilgili yönün temel bileşeni olarak düşünülebilir. \otimes boyut sayısını arttırıcı niteliği olan

Kronecker çarpımı olmak üzere Tucker ayrıştırımı ile çoklu dizinin dizelere açılmış durumunun arasındaki yaklaşıım bağıntısı (\approx) aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{(1)} &\approx \mathbf{A}\mathbf{G}_{(1)}(\mathbf{C} \otimes \mathbf{B})^T \\ \mathbf{X}_{(2)} &\approx \mathbf{B}\mathbf{G}_{(2)}(\mathbf{C} \otimes \mathbf{A})^T \\ \mathbf{X}_{(3)} &\approx \mathbf{C}\mathbf{G}_{(3)}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})^T\end{aligned}\quad (2.13)$$

Burada 3-yönlü dizi için yapısı verilen Tucker ayrıştırımı N-yön için de genelleştirilebilir. Tucker ayrıştırımı sıkıştırım, sınıflandırım, öbekleyiş (ing : clustering) gibi problemlerde sıklıkla kullanılan bir yöntemdir [36]. Bu yöntem üzerine yapılan çalışmalar verinin istenilen özelliklerde ayrıştırımı için ya da tektürlülük gibi sorunları çözmek için yöntemin güncellenişine dayanmaktadır. Bilimsel yazında Tucker ayrıştırımını üzerine gelişen yöntemlerden bazıları Tablo 2.1’de verilmiştir. Tucker yöntemleri arasında De Lathauwer’ın çok yönlü diziler için bileşen bulma yöntemi olan HOSVD (Higher Order SVD) şimdilik tek türülük sorununu en iyi şekilde çözen ve en sık kullanılan yöntemdir [37]. De Lathauwer’ın diğer bir bileşen bulma yöntemi HOOI (Higher Order Orthogonal Iteration) ise oldukça başarılı bir yöntem olmasına rağmen yinelemeli bir yöntem olduğundan HOSVD’ye göre daha az yeğlenebilir [38] . Sık kullanılan bir ayrıştırım ve indirgeme yöntemi olan CP (Candecomp/Parafac) ayrıştırımı ise çok yönlü diziyi her yönde birbirinden bağımsız yöneylerin dış çarpımından oluşan çoklu dizilerin toplamı biçiminde anlatır. Şekil 2.3 ile CP ayrıştırımı görselleştirilmek istenmiştir.



Şekil 2.3 : 3-Yönlü CP Ayrıştırımı.

CP ayrıştırımı verilen 3-yönlü bir çoklu dizi için aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\mathcal{X} \approx \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r \quad (2.14)$$

⊙ Khatri-Rao çarpımı olmak üzere her bir yönde açılmış dizeler ile CP bileşenleri arasındaki yaklaşıım ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{(1)} &\approx \mathbf{A}(\mathbf{C} \odot \mathbf{B})^T, \\ \mathbf{X}_{(2)} &\approx \mathbf{B}(\mathbf{C} \odot \mathbf{A})^T, \\ \mathbf{X}_{(3)} &\approx \mathbf{C}(\mathbf{B} \odot \mathbf{A})^T\end{aligned}\quad (2.15)$$

CP ayrıştırımında R verilen çoklu dizinin özdüzeyine eşit olursa yaklaşıklık, eşitlik olur. Aslında CP ayrıştırımının en temel sorunu da en iyi R sayısını bulmaktır. Genelde $R = 1, 2, 3, \dots$ şeklinde yineleyişler gerçekleştirilerek en iyi sonuç aranır. Ama bu yöntemde uygulamalarda özdüzeyden çok daha düşük bir sayıda yaklaştırım olabildiği ve bunun yadsınamaz bir sorun olduğu belirtilmektedir. Bu sorunu çözmek ve daha iyi yaklaştırım niteliği sağlamak amacıyla birçok değişik yöntem geliştirilmiştir. Hem Tucker hem de CP tabanlı yöntemler gerek sorun tabanlı çözümler, gerekse nitelik ölçer tabanlı güncellemeler nedeniyle uygulamada oldukça türülenmiştir.

Bu türülük içinde birçok veri kümesi için birçok yöntem üretilse de, istatik tabanlı yöntem geliştirimi bu an için inceleme altındadır. Bu sav çalışmasında çok yönlü dizilerin ayrıştırımında istatikselsel tabanlı bir yöntem olan ÇYÇG açılımı gündeme alınmış ve değişik uygulama alanları için başarımı incelenmiştir. Bölüm 3 çok yönlü bir dizi için ÇYÇG ve ÇYÇG'nin tabanı olan YBBG yöntemlerini açıklamaktadır.

3. AYRIŞTIRIM TEKNİĞİ OLARAK YBBG ve ÇYÇG

3.1 Ayrık Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi

Ayrık Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi Sobol'un çok değişkenli işlevler için önerdiği ve daha sonra H. Rabitz ve M. Demiralp tarafından olgunlaştırılan Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi'nin (YBBG) çok yönlü veri kümeleri için tanımlanmış biçimidir [39, 40]. Ayrık YBBG açılımı N yönlü çoklu dizi için aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{i_1 \dots i_N} &= \mathcal{X}^{(0)} + \sum_{j_1=1}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}}^{(j_1)} + \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 < j_2}}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}, i_{j_2}}^{(j_1 j_2)} + \dots + \mathcal{X}_{i_{j_1} i_{j_2} \dots i_{j_N}}^{(j_1 j_2 \dots j_N)}, \\ i_j &= 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.1)$$

Burada $\mathcal{X}_{i_1 \dots i_N}$ N yönlü dizinin $i_1 \dots i_N$ altsırasayılı ögesini göstermektedir. \mathcal{X}_0 açılımın değişmez terimini, $\mathcal{X}_{i_{j_1}}^{(j_1)}$ anlatımı ise j_1 . yöndeki tek yönlü dizinin i_{j_1} altsırasayılı ögesini göstermektedir. Sürekli yapılarda vurgulanan temel YBBG tanımlarının ve koşullarının ayrık yapılar içinde sağlanması beklenmektedir. Bu nedenle aynı sayılı ve her yönde eş sayıda konumlu iki çoklu dizinin iç çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\left(\mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{X}^{(2)} \right) \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_N=N}^{n_N} W_{i_1 \dots i_N} \mathcal{X}_{i_1 \dots i_N}^{(1)} \mathcal{X}_{i_1 \dots i_N}^{(2)} \quad (3.2)$$

Ayrık YBBG terimlerini bulmak için tanımlanan ağırlık dizisi çarpımcıl bir yapı taşımaktadır, genel ağırlık tek yönlü ağırlıkların çarpımı biçiminde bulunmaktadır ve her tek yönlü ağırlığın üzerinde birim boyluluk koşulu vardır.

$$W_{i_1 \dots i_N} \equiv \prod_{j=1}^N W_{i_j}^{(j)}, \quad \sum_{i_j=1}^{n_j} W_{i_j}^{(j)} = 1, \quad W_{i_j}^{(j)} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

Ayrıca ayrık YBBG bileşenlerini tek türlü bulabilmek için sıfırlanış koşulu gündeme gelmektedir. Sıfırlanış koşulu 3.1 eşitliğinin her iki yanına ağırlıklı toplam uygulandığında bulunmak istenen bileşen dışındaki tüm sağ yön bileşenlerinin eşitlikten kalkmasını sağlar. Dolayısıyla bu özellik YBBG'nin doğal bir sonucu değil

bir ön koşuludur.

$$\sum_{i_{j_l}=1}^{n_{j_l}} W_{i_{j_l}}^{(j_l)} \mathcal{X}_{i_{j_1} \dots i_{j_k}}^{(j_1 \dots j_k)} = 0 \quad l = 1, 2, \dots, k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

Sözü edilen koşullarla elde edilen değişik YBBG terimlerinin birbirine dikgen olması beklenir. Burada değişik yön sayılı YBBG bileşenlerinin birbirine olan dikgenliğini irdelemek için bileşenlerin yön sayısı N 'e genişletilerek iç çarpımları alınabilir.

$$\left(\mathcal{X}^{(j_1 \dots j_{l_1})}, \mathcal{X}^{(k_1 \dots k_{l_2})} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Yukarıda anlatılan tüm tanımlayışlar ve koşullar altında Ayrık YBBG bileşenlerini elde etmek olanaklıdır. Bir sonraki alt bölümde, verilen koşullar ve kısıtlar altında YBBG'nin bileşenlerinin nasıl bulunacağı anlatılmıştır.

3.1.1 YBBG bileşenlerinin hesaplanması

Ele alınan bir N yönlü dizi için YBBG açılımı Eşitlik (3.1)'de verilmiştir. Bu eşitliğin sağ yanındaki değişmez terim olan $\mathcal{X}^{(0)}$ ve tek yönlü terimleri verilen kısıtlar altında bulmaya çalışalım. Bunun için eşitlik 3.1'nin her iki yanını ağırlık dizileri ile çarpılır ve her yönün boyut sayısı üzerinden toplam alınırsa aşağıdaki yapı elde edilir.

$$\sum_{i_{j_l}}^{n_{j_l}} W_{i_{j_l}}^{(j_l)} \mathcal{X}_{i_1 \dots i_N} = \sum_{i_{j_l}}^{n_{j_l}} W_{i_{j_l}}^{(j_l)} \mathcal{X}^{(0)} + \sum_{i_{j_l}}^{n_{j_l}} W_{i_{j_l}}^{(j_l)} \sum_{j_1=1}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}}^{(j_1)} + \sum_{i_{j_l}}^{n_{j_l}} W_{i_{j_l}}^{(j_l)} \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 < j_2}}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}, i_{j_2}}^{(j_1, j_2)} + \dots$$

$$i_j = 1, 2, \dots, n_j, \quad j_l = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

Eşitliğin sağ yanına bakılacak olursa $\sum_{i_{j_l}}^{n_{j_l}} W_{i_{j_l}}^{(j_l)} \mathcal{X}^{(0)}$ anlatımı ağırlık dizisinin toplamının 1 olma özelliğinden dolayı (eşitlik 3.3, kısım 2) yalnızca $\mathcal{X}^{(0)}$ terimini verir. Diğer yandan tek yönlü diziler üzerine ağırlık etkisi ise sıfırlanış koşulu (eşitlik 3.4) nedeniyle sıfırı verir. Çünkü kendi yönüne ait ağırlık etkisi altında bu terimler sıfırlanmaktadır. Örneğin $\mathcal{X}^{(1)}$ yönünde tekli dizi için

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} W_{i_1}^{(1)} \mathcal{X}_{i_1}^{(1)} = 0$$

olacak ve bu terim toplamda olmayacaktır, aynı şekilde diğer tek yönlü terimler ve daha fazla yön içeren terimler de düşeceğinden sağ yanda yalnızca değişmez terim kalacaktır. Bu durumda bir dizinin diziyeye ait tüm uzay üzerinden ağırlıklı ortalamasını bir işlecin ürettiğini varsayarsak ve \mathcal{P}_0 ile simgelenirse, öte yandan bir yönlü alt

uzaylara olan ağırlıklı ortalamasının izdüşümü ise \mathcal{P}_k ile simgelenirse, bu durumda YBBG açılımının değişmez terimi ve tek tönü terimleri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\mathcal{X}^{(0)} = \mathcal{P}_0 \mathcal{X}^{(i_1 \dots i_N)} \equiv \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_N=1}^{n_N} W_{j_1}^{(1)} \dots W_{j_N}^{(N)} \mathcal{X}_{j_1 \dots j_N} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{i_k} &= \left(\mathcal{P}_k \mathcal{X}^{(i_1 \dots i_N)} \right)_{i_k} - \mathcal{X}_0 \equiv \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_N=1}^{n_N} W_{j_1}^{(1)} \dots W_{j_N}^{(N)} \frac{\delta i_k j_k}{W_{j_k}^{(k)}} \mathcal{X}_{j_1 \dots j_k} - \mathcal{X}^{(0)} \\ i_k &= 1, 2, \dots, n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.8)$$

Daha yüksek sayıda yöne sahip olan Ayrık YBBG bileşenleri de benzer biçimde belirlenir. Eşitlik (3.7) göz önüne alınırsa YBBG'nin değişmez teriminin bir ağırlıklı ortalama olduğu görülür. Eşitlik (3.8) ise bir yöndeki ağırlıklı ortalamanın bütüncül ağırlıklı ortalamadan sapışıdır. Bu biçimde düşünülürse tek yönlü YBBG terimleri verinin o yönünün veri içindeki katkısı olarak tanımlanabilir. İstatiksel olarak anlatmak gerekirse YBBG terimlerinin belli bir ağırlık altında ve verinin ilgili yönünde beklenen değer olduğu gösterilebilir. Aşağıda YBBG'nin değişmez terimi, tek yönlü terimleri ve iki yönlü terimleri beklenen değer kullanılarak yazılmıştır.

$$\mathcal{X}^{(0)} = E[\mathcal{X}] \quad (3.9)$$

$$\mathcal{X}^{(k)} = E[\mathcal{X}|k] - E[\mathcal{X}] \quad (3.10)$$

$$\mathcal{X}^{(k_1, k_2)} = E[\mathcal{X}|k_1, k_2] - E[\mathcal{X}|k_1] - E[\mathcal{X}|k_2] + E[\mathcal{X}] \quad (3.11)$$

Böylelikle, YBBG terimlerinin, veriye ait ilgili yönlerin yalnız ya da birlikte etkilerini açılıma yansıttığı görülmüş olur. Örneğin YBBG terimlerinden ikililer iki değişik yönün birlikte irdelenmesinin veriye etkileri ya da veri içindeki ortak katkılarıdır denilebilir. Bu bilgi ile çok yönlü dizilerin çözümleyişinde yönlerin yalnız ya da birlikte olan istatiksel katkısı irdelenebilir. Eşitlik (3.7) ve (3.8)'den de görülebileceği gibi diğer çoklu dizi ayrıştırma yöntemleri verinin izgesel uzayına izdüşürürken YBBG ve ÇYÇG yöntemleri ortalamalar uzayına izdüşüm uygulamaktadır. YBBG'nin bileşenlerinin birbirine dikgen oluşu ve toplamcıl bir ayrıştırma yöntemi oluşu nedeniyle yöntem, toplamcıl bir örüntüye sahip olan dizilerde tam yaklaşıma sağlayabilmektedir. Aşağıdaki örnek bunu göstermeyi eklemektedir.

3.1.1.1 Örnek

Önyüzleri aşağıdaki gibi verilen $3 \times 4 \times 2$ türündeki 3-yönlü \mathcal{X} dizisini ele alalım.

$$X_{::,1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad X_{::,2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Bu 3-yön dizinin YBBG açılımında değişmez terimini bulmak için öncelikle ağırlık olarak her yöndeki konum sayısını ele alalım.

$$W^{(1)} = \frac{1}{3}, \quad W^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad W^{(3)} = \frac{1}{2}$$

Verilen ağırlıklar eş ağırlıktır yani ilgili yöneyin tüm öğelerinin özlerine ait ağırlıkları aynıdır. Dolayısıyla, ağırlığı bir dizi olarak yazmak yerine öğecil düzeyde bir değişmez olarak da göstermek olanaklıdır. Verilen eş ağırlık altında Ayrık YBBG'nin değişmez terimi aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\mathcal{X}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \mathcal{X}_{ijk} = 6$$

YBBG'nin tek yönlü dizileri her biri ilgili yönde aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$\mathcal{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^{(1)} \\ \mathcal{X}_2^{(1)} \\ \mathcal{X}_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{1jk} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{2jk} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{3jk} - \mathcal{X}^{(0)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^{(2)} \\ \mathcal{X}_2^{(2)} \\ \mathcal{X}_3^{(2)} \\ \mathcal{X}_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{i1k} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{i2k} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{i3k} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{i4k} - \mathcal{X}^{(0)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^{(3)} \\ \mathcal{X}_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{3} \frac{1}{4} \mathcal{X}_{ij1} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{3} \frac{1}{4} \mathcal{X}_{ij2} - \mathcal{X}^{(0)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Değişmez terim ve tek yönlü dizileri bularak gerçek diziye bir yaklaştırım uygulamak olanaklıdır Örneğin dizinin sayısal değeri 7 olan 2, 4, 1 altsırasayılı öğesi için aşağıdaki

yaklaşım bulunabilir.

$$\mathcal{X}_{2,4,1} \approx \mathcal{X}^{(0)} + \mathcal{X}_2^{(1)} + \mathcal{X}_4^{(2)} + \mathcal{X}_1^{(3)} = 6 + 0 + 1.5 + (-0.5) = 7$$

Yukarıda verilen diziye Ayrık YBBG açılımı ile bir yönlülük düzeyinde yaklaşım uygulanmıştır. Bir yönlülük düzeyinde yaklaşım yalnızca değişmez terim ile 1-yönlü dizi bileşenlerinin ele alınması ve açılımın diğer terimlerinin göz ardı edilmiştir. Görüldüğü gibi seçilen dizi ögesi için yaklaşım sonucu birebir doğru değer vermektedir. Bunun temel nedeni YBBG'nin toplamcıl bir açılım olmasının doğal bir sonucu olarak içeriğinde toplamcıl bir işlevin örüntüsünü barındıran veri kümelerinde birinci dereceden yaklaşım bile çok iyi sonuç verebilmektedir ve verilen dizi aslında $(i = 1...3, j = 1...4, k = 1...2)$ öğelerinin altsırasayılarına bağlı toplamcıl bir örüntü taşımaktadır $(\mathcal{X} = i + j + k)$. Ancak yine YBBG'nin toplamcıl doğası nedeniyle toplamcıl işlev yapısı dışında olan veri kümelerinde YBBG yaklaşımı iyi sonuç vermektedir. Örneğin verilen dizi altsırasayılarla toplamcıl değilde çarpımcıl bir yapı ile bağlı olsa yani içerdiği işlevcil yapı $\mathcal{X} = i \times j \times k$ olacak şekilde aşağıdaki gibi verilse

$$X_{:,:,1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \quad X_{:,:,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 6 & 12 & 18 & 24 \end{bmatrix}$$

ayrık YBBG açılımının bu çoklu dizi için değişmez terimi

$$\mathcal{X}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \mathcal{X}_{ijk} = 7.5$$

olmaktadır. YBBG'nin tek yönlü terimleri ise aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mathcal{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^{(1)} \\ \mathcal{X}_2^{(1)} \\ \mathcal{X}_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{1jk} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{2jk} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{3jk} - \mathcal{X}^{(0)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -3.75 \\ 0 \\ 3.75 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^{(2)} \\ \mathcal{X}_2^{(2)} \\ \mathcal{X}_3^{(2)} \\ \mathcal{X}_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{i1k} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{i2k} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{i3k} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mathcal{X}_{i4k} - \mathcal{X}^{(0)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -4.5 \\ -1.5 \\ 1.5 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1^{(3)} \\ \mathcal{X}_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{3} \frac{1}{4} \mathcal{X}_{ij1} - \mathcal{X}^{(0)} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{3} \frac{1}{4} \mathcal{X}_{ij2} - \mathcal{X}^{(0)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Elde edilen bu YBBG bileşenleri ile çarpımcıl yapıda verilen dizinin öğelerinden birinin (örneğin $\mathcal{X}_{2,4,1} = 8$) yaklaşık değerini elde edersek,

$$\mathcal{X}_{2,4,1} \approx \mathcal{X}^{(0)} + \mathcal{X}_2^{(1)} + \mathcal{X}_4^{(2)} + \mathcal{X}_1^{(3)} = 7.5 + 0 + 4.5 + (-2.5) = 9.5$$

bulunur. Görüldüğü gibi yaklaşıtlımın niteliğinde öğecil düzeyde oldukça yüksek bir yitim olmuştur. Bütüncül yaklaşıtlım ölçeni olarak bağıl yanılıgıyı ele alırsak toplamcıl yapıdaki dizi için bağıl yanılıgı 0 iken çarpımcıl yapıdaki dizi için YBBG açılımı ile birinci kereden yaklaşıtlımın bağıl yanılıgısı 0.2236 çıkmıştır. Bunun en temel nedeni birbirlerine dik olan YBBG bileşenlerinin toplanarak açılımı oluşturmalarıdır ve bu durumda böyle bir açılım tam toplamcıl bir yapıda çok iyi yaklaşıtlım uygulayabilmektedir. Eğer verilen dizinin çarpımcıl ya da daha değışik bir yapısı varsa YBBG'nin tam toplamcıl bu yapısına katkı sağlayacak dönüşümler oluşturulabilir ya da açılımı iyileştirecek bazı terimler eklenebilir. Örneğın eşitlik 3.1 ile verilen YBBG açılımına çarpan olarak bazı destek terimleri eklenirse açılımda daha çarpımcıl bir yapı oluşur ve toplamcıl yapıdan değışik diziler için de kullanılabilir bir nitelik sağlanmış olur. Bu düşünceden yola çıkılarak YBBG açılımının genelleştirilmiş olan "Ayrık Çokdeğışkenliliğı Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG)" üretilmiştir.

3.2 Ayrık Çokdeğışkenliliğı Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi

Geçtiğimiz yıllarda YBBG ve türlerinin çok yönlü diziler üzerindeki uygulamaları BEBBYT (Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğı)'nca ele alınmış ve bu çalışmalarda elde edilen bilgiler çok yönlü dizi biçimindeki veri kümelerinin kullanım alanlarının genişliğinden dolayı önem kazanmıştır. Çoklu dizilerde ÇYÇG açılımının matematiksel ifadesi sürekli yapılarla benzerlik gösterse de ÇYÇG'nin iki ve daha fazla sırasayılı terimlerinin destek yöneyleri ile dış çarpımının yazılması yönler açısından sıkıntı yaratacağından veri kümesinin öğeleri üzerinden matematiksel anlatım tercih edilmiştir. \mathcal{X} , N yönlü bir çoklu dizi olmak üzere bu

çoklu dizinin $\mathcal{X}_{i_1 \dots i_N}$ altırasayılı ögesi için ÇYÇG açılımı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{i_1 \dots i_N} &= \prod_{j=1}^N s_{i_j}^{(j)} \mathcal{X}^{(0)} + \sum_{j_1=1}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}}^{(j_1)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1}}^N s_{i_j}^{(j)} + \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 < j_2}}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}, i_{j_2}}^{(j_1, j_2)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1, j_2}}^N s_{i_j}^{(j)} \\ &+ \dots + \mathcal{X}_{i_{j_1}, i_{j_2}, \dots, i_{j_N}}^{(j_1, j_2, \dots, j_N)}, \\ i_j &= 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.12)$$

Yukarıda verilen ÇYÇG açılımının Eşitlik (3.1)'den temel ayrımı destek terimlerinin her toplanan terimle değişkenliliği aynı kılacak şekilde çarpılarak açılıma katılışdır. Bu katılış elbette açılım bileşenlerini destek terimlerinin varlığını göz önüne alarak bulmayı gerektirir. Bu nedenle YBBG açılımında kullanılan sıfırlanmış koşulu, dik bileşenlilik, normalizasyon gibi koşul ve kısıtları ÇYÇG için destek terimlerini göz önünde bulundurarak güncellemiş gerekmektedir. Sürekli yapılarda bu güncelleşler ilgili bilimsel yayınlarda gösterilmiştir. Ayrık yapılarda ise sürekli yapılardan değişik olarak tümlev yapılarının yerini toplam yapıları oluşturarak aynı koşul ve kısıtlar kullanılmıştır.

3.2.1 ÇYÇG bileşenlerinin belirlenimi

Ayrık yapılarda ÇYÇG terimlerinin belirlenmesinde kullanılan ağırlık yöneylerine ilişkin özellikler sürekli yapılarla benzerlik göstermektedir. Her bir yöndeki ağırlık yöneylerinin dış çarpımlarından oluşan ağırlık dizisi aşağıdaki gibidir ve her bir yöndeki ağırlık yöneyleri birim boyluluk koşuluna uygun olarak belirlenir.

$$\sum_{i_j=1}^{n_j} W_{i_j}^{(j)} = 1, \quad W_{i_1 \dots i_N} \equiv \prod_{j=1}^N W_{i_j}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

Yukarıda verilen birim boyluluk koşuluna ek olarak ÇYÇG destek yöneylerinde ağırlık ile birlikte birim boylulaştırımı gerekmektedir. Bu özellik destek yöneylerinin çarpan olarak varlığı nedeniyle ÇYÇG terimlerinin tek türlü bulunuşu için gerekmektedir.

$$\sum_{i_j=1}^{n_j} W_{i_j}^{(j)} \left(s_{i_j}^{(j)} \right)^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.14)$$

ÇYÇG terimlerini bulmakta kullanılan sıfırlanmış koşulu da destek yöneylerinin açılıma girmesiyle aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \sum_{i_{j_l}=1}^{n_{j_l}} W_{i_{j_l}}^{(j_l)} s_{i_{j_l}}^{(j_l)} \mathcal{X}_{i_{j_1} \dots i_{j_k}}^{(i_{j_1} \dots i_{j_k})} &= 0 \\ l &= 1, 2, \dots, k, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.15)$$

ÇYÇG'nin değişmez terimi olan $\mathcal{X}^{(0)}$ aslında çoklu dizinin destek yöneyleri ve belirli bir ağırlık dizisi altında alınan ortalamasına izdüşüm olarak betimlenebilir. Bu durumda ÇYÇG'nin değişmez terimi aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{X}^{(0)} = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_N=1}^{n_N} W_{j_1}^{(1)} \cdots W_{j_N}^{(N)} \prod_{k=1}^N s_{j_k}^{(k)} \mathcal{X}_{j_1 \dots j_N} \quad (3.16)$$

ÇYÇG'nin teklileri de diyebileceğimiz tek yönlü diziler ise erek çoklu dizinin bir yönü dışındaki diğer tüm yönlerinin belirlenmiş ağırlıklarının ve destek yöneylerinin katkısı altında aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\mathcal{X}_{i_k}^{(k)} = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_N=1}^{n_N} W_{j_1}^{(1)} \cdots W_{j_N}^{(N)} \frac{\delta_{i_k j_k}}{W_{j_k}^{(k)}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N s_{i_l}^{(l)} \mathcal{X}_{j_1 \dots j_N} - \mathcal{X}_{j_1 \dots j_N}^{(0)}$$

$$i_k = 1, 2, \dots, n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, n_l \quad (3.17)$$

ÇYÇG'nin iki yönlü, üç yönlü ve daha yüksek sayıda yönlü dizileri de benzer şekilde bulunur.

Geçtiğimiz yıllarda yapılan sürekli ÇYÇG çalışmalarında Eşitlik (3.18)'deki destek işlevleri yapısı kullanılmıştır. Bu eşitliğin kullanılmasının nedeni her bağımsız değişkenin tanım bölgesinden işlevle ilgili bilgi almaktır. Ancak bu yapı aynı zamanda YBBG'nin tek değişkenli terimlerine benzerliğinden dolayı ayrı yapılar da çok etkin olamamıştır. Bu çalışmada çok yönlü dizi ayrıştırımı için kullanılacak olan bu destek yöneyleri ile ilgili ilk sorun bu olmuştur ve değişik arayışlara gidilmiştir. Bunlardan ilki sav önerisinde yer verilen Çarpımcıl Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi'nin tekli terimlerini kullanarak destek işlevlerini bulmaktır. Ama ele alınan çok yönlü dizi yapısındaki verinin işlevcil yapısının çarpımcılığa yakın biçim taşımadığında yaklaşımların niteliğinin düştüğü yapılan uygulamalarda ortaya çıkmıştır. Ele alınan çoklu dizinin işlevcil yapısı bilinmediğinden ilk yineleyişte Eşitlik (3.18)'de olan anlatım kullanılarak bulunan destek yöneyleri için yinelemeli bir yöntem oluşturma girişimi olmuş, fakat yakınsamanın her yineleyişte çok az ilerlediği gözlenmiş ve bunun çoklu dizinin içerdiği öge sayısının yüksek oluşu durumunda, yani büyük veri yapılarında daha da az yakınsamanın olabileceği ve yineleyiş sayısının çok çok büyük sayılara varışının çok önemli bir sorun olduğu olgusu benimsenmiştir. Sav çalışmasının bu noktasında destek yöneyi belirlenimi için kesinlikle bir eniyilemiş yapılması gerekliliğinin kaçınılmaz olduğu varsayılarak bu noktada bir eniyileme problemi tanımlanmasına karar verilmiştir. Sav çalışması sırasında da düşünülen bu

yoldan daha önce çıkan denklemlerin doğrusal olmayışı ve oldukça karmaşık bir yapı elde edilişi (bkz : Ek-2) ve bu yapının çözümünde ancak ideal'lere dayalı Gröbner tabanlarının kullanılabilmesi nedeniyle vazgeçilmiştir ve BEBBYT'nca kullanılan diğer bir yöntem olan "Sendelenimsizlik Kanıtı" kullanılarak destek terimlerinin bulunuşu gündeme gelmiştir. Ancak oluşturulan düzgün işlevcil yapı taşıyan yapay veri kümelerinde elde edilen sonuçlar, ne yazık ki, istenen yaklaşıtıı sağlayamamıştır. Bu nedenle yalın ÇYÇG yönteminde destek terimleri veri kümesini betimleyebilişi açısından aşağıda verilen formül ile hesaplanmaktadır.

$$s_{i_j}^{(j)} = \frac{\sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_{j-1}=1}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=1}^{n_{j+1}} \dots \sum_{i_N=1}^{n_N} W_{i_1}^{(1)} \dots W_{i_{j-1}}^{(j-1)} W_{i_{j+1}}^{(j+1)} \dots W_{i_N}^{(N)} \mathcal{X}_{i_1, \dots, i_N}}{\left(W_{i_j}^{(j)} \left[\sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_{j-1}=1}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=1}^{n_{j+1}} \dots \sum_{i_N=1}^{n_N} W_{i_1}^{(1)} \dots W_{i_{j-1}}^{(j-1)} W_{i_{j+1}}^{(j+1)} \dots W_{i_N}^{(N)} \mathcal{X}_{i_1, \dots, i_N} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.18)$$

Bu şekilde destek terimleri belirlemek elbette veriden olabildiğince bilgi alabilmek için iyi bir yöntem olsa da destek terimlerini en iyi biçimde belirlemek güvence altında değildir (bkz : Ek-2). Bu sorunun üstesinden gelmenin zorlu bir sorun olduğunun ayırđına varılmış, matematiksel ve yazılımcıl olarak gözlenmiş ve bu nedenle yaklaşıtıı güçlendirecek, aynı zamanda da hesaplama karmaşıklığı açısından daha uygun yöntemler yeğlenmiştir. Yeğlenen ve geliştirilen bu yöntemler bölüm 4'de ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

3.2.1.1 Örnek

Ayrık YBBG ile ayrıştııı uygulanan altsırasayılara toplamcıl ve çarpımcıl bir örüntü ile bağılı dizileri ayrık ÇYÇG ile yeniden ele alalım. ÇYÇG'nin destek işlevlerinin açılıma çarpan olarak eklenişi ile çarpımcıl yapıda olan dizi için tam bir yaklaşıtıı beklenmektedir. Verilen çoklu dizi yine

$$X_{:,:,1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \quad X_{:,:,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 6 & 12 & 18 & 24 \end{bmatrix}$$

ayrık ÇYÇG açılıının bu çoklu dizi için destek terimleri

$$\mathbf{s}^{(1)} \approx \begin{bmatrix} 0.4629 \\ 0.9258 \\ 1.3887 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 0.3651 \\ 0.7303 \\ 1.0954 \\ 1.4606 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(3)} \approx \begin{bmatrix} 0.6325 \\ 1.2649 \end{bmatrix}$$

ve değişmez terim

$$\mathcal{X}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \mathcal{X}_{ijk} s_i^{(1)} s_j^{(2)} s_k^{(3)} \approx 9.3541$$

olarak bulunur. Destek terimleri ve değişmez terimin bulunması ile elde edilecek olan tek yönlü diziler ise öğeleri 0 olan yöneylerdir.

$$\mathcal{X}^{(1)} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}^{(3)} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tek yönlü dizilerin 0 değeri içeren öğelerden oluşmasının temel nedeni bütünüyle çarpımcıl alınan dizi ÇYÇG ile değişmez terim yaklaşırımı ile elde edilebilmesidir. Bunu görmek için yine dizinin $\mathcal{X}_{2,4,1} = 8$ öğesine ÇYÇG'nin değişmez yaklaşırımı uygulanırsa

$$\mathcal{X}_{2,4,1} \approx \mathcal{X}^{(0)} \times s_2^{(1)} \times s_4^{(2)} \times s_1^{(3)} = 9.3541 \times 0.9258 \times 1.4606 \times 0.6325 \approx 8.0$$

yaklaşırımı elde edilir. Bu biçim tüm dizinin tüm öğelerine birebir yaklaşırım elde edilir ve bağıl yanılığı 0 çıkar. Oysa altsırasayıllara çarpımcıl değil de toplamcıl olarak bağlı olan $\mathcal{X}_{i,j,k} = i + j + k$ dizisini ele alırsak ÇYÇG ile yaklaşırımın niteliğinin zayıfladığı görülecektir. Bu dizi için yine eş sırasayılı olan fakat değeri 7 olan $\mathcal{X}_{2,4,1}$ öğesinin değişmez yaklaşırım, birinci kereden yaklaşırım ve ikinci kereden yaklaşırım sonuçlarına bakılacak olursa,

$$\mathcal{X}_{2,4,1} \approx \mathcal{X}^{(0)} \times s_2^{(1)} \times s_4^{(2)} \times s_1^{(3)} = 6.1750 \times 0.9909 \times 1.2288 \times 0.9135 \approx 6.8684$$

elde edilir ve bütüncül yaklaşırım için bağıl yanılığı 0.0310 düzeyindedir. Böylece yaklaşırımın bu diziyi çarpımcıl bir dizi kadar iyi betimleyemediği görülmektedir. Birinci kereden yaklaşırım söz konusu olduğunda ise

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{2,4,1} &\approx \mathcal{X}^{(0)} \times s_2^{(1)} \times s_4^{(2)} \times s_1^{(3)} + \mathcal{X}_2^{(1)} \times s_4^{(2)} \times s_1^{(3)} \\ &+ \times s_2^{(1)} \times \mathcal{X}_4^{(2)} \times s_1^{(3)} + \times s_2^{(1)} \times s_4^{(2)} \times \mathcal{X}_1^{(3)} \\ &\approx 6.8790 \end{aligned} \tag{3.19}$$

bulunur ve yaklaşıtırımın niteliğinde az da olsa bir iyileştirimden söz edilebilir. Oysa iki ÇYÇG'nin iki yönlü terimleri de eklenirse dizinin bu ögesi için

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{2,4,1} &\approx \mathcal{X}^{(0)} \times s_2^{(1)} \times s_4^{(2)} \times s_1^{(3)} + \mathcal{X}_2^{(1)} \times s_4^{(2)} \times s_1^{(3)} \\
&+ \times s_2^{(1)} \times \mathcal{X}_4^{(2)} \times s_1^{(3)} + \times s_2^{(1)} \times s_4^{(2)} \times \mathcal{X}_1^{(3)} \\
&+ \mathcal{X}_{2,4}^{(1,2)} \times s_1^{(3)} + \mathcal{X}_{2,1}^{(1,3)} \times s_4^{(2)} + \mathcal{X}_{4,1}^{(2,3)} \times s_2^{(1)} \\
&\approx 6.9959
\end{aligned} \tag{3.20}$$

yaklaşıtırımı elde edilir ve bağılı yanılı 4×10^{-3} düzeyindedir.

3.2.2 YBBG ve ÇYÇG yöntemlerinin sayıcl karşılaştırımı

Bir önceki kesimde matematiksel altyapısı anlatılan yönteme, bir başka deyişle, YBBG'nin genelleştirilmiş durumu da denilebilir. Toplamcıl bir açılımdan neden çarpımcıla geçildiği sorusunu gündeme getirmek gerekirse, YBBG dik bir uzam (geometri) üzerinde toplamcıl bir açılım olarak tanımlanmıştır. Bu yüzden toplamcılıktan uzaklaştıkça anlatım yeteneği azalmaktadır. Bu sorunun yanıtı için aşağıdaki çizelge de yardımcı niteliktedir.

Çizelge 3.1 : Farklı Veri Kümeleri için YBBG ve ÇYÇG Karşılaştırması.

Veri Kümesi	YBBG-0	YBBG-1	ÇYÇG-0	ÇYÇG-1
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i + j + k$	0.2551	0	0.0372	0.0357
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = (1/2) * i^2 + j * (1/5) + k$	0.3507	0	0.0655	0.0612
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i * j * k$	0.6447	0.2673	0	0
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = (1/3) * i^2 * j * (1/5) * k^3$	0.8519	0.50258	0	0
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = \exp(i + 1) * 3 * j * \cos(10 * k)$	1.0000	0.6752	0	0
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = \sin(i * 20) + j^3 * (k/2)$	0.7589	0.2966	0.0113	0.0074

Elbette ki tüm veri kümelerini en iyi şekilde anlatabilen bir ayrıştırım yöntemi bulmak güçtür. Bu nedenle uygulamalarda ilgili veri kümesinin özellikleri ve yapılacak iş göz önünde bulundurularak değışik yöntemler denenmektedir. Bu sav çalışmasında da, çalışma boyunca kullanılan uygulama alanları da temel alınarak ÇYÇG yöntemi değışik alanlar ve değışik veri kümeleri için özelleştirilmiş ve yeni yöntemler türetilmiştir. Bir sonraki bölüm bu yöntemleri ele almaktadır.

4. ÇYÇG TABANLI YENİ AÇILIMLAR

4.1 ÇYÇG Tabanlı Yeni Açılımlar

4.1.1 Küçük Ölçeklerde ÇYÇG

Küçük Ölçeklerde Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi (KÖ-YBBG) ilk olarak BEBYT topluluğunca ele alınmış bir yöntemdir [41]. Yapılan çalışmalarda KÖ-YBBG 'nin çok değişkenli işlev yaklaşıtırimında yüksek başarıım sağladığı ve değişik uygulama alanlarında kullanılabileceğini gösterilmiştir [42]. Bu çalışmadan esinlenerek oluşturulmuş Küçük Ölçeklerde ÇYÇG'de yine sürekli işlevlerde yakın zamanda uygulanmıştır [43].

Bu sav çalışması kapsamında “Küçük Ölçeklerde Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (KÖ-ÇYÇG) ”çok yönlü dizilerde ilk kez uygulanmış ve yöntemin etkinliği ile elde edilen sonuçlar görüntü geri çatma çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmanın sonuçları bölüm 5'de görülebilir.

KÖ-ÇYÇG çok yönlü dizilerin ait oldukları uzayın alt uzaylarını ele alıp, her bir altuzayda ÇYÇG yöntemini uyguladıktan sonra ayrıştırımın tüm sonuçlarını birleştiriş felsefesine dayanmaktadır. Her bir alt uzayda uygulanan ÇYÇG ilgili alt kesimdeki veriye ilişkin destek terimleri ve ÇYÇG bileşenleri bulunur. Bu nedenle her alt kesimde hesaplanan destek terimleri ve bileşenler değişik olur. Veri kümesinin uzamcıl (geometrik) olarak bu biçimde bölünmesi ve daha küçük bir alanda ayrıştırım uygulanışını yaklaşıtırim niteliğini artırmakla birlikte, veri kümesinin değişik kesimlerinde oluşmuş işlevcil yapılarda değişiklikleri yakalamayı sağlar. Bu yönleriyle KÖ-ÇYÇG yöntemi başarıım gösterir nitelikte bir yöntemdir.

4.1.2 İndirgeyimcil Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi

Çok yönlü dizilerin “İndirgeyimcil Ayrıştırım”, 3-yönlü bir çoklu diziyi dış çarpım aracılığı ile bir dizey ve bir yöney çarpımı biçiminde ayrıştırmak ile gerçekleştir

[44]. Bu ayrıştırımı gerçekleştirebilmek için N yönlü dizilerde Hilbert uzayının özelliklerinden gelen iç çarpım ve boy tanımları kullanılır.

$$\left(\mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{X}^{(2)} \right) \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_N=N}^{n_N} \mathcal{X}_{i_1 \dots i_N}^{(1)} \mathcal{X}_{i_1 \dots i_N}^{(2)} \quad (4.1)$$

$$\|\mathcal{X}\| \equiv (\mathcal{X}, \mathcal{X})^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

\mathcal{H}_N (N yönlü dizilerin Hilbert uzayı) uzayına ait bir \mathcal{X} çok yönlü dizisi için \circ dış çarpımı göstermek üzere aşağıdaki terimleri içeren bir ayrıştırım yapılabilir.

$$\mathcal{M} \equiv B \circ x, \quad B \in \mathcal{H}_{N-1}, \quad x \in \mathcal{H}_1 \quad (4.3)$$

\mathcal{M} çok yönlü yaklaşım dizisinin i_1, \dots, i_N altsırasayılı ögesini B çok yönlü dizisinin ve x tek yönlü dizisinin ilgili öğelerinin çarpımını alarak aşağıdaki gibi hesaplamak mümkündür.

$$\mathcal{M}_{i_1, \dots, i_N} = B_{i_1, \dots, i_{N-1}} x_{i_N} \quad (4.4)$$

Yukarıda sözü geçen B ve x dizilerinin diğer bir özelliği ise birim boylu oluşlarıdır.

$$\|\mathcal{M}\| = \|B\| \|x\| = 1, \quad \|B\| = 1, \quad \|x\| = 1 \quad (4.5)$$

Bu olgulardan yola çıkarak bir \mathcal{X} çok yönlü dizisine B ve x dizileri ile oluşturulan $\sigma \mathcal{M}$ dizisi ile yaklaşım uygulamak olanaklıdır. Bu aşamada bilinmeyenler olan \mathcal{M} dizisini ve σ ölçenini bulabilmek için \mathcal{X} ile yaklaşım $\sigma \mathcal{M}$ arasındaki ayrımın Öklid uzaklığını enküçükleyecek biçimde bir eniyileme sorunu geliştirilebilir. Bu durumda \mathcal{M} 'nin bileşenleri ve σ ölçeni üzerinden

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma, B, x) &= \|D\|^2 \\ D &\equiv \mathcal{X} - \sigma B \circ x \end{aligned} \quad (4.6)$$

biçiminde tanımlanan farkı kullanarak ve bileşenlerin birimboyluluğu olgusunu da göz önünde bulundurarak aşağıdaki eniyileme sorunu oluşturulur.

$$\mathcal{J} = \Delta(\sigma, B, x) + \lambda_1 (\|B\|^2 - 1) + \lambda_2 (\|x\|^2 - 1) \quad (4.7)$$

Bu en iyileme sorununun σ , λ_1 ve λ_2 'ye göre çözülmesi ile bileşenlere ait aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \|B\|^2 &= 1, \quad \|x\|^2 = 1 \\ 2\sigma \|B\|^2 \|x\|^2 - 2(\mathcal{X}, B \circ x) &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

B ve x 'in birim boylu olduğu göz önüne alınırsa

$$\sigma = (\mathcal{X}, B \circ x) \quad (4.9)$$

olduğu görülür. Eniyileyişle

$$\begin{aligned} -2\sigma \sum_{i_N=1}^{n_N} \mathcal{X}_{i_1, \dots, i_N} x_{i_N} + 2\sigma^2 B_{i_1, \dots, i_{N-1}} + 2\lambda_1 B_{i_1, \dots, i_{N-1}} = 0, \\ i_l = 1, 2, \dots, n_l, \quad l = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} -2\sigma \sum_{i_N=1}^{n_N} \dots \sum_{i_N=1}^{n_{N-1}} \mathcal{X}_{i_1, \dots, i_N} B_{i_1, \dots, i_{N-1}} + 2\sigma^2 x_{i_N} + 2\lambda_2 x_{i_N} = 0 \\ i_N = 1, 2, \dots, n_N \end{aligned} \quad (4.11)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (4.10)'in her iki yanının $B_{i_1, \dots, i_{N-1}}$ ile çarpılması ve i_1, \dots, i_{N-1} sırasayılara ait değerlerin toplanmasıyla, B 'nin birim boyluluğu ve Eşitlik (4.9) göz önünde bulundurulursa

$$-2\sigma (\mathcal{X}, B \circ x) + 2\sigma^2 \|B\|^2 + 2\lambda_1 \|B\|^2 = 0 \quad (4.12)$$

eşitliğinden λ_1 değerinin 0 olması gerekliliği ortaya çıkar. Aynı işlemler (4.11) sırasayılı eşitlik için de yapılırsa λ_2 değerinin sıfır olması gerekliliği ortaya çıkar. Böylece Eşitlik (4.10) ve Eşitlik (4.11) λ 'lar sıfır alınarak yeniden gündeme getirilirse ve düzenlenirse B ve x aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} B_{i_1, \dots, i_{N-1}} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i_N=1}^{n_N} \mathcal{X}_{i_1, \dots, i_N} x_{i_N}, \quad i_l = 1, 2, \dots, n_l, \quad l = 1, \dots, N-1 \\ x_{i_N} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i_N=1}^{n_N} \dots \sum_{i_N=1}^{n_{N-1}} \mathcal{X}_{i_1, \dots, i_N} B_{i_1, \dots, i_{N-1}}, \quad i_N = 1, 2, \dots, n_N \end{aligned} \quad (4.13)$$

Yukarıdaki iki eşitlik arasında yerine koyma ve eleme gerçekleştirilirse x yöneyi için aşağıdaki yapı bulunur.

$$x_i = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_{N-1}=1}^{n_{N-1}} \sum_{j=1}^{n_N} \mathcal{X}_{i_1, \dots, i} \mathcal{X}_{i_1, \dots, j} x_j \quad (4.14)$$

Bu eşitlik bir özdeğer sorunu olarak da görülebilir ve x yöneyi aşağıdaki biçimde bir özdeğer sorununun çözümüdür.

$$C_{ij} \equiv \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_{N-1}=1}^{n_{N-1}} \mathcal{X}_{i_1, \dots, i} \mathcal{X}_{i_1, \dots, j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_N \quad (4.15)$$

$$C\mathbf{x} = \sigma^2 \mathbf{x} \quad (4.16)$$

x bulunduktan sonra ayrıştırımın diğer bileşeni olan B dizisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$B_{i_1, \dots, i_{N-1}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i_N=1}^{n^N} \mathcal{X}_{i_1, \dots, i_N} x_{i_N} \quad (4.17)$$

Yukarıda sözü edilen C dizeyi artı tanımlı ve bakışıktır. Dolayısıyla bulunan özdeğerler gerçeldir. Bu özdeğerlerin en baskın olanına karşılık gelen özyöney ilgili yönün destek terimi olarak seçilirse ÇYÇG açılımı izgesel-istatistiksel olacak biçimde melez bir yapı kazanır. Yön sayısını indirgemeye dayalı olması nedeniyle bu yöntemle ‘İndirgeyimcil Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi’ (İ-ÇYÇG) denilmektedir. Bu açılımda kendi içinde indirgemenin yönü ve sayısına göre değişim gösterebilmektedir. Örneğin, isteğe bağlı biçimde sıralı yönler seçilebilir ya da belli bir kritere göre yönler elenerek seçilebilir. Ayrıca aynı yönde birden çok açılım yapılabilir. Bu uygulamalar veri kümesinin özelliklerine ve kullanım amacına göre daha da şekillendirilebilir. Bu biçimde yapılabilecek indirgeyimcil açılımlardan değişik üç tanesi 3-yönlü diziler için aşağıdaki biçimde uygulanmıştır.

4.1.2.1 3-Yönlü diziler için uygulama-1

\mathcal{X} 3-yönlü dizisi bir yön seçerek indirgeyimcil ayrıştırım uygulanmak istenirse, örneğin ilk açılım yönüne 3. yön (k yönü), elde edilen yaklaşıma da \mathcal{X}_{yak} dizisi denilsin. Bu durumda bu yaklaşımın bileşenleri $B^{(3)}$ ve $x^{(3)}$ olsun. σ_3 ölçekleme değıştirgesi (parametresi) olmak üzere \mathcal{X}_{yak} yaklaşım dizisi

$$\mathcal{X}_{yak} = \sigma_3 B^{(3)} \circ x^{(3)} \quad (4.18)$$

biçiminde anlatılır. Bu yaklaşım ile gerçek dizi arasındaki farkı alarak bu farka iki yönünde indirgeyimcil ayrıştırım yapılırsa ve bileşenlere $B^{(2)}$ ve $x^{(2)}$ denilirse bu kez yaklaşım dizisi

$$\mathcal{X}_{yak} = \sigma_2 B^{(2)} \circ x^{(2)} + \sigma_3 B^{(3)} \circ x^{(3)} \quad (4.19)$$

yapısına kavuşur. Bu yaklaşım ile gerçek dizi arasındaki fark yine ama bu kez ilk yönde ayrıştırılırsa son olarak elde edilen yaklaşım aşağıdaki gibi anlatılır.

$$\mathcal{X} \approx \sigma_1 B^{(1)} \circ x^{(1)} + \sigma_2 B^{(2)} \circ x^{(2)} + \sigma_3 B^{(3)} \circ x^{(3)} \quad (4.20)$$

Bu uygulamada isteğe bağlı bir yön seçilerek ayrıştırıma başlanır ve yine isteğe bağlı fakat öncekilerle aynı olmayan yönlerde indirgeyimcil ayrıştırıma son yönde de açılım

yapılıncaya kadar devam edilir. Her üç yönde de açılım yaptıktan sonra oluşturulan son yaklaşım irdelenmiştir. Ayrıca her yönde uygulanan indirgeyimcil ayrıştırım sonucu elde edilen **C** dizyelerinin özuzayından seçilen en baskın özdeğerlere karşılık gelen özyöneyle **ÇYÇG** açılımının destek terimleri olarak kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Çizelge(4.1) bu yöntemin değişik yapıdaki çok yönlü diziler için **ÇYÇG** ile karşılaştırılmasını içermektedir.

Çizelge 4.1 : Farklı Yapay Veriler İçin İndirgemeli Ayrıştırım ve **ÇYÇG** Bağlı Yanılgı Değerleri.

Veri Kümesi	İndirgemeli	ÇYÇG-0	ÇYÇG-1	ÇYÇG-2
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i + j + k$	0.99992	0.99383	0.89678	2.06490×10^{-7}
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i^2 + j^2 + k^2$	0.99793	0.99655	0.93134	7.98195×10^{-7}
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i^4 + j^2 + k^2$	0.99829	0.17767	0.093876	1.43542×10^{-6}
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i^2 + j^4 + k^2$	0.99951	0.999875	0.99931	7.46696×10^{-7}
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i^2 + j^2 + k^4$	0.99990	0.99999	0.99969	3.49981×10^{-16}

4.1.2.2 3-Yönlü diziler için uygulama-2 : Elemeli İ-ÇYÇG

Bu uygulama diğerinden değişik olarak elemeli indirgeyimcil bir yapı taşımaktadır. İndirgeyimcil ayrıştırımı 3-yönlü diziler için uygularken ele alınan ilk açılım yönü isteğe bağlı olarak değil her üç yönde açılım yapılarak tüm yönlerdeki açılımlar için oluşturulan **C** dizyelerinin özdeğerlerine bakılır, en baskın özdeğerin olduğu yönde açılım gerçekleştirilir. Daha sonra açılımın yapıldığı yön elenir ve yaklaşım ile gerçek dizi arasındaki fark kalan iki yön için açılır. Özdeğerler incelenir ve iki yön arasından en baskın olan seçilir. Daha sonra kalan yönde de açılım yapılır ve yaklaşım elde edilir. Aşağıda baskınlık sırasına göre açılım sonucu yaklaşım anlatımı verilmiştir.

$$\mathcal{X} \approx \sigma_{b_1} B^{(b_1)} \circ x^{(b_1)} + \sigma_{b_2} B^{(b_2)} \circ x^{(b_2)} + \sigma_{b_3} B^{(b_3)} \circ x^{(b_3)} \quad (4.21)$$

Sayıcıl sonuçlarda verilen örneklerde ilgili verinin yapısına göre açılım yönleri değişmektedir. **ÇYÇG** destek işlevleri ise en baskın yönden başlayarak açılım sırasında elde edilen özdeğer probleminin çözümünden elde edilen en büyük özdeğere karşılık gelen özyöneyleler olarak atanır. Tablo 4.2 'de verilen sonuçlarda salt Elemeli İndirgemeli Ayrıştırım ile ayrıştırımdan elde edilen destek işlevlerinin sıfırıncı mertebeden, birinci mertebeden, ikinci mertebeden yaklaşımlarla karşılaştırılması görülmektedir.

4.1.2.3 Örnek

Çizelge 4.2 : Farklı Sentetik Veriler ($\mathcal{X}^{(3,4,5)}$) İçin Elemeli İndirgemeli Ayrıştırım ve ÇYÇG Bağıl Yanılgı Değerleri.

Veri Kümesi	El-İndirgemeli	ÇYÇG-0	ÇYÇG-1	ÇYÇG-2
$\mathcal{X}(i, j, k) = i + j + k$	7.26220×10^{-5}	0.03572	0.03571	0.0053597
$\mathcal{X}(i, j, k) = i^2 + j^2 + k^2$	6.0996×10^{-4}	0.090811	0.090795	0.017745
$\mathcal{X}(i, j, k) = i^4 + j^2 + k^2$	2.63842×10^{-4}	0.092204	0.09219	0.011441
$\mathcal{X}(i, j, k) = i^2 + j^4 + k^2$	4.20453×10^{-5}	0.044284	0.04428	0.001345
$\mathcal{X}(i, j, k) = i^2 + j^2 + k^4$	1.3574×10^{-6}	1.5685×10^{-2}	1.5684×10^{-2}	1.9086×10^{-4}

Çizelge (4.2)'de verilen sonuçlarla iki önemli çıkarımsayış gerçekleştirilebilir. Birincisi Elemeli İndirgeyimcil Ayrıştırım ile elde edilen özyöneylelerin destek işlevi kullanılsa bile sıfırıncı kereden ÇYÇG ile birinci kereden ÇYÇG arasındaki katkı farkı çok küçüktür. Bu açılımda da ikinci kerteğe dek ÇYÇG terimlerini eklemek yanılgıyı biraz olsun küçültecektir. İkinci önemli nokta ise salt Elemeli İndirgeyimcil Ayrıştırım'ın kullanımında oldukça etkili bir yaklaşıtırm sergileniştir.

4.1.2.4 3-Yönlü diziler için uygulama-3 : Yineleyiştirli İ-ÇYÇG

Bazı veri kümelerinde veri yapısını içeren bir yönün baskınlığı sürekli olabilir. Uygulama-1 ve Uygulama-2 bu gibi durumlar için yaklaşıtırmında güçsüz kalacaktır. Örneğin her aşamada aynı yön daha baskın ise bu durumda o yönü elemek yüksek bilgi kaybına yol açacaktır. Böylesi veri kümeleri için “Yineleyiştirli İndirgeyimcil Ayrıştırım”adı verilen yöntem geliştirilmiştir. Bu durumda yaklaşıtırm bileşenleri gerçek dizinin yön sayısı düzeyinde değil yineleyiştir sayısı kadar olmaktadır ve bu durum bileşen sayısında artık kesim oluşturabilir. Yineleyiştir ise enküçüklenecek olan yaklaşıtırm ile gerçek dizinin arasındaki farkın boyu üzerinden bir yanılgı tanımlaması ile belirlenir. Bu durumda yineleyiştir sırasında eleme olmadığı için peşpeşe aynı yönün gelmesi söz konusu olabilir. Aşağıda dokuz yineleme sonucunda oluşan bağıl yanılgılar görülmektedir.

4.1.2.5 Örnek

Çizelge (4.3)'te verilen yanılgı sonuçları her yinelemede düzenli bir yanılgı azalması olduğunu göstermektedir, ayrıca baskın yönlerin 2. (j) ve 3. (k) yönler olduğu görülmektedir. Aynı yapıdaki veri kümesinin boyutlarının değıştirilmesi ile oluşturulan

Çizelge 4.3 : $\mathcal{X}^{(3,4,5)}(i, j, k) = i^3 + j^2 + k^2$ Dizisi İçin Elemeli İndirgemeli Ayrıştırım Bağlı Yanılgı Değerleri ve Açılım Yönleri.

Bağlı Yanılgı	Açılım Yönü
0.068805701786179	2
0.009084984845848	2
0.003433422711386	2
0.000747371472074	3
0.000098408261135	3
0.000019554816473	3
0.000002822545391	3
0.000000511838688	3

$\mathcal{X}^{(5,4,3)}(i, j, k) = i^3 + j^2 + k^2$ veri kümesinin açılım yönü sıralaması ise $10^{(-6)}$ yanılgı seviyesine kadar açılım yönleri sırasıyla şöyledir : 3, 3, 2, 2, 3. Bu sonuçlar gösteriyor ki; verinin salt işlevsel yapısı dışında yönlerin boyutlarıss da yön baskınlığı açısından önemlidir.

4.1.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi

Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG) yönteminin şekillendirilmesine bir dizeyin ÇYÇG açılımı söz konusu edilerek başlanabilir. Bu amaçla iki yönlü bir dizi olan $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{\ell \times m}$ dizeyini ele alalım. ‘Destek terimleri Tekil Değer Ayrıştırımı’ ile analoji sağlamak amacıyla $\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{u}$ ve $\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{v}$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda söz konusu dizeyin (i, j) sırasayılı ögesi aşağıdaki gibi ÇYÇG’ye açılır.

$$a_{i,j} = a_0 u_i v_j + a_i^{(1)} v_j + u_i a_j^{(2)} + a_{i,j}^{(1,2)}, \quad i = 1, 2, \dots, \ell, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.22)$$

Bu açılımda \mathbf{u} ve \mathbf{v} ’nin bilindiği öngörülmektedir ve yukarıda verilen gösterilim öge tabanlı gösterilimdir. Bu açılım tıkız bir gösterilim ile anlatılmak istenirse

$$\mathbf{u}, \mathbf{a}_1 \in \mathcal{R}^{\ell}; \quad \mathbf{v}, \mathbf{a}_2 \in \mathcal{R}^m, \quad a_0 \in \mathcal{R}, \quad \mathbf{A}, \mathbf{A}_{1,2} \in \mathcal{R}^{\ell \times m} \quad (4.23)$$

olmak üzere

$$\mathbf{A} = a_0 \mathbf{u} \mathbf{v}^T + \mathbf{a}_1 \mathbf{v}^T + \mathbf{u} \mathbf{a}_2^T + \mathbf{A}_{(1,2)}, \quad (4.24)$$

eşitliği elde edilir. $a_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve $\mathbf{A}_{(1,2)}$ bileşenlerini bulmak için diğer bileşenlerin verilmesi ve bazı kısıtlar gerekmektedir. Bileşenlerin bulunması istemi doğrultusunda

ilk koşulun \mathbf{u} ve \mathbf{v} 'nin birim boylu olduğunu düşünelim.

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1 \quad (4.25)$$

YBBG ve ÇYÇG'de söz konusu olan sıfırlanış koşulu aşağıdaki bileşenler için ÇYÇÜDG'de de geçerlidir.

$$\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 = 0, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{a}_2 = 0, \quad \mathbf{u}^T \mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{0}_m^T, \quad \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{v} = \mathbf{0}_\ell \quad (4.26)$$

Sıfırlanma koşulu altında ÇYÇÜDG terimleri tek türlü olarak belirlenebilmektedirler. Bu belirleyişi yapabilmek için öncelikle Eşitlik (4.24)'in her iki yanını sağdan \mathbf{u}^T ile, soldan ise \mathbf{v} ile çarpılsın. Bu durumda ÇYÇÜDG'nin değişmez terimi aşağıdaki gibi belirlenir.

$$a_0 = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (4.27)$$

Benzer biçimde \mathbf{a}_1 'i bulmak için eşitlik 4.24'in her iki yanını sağdan \mathbf{v} ile çarpılır ve birimboyluluk, sıfırlanma koşulları uygulanır. Böylece \mathbf{a}_1 bileşeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{a}_1 = (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (4.28)$$

ÇYÇÜDG'nin diğer yöndeki bileşeni (\mathbf{a}_2) ise yine eşitlik 4.24'in her iki yanını soldan \mathbf{u}^T çarpılarak ve ilgili kısıtlar altında cebirsel işlemler yaparak aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\mathbf{a}_2 = (\mathbf{I}_m - \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \mathbf{A}^T \mathbf{u} \quad (4.29)$$

Yukarıda gösterilmiş olan bileşenlerden $\mathbf{A}_{1,2}$ içeriğinde esas dizeye ilişkin fazlasıyla bilgi taşımaktadır. Kalan dizeye de diyebileceğimiz bu dizeye tekrar ayrıştırım uygulayarak yeni dizeye elde etmek ve gerekli bileşenleri ayırıp kullanmak daha iyi bir yaklaşım sağlayacaktır. Bu amaçla ilk kullanılan destek terimlerini birinci destek terimleri olarak sırasaylandırılır ve açılım bileşenleri üzerinden ikinci destek terimlerini, yine açılım bileşenlerinin boyları üzerinden ilk ölçekleyiş değiştiricilerini ($\alpha_1 = a_0, \beta_1, \gamma_1$) aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_2 \equiv \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 \equiv \frac{1}{\|\mathbf{a}_2\|} \mathbf{a}_2, \quad \beta_1 \equiv \|\mathbf{a}_1\|, \quad \gamma_1 \equiv \|\mathbf{a}_2\| \quad (4.30)$$

asıl dizeye uygulanan ÇYÇÜDG açılımını aşağıdaki gibi anlatılabilir.

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \beta_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1^T + \gamma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2^T + \mathbf{A}_{1,2} \quad (4.31)$$

$\mathbf{A}^{(0)} \equiv \mathbf{A}$ ve $\mathbf{A}^{(1)} \equiv \mathbf{A}_{1,2}$ alınarak bir özyineleyiş yapısı kurmak ve her özyineleyiş adımında yeni destek terimlerini bulmak olanaklıdır. Bu nedenle (4.31) bir özyineleyiş döngüsünün başlangıcı olarak tanımlanabilir. Özyineleyişin genel anlatımı aşağıda verilen eşitlikteki gibidir.

$$\mathbf{A}^{(j)} = \alpha_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{v}_{j+1}^T + \beta_{j+1} \mathbf{u}_{j+2} \mathbf{v}_{j+1}^T + \gamma_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{v}_{j+2}^T + \mathbf{A}^{(j+1)} \quad (4.32)$$

α , β ve γ ölçekleyiş değıştirgeleri ise j . özyineleyiş için aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1} &\equiv \mathbf{u}_{j+1}^T \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{v}_{j+1} \\ \beta_{j+1} &\equiv \left\| (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{u}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{v}_{j+1} \right\| \\ \gamma_{j+1} &\equiv \left\| (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_{j+1} \mathbf{v}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)T} \mathbf{u}_{j+1} \right\| \end{aligned} \quad (4.33)$$

j . özyineleyiş için gerekli olan $(j+2)$. destek terimleri de aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$\mathbf{u}_{j+2} \equiv \frac{1}{\beta_{j+1}} (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{u}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{v}_{j+1}, \quad \mathbf{v}_{j+2} \equiv \frac{1}{\gamma_{j+1}} (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_{j+1} \mathbf{v}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)T} \mathbf{u}_{j+1} \quad (4.34)$$

\mathbf{A} dizeyinin sol sıfır uzayı boş oldukça devam edecek olan bu özyineleyiş dizeyin boyutlarından küçük olanın sayısı kadar devam eder. Bu demektir ki $\ell < m$ ise özyineleyiş ℓ . adımda bitecektir ve \mathbf{A} dizeyi aşağıdaki eşitlikteki gibi anlatılabilecektir.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{\ell-1} \beta_i \mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_{i+1}^T \\ &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (4.35)$$

Yukarıda verilen eşitliğin son kesiminde TDA'yı anımsatan bir yazım sözkonusudur. Her ne düzeyde yazım benzese de ÇYÇÜDG'nin ürettiği Σ dizeyi aşağıda gösterildiği gibi üçköşegencil dikdörtgencil bir dizeydir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \gamma_{m-1} \\ 0 & \dots & \dots & \alpha_m \\ 0 & \dots & \beta_{m-1} & \alpha_m \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Yöntem adını (4.36) numaralı dizeyin yapısından almaktadır. Şüphesiz burada yöntemi TDA'dan başka kılan en büyük özellik başlangıç destek terimlerinin nasıl hesaplandığıyla ilintilidir. Başlangıç destek terimlerini asıl dizeyin tekil yöneyleri olarak alırsak yöntem TDA'ya yaklaşır ve üçköşegencil yapıda olan ölçekleyiş

değiştirgeleleri dizeyi, Σ , içeriğindeki β ve γ 'lar sıfırlanmaya başlar. ÇYÇÜDG ise başlangıç destek terimlerini, TDA'nın başlangıç taban yöneylerinden değişik olarak, iki yönlü ÇYÇG'nin destek terimleri olarak almaktadır. Ayrıca ÇYÇÜDG'nin hesaplama karmaşıklığı TDA'na göre oldukça yalındır. Birçok TDA belirleyiş yöntemi olmasına karşın Golup ve Van Loan'ın yazımına göre en iyi hesaplama karmaşıklığı $\ell \times m$ türünde bir dizey için, k_1 ve k_2 değişmezler olmak üzere $\mathcal{O}(k_1\ell^2m + k_2m^3)$ olmaktadır. Bunun temel nedeni TDA bileşenlerinin çözümü için QR ayrıştırımı kullanılmasıdır. ÇYÇÜDG içeriğinde ise yalın dizey, yöney çarpımları ve dış çarpımlar baskındır. Her iki türde işlem içinde hesaplama karmaşıklığı $\mathcal{O}(\ell m)$ olmaktadır. Bu nedenle ÇYÇÜDG yönteminin hesaplama karmaşıklığı TDA'ya ile karşılaştırdığında oldukça düşüktür. Aşağıda boyutları 3×3 olan bir dizey için ÇYÇÜDG ayrıştırımı örnek olarak verilmiştir.

4.1.3.1 Örnek

Aşağıdaki dizeyi ele alarak bu dizey için ÇYÇÜDG ayrıştırımının öğelerini bulabiliriz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu dizey için başlangıç destek terimleri tüm öğeleri 1 olan yöneylerin birimboylulaştırılması ile elde edilen aşağıdaki yöneyler seçilsin.

$$\mathbf{u}_0 \equiv \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 \equiv \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$$

Bu durumda elde edilen ayrıştırım aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.2265 & 0.7845 \\ 0.5774 & -0.5661 & -0.5883 \\ 0.5774 & 0.7926 & -0.1961 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6667 & 1.6997 & 0 \\ 1.6997 & 2.4487 & 2.1984 \\ 0 & 2.1984 & 0.8846 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7926 & -0.1961 \\ 0.5774 & -0.5661 & -0.5883 \\ 0.5774 & -0.2265 & -0.7845 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.37)$$

Elbette başlangıç destek terimlerinin değişik biçimde seçilmesi ayrıştırım bileşenlerinin de farklılaşmasını sağlayacaktır. Örneğin ÇYÇG'de olduğu gibi yönlü

ortalamaları başlangıç destek yöneyleri olarak ele alalım.

$$\mathbf{u}_0 \equiv \begin{bmatrix} 0.2425 \\ 0 \\ 0.9701 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 \equiv \begin{bmatrix} 0.9701 \\ 0 \\ 0.2425 \end{bmatrix}$$

Bu durumda elde edilen ayrıştırım bileşenleri de aşağıdaki gibi değişiklik gösterecektir.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0.2425 & 0.6381 & -0.7308 \\ 0 & -0.7533 & -0.6577 \\ 0.9701 & -0.1595 & 0.1827 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.7647 & 1.6099 & 0 \\ 1.6099 & 1.5250 & 1.2716 \\ 0 & 1.2716 & 0.2897 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0.9701 & -0.1595 & 0.1827 \\ 0 & -0.7533 & -0.6577 \\ 0.2425 & 0.6381 & -0.7308 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.38)$$

Bu yaklaşım ilk yaklaşıma göre başarıyı daha az bir yaklaşımdır (bağlı yanılı : birinci : 0, ikinci : 0.1238). Bunun temel nedeni, her ne kadar tam özdüzy bir düzey olsa da \mathbf{A} düzeyinin yataysıra ve düşey sıralarına göre ortalamaların alınması başlangıç destek terimlerinde sıfır öğesi oluşmasına neden olmaktadır. Bu sıfır öğelerinin son yaklaşımda çarpıldığı öğelerde veri kaybı oluşabilmektedir. Bu örnek bu yönüyle başlangıç destek terimlerinin iyi bir yaklaşım için ne kadar önemli olduğunu göstermektedir. Diğer bir önemli konu da, dikkat edilirse, ÇYÇÜDG’de diğer ÇYÇG tabanlı yöntemlerden değişik olarak ağırlık terimi devreye girmemiştir. Bunun nedeni yöntemde ağırlık kullanılmayacağından değildir. Ağırlık olgusu da en az destek terimlerinin değişimi kadar sonuçlarını etkileyecektir. Ancak ağırlık terimi kullanılması durumunda yukarıda sözü edilen koşullar ve kısıtlar yeniden belirlenmelidir.

4.1.4 ÇYÇÜDG’de ağırlık kullanımı

Ağırlık kullanımı ile daha iyi sonuçlar elde edebilmek birçok yöntem de olduğu gibi ÇYÇÜDG’de de olanaklıdır. Ancak, doğal olarak ağırlık terimi kullanma yöntemin başarılarını etkileyebileceği gibi yöntem tasarımında değişiklikler yapmaya neden olabilir. Örneğin, eğer ÇYÇÜDG yönteminde bir ağırlık yapısı kullanılacaksa, bu ağırlık yöntemin doğası gereği ayrıştırım uygulanacak düzeyin hem yataysıra uzayı hem de düşey sıra uzayı boyutlarına uygun iki değişik dördül düzey olmalıdır. Ayrıca bu düzeyler $\mathbf{1}_m$ ve $\mathbf{1}_n$ tüm öğeleri 1 olan dördül düzeyler olmak üzere aşağıdaki koşulları gerçekleştirmelidir.

$$\mathbf{1}_m \mathbf{W}_m \mathbf{1}_m = 1, \quad \mathbf{1}_n \mathbf{W}_n \mathbf{1}_n = 1 \quad (4.39)$$

Yukarıda verilen ağırlık dizeyleri etkisi altında destek terimleri için birim boyluluk koşulu aşağıdaki biçimiyle güncellenir.

$$\mathbf{u}^T \mathbf{W}_m \mathbf{u} = 1, \quad \mathbf{1}_n^T \mathbf{W}_n \mathbf{1}_n = 1 \quad (4.40)$$

Yine sıfırlanmış koşulları da belli bir ağırlık altında yazılır. Bu koşullar bağlamında değişmez terim ve tek yönlü terimler aşağıdaki ağırlık dizilerinin devreye gelmesi ile aşağıdaki biçimi yeniden yapılandırılır.

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathbf{u}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A} \mathbf{W}_n \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_1 &= (\mathbf{I}_m - \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{W}_m) \mathbf{A} \mathbf{W}_n \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_2 &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{W}_n) \mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Yukarı yazılan başlangıç eşitlikleri sonrasında ÇYÇÜDG yöntemi bir değişikliğe gerek olmadan yürütülür. Sav çalışması kapsamında incelenen uygulama alanlarında algoritmaya ek işlem yükü getirmeyecek ölçüde ağırlık dizileri kullanılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla ÇYÇÜDG tabanlı uygulamalarda ağırlık dizisi olarak ilgili dizeyi ortalamaya izdüşümü sağlayan köşegen dizeler alınmıştır.

$$\mathbf{W}_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Böylece her ne kadar ağırlık etkisi altında ÇYÇÜDG sonuçlarında değişim gözlenirse de, kullanılan ağırlık üzerinde ölçekleme yapmak sonuçları değiştirmemektedir.

5. ÇOK YÖNLÜ DİZİLERDE ÇYÇG TABANLI AYRIŞTIRIM UYGULAMALARI

5.1 Çok Yönlü Dizilere Yaklaşım

Bu bölümde sentetik, deneysel ve gözlemsel olarak elde edilen bazı veri kümeleri üzerinde üretilen yöntemlerin etkileri ve başarımları irdelenmiş, bununla birlikte bilimsel yazında var olan ve en sık kullanılan bazı yöntemlerin başarımları sav çalışmasında önerilen ÇYÇG tabanlı yöntemler karşılaştırılmıştır. Başarım kriteri olarak herhangi bir ayrıştırım yönteminin ilgili veri kümesi üzerindeki bağıl yanılığsı kullanılmıştır. ÇYÇG tabanlı yöntemlerin sonuçlarını aktarmadan önce şunu belirtmek gerekir. Bilimsel yazında çok yönlü dizi ayrıştırımında kullanılan Tucker ve CP ayrıştırımlarının belirlenimi için birden çok yöntem vardır. Ancak bunlar içinde başarımları en yüksek ve en sık kullanılanlar Tucker ayrıştırımı için En Küçük Kareler (EKK) (ing: Alternating Least Squares (ALS)), CP ayrıştırımı için de yine yine EKK olduğu için karşılaştırmalarda bu ikisi yeğlenmiştir. Bu iki yöntemin başarımları MATLAB Tensor Toolbox ile ölçülmüştür [45]. ÇYÇG tabanlı diğer tüm yöntemler için de MATLAB ortamı kullanılmıştır.

Verilen soruna özel veri kümelerinde istenen ayrıştırımın ne tür özellikler taşıması gerektiği uygulamaları etkileyen önemli bir olgudur, örneğin CP ayrıştırımı her yönde bileşenler sunar, Tucker ayrıştırımı ise çekirdek dizi sunar. Dolayısıyla, bilimsel yazında bulunan örneklerin, çalışmaların bu savda önerilen ayrıştırım yöntemlerinin bileşenlerinin verilen sorunun çözümüne ilişkin rolü açısından incelenmesi gerekmektedir.

Bu amaçla seçilen uygulamalardan ilki çok yönlü diziler için ÇYÇG ayrıştırımının değişik işlevcil yapılar içeren veri kümelerini ne kadar iyi anlattığını görebilmek için yeniden yapılandırım sonuçlarını incelemektir. Bu bağlamda irdelenen ilk veri kümesi 3-yönlü ve toplamcıl nitelikte olup değişik türleri için başarımları ölçümü yapılmıştır. Bu inceleme esnasında veri kümesine ÇYÇG açılımı uygulanmış ve sonrasında elde edilen açılıma sırasıyla değişmez terimden, bir yönlü terimlerden, iki yönlü terimlerden

kesme uygulanarak çok yönlü dizi için elde edilen bu gösterilim yine çok yönlü dizi şeklinde yeniden yapılandırılmıştır. Başarım değerlendirmesi yapılırken ise bağıl yanılgi değerleri ölçülmüştür (Çizelge 5.1).

Çizelge 5.1 : Toplamsal Nitelikte Çok Yönlü Veri Kümeleri için ÇYÇG Yaklaşırımı.

Veri Kümesi	Bağıl Yanılgi ₀	Bağıl Yanılgi ₁	Bağıl Yanılgi ₂
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i + j + k$	0.0372	0.0357	0.0057
$\mathcal{X}^{(6,8,10)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i + j + k$	0.0479	0.0454	0.0084
$\mathcal{X}^{(12,16,20)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i + j + k$	0.0541	0.0508	0.0100

Çizelge 5.2 : Çarpımsal Nitelikte Çok Yönlü Veri Kümeleri için ÇYÇG Yaklaşırımı.

Veri Kümesi	Bağıl Yanılgi ₀	Bağıl Yanılgi ₁	Bağıl Yanılgi ₂
$\mathcal{X}^{(3,4,5)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i^2 + j^2 + k^2$	0.1011	0.0898	0.0213
$\mathcal{X}^{(6,8,10)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i^2 + j^2 + k^2$	0.1183	0.1029	0.0265
$\mathcal{X}^{(12,16,20)}, \mathcal{X}(i, j, k) = i^2 + j^2 + k^2$	0.1266	0.1091	0.0290
$\mathcal{X}(i, j, k) = \cos(i * j * k) + e^{(i+j+k)} + i^2$	5×10^{-5}	2×10^{-5}	6×10^{-5}

Hem toplamcıl hem de çarpımsal yapıdaki sentetik veri kümeleri için elde edilen sonuçlar tablo 5.1 ve tablo 5.2’de verilmiştir. 5.2’de ayrıca karmaşık yapılı ve (3,4,5) boyutlarında bir veri kümesinin yaklaşırım yanılgi da gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre ÇYÇG yaklaşırımının niteliği hem verinin işlevcıl karmaşıklığına hem de yönlerdeki boyuta bağılı olarak değışmektedir. Elbette bir yaklaşırım yönteminin gerçek yaşam sorunlarındaki başarımını da irdelemek gerekir. Bu amaçla üç değışik kimya deneyinden elde edilen 3-yönlü dizi biçimindeki veri kümeleri üzerinde hem yalın ÇYÇG hem de İ-ÇYÇG tabanlı yöntemlerin yaklaşırım başarımı ölçülmüştür. Aşağıda ele alınan bu veri kümelerinin başarım değılendirimleri aktarılmıştır.

Amino Asit Veri Kümesi

Amino asit veri kümesi 5 örneğın florasan spektroskopisi ile 250-300 nm aralığında 1nm aralıklarla uyarılma ve 250-450 nm aralığında yine 1 nm aralıklarla yoğunluk ölçümleri yapılarak $5 \times 51 \times 201$ boyutlarında elde edilmiştir, veri kümesinin işlenmesinde alınan zaman ölçümleri Tucker yöntemi için 0.3792 saniye, CP yöntemi için 0.6097 saniyedir. ÇYÇG yönteminin en çok bileşen içeren ikinci mertebeden yaklaşırımının çalışma süresi ise 0.0853 saniye olarak ölçülmüştür.*.

*Veri kümesi Claus A. Andersson tarafından elde edilmiş ve R. Bro tarafından ‘Multi-way Analysis in the Food Industry, Models, Algorithms, and Applications’adlı savda 1998 yılında doktora çalışması olarak yayınlanmıştır.

Çizelge 5.3 : Amino Veri Kümesi için Bağlı Yanılgı Değerleri.

Tucker Aç.	CP Aç.	ÇYÇG-0	ÇYÇG-1	ÇYÇG-2
0.5996	0.6465	0.6179	0.5988	0.2147

Çizelge 5.4 : Amino Veri Kümesi için İndirgemeli Ayırıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.

Ind. Ay.	Ind. Ay.-ÇYÇG-0	Ind. Ay.-ÇYÇG-1	Ind. Ay.-ÇYÇG-2
0.1129	0.9404	0.4749	0.0955

Çizelge 5.5 : Amino Veri Kümesi için Elemeli İndirgemeli Ayırıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.

El. Ind. Ay.	El. Ind. Ay.-ÇYÇG-0	El. Ind. Ay.-ÇYÇG-1	El. Ind. Ay.-ÇYÇG-2
0.1129	0.6015	0.5986	0.2422

Nose Veri Kümesi

Bu veri kümesinin eldesinde çokdeğişkenli kimyasal hesaplama araçları ile elektronik bir burun birleşimi kullanılmış ve amaç yanık koktuğu söylenen meyan kökü (ing : licorices) ile iyi meyan köklerini ayırmak. Veri boyutları $18 \times 241 \times 12$ ve yönler sırasıyla Örnek X Zaman X Sensör bileşenlerini ifade ediyor. Zaman ölçümlerinde ise Tucker yöntemi 0.4455 saniye, CP yöntemi 0.3414 saniye ve ÇYÇG-2 yaklaşıtıımı 0.070674 saniye sürmüştür.[†]

Çizelge 5.6 : Nose Veri Kümesi için Bağlı Yanılgı Değerleri.

Tucker Aç.	CP Aç.	ÇYÇG-0	ÇYÇG-1	ÇYÇG-2
0.0323	0.1398	0.0411	0.0328	0.0032

Çizelge 5.7 : Nose Veri Kümesi için İndirgemeli Ayırıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.

Ind. Ay.	Ind. Ay.-ÇYÇG-0	Ind. Ay.-ÇYÇG-1	Ind. Ay.-ÇYÇG-2
0.0059	0.9998	0.1072	0.0059

Bonnie Veri Kümesi

[†]Thomas Skov & Rasmus Bro, The Food Technology group, a section of the Department of Food Science, KVL, Rolighedsvej 30, DK-1958 Frederiksberg C, Denmark

Çizelge 5.8 : Nose Veri Kümesi için Elemeli İndirgemeli Ayrıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.

El. Ind. Ay.	El. Ind. Ay.-ÇYÇG-0	El. Ind. Ay.-ÇYÇG-1	El. Ind. Ay.-ÇYÇG-2
0.0016	0.0328	0.0328	0.0030

HPLC-PDA dedektörü ile ölçülen sarı kantaron (ing : St. John's Wort) adlı bitkisel 89 örnek için diğer iki yön; UV tayf (ing : spectra, 3 nm aralıklarla 260 nm'den 550 nm'ye kadar) değerleri ve zamandır(1.32 saniye aralıklarla 12.dakikadan 23.7 dakikaya kadar). Dolayısıyla veri kümesinin boyutları $89 \times 97 \times 549$ olmaktadır. Çalışma zamanı ölçümlerinde ise Tucker yöntemi 0.9162 saniye, CP yöntemi 6.0552 saniye ve ÇYÇG-2 yöntemi 1.150876 saniye olarak ölçülmüştür.[‡]

Çizelge 5.9 : Bonnie Veri Kümesi için Bağlı Yanılgı Değerleri.

Tucker Aç.	CP Aç.	ÇYÇG-0	ÇYÇG-1	ÇYÇG-2
0.0320	0.7879	0.5628	0.4886	0.1716

Çizelge 5.10 : Bonnie Veri Kümesi için İndirgemeli Ayrıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.

Ind. Ay.	Ind. Ay.-ÇYÇG-0	Ind. Ay.-ÇYÇG-1	Ind. Ay.-ÇYÇG-2
0.1308	0.5028	0.4669	0.0920

Çizelge 5.11 : Bonnie Veri Kümesi için Elemeli İndirgemeli Ayrıştırım ile ÇYÇG Bağlı Yanılgı Değerleri.

El. Ind. Ay.	El. Ind. Ay.-ÇYÇG-0	El. Ind. Ay.-ÇYÇG-1	El. Ind. Ay.-ÇYÇG-2
0.0920	0.4678	0.4675	0.1028

5.2 Görüntü Yapılandırımı

Görüntü yapılandırım ya da görüntü geri çatma (ing: image reconstruction) aslında içeriğinde bozulmaya uğramış dijital görüntülerin üzerindeki bozulmaları ortadan kaldıracak biçimde matematiksel işlemler uygulayıp görüntüyü bu kez aslına yakın biçimde yeniden elde etme eylemidir. Bu amaçla yapılan işlemlerden biri asıl görüntüyü verecek bazı bileşenler bularak bu bileşenlerden görüntüyü yeniden yapılandırmaktır. Aslında temelde görüntü sıkıştırma (ing : image compression)

[‡]E. Acar, R. Bro, and B. Schmidt. New exploratory clustering tool. J.Chemom. 22:91-100, 2008

işlemi de aynı şekilde görüntü dizisini bileşenlere ayırarak yapılır. Sav çalışmasının bu kesiminde üzerinde durulan yapılandırım uygulamalarının da temel amacı görüntü dizisinin betimlediği verinin tamamı yerine daha az sayıda veri ile çalışabilmektir. Görüntü geri çatma uygulamaları için bilimsel yazında sıklıkla kullanılan ünlü test görüntüleri (ing: standart test images) kullanılmıştır. Bu görüntüler her ne kadar oldukça bilinen ve yoğun olarak kullanılan görüntüler olsalar da uygulamalardan gelen boyut değişiklikleri olabilmektedir (kırpma, sıkıştırma, vb.). Bu bölümde geliştirilen uygulamalar için kullanılan resimlerin büyük çoğunluğu SIPI veri tabanından alınmıştır [46]. Ele alınan görüntülerden gri seviyeli olanlar iki yönlü dizi olarak, renkli seviyeli olanlar ise üç yönlü dizi olarak ele alınmıştır. Renkli görüntülerde RGB (Red, Green, Blue) renk uzayı ile oluşturulmuş resimler kullanılmıştır. RGB dışında CMYK gibi farklı renk uzayları da söz konusu olabilmektedir. CMYK (Cyan, Magenta, Yellow, Key) renk uzayı cam göbeği, galibarda, sarı ve siyah renklerini taban alır. HSB (Hue, Saturation, Brightness) gibi RGB renk uzayından dönüşümle elde edilen ve harmonik, doygunluk ve parlaklık değerleri ile anlatılan renk uzayları da uygulamalarda yer edinmiştir. Ancak sav çalışması kapsamında uygulamalarda her ikisi de ışık tabanlı görseller olduğu için gri seviyeli ve RGB seviyeli görüntüler kullanılmıştır.

5.2.1 KÖ-ÇYÇG ile görüntü yapılandırımı

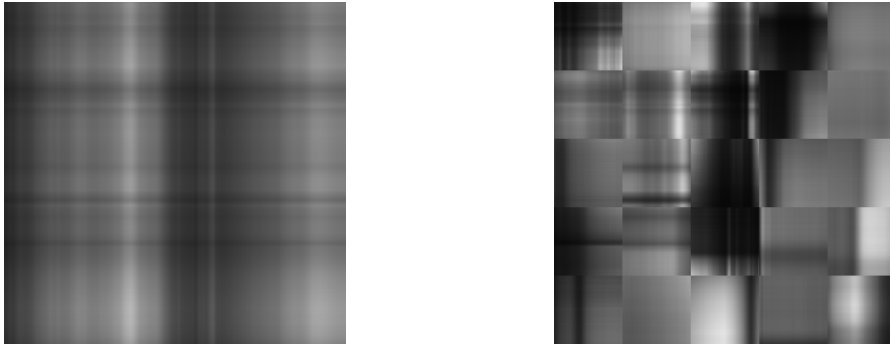
Bu uygulamanın temel hedefi elemanları bir görüntünün içeriğini barındıran çok yönlü dizilere ÇYÇG uygulayarak görüntüyü yeniden yapılandırarak başarımlı elde etmektir. Gri seviyeli bir görüntünün dizey öğeleri, görüntünün ilgili konumdaki parlaklık değeri olan bir dizey olarak ifade edilir. Bir renkli seviyeli (RGB) görüntü ise her biri değişik bir renk için (Red, Green, Blue) parlaklık değerlerini içeren 3 katmanlı bir dizeydir ve 3-yönlü dizi olarak tanımlanabilir. Bu diziler için sav kapsamında yapılan çalışmalar, yalnız ÇYÇG ile yalnızca değişmez yaklaşımla ya da birinci kereden yaklaşımla bir görüntüyü yeterince iyi şekilde anlatamayacağımızı göstermiştir. Bu nedenle, daha değişik bir yaklaşım izlenmiş ve görüntü dizisi parçalara ayrılarak her bir alt parçada ÇYÇG uygulanmıştır. Her bir altkesimdeki ÇYÇG sonucu ise daha sonra birleştirilerek bütüncül bir yaklaşım sağlanmıştır. Bu uygulamada herbir altkesimde aynı kereden ÇYÇG yaklaşımını kullanılması görüntü bozulmasını önlemek adına

önemlidir. Küçük ölçeklerde çalışma yaklaşımı ile her ne düzeyde bileşen sayısı artsa da dizinin öge sayısının çok daha altında öge ile çalışmak mümkündür. Bunu göstermek amacıyla yapılan ilk çalışma bir gri seviyeli bir görüntü üzerindedir. Ele alınan test görüntüsünün dizisi 300×300 boyutlarındadır. Aşağıda görüntünün asıl hali bulunmaktadır. Görüntünün dizisini önce hem yataysıradan 5'e bölüp, hem de



Şekil 5.1 : Asıl Görüntü.

düsey sıradan 5'e bölerek 25 eş parçaya ayırılım. Bu durumda elde edilen değişmez yaklaşımla (yani sadece $\mathcal{X}^{(0)}s_1s_2$ dış çarpımı ile elde edilen yaklaşımla) elde edilen görselleştirim ve hiçbir bölüntü yapmadan, yalnız ÇYÇG ile elde edilen görselleştirimi Şekil (5.2) gibidir.



Şekil 5.2 : Yalnız ÇYÇG Yaklaşımı ve 25 Altkesimde ÇYÇG Yaklaşımı.

Görsellerden de anlaşılacağı gibi parça sayısını artırmak ile yaklaştırımın niteliği artacaktır. Diziyi yataysırada ve düşeyserada 30 eş kesime ayırırsak elde edeceğimiz geri çatma, yataysırada ve düşeyserada 50 eş kesime ayırırsak elde edeceğimiz geri çatma görselleştirimleri Şekil 5.3’de verilmiştir.

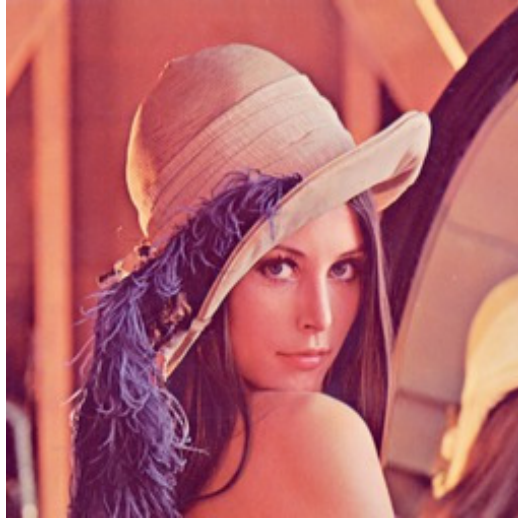
Bu durumda soldaki görüntüde 900 altkesim varken, sağdaki yaklaştırım 2500



Şekil 5.3 : 900 Altkesimde ve 2500 Altkesimde ÇYÇG Yaklaştırımı.

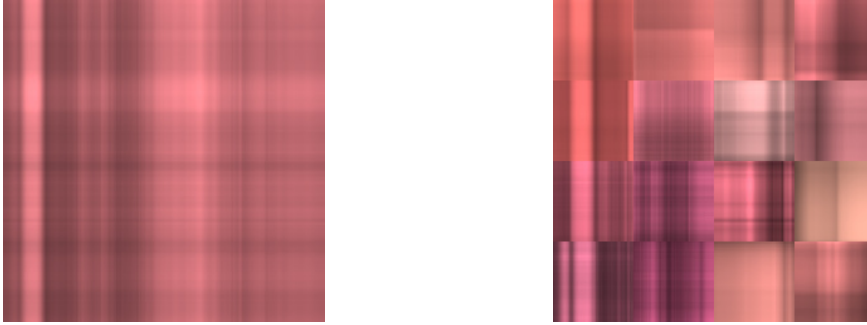
altkesimde ÇYÇG çalıştırılarak elde edilmiştir. Bileşenler altkesim sayısına bağlı olarak artmaktadır. Ama yine de değişmez yaklaştırım olduğundan her bir altkesim için yalnızca 3 bileşen hesaplanmıştır. Bu da seçili altkesim sayılarından en iyi yaklaştırımın elde edildiği 2500 altkesimsel ÇYÇG için düşünülürse, tek bir değişmez olan $\mathcal{X}^{(0)}$ için 2500 tane, dizinin bir yönündeki destek terimi olan $300/50 = 6$ öğeli s_1 için 2500 kez, yine dizinin iki yönündeki destek terimi olan 6 öğeli s_2 ’nin de 2500 kez hesaplanması demektir. Bu durumda herbir altkesimde 13 ögenin hesaplanması gerektiğini düşünürsek 32500 öge ile bu yaklaştırımı elde etmiş oluruz. Dizinin asıl öge sayısının 90000 olduğunu düşünürsek %64’lük bir veri yeri kazancı sağlanmış olur. Bu noktada şüphesiz ki görüntü dizisinin büyüklüğü en uygun alt kesim sayısı ile orantılıdır.

Yukarıda da belirtildiği gibi renkli görüntülerde veri dizisinin 3-yönlü dizi olarak anlatılabilir. RGB seviyeli görüntüler kırmızı (R), yeşil (G) ve mavi (B) olmak üzere 3. yönde 3 boyutlu diziler olarak anlatılabilirler. Bir çok yöntem her bir renk katmanını ayrı ayrı işlemekle beraber, görüntü dizisini bir bütün olarak alıp tek seferde işlemek olanaklıdır. Küçük ölçeklerde ÇYÇG çalışmasında renkli görüntü dizisi bir renk katmanlarına ayrılmadan bir çırpıda işlenmiştir. Aşağıda verilen renkli görüntü sırasıyla 256,256,3 boyutlarına sahip 3-yönlü bir dizi biçimindedir. Şekil (5.4) ile verilen görüntünün salt ÇYÇG ile değişmez yaklaştırımı görselleştirilmiştir. \mathcal{X} ,



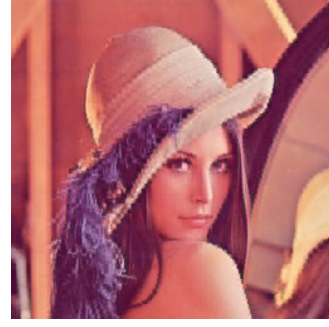
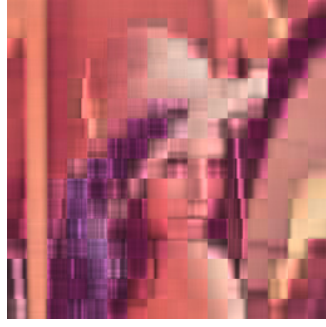
Şekil 5.4 : Asıl Görüntü.

asıl resime ait dizi olmak üzere değişmez yaklaştırım $\mathcal{X}^{(0)}\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3$ dış çarpımı şeklindedir ve görüntü 5.5(a) ile gösterilmiştir. Görüntü 5.5(b) ise 16 eş alt kesimde



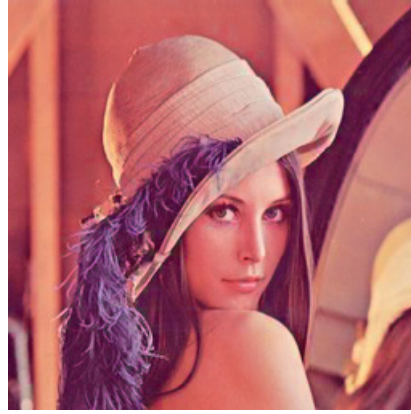
Şekil 5.5 : ÇYÇG Yaklaştırımı ve 16 Altkesimde ÇYÇG-0 Yaklaştırımı.

değişmez yaklaştırım kullanılarak elde edilmiştir. Bu parçalamada 3. yön parçalara ayrılmamıştır. Bunun bir nedeni her bir alt kesimde (alt kesimler dikdörtgensel bölgelerdir, \mathbf{s}_3 değerleri her alt kesimdeki RGB ağırlıklarını vermektedir) \mathbf{s}_3 değerleri ile renk bileşenini yakalamak, ikinci nedeni ise bu yöndeki boyut sayısının yalnızca 3 olmasıdır. Seçili yaklaşımlar arasında en iyisi olan 4096 altkesimsel ÇYÇG %75'lik bir veri yeri kazancı sağlamaktadır. Elbette bu kazanç beraberinde görüntü niteliğinden kaybına neden olabilmektedir. Örneğin her bir dörtgensel altkesimde çalışmanın sonucu olarak görüntüde bulunan kıyı bölgeler pürüzsüz olması gerekirken kesik çizgili bir yapıdadır. Bu sorun 3-yönlü verinin dikdörtgen çokyüzlüsü şeklinde



Şekil 5.6 : 256 Altkesimde ve 4096 Altkesimde ÇYÇG-0 Yaklaşırını.

küçük parçalara ayrılıp işlenmesinden kaynaklanmaktadır. Bu sorunu aşmanın bir yolu ise indirgeyimsel ÇYÇG ayrıştırımından geçmektedir. Yaklaşırım kertesini belli bir tutarda artırıp, bölüntülendirme sayısını ise düşürelim, ayrıca destek terimlerini veri üzerinden hesaplanan ortak değıştirim dizeyi (ing: covariance matrix) benzeri bir yapının izgesinden seçilen özyöneyleler olarak alırsak, görüntü içindeki kıyı bölgelerde pürüzsüzlük sağlamak olanaklı olur. Elbette bu durumda bellekte tutulacak olan veri artık yalnızca değışmez ve destek terimleri değil, birtiler ve ikililer de olacaktır. Görüntü (5.7), 256 altkesimde 2. mertebeden İ-ÇYÇG ayrıştırımının görselleştirilmesidir. Bu uygulama ile ilgili gündeme gelebilecek diğer olgular eş



Şekil 5.7 : 256 Altkesimde İ-ÇYÇG-2 Yaklaşırımı.

bölüntülendirim olmaması, verinin çok büyük olması durumunda işlem ve işlemci yükü, pürüzsüzleştirme, bilgi kaybı gibi olgulardır. Bu uygulamanın değışik yapıdaki özelleştirmeleri bu olguları da etkilemektedir. Örneğin eş kesimlere ayrılmış bir görüntü dizisinin her bir alt kesiminde değışik sayıda destek terimi kullanarak sıfırncı kerteden ya da birinci kerteden yaklaşırım yapmak bu olgular üzerinde

etkili olabileceği gibi, görüntünün yoğun yerlerinde daha çok destek terimi, seyrek (ing:smooth) yerlerinde daha az destek terimi kullanarak, daha az sayıda bileşen kullanarak geri çatma niteliği artırılabilir. Bu amaçla herbir alt kesimde ÇYÇG yöntemi uygulanıp kesme yapıldıktan sonra elde edilen yaklaştırım dizisi asıl diziden çıkarılır ve elde edilen kalan dizisine yeniden ÇYÇG uygulanır. Böylece ikincil destek terimleri bulunur, bu yineleyiş sürdürülürse her bir altkesimde yineleyiş sayısı kadar destek terimleri ve ÇYÇG bileşenleri bulunacaktır. Şekil 5.9[§] ve Şekil 5.9^{||} gri seviyeli görüntü dizisinin sırasıyla 100 alt kesimde ve 3600 alt kesimde yinelemeli ÇYÇG uygulanmasıyla elde edilmiştir.



Şekil 5.8 : 100 Altkesimde ÇYÇG-0 Yaklaştırımı.

Geri çatma görsellerinden de görülebileceği gibi kesikli görüntü oldukça azalmaktadır. Bunun temel nedeni içeriğinde sınırları barındıran alt kesimlerde daha fazla destek terimi kullanılarak yoğunluğun daha iyi ifade edilebilmesidir.

5.2.2 ÇYÇÜDG ile görüntü yapılandırımı

Sav çalışması kapsamında görüntü geri çatma sorunu için kullanılması önerilen diğer bir yöntem ÇYÇÜDG'dir [47, 48]. 3-yönlü dizilerle ifade edilebilen renkli seviyeli görüntü verileri dizileştirilerek (matricizing) ya da İndirgemeli Ayrıştırım kullanılarak ÇYÇÜDG yöntemi ile ayrıştırılabilir ve boyutu indirgenebilir. Örneğin

[§]242 Yinelemeli ve 433 Yinelemeli ÇYÇG-0 Yaklaştırımı ile %84'lük ve %71'lik bir veri yeri kazancı sağlanmıştır.

^{||}4113 Yinelemeli ve 5072 Yinelemeli ÇYÇG-0 Yaklaştırımı ile %50'lik ve %39'lik bir veri yeri kazancı sağlanmıştır.



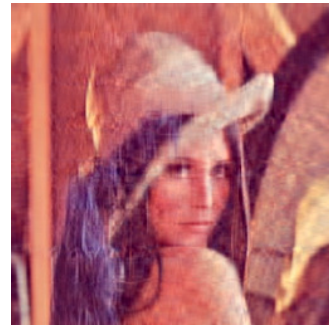
Şekil 5.9 : 3600 Altkesimde ÇYÇG-0 Yaklaşıranı.

yine $256 \times 256 \times 3$ boyutlarında olan görüntüyü ele alalım. Bu görüntüyü temsil eden 3-yönlü diziye ÇYÇÜDG ile yaklaşırım uygulamak istersek 25 özyineleyiş, 50 özyineleyiş ve 100 özyineleyiş için elde edilen bağıl yanılığı değerleri çizelge (5.12)'da görölmektedir.

Çizelge 5.12 : ÇYÇÜDG ile 25, 50, 100 Özyineleyiş ile Yaklaşırımın Bağıl Yanılığı Değerleri.

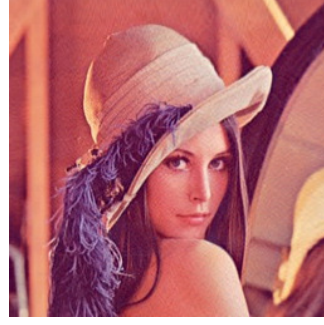
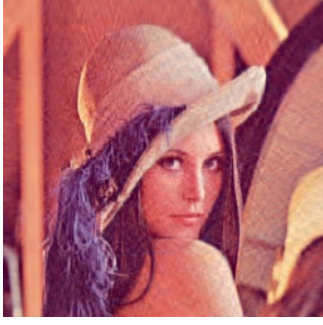
$X_{256 \times 256 \times 3}$	25 Özyineleyiş	50 Özyineleyiş	100 Özyineleyiş
Bağıl Yanılığı	0.0969	0.0615	0.0288

Elde edilen yaklaşırım sonuçları geri çatma için kullanılırsa sırasıyla Şekil (5.10) ve Şekil (5.11)'de görselleştirilmiş olan görüntüler elde edilmektedir. Elbette sadece geri



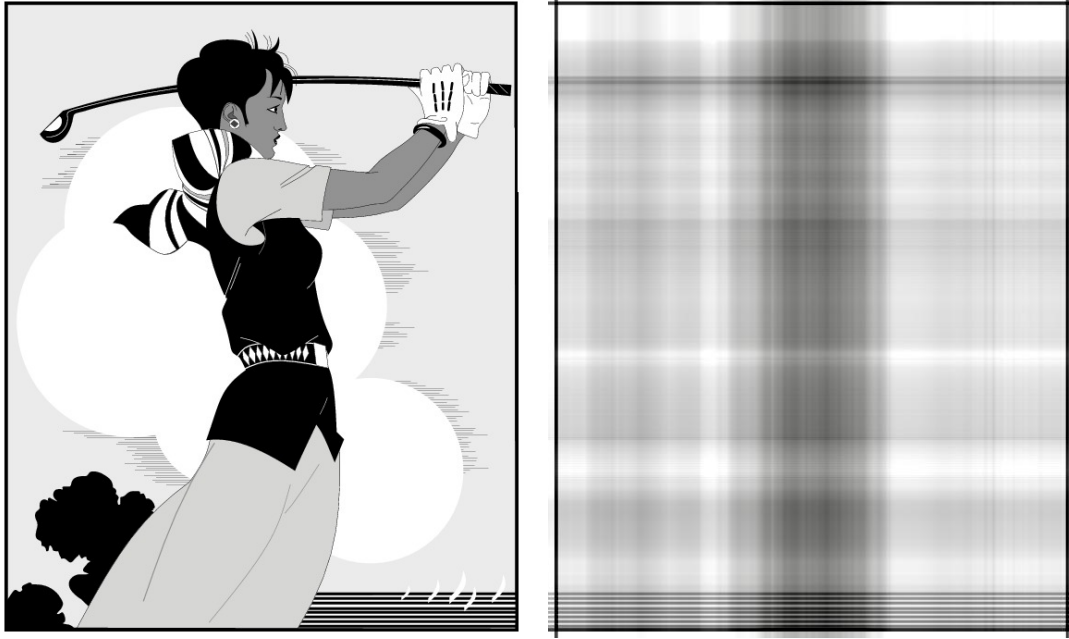
Şekil 5.10 : Asıl Görüntü ve 25 Özyineleyiş ile ÇYÇÜDG Yaklaşıranı.

çatma görselleri üzerinden başarımı irdelemek yetersiz kalabilmektedir. Bu nedenle üzerinde çalıştığımız temel görüntü olan Lena görüntüsü dışında değişik yapı gösteren iki test görüntüsü seçilmiştir. Bunlardan ilki her ne kadar göze gri seviyeli gibi



Şekil 5.11 : 50 ve 100 Özyineleyiş ile ÇYÇÜDG Yaklaşırını.

görünse de aslında görüntü dizisinin boyutları $695 \times 570 \times 3$ olan Golfer görüntüsüdür (bkz. 5.12(a)). Bu görüntü dizisini başka kılan iki özelliğinden ilki belirtildiği gibi gri seviyeliye yakın renklerinin (gri, siyah, beyaz) olduğu görüldüğü halde RGB görüntüsü olmasıdır. Diğer bir özel yanı ise üzerinde daha önce çalışılan resme göre boyutlarının çok büyük olmasıdır. Geri çatma görselleri Şekil (5.12) ve (Şekil 5.13) ile



Şekil 5.12 : Esas Görüntü ve 5 Özyineleyiş ile ÇYÇÜDG Yaklaşırını.

verilen ÇYÇÜDG yaklaşırınları için bağıl yanılığ değerleri Çizelge (5.13) üzerinde gösterilmiştir. Görselleştirimi yapılan özyineleyiş sayılarından 150 özyineleyiş ile başarımların birebir aynı olmasa da oldukça başarılı bir geri çatma sonucu vermiştir. Bu noktada özyineleyiş ne zaman kesmek gerek sorusu gündeme gelmektedir. Bu sorunun yanıtı için ÇYÇÜDG ölçekleri arasında bir oran belirlenebilir. Örneğin $m \times n$ boyutlarında bir dizey için ÇYÇÜDG algoritmasının en küçük boyutuna kadar



Şekil 5.13 : 25 ve 150 Özyineleyiş ile ÇYÇÜDG Yaklaşırımı.

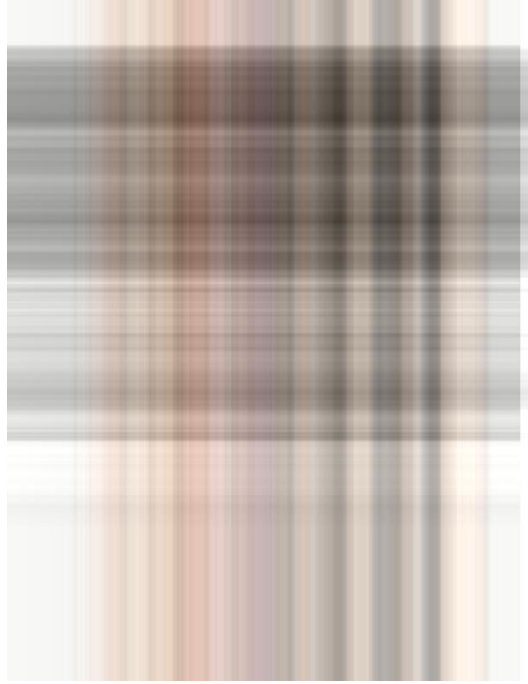
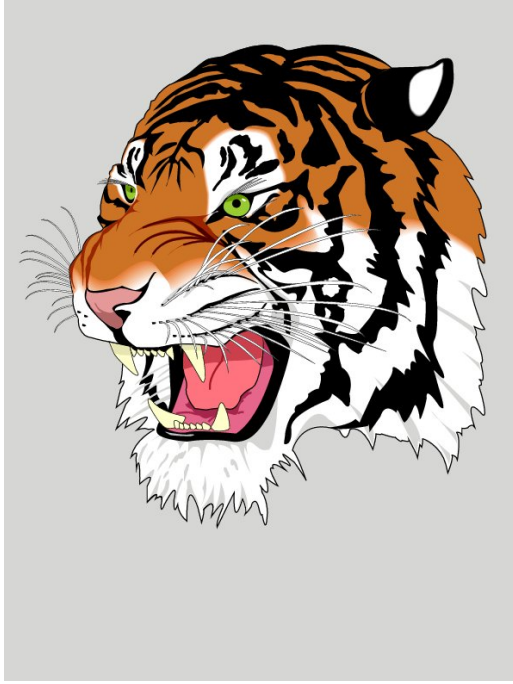
özyineleyişlerini sürdürürsek elde edilecek olan $\alpha_i, i = 1 \dots m, m < n$ değerlerinin toplamı 1 olmalıdır. Üzerinde durulan test görüntüleri için genel olarak her bir özyineleyişte elde edilen α değerlerinin toplamı 0.85 değerinin üzerine çıktığında oldukça iyi bir yaklaşım elde edilmiştir. Dolayısıyla her özyineleyiş için elde edilen α toplamları özyineleyişi bitirmek için bir eşik değeri olarak kullanılabilir.

Diğer ele alınan görüntü ise oldukça yalın renkler taşımaya karşın arka görünümdeki

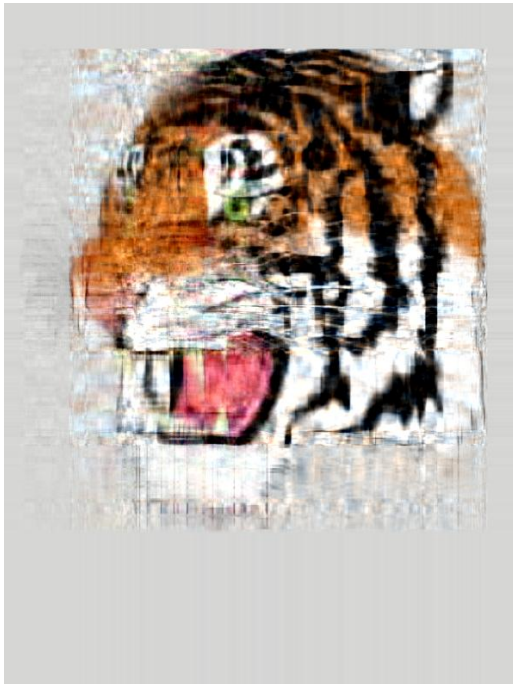
Çizelge 5.13 : Golfer Görüntüsü için ÇYÇÜDG'nin Farklı Özyineleyişlerinden Elde Edilen Bağlı Yanılgı Değerleri.

Özyineleyiş	1	5	25	100	150
Bağlı Yanılgı	0.3446	0.2333	0.1106	0.0490	0.0357

gri kesim nedeniyle bu kesimi ifade eden parlaklık değerlerinin büyük çoğunluğu eşittir. Bu özellikleri ile yalın ama oldukça büyük boyutlu olan, $792 \times 612 \times 3$, Tiger görüntüsü Şekil (5.14(a))'da görselleştirilmiştir. Şekil (5.14) ve Şekil (5.15) ile görselleştirilen değişik özyineleyiş sayıları için başarımları ölçümleri bağlı yanılgı değerleri hesaplanarak Çizelge 5.14 üzerinde gösterilmiştir. Bu sonuçlar özellikle büyük boyutlu görüntü dizileri düşünüldüğünde, ÇYÇÜDG yöntemi, içeriğinde özdeğer sorunu gibi zaman alan öğeler taşımadığından, basit 4 işlem hesapları üzerinden bileşenlerin belirlenmesi gibi özellikleri olduğundan yeğlenir.



Şekil 5.14 : Esas Görüntü ve 5 Özyineleyiş İçin ÇYÇÜDG Yaklaşırını.



Şekil 5.15 : 25 ve 150 Özyineleyiş İçin ÇYÇÜDG Yaklaşırını.

Çizelge 5.14 : Tiger Görüntüsü İçin ÇYÇÜDG'nin Farklı Özyineleyişlerinden Elde Edilen Bağlı Yanılgı Değerleri.

Özyineleyiş	1	5	25	100	150
Bağılı Yanılgı	0.3251	0.2619	0.1607	0.0812	0.0596

5.3 Yüz Tanıma

Görüntü üzerinde gerçekleştirilen uygulamalardan bir diğeri de değişik kişilerin resimlerini içeren bir veri tabanından aranan bir kişinin resmini çekebilmektir (ing: image retrieval). ÇYÇÜDG'nin başarımlarını gösterebileceği alanların saptanışında yöntemin yapısı, bileşenleri ve geri çatma çalışmalarındaki başarımları düşünülerek küçük ölçekli bir yüz tanıma dizgesi üzerindeki etkileri irdelenmiştir. Bu uygulama için Cambridge'in ORL yüz veri tabanı kullanılmıştır (bkz : Şekil 5.16). Bu veri tabanı 40 kişinin 400 adet gri seviyeli yüz resmini içermektedir. Seçilen problem



Şekil 5.16 : ORL Veritabanından Seçilmiş Eğitim Kümesinden Örnekler.

daha önce TDA ile çözümlenmiş ve belli oranda başarımlar elde edilmiştir [49]. Bu nedenle ÇYÇÜDG ile yüz tanıma çalışmasının başarımlarını karşılaştırma olanağı olmuştur. ORL yüz veri tabanı 40 değişik kişinin 10 değişik yüz ifadesiyle elde edilen 400 görüntüden oluşmuştur. Veri tabanı içinden her kişiye ait değişik 5 ifadenin seçilmesiyle 200 eğitim ve kalan 5 ifadeyle de 200 test görüntüsü oluşturulur (bkz. Şekil 5.16). Bu iki veri kümesi için ÇYÇÜDG yöntemi aşağıdaki sırayla

uygulanır. Her bir görüntü 64×64 boyutlarında olmak üzere $F_i^{(j)}$ ifadesi j. kişinin i. görüntüsünün dizeyi olsun bu durumda yöntem aşağıdaki gibi işler.

- Eğitim Kümesinin Ortalama Yüz Görüntüsü Bulunur. $\Psi = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{N_j} F_i^{(j)}$,
 $N_j = 5, K = 40$
- Ψ Dizeyine ÇYÇÜDG uygulanarak ilgili taban yöneyleri bulunur.
 $\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_k], \quad \mathbf{V} = [v_1, \dots, v_k]$
- Her bir eğitim görüntüsü taban yöneyler ile dönüştürülerek yüz nitelik dizeyleri oluşturulur: $\mathbf{X}_i^{(j)} = \mathbf{U}_r^t \mathbf{F}_i^{(j)} \mathbf{V}_c, \quad \mathbf{X}_i^{(j)} \in \mathcal{R}^{r \times c}$
- Seçilen bir test görüntüsü yine taban yöneyleriyle dönüştürülerek yüz nitelik dizeyi bulunur: $\mathbf{Y} = \mathbf{U}_r^t \mathbf{T} \mathbf{V}_c, \quad \mathbf{Y} \in \mathcal{R}^{r \times c}$
- Test ve Eğitim kümesindeki yüz nitelik dizeyleri arasındaki uzaklık (benzerlik) belirlenir :
 $\delta(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i^{(j)}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}_i^{(j)}\|$

Çizelge 5.15 : ORL Veri Tabanı için TDA ile ÇYÇÜDG Başarım Karşılaştırması (Accuracy) (%).

Öneri Sayısı	TDA	ÇYÇÜDG
1	83.5	83
2	87.5	87
3	89	87.5
4	89.5	89
5	90	90.5
6	90.5	91.5
7	90.5	92
8	91	92

Çizelge (5.15)'e göre seçili test kişisine karşın bir kişi, iki kişi, üç kişi ya da dört kişi önerildiğinde TBA yönteminin daha iyi bir başarımla sergilediği ama önerilen sayısı artınca ÇYÇÜDG'nin az farkla olsa da, daha çok yüz tanıma olanağı sağladığı görülmektedir. Bu uygulama bize ÇYÇÜDG'nin yapısının TDA benzerliği nedeniyle öznel tabanlı uygulamalarda kullanılabileceğini ve uygun yerlerde yeterince başarımla sağlayacağını göstermiştir. Başarımların TDA'dan az olduğu noktada ise ÇYÇÜDG'nin hesaplama karmaşıklığının düzeyi anımsanmalıdır. Yukarıdaki

gibi başarımlar değerleri arasındaki değişimin az olduğu durumlarda veri kümesi çok fazla büyükse eldeki sistem ve araçların yeterli olmadığı durumlarda hesaplama karmaşıklığı düzeyinin düşüklüğü nedeniyle ÇYÇÜDG yeğlenebilir, daha da ötesinde yeğlenmelidir.

6. SONUÇLAR

Veri çözümleğinde çok yönlülük kavramı uygulama içeren alanların çoğuna girmiş ve çok yönlü veri çözümleği ayrı bir alan olarak ortaya çıkmıştır. Bu alan üzerinde yapılan araştırım ve geliştirimlerin genel ereği çok yönlü dizi biçiminde anlatılan veri kümelerinde yönler arasındaki ilişkiyi kaybetmeden veriyi daha az karmaşık türden bileşenlerle anlatabilmektir. Bu da çok yönlü dizi ayrıştırımı konusu ile gündeme getirilmektedir. Çok yönlü bir diziyi bilgi niteliği olarak en yüksek nicelik ve hesaplama karmaşıklığı açısından en düşük biçimde bileşenlere ayırmak bir indirgeme sorunudur. Çok yönlü dizilerde indirgeme ise belli diziyi tam olarak ifade eden ya da yaklaşık olarak ifade eden açılımlarla uygulanabilmektedir. Bu nedenle böl-ve-yönet biçimli ayrıştırım yöntemleri indirgeme sorununa istenilen düzeyde çözüm getirebilir. Getirilen çözümün, yani ayrıştırım için kullanılan yöntemin biçimi de bileşenlerin çok yönlü diziden aldığı bilginin içeriğini etkilemektedir. Örneğin açılımın cebirsel mi ya da istatiksel mi olduğu bileşenlerin niteliği açısından çok önemlidir.

Yukarıda aktarılan olgular nedeniyle çoğu cebirsel yöntemler olan çok yönlü dizilerde ayrıştırım konusu, istatiksel bir böl-ve-yönet algoritması olan YBBG tabanlı ÇYÇG yöntemi ve sav çalışmasının akışında türetilen ÇYÇG tabanlı yöntemlerle ele alınmıştır. Bu yöntemlerle izgesel hesaplamaların işlem yüklerini ortadan kaldıran ya da enküçükleyen, hesaplama karmaşıklığı en düşük düzeyde ama çok yönlü dizileri olanaklı olan en iyi biçimde anlatma gücünde açılım yöntemleri oluşturulmuştur. Her bir yöntemin işlerliği ve başarıım düzeyi değişik uygulamalarla ortaya konularak hangi uygulama için nasıl bir ayrıştırım ve bu ayrıştırımın sonucunda nasıl bir indirgeme yapılması gerektiği üzerinde incelemeler yapılmıştır. Bu araştırım ve incelemeler sırasında geliştirilen her biri kendine özgü yöntemler uygulama sonuçları da göz önünde bulundurularak maddeler halinde yazılmıştır:

- Yalın olarak ÇYÇG yöntemi çok yönlü dizi ayrıştırımı için kullanılmıştır. Bu yöntemin YBBG'den en temel farklılığı olan destek terimleri üzerinde yapılan çalış-

malar destek terimlerinin nasıl seçildiğinin sonuçlar üzerinde çok önemli etkileri olduğunu göstermiştir. Bu amaçla destek terimleri üzerinde bir eniyileme sorunu tanımlanarak bu terimlerin eniyilenmesi olgusu üzerinde durulmuştur. Tanımlanan sorun öncelikle 3-yönlü dizilerde çözüme kavuşturulmaya çalışılmış ancak buradan doğrusal olmayan bir eniyileme sorunu ortaya çıkmıştır. Bu sorunun çözümü için üzerinde durulan cebirsel yöntemlerin Gröbner tabanlı cebirsel ve sayısal karmaşıklığa sahip olduğu görüldüğü için işlevlerde kullanılan geleneksel destek terimleri hesabı çok yönlü dizilere uyarlanmıştır.

- Gerçek yaşama ait veri kümelerinde ÇYÇG yönteminin geleneksel destek terimi hesabı ile YBBG'ye göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiş, sav çalışması öncesinde kuşku duyulan bu durum sayısal sonuçlarla olumlanmıştır. Bu nedenle üzerinde durulan en iyi biçimde destek terimi seçimi olgusu için farklı yöntemler geliştirilmiştir.
- Geliştirilen yöntemlerden biri izgesel-istatistiksel bir yapıda olan İndirgeyimcil Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi'dir (İ-ÇYÇG). İ-ÇYÇG ile N-yönlü bir dizi biri tek yönlü diğeri N-1 yönlü olmak üzere iki bileşene ayrılması sorunu gündeme getirilerek, bu bileşenlerden tek tönü olanın destek terimi olarak kullanılmasına karar verilmiştir. Ele alınan yapay dizilerde ve farklı kimya deneylerinden elde edilen çok yönlü dizilerde bu kararın yerinde olduğu başarımlar ölçümlerinden de gözlenmiştir. İzgesel yapı sadece destek terimlerinin hesabında kullanıldığı için hesaplama karmaşıklığı eşdeğer yöntemlere göre (Tucker Ayırıştırımı, CP Ayırıştırımı) oldukça düşüktür. Ayrıca deney veri kümelerinde gösterilen başarımlar da gösterir ki, İ-ÇYÇG en az diğer çok yönlü dizi ayırıştırım yöntemleri kadar başarılıdır. Bu nedenle hesaplama kolaylığı önemli bir tercih sebebidir.
- Yalın ÇYÇG yönteminin başarımlarını görüntü dizilerinde gözlemlenmiştir. Bu uygulamalarda ortaya çıkan önemli bir sonuç kesme düzeyinin iki yönlü terimlerinden küçük olması durumunda görüntü dizisi üzerinde ayırıştırım sonrası geri çatma uygulaması görüntü hakkında bilgi vermemekte yalnızca çizgiler oluşmaktadır. Karşılaşılan bu sorunun aşılması için Küçük Ölçeklerde Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi yönteminden esinlenerek Küçük Ölçeklerde

Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi görüntü geri çatmada kullanılmıştır. Küçük Ölçeklerde ÇYÇG yöntemi ile görüntü dizisi alt dizilere ayrılarak önce uzamsal (geometrik) bir ayrıştırım uygulanmıştır. Daha sonra her bir alt dizide ÇYÇG yöntemi ile ayrıştırım uygulanmış ve her bir alt diziyeye ait bileşenler oluşturulmuştur. Bütün bileşenlerin birleştirilmesi ile bütüncül bir geri çatma yapılarak başarımlar değerlendirilmiştir. Yöntemde geri çatmanın sayısal başarımları yüksek olsa da geri çatma görsellerinde geometrik ayrıştırım sınırlarında karesel bir görüntü izlenmiştir. Yine de ayrıştırımın sonucu olarak beklenen daha az veri ile çalışma olgusu açısından yöntem başarılı bulunmuştur.

- Küçük Ölçeklerde ÇYÇG ayrıştırımının kıyılarındaki karesel görüntü için değişik alt kesimlerde değişik sayıda destek terimi kullanılması olgusu düşünülmüştür. Uygulamalarda 2-yönlü diziler için başarılı olduğu gözlenen yöntemin 3-yönlü dizilerle ifade edilen RGB kodlu görüntülerde, değişmez terimin yön sayısını geçen yineleyişten sonra sıfırlanışı nedeniyle yakınsamadığı gözlenmiştir.
- Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG), ÇYÇG'den farklı olarak özyinemeli bir yöntem olarak sav kapsamında geliştirilmiştir. Yöntemin hesaplama karmaşıklığının düşük, başarımlar düzeyinin yüksek olduğu betiklerle ve üzerinde çalışılan uygulamalarla da desteklenmiştir. Yöntem yüz tanıma problemine uygulanarak Tekil Değer Ayrıştırımı (TDA) ile karşılaştırılması yapılmıştır. Uygulama sonucu olarak belli sayıda değişik kişinin değişik yüz ifadelerini içeren görüntülerle eğitilen sisteme gösterilen test görüntüsü için, sistemin önerdiği 8 kişi için başarımlar düzeyi TDA'yı geçmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Tunga, B. & Demiralp, M.** (2010). The influence of the support functions on the quality of enhanced multivariate product representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, 48-3, 827–840.
- [2] **Kolmogorov, A. N.** (1963). On the Representation of Continuous Functions of Many Variables by Superposition of One Variable and Addition, *English Translation: American Math. Soc.*, 2, 55–59.
- [3] **Sobol, I. M.** (1993). Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *Mathematical Modelling and Computational Experiments (MMCE)*, 1, 407–414.
- [4] **Alis, O. & H., R.** (1999). Additive and Multiplicate High Dimensional Representation General Foundations of High Dimensional Model Representations, *Journal of Mathematical Chemistry*, 25, 197–233.
- [5] **Li, G., R. C. & H., R.** (2001). High Dimensional Model Representations, *Journal of Mathematical Chemistry*, 105, 7765–7777.
- [6] **Alis, O. & H., R.** (2001). Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *Journal of Mathematical Chemistry*, 29, 127–142.
- [7] **Ziehn, T. & Tomlin, A.** (2008). A Global Sensitivity Study of Sulfur Chemistry in a Premixed Methane Flame Model Using HDMR, *International Journal of Chemical Kinetics*, 40, 742–753.
- [8] **Ziehn, T. & Tomlin, A.** (2009). GUI-HDMR - A Software Tool for Global Sensitivity Analysis of Complex Models, *Environmental Modelling & Software*, 24, 775–785.
- [9] **Sridharan, J. & Chen, T.** (2006). Modeling Multiple Input Switching of CMOS Gates in DSM Technology using HDMR, *Proceedings of Design Automation and Test in Europe*, 1-3, 624–629.
- [10] **Rao, B. & Chowdhury, R.** (2008). Probabilistic Analysis Using High Dimensional Model Representation and Fast Fourier Transform, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science & Mechanics*, 9, 342–357.
- [11] **Chowdhury, R. & Rao, B.** (2009). Hybrid High Dimensional Model Representation for Reliability Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 198, 753–765.

- [12] **Demiralp, M.** (2003). High Dimensional Model Representation and its application varieties, (*Tools for Mathematical Methods*) *Mathematical Research*, 9, 146–159.
- [13] **Baykara, N. A. & Demiralp, M.** (2003). Hyperspherical or Hyperellipsoidal Coordinates in the Evaluation of High Dimensional Model Representation Approximants, (*Tools for Mathematical Methods*) *Mathematical Research*, 9, 49–62.
- [14] **Tunga, M. & Demiralp, M.** (2005). High Dimensional Model Representation on the Nodes of a Finite Hyperprismatic Regular Grid, *Applied Mathematics and Computation*, 164, 865–883.
- [15] **Demiralp, M.** (2006). Illustrative Implementations to Show How Logarithm Based High Dimensional Model Representation Works for Various Function Structures, *WSEAS Transaction on Computers*, 5, 1333–1338.
- [16] **Gomez, M.C., T. V. L. F. & Aguilar, A.** (2008). A Tool to Improve the Execution Time of Air Quality Models, *Environmental Modelling & Software*, 23, 27–34.
- [17] **Banerjee, I. & Ierapetritou, M.** (2002). Design Optimization under Parameter Uncertainty for General Black-box Models, *Ind. Eng. Chem. Res.*, 41, 6687–6697.
- [18] **Banerjee, I. & Ierapetritou, M.** (2003). Parametric Process Synthesis for General Nonlinear Models, *Computers & Chemical Engineering*, 27, 1499–1512.
- [19] **Banerjee, I. & Ierapetritou, M.** (2004). Model Independent Parametric Decision Making, *Annals of Operations Research*, 132, 135–155.
- [20] **S., S. & Wang, G. G.** (2010). Survey of Modeling and Optimization Strategies to Solve High-Dimensional Design Problems with Computationally-Expensive Black-Box Functions, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41, 219–241.
- [21] **Ozay, E. K. & Demiralp, M.** (2010). Combined Small Scale Enhanced Multivariate Product Representation, *Proceedings of the International Conference on Applied Computer Science*, 1, 350–356.
- [22] **Kalay, B. & Demiralp, M.** (2010). Affine Transformational Enhanced Multivariate Product Representation (ATEMPR) and Its Relation to Rational Approximants, *Proceedings of the International Conference on Applied Computer Science*, 1, 336–340.
- [23] **Andrzej Cichocki, Rafal Zdunek, A. H. P. S. i. A.** (2009). Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation, Wiley Press.
- [24] **M. Alper Tunga, M. D.** (2004). A Factorized High Dimensional Model Representation on the Partitioned Random Discrete Data, *Applied Numerical Analysis & Computational Mathematics*, 1, 231–241.

- [25] **Kolda, T. G. & Bader, B.** (2009). Tensor Decompositions and Applications, *SIAM Review*, 51(3), 455–500.
- [26] **L. De Lathauwer, B. D. M. & Vandewalle, J.** (2000). A Multilinear Singular Value Decomposition, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21(4), 1253–1278.
- [27] **Jolliffe, I.** (2002). Principal Component Analysis, Springer, US.
- [28] **Allpaydin, E.** (2010). Introduction to Machine Learning, MIT Press, US.
- [29] **Hitchcock, F.** (1927). Multiple invariants and generalized rank of a p-way matrix or tensor, *J. Math. Phys.*, 7, 39–79.
- [30] **Cattell, R. B.** (1944). Parallel proportional profiles” and other principles for determining the choice of factors by rotation, *Psychometrika*, 9.4, 267–283.
- [31] **Tucker, L. R.** (1964). The extension of factor analysis to three-dimensional matrices, *Contributions to Mathematical Psychology*, 226–140.
- [32] **Carroll, J. D. & Chang, J. J.** (1970). Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of ‘Eckart-Young’ decomposition, *Psychometrika*, 35, 283–319.
- [33] **Harshman, R. A.** (1970). Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an “explanatory” multi-modal factor analysis, *UCLA working papers in phonetics*, 16, 1–84.
- [34] **Mocks, J.** (1988). Decomposing Event-related Potentials: A New Topographic components model, *Biological Psychology*, 26, 199–215.
- [35] **Tucker, L. R.** (1966). Some mathematical notes on three-mode factor analysis, *Psychometrika*, 31, 279–311.
- [36] **Acar, E. & Yener, B.** (2009). Unsupervised multiway data analysis: A literature survey, *Knowledge and Data Engineering, IEEE Transactions*, 21(1), 6–20.
- [37] **L. De Lathauwer, B. D. M. & Vandewalle, J.** (2000). A multilinear singular value decomposition, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21, 1253–1278.
- [38] **L. De Lathauwer, M. Ishteva, P. A. & Huffel, S. V.** (2008). Dimensionality Reduction for Higher-Order Tensors: Algorithms and Applications, *Int. Journal of Pure and Applied Mathematics*, 42, 335–342.
- [39] **Divanyan, L. & Demiralp, M.** (2011). High Dimensional Model Representation (HDMR) Based Folded Vector Decomposition, Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT11), ISBN: 978-1-61804-043-3, WSEAS Press, Prague, s.40–44.

- [40] **Ayvaz, M. & Demiralp, M.** (2011). Towards a New Multiway Array Decomposition Algorithm: Elementwise Multiway Array High Dimensional Model Representation, *Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory*, ISBN: 978-1-61804-043-3, WSEAS Press, Prague, s.76–81.
- [41] **Korkmaz, E. & Demiralp, M.** (2008). Small scale high dimensional model representation, *Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering*, 1, 232–236.
- [42] **Ozay, E. & Demiralp, M.** (2012). Combined small scale high dimensional model representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, 50-7, 2023–2042.
- [43] **Ozay, E. & Demiralp, M.** (2010). Combined small scale enhanced multivariate product representation, *Proceedings of the International Conference on Applied Computer Science*, 1, 350–356.
- [44] **Demiralp, E. & Demiralp, M.** (2010). Reductive Multilinear Array Decomposition Based Support Functions in Enhanced Multivariate Product Representation (EMPR), *Proceedings of the International Conference on Applied Computer Science*, 1, 448–454.
- [45] **Bader, B. W., Kolda, T. G. ve diğerleri,** (2012), MATLAB Tensor Toolbox Version 2.5, Available online, <http://www.sandia.gov/~tgkolda/TensorToolbox>.
- [46] **Weber, A. G.,** The USC-SIPI Image Database: Version 5, Original release: October 1997, Signal and Image Processing Institute, University of Southern California, Department of Electrical Engineering.
- [47] **Demiralp, E. & Demiralp, M.** (2014). Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR), *Proceedings of 14th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE'14)*, 14, 446–455.
- [48] **Özay, E. K. & Demiralp, M.** (2014). Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR) Studies: Decomposing the Planarly Unfolded Three-way Arrays, *Proceedings of 14th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE'14)*, 14, 785–793.
- [49] **Hsu, C. H. & Chen, C. C.** (2007). SVD-based projection for face recognition, *Electro/Information Technology IEEE International Conference on. IEEE*, 1, 600–603.

EKLER

EK A: Çok Yönlü Dizilerde Çarpım Türleri

EK B: Destek Terimlerinin Eniyilenmesinin Doğrusal Olmaması

EK C: ÇYÇÜDG'nin Görüntü Geri Çatma Üzerine Uygulamaları

EK A: Çok Yönlü Dizilerde Çarpım Türleri

Çok yönlü model oluşturmalarında bilenen dizey çarpımı yeterli gelmemektedir. Bu nedenle çok yönlü diziler için üç farklı çarpım tanımı yapılmıştır.

Kronecker Çarpımı

Verilen iki dizey için Kronecker çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. $\mathbf{A}_{I \times J}$ ve $\mathbf{B}_{K \times M}$ olmak üzere;

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1J}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}\mathbf{B} & \cdots & a_{IJ}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

çarpımı $(IK \times JM)$ boyutlu bir dizey üretir. Kronecker çarpımının temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

- a bir sayıl olmak üzere; $a \otimes \mathbf{A}^T = a\mathbf{A} = \mathbf{A}a = \mathbf{A} \otimes a$
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$
- $\mathbf{a}^T \otimes \mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}^T$
- \mathbf{A} ve \mathbf{B} kare dizeyler olmak üzere; $\text{iz}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{iz}(\mathbf{A})\text{iz}(\mathbf{B})$
- \mathbf{A} ve \mathbf{B} tekil olmayan dizeyler olmak üzere; $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$
- $r(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = r(\mathbf{A})r(\mathbf{B})$
- + En küçük kareler probleminin çözümünde de kullanılan Moore - Penrose sözde evriğini göstermek üzere; $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^+ = \mathbf{A}^+ \otimes \mathbf{B}^+$

Hadamard Çarpımı

Eş boyutlu iki dizey için tanımlanan Hadamard çarpımı eşit indisli elemanların çarpılması ile bulunur. $(I \times J)$ boyutlarında \mathbf{A} ve \mathbf{B} dizeylerinin Hadamard çarpımı aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1J}b_{1J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}b_{11} & \cdots & a_{IJ}b_{1J} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Hadamard Çarpımının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{B} * \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} * \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T * \mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{A} * \mathbf{B}) * \mathbf{C} = \mathbf{A} * (\mathbf{B} * \mathbf{C})$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) * (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} * \mathbf{C} + \mathbf{A} * \mathbf{D} + \mathbf{B} * \mathbf{C} + \mathbf{B} * \mathbf{D}$

Khatri-Rao Çarpımı

Eşit sayıda düşey sıraya sahip iki dizey için Khatri-Rao çarpımı Kronecker çarpımı üzerinden aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_K], & \mathbf{B} &= [\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_K] \\ \mathbf{A} \odot \mathbf{B} &= [\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_K \otimes \mathbf{B}_K]\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Khatri-Rao çarpımının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \odot \mathbf{C} = \mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C})$
- $(\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2)(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \odot \mathbf{T}_2 \mathbf{B}$
- $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^T (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) * (\mathbf{B}^T \mathbf{B})$

n-Mod Çarpım

$\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ çok yönlü dizisi ile $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{J \times I_n}$ dizeyinin n-mod çarpımı $\mathcal{X} \times_n \mathbf{A}$ ile gösterilir ve $I_1 \times I_{n-1} \times J \times I_{n+1} \times \dots \times I_N$ boyutlarında bir çok yönlü dizi oluşturur n-mod çarpım öğeler üzerinden aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$(\mathcal{X} \times_n \mathbf{A})_{i_1 \dots i_{n-1} j i_{n+1} \dots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} x_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{j i_n} \quad (\text{A.4})$$

Bu çarpım aynı zamanda çok yönlü dizinin n. yönde açılımı ile de aşağıdaki gibi ilişkilendirilebilir.

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_n \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{Y}_{(n)} = \mathbf{A} \mathbf{X}_{(n)} \quad (\text{A.5})$$

EK B: Destek Terimlerinin Eniyilenmesinin Doğrusal Olmaması

ÇYÇG'nin destek terimlerinin (dizilerinin) eniyilenmesi için öncelikle bir eniyileme problemi ortaya koymak ve bu eniyileme probleminin çözülebilirliğini incelemek gerekmektedir. Değişmezlik ölçeni dediğimiz ve sadece sıfıncı dereceden yaklaşıtırmı ölçen σ_0 'ı en büyük yapan destek dizileri ÇYÇG için yeterince iyi destek dizileri olarak görülmektedir ve eniyileme problemini kurgulamak için kullanılabilir. Eniyileme problemini daha kolay kurgulamak için şimdilik sadece 3-yönlü bir dizi ele alalım.

$$f_{i_1 i_2 i_3}; \quad i_j = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.6})$$

Bu dizinin ÇYÇG açılımının ilk terimleri aşağıdaki gibidir.

$$f_{i_1 i_2 i_3} = s_{i_1}^{(1)} s_{i_2}^{(2)} s_{i_3}^{(3)} f^{(0)} + s_{i_2}^{(2)} s_{i_3}^{(3)} f_{i_1}^{(1)} + s_{i_1}^{(1)} s_{i_3}^{(3)} f_{i_2}^{(2)} + s_{i_1}^{(1)} s_{i_2}^{(2)} f_{i_3}^{(3)} + \dots \quad (\text{A.7})$$

ÇYÇG'nin f ve s bileşenleri belirlemek gerekir, herşeyden önce açılımın değişmez terimi olan $f^{(0)}$ ve tek yönlü terimleri $f^{(j)}$ 'ler hesaplanması s 'lere bağlı olduğu için önce destek dizilerini bulmak gerekir. Bu hesaplamalarda kullanılacak olan ağırlıkları da birer dizi olarak ele alırsak aşağıdaki özellikleri hatırlatmak gerekir.

$$w_{i_j}^{(j)} > 0, \quad \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j}^{(j)} = 1, \quad \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j}^{(j)} [s_{i_j}^{(j)}]^2 = 1; \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.8})$$

Eşitlik A.7'in her iki yanı s 'lerin ve ağırlık dizilerin çarpımı ile çarpılır, sonrasında da i_1, i_2, i_3 üzerinden toplam alınır, ağırlık dizisinin s 'nin dördülü üzerinden toplamının 1 olma özelliği de göz önünde bulundurulursa; f_0 'ın sağ yanda yalnız kalmasını sağlayan ve Sobol koşuluğunun aşağıdaki ÇYÇG karşılığıdır.

$$\begin{aligned} \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j}^{(j)} s_{i_j}^{(j)} f_{i_j}^{(j)} &= 0 \\ \sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j}^{(j)} s_{i_j}^{(j)} f_{i_j k}^{(j,k)} &= 0 \\ \sum_{i_k=1}^{n_k} w_{i_k}^{(k)} s_{i_k}^{(k)} f_{i_j i_k}^{(j,k)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Sıfırlanma koşuluğunun hem birliker hem de ikililer için yukarıdaki gibi gösterilmesi sayesinde ÇYÇG terimleri tek türlü belirlenir. Böylece değişmez terim aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_1}^{(1)} s_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} s_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} s_{i_3}^{(3)} f_{i_1 i_2 i_3} = f^{(0)} \quad (\text{A.10})$$

Yalnızca değişmez terimi olarak yaklaşım yapmak için birlikeri almadan kesme yapılması gerekmektedir. Bu durumda değişmezlik ölçeni adı verilen ve yaklaşımın kalitesini ölçen bir gösterge değeri kullanılmaktadır. Değişmezlik ölçeninin anlatımını bulmak için yine A.7 sırasayılı eşitliğin her iki yanının dördülü alınır ve tüm ağırlıklar ile çarpılıp ilgili sırasayılar üzerinden toplamı alınır aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} f_{i_1 i_2 i_3}^2 = f^{(0)2} + \dots \quad (\text{A.11})$$

Eğer yalnızca değişmez terimle yaklaştırım yapılmış ise açılımdaki diğer terimleri atılır ve sağ yanın sol yana oranı alınırsa elde edilen değer değişmezlik ölçeni olarak elde edilir.

$$\sigma_0 = \frac{f^{(0)2}}{\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} f_{i_1 i_2 i_3}^2} \quad (\text{A.12})$$

Değişmezlik ölçenin en yüksek değerini aldığı destek dizilerini bulmak ile aşağıdaki eniyileme problemi çözülmüş olur. Yani yapılması gereken iş σ_0 'ın s 'lere göre eniyilenmesidir. σ_0 ise s 'lerin dördüllerine bağlı bir yapıdadır. Lagrange çarpanlarını ile ağırlık dizilerinin destek işlevlerinin dördülü üzerinden toplamının 1 olması kısıtını da eniyileme problemine katarak aşağıdaki amaç işlevimsisi elde edilir.

$$\begin{aligned} J\left(\{s_{i_1}^{(1)}\}, \{s_{i_2}^{(2)}\}, \{s_{i_3}^{(3)}\}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right) &\equiv \sigma_0 + \lambda_1 \left(\sum_{i_1=1}^{n_1} w_{i_1}^{(1)} [s_{i_1}^{(1)}]^2 - 1 \right) \\ &+ \lambda_2 \left(\sum_{i_2=1}^{n_2} w_{i_2}^{(2)} [s_{i_2}^{(2)}]^2 - 1 \right) \\ &+ \lambda_3 \left(\sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_3}^{(3)} [s_{i_3}^{(3)}]^2 - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Amaç işlevimsisinin sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 'e göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse kısıt eşitliklerinin kendisi açığa çıkar.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \lambda_1} &= 0 \Rightarrow \sum_{i_1=1}^{n_1} w_{i_1}^{(1)} [s_{i_1}^{(1)}]^2 = 1 \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda_2} &= 0 \Rightarrow \sum_{i_2=1}^{n_2} w_{i_2}^{(2)} [s_{i_2}^{(2)}]^2 = 1 \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda_3} &= 0 \Rightarrow \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_3}^{(3)} [s_{i_3}^{(3)}]^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Destek terimlerine göre de türev almak gerekir. İlk destek dizisine göre türev göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial s_{j_1}^{(1)}} &= \frac{\partial \sigma_0}{\partial s_{j_1}^{(1)}} + 2\lambda_1 \sum_{i_1=1}^{n_1} w_{i_1}^{(1)} s_{i_1}^{(1)} \delta_{i_1 j_1} \\ &= \frac{\partial \sigma_0}{\partial s_{j_1}^{(1)}} + 2\lambda_1 w_{j_1}^{(1)} s_{j_1}^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

ifadesi elde edilir. Değişmezlik ölçeni anlatımının paydası $\|f\|^2$ ile gösterilirse yukarıdaki ilk parçalı türev aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0}{\partial s_{j_1}^{(1)}} &= \frac{1}{\|f\|^2} 2f^{(0)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial s_{j_1}^{(1)}} \\ &= \frac{2f^{(0)}}{\|f\|^2} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{j_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} s_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} s_{i_3}^{(3)} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Böylece amaç işlevimsisinin $s_{j_1}^{(j)}$, ye göre türevi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial J}{\partial s_{j_1}^{(1)}} = \frac{2f^{(0)}}{\|f\|^2} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{j_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} s_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} s_{i_3}^{(3)} + 2\lambda_1 w_{j_1}^{(1)} s_{j_1}^{(1)} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $s_{i_1}^{(1)}$ ile çarpılır ve i_1 sırasayısı üzerinden toplam alınırsa λ_1 'in $-\sigma_0$ 'a eşit olduğu görülür.

$$\frac{2f^{(0)}}{\|f\|^2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_1}^{(1)} s_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} s_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} s_{i_3}^{(3)} + 2\lambda_1 = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{2f^{(0)}}{\|f\|^2} + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\sigma_0 \quad (\text{A.19})$$

Aynı biçimde λ_2 ve λ_3 yine $-\sigma_0$ 'ya eşit çıkar. Bu bilgi 111 eşitliğinde kullanılırsa ve tüm bu işlemler $s^{(2)}$ ve $s^{(3)}$ 'ün elemanları içinde yapılırsa destek dizileri için aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$\begin{aligned} s_{j_1}^{(1)} &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{f_0}{\|f\|^2} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_2}^{(2)} s_{i_2}^{(2)} w_{i_3}^{(3)} s_{i_3}^{(3)} f_{j_1 i_2 i_3}, \quad j_1 = 1, \dots, n_1 \\ s_{j_2}^{(2)} &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{f_0}{\|f\|^2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_3=1}^{n_3} w_{i_1}^{(1)} s_{i_1}^{(1)} w_{i_3}^{(3)} s_{i_3}^{(3)} f_{i_1 j_2 i_3}, \quad j_2 = 1, \dots, n_2 \\ s_{j_3}^{(3)} &= \frac{1}{\sigma_0} \frac{f_0}{\|f\|^2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} w_{i_1}^{(1)} s_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} s_{i_2}^{(2)} f_{i_1 i_2 j_3}, \quad j_3 = 1, \dots, n_3 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Ortaya çıkan bu sonuçlar görüldüğü gibi doğrusal değil ikinci derece yapılarıdır.

EK C: ÇYÇÜDG'nin Görüntü Geri Çatma Üzerine Uygulamaları

ÇYÇÜDG ile hesaplanmış farklı resimlerde farklı yaklaşımlar bu bölümde görüntü geri çatma örnekleri ile ele alınmıştır. Ele alınan test görüntülerinden ilki 512×512 boyutlarında olan boat isimli gri seviyeli görüntüdür, Şekil (A.1(a)) ve Şekil (A.1) ile Şekil (A.2)'de farklı özyineleyişler için ÇYÇÜDG yaklaşımları görselleştirilmiştir.

İkinci olarak ele alınan gri seviyeli görüntü ise Escher'in bilinen paradoksal



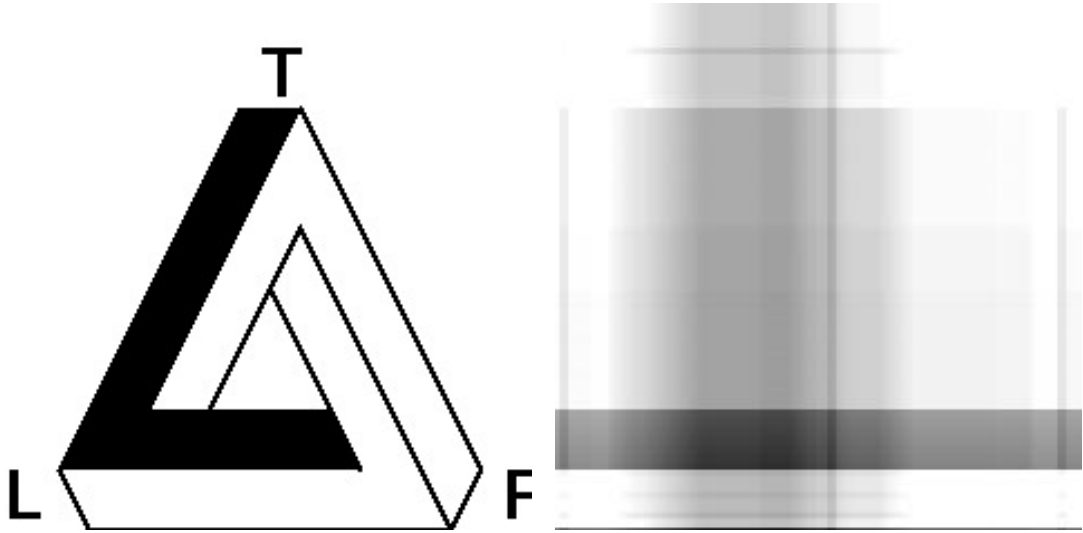
Şekil A.1 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile ÇYÇÜDG Yaklaşımı.



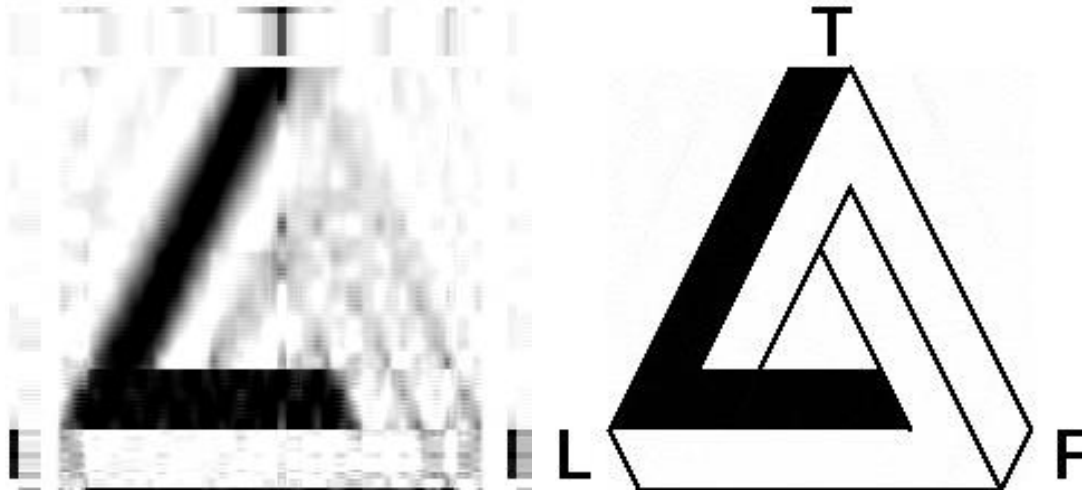
Şekil A.2 : 10 ve 150 Özyineleme ile ÇYÇÜDG Yaklaşımı.

üçgenidir. Bu resmin boyutları 236×236 'dır ve resmin kendisi ile 1 özyineleyiş sonucu ÇYÇÜDG yaklaşımı Şekil A.3'de gösterilmiştir. ÇYÇÜDG yaklaşımları ise Şekil (A.3) ve Şekil (A.4)'de gösterilmiştir.

RGB seviyeli olarak seçilmiş ve 3-yönlü dizi olarak ifade edilebilen test görüntülerinden ilki Şekil A.5(a) ile gösterilmiştir. Bu dizinin boyutları ise $256 \times$



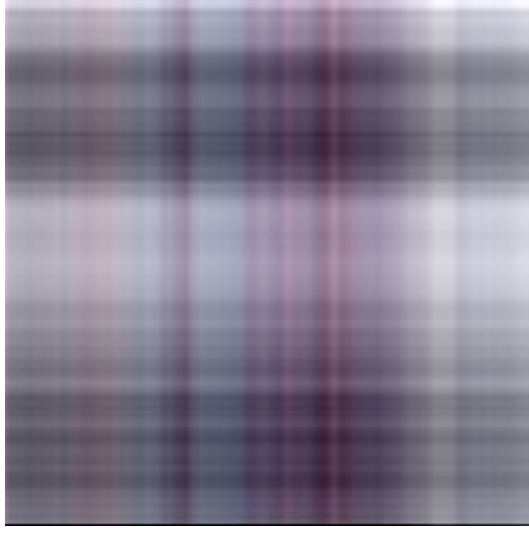
Şekil A.3 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile TMEMPR Yaklaştranı.



Şekil A.4 : 10 ve 150 Özyineleme ile TMEMPR Yaklaştranı.

256×3 'tür. ÇYÇÜDG'nin 1, 25 ve 150 özyineleyiş ile yaklaştraları Şekil (A.5) ve Şekil (A.6)'de gösterilmiştir.

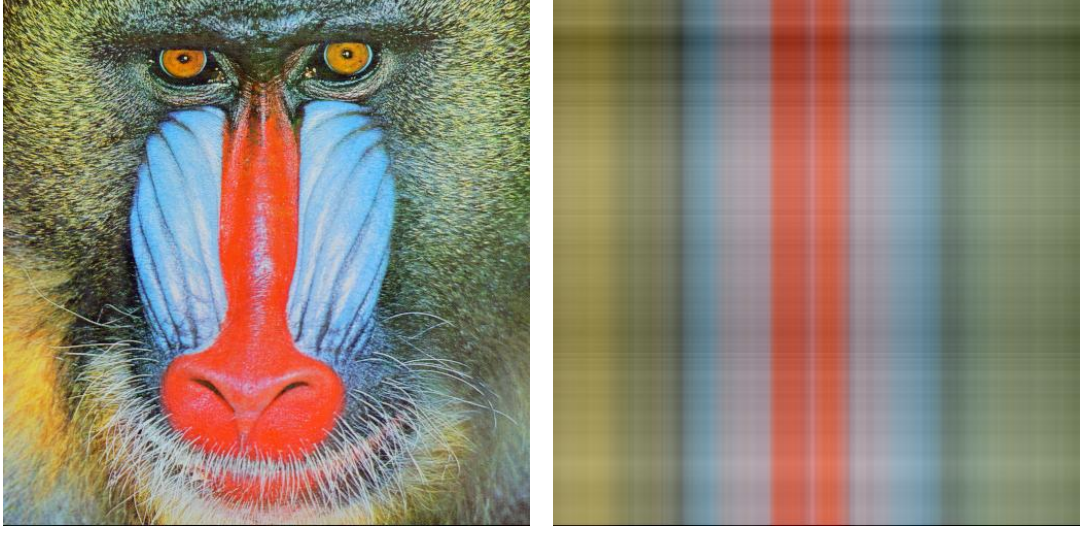
Sıklıkla kullanılan Baboon görüntüsünün boyutları $512 \times 512 \times 3$ olmakla beraber görüntünün aslı Şekil A.7(a) ile resmedilmiştir. $512 \times 512 \times 3$ boyutlarındaki dizinin 1,10 ve 150 özyineleyişli ÇYÇÜDG yaklaştraları Şekil A.7(b), Şekil A.8(a) ve Şekil A.8(b) ile gösterilmiştir. Son RGB seviyeli test görüntüsü ise Şekil A.9(a) ile resmedilmiştir ve bu görüntüye ait dizinin boyutu $512 \times 512 \times 3$ biçimindedir. Şekil A.7(b), Şekil A.8(a) ve Şekil A.8(b) ile sırasıyla 1,10, 150 özyineleyişli ÇYÇÜDG yönteminin başarımı görselleştirilmiştir.



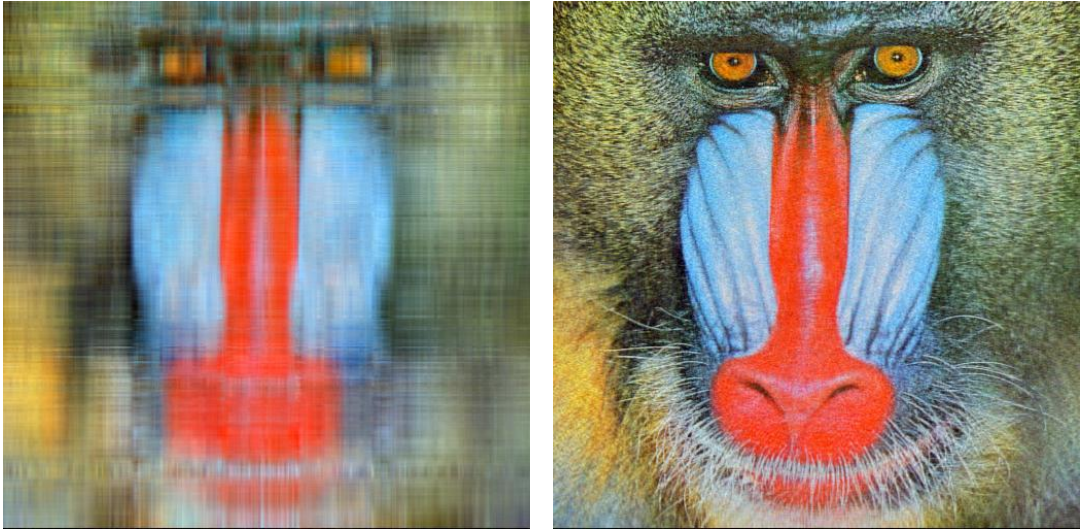
Şekil A.5 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile TEMPLPR Yaklaşırını.



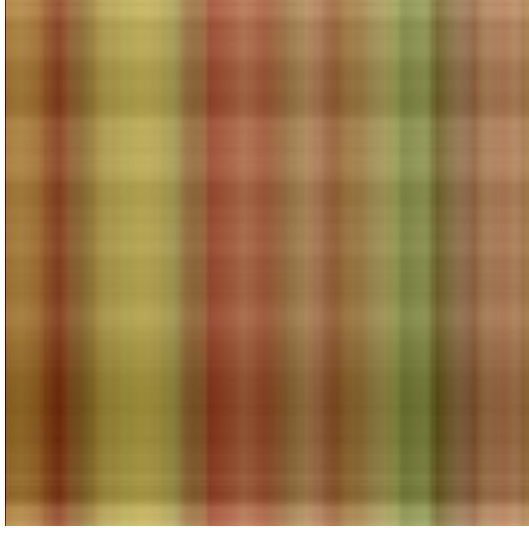
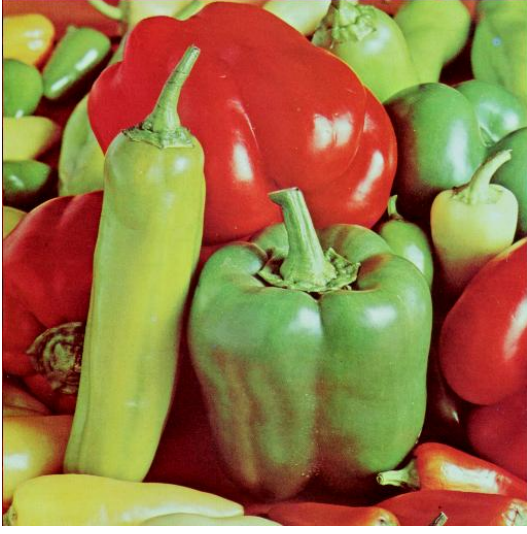
Şekil A.6 : 25 ve 150 Özyineleme ile TEMPLPR Yaklaşırını.



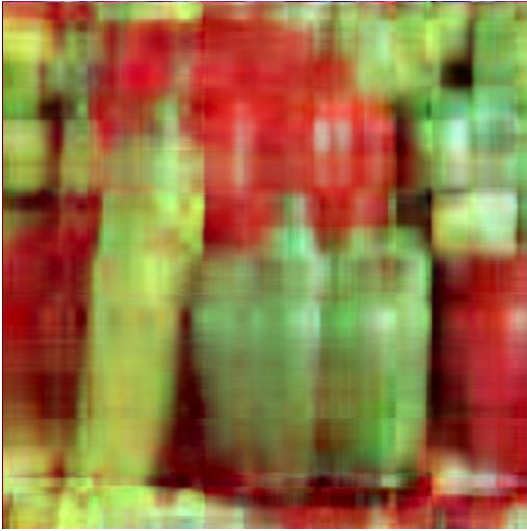
Şekil A.7 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile TEMPLPR Yaklaşımı.



Şekil A.8 : 10 ve 150 Özyineleme ile TEMPLPR Yaklaşımı.



Şekil A.9 : Esas Görüntü ve 1 Özyineleme ile TMEMPR Yaklaşırını.



Şekil A.10 : 10 ve 150 Özyineleme ile TMEMPR Yaklaşırını.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Evrim KORKMAZ ÖZAY

Doğum Yeri ve Tarihi: Akçadağ, 1980

E-Posta: evrimkorkmaz@gmail.com, korkmazer@itu.edu.tr

Lisans: İstanbul Üniversitesi, Matematik (2005)

Y. Lisans: İTÜ Bilişim Enstitüsü, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik (2009)

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- **Korkmaz Özay, E.** ve Demiralp, M. (2012) Combined Small Scale High Dimensional Model Representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, **50**(7), s.2023–2042. (Yüksek Lisans Tezi Tabanlı Doktora Tezi Çalışması Sırasında)
- **Korkmaz Özay, E.** ve Demiralp, M. (2014) Reductive Enhanced Multivariance Product Representation for Multi-way Arrays, *Journal of Mathematical Chemistry*, **52**(10), s.2546–2558.
- **Korkmaz Özay, E.** ve Demiralp, M. (2015) Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation based Image Reconstruction(İnceleme Altında)
- **Korkmaz Özay, E.** (2012). A New Multi-way Array Decomposition via Enhanced Multivariance Product Representation, *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2012)*, AIP Conf. Proc., Kos, Yunanistan, s.2015-2018.
- **Korkmaz Özay, E.** (2012). Möbius Transformational High Dimensional Model Representation on Multi-way Arrays New Multi-way Arrays, *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2012)*, AIP Conf. Proc., Kos, Yunanistan, s.427-430.
- **Korkmaz Özay, E.** ve Demiralp, M. (2014). Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Product Representation (TMEMPR) Studies : Decomposing the Planarly Unfolded Three-way Arrays, *Proceedings of the Int. Conf. on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, (CMMSE 2014)*, Cadiz, İspanya, s.785-793.
- **Korkmaz Özay, E.** ve Demiralp, M. (2015). Combined Small Scale Enhanced Multivariance Product Representation (CSSEMPR) for Image Reconstruction, *11th International Conference of Computational Methods in Science and Engineering*, Atina, Yunanistan.