TÜRKİYE CUMHURİYETİ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

EŞANLI DENKLEM MODELLERİNDE ÇOKLU İÇ İLİŞKİNİN ETKİLERİ VE ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Fulya GEZER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA / 2016

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

EŞANLI DENKLEM MODELLERİNDE ÇOKLU İÇ İLİŞKİNİN ETKİLERİ VE ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Fulya GEZER

Danışman: Prof. Dr. H. Altan ÇABUK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA / 2016

Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma, jürimiz tarafından Ekonometri Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. H. Altan ÇABUK

(Danışman)

Üye: Prof. Dr. Fikri AKDENİZ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin GÜLER

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim elemanlarına ait olduklarını onaylarım.

22/01/2016

Prof. Dr. Yıldırım Beyazıt ÖNAL

Enstitü Müdürü

ETİK BEYANI

Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

22 / 01 / 2016

Fulya GEZER

ÖZET

EŞANLI DENKLEM MODELLERİNDE ÇOKLU İÇ İLİŞKİNİN ETKİLERİ VE ALTERNATİF TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Fulya GEZER

Yüksek Lisans Tezi, Ekonometri Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Altan ÇABUK

Ocak 2016, 58 sayfa

Eşanlı denklem modelleri, iktisat, ekonometri ve istatistik alanında oldukça yoğun kullanılmaktadır. Eşanlı denklem modellerinin tahmininde en küçük kareler (EKK) yönteminin kullanılması sapmalı ve tutarsız tahminler verir. Bu modellerin tahmininde, modelin hata terimleri ile içsel değişkenleri arasındaki eşanlılığı düzelten tahmin yöntemleri kullanılmaktadır. Ancak bu tahmin yöntemleriyle elde edilen parametre tahminleri çoklu iç ilişki söz konusu olduğunda kararsız ve yüksek varyanslı olarak elde edilirler. Bu durumda çoklu iç ilişkinin etkisini azaltan ve daha kararlı tahminler veren tahmin ediciler kullanılır.

Bu çalışmada Klein'ın 1950 yılında "Birleşik Devletler için İktisadi Dalgalanmalar" başlıklı çalışmasında formüle ettiği çoklu iç ilişki sorunu olan eşanlı denklem modeli kullanılmıştır. Model, geleneksel tahmincilerden iki aşamalı en küçük kareler (2AEKK) ve üç aşamalı en küçük kareler (3AEKK) ile yanlı tahmincilerden ridge ve genelleştirilmiş maksimum entropi (GME) ile tahmin edilmiştir. Tahmincilerin performansları hata kare ortalamaları (HKO) bazında bootstrap yöntemi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Sonuçta, çoklu iç ilişki söz konusuyken en etkin tahmincinin GME olduğuna karar verilmiştir.

<u>Anahtar kelimeler</u>: Eşanlı denklem modeli, çoklu iç ilişki, üç aşamalı en küçük kareler, ridge, genelleştirilmiş maksimum entropi.

ABSTRACT

EFFECTS OF MULTICOLLINEARITY IN SIMULTANEOUS EQUATION MODELS AND COMPARISONS OF ALTERNATIVE ESTIMATORS

Fulya GEZER

Master Thesis, Department of Econometrics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. H. Altan ÇABUK

January 2016, 58 pages

Simultaneous equation models are used quite extensively in economics, econometrics and statistics. Using ordinary least squares (OLS) for the estimation of simultaneous equation model produces biased and inconsistent estimates. Estimation methods overcoming simultaneity between error terms and endogenous variables are used for the estimation of these models. However, in the presence of multicollinearity, variance of these estimators are inflated and these estimators produce unstable estimates. In such cases, estimators producing more stable estimates are used to overcome the effect of multicollinearity.

In this study, Klein's simultaneous equation model with multicollinearity problem presented in his study titled "Economic Fluctuations in the United States" in 1950 is used. The model is estimated with traditional estimators two-stage least squares (2SLS), three-stage least squares (3SLS) and biased estimators ridge, generalized maximum entropy (GME). Performances of these estimators are compared according to the mean square error (MSE) criteria obtained with bootstrap. As a result, in the presence of multicollinearity, GME estimator is decided as the most efficient estimator.

Keywords: Simultaneous equation model, multicollinearity, three-stage least squares, ridge, generalized maximum entropy.

ÖNSÖZ

Öncelikle danışmanım olmasından büyük onur duyduğum ve çalışmalarım sırasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesiyle bana hep yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. H. Altan ÇABUK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında yardımını esirgemeyen, deneyimlerinden ve bilgi birikiminden yararlandığım sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Güler'e çok teşekkür ederim.

Tez döneminde manevi desteklerini her an yanımda hissettiğim sayın hocalarım Prof. Dr. Aydın ÜNSAL'a, Doç. Dr. Nükhet DOĞAN'a ve Doç. Dr. Ebru Özgür GÜLER'e teşekkür ederim.

Tez jürimde bulunmasından büyük mutluluk duyduğum sayın hocam Prof. Dr. Fikri AKDENİZ'e teşekkür ederim.

Son olarak eğitim hayatım boyunca attığım her adımda yanımda olan, verdiğim kararlara saygı duyan, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM III

YÖNTEM

BÖLÜM IV

BULGULAR

BÖLÜM V

SONUÇ VE ÖNERİLER

KISALTMALAR LİSTESİ

EKK	: En Küçük Kareler
2AEKK	: İki Aşamalı En Küçük Kareler
3AEKK	: Üç Aşamalı En Küçük Kareler
GEKK	: Genelleştirilmiş En Küçük Kareler
GİR	: Görünürde İlişkisiz Regresyon
GME	: Genelleştirilmiş Maksimum Entropi
HKO	: Hata Kare Ortalamaları
ME	: Maksimum Entropi
GLM	: Genel Lineer Model
VIF	: Varyans Şişirme Faktörü (Variance Inflation Factor)
DEKK	: Dolaylı En Küçük Kareler
ARIDGE	: Ağırlıklı Ridge
AGME	: Ağırlıklı Genelleştirilmiş Maksimum Entropi

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

EKLER LİSTESİ

Sayfa

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem

Bir eşanlı denklem modeli, içsel ve önceden belirlenmiş (dışsal veya gecikmeli içsel) değişkenler arasında iktisat teorisi doğrultusunda varsayılan nedensel ilişkiyi gösteren yapısal denklemler kümesidir. Eşanlı denklem modeline ait her bir denkleme en küçük kareler (EKK) yönteminin uygulanması, sapmalı ve tutarsız parametre tahminleri verir. Bu durumda, modele tutarlı tahminler kazandıran başka tahmincilerin kullanılması gerekir.

Ekonometrik çalışmalarda, eşanlı denklem modellerine klasik regresyon yöntemlerinin uygulanması için bir takım varsayımların sağlanması gerekmektedir. Fakat çoğu kez bu varsayımlardan sapmalar söz konusu olabilir. Bu durumda çeşitli sorunlar meydana gelir. Çalışmada, bu sorunlardan modelin açıklayıcı değişkenleri arasında ilişki olması durumunda meydana gelen çoklu iç ilişki sorunu ele alınmıştır. Çoklu iç ilişki sorunu olan bir eşanlı denklem modeline EKK yönteminin uygulanması parametre tahminlerinin kararsız olmasına neden olur. Bu durumda modele daha kararlı tahminler kazandıran başka yöntemler uygulanmalıdır.

Çalışmada çoklu iç ilişki sorunu olan bir eşanlı denklem modeli ele alınmıştır. Bu modele daha kararlı tahminler kazandıran, yanlı tahmincilerden ridge ve genelleştirilmiş maksimum entropi (GME) tahmincileri ile geleneksel tahmincilerden iki aşamalı en küçük kareler (2AEKK) ve üç aşamalı en küçük kareler (3AEKK) tahmincileri uygulanmıştır.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bir eşanlı denklem modelinde çoklu iç ilişki olması durumunda, EKK yöntemi yerine daha kararlı tahminlerin elde edildiği tahmincilerin kullanılması önerilir. Bu amaçla çoklu iç ilişkinin tespit edildiği Klein'ın 1950 yılında "Birleşik Devletler için İktisadi Dalgalanmalar" başlıklı çalışmasında kullandığı eşanlı denklem modeli ele alınmıştır. Çoklu iç ilişki sorunu olan bu model için en etkin tahmin ediciyi belirlemek amacıyla, 1921-1941 yıllarına ait veriler kullanılarak, 2AEKK, 3AEKK, ridge, GME tahmincileri bootstrap yöntemi kullanılarak hata kare ortalamaları (HKO) bazında karşılaştırılmıştır.

1.3. Araştırmanın Önemi

Eşanlı denklem modellerinde klasik regresyon yöntemleri belli varsayımların sağlanması halinde değişkenler arasındaki ilişkiyi gerçeğe en yakın şekilde tahmin eder. Ancak örneklem seçimi esnasında veya verileri oluştururken veri kümesi bazı hataların etkisinde kalabilir. Bu durumda model bazı varsayımları sağlamayabilir ve bunun sonucunda çeşitli sorunlar meydana gelir. Bu sorunlardan biri, çoklu iç ilişki sorunudur.

Kötü koşulluluk (ill-conditioned) olarak da bilinen çoklu iç ilişki sorunu, parametre tahminlerinde olumsuz bir takım sonuçlara neden olur. Örneğin, parametre tahminlerinin oldukça kararsız olması, yanlış işaretli çıkması ve parametrelere ilişkin güven aralıklarının geniş olması, hipotez testlerinin anlamsız çıkması gibi sorunlar ile karşılaşılabilinir. Bu nedenle, bir eşanlı denklem modelinde çoklu iç ilişki söz konusu olduğunda uygulanan tahmincilerin bu sorunun üstesinden gelmeye yönelik olarak seçilmesi gerekir.

Bir eşanlı denklem modelinde çoklu iç ilişkinin olumsuz etkilerini azaltan daha kararlı tahminler veren bazı yanlı tahminciler ve geleneksel tahminciler bulunmaktadır. Bu yanlı tahminciler sayesinde yanlı fakat daha kararlı parametre tahminleri elde etmek mümkündür. Bir araştırmacı, çoklu iç ilişki sorunu olan bir eşanlı denklem modelinde kararlı tahminler elde etmek için kullanması gereken en etkin tahmin ediciyi, tahmincilerin HKO’na bakarak belirleyebilir. Çünkü, ekonometrik çalışmalarda daha kararlı parametre tahminleri elde etmek, bu parametre tahminlerini kullanarak doğru politika yapmak isteyen araştırmacılar için önem arzetmektedir.

BÖLÜM II

KURAMSAL AÇIKLAMALAR VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Eşanlı Denklem Modeli

İktisadi olayları analiz ederken modeller, tek denklemli veya çok denklemli olarak kurulurlar. İktisat teorisi doğrultusunda değişkenler arasında varsayılan karşılıklı nedensel ilişkiyi gösteren çok denklemli modellere eşanlı denklem modelleri adı verilir. Bir eşanlı denklem modeli; içsel, önceden belirlenmiş (dışsal veya gecikmeli içsel) değişkenler ve hata teriminden oluşur. Eşanlı denklem modeli yapısal formunun her denkleminde yer alan içsel değişkenler, birbirleriyle karşılıklı etkileşim içerisinde olan değişkenlerdir. Önceden belirlenmiş değişkenler ise içsel değişkenleri tek taraflı etkileyen fakat içsel değişkenler tarafından etkilenmeyen değişkenlerdir.

Birbirinden bağımsız içsel değişken sayısı kadar denklemi olan eşanlı denklem modeli eksiksiz model olarak adlandırılır (Koutsoyiannis, 1989, s. 333). Modeli oluşturan yapıda yer alan her denklem, iktisat kuramına uygun bir bakış açısı ifade ettiğinden yapısal denklem olarak isimlendirilir. Yapısal modelde yer alan her yapısal denklemin iktisat kuramında farklı anlam ve rolü mevcuttur. Yapısal modelde yer alan her içsel değişkenin önceden belirlenmiş değişkenlerin ve hata değişkeninin fonksiyonu olarak ifade edildiği modele ise indirgenmiş kalıp model denir.

Bir eşanlı ilişkiler demetine ait bir denkleme EKK yöntemi uygulanırsa doğan sapmaya eşanlı denklemler sapması adı verilir. Bu sapmanın kaynağı, EKK'in açıklayıcı değişkenlerle hata terimleri ilişkisizdir varsayımının çiğnenmesidir. Bu şekilde elde edilen tahminler de sapmalı ve tutarsız olur (Koutsoyiannis, 1989, s. 334). Bu nedenle eşanlı denklem modellerinin tahmininde başka tahmin yöntemleri uygulanır. Bu modellerin tahmininde kullanılan geleneksel tahmincilere dolaylı en küçük kareler (DEKK), 2AEKK, 3AEKK, sınırlı bilgiyle en çok olabilirlik (SBEO) ve tam bilgiyle en çok olabilirlik (TBEO) örnek verilebilir.

2.1.1. Eşanlı Denklem Modelinin Tanımlanması

G tane denklemden oluşan modelin her bir denklemi, G tane içsel değişken (içsel değişkenlerden bazılarının katsayıları sıfır olabilir), K tane dışsal değişken (önceden belirlenmiş değişken) ve G tane hata terimi içersin. N gözlem sayısı olmak üzere denklem denklem modelin yapısal formu, $i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ N$ için yazılırsa,

$$
\begin{array}{l}
\beta_{11}y_{1i}+\beta_{12}y_{2i}+\ldots+\beta_{1G}y_{Gi}+\gamma_{11}x_{1i}+\gamma_{12}x_{2i}+\ldots+\gamma_{1K}x_{Ki}=u_{1i}\\
\beta_{21}y_{1i}+\beta_{22}y_{2i}+\ldots+\beta_{2G}y_{Gi}+\gamma_{21}x_{1i}+\gamma_{22}x_{2i}+\ldots+\gamma_{2K}x_{Ki}=u_{2i}\\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots\\
\beta_{G1}y_{1i}+\beta_{G2}y_{2i}+\ldots+\beta_{GG}y_{Gi}+\gamma_{G1}x_{1i}+\gamma_{G2}x_{2i}+\ldots+\gamma_{GK}x_{Ki}=u_{Gi}
\end{array}
\tag{2.1}
$$

elde edilir. (2.1) nolu modelde, içsel değişkenler y, önceden belirlenmiş değişkenler x ile ifade edilmiştir. Modelin matris formu,

$$\mathbf{By_i}+\mathbf{\Gamma x_i}=\mathbf{u_i} \quad , \quad i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ N \tag{2.2}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$
\mathbf{y_i}=\begin{bmatrix} y_{1i}\\ y_{2i}\\ \vdots\\ y_{Gi}\end{bmatrix},\quad
\mathbf{x_i}=\begin{bmatrix} x_{1i}\\ x_{2i}\\ \vdots\\ x_{Ki}\end{bmatrix},\quad
\mathbf{u_i}=\begin{bmatrix} u_{1i}\\ u_{2i}\\ \vdots\\ u_{Gi}\end{bmatrix},\quad
\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1G}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2G}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GG}\end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{\Gamma}=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1K}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2K}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots & \gamma_{GK}\end{bmatrix}
$$

şeklindedir. Modelin (2.2) nolu matris formunda,

$\mathbf{y_i}$: $G\times 1$ boyutlu içsel değişkenler vektörü,

$\mathbf{x_i}$: $K\times 1$ boyutlu önceden belirlenmiş değişkenler vektörü,

$\mathbf{u_i}$: $G\times 1$ boyutlu hata terimi vektörü,

$\mathbf{B}$: $G\times G$ boyutlu içsel değişken katsayıları matrisi,

$\mathbf{\Gamma}$: $G\times K$ boyutlu önceden belirlenmiş değişken katsayıları matrisi

dir.

(2.2) nolu eşitlikte verilen modelin her iki tarafı tekil olmayan $\mathbf{B}$ matrisinin tersi $\mathbf{B}^{-1}$ ile soldan çarpıldığında modelin (2.3) nolu indirgenmiş kalıp formu elde edilir:

$$\mathbf{y_i} + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x_i} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u_i}$$

$$\mathbf{y_i} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{x_i} + \mathbf{v_i} \quad , \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, N \qquad (2.3)$$

(2.3) nolu indirgenmiş kalıp formda, $\boldsymbol{\pi} = -\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}$ ve $\mathbf{v_i} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u_i}$ olup

$\mathbf{v_i}$: $G \times 1$ boyutlu indirgenmiş form hata terimi vektörü,

$\boldsymbol{\pi}$: $G \times K$ boyutlu indirgenmiş form katsayıları matrisi

dir. Ayrıca,

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1K} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_{G1} & \pi_{G2} & \cdots & \pi_{GK} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v_i} = \begin{bmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{Gi} \end{bmatrix}$$

dir. Modelin indirgenmiş kalıp formu denklem denklem,

$$\begin{array}{l} y_{1i} = \pi_{11}x_{1i} + \pi_{12}x_{2i} + \ldots + \pi_{1K}x_{Ki} + v_{1i} \\ y_{2i} = \pi_{21}x_{1i} + \pi_{22}x_{2i} + \ldots + \pi_{2K}x_{Ki} + v_{2i} \\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ y_{Gi} = \pi_{G1}x_{1i} + \pi_{G2}x_{2i} + \ldots + \pi_{GK}x_{Ki} + v_{Gi} \end{array}$$

şeklinde ifade edilir. (2.2) nolu yapısal modelin hata terimi $\mathbf{u_i}$ belli varsayımları sağlar. Bunlar;

(i) $E(\mathbf{u_i}) = \mathbf{0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$

(ii) $E(\mathbf{u_i}\mathbf{u_i}') = \boldsymbol{\Sigma} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$

Burada $\mathbf{0} : G \times 1$ boyutlu sıfırlardan oluşan vektör ve $\boldsymbol{\Sigma} : G \times G$ boyutlu aynı gözlemlerin hata terimleri arasındaki varyans-kovaryans matrisidir.

(iii) $i, j = 1, 2, \ldots, N$ ve $i \neq j$ için $E(\mathbf{u_i u_j}') = \mathbf{0}$ 'dır.

Aynı şekilde (2.3) nolu indirgenmiş form modelin hata terimi $\mathbf{v_i}$ 'nin ortalaması, $i = 1, 2, 3, \ldots, N$ için,

$$E(\mathbf{v_i}) = E(\mathbf{B^{-1}u_i}) = \mathbf{B^{-1}}E(\mathbf{u_i}) = \mathbf{0}$$

ve varyans-kovaryans matrisi,

$$\mathbf{\Omega} = E(\mathbf{v_i v_i}') = \mathbf{B^{-1}}E(\mathbf{u_i u_i}')(\mathbf{B}')^{-1} = \mathbf{B^{-1}\Sigma}(\mathbf{B}')^{-1}$$

olarak ifade edilir (Pindyck ve Rubinfeld, 1991, s. 317).

2.1.2. Eşanlı Denklem Modelinin Belirlenme Şartları

Eşanlı denklem modeli yapısal form denklemlerinde eşitliğin sağ tarafında yer alan içsel değişkenler EKK tahminlerinin tutarsız olmasına yol açar. İndirgenmiş form denklemlerinde ise eşitliğin sağ tarafında sadece önceden belirlenmiş değişkenler bulunduğu için sorun olmayacaktır. Bu nedenle yapısal parametrelerle ilgili bilgiler indirgenmiş form parametrelerinin tutarlı tahminlerinden elde edilir. Yapısal form parametrelerini indirgenmiş form parametreleri cinsinden ifade etme problemi bir belirlenme problemidir.

İndirgenmiş forma ait bilgiler $\boldsymbol{\pi}$ 'nin $G \times K$ tane elemanından sağlanır. Amaç, $\mathbf{B}$ 'nin $G \times G$ tane ve $\mathbf{\Gamma}$ 'nın $G \times K$ tane elemanını belirlemektir. Bunun için yapısal formun parametreleri üzerindeki kısıtlar hakkında bilgiye ihtiyaç duyulur. Genellikle bu kısıtlar, sıfır kısıtlarıdır.

Modelin birinci denkleminde bulunan G tane içsel değişkenin ilk G_* tane parametresi sıfırdan farklı, sonra gelen G_{**} tane parametresi sıfıra eşit olsun. Yine birinci denklemde bulunan K tane önceden belirlenmiş değişkenin ilk K_0 tane parametresi sıfırdan farklı, sonra gelen K_{00} tane parametresi sıfıra eşit olsun. Böylece birinci denklemden G_{**} tane içsel değişkeni, K_{00} tane önceden belirlenmiş değişkeni dışlamış oluruz. Bunu matris formunda gösterecek olursak,

$$\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1G_*} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{1i}\\ y_{2i}\\ \vdots\\ y_{Gi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1K_0} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1i}\\ x_{2i}\\ \vdots\\ x_{Ki}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{1i}\\ u_{2i}\\ \vdots\\ u_{Gi}\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu gösterim daha sade olarak,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_* & \boldsymbol{\beta}_{**}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{y}_*\\ \mathbf{y}_{**}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma}_\mathbf{00}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_\mathbf{0}\\ \mathbf{x}_\mathbf{00}\end{bmatrix}=\mathbf{u}_\mathbf{i} \qquad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir.

(2.4) nolu gösterimde,

$\mathbf{y}_*$: $G_* \times 1$ boyutlu içerilen içsel değişkenlere ait gözlemler vektörü,

$\mathbf{y}_{**}$: $G_{**} \times 1$ boyutlu dışlanan içsel değişkenlere ait gözlemler vektörü,

$\boldsymbol{\beta}_*$: $1 \times G_*$ boyutlu sıfırdan farklı içsel değişken parametreleri vektörü,

$\boldsymbol{\beta}_{**}$: $1 \times G_{**}$ boyutlu sıfıra eşit içsel değişken parametreleri vektörü,

$\mathbf{x}_\mathbf{0}$: $K_0 \times 1$ boyutlu içerilen önceden belirlenmiş değişkenlere ait gözlemler vektörü,

$\mathbf{x}_\mathbf{00}$: $K_{00} \times 1$ boyutlu dışlanan önceden belirlenmiş değişkenlere ait gözlemler vektörü,

$\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{0}$: $1 \times K_0$ boyutlu sıfırdan farklı önceden belirlenmiş değişken parametreleri vektörü,

$\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{00}$: $1 \times K_{00}$ boyutlu sıfıra eşit önceden belirlenmiş değişken parametreleri vektörü

dür.

Aynı notasyonu kullanarak indirgenmiş form denklemi,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_*\\ \mathbf{y}_{**}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\pi}_{*,0} & \boldsymbol{\pi}_{*,00}\\ \boldsymbol{\pi}_{**,0} & \boldsymbol{\pi}_{**,00}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_\mathbf{0}\\ \mathbf{x}_\mathbf{00}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{v}_*\\ \mathbf{v}_{**}\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. İndirgenmiş form denkleminde,

$\boldsymbol{\pi}_{*,0} : G_* \times K_0$, $\boldsymbol{\pi}_{*,00} : G_* \times K_{00}$, $\boldsymbol{\pi}_{**,0} : G_{**} \times K_0$, $\boldsymbol{\pi}_{**,00} : G_{**} \times K_{00}$, $\mathbf{v}_* : G_* \times 1$,

$\mathbf{v}_{**} : G_{**} \times 1$ boyutlu vektörler ve matrislerdir.

Daha önce ifade ettiğimiz $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{-B^{-1}\Gamma}$ eşitliğinden,

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{-\Gamma}$$

veya açık şekilde ifade edecek olursak,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_* & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_{*,0} & \boldsymbol{\pi}_{*,00} \\ \boldsymbol{\pi}_{**,0} & \boldsymbol{\pi}_{**,00} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.5) nolu eşitlikten,

$$\boldsymbol{\beta}_* \boldsymbol{\pi}_{*,0} = -\boldsymbol{\gamma}_0 \qquad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\beta}_* \boldsymbol{\pi}_{*,00} = \mathbf{0} \qquad (2.7)$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.6) nolu eşitlikte, β'lardan biri 1'e eşit olup $G_* - 1$ tane bilinmeyen β ve K_0 tane bilinmeyen γ vardır. (2.7) nolu eşitlik ise sadece $G_* - 1$ tane bilinmeyen β içerir. K_{00} tane denklemden oluşan (2.7) nolu eşitliği,

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{G_*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{1,K_0+1} & \cdots & \pi_{1,K_{00}} \\ \pi_{2,K_0+1} & \cdots & \pi_{2,K_{00}} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{G_*,K_0+1} & \cdots & \pi_{G_*,K_{00}} \end{bmatrix} = [\mathbf{0}]_{1\times K_{00}}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

(2.7) nolu eşitliğin bir çözümünün varolabilmesi için gerek koşul eşitliğin en az $G_* - 1$ tane denklem içermesidir. Bu koşul eşanlı denklem modellerinde belirlenme şartlarından sayma şartıdır. Sayma şartı şöyle de dile getirilebilir: Bir denklemin belirlenebilmesi için, içermediği (içsel ve önceden belli) bütün değişkenlerin sayısı, modelin içsel değişkenler sayısının bir eksiğine eşit ya da ondan büyük olmalıdır (Koutsoyiannis, 1989, s.354-356). O halde (2.2) nolu modelin (2.7) nolu eşitlikte verilen denkleminin belirlenebilir olması için,

$$K_{00} \geq G_{*} - 1$$

şartı sağlanmalıdır.

Sayma koşulu belirlenme için gerekli fakat yeterli bir koşul değildir. Çünkü K_{00} tane denklemin hepsinin birbirinden bağımsız olmasına gerek yoktur. Belirlenme için gerekli ve yeterli koşul, K_{00} denklemden $G_{*} - 1$ tanesinin birbirinden bağımsız olmasıdır. Bu koşul, rank koşulu olarak adlandırılıp şu şekilde ifade edilebilir: (2.7) nolu denklemden dışlanan (içsel ve önceden belli) bütün değişkenlerin parametrelerinden oluşan matrisin rankı $G_{*} - 1$'e eşit olmalıdır. Başka bir ifadeyle,

$$rank\left[\boldsymbol{\pi}_{*,00}\right] = G_{*} - 1$$

olmalıdır. Bilinmeyen yapısal parametreleri belirleme (2.7) nolu eşitliğe bağlıdır. $rank\left[\boldsymbol{\pi}_{*,00}\right] = G_{*} - 1$ iken bir çözüm varolacaktır.

Modelin herhangi bir denklemi için rank koşulu sağlanıp,

$$K_{00} = G_{*} - 1$$

ise denklem tam belirlenmiştir. Aynı şekilde rank koşulu sağlanıp,

$$K_{00} > G_{*} - 1$$

ise denklem aşırı belirlenmiştir denir. Aşırı belirlenmiş veya tam belirlenmiş eşanlı denklem modeli için uygulanan ayrı tahminciler bulunmaktadır. Örneğin, aşırı belirlenmiş eşanlı denklem modeli tahmini için 2AEKK tahmincisi, tam belirlenmiş eşanlı denklem modeli için DEKK tahmincisi kullanılabilir.

2.2. Çoklu İç İlişki Sorunu

2.2.1. Çoklu İç İlişki Sorunun Tanımlanması

Genel lineer modelde (GLM) klasik regresyon yöntemlerini uygulayabilmek için gerekli birtakım varsayımların sağlanması gerekmektedir. Ancak bu varsayımlar her zaman sağlanmaz. Bazı varsayımlardan sapmalar meydana gelebilir. Çoklu iç ilişki, GLM'nin önemli bir varsayımı olan, açıklayıcı değişkenler arasında ilişki bulunmaması varsayımından sapmadır.

2.2.2. Çoklu İç İlişkinin Nedenleri

Çoklu iç ilişkinin başlıca nedenleri şu şekilde sıralanabilir (Gujarati, 2004, s. 323):

1. Kullanılan veri derleme yönteminde, açıklayıcı değişkenlerin kitlede aldıkları değerlerin sınırlı bir aralığında örneklem alma.

2. Modelde ya da örneklem alınan kitlede sınırlamalar olması.

3. Model kurmada hata yapılması.

4. Modelin aşırı belirlenmiş olması. Modelde gözlem sayısından daha çok sayıda açıklayıcı değişken bulunması durumunda model aşırı belirlenmiş olur.

5. Zaman serilerindeki büyüme ve trend faktörleri: Modeldeki açıklayıcı değişkenlerin ortak bir genel eğilim içinde olmaları, yani birlikte artıp birlikte azalmalarıdır.

2.2.3. Çoklu İç İlişkinin Sonuçları

Çoklu iç ilişki durumunda şu sonuçlarla karşılaşılabilir (Gujarati, 2004, s. 327):

1. Çoklu iç ilişki halinde parametre tahminlerinin varyans ve kovaryansları artmaktadır.

2. Çoklu iç ilişki durumunda artan varyans ve kovaryanslar katsayıların güven aralıklarının daha geniş olmasına yol açar.

3. Çoklu iç ilişki halinde artan standart hatalar, t değerlerini küçülterek açıklayıcı değişkenleri t testine göre anlamsız kılar.

4. R^2 değeri yüksek olacağı için model hatalı bile olsa modelin uygun bir model olduğu yanılsamasına düşülür.

5. Parametre tahminlerinde büyük sapmalar meydana gelir.

2.2.4. Çoklu İç İlişki Sorununun Belirlenmesi

Çoklu iç ilişkinin varlığının araştırılmasında kullanılan sistematik bir test bulunmamaktadır. Ancak değişik göstergeleri esas alan farklı yöntemlerle çoklu iç ilişkinin olup olmadığı araştırılabilir. Bu yöntemlerden bazıları şu şekilde sıralanabilir:

1. Tahmin edilen modelin R^2 değeri yüksek çıktığı halde t oranları küçük çıkarsa, bu durum çoklu iç ilişkinin varlığına bir işaret olarak görülmektedir (Tarı, 2010, s. 160).

2. Açıklayıcı değişkenler arasındaki ikişerli korelasyon katsayıları $(r_{X_i X_j})$'nın yüksek olması çoklu iç ilişkinin bir göstergesidir (Gujarati, 2004, s. 328).

3. Standartlaştırılmış formda $\mathbf{X'X}$ matrisinin determinantı 0 ile 1 değerleri arasındadır $(0 \le |\mathbf{X'X}| \le 1)$. Determinant 0 ise tam çoklu iç ilişki vardır, determinant 1 ise çoklu iç ilişki yoktur denir. $\mathbf{X'X}$ matrisinin determinantı sıfıra yaklaştıkça çoklu iç ilişkinin gücü artar (Farrar ve Glauber, 1967, s. 101).

4. Çoklu iç ilişkinin saptanmasında kullanılan yaklaşımlardan biri koşul sayısıdır. $X'X$ matrisinin en büyük özdeğeri $\lambda_{\max}$, en küçük özdeğeri $\lambda_{\min}$ olmak üzere koşul sayısı,

$$k = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Şeklinde tanımlanır. Buna göre koşul sayısı;

(i) 100'den küçük olduğunda çoklu iç ilişki yoktur,

(ii) 100 ile 1000 arasında olduğunda çoklu iç ilişki vardır,

(iii) 1000'den büyük olduğunda şiddetli çoklu iç ilişki vardır

denir.

Koşul sayısı,

$$KS = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$$

olarak da ifade edilebilir. Bu durumda $\sqrt{k}$;

(i) 10 ile 30 arasında olduğunda orta veya güçlü çoklu iç ilişki vardır,

(ii) 30'dan büyük olduğunda şiddetli çoklu iç ilişki vardır

denir (Gujarati, 2004, s. 340).

5. Varyans şişirme faktörü (variance inflation factor – VIF) çoklu iç ilişkinin bir ölçüsü olarak kullanılmaktadır. VIF, tahmin edilen bir parametrenin çoklu iç ilişki nedeniyle gerçek değerden uzaklaşmasının bir ölçüsüdür. İki bağımsız değişkenli modelde,

$$VIF = \frac{1}{1 - r_{X_1X_2}^2}$$

dır. Doğrusal bağlantının bulunmaması durumunda,

$$r_{X_1X_2}^2 = 0$$

olacağından,

$$VIF = 1$$

olur. İkiden fazla bağımsız değişkenli regresyon modelinde,

$$VIF = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

dir. Burada R_j^2, j 'nci bağımsız değişkenin diğer bağımsız değişkenlerle olan belirlilik kaysayısıdır. $VIF > 5$ olması, çoklu iç ilişkinin varlığını göstermektedir (Tarı, 2010, s.162).

6. Katsayıların teoriye uymayan işaretleri de çoklu iç ilişkinin bir göstergesi olabilir.

2.2.5. Çoklu İç İlişki Sorununun Düzeltilmesi

Çoklu iç ilişki sorununun düzeltilmesinde kullanılan yöntemlerden bazıları şunlardır:

1. Örnek hacmi genişletilerek, çoklu iç ilişkiden kurtulmak ya da etkisini azaltmak mümkündür.

2. Çoklu iç ilişki halinde bulunan açıklayıcı değişkenlere ait parametrelerden bir veya birkaçına ait ön bilgi mevcutsa, bu bilgiden yararlanarak çoklu iç ilişkinin etkisi azaltılır ya da tamamen yok edilir (Tarı, 2010, s.164).

3. Zaman serisi verileriyle kesit verilerini bir araya toplayıp karma (havuz) veri oluşturarak çoklu iç ilişki problemi ortadan kaldırılabilir (Gujarati, 2004, s. 343).

4. Genellikle zaman serisi verilerinde çoklu iç ilişkiyi gidermenin yolu, değişkenlerin orijinal değerleri yerine dönüştürülmüş değerlerinin kullanılmasıdır. Değişkenlerin birinci farkları veya değişme oranları alınarak da çoklu iç ilişki problemi çözülmeye çalışılmaktadır (Tarı, 2010, s.165).

5. Çoklu iç ilişki içinde bulunan değişkenlerden, tek bir değişkenin unsurları durumunda olanları birleştirerek ve bazı değişkenler modelden çıkartarak, çoklu iç ilişki düzeltilebilir.

6. Çoklu iç ilişki sorunu olan modelleri tahmin ederken, çoklu iç ilişkiyi hesaba katan bazı yanlı tahminciler kullanarak, yanlı fakat kararlı tahminler elde edilebilir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1. Geleneksel Tahminciler

3.1.1. İki Aşamalı En Küçük Kareler Tahmincisi

2AEKK bir tek denklem yöntemi olup sistemdeki denklemlere tek tek uygulanır. Özellikle aşırı belirlenmiş modellerin tahmini için geliştirilmiş bir yöntem olmakla beraber, tam belirlenmiş modellere de uygulanmaktadır. 2AEKK yönteminin varsayımları şunlardır (Koutsoyiannis, 1989, s. 394):

1) Yapısal denklemin hata terimi; sıfır ortalama, sabit varyans ve sıfır kovaryans gibi bildik stokastik varsayımları sağlar. Aynı şekilde indirgenmiş kalıp hata terimleri de sıfır ortalama, sabit varyans, sıfır kovaryansa sahip ve yapısal modelin dışsal değişkenlerinden bağımsızdır.

2) Açıklayıcı değişkenler tam çoklu doğrusal değildir ve makro değişkenler uygun biçimde toplulaştırılmıştır.

3) Dışsal değişkenler bakımından model doğru kurulmuştur.

4) Örneklem yeterince büyüktür, özellikle de gözlem sayısı yapısal modeldeki önceden belli değişken sayısından büyüktür.

(2.1) nolu modelin aşırı belirlenmiş varsayılan birinci yapısal denklemi 2AEKK ile tahmin edilebilir. Aşırı belirlenme durumunda, 2AEKK uygun bir tahmin yöntemidir. 2AEKK ile yapısal parametrelerin tahminlerini yapabilmek için (2.7) nolu eşitlikteki mevcut bütün bilgi kullanılır.

Modelin birinci denkleminin yapısal formu,

$$\mathbf{y_1} = \mathbf{Y_1}\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X_1}\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{u_1} \qquad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. (3.1) nolu denklemde,

$\mathbf{y_1}$: $N \times 1$ boyutlu katsayısı bir olan içsel değişken gözlemleri vektörü,

$\mathbf{Y_1}$: $N \times (G_* - 1)$ boyutlu denklemin sağ tarafındaki içsel değişken gözlemleri matrisi,

$\boldsymbol{\beta_1}$: $(G_* - 1) \times 1$ boyutlu içerilen içsel değişken katsayıları vektörü,

$\mathbf{X_1}$: $N \times K_0$ boyutlu içerilen önceden belirlenmiş değişken gözlemleri matrisi,

$\boldsymbol{\gamma_1}$: $K_0 \times 1$ boyutlu önceden belirlenmiş değişken katsayıları vektörü,

$\mathbf{u_1}$: $N \times 1$ boyutlu hata vektörü

dür. (3.1) nolu denkleme EKK yöntemi uygulanırsa $\mathbf{Y_1}$ ile $\mathbf{u_1}$ arasındaki ilişkiden dolayı tutarlı olmayan parametre tahminleri elde edilir. 2AEKK, $\mathbf{Y_1}$'in $\mathbf{u_1}$ ile ilişkili olan bileşenlerini çıkarıp tutarlı tahminler elde edilmesini sağlar (Pindyck ve Rubinfeld, 1991, s. 323). 2AEKK'nın aşamaları şu şekildedir:

1. Aşama **:** (3.1) nolu denklemin sağ tarafında yer alan içsel değişkenlerin her biri modelin önceden belirlenmiş değişkenleriyle ifade edilip tahmin edilir. Bu aşamada elde edilen sonuçlar yansız ve tutarlıdır. Birinci aşamada kullanılan indirgenmiş form denklemi:

$$\mathbf{Y_1} = \mathbf{X_1}\boldsymbol{\pi_1} + \mathbf{X_2}\boldsymbol{\pi_2} + \mathbf{V}$$

veya

$$\mathbf{Y_1} = \mathbf{X}\boldsymbol{\pi} + \mathbf{V}$$

şeklindedir. Burada,

$\mathbf{X_2}$: $N \times K_{00}$ boyutlu 1. denklemden dışlanan önceden belirlenmiş değişken gözlemleri matrisi,

$\boldsymbol{\pi_1}$: $K_0 \times (G_* - 1)$ boyutlu indirgenmiş form katsayıları matrisi,

$\boldsymbol{\pi_2}$: $K_{00} \times (G_* - 1)$ boyutlu indirgenmiş form katsayıları matrisi,

$\mathbf{V}$: $N \times (G_* - 1)$ boyutlu indirgenmiş form hataları matrisi dir. Birinci aşamada elde edilen indirgenmiş form parametre tahmini,

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1$$

dir. $\hat{\mathbf{Y}}_1$ tahmini ise,

$$\hat{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\pi}}$$

olarak bulunur.

2. Aşama **:** Birinci aşamada elde edilen $\hat{\mathbf{Y}}_1$ tahminini (3.1) nolu denklemde yerine koyarak (3.2) nolu denklem elde edilir. (3.2) nolu denkleme EKK yöntemi uygulandığında $\hat{\mathbf{y}}_1$ tahmini elde edilir. Bu aşama sonunda elde edilen sonuçlar yanlı fakat tutarlıdır (Gujarati, 2004).

$$\mathbf{y}_1 = \hat{\mathbf{Y}}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{u}_1 \qquad (3.2)$$

Matris formunda ikinci aşama tahminleri,

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1 & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1 & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1 & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}' \mathbf{y}_1$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 & \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

şeklinde gösterilebilir.

$\hat{\mathbf{Y}}_1$ ile hata terimi $\mathbf{u}_1$ arasında ilişki olmamasından dolayı $\frac{1}{N}\hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{u}_1$ ifadesinin olasılık limiti sıfır olur. Sonuç olarak 2AEKK tahmincisi, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\gamma}_1 \end{bmatrix}$'nın asimptotik yansız tahmin edicisi olur.

2AEKK tahmini, birinci aşamanın regresyon kalıntıları ile bütün önceden belirlenmiş değişkenlerin ilişkisiz olması ve $\hat{\mathbf{Y}}_1$ 'nın önceden belirlenmiş değişkenlerin doğrusal bir kombinasyonu olması gerçekleri dikkate alınarak daha faydalı bir formda yeniden yazılabilir:

$$\hat{\mathbf{V}}'\mathbf{X} = \mathbf{0} = \mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_1'\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 = (\hat{\mathbf{Y}}_1 + \hat{\mathbf{V}})'(\hat{\mathbf{Y}}_1 + \hat{\mathbf{V}}) = \hat{\mathbf{Y}}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 + \hat{\mathbf{V}}'\hat{\mathbf{V}}$$

$$\mathbf{X}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{X}_1'(\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}) = \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1$$

dır. Buna göre (3.3) nolu eşitlik;

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}'\hat{\mathbf{V}} & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}})'\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Ayrıca,

$$\mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 = (\hat{\mathbf{Y}}_1 + \hat{\mathbf{V}})'\mathbf{X}_1 = \hat{\mathbf{Y}}_1\mathbf{X}_1$$

eşitliği göz önüne alınarak, 2AEKK parametre tahminlerinin varyans-kovaryans matrisi;

$$Var\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1 & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1 & \mathbf{X}_1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}'\hat{\mathbf{V}} & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{bmatrix}^{-1}$$

şeklindedir. Pratikte σ^2,

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{Y}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1$$

olmak üzere,

$$S^2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_1'\hat{\mathbf{u}}_1}{N - [(G_* - 1) + K_0]}$$

ile tahmin edilir.

3.1.2. Üç Aşamalı En Küçük Kareler Tahmincisi

3AEKK bir denklem takımı yöntemidir. Modelin bütün denklemlerine aynı anda uygulanır ve bütün parametrelerin tahminlerini aynı anda verir. Bu yöntem, Thiel'in 2AEKK yönteminin mantıksal bir uzantısı olarak Theil ve Zellner (1962) tarafından geliştirilmiştir. İlk iki aşama, 2AEKK ile aynıdır. Üçüncü aşamada ise genelleştirilmiş en küçük kareler (GEKK) uygulanır. 3AEKK yönteminin varsayımları şunlardır (Koutsoyiannis, 1989, s. 477):

1) Bütün modelin yapısı eksiksiz olarak bilinmektedir.

2) Yapısal form denklemlerinin hataları, sıfır ortalamaya sahip, seri olarak bağımsızdır.

3) Yapısal form denklem hatalarının varyans ve eş zamanlı kovaryansları sonlu ve zaman boyunca sabittir. Ayrıca hataların eş zamanlı kovaryans matrisi tekil matris değildir.

3) Modelin hata terimleri eş zamanlı olarak ilişkilidir. Eğer hata terimleri eş zamanlı ilişkili değilse, 3AEKK, 2AEKK'ya indirgenir.

4) Denklem takımı aşırı belirlenmiştir.

N gözlem sayısı olmak üzere (2.1) nolu modelin μ. yapısal denklemi,

$$\mathbf{Z}_\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_\mu & \mathbf{X}_\mu \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_\mu = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_\mu \\ \boldsymbol{\gamma}_\mu \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\mu &= \mathbf{Y}_\mu \boldsymbol{\beta}_\mu + \mathbf{X}_\mu \boldsymbol{\gamma}_\mu + \mathbf{u}_\mu \\ &= \mathbf{Z}_\mu \boldsymbol{\delta}_\mu + \mathbf{u}_\mu \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklindedir.

Burada,

$\mathbf{y}_\mu$: $N \times 1$ boyutlu katsayısı bir olan içsel değişken gözlemleri vektörü,

$\mathbf{Y_\mu}$: $N\times(G_* -1)$ boyutlu denklemin sağ tarafındaki içsel değişken gözlemleri matrisi,

$\mathbf{X_\mu}$: $N\times K_0$ boyutlu içerilen önceden belirlenmiş değişken gözlemleri matrisi,

$\mathbf{u_\mu}$: $N\times 1$ boyutlu μ . denklemin yapısal hata terimi vektörü,

$\boldsymbol{\beta_\mu}$: $(G_* -1)\times 1$ boyutlu Y_μ 'nın katsayı vektörü,

$\boldsymbol{\gamma_\mu}$: $K_0\times 1$ boyutlu X_μ 'nın katsayı vektörü

dür.

$\mathbf{X}$, araç değişkenlerin (önceden belirlenmiş değişkenlerin) içerildiği $N\times\Lambda$ boyutlu bir matris olsun. $\mathbf{X}$ matrisinin rankının Λ olduğunu varsayalım. Amaç, $\boldsymbol{\delta_\mu}$ parametre vektörünü tahmin etmektir ve bunun için modelin bütün denklemlerinin belirlenebilir olduğu varsayılır. Bu varsayım,

$$\Lambda \geq n_\mu = (G_* -1)+K_0 \quad , \qquad \mu = 1,\ldots,G \tag{3.5}$$

eşitsizliğini gerektirir.

Burada n_μ, μ . denklemde tahmin edilen toplam parametre sayısıdır.

3AEKK yönteminin ilk iki aşamasında modelin her bir denklemine 2AEKK yöntemi uygulanır.

(3.4) nolu μ . yapısal denklem, $\mathbf{X}$ matrisinin transpozu $\mathbf{X'}$ ile soldan çarpıldığında

$$\mathbf{X'y_\mu} = \mathbf{X'Z_\mu}\boldsymbol{\delta_\mu} + \mathbf{X'u_\mu} \tag{3.6}$$

elde edilir.

Elde edilen sistem, n_μ tane parametre ve sıfır ortalamalı bir hata vektörü $(\mathbf{X'u_\mu})$ içeren, Λ denklemden oluşan bir sistemdir.

Özel olarak;

$\Lambda = n_\mu$ durumunda (tam belirlenme) $\boldsymbol{\delta}_\mu$ tahmini,

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_\mu = (\mathbf{Z}'_\mu \mathbf{X}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_\mu)^{-1}\mathbf{Z}'_\mu \mathbf{X}\mathbf{X}'\mathbf{y}_\mu \tag{3.7}$$

olarak bulunur (Zellner ve Theil, 1962, s. 56).

Daha olağan bir durum, $\Lambda > n_\mu$ (aşırı belirlenme) iken aynı şekilde (3.6) nolu denklem kullanılır. Önceden belirlenmiş değişkenlerin hepsinin sabit değişkenler olduğu varsayılırsa, $\mathbf{X}'\mathbf{u}_\mu$ hata vektörünün kovaryans matrisi,

$$V(\mathbf{X}'\mathbf{u}_\mu) = E(\mathbf{X}'\mathbf{u}_\mu\mathbf{u}'_\mu\mathbf{X}) = \sigma_{\mu\mu}\mathbf{X}'\mathbf{X} \tag{3.8}$$

şeklindedir.

$\sigma_{\mu\mu}$, μ. yapısal denklemin hatasının varyansıdır.

(3.6) nolu eşitliğe GEKK'in Aitken metodu uygulandığında 2AEKK parametre tahmininin elde edildiği,

$$\mathbf{Z}'_\mu\mathbf{X}(\sigma_{\mu\mu}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_\mu = \mathbf{Z}'_\mu\mathbf{X}(\sigma_{\mu\mu}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_\mu\boldsymbol{\delta}_\mu \tag{3.9}$$

eşitlik bulunur.

(3.9) nolu eşitlikten, 2AEKK parametre tahmini,

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_\mu = \left[\mathbf{Z}'_\mu\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_\mu\right]^{-1}\mathbf{Z}'_\mu\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_\mu \tag{3.10}$$

olarak bulunur. Eğer $\mathbf{X}'\mathbf{Z}_\mu$ tekil matris ise $\hat{\boldsymbol{\delta}}_\mu$, (3.7) nolu eşitliğe indirgenir.

$\hat{\boldsymbol{\delta}}_\mu$'nin kovaryans matrisi,

$$V(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = \sigma_{\mu\mu}\left[\mathbf{Z}'_\mu\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_\mu\right]^{-1} \tag{3.11}$$

şeklindedir.

3AEKK bütün bir sisteme uygulanır. Model, bütün denklemlerinin birleşimi şeklinde matris formunda,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{y_1} \\ \mathbf{X}'\mathbf{y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}'\mathbf{y_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{Z_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}'\mathbf{Z_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}'\mathbf{Z_G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta_1} \\ \boldsymbol{\delta_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta_G} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{u_1} \\ \mathbf{X}'\mathbf{u_2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}'\mathbf{u_G} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

olarak yazılır.

(3.12) nolu sistem, $n = \sum_{\mu=1}^{G} n_\mu$ parametre içeren ΛG denklemden oluşan bir sistemdir. $\boldsymbol{\delta}$ matrisinin bütün elemanlarını aynı anda tahmin etmek için (3.12) nolu sisteme GEKK uygulanır. Bunun için (3.12) nolu eşitlikte verilen hata vektörünün kovaryans matrisine ve bu matrisin tersine ihtiyaç duyulur.

Modelin μ. ve μ'. denklemlerinin hatalarının kovaryansı,

$$E(\mathbf{u_\mu}\mathbf{u'_{\mu'}}) = \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\mu'} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_{\mu\mu'} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_{\mu\mu'} \end{pmatrix} = \sigma_{\mu\mu'} \mathrm{I}_{N\times N}$$

şeklindedir.

$\sigma_{\mu\mu'}$: μ. ve μ'. denklemlerin yapısal hatalarının eş zamanlı kovaryansı,

$\mathrm{I}_{N\times N}$: $N\times N$ boyutlu birim matris

dir. (3.12) nolu eşitlikte yer alan hata vektörünün kovaryans matrisi,

$$V\begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{u_1} \\ \mathbf{X}'\mathbf{u_2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}'\mathbf{u_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \sigma_{12}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \ldots & \sigma_{1G}\mathbf{X}'\mathbf{X} \\ \sigma_{21}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \sigma_{22}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \ldots & \sigma_{2G}\mathbf{X}'\mathbf{X} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{G1}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \sigma_{G2}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \ldots & \sigma_{GG}\mathbf{X}'\mathbf{X} \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

şeklindedir.

(3.13) nolu eşitlikte yer alan hata vektörü kovaryans matrisinin tersi ise,

$$V^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{X'u_1}\\ \mathbf{X'u_2}\\ \mathbf{M}\\ \mathbf{X'u_G}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma^{11}\mathbf{(X'X)^{-1}} & \sigma^{12}\mathbf{(X'X)^{-1}} & \dots & \sigma^{1G}\mathbf{(X'X)^{-1}}\\ \sigma^{21}\mathbf{(X'X)^{-1}} & \sigma^{22}\mathbf{(X'X)^{-1}} & \dots & \sigma^{2G}\mathbf{(X'X)^{-1}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma^{G1}\mathbf{(X'X)^{-1}} & \sigma^{G2}\mathbf{(X'X)^{-1}} & \dots & \sigma^{GG}\mathbf{(X'X)^{-1}}\end{pmatrix} \tag{3.14}$$

olarak ifade edilir.

$\sigma^{\mu\mu'}$, yapısal hataların eş zamanlı kovaryans matrisinin tersinin bir elemanıdır.

$$\left[\sigma^{\mu\mu'}\right]=\left[\sigma_{\mu\mu'}\right]^{-1}$$

olarak da gösterilebilir.

(3.12) nolu sisteme GEKK uygulanması sonucu (3.9) nolu eşitliğin sol tarafı,

$$\begin{pmatrix}\sigma^{11}\mathbf{Z_1'X(X'X)}^{-1}\mathbf{X'y_1}+\dots+\sigma^{1G}\mathbf{Z_1'X(X'X)}^{-1}\mathbf{X'y_G}\\ \vdots\\ \sigma^{G1}\mathbf{Z_G'X(X'X)}^{-1}\mathbf{X'y_1}+\dots+\sigma^{GG}\mathbf{Z_G'X(X'X)}^{-1}\mathbf{X'y_G}\end{pmatrix} \tag{3.15}$$

ile yer değiştirir.

Ayrıca, $n_\mu \times n_\mu$ boyutlu matris olan (3.9) nolu eşitliğin sağ tarafı ise $n\times n$ boyutlu

$$\begin{pmatrix}\sigma^{11}\mathbf{Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_1} & \cdots & \sigma^{1G}\mathbf{Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_G}\\ \vdots & & \vdots\\ \sigma^{G1}\mathbf{Z_G'X(X'X)^{-1}X'Z_1} & \cdots & \sigma^{GG}\mathbf{Z_G'X(X'X)^{-1}X'Z_G}\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

ile yer değiştirir.

(3.15) ve (3.16) nolu matrislerde, σ 'lar yerine onların 2AEKK yöntemi ile elde edilen tahminleri,

$$\hat{\sigma}_{\mu\mu'} = s_{\mu\mu'} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\mu}}\hat{\mathbf{u}}'_{\boldsymbol{\mu}'}}{N - n_{\mu}}$$

yazılır. Böylece 3AEKK ile elde edilen parametre tahmini,

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \begin{pmatrix} s^{11}\mathbf{Z}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_1 & \cdots & s^{1G}\mathbf{Z}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_G \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{G1}\mathbf{Z}_G'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_1 & \cdots & s^{GG}\mathbf{Z}_G'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_G \end{pmatrix}^{-1}_{(n\times n)}$$

$$\times \begin{pmatrix} \sum s^{1\mu}\mathbf{Z}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_{\boldsymbol{\mu}} \\ \vdots \\ \sum s^{G\mu}\mathbf{Z}_G'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix}_{(G\times 1)}$$

olarak bulunur. $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ tahmininde hata kovaryanslarının tersi kullanılarak hataların eş zamanlı ilişkili durumu, eş zamanlı ilişkisiz hale dönüştürülmüş olur.

$\hat{\boldsymbol{\delta}}$ ’nın kovaryans matrisi,

$$V(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = \begin{pmatrix} s^{11}\mathbf{Z}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_1 & \cdots & s^{1G}\mathbf{Z}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_G \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{G1}\mathbf{Z}_G'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_1 & \cdots & s^{GG}\mathbf{Z}_G'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_G \end{pmatrix}^{-1}$$

şeklinde ifade edilir (Zellner ve Theil, 1962).

3.1.3. Görünürde İlişkisiz Regresyon Tahmincisi

Modelin denklemlerinin hata terimleri arasında bir ilişki varsa bu tür regresyon denklemlerinden oluşan model görünürde ilişkisiz regresyon (GİR) modeli olarak adlandırılır (Aksakal ve Alicigil Çilan, 2015, s. 242). GİR tahmincisi, ilk olarak 1962 yılında Arnold Zellner tarafından önerilmiştir. GİR yönteminin temeli GEKK yöntemine dayanır. 3AEKK’nın üçüncü aşamasında GEKK yöntemi uygulanarak elde edilen parametre tahminleri, GİR yöntemi ile elde edilen parametre tahminleriyle aynıdır. GİR yöntemiyle elde edilen tahminler, EKK‘in denklem denklem uygulanmasıyla elde edilen tahminlerden asimptotik olarak daha etkindir. Bu etkinlik kazancı, GİR modelini meydana getiren farklı denklemlerin hata terimlerinin yüksek derecede ilişkili olduğu ve farklı denklemlerdeki bağımsız değişkenler arasında yüksek derecede ilişki olmadığı durumlarda oldukça fazla olabilir (Zellner, 1962, s. 348).

GİR modeli, G denklemden oluşan bir model olarak varsayılsın. N gözlemden oluşan modelin i. denklemi,

$$\mathbf{Y_i} = \mathbf{X_i}\boldsymbol{\beta}_\mathbf{i} + \mathbf{u_i} \quad , \qquad i = 1, 2, ..., G \qquad (3.17)$$

olarak yazılır. Burada,

$\mathbf{Y_i}$: $N \times 1$ boyutlu vektör,

$\mathbf{X_i}$: $N \times K_i$ boyutlu matris,

$\boldsymbol{\beta}_\mathbf{i}$: $K_i \times 1$ boyutlu vektör,

$\mathbf{u_i}$: $N \times 1$ boyutlu vektör

dür.

Modelin kısaltılmış hali matris formunda,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \qquad (3.18)$$

şeklindedir. (3.18) nolu matris formun açık hali,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y_1} \\ \mathbf{Y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{Y_G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X_G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_\mathbf{1} \\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{G} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} \\ \mathbf{u_2} \\ \vdots \\ \mathbf{u_G} \end{bmatrix} \qquad (3.19)$$

şeklindedir. (3.18) nolu matris formda,

$\mathbf{Y}$: $GN \times 1$ boyutlu vektör,

$\mathbf{X}$: $GN \times \left(\sum_{i=1}^{G} K_i\right)$ boyutlu matris,

$\boldsymbol{\beta}$: $\left(\sum_{i=1}^{G} K_i\right) \times 1$ boyutlu vektör,

$\mathbf{u}$: $GN \times 1$ boyutlu vektör

dür.

GİR'un varsayımlarına göre, modelin denklemleri arasında otokorelasyon yoktur, fakat çapraz denklem ilişkisi mevcuttur.

Modelin $i.$ ve $j.$ denklemlerine ait hata terimlerinin kovaryans matrisi,

$$E(\mathbf{u_i u_j'}) = \begin{bmatrix} \sigma_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{ij} \end{bmatrix} = \sigma_{ij}\mathbf{I_{N\times N}} \tag{3.20}$$

şeklindedir.

(3.20) nolu kovaryans matrisi tüm model için matris formunda genelleştirildiğinde,

$$\mathbf{\Omega} = E(\mathbf{uu'}) = \begin{bmatrix} E(\mathbf{u_1 u_1'}) & E(\mathbf{u_1 u_2'}) & \cdots & E(\mathbf{u_1 u_G'}) \\ E(\mathbf{u_2 u_1'}) & E(\mathbf{u_2 u_2'}) & \cdots & E(\mathbf{u_2 u_G'}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E(\mathbf{u_G u_1'}) & E(\mathbf{u_G u_2'}) & \cdots & E(\mathbf{u_G u_G'}) \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.20) nolu eşitlik (3.21) nolu matriste uyguladığında,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\mathbf{I} & \sigma_{12}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{1G}\mathbf{I} \\ \sigma_{21}\mathbf{I} & \sigma_{22}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{2G}\mathbf{I} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{G1}\mathbf{I} & \sigma_{G2}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{GG}\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2G} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \cdots & \sigma_{GG} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}$$

$$= \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I}$$

elde edilir. $\mathbf{\Omega}$ kovaryans matrisinin tersi,

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^{11}\mathbf{I} & \sigma^{12}\mathbf{I} & \cdots & \sigma^{1G}\mathbf{I} \\ \sigma^{21}\mathbf{I} & \sigma^{22}\mathbf{I} & \cdots & \sigma^{2G}\mathbf{I} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma^{G1}\mathbf{I} & \sigma^{G2}\mathbf{I} & \cdots & \sigma^{GG}\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}$$

olarak bulunur. Burada $\otimes$ Kronecker çarpanıdır.

$\mathbf{\Omega}$ matrisi hata kovaryanslarıyla ilgili bütün bilgiyi içerir. (3.18) nolu modelin en etkin tahmini modele GEKK uygulanarak elde edilir. (3.18) nolu modele GEKK uygulandığında $\boldsymbol{\beta}$ tahmini,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{Y}) \qquad (3.22)$$

olarak elde edilir. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ’nın açık hali,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{11}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \sigma^{12}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 & \cdots & \sigma^{1G}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_G \\ \sigma^{21}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \sigma^{22}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 & \cdots & \sigma^{2G}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_G \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma^{G1}\mathbf{X}_G'\mathbf{X}_1 & \sigma^{G2}\mathbf{X}_G'\mathbf{X}_2 & \cdots & \sigma^{GG}\mathbf{X}_G'\mathbf{X}_G \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{G} \sigma^{1i}\mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{G} \sigma^{Gi}\mathbf{X}_G'\mathbf{Y}_i \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ’nin kovaryans matrisi,

$$E\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\right] = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

ile bulunur. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ’nin kovaryans matrisinin açık hali,

$$V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{bmatrix} \sigma^{11}\mathbf{X_1'X_1} & \sigma^{12}\mathbf{X_1'X_2} & \cdots & \sigma^{1G}\mathbf{X_1'X_G} \\ \sigma^{21}\mathbf{X_2'X_1} & \sigma^{22}\mathbf{X_2'X_2} & \cdots & \sigma^{2G}\mathbf{X_2'X_G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma^{G1}\mathbf{X_G'X_1} & \sigma^{G2}\mathbf{X_G'X_2} & \cdots & \sigma^{GG}\mathbf{X_G'X_G} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$'de yer alan, $\boldsymbol{\Omega}$ matrisinin elemanları tahmin edilmek zorundadır. Bunun için modelin her bir denklemine EKK yöntemi uygulanarak elde edilen $\mathbf{\hat{u}_i}$ değerleri kullanılır. Böylece $\boldsymbol{\Omega}$ 'nın elemanları,

$$\hat{\sigma}_{ii} = \frac{\mathbf{\hat{u}_i\hat{u}_i'}}{N - K_i},$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\mathbf{\hat{u}_i\hat{u}_j'}}{\sqrt{(N-K_i)(N-K_j)}},$$

$$\mathbf{\hat{u}_i = Y_i - X_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_i}$$

ile bulunur.

(3.22) ile verilen $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tahmini, Aitken tahmincilerinin olağan bütün optimal özelliklerine sahiptir. Diğer bir ifadeyle, en iyi doğrusal yansız tahminci olarak elde edilmiştir. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, normallik varsayımının eklenmesiyle aynı zamanda bir en çok olabilirlik tahmincisidir. Eğer $i \neq j$ için $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = 0$ ise $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, tek bir denkleme uygulanan EKK ile elde edilen tahminle aynıdır. Ayrıca $X_1 = X_2 = ... = X_G$ iken farklı denklemlerdeki hata terimleri ilişkili $(\sigma_{ij} \neq 0)$ dahi olsa, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tek denkleme uygulanan EKK ile elde edilen tahminle aynı olur. Ancak farklı denklemlerdeki hata terimleri aralarında ilişki olduğu ve X_i' lerin hepsinin aynı olmadığı durumlarda, (3.22) ile verilen $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ tahmini, EKK ile elde edilen tahminden farklı olacaktır (Zellner, 1962, s. 351).

3.2. Yanlı Tahminciler

3.2.1. Ridge Tahmincisi

Ridge tahmincisi, regresyon analizinde karşılaşılan, regresyon katsayılarının EKK tahminlerinin büyük varyansa sahip olmalarına neden olan, çoklu iç ilişki sorunundan kurtulabilmek amacıyla geliştirilmiştir. Çoklu iç ilişki sorununu çözmek için önerilen en etkin yol, modeldeki değişkenleri çıkarmadan regresyon katsayılarını yanlı olarak tahmin etmektir. Çoklu iç ilişki sorunu olduğunda $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi tekil matris değildir. Hoerl ve Kennard ilk kez 1962 yılında $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisine, k negatif olmayan çok küçük bir sayı olmak üzere, $k\mathbf{I}$ sabitini ekleyerek,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \left[\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathrm{k}\mathbf{I}\right]^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad ; \quad k \geq 0 \qquad (3.23)$$

ile verilen ridge tahmin ediciyi tanımlamışlardır (Hoerl ve Kennard, 1970, s. 57).

(3.23) nolu eşitlikte verilen $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*}$ ridge tahmininin ortalama, varyans, yanlılık ve HKO'sı sırasıyla,

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta},$$

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*}) = \sigma^{2}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1},$$

$$Bias(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*}) = E(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*}) - \boldsymbol{\beta}$$

$$= -k(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\beta} \quad ,$$

$$HKO(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*}) = tr\left[Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*})\right] + \left[Bias(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*})\right]'\left[Bias(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*})\right]$$

$$= \sigma^{2} tr\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\right] + k^{2}\boldsymbol{\beta}'(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\beta}$$

$$= \sigma^{2}\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^{2}} + k^{2}\boldsymbol{\beta}'(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\beta}$$

ile bulunur (Örk, 2012, s. 17).

Hoerl ve Kennard (1970, s. 58), çoklu iç ilişki söz konusu olduğunda $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinde bir ya da daha fazla özdeğerin küçük olacağını ve bu nedenle $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ile $\boldsymbol{\beta}$ değerleri arasındaki uzaklığın yüksek olacağını belirtmişlerdir. Bu sorunun çözümü için ridge tahmin ediciyi önermişlerdir.

Ridge regresyonda k yanlılık parametresinin optimum seçimi için literatürde çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Çalışmada, Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975) tarafından önerilen,

$$\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\hat{\boldsymbol{\beta}}}$$

eşitliği kullanılmıştır (Huh ve Olkin, 1984, s. 4). Burada p parametre sayısı olmak üzere $\hat{\sigma}^2$, σ^2'nın EKK tahminidir.

Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975) simülasyon çalışması ile ridge tahmin edicisinin EKK tahmin edicisine göre daha küçük HKO değerine sahip olduğunu belirtmişlerdir.

3.2.2. Ağırlıklı Ridge Tahmincisi

GLM,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \qquad Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{V} = \boldsymbol{\Sigma}_1 \tag{3.24}$$

olarak tanımlansın. Burada $\mathbf{V}$, $n \times n$ boyutlu bilinen pozitif tanımlı bir matristir. $\mathbf{K}$, $n \times n$ tekil olmayan simetrik bir matris olmak üzere;

$$\mathbf{K}'\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{K} = \mathbf{V}$$

yazılabilir.

(3.24) nolu model $\mathbf{K}^{-1}$ ile soldan çarpıldığında,

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.25}$$

dönüştürülmüş modeli elde edilir. (3.25) nolu dönüştürülmüş model,

$$\mathbf{y}_* = \mathbf{X}_*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_*, \qquad E(\boldsymbol{\varepsilon}_*) = 0, \qquad Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_*) = \sigma^2\mathbf{I}_n \tag{3.26}$$

şeklinde yazılabilir.

$\mathbf{y}_* = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{y}$, $\mathbf{X}_* = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{X}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}_* = \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ dir (Montgomery et al., 2001; Trenkler, 1984). Hata terimi $\boldsymbol{\varepsilon}_*$, (3.26) nolu modelde EKK'in varsayımlarını sağladığı için, (3.26) nolu modele EKK uygulanabilir. $\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ matrisinin kötü-koşullu olması halinde, Trenkler (1984), potansiyel olarak daha güvenilir tahminler veren ridge tahmincisini bu modele uygulayarak ağırlıklı ridge (ARIDGE) tahminciyi önermiştir. (3.26) nolu dönüştürülmüş modelde ARIDGE tahminci,

$$\hat{\mathbf{b}}(k) = (\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_* + k\mathbf{I}_\mathbf{p})^{-1}\mathbf{X}_*'\mathbf{y}_* = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} + k\mathbf{I}_\mathbf{p})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

olarak tanımlanır. Trenkler (1984) uygun bir k seçildiğinde bu tahmin edicinin GEKK tahmin ediciden daha iyi olduğunu göstermiştir.

(2.1) ile verilen eşanlı denklem modelinde ARIDGE tahmincisini uygulamak için modelin dönüştürülmüş formu elde edilir.

Modelin hata terimi varyans-kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{uu}') &= \mathbf{\Sigma} \\ &= \mathbf{\Delta} \otimes \mathbf{I_N} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \cdots & \sigma_{GG} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\mathbf{I_N} & \sigma_{12}\mathbf{I_N} & \cdots & \sigma_{1G}\mathbf{I_N} \\ \sigma_{21}\mathbf{I_N} & \sigma_{22}\mathbf{I_N} & \cdots & \sigma_{2G}\mathbf{I_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{G1}\mathbf{I_N} & \sigma_{G2}\mathbf{I_N} & \cdots & \sigma_{GG}\mathbf{I_N} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir.

Modelin dönüştürülmüş formu,

$$(\boldsymbol{\Delta} \otimes \mathbf{I_N})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\boldsymbol{\Delta} \otimes \mathbf{I_N})^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}$$

$\mathbf{y}^* = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{y}$, $\mathbf{Z}^* = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Z}$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}$ olmak üzere,

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{Z}^*\boldsymbol{\delta} + \mathbf{u}^* \qquad (3.27)$$

olarak elde edilir. (3.27) ile verilen dönüştürülmüş modelin ARIDGE tahmincisi,

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}(k) = (\mathbf{Z}^{*\prime}\mathbf{Z}^* + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}^{*\prime}\mathbf{y}^*$$

$$= (\mathbf{Z}'\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{y}$$

$$= (\mathbf{Z}'\mathbf{A}\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{A}\mathbf{y}$$

$$= (\mathbf{Z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}$$

olarak elde edilir.

3.2.3. Genelleştirilmiş Maksimum Entropi Tahmincisi

Golan, Judge ve Miller (1996) tarafından önerilen GME, maksimum entropi (ME) prensibinden elde edilen bir modeldir. ME, tüm momentleri bilinmeyen bir olasılık dağılımının tahmin edilmesi problemidir. İktisatta artan sayıda uygulama alanı avantajı olan GME, özellikle doğrusal kötü koşullu (ill-conditioned) ve eksik-sunumlu problemlerin varlığında uygulanır.

Ekonometride GME, bir doğrusal modelin bilinmeyen elemanlarını (parametrelerini ve hatalarını) olasılık formunda yeniden parametreleştirerek ME kavramının genelleştirilmesidir. Bu yeniden parametreleştirmeyi modelledikten sonra parametre ve hataların olasılık dağılımlarını tahmin eder.

GME yönteminin esas avantajı, ME yöntemi sadece eksik-sunumlu inverse problemlerin çözümü için kullanılırken GME yönteminin hem eksik-sunumlu hem de kötü-koşullu inverse problemlerin çözümü için kullanılmasıdır (Akdeniz, Çabuk ve Güler, 2014).

Kötü-koşullu inverse problem,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \tag{3.28}$$

olarak tanımlansın. Burada,

$\mathbf{y}$: $T \times 1$ boyutlu gözlemlerin vektörü,

$\mathbf{X}$: $T \times K$ boyutlu veri matrisi,

$\boldsymbol{\beta}$: $K \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametrelerin vektörü

dür.

Bilinmeyen vektör $\boldsymbol{\beta}$ 'nın elemanlarının artık bilinmeyen olasılıkları temsil etmediğini varsayalım. Diğer bir ifadeyle β_k , $[0,1]$ aralığındaki değerleri almak zorunda değildir. Onun yerine herhangi bir pozitif veya negatif gerçek değerleri alabilir. Fakat Shannon (1948) ME fonksiyonunun elemanları olasılıklar olduğundan, yeni tanımlanan parametre $\boldsymbol{\beta}$, ME'yi kullanabilmek için olasılıklar cinsinden yazılmalıdır (Eruygur, 2006, s.65). Golan ve diğerleri (1996), $\boldsymbol{\beta}$ parametrelerini kompakt (tıkız) desteklerle birlikte kesikli rassal olasılık değişkenleri kullanarak yeniden parametrelendirmişlerdir. β_k 'nın destek değerleri z_{kM}, ilgili destek noktaları üzerindeki olasılıklar p_{km} olarak tanımlanırsa, k. parametre,

$$\beta_k = \sum_{m=1}^{M} z_{km} p_{km} \quad , \qquad M \geq 2$$

olarak tanımlanır. k. parametre için destek vektörü $\mathbf{z_k} = \left[z_{k1}, \ldots\ldots.., z_{kM} \right]'$ ve k. parametre ile ilgili destek noktaları üzerindeki olasılıkların vektörü $\mathbf{p_k} = \left[p_{k1}, \ldots\ldots.., p_{kM} \right]'$ ile gösterilir. Bilinmeyen parametre vektörü $\boldsymbol{\beta}$ yeniden parametrelendirmeyle,

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Zp} \tag{3.29}$$

olarak yazılır. Burada,

$\boldsymbol{\beta}$: $K \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametreler vektörü,

$\mathbf{Z}$: $K \times KM$ boyutlu kompakt destek matrisi,

$\mathbf{p}$: $KM \times 1$ boyutlu ağırlıklar vektörü

dür.

(3.29) nolu eşitliği matris notasyonu ile,

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}_{K\times 1}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1' & \mathbf{0} & . & . & . & . & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_2' & \mathbf{0} & . & . & . & . & . \\ . & \mathbf{0} & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & . & . & \mathbf{0} & \mathbf{z}_k' & \mathbf{0} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & . & \mathbf{0} & . & . & \mathbf{z}_K' \end{bmatrix}_{K\times KM}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{p}_K \end{bmatrix}_{KM\times 1}$$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Zp} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1' & \mathbf{0} & . & . & . & . & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_2' & \mathbf{0} & . & . & . & . & . \\ . & \mathbf{0} & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & . & . & \mathbf{0} & \mathbf{z}_k' & \mathbf{0} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & . & \mathbf{0} & . & . & \mathbf{z}_K' \end{bmatrix}_{K\times KM} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{p}_K \end{bmatrix}_{KM\times 1} \tag{3.30}$$

şeklinde gösterilebilir.

Bu formülasyonların bir sonucu olarak, yeniden parametrelendirilen kötü-koşullu inverse problem,

$$\mathbf{y = XZp} \tag{3.31}$$

olarak yazılır.

Kötü-koşullu inverse problem durumunda, hata vektörü $\mathbf{u}$, sistemdeki bir veya daha fazla rassal kaynaktan ortaya çıkabilir. Bu durumda model,

$$\mathbf{y = X\boldsymbol{\beta} + u} \tag{3.32}$$

olarak tanımlanır. Burada,

$\mathbf{y}$: $T \times 1$ boyutlu bağımlı değişken vektörü,

$\mathbf{X}$: $T \times K$ boyutlu bilinen matris,

$\boldsymbol{\beta}$: $K \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü,

$\mathbf{u}$: $T \times 1$ boyutlu rassal vektör

dür.

(3.32) nolu modelle ilgili amaç, eş zamanlı olarak parametre $\boldsymbol{\beta}$ ve bilinmeyen hata terimi $\mathbf{u}$'yu Bilgi Teorisinin (Jaynes, 1957b) terimlerini kullanarak bulmaktır. $\boldsymbol{\beta}$'yla benzer olarak, $\mathbf{u}$'nun $\boldsymbol{\beta}$ gibi bir rastgele değişken olduğu varsayılsın (Eruygur, 2006, s. 68).

Her bir hata için $J \geq 2$ destek noktaları kümesi tanımlanır. $\Pr[v_{t1} < u_t < v_{tJ}]$ keyfi olarak seçilen ve yeterince küçük olacak şekilde her u_t için v_{t1} ve v_{tJ} hata sınırlarını oluşturmak mümkündür (Golan ve diğerleri, 1996, s.87). u_t'nın destek değerleri v_{tj}, ilgili destek noktaları üzerindeki olasılıklar w_{tj} olmak üzere t. hata terimi,

$$u_t = \sum_{j=1}^{J} v_{tj} w_{tj} \quad , \quad J \geq 2$$

olarak tanımlanır. $\mathbf{v_t} = [v_{t1},........., v_{tJ}]'$ ve $\mathbf{w_t} = [w_{t1},........., w_{tJ}]'$ olmak üzere $\mathbf{v_t}$, $t.$hata için destek vektörünü, $\mathbf{w_t}$, $t.$ hata için destek noktaları üzerindeki olasılıkların vektörünü göstermektedir. $\mathbf{u}$ hata terimi destek noktaları vektörü ve olasılık vektörüyle,

$$\mathbf{u} = \mathbf{Vw} \tag{3.33}$$

olarak yeniden tanımlanır. Burada,

$\mathbf{u}$: $T \times 1$ boyutlu rastgele hatalar vektörü,

$\mathbf{V}$: $T \times TJ$ boyutlu destek noktaları matrisi,

$\mathbf{w}$: $TJ \times 1$ boyutlu bilinmeyen ağırlıklar vektörü

olmak üzere bilinmeyen hata vektörü matris notasyonu ile,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_t \\ . \\ . \\ u_T \end{bmatrix}_{T\times 1}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & . & . & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v}_2' & \mathbf{0} & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & \mathbf{0} & \mathbf{v_t}' & \mathbf{0} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & . & \mathbf{0} & . & . & \mathbf{v_T}' \end{bmatrix}_{T\times TJ}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w_1} \\ \mathbf{w_2} \\ . \\ . \\ \mathbf{w_t} \\ . \\ . \\ \mathbf{w_T} \end{bmatrix}_{TJ\times 1}$$

ve

$$\mathbf{u} = \mathbf{Vw} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & . & . & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v}_2' & \mathbf{0} & . & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & \mathbf{0} & \mathbf{v_t}' & \mathbf{0} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & . & . & \mathbf{0} & . & . & \mathbf{v_T}' \end{bmatrix}_{T\times TJ} \begin{bmatrix} \mathbf{w_1} \\ \mathbf{w_2} \\ . \\ . \\ \mathbf{w_t} \\ . \\ . \\ \mathbf{w_T} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

olarak ifade edilir.

Ayrıca Golan ve diğerleri (1996, s. 88) hata bileşenleri sınırlarının Pukelsheim (1994) tarafından önerilen üç sigma kuralı ile bulunmasını önermişlerdir. (3.32) ile verilen doğrusal model yeniden parametrelendirmeyle,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u} = \mathbf{XZp} + \mathbf{Vw} \tag{3.35}$$

şeklinde yazılır.

Yeniden parametrelendirilen model GME problemi olarak,

$$\max H(\mathbf{p},\mathbf{w}) = -\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} p_{km}\ln p_{km} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} w_{tj}\ln w_{tj} \tag{3.36}$$

şeklinde ifade edilir.

(3.36) ile verilen GME problemi için kısıtlar,

$$y_t = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} x_{tk} z_{km} p_{km} + \sum_{j=1}^{J} w_{tj} v_{tj} \quad , \quad t = 1,2,......,T \tag{3.37}$$

$$\sum_{m=1}^{M} p_{km} = 1 \quad , \quad k = 1,2,......,K \tag{3.38}$$

$$\sum_{j=1}^{J} w_{tj} = 1 \quad , \quad t = 1,2,......,T \tag{3.39}$$

olmak üzere Lagrange fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L = &-\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} p_{km}\ln p_{km} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} w_{tj}\ln w_{tj} \\ &+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t\left[y_t - \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} x_{tk} z_{km} p_{km} - \sum_{j=1}^{J} w_{tj} v_{tj}\right] \\ &+\sum_{k=1}^{K}\gamma_k\left[1-\sum_{m=1}^{M} p_{km}\right] + \sum_{t=1}^{T}\delta_t\left[1-\sum_{j=1}^{J} w_{tj}\right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

şeklindedir. (3.40) ile verilen Lagrange fonksiyonu için birinci sıra koşullar,

$$\frac{\partial L}{\partial p_{km}} = -\ln \hat{p}_{km} - 1 - \sum_{t=1}^{T} \hat{\lambda}_t z_{km} x_{tk} - \hat{\gamma}_k = 0 \quad , \quad k = 1,2,......,K \quad \text{ve} \quad m = 1,2,......,M$$

(3.41)

$$\frac{\partial L}{\partial w_{tj}} = -\ln \hat{w}_{tj} - 1 - \hat{\lambda}_t v_{tj} - \hat{\delta}_t = 0 \quad , \quad t = 1,2,......,T \text{ ve } j = 1,2,......,J \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = y_t - \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} x_{tk} z_{km} \hat{p}_{km} - \sum_{j=1}^{J} \hat{w}_{tj} v_{tj} = 0 \quad , \quad t = 1,2,......,T \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_k} = 1 - \sum_{m=1}^{M} \hat{p}_{km} = 0 \quad , \quad k = 1,2,......,K \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_t} = 1 - \sum_{j=1}^{J} \hat{w}_{tj} = 0 \quad , \quad j = 1,2,......,J \quad (3.45)$$

olarak yazılır.

(3.44) nolu ifadeden,

$$\sum_{m=1}^{M} \hat{p}_{km} = 1 \quad (3.46)$$

eşitliği elde edilir. (3.41) nolu ifadeden,

$$\ln \hat{p}_{km} = -1 - \hat{\gamma}_k - \sum_{t=1}^{T} \hat{\lambda}_t z_{km} x_{tk} \quad (3.47)$$

elde edilen eşitlik,

$$\hat{p}_{km} = \exp(-1 - \hat{\gamma}_k)\exp\left(-\sum_{t=1}^{T} \hat{\lambda}_t z_{km} x_{tk}\right) \quad (3.48)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitliğin ilk parçası için,

$$\exp(-1-\hat{\gamma}_k)=\frac{\sum_{m=1}^{M}\hat{p}_{km}}{\sum_{m=1}^{M}\exp\left(-\sum_{t=1}^{T}\hat{\lambda}_t z_{km}x_{tk}\right)} \tag{3.49}$$

yazıldığında (3.46) nolu eşitlikten,

$$\exp(-1-\hat{\gamma}_k)=\frac{1}{\sum_{m=1}^{M}\exp\left(-\sum_{t=1}^{T}\hat{\lambda}_t z_{km}x_{tk}\right)} \tag{3.50}$$

ifadesi elde edilir. (3.48) nolu eşitlikte (3.50) nolu ifade yerine yazıldığında,

$$\Omega_k^p(\hat{\lambda})=\sum_{m=1}^{M}\exp\left(-\sum_{t=1}^{T}\hat{\lambda}_t z_{km}x_{tk}\right) \tag{3.51}$$

olmak üzere,

$$\hat{p}_{km}=\frac{\exp\left(-\sum_{t=1}^{T}\hat{\lambda}_t z_{km}x_{tk}\right)}{\Omega_k^p(\hat{\lambda})} \tag{3.52}$$

GME tahmini elde edilir.

Benzer şekilde (3.45) nolu ifadeden,

$$\sum_{j=1}^{J}\hat{w}_{tj}=1 \tag{3.53}$$

elde edilir.

(3.42) nolu ifadeden,

$$\ln\hat{w}_{tj}=-1-\hat{\lambda}_t v_{tj}-\hat{\delta}_t \tag{3.54}$$

elde edilen eşitlik,

$$\hat{w}_{tj}=\exp(-1-\hat{\delta}_t)\exp(-\hat{\lambda}_t v_{tj}) \tag{3.55}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin ilk parçası için,

$$\exp(-1-\hat{\delta}_t) = \frac{\sum_{j=1}^{J} \hat{w}_{tj}}{\sum_{j=1}^{J} \exp(-\hat{\lambda}_t v_{tj})} \tag{3.56}$$

yazıldığında (3.53) nolu eşitlikten,

$$\exp(-1-\hat{\delta}_t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{J} \exp(-\hat{\lambda}_t v_{tj})} \tag{3.57}$$

ifadesi elde edilir. (3.55) nolu eşitlikte (3.57) nolu ifade yerine yazıldığında,

$$\Psi(\hat{\lambda}_t) = \sum_{j=1}^{J} \exp(-\hat{\lambda}_t v_{tj}) \tag{3.58}$$

olmak üzere,

$$\hat{w}_{tj} = \frac{\exp(-\hat{\lambda}_t v_{tj})}{\Psi(\hat{\lambda}_t)} \tag{3.59}$$

GME tahmini elde edilir. Elde edilen tahminler (3.30) ve (3.34) nolu eşitliklerde yerlerine yazıldığında,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{p}} \tag{3.60}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{w}} \tag{3.61}$$

GME tahminlerine ulaşılır.

Ağırlıklı GME (AGME) tahmincisi, (3.27) ile verilen dönüştürülmüş eşanlı denklem modeline GME uygulanarak elde edilir.

3.3. Hata Kare Ortalamalarının Tahmini için Bootstrap Yöntemi

Regresyon analizlerinde güvenilir tahmin sonuçları elde edebilmek için kullanılan örneklemin kitleyi iyi temsil etmesi gerekir. Bunun için çok sayıda ve büyük veri setlerinden oluşan örneklemlere ihtiyaç duyulur. Çoğu zaman, büyük veri setlerine ulaşmak mümkün değildir. Bu durumda, eldeki örneklemi yığın olarak varsayıp buradan belirli sayıda tekrarlı örnekleme yaparak ampirik bir örnekleme dağılımı oluşturan bootstrap yöntemi kullanılır. Buna göre, çoklu iç ilişkinin söz konusu olduğu durumlarda, daha kararlı tahmin sonuçları elde edebilmek için başvurduğumuz tahmincilerin HKO bazında karşılaştırılmasında bootstrap yöntemi kullanılabilir. Tahmincilerin HKO'nın bootstrap yöntemi ile tahmin edilmesinde aşağıdaki adımlar izlenir:

1. Adım : Var olan örneklemden $\tilde{\beta}$ tahmin edilir. Bu tahmin kullanılarak $\tilde{e}$ artık terimi elde edilir.
2. Adım : $\tilde{e}$ 'dan yerine koyarak n gözlemlik $\tilde{e}_j^*$ örneği seçilir. $\tilde{e}_j^*$, $\tilde{\beta}$, X matrisleri kullanılarak,

$$y_j^* = X\tilde{\beta} + \tilde{e}_j^*$$

   eşitliğinden $j-$nci tekrar için bağımlı değişkenin aldığı y_j^* değerleri üretilir.
3. Adım : Bootstrap ile üretilen y_j^* değerleri ve X matrisi kullanılarak β 'nın $j-$inci bootstrap tahmini $\tilde{\beta}_j^*$ hesaplanır. Bu işlem yeterince büyük sayıda tekrarlanarak $\tilde{\beta}$ 'nın ampirik örnekleme dağılımı oluşturulur.
4. Adım : $\tilde{\beta}$ 'nın ampirik örnekleme dağılımı kullanılarak, $\tilde{\beta}$ 'nın HKO'sı,

$$\widehat{mse}(\tilde{\beta}) = \text{trace}\left[\widehat{\text{cov}}(\tilde{\beta})\right] + \widehat{bias}(\tilde{\beta})'\widehat{bias}(\tilde{\beta})$$

olarak tahmin edilir.

Burada $\widehat{bias}(\tilde{\beta})$, yanlılığın bootstrap tahmini olup,

$$\widehat{bias}(\tilde{\beta}) = \hat{E}(\tilde{\beta}) - \hat{\beta}_{OLS}$$

ile hesaplanır. Ayrıca, yanlılığı tahmin etmek için bilinmeyen β parametresi yerine, β 'nın yansız tahmin edicisi olan $\hat{\beta}_{OLS}$ kullanılır. $\hat{E}(\tilde{\beta})$, bootstrap ile elde edilen ampirik dağılımın ortalamasıdır. $\widehat{\text{cov}}(\tilde{\beta})$ ise dağılımın varyans-kovaryans matrisidir ve

$$\widehat{\text{cov}}(\tilde{\beta}) = \hat{E}\left\{\left[\tilde{\beta} - \hat{E}(\tilde{\beta})\right]\left[\tilde{\beta} - \hat{E}(\tilde{\beta})\right]'\right\}$$

ile hesaplanır (Akdeniz, Çabuk ve Güler, 2014).

Çalışmada bootstrap tekrar sayısı 400 olarak alınmıştır. Yukarıdaki adımlar sırasıyla uygulanarak 2AEKK, 3AEKK, ridge ve GME tahmincilerin HKO'ı bootstrap yöntemi ile tahmin edilmiştir.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu çalışmada tahmin edilecek olan model Klein'ın (1950) "Birleşik Devletler için İktisadi Dalgalanmalar" başlıklı çalışmasında formüle ettiği eşanlı denklem modelidir. 1921-1941 yıllarına ait verilerin kullanıldığı modelin denklemleri ve modelde yer alan değişkenler aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

1. Tüketim Denklemi

$$C_t = \beta_{11} + \gamma_{12} P_t + \beta_{12} P_{t-1} + \gamma_{13}(W_t^p + W_t^g) + \varepsilon_{1t} \quad (4.0)$$

2. Yatırım Denklemi

$$\mathrm{I}_t = \beta_{21} + \gamma_{22} P_t + \beta_{22} P_{t-1} + \beta_{23} K_{t-1} + \varepsilon_{2t} \quad (4.1)$$

3. Özel Sektör İşgücü Denklemi

$$W_t^p = \beta_{31} + \gamma_{32} X_t + \beta_{32} X_{t-1} + \beta_{33}(t-1931) + \varepsilon_{3t} \quad (4.2)$$

4. Özel Sektör Net Milli Gelir:

$$X_t = C_t + \mathrm{I}_t + G_t \quad (4.3)$$

5. Kar:

$$P_t = X_t - W_t^p - T_t \quad (4.4)$$

6. Sermaye Stok Değişimi (Yatırım):

$$K_t - K_{t-1} = \mathrm{I}_t \quad (4.5)$$

C_t = tüketim harcamaları

I_t = yatırım harcamaları

W_t^p = özel sektör ücret ödemeleri

W_t^g = kamu ücret ödemeleri

X_t = özel sektör net milli gelir

P_t = firma kârları

K_t = sermaye stoğu

G_t = kamu mal ve hizmet harcamaları

$(t-1931)$ = zaman

T_t = dolaylı vergiler

Modelin son üç denklemi tanım denklemleri olup tahminleri yapılmayacaktır. (2.2) nolu modelde yer alan $\mathbf{y_i}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\mathbf{x_i}$ ve $\mathbf{B}$ vektör ve matrislerinin elemanları çalışmada kullanılan modelin denklemlerinden,

$$\mathbf{y_i} = \begin{pmatrix} C_t & \mathrm{I}_t & W_t^p & X_t & P_t & K_t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_i} = \begin{pmatrix} 1 & W_t^p & G_t & T_t & (t-1931) & P_{t-1} & K_{t-1} & X_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\gamma_{13} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{32} & 1 & -1 & 0 \\ -\gamma_{12} & -\gamma_{22} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} -\beta_{11} & -\beta_{21} & -\beta_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_{13} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{12} & -\beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{23} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\beta_{32} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilirler. Modelin tahmin edilecek ilk üç denkleminin belirlenme şartları incelendiğinde üçünün de aşırı belirlenmiş denklemler olduğu görülür.

4.1. Modelin Tahmin Sonuçları ve Bulgular

4.1.1. Parametre Tahminleri

Klasik regresyon yöntemleri, herhangi bir iktisadi olayı açıklayan değişkenler arasındaki ilişkiyi gerçeğe en yakın şekilde ifade etmeye çalışır. Ancak belli varsayımlar altında değişkenler arasındaki ortalama ilişkiyi verir. Bazı varsayımlardan sapmalar söz konusu olduğunda EKK yöntemi ile elde edilen tahminler kararsız olur. Bu durumda başka tahmin edicilerin kullanılması gerekir. Bu çalışmada çoklu iç ilişki problemi söz konusuyken uygulanan tahminciler bu problemi çözme amacına yönelik olarak seçilmiştir. Çoklu iç ilişki durumunda parametre tahminleri arzu edilen nitelikte olmayacağından modelin çoklu iç ilişki sorununun olup olmadığı araştırılmalıdır.

Çalışmada ilk olarak modelin (4.0), (4.1) ve (4.2) ile verilen denklemlerinin indirgenmiş kalıpları elde edilmiştir. İçsel değişkenleri W_t^p, X_t, P_t olan indirgenmiş kalıp denklemleri 2AEKK'in ilk aşaması olan EKK ile tahmin edilmiştir. Tahmin edilen denklemlerin, determinasyon katsayılarının 1'e çok yakın çıkması çoklu iç ilişki şüphesini doğurmuştur. Determinasyon katsayılarının yüksek çıkması çoklu iç ilişkinin varlığını gösterse de yeterli bir koşul olmadığından, Belsley, Kuh ve Welsch (1980) tarafından önerilen koşul sayılarına bakılmıştır. Koşul sayısı kriterinin uygulanışı Bölüm II'de ayrıntılı olarak açıklanmıştır. İndirgenmiş kalıp denklemlerinde yer alan dışsal değişkenlerin oluşturduğu $\mathbf{X'X}$ matrisinden elde edilen koşul sayısı 13977,38 olarak bulunmuştur. Bu sonuç, koşul sayısı sınıflandırmasına göre modelde şiddetli çoklu iç ilişkinin olduğunu gösterir. Tablo 1, Tablo 2 ve Tablo 3'te yer alan koşul sayılarının aynı olmasının nedeni, modelin ilk üç denkleminin indirgenmiş kalıp denklemlerinin aynı dışsal değişkenleri içermesindendir.

Tablo 1

İndirgenmiş model tahminleri (Bağımlı Değişken: W_t^p)

	EKK	**Ridge** $\left(\hat{k}=0,013\right)$	**GME**
$\hat{\pi}_{11}$	43,436	11,738	43,215
$\hat{\pi}_{21}$	-0,444	1,908	-0,448
$\hat{\pi}_{31}$	-0,604	-0,701	-0,618
$\hat{\pi}_{41}$	0,866	0,889	0,861
$\hat{\pi}_{51}$	0,714	-0,013	0,716
$\hat{\pi}_{61}$	0,872	1,100	0,862
$\hat{\pi}_{71}$	-0,123	-0,011	-0,122
$\hat{\pi}_{81}$	0,095	-0,006	0,100
Koşul Sayısı: 13977,38			

Tablo 2

İndirgenmiş model tahminleri (Bağımlı Değişken: P_t)

	EKK	**Ridge** $\left(\hat{k}=0,013\right)$	**GME**
$\hat{\pi}_{12}$	93,820	25,524	92,313
$\hat{\pi}_{22}$	-0,523	4,542	-0,532
$\hat{\pi}_{32}$	-0,527	-0,737	-0,537
$\hat{\pi}_{42}$	1,305	1,355	1,302
$\hat{\pi}_{52}$	1,033	-0,533	1,034
$\hat{\pi}_{62}$	1,674	2,166	1,678
$\hat{\pi}_{72}$	-0,339	-0,099	-0,330
$\hat{\pi}_{82}$	0,117	-0,102	0,112
Koşul Sayısı: 13977,38			

Tablo 3

İndirgenmiş model tahminleri (Bağımlı Değişken: X_t)

	EKK	Ridge $\left(\hat{k}=0,013\right)$	GME
$\hat{\pi}_{13}$	50,384	12,312	50,910
$\hat{\pi}_{23}$	-0,080	2,742	-0,119
$\hat{\pi}_{33}$	-0,923	-1,039	-0,919
$\hat{\pi}_{43}$	0,439	0,467	0,440
$\hat{\pi}_{53}$	0,319	-0,553	0,331
$\hat{\pi}_{63}$	0,803	1,077	0,802
$\hat{\pi}_{73}$	-0,216	-0,082	-0,218
$\hat{\pi}_{83}$	0,022	-0,100	0,021
Koşul Sayısı: 13977,38			

Çoklu iç ilişki olması durumunda tercih edilen ridge ve GME yöntemleri modelin indirgenmiş kalıp ilk üç denklemine uygulanmış olup parametre tahmin sonuçları Tablo 1, Tablo 2 ve Tablo 3‘te verilmiştir. 2AEKK, 3AEKK, ridge ve GME tahminleri Gauss 10 programı kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca GME tahminlerinde kullanılan destek matrisleri Ekler kısmında verilmiştir. Ridge tahminleri bulunurken optimum k seçimi için Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975) tarafından önerilen eşitlik kullanılmıştır. Verilen parametre tahmin sonuçlarını incelendiğinde, EKK ve GME parametre tahminlerinin işaretlerinin aynı olduğu ve birbirine yakın değerler almış olduğu görülür. Bu, GME’de her bir destek vektörü kümesinin elemanlarının ortalamaları için EKK tahminlerinin kullanılmış olmasından kaynaklanmaktadır. Fakat GME’nin varyansı daha küçük olarak elde edilmiştir.

Modelin indirgenmiş kalıp denklemlerine 2AEKK’in birinci aşamasında uygulanan EKK yöntemi sonucu elde edilen $\hat{W}_t^p$, $\hat{X}_t$, $\hat{P}_t$ tahmin değerleri yapısal modelde, W_t^p, X_t , P_t yerine getirilerek araç değişken olarak kullanılmıştır. İndirgenmiş kalıp denklemlerinin koşul sayısı çoklu iç ilişki sorununun olduğunu gösteriyorsa, ikinci aşamada ele alınan yapısal denklemlerin sağ tarafında yer alan araç değişkenlerin ve dışsal değişkenlerin koşul sayılarının incelenmesi gerekir (Rhoads, 1991). Bunun nedeni, içsel değişkenlerin birinci aşamada hesaplanan tahminlerinin dışsal değişkenlerle, gerçek gözlemlere oranla daha şiddetli ilişki içerisinde olabilmelerinin söz konusu olmasıdır (Kritzer, 1976). Tablo 4, Tablo 5 ve Tablo 6'da yapısal modelin ilk üç denklemi için hesaplanan koşul sayıları verilmiştir. Bulunan koşul sayıları 100'den büyük olup Belsley, Kuh ve Welsch (1980) koşul sayısı sınıflandırmasına göre şiddetli çoklu iç ilişki olduğunu göstermektedir.

Tablo 4

Yapısal model tahminleri 1

$C_t = \beta_{11} + \gamma_{12} P_t + \beta_{12} P_{t-1} + \gamma_{13}(W_t^p + W_t^g) + \varepsilon_{1t}$

	2AEKK	3AEKK	Ridge $(\hat{k} = 0,013)$	ARIDGE	GME	AGME
$\hat{\beta}_{11}$	16,555	16,441	16,410	15,094	16,599	16,441
$\hat{\gamma}_{12}$	0,017	0,125	0,027	0,120	0,025	0,125
$\hat{\beta}_{12}$	0,216	0,163	0,210	0,152	0,224	0,163
$\hat{\gamma}_{13}$	0,810	0,790	0,812	0,828	0,802	0,790
Koşul Sayısı:	286,733	8041,169	286,314	7141,426	287,0793	7898,167

Tablo 5

Yapısal model tahminleri 2

$$\mathrm{I}_t = \beta_{21} + \gamma_{22} P_t + \beta_{22} P_{t-1} + \beta_{23} K_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

	2AEKK	**3AEKK**	**Ridge** $\left(\hat{k} = 0.0123\right)$	**ARIDGE**	**GME**	**AGME**
$\hat{\beta}_{21}$	20,278	28,178	15,078	10,717	20,379	28,178
$\hat{\gamma}_{22}$	0,150	-0,013	0,222	0,288	0,155	-0,013
$\hat{\beta}_{22}$	0,616	0,756	0,556	0,513	0,617	0,756
$\hat{\beta}_{23}$	-0,158	-0,195	-0,133	-0,113	-0,159	-0,195
Koşul Sayısı :	5941,147	8041,169	5615,112	7141,426	5961,989	7898,167

Tablo 6

Yapısal model tahminleri 3

$$W_t^{\,p} = \beta_{31} + \gamma_{32} X_t + \beta_{32} X_{t-1} + \beta_{33}(t - 1931) + \varepsilon_{3t}$$

	2AEKK	**3AEKK**	**Ridge** $\left(\hat{k} = 0.496\right)$	**ARIDGE**	**GME**	**AGME**
$\hat{\beta}_{31}$	1,500	1,797	0,784	1,912	1,525	1,797
$\hat{\gamma}_{32}$	0,439	0,400	0,452	0,392	0,442	0,400
$\hat{\beta}_{32}$	0,147	0,181	0,145	0,188	0,143	0,181
$\hat{\beta}_{33}$	0,130	0,150	0,120	0,154	0,130	0,150
Koşul Sayısı :	643,7839	8041,169	641,7237	7141,426	644,1369	7898,167

Tablo 4, Tablo 5 ve Tablo 6'da verilen, 2AEKK, 3AEKK, Ridge, ARIDGE, GME ve AGME tahmincileriyle elde edilen parametre tahminlerine bakıldığında 2AEKK ve GME tahmincileriyle elde edilen tahminlerin birbirine yakın değerler olduğu görülmektedir. Aynı şekilde 3AEKK ve AGME tahmincileriyle elde edilen sonuçların birbirine yakın değerler olduğu görülmektedir. 2AEKK, 3AEKK, Ridge, ARIDGE, GME ve AGME ile elde edilen parametre tahminlerine bakıldığında parametrelerin beklenen işaretleri aldığı görülmektedir. Yapısal model tahminlerinde elde edilen 3AEKK tahmin sonuçları ile GİR tahmin sonuçları aynıdır.

4.1.2. Hata Kare Ortalamaları

3.3. nolu bölümde HKO'nın bootstrap yöntemiyle nasıl tahmin edildiği ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Bu yöntem HKO ölçütüne göre hangi tahmincinin daha sağlıklı sonuçlar verdiğini bulmak açısından önemli sayılmaktadır. Bu çalışmada hem indirgenmiş model hem de yapısal model üzerinden kullanılan tahmin ediciler için HKO tahmini yapılmıştır. HKO tahminlerinde 3AEKK ile GİR tahmin sonuçları aynıdır. Sonuçlar, Tablo 7 ve Tablo 8 'de verilmiştir.

Tablo 7

İndirgenmiş Model için Hata Kare Ortalamaları

	Bağımlı	**Değişkenler**	
	W_t^p	X_t	P_t
2AEKK	706,490	2635,815	911,542
3AEKK	629,539	2838,728	977,003
Ridge	1721,467	7938,291	2369,110
GME	629,539	2838,728	977,003

Tablo 8

Yapısal Model için Hata Kare Ortalamaları

	Bağımlı	**Değişkenler**	
	C_t	I_t	W_t^p
2AEKK	1,937	95,783	1,498
3AEKK	1,822	50,647	1,545
Ridge	11,684	278,206	42,252
ARIDGE	9,030	308,403	3,721
GME	0,043	61,191	0,079
AGME	0,000	0,000	0,000

Tablo 7 incelendiğinde 3AEKK ve GME için HKO tahminleri aynı bulunmuştur. Tablo 8 ‘de GME ve AGME tahmincilerinin HKO’ ı diğer tahmincilere göre en küçük olarak elde edilmiştir. GME’nin üçüncü aşamasında, HKO tahmini yaklaşık sıfır olarak bulunmuştur. Buna göre, AGME tahmin edicinin en etkin tahmin edici olduğu söylenebilir.

BÖLÜM V

SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç ve Öneriler

Eşanlı denklem modellerinde parametre tahmini yaparken bir takım varsayımların sağlanması halinde EKK yöntemi uygulanır. Çoklu iç ilişki problemi olan bir eşanlı denklem modelinde EKK yönteminin kullanılmasıyla yüksek varyanslı ve kararsız tahminler elde edilir. Daha kararlı parametre tahminleri elde etmek, bu parametre tahminlerini kullanarak doğru politika yapmak isteyen araştırmacıların en önemli sorunlarından birisidir. Bu doğrultuda, çalışmada Klein'ın (1950) "Birleşik Devletler için İktisadi Dalgalanmalar" başlıklı çalışmasında formüle ettiği eşanlı denklem modeli kullanılmıştır. Modelin indirgenmiş form ve yapısal formundan elde edilen koşul sayılarına bakılarak modelde çoklu iç ilişki problemi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Çoklu iç ilişki sorunu olan bu eşanlı denklem modelinde daha kararlı tahminler elde edebilmek için 2AEKK, 3AEKK, Ridge ve GME yöntemleri kullanılmıştır. 2AEKK, 3AEKK, Ridge ve GME tahmincilerinin etkinliklerinin karşılaştırılması amacıyla HKO'ı bootstrap yöntemiyle hesaplanmıştır. Sonuçlar incelendiğinde HKO ölçütüne göre en etkin tahmincinin GME olduğuna karar verilmiştir.

Yanlı tahmincilerden ridge ve GME tahmincilerinin etkinlikleri kıyaslandığında GME tahmincinin daha küçük HKO değerine sahip olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, GME tahmincinin ridge tahminciden daha iyi olduğu söylenebilir.

Doğru politika yapmak isteyen araştırmacılara, çoklu iç ilişki sorunu olan eşanlı denklem modellerinde yanlı fakat daha kararlı tahminler veren GME tahmincisi önerilebilir.

KAYNAKÇA

Aitken, A. C. (1935). On least squares and linear combinations of observations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 55: 42-48.

Akdeniz, F. ve Çabuk, H. A. (2001). Ridge Regresyon Teorisinde 1970-2001 Arasındaki Gelişmeler. *V. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu*. Çukurova Üniversitesi, Adana.

Akdeniz, F. ve Çabuk, H. A. (2007). İç İlişki ve Genelleştirilmiş Maksimum Entropi Tahmin Edicileri. *İstatistik Araştırma Dergisi*, Vol. 5, No. 2, 1-19.

Akdeniz, F., Çabuk, H. A. ve Güler, H. (2014). Doğrusal Eşanlı Denklem Modellerinin Tahmininde Kullanılan Tahmincilerin Kötü Koşulluluk Durumunda HKO Bazında Performanslarının Özyetinim ile Karşılaştırılması. *15th International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics*. Suleyman Demirel University, Isparta.

Akdeniz, F., Çabuk, H. A. ve Güler, H. (2011b). Generalized Maximum Entropy Estimators: Applications to the Portland Cement Dataset. *The Open Statistics & Probability Journal*, Vol. 3, 13-20.

Aricigil Çilan Ç., Aksakal, M. (2015). Türkiye'ye Yönelik Turizm Talebinin Görünürde İlişkisiz Regresyon Modelleri ile İncelenmesi. *Internationa Journal of Economic and Administrative Studies*, Cilt. 14, 236-256.

Belsley, D. A., Kuh, E., & Welsch, R. E. (1980). *Regression Diagnostics*, New York, Wiley.

Chernic, M. R. **(**1999). *Bootstrap Methods: A Guide for Practitioners and Researchers*, John Wiley and Sons, Canada.

Dufour, J. M. (2008, April). *Seemingly Unrelated Regressions*. McGill University.

Eruygur, H. O. (2006). *Impacts of Policy Changes on Turkish Agriculture*: *An Optimization Model with Maximum Entropy*. Yayınlanmamış doktora tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Farrar, D. E., & Glauber, R. R. (1967). Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited. *The Review of Economics and Statistics*, 49(1), 101-104.

Golan, A., Judge, G., & Miller, D. (1996). *Maksimum Entropy Econometrics: Robust Estimation with Limited Data*. John Wiley & Sons, New York, USA.

Gujarati, D. N. (2004). *Temel Ekonometri* (5. Basımdan Çeviri), McGraw Hill, New York.

Hoerl, A. E., & Kennard, R. W. (1970). Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. *Technometrics*, Vol. 12, No. 1, 55-67.

Hoerl, A. E., Kennard, R. W., & Baldwin, K. F. (1975). Ridge Regression: Some Simulation. *Communication in Statistics*, 4, 105-123.

Huh, M., & Olkin, I. (1984, April). Asymptotic Aspects of Ridge Regression. *Technical Report*, No. 196, 1-18.

Jaynes, E. T. (1957a). Information Theory and Statistical Mechanics. *Physics Review*, Vol. 106, No. 4, 620-630.

Jaynes, E. T. (1957b). Information Theory and Statistical Mechanics II. *Physics Review*, Vol. 108, No. 2, 171-190.

Klein, L. R. (1950). *Economic Fluctuations in the United States*, 1921-1941, New York, John Wiley and Son, 135.

Koutsoyiannis, A. (1989). *Ekonometri Kuramı*, Ottowa University, Ontario.

Kritzer, H. M. (1976). Problems in the Use of Two-Stage Least Squares: Standardization of Coefficients and Multicollinearity. *Political Methodology 3*, 71-93.

Montgomery, D. C., Peck, E. A., Vining, G. G. (2001). Introduction to Linear Regression Analysis. Third Edition. New York: John Wiley & Sons.

Örk, S. (2012). Çoklu İç İlişki Problemi Olan Doğrusal Regresyon Modelinin Genelleştirilmiş Maksimum Entropi Tahmini. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.

Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (1991). Third Edition, Econometric Models & Economic Forecasts. University of California, Berkeley.

Pukelsheim, F. (1994). The Three Sigma Rule. *The American Statistician*, Vol. 48, No. 2, 88-91.

Rao, C. R., & Toutenburg, H. (1999). *Linear Models: Least Squares and Alternatives*. Springer, Second Edition, New York.

Rhoads, B. L. (1991). Multicollinearity and Parameter Estimation in Simultaneous-Equation Models of Fluvial Systems. *Geographical Analysis*, Vol. 23, No. 4.

Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal*, Vol. 27, No. 3, 379-423.

Smeekes, S. (2009). *Bootstrapping nonstationary time series* (Doctoral Thesis), Maastricht University.
Tarı, R. (2010). Ekonometri. *Genişletilmiş 6. Baskı*, Umuttepe Yayınları, Kocaeli.

Theil, H. (1967). *Economics and Information Theory*. North Holland: Amsterdam.

Trenkler, G. (1984). On the performance of biased estimators in the linear regression model with correlated or heteroscedastic errors. *Journal of Econometrics* 25:179-190.

Wu, X. (2009). A Weighted Generalized Maximum Entopy Estimator with a Data-driven Weight. *Entropy*, Vol. 11, 917-930.

Zellner, A. (1962). An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 57, No. 298, 348-368.

Zellner, A., & Theil, H. (1962). Three-Stage Least Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations. *Econometrica*, Vol. 30, No. 1 , 54-78.

EKLER

Ek 1. İndirgenmiş Model Parametre Destek Vektörleri (W_t^p)

Katsayı	Parametre Desteği
$\hat{\pi}_{11}$	z1 = { -32.8, 5.3, 43.4, 81.6, 119.7 }
$\hat{\pi}_{21}$	z2 = {-6.6, -3.5, -0.4, 2.6, 5.7}
$\hat{\pi}_{31}$	z3 = {-1.7, -1.1, -0.6, -0.1, 0.4}
$\hat{\pi}_{41}$	z4 = {-0.1, 0.4, 0.9, 1.3, 1.8}
$\hat{\pi}_{51}$	z5 = {-1.2, -0.2, 0.7, 1.7, 2.6}
$\hat{\pi}_{61}$	z6 = {-0.4, 0.2, 0.9, 1.5, 2.1}
$\hat{\pi}_{71}$	z7 = {-0.4, -0.3, -0.1, 0, 0.2}
$\hat{\pi}_{81}$	z8 = {-0.6, -0.2, 0.1, 0.4, 0.8}

Ek 2. İndirgenmiş Model Parametre Destek Vektörleri (X_t)

Katsayı	Parametre Desteği
$\hat{\pi}_{12}$	z1 = {-44.5, 2.9, 50.4, 97.8, 145.3}
$\hat{\pi}_{22}$	z2 = {-7.7, -3.9, -0.1, 3.7, 7.5}
$\hat{\pi}_{32}$	z3 = {-2.2, -1.6, -0.9, -0.3, 0.4}
$\hat{\pi}_{42}$	z4 = {-0.7, -0.1, 0.4, 1, 1.6}
$\hat{\pi}_{52}$	z5 = {-2, -0.8, 0.3, 1.5, 2.7}
$\hat{\pi}_{62}$	z6 = {-0.8, 0, 0.8, 1.6, 2.4}
$\hat{\pi}_{72}$	z7 = {-0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.1}
$\hat{\pi}_{82}$	z8 = {-0.8, -0.4, 0, 0.4, 0.9}

Ek 3. İndirgenmiş Model Parametre Destek Vektörleri (P_t)

Katsayı	Parametre Desteği
$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{13}$	z1 = {-70.2, 11.8, 93.8, 175.8, 257.8}
$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{23}$	z2 = {-13.7, -7.1, -0.5, 6, 12.6}
$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{33}$	z3 = {-2.8, -1.7, -0.5, 0.6, 1.7}
$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{43}$	z4 = {-0.7, 0.3, 1.3, 2.3, 3.3}
$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{53}$	z5 = {-3, -1, 1, 3.1, 5.1}
$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{63}$	z6 = {-1, 0.3, 1.7, 3, 4.4}
$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{73}$	z7 = {-1, -0.6, -0.3, 0, 0.3}
$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{83}$	z8 = {-1.3, -0.6, 0.1, 0.8, 1.6}

Ek 4. Yapısal Model Parametre Destek Vektörleri 1

$$C_t = \beta_{11} + \gamma_{12} P_t + \beta_{12} P_{t-1} + \gamma_{13}(W_t^p + W_t^g) + \varepsilon_{1t}$$

Katsayı	Parametre Desteği
$\hat{\beta}_{11}$	z1 = {12.6, 14.6, 16.6, 18.5, 20.5}
$\hat{\gamma}_{12}$	z2 = {-0.3, -0.2, 0, 0.2, 0.4}
$\hat{\beta}_{12}$	z3 = {-0.1, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5}
$\hat{\gamma}_{13}$	z4 = {0.7, 0.7, 0.8, 0.9, 0.9}

Ek 5. Yapısal Model Parametre Destek Vektörleri 2 :

$$\mathrm{I}_t = \beta_{21} + \gamma_{22} P_t + \beta_{22} P_{t-1} + \beta_{23} K_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Katsayı	Parametre Desteği
$\hat{\beta}_{21}$	z1 = {-2.3, 9, 20.3, 31.6, 42.9}
$\hat{\gamma}_{22}$	z2 = {-0.4, -0.1, 0.2, 0.4, 0.7}
$\hat{\beta}_{22}$	z3 = {0.1, 0.4, 0.6, 0.9, 1.1}
$\hat{\beta}_{23}$	z4 = {-0.3, -0.2, -0.2, -0.1, 0}

Ek 6. Yapısal Model Parametre Destek Vektörleri 3 :

$$W_t^p = \beta_{31} + \gamma_{32} X_t + \beta_{32} X_{t-1} + \beta_{33}(t - 1931) + \varepsilon_{3t}$$

Katsayı	Parametre Desteği
$\hat{\beta}_{31}$	z1 = {-1.9, -0.2, 1.5, 3.2, 4.9}
$\hat{\gamma}_{32}$	z2 = {0.33, 0.39, 0.44, 0.49, 0.55}
$\hat{\beta}_{32}$	z3 = {0, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3}
$\hat{\beta}_{33}$	z4 = {0.04, 0.09, 0.13, 0.17, 0.22}

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fulya GEZER

Doğum Yeri : Adana

Doğum Tarihi : 19. 08. 1986

Medeni Hali : Bekar

Adres : Çukurova Üniversitesi İ.İ.B.F. Dekanlık Binası, Ekonometri Bölümü Oda: 303, Balcalı, Sarıçam/ADANA

E-mail : fgezer@cu.edu.tr

EĞİTİM DURUMU

Lise : 2000-2004, Danişment Gazi Anadolu Lisesi, Adana

Lisans : 2005-2009, Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Adana

Yüksek Lisans : 2012-2016, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı, Adana

MESLEKİ DENEYİM

2013-2015 : Araştırma Görevlisi, Gazi Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, Ekonometri Anabilim Dalı, Ankara

2015- : Araştırma Görevlisi (35. Madde), Çukurova Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, Ekonometri Anabilim Dalı, Adana

YABANCI DİL

İngilizce : İyi düzeyde