

**ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR
ÜÇKÖŞEGENCİL DİZEY GÖSTERİLİMİ İLE
GÖRÜNTÜ İŞLEME UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Orkun KUŞ

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

MAYIS 2015

**ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR
ÜÇKÖŞEGENCİL DİZEY GÖSTERİLİMİ İLE
GÖRÜNTÜ İŞLEME UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Orkun KUŞ
(702121017)**

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

MAYIS 2015

İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702121017 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Orkun KUŞ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "**ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞE-GENCİL DİZEY GÖSTERİLİMİ İLE GÖRÜNTÜ İŞLEME UYGULAMALARI**" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Metin DEMİRALP**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Eş Danışman : **Yrd. Doç. Dr. Burecu TUNGA**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. F. Aylin SUNGUR**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Asst. Prof. Ahmet KIRIŞ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Asst. Prof. Devrim ÜNAY
Bahçeşehir Üniversitesi

Teslim Tarihi : **4 Mayıs 2015**
Savunma Tarihi : **27 Mayıs 2015**

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimin son basamağı olan bu tezimde; çalışmalarımın her basamağında benden yardımlarını esirgemeyen, bana yol gösteren ve zor şartlarda danışmanlık görevini üstlenmiş olan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Burcu TUNGA'ya minnettarım.

İTÜ BEBBYT (Bilişim Enstitüsü Bilgisayar Bilimleri ve Yöntemleri Topluluğu) grubu ile bilime her geçen gün yeni bir katkı sağlayan İTÜ Bilişim Enstitüsü öğretim üyesi, değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e de teşekkürlerimi iletmekteyim.

Çalışmalarım esnasında anlatımlarımdan yararlandığım, bana yardımcı olmakta tereddüt etmeyen İTÜ Bilişim Enstitüsü araştırma görevlisi Evrim KORKMAZ ÖZAY'a, danışman konusunda bana yol gösteren İTÜ Bilişim Enstitüsü değerli öğretim üyesi Yrd. Doç. Dr. Enver ÖZDEMİR'e ve elbette yapmış olduğu çalışma ve projelerle adını bilim dünyasında sıkça duymayı umduğum, azim ve kararlılık konusunda örnek aldığım değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ufuk Utku TURUNÇOĞLU'na en derin saygı ve minnet duygularımı sunmaktayım.

Tez aşamasındaki kaynak araştırmalarımın katkı sağlamış olan sevgili arkadaşlarım Alparslan PEHLİVAN ve Gürkan YERLİKAYAOĞLU'na özel olarak teşekkür etmekteyim.

Elbette, bugünlere gelmemde emekleri yadsınamaz olan aileme, sevdiklerime, değerli arkadaşlarıma, değerli öğretmenlerim ve üzerimde emeği olan herkese, arkadaşım Tülay KAYNAR'a saygı ve sevgilerimi sunarım.

Mayıs 2015

Orkun KUŞ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1 Tekil Değer Ayırışımı	3
2.2 Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi	4
2.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim Yöntemi.....	8
2.4 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi.	10
3. GÖRÜNTÜ VE GÖRÜNTÜ SIKIŞTIRMA UYGULAMALARI	17
3.1 Görüntü ve Matris Gösterilim	17
3.2 Görüntü Sıkıştırma	20
3.2.1 Karesel Ortalama Hata	21
3.2.2 Doruk Sinyal Gürültü Oranı	22
3.2.3 Tekil Değer Ayırışımı Uygulamaları	22
3.2.4 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi Uygulamaları.....	26
4. GÖRÜNTÜ ONARIMI	31
4.1 Gürültü Modelleri.....	32
4.1.1 Gaussian Gürültüsü	32
4.1.2 Tuz-Biber Gürültüsü.....	33
4.2 Görüntü Onarımı için Tekil Değer Ayırışımı Uygulamaları.....	34
4.3 Görüntü Onarımı için Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşe- gencil Dizey Gösterilimi Uygulamaları.....	39
4.4 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösteril- imi ve Tekil Değer Ayırışımı Yöntemleri ile Görüntü Onarımı Karşılaştırması	43
4.5 Süzgeçleme ile Tekil Değer Ayırışımı ve Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi Yöntemlerinde Görüntü Onarımı	45
4.5.1 Tekil Değer Ayırışımı Yöntemi ve Süzgeçleme Uygulaması.....	46
4.5.2 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi ve Süzgeçleme Uygulaması.....	47
4.6 Görüntü Onarımında Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşe- gencil Dizey Gösterilimi'ndeki Başlangıç Öngörülerinin Etkisi.....	49

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	59

KISALTMALAR

ÇYÇG	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim
ÇYÇÜDG	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üç Köşegencil Dizey Gösterilimi
HDMR	: High Dimensional Model Representation
EMPR	: Enhanced Multivariate Product Representation
MSE	: Mean Square Error
PSNR	: Peak Signal to Noise Ratio
SVD	: Singular Value Decomposition
TDA	: Tekil Değer Ayrışımı
TMEMPR	: Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation
YBMG	: Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1: TDA Yöntemi ile Sıkıştırılan Görüntünün Hata Ölçümleri	25
Çizelge 3.2: ÇYÇÜDG ile Sıkıştırılan Görüntünün Hata Ölçümleri	27
Çizelge 3.3: Tekil Değer Ayrıştırması – ÇYÇÜDG Hata Analizi	28
Çizelge 4.1: TDA ile Görüntü Onarımı	39
Çizelge 4.2: ÇYÇÜDG ile Görüntü Onarımı	43
Çizelge 4.3: Farklı Gürültü Özelliklerinde TDA – ÇYÇÜDG Hata Analizi.....	44
Çizelge 4.4: TDA ve ÇYÇÜDG Süzgeçleme Hata Analizi.....	48
Çizelge 4.5: ÇYÇÜDG’de Başlangıç Öngörülerinin Etkisi	51

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1 : Piksel Dizinleri (Indeces)	18
Şekil 3.2 : İkili Görüntü Piksel Değerleri	18
Şekil 3.3 : Dizinlenmiş Görüntü Yapısı	19
Şekil 3.4 : Gri Tonlamalı Görüntü Yapısı	19
Şekil 3.5 : Gerçek Renkli Görüntü Yapısı.....	20
Şekil 3.6 : Kırmızı-Yeşil-Mavi Renk Boyutları	24
Şekil 3.7 : Farklı Tekil Değerdeki Görüntüler	25
Şekil 3.8 : Farklı Tekil Değerlere (k) Karşılık Hata Ölçümleri	26
Şekil 3.9 : Farklı Tekil Değerdeki ÇYÇÜDG Görüntüleri	27
Şekil 3.10 : Farklı Tekil Değerlere (k) Karşılık Hata Ölçümleri	28
Şekil 4.1 : Gauss Gürültüsü	33
Şekil 4.2 : Tuz-Biber Gürültüsü.....	33
Şekil 4.3 : Gauss Gürültü Örnekleri.....	35
Şekil 4.4 : Gauss Gürültüsünün Görüntülere Etkisi.....	36
Şekil 4.5 : $\mu = 0, \sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsü TDA Uygulaması	37
Şekil 4.6 : $\mu = 0, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsü TDA Uygulaması	37
Şekil 4.7 : $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsü TDA Uygulaması	38
Şekil 4.8 : $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsü TDA Uygulaması	38
Şekil 4.9 : $\mu = 0, \sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsü ÇYÇÜDG Uygulaması	41
Şekil 4.10 : $\mu = 0, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsü ÇYÇÜDG Uygulaması	41
Şekil 4.11 : $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsü ÇYÇÜDG Uygulaması	42
Şekil 4.12 : $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsü ÇYÇÜDG Uygulaması	42
Şekil 4.13 : Tuz-Biber Gürültüsü TDA ve Süzgeçleme Uygulaması	46
Şekil 4.14 : Tuz-Biber Gürültüsü ÇYÇÜDG ve Süzgeçleme Uygulaması.....	47

ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL DİZEY GÖSTERİLİMİ İLE GÖRÜNTÜ İŞLEME UYGULAMALARI

ÖZET

Bilimsel problemlerin çözümünde teknolojik gelişmelere bağlı olarak, her geçen gün yeni yöntemler keşfedilmekte ve kullanılmaktadır. Bu problemleri oluşturan işlevlerin yapısına göre de kullanılan yöntemlerin etkinliği önemli bir hal almaktadır. İşlevlerin tek değişkenli yapılarından çokdeğişkenli yapılarına ve hatta değişkenler arasındaki karmaşık etkileşimlere kadar birçok durum, problem çözümlerini zorlaştırmaktadır. Çözüme gidilen yolda karşılaşılan bu zorluklar ise hesaplama maliyetlerinin artmasına sebep olmaktadır. En doğru şekilde ve en kısa sürede hesaplamaların tamamlanması, çözümlerin ortaya konulması temel hedef haline gelmektedir. Bu hedef doğrultusunda geliştirilen yöntemlerin bir kısmı da, çok değişkenli ve etkileşimli yapılardan, daha basit ve az sayıda işlevler ile temsil edilebilen yapılara inilebilmeyi amaçlamaktadır. Böl-yönet algoritmasına dayanan Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üç Köşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG) bu yöntemlerden biri olup, bu çalışmadaki görüntü işleme uygulamalarının da temelini oluşturmaktadır.

Çalışmada incelenen problem, sayısal görüntü işleme konusu içerisinde yer almaktadır. Görüntülerin elde edilmesi, aktarılması veya bir başka sebepten dolayı üzerlerinde oluşan gürültüler problemin tanımını, çözüm yolunu ise ÇYÇÜDG oluşturmaktadır.

Çalışmanın ilk bölümünde, yaklaştırım yöntemlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için Tekil Değer Ayrışımı (TDA), Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) ve Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG) yöntemlerinin tanımları yapılmıştır. Bu yöntemlerden YBMG ve ÇYÇG yöntemleri aynı zamanda ÇYÇÜDG'nin de temelini oluşturmaktadır.

Bir sonraki bölümde, sayısal görüntülerin kapsamındaki dizey (matris) yapılarından bahsedilmiş, görüntü türlerine değinilmiş ve hata ölçümlerinin tanımı yapılmıştır. Ayrıca, görüntülerin daha az sayıda bileşenler ile ifade edilebildiği görüntü sıkıştırılmaya giriş yapılmış hem ÇYÇÜDG hem de TDA yöntemi ile uygulamalar gerçekleştirilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise görüntü onarımı işlenmiştir. Görüntülerdeki gürültü sebepleri ortaya konulmuş, bir kısmının tanımı yapılmış ve gerçek hayattakine benzer şekilde gürültüler görüntüler üzerine eklenmiştir. Çalışmanın ana hedefini oluşturan görüntülerdeki gürültülerin giderilmesi amacıyla ÇYÇÜDG ve TDA kullanılmıştır. TDA'nın kullanım amacı, ÇYÇÜDG'nin güçlü ve zayıf yanlarının karşılaştırmalı olarak vurgulanmasıdır. Uygulamalar sonucunda bu bölümde elde edilen görüntülerdeki gürültüler istenilen anlamda giderilememiş ve kullanılan iki yöntem ek olarak bazı özel süzgeçlemelerden de faydalanılmıştır. ÇYÇÜDG'nin verimlilik ve geliştirilebilirlik anlamında, bundan sonraki çalışmalara yol açabilecek şekilde başlangıç koşullarının etkisi gösterilmiştir.

TRIDIAGONAL MATRIX ENHANCED MULTIVARIANCE PRODUCTS REPRESENTATION FOR IMAGE PROCESSING APPLICATIONS

SUMMARY

In science, solving a specific problem brings some difficulties with it. This problem's structure is mostly the common effect of its solving method, time and also its storage. Many solving methods that includes analytic and numerical ones developed by now and still are being researched to simplify these problems. Simply means that solving a problem in better ways to reduce time, storage, complexity and also finding the accurate solutions of its. Sometimes, the accurate results can be found directly or sometimes might be done indirectly. Indirectly founded results are scope of this study and approximation is the base of this work here.

This study includes four parts and each part is introduced first, then supported by applications on MATLAB which is a powerful mathematics tool and last enhanced by the results, comments and advises. Study also has many sections and subsections, images, application examples and tables. In some sections, subjects are introduced briefly in order not to set focus to different ways or commonly known issues are neglected to show in-depth. Mathematical backgrounds of used methods are also valid with many equations here. In some cases, mathematically theoretical part of studies occupy several pages, so if a person who is not interested in these so much, can skip them to reach the main part of this study, image processing steps. Main goal of this study to show the capabilities of a specific approximation methods to image processing problem that will be introduced.

In the first chapter of this work, an introduction is given to readers that depends on the functions's features. Mathematically a function may consist of one independent - dependent variable or lots of variables. It should be recalled the function's name as a problem. Generally, it is easy to solve problems with fewer variables, however with lots of variables they are harder. Important thing is the connection between variables here. Hence, it has to be said that much complicated connections between variables in functions results much complexity of their solution. In this study, all of the methods used can be considered as s complex functions and are dealt with huge number of variables, number N .

Second part of this work consists of general information about the multivariate functions. Multivariate means a function that has more than one variable. Before these functions, Singular Value Decomposition (SVD) technique is introduced to give information about the matrices and matrix factorization. SVD enables us to representation of matrices in reducing dimensionality with lots of properties. Factorizations concludes the unitary and rectangular diagonal matrices which is important in signal processing.

After that, High Dimensional Model Representation (HDMR) is referred which is an approximation method to use in reducing the complexity of multivariate functions to

variate ones. HDMR is based on a divide-conquer algorithm and was first proposed by I.M. Sobol, then generalized by H. Rabitz. It expands the multivariate function that its components start from a constant component (zeroth order) and continues as univariate, bivariate, trivariate components to order N .

In the next section, another approximation method is handled. Enhanced Multivariate Product Representation (EMPR) has been introduced by Metin Demiralp and his group, the Group for Science and Methods of Computing. EMPR like HDMR depends on the divide-conquer algorithm, too. N variate or multivariate functions can be represented as less variate functions adding support functions on HDMR.

Last section of this chapter includes our specific method, Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR). TMEMPR is a recursive method and uses EMPR bivariate terms under different support vectors. Then, it decomposes a matrix into a product of three matrices: an orthonormal matrix, a rectangular tridiagonal matrix which the name come from and transpose of another orthonormal matrix.

Third part of this study is the entry level of image processing. When the first images were first sent across the Atlantic by telegraph cables, a digital image has been using from that time, last century.

First of all, digital image is a kind of image that represented by matrices and numerical values in computer science. Matrices are 2 dimensional and especially in true color images they might have 3 layers, Red-Green-Blue. Today, in different areas digital images are used. From satellites to X-Ray imaging and geological models or another areas images can be acquired, transmitted, processed, enhanced and so on.

Image decomposition is a technique in image processing that images can be modeled with less variables. In this section, two types of techniques are used to compress images. One of them is SVD and the other one is TMEMPR methods. It is known that these methods are enabled to show multivariate to variate functions. An image matrix is a sample space here and with SVD method, matrix factorization for an image provides taking nonzero elements of singular values. Hence, image can be represented less variables without much loss of information. Same situation is valid on TMEMPR method that images can be easily represented by low cost. How much information lost is calculated with error metrics. Mean square error (MSE) and Peak Signal to Noise Ratio (PSNR) are two common used error metrics in images that involve differences between original and approximation matrices' elements.

Fourth part of this work consists of image restoration. If it should be mentioned about the restoration, there must be weird situation or simply a problem. In images sometimes it is seen an awful parts, which is called noises in image world. Therefore, the problem is noise in images here. These noises come from image acquisition or transmission depend on the light, dirty optics, sensors or simply environmental conditions. Lots of noise types can be defined, however we use only two types of them which are widely known. In Gaussian types, noises fit the normal distribution, whereas Salt&Pepper ones fit constant numbers.

For image restoration Both SVD and TMEMPR methods are used to show the efficiencies of them. First of all, a simple image is handled to be added noise of it. Gaussian noise or Salt&Pepper noise are used to be added separately. Then noisy image is taken to be represented by number of singular values in ascending order. In

specific numbers error metrics are calculated, shown in graphics and tables. Each of methods and results are deeply investigated, commented and matched. Although, SVD and TMEPR methods are useful in image compression, they are seen to be not useful in image restoration. Hence, it must be a different technique to remove or reduce these noises from images. Filtering is a modifying one of these techniques and can be used alone on images or all together with another techniques, methods.

In this study, the first time in image processing both TMEPR method and a few filtering techniques are applied to noisy images. In a few level, it is successful to reduce noises. SVD technique with a few filtering techniques is used to be compared with TMEPR, too. In the last section of this chapter, TMEPR method is used alone to be developed in image restoration. To reduce a noise, image compression with some singular values and filtering techniques were used in TMEPR method. For better results TMEPR method's initial vectors are analysed and got different types of them as unit, random, support, SVD support vectors.

In the last chapter, final part of study shows the results of entire work. Both TMEPR and SVD techniques yield some information in image compression and restoration. It is known that the methods used are efficient in image compression alone, but in this study they are used as compressor and restorator. Besides, restoration job of the methods is insufficient and so some filtering techniques are used to improve the quality of restoration and reduce errors. Last of all, a few different initial vector choice in TMEPR is made to get much reliability.

1. GİRİŞ

Bilimde, problemlerin çözümüne ulaşabilmek için çok çeşitli adımlar kullanılmaktadır. Algoritma olarak da düşünülebilen bu adımların sayısı, uygulama biçimi, doğru sonuca nasıl ulaşabildiği veya ne şekilde yaklaşabildiği gibi birçok sorunun cevabı, bir problemin çözümünden daha önemli hale gelebilmektedir. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile birlikte mühendislik, endüstriyel, ekonomi, vb. alanlarda karşılaşılan problemler artık daha kısa sürelerle, daha basit bileşenlerle ve daha doğru olarak çözülebilmektedir. Bunun yanında, problemlerin çözümünde kullanılacak verilerin çokluğu ve çeşidinin artması ise başlı başına bir sorundur. Matematiksel olarak düşünüldüğünde aslında her problem bir işlemdir ve işlevleri meydana getiren bağımlı ve bağımsız değişkenler bulunmaktadır. Daha önce bahsedilen veri çeşidinin artması sorunu da, bu bağımlı ve bağımsız değişkenlerin sayısı ve etkileşimiyle ilgilidir. İşlevlerin tek bağımsız değişkenden oluştuğu durumlar olduğu gibi binlerce bağımsız değişkenden oluştuğu durumlar da mevcuttur.

Karmaşık yapıdaki işlevlerin, kendilerini oluşturan daha basit işlevler ile temsil edilebilmesi düşüncesi ilk olarak 1957 yılında A.N Kolmogorov tarafından ortaya konulmuştur [1]. Bu düşünceyle çok değişkenli işlevlerin, tek değişkenli işlevler toplamı olarak yazılabileceği gösterilmiştir. Çalışma 1963 yılında İngilizce'ye tercüme edilerek, yüksek boyutta model çalışmalarının temeli oluşturulmuştur. Kolmogorov'un çalışmalarının devamında ilk kez 1993 yılında I.M. Sobol tarafından Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG) yöntemi tasarlanmıştır [2]. Bu yöntem, Kolmogorov'un çalışmalarını duyarlılık analizi ile birleştirerek, çokdeğişkenli işlevlerin kendilerinden daha az sayıda, basit ve artan sayıda bileşenler ile temsil edilebilmesini ifade etmektedir. YBMG üzerindeki çalışmalar neticesinde, H. Rabitz yönteme ağırlık işlevlerini de ilave ederek Sobol tarafından kabul edilen sabit ağırlık işlevi ve aralıklarını daha genel bir yapıya kavuşturmuştur [3–7]. 2003 yılında ise M. Demiralp, konu ile ilgili çalışmalarında işlevlerin başarısının ölçülebildiği bazı ölçenleri, YBMG özelliklerini ve çeşitlerini ortaya koymuştur [8]. Model gösterilim yöntemleri

üzerine çalışmalar günümüzde de devam etmekte olup, Sobol ve Rabitz'in yanı sıra Demiralp ve grubu İTÜ BEBBYT (Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu) bu çalışmalar içerisinde aktif görev almaktadırlar.

YBMG türlerinden biri olan Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üç Köşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG), özyinelemeli işlemler ile en büyük özdeğerlerin bulunmasını ve uygun yaklaşıımı amaçlamaktadır [9, 10]. Yöntemde, yine çok değişkenli yapıların, kendilerini oluşturan basit ve daha az sayıda değişkenli yapılara dönüştürülmesi esastır. Yöntemin mühendisliğin birçok alanında kullanılabilmesinden hareketle, ÇYÇÜDG yöntemi bu çalışmada görüntü işleme konusu içerisinde değerlendirilecektir.

Son 50 yıl içerisinde hızlı bir yükseliş gösteren görüntü işleme konusu, başta Tıp, Astronomi, Fizik gibi alanlar olmak üzere bugün hayatın her anında kullanılan bir unsurdur. Gerçek yaşamdaki görüntülerin, sayısal (dijital) ortamlara aktarımının sağlandığı bu teknolojinin önemi, bilgisayar teknolojisinin gelişmesi özellikle de hızlı bilgisayarların kullanılmasıyla birlikte her geçen gün artmaktadır. Görüntülerin aktarımı, iyileştirilmesi ve daha az maliyetlerle depolanabilmesinin sağlanması, görüntü işlemedeki algoritmaları tanımlamaktadır. Mevcut algoritmalar genellikle karmaşık yapıda olup, bu yapıların özellikleri ve değişik uygulamaları ile sayısal ortamdaki görüntüler istenilen hale getirilebilmektedir.

Bu çalışmanın hedefinde, görüntülerin daha az maliyetlerle hesaplanabilmesi ve iyileştirilebilmesi yer almaktadır. Karmaşık algoritma yapılarındaki görüntüler de aslında çokdeğişkenli işlevler olarak düşünülmüştür. Bu işlevler üzerinde, ÇYÇÜDG yöntemi uygulanarak görüntülerin öncelikle boyutları küçültülmüş, sonrasında ise yapay bozulmalar eklenerek bu bozulmalardan kurtulmak istenmiştir. Görüntü kapsamındaki bozukluklar aslında gürültü diye tabir edilen sorunları temsil etmektedir. Bu gürültüler bazı çevresel etkenler sebebiyle oluşmakta ve görüntülerde göze hoş gelmeyen durumlara yol açmaktadır. Gürültülerin temizlenebilmesi amacıyla, ÇYÇÜDG yöntemi ile hesaplama maliyetleri düşürülen görüntülere ek olarak bazı özel süzgeçleme yöntemleri de uygulanmıştır. Sonuçta, elde edilen yeni görüntüler özgünlükten fazla sapma yapmamış, varsa gürültüleri temizlenmiş ve maliyeti düşük hale getirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Tekil Değer Ayrışımı

Gerçel ve karmaşık dizeler üzerinde ayrıştırma işleminin gerçekleştirildiği Tekil Değer Ayrışımı; dize analizi ile sinyal işlemeden istatistiğe, görüntü sıkıştırma ve gürültü giderme konularına kadar birçok alanda fayda sağlamaktadır. Kısaca bir dizeyin çarpanlara ayrılma türlerinden bir olan Tekil Değer Ayrışımı ki, bundan sonra TDA olarak adlandırılacaktır, 3 farklı noktada birbirine bağlı olmayan (uncorrelated) fakat gerçeğe yakın değerlerin belirlenmesi ve boyutsal olarak en uygun noktaların saptanmasıdır [11] [12].

Yukarıdaki tanım yardımıyla matematiksel olarak çıkarımlar aşağıdaki gibidir. A , $m \times n$ tipinde bir dize olsun. O halde,

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir ayrışım işlemi tanımlanabilir. (2.1) denkleminde U 'nun sütunları AA^T 'daki ortonormal özyöneylemleri (özvektörleri) temsil etmektedir. Ayrıca, $A^T A$ 'nın ortonormal (birimdik) özyöneylemleri de V 'nin sütunlarıdır. S köşegen dizeler ise U veya V 'nin azalan sıradaki özyöneylemlerinin kareköküdür.

(2.1) denklemi, sütun ve satır çarpımı şeklinde gösterilecek olursa; A dizeyi aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$A = USV^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T + \dots + u_r \sigma_r v_r^T \quad (2.2)$$

(2.2)'de u , v sırasıyla U , V dizelerinin sütunları, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ ise köşegen dizeyin azalan sıradaki elemanlarıdır.

A dizeyi, TDA ile bileşenlere ayrışma işleminde satır, sütun ve köşegen elemanlardan oluşan 3 farklı dize halinde elde edilmiştir. Azalan sıradaki σ değerlerinde de bazı öyle küçük değerler bulunabilir ki denklemde bunların göz ardı edilmesi işlemlere

olumsuz yönde etki etmez. Tam bu noktadaki A dizeyi de daha az dizey elemanı ile ifade edilebilen ve daha az maliyetli hale gelmektedir.

2.2 Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG), hesaplama maliyetlerinin düşürülmesi amacıyla, çok değişkenli bir işlevin daha az sayıda bileşenler ile gösteriliminin mümkün olduğunu ifade etmektedir [3, 7, 8, 13]. YBMG yönteminde birbirlerine dik, sonlu sayıda değişkenler seçilip; sabit terimlerden iki, üç ve daha fazla değişkene sahip işlevler sırasıyla hesaplanarak, uygun yaklaşımların yapılması amaçlanmaktadır. Uygun işlev yapılarında çoğu zaman ikiden fazla değişkene sahip işlevler hesaplanmadan minimum hata ile sonuca yakınsama yapılabilmektedir. YBMG yöntemine ait açılımın genel formülü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + f_{1\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (2.3)$$

(2.3) ile verilen açılımda, $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevi N adet bağımsız değişkene bağlı çok değişkenli bir işlevi belirtmektedir. Birbirine dik işlevlerden oluşan ve toplamsal yöntem özelliklerine sahip bu işlevi oluşturan elemanlar sırasıyla, sabit terim f_0 olarak, tek bağımsız değişkene bağlı işlev $f_{i_1}(x_{i_1})$ ve devam edilerek N değişkene bağlı işlev $f_{1\dots N}(x_1, \dots, x_N)$ ile temsil edilmektedir. Tüm açılıma ait terim sayısının hesaplanmasında ise,

$$\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \dots + \binom{N}{N} = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} = 2^N \quad (2.4)$$

formülü kullanılmaktadır. (2.4) denkleminde sırasıyla sabit terimli işlevin, bir değişkene bağlı işlevlerin ve devamında N bağımsız değişkene bağlı işlevin terim sayısı bulunmuştur. Toplamda edilen terim sayısı ise 2^N olmaktadır.

YBMG ve özellikleri, Sobol tarafından ortaya atıldığında $[0, 1]$ aralığında ve ağırlık işlevi 1'e eşit olarak alınmıştır [2]. Daha sonra yöntem H. Rabitz ve grubu tarafından geliştirilerek aralık ve ağırlık işlevleri genelleştirilmiştir [3–6]. Devam edilerek, M. Demiralp ve grubu tarafından YBMG tabanlı yeni yöntemler geliştirilmiş ve tüm bu yöntemler bazı bilimsel problemlere uygulanarak sonuçlar elde edilmiştir. YBMG'ye

devam edilirse, her biri x bileşenlerine bağlı, karesi integre edilebilen $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ve $v(x_1, x_2, \dots, x_N)$ iki adet işlevi tanımlanabilir. İç çarpım uzayında,

$$(u, v) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) u(x_1, x_2, \dots, x_N) v(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2.5)$$

(2.5) ile ifade edilebilen ve ağırlık işlevi W_i 'ler olan işlevler oluşturulmaktadır. Bu işlevlerin W_i çarpanları hesaplama kolaylığı açısından ilgili aralıklarda normalize kabul edilmektedir.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1 \quad (2.6)$$

W_i 'ler daha önce bahsedildiği gibi ağırlık işlevleridir. Bu işlevlerin, buldukları ilgili a_i, b_i aralıklarında integrallerinin 1'e eşit olduğu, yani (2.5) denklemindeki gibi normalize durumda oldukları varsayılmaktadır.

YBMG yönteminde N adet bileşene sahip işlevin, kendisini oluşturan her bir bileşen için diklik koşuluna uyması gerektiği (2.3)'te belirtilmiştir. O halde bu formüldeki bileşenler için aşağıdaki gibi diklik koşulları oluşturulabilir.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i f_i(x_i) W_i(x_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.7)$$

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i f_{ik}(x_i, x_k) W_i(x_i) = 0 \quad , \quad \int_{a_k}^{b_k} dx_k f_{ik}(x_i, x_k) W_k(x_k) = 0 \quad (2.8)$$

⋮

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i f_{j_1 j_2 \dots j_k}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}) W_i(x_i) = 0 \quad j_1 \leq i \leq j_k, 1 \leq k \leq N \quad (2.9)$$

(2.7), (2.8) ve (2.9) denklemlerinde sırasıyla tek bileşenli işlevlerden, çok bileşenli işlevlere kadar diklik koşulları tanımlanmıştır. (2.3)'teki genel denklemde bileşenlerin hesaplanabilmesi için tanımı yapılmış olan bazı ön koşullara ek olarak izdüşüm operatörlerinden yararlanılmaktadır.

$$I_0 F(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) F(x_1, \dots, x_N) \quad (2.10)$$

(2.10)'da kullanılan I_0 izdüşüm operatörü, (2.3) genel denklemindeki her bir bileşenle çarpıldığında,

$$I_0 f(x_1, \dots, x_N) = I_0 f_0 + \sum_{i_1=1}^N I_0 f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N I_0 f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots \quad (2.11)$$

ve (2.7), (2.8) ve (2.9)'daki diklik koşulları gereği, I_0 operatörü, sabit terim haricindeki terimleri sıfırlayacaktır. Dolayısıyla,

$$I_0 f(x_1, \dots, x_N) = f_0 \quad (2.12)$$

eşitliği elde edilecektir. (2.3)'teki tek bağımsız değişkenli bileşenlerin belirlenmesi amacıyla da $i = 1, 2, \dots, N$ için aşağıda gösterilen I_i operatörü kullanılırsa,

$$I_i F(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) F(x_1, \dots, x_N) \quad (2.13)$$

ve bu operatör (2.3) genel denkleminin her iki yanına uygulanarak,

$$I_i f(x_1, \dots, x_N) = I_i f_0 + \sum_{i_1=1}^N I_i f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N I_i f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots \quad (2.14)$$

eşitliği elde edilir. Diklik koşullarının da kullanılmasıyla,

$$I_j f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + f_j(x_j) \quad (2.15)$$

elde edilir. Bu işlemler, sırasıyla 2., 3., ..., N . derece terimlerin bulunabilmesi için devam ettirilebilmektedir. Sonuçta elde edilen işlevler,

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, x_2, \dots, x_N) f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2.16)$$

$$f_i(x_i) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \times f(x_1, x_2, \dots, x_N) - f_0 \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
f_{ij}(x_i, x_j) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} \dots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} dx_{j-1} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} dx_{j+1} \dots \\
&\int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N) \\
&\times f(x_1, x_2, \dots, x_N) - f_i(x_i) - f_j(x_j) - f_0 \quad 1 \leq i < j \leq N
\end{aligned} \tag{2.18}$$

gibidir. (2.16)'da YBMG yöntemine ait sabit terim, (2.17)'de tek değişkene bağlı işlev ve (2.18)'de de iki değişkene bağlı işlev temsil edilmektedir. YBMG yönteminde eğer daha fazla değişkene sahip işlevler kullanılacaksa, işlemlere devam edilerek geri kalan terimlerin de bulunabilmesi mümkündür. Gerçek sonuca ne derece yaklaşıldığının belirlenmesi amacıyla bu yöntemde bazı ölçütler de kullanılmaktadır. Bu ölçütlerin temeli, işlev uzunluklarına dayandırılmakta ve sırasıyla 0'dan 1'e doğru ölçüt değerlerinde karşılaştırma yapılmaktadır.

Değişmezlik ölçeni,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2} \tag{2.19}$$

Birinci basamaktan toplamsallık ölçeni,

$$\sigma_1 \equiv \sigma_0 + \frac{\sum_{i=1}^N \|f_i\|^2}{\|f\|^2} \tag{2.20}$$

İkinci basamaktan toplamsallık ölçeni,

$$\sigma_2 \equiv \sigma_1 + \frac{\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \|f_{i_1, i_2}\|^2}{\|f\|^2} \tag{2.21}$$

şeklinde devam edilerek k . dereceden toplamsallık ölçeni

$$\sigma_k \equiv \sigma_{k-1} + \frac{\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}}^N \|f_{i_1, i_2, \dots, i_k}\|^2}{\|f\|^2} \tag{2.22}$$

şeklinde gösterilmektedir ve bu ölçenler aşağıdaki kurala uymaktadır.

$$0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_N = 1 \tag{2.23}$$

[14].

2.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımsal Gösterilim Yöntemi

Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımsal Gösterilim Yöntemi (ÇYÇG), YBMG’de olduğu gibi çok değişkenli işlevlerin daha az sayıda işlevler yardımıyla gösterilimini hedeflemektedir. YBMG’den farklı olarak gerçek sonuca yakınsama bazı destek işlevlerin kullanılması ile sağlanmaktadır [15, 16].

$$f_{x_1, \dots, x_N} = f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) \\ + \dots + f_{1 \dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (2.24)$$

(2.24)’te destek işlevi olarak $s_j(x_j)$ kullanılmıştır. Geri kalan işlevler ise YBMG yönteminde kullanılan işlevlerin aynısıdır. YBMG’de olduğu gibi normalizasyon, sıfırlanma ve diklik koşulları da bu yöntem için geçerlidir. Yöntemde yer alan terimleri hesaplayabilmek için kullanılan normalizasyon koşulları ise aşağıdaki gibidir.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1 \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.25)$$

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) s_i(x_i)^2 = 1 \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.26)$$

Diklik koşulları,

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i(x_i) \prod_{j=1}^N s_j(x_j) f_{i_1 \dots i_k} f_{j_1 \dots j_l} = 0 \quad (2.27)$$

ve tümlev içerisinde sıfırlanma koşulları

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) s_i(x_i) f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = 0 \quad x_i \in (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \quad 1 \leq i \leq k \leq N \quad (2.28)$$

olarak (2.25), (2.26), (2.27) ve (2.28)’de gösterilmektedir. Bu koşullar ile birlikte YBMG yöntemindeki adımlar ÇYÇG yöntemine sırasıyla uygulandığında, ÇYÇG yönteminin her bir terimi aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \dots \\ &\times \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) - s_i f_0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}} dx_{i_1-1} W_{i_1-1}(x_{i_1-1}) \int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}} dx_{i_1+1} W_{i_1+1}(x_{i_1+1}) \dots \\ &\times \int_{a_{i_2-1}}^{b_{i_2-1}} dx_{i_2-1} W_{i_2-1}(x_{i_2-1}) \times \int_{a_{i_2+1}}^{b_{i_2+1}} dx_{i_2+1} W_{i_2+1}(x_{i_2+1}) \dots \\ &\int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \\ &- s_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2}) - s_{i_2}(x_{i_2}) f_{i_1}(x_{i_1}) - s_{i_1}(x_{i_1}) s_{i_2}(x_{i_2}) f_0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Hesaplamalara devam edilerek, gerektiği takdirde $3, 4, \dots, N$ adım için işlevler gösterilebilmektedir. ÇYÇG yöntemi ile bulunan yeni yaklaşımların gerçek sonuca ne kadar yakınsadığını test edebilmek için burada da ölçenler kullanılmaktadır. İşlev uzunlukları yardımıyla elde edilebilen bu nitelik ölçenleri şu şekildedir.

Değişmezlik ölçeni,

$$\sigma_0 \equiv \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^N s_j \right\|^2 \quad (2.32)$$

Birinci dereceden nitelik ölçeni,

$$\sigma_1 \equiv \sigma_0 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j \right\|^2 \quad (2.33)$$

ve devam edilerek N . dereceden nitelik ölçeni

$$\sigma_N \equiv \sigma_{N-1} + \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12\dots N}\|^2 \quad (2.34)$$

olarak tanımlanmaktadır. ÇYÇG yönteminin nitelik ölçenleri olan (2.32), (2.33) ve (2.34)'ün, sırasıyla 0'dan 1'e gidildikçe nitelik değerleri gerçek sonuca aşağıdaki gibi yakınsamaktadır.

$$0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_N = 1 \quad (2.35)$$

2.4 Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegenlik Dizey Gösterilimi

Çokdeğişkenli işlevlerin daha az sayıda bileşenler cinsinden ifade edilmesi konusu, hem Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) hem de Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımsal Gösterilim (ÇYÇG) yönteminde detaylı olarak incelenmişti. Bu bölümde ÇYÇG yönteminden esinlenerek dizey yapılarında kullanılmak üzere geliştirilmiş olan yeni bir yöntemden, Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegenlik Dizey Gösteriliminden (ÇYÇÜDG) bahsedilecektir. Dizey gösterilimi ve çözümlenmelerinin mevcut olduğu bazı ÇYÇG (Ayrık ÇYÇG) yöntemleri [17] gibi, bu yöntemde de köşegen elemanlarından yararlanılmaktadır. Ayrıca, TDA yöntemine benzer şekilde uygulamaların yapılması olanaklıdır. Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegenlik Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG)'nde iki yönlü tanımlanan dizey elemanları, özyinelemeli işlemler ile üçköşegenlik dizey haline getirilebilen ve en büyük özdeğerlerin bulunduğu yapılaraya dönüştürülmektedir [9]. N boyutlu ÇYÇG yöntemi, ÇYÇÜDG yöntemine uyarlanırken, dizeylerdeki yakınsaklık koşulları gereği işlev boyut sayısı 2 olarak düşünülür ve sırasıyla aşağıdaki işlemler uygulanır [10].

$$\begin{aligned} f_{x_1, \dots, x_N} = & f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) + \dots \\ & + f_{1 \dots N}(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (2.36)$$

ÇYÇG yönteminin genel denklemi (2.24)'te tanımlanmış ve her bir terimin hesaplaması yapılmıştır. (2.36)'da yeniden gösterimde bulunulan yöntem, 2 boyutlu dizey haline getirilebilir.

$$a_{i,j} = a_0 s_i^{(1)} s_j^{(2)} + a_i^{(1)} s_j^{(2)} + a_j^{(2)} s_i^{(1)} + a_{i,j}^{(1,2)} \quad i = 1, 2, \dots, l \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.37)$$

$A \in \mathbb{R}^{l \times m}$ 2 boyutlu dizey gösterilimini temsil etmek üzere, (2.37)'de seçilen destek işlevleri s_i ve s_j , A dizeyinin belirli (i, j) noktasındaki değerler ise $a_{i,j}$ 'dir. Bilinen

herhangi iki yöney(vektör) u, v seçimi için (2.37)'de kullanılan destek işlevleri $s_i = u_i$ ve $s_j = v_j$ eşitlikleri ile gösterilebilmektedir. Kullanılan deklemler eleman gösterimi ile temsil edilmektedir. Denklemler kapalı gösterim halinde yeniden düzenlendiğinde elde edilen yeni gösterim aşağıdaki gibi olacaktır.

$$A = a_0 uv^T + a_1 v^T + ua_2^T + A_{(1,2)} \quad (2.38)$$

Burada A , $m \times n$ boyutunda dizey, a_0 reel bir sayı, u ve a_1 m yönünde bir yöney, v ve a_2 n yönünde bir yöney, $A_{(1,2)}$ ise özyinelemeli yöntemde kullanılan bir sonraki adım kalan dizeydir. Eşitlikteki u ve v yöneylerini önceden belirlemek için bazı süzgeçleme işlemleri kullanılabilir. Kolaylık açısından bunlar birim yöneyler olarak da incelenebilmektedir. Herhangi bir seçim ile bu yöneyleri işlemlere başlanmadan önce belirlendiği düşünülürse, a_0 , a_1 ve a_2 yöneyleri nasıl tanımlanmalıdır?

Bu noktada bazı ön koşullara ihtiyaç duyulmaktadır.

Birim boyda u ve v yöneyleri için

$$u^T u = 1 \quad v^T v = 1 \quad (2.39)$$

Kabul edilen diklik koşulları olarak ise de,

$$u^T a_1 = 0, \quad v^T a_2 = 0, \quad u^T A_{1,2} = 0_m^T, \quad A_{1,2} v = 0_l \quad (2.40)$$

eşitlikleri kullanılacaktır. (2.38) denklemini yeniden incelendiğinde, denklemde yer alan katsayıların bulunması için birtakım işlemler gerçekleştirilmelidir. Öncelikle a_0 katsayısının bulunması için (2.38) denklemini soldan u^T , sağdan v ile çarpıldığında,

$$A = a_0 uv^T + a_1 v^T + ua_2^T + A_{(1,2)} \quad (2.41)$$

$$u^T Av = a_0 u^T uv^T v + u^T a_1 v^T v + u^T ua_2^T v + u^T A_{(1,2)} v \quad (2.42)$$

diklik ve birimboyluluk koşullarından yararlanılarak, elde edilen a_0 katsayısı,

$$a_0 = u^T Av \quad (2.43)$$

olur.

a_1 dizeyinin bulunması için şimdi de (2.38) eşitliği sağdan v ile çarpıldığında,

$$A = a_0 uv^T + a_1 v^T + ua_2^T + A_{(1,2)} \quad (2.44)$$

$$Av = a_0 uv^T v + a_1 v^T v + ua_2^T v + A_{(1,2)} v \quad (2.45)$$

diklik ve birimboyluluk koşullarının kullanılmasıyla, sonuçta elde edilen a_1 dizeyi de,

$$a_1 = (I_l - uu^T)Av \quad (2.46)$$

olmaktadır.

Son olarak a_2 yöneyi için, yine (2.38) eşitliği kullanılarak, denklemin her iki tarafı soldan u^T ile çarpıldığında,

$$A = a_0 uv^T + a_1 v^T + ua_2^T + A_{(1,2)} \quad (2.47)$$

$$u^T A = a_0 u^T uv^T + u^T a_1 v^T + u^T ua_2^T + u^T A_{(1,2)} \quad (2.48)$$

işlemler sonucunda a_2 yöneyi de

$$a_2 = (I_m - vv^T)A^T u \quad (2.49)$$

olarak bulunmuş olur.

a_0 , a_1 ve a_2 bilinmeyenlerinin belirlenmesi sonrasında, özyinelemeli işlemler ile A dizeyine uygun yaklaşımlar yapılabilmesi mümkündür. Başlangıç koşulları olarak A dizeyi için

$$A^{(0)} \equiv A \quad A^{(1)} \equiv A_{1,2} \quad (2.50)$$

olarak seçilebilir. Destek işlevleri, boyları ve daha önce bulunan a_0 , a_1 ve a_2 terimleri için özyinelemeli işlemlerin tabanını oluşturacak koşullar da aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\alpha_1 \equiv a_0, \quad \beta_1 \equiv \|a_1\|, \quad \gamma_1 \equiv \|a_2\| \quad (2.51)$$

$$u_1 \equiv u, \quad u_2 \equiv \frac{1}{\|a_1\|}a_1, \quad v_1 \equiv v, \quad v_2 \equiv \frac{1}{\|a_2\|}a_2 \quad (2.52)$$

(2.51) ve (2.52)'de kabul edilen başlangıç koşulları ile özyineleme işlemlerine başlanılabilir. (2.38) denkleminde kapalı gösterilimi yapılan ÇYÇÜDG yönteminin özyineleme 1. adımı sonucunda oluşan dizey ve yöneyler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= a_0 u v^T + a_1 v^T + u a_2^T + A^{(1)} \\ &= \alpha_1 u_1 v_1^T + \|a_1\| \frac{a_1}{\|a_1\|} v_1^T + u_1 \|a_2\| \frac{a_2^T}{\|a_2\|} + A^{(1)} \\ &= \alpha_1 u_1 v_1^T + \|a_1\| \frac{a_1}{\|a_1\|} v_1^T + u_1 \|a_2\| \frac{a_2^T}{\|a_2\|} + A^{(1)} \\ &= \alpha_1 u_1 v_1^T + \beta_1 u_2 v_1^T + \gamma_1 u_1 v_2^T + A^{(1)} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Kapalı gösterilimdeki başlangıç dizeyi A_0 için öncelikle (2.53)'te u ve v destek işlevlerinin başlangıç koşulları kullanılmıştır. Denkleminde yer alan a_0 , a_1 ve a_2 terimlerinin de α , β ve γ değişkenleri cinsinden yazılabilmesi amacıyla kendi boyları ile çarpılıp, yine boylarına bölünmüştür. Kullanılan bu çarpan işlemlere etki etmemekte olup, terimlerin tür değişimlerine imkan sağlamıştır. 1. özyineleme sonucunda elde edilen dizey ve yöneyler,

$$A^{(0)} = \alpha_1 u_1 v_1^T + \beta_1 u_2 v_1^T + \gamma_1 u_1 v_2^T + A^{(1)} \quad (2.54)$$

olarak elde edilmiştir. İşlemlere devam edilerek 2., 3., ..., j . adımlarda yaklaşım yapılan dizeyler bulunabilir. j . adımda özyineleme işlemi sonlandırıldığında, yeni dizey ve yöneyler aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$A^{(j)} = \alpha_{j+1} u_{j+1} v_{j+1}^T + \beta_{j+1} u_{j+2} v_{j+1}^T + \gamma_{j+1} u_{j+1} v_{j+2}^T + A^{(j+1)} \quad (2.55)$$

Peki her bir adımda kullanılan α , β ve γ ne olmalıdır?

(2.51)'de $\alpha_1 = a_0$ olarak kullanılmıştı. a_0 sabit terimi için de (2.43)'te bulunan $a_0 = u^T Av$ kullanılırsa, $\alpha_1 = u^T Av$ dolayısıyla $(j + 1)$. adımdaki α değeri,

$$\alpha_{j+1} = u_{j+1}^T A^j v_{j+1} \quad (2.56)$$

olarak gösterilebilir.

Benzer şekilde β 'nın bulunmasında, (2.51)'de $\beta_1 = \|a_1\|$ eşitliği ve (2.46)'daki a_1 değeri kullanılarak $(j + 1)$. adımdaki β değeri,

$$\beta_{j+1} = \left\| (I_m - u_{j+1} u_{j+1}^T) A^{(j)} v_{j+1} \right\| \quad (2.57)$$

ifadesi ile gösterilmektedir. γ 'nın bulunmasında da α ve β değerlerinin bulunmasında izlenen yol takip edilerek, $(j + 1)$. adımdaki γ değeri,

$$\gamma_{j+1} = \left\| (I_n - v_{j+1} v_{j+1}^T) A^{(j)(T)} u_{j+1} \right\| \quad (2.58)$$

olarak bulunur. j . adımda destek işlevleri için başlangıç koşullarının da yardımıyla (2.38) denkleminin bilinmeyen son iki destek işlevleri,

$$\begin{aligned} u_{j+2} &= \frac{1}{\beta_{j+1}} (I_m - u_{j+1} u_{j+1}^T) A^{(j)} v_{j+1} \\ v_{j+2} &= \frac{1}{\gamma_{j+1}} (I_n - v_{j+1} v_{j+1}^T) A^{(j)(T)} u_{j+1} \end{aligned} \quad (2.59)$$

şeklinde gösterilmiş olur.

$r = \min(m, n)$ olmak üzere, genel gösterim (2.38),

$$A = \sum_{j=1}^r \alpha_j u_j v_j^T + \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j u_{j+1} v_j^T + \sum_{j=1}^{r-1} \gamma_j u_j v_{j+1}^T \quad (2.60)$$

haline gelir. (2.60)'da u ve v yöneylerinin her biri yana yana yazılarak, U, V gösterilimi ile ifade edilirse,

$$\begin{aligned} U &= [u_1 u_2 \dots u_r]^T \\ V &= [v_1 v_2 \dots v_r]^T \end{aligned} \quad (2.61)$$

ve A dizeyi için yaklaşım yapılan, üçköşegenli dizey haline getirilebilen ÇYÇÜDG yönteminin de genel eşitliği

$$A = U^T \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & & \\ & \beta_2 & \alpha_3 & \gamma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \beta_{r-1} & \alpha_r \\ & & & & & \gamma_{r-1} \end{bmatrix} V \quad (2.62)$$

$$= U^T \Sigma V$$

olarak bulunmuş olur.

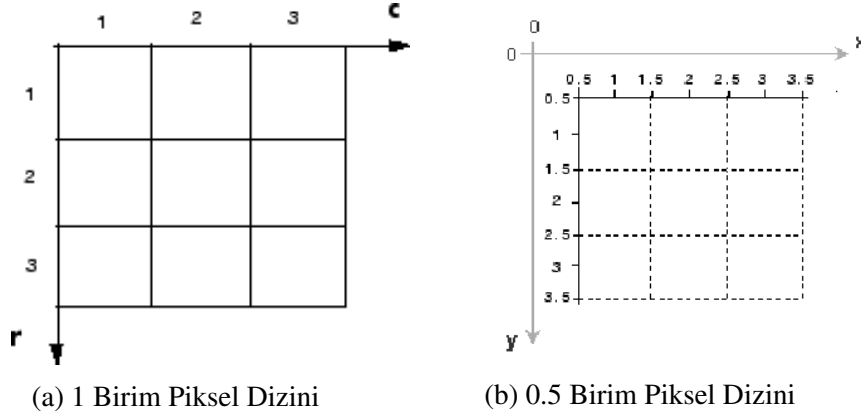
3. GÖRÜNTÜ VE GÖRÜNTÜ SIKIŞTIRMA UYGULAMALARI

3.1 Görüntü ve Matris Gösterilim

Çalışmalarda incelenecek görüntü tipi olan sayısal (dijital) görüntüler, içerisindeki her bir verinin uzay ve renk bilgisine sahip olduğu yapılardır [18]. Canlılardaki analog yapıda mevcut olan görme ve görüntü oluşturma mekanizmasından farklı olarak, sayısal görüntülerde verilerin işlenmesi, tutulması, aktarılması gibi işlemler söz konusudur. Bu işlemlerin herhangi bir teknoloji ortamda yapılabilmesi için de sayısal değerlerden söz etmek gerekmektedir. Biliyoruz ki, bugün kullanılan teknolojik cihazlar ve özellikle de bilgisayar sistemleri basit sayısal değerler tabanlıdır.

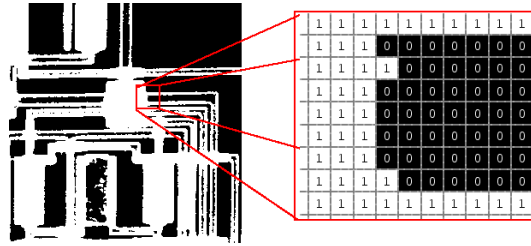
Görüntü mekanizması için aslında bahsedilen yapı, gerçek hayatta algılanan 3 boyutun, 2 boyutlu sayısal sinyal ortamdaki tanımıdır [19]. Kullanılacak sayısal görüntüler, çoğu zaman doğrudan gözlemlenemeyen küçük piksellerden oluşmaktadır. Bu piksellerin birleşimi ile oluşan görüntüde, satır ve sütun piksellerinden oluşan dizey konumlanma biçimi mevcuttur. $A, m \times n$ dizeyi bir görüntü olarak belirtildiğinde, bu görüntünün m adet satır ve n adet sütun pikselden oluştuğu düşünülmelidir. Bu 2 boyutlu sayısal görüntü de aynı zamanda $f(x,y)$ işlevi olarak gösterilebilen, her bir x,y koordinatındaki piksellerin renk, derinlik ve zaman değerleri mevcut, bir sinyaldir. Görüntülerin konum özelliğinde genel bir kabul olarak, sol üst noktadan, başlangıç $(0,0)$ kabul edilerek, y eksenini boyunca aşağı ve x eksenini boyunca sağa doğru her bir piksel 0.5, 1 gibi değerlerle Şekil 3.1'deki gibi artış göstermektedir [20].

Konum özelliği ile birlikte sayısal görüntülerdeki diğer bir özellik de birden fazla renk kanalının kullanılmasıdır [18]. Belirli konumdaki pikseller sahip oldukları renk kanalı veya renk uzayındaki özelliklerini yansıtarak bütün görüntüyü oluşturmaktadırlar. Sıklıkla kullanılan görüntü tiplerinde en basit yapıdan üst düzey yapılara kadar çeşitler bulunmaktadır. Her bir görüntü tipinin renk temsili ve konum özelliğine göre, **İkili (Binary) Görüntülerde** piksel değerlerinin 0 ve 1 olarak gösterildiği ve sadece siyah beyaz görüntünün oluştuğu bir dizey mevcuttur [21]. Şekil 3.2'de de görüldüğü gibi



Şekil 3.1: Piksel Dizimleri (İndices)

Kaynak: The MathWorks, Inc. (2015), Image Processing Toolbox™ User's Guide, bölüm.2-3,2-4. Alındığı tarih:12.04.2015,adres: http://it.mathworks.com/help/pdf_doc/images/images_tb.pdf



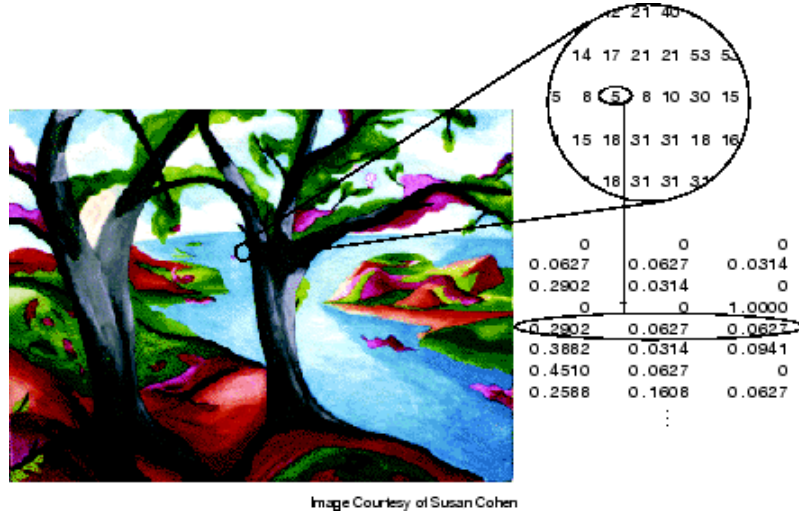
Şekil 3.2: İkili Görüntü Piksel Değerleri

Kaynak: The MathWorks, Inc. (2015), Image Processing Toolbox™ User's Guide, bölüm.2-10. Alındığı tarih:12.04.2015,adres: http://it.mathworks.com/help/pdf_doc/images/images_tb.pdf

siyah ve beyaz tonların yer aldığı bir alandaki piksel değerleri sadece 0 ve 1 değerlerine sahiptir.

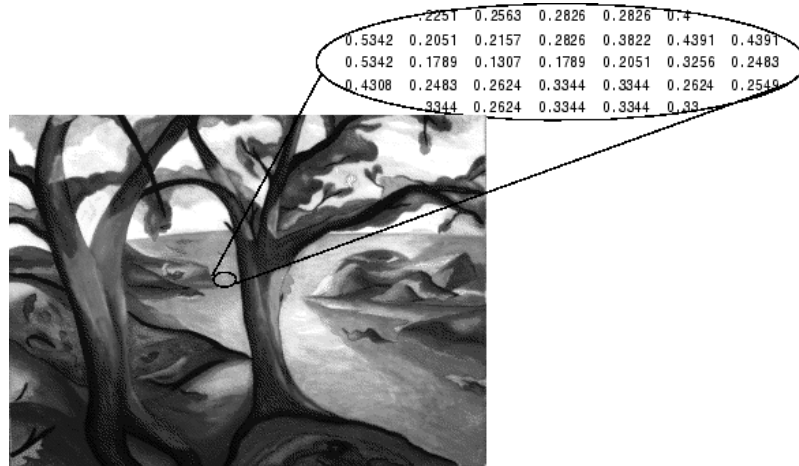
Dizi ve $m \times 3$ boyutundaki renk dizeyinden oluşan **İndeksli görüntülerde**, renk dizeyi Kırmızı, Yeşil ve Mavi (RGB) renklerden oluşmaktadır. Dizide yer alan piksel değerleri ise bu renk dizeyine dizinlenmektedir [22]. Şekil 3.3'te indeksli bir görüntüde yer alan piksel değerleri ve bu piksellerin renk dizelerine olan eşlenmesi yer almaktadır.

Gri Tonlamalı (Grayscale) görüntülerde, renk dizeyinde sadece siyah ve beyazın temsil edildiği 0 ve 1 değerleri bulunmaktadır. Renk değerleri 0 (siyah)-1 (beyaz) arasında $2^8 = 256$ tam değere karşılık gelen gri tonlardan oluşmaktadır [23]. Şekil 3.4, Şekil 3.3'teki görüntünün aynı olarak sadece siyah ve beyaz tonların mevcut olduğu bir yapıya sahiptir.



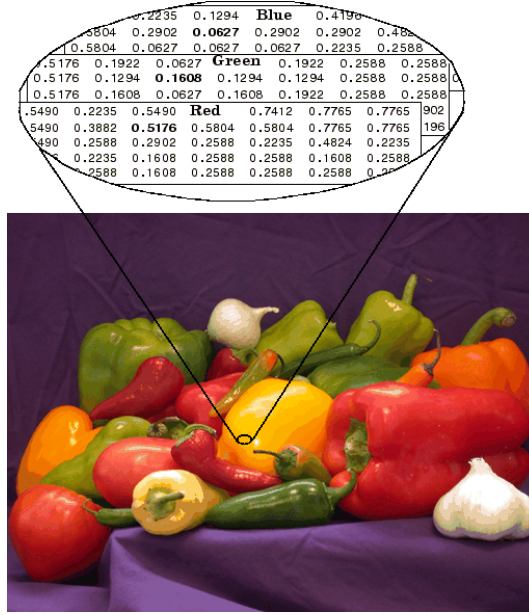
Şekil 3.3: Dizinlenmiş Görüntü Yapısı

Kaynak: The MathWorks, Inc. (2015), Image Processing Toolbox™ User's Guide, bölüm.2-10,2-12. Alındığı tarih:12.04.2015,adres: http://it.mathworks.com/help/pdf_doc/images/images_tb.pdf



Şekil 3.4: Gri Tonlamalı Görüntü Yapısı

Kaynak: The MathWorks, Inc. (2015), Image Processing Toolbox™ User's Guide, bölüm.2-13. Alındığı tarih:12.04.2015,adres: http://it.mathworks.com/help/pdf_doc/images/images_tb.pdf



Şekil 3.5: Gerçek Renkli Görüntü Yapısı

Kaynak: The MathWorks, Inc. (2015), Image Processing Toolbox™ User's Guide, bölüm.2-13. Alındığı tarih:12.04.2015, adres: http://it.mathworks.com/help/pdf_doc/images/images_tb.pdf

Son olarak, **Gerçek renkli görüntülerde** ise her bir pikselin renk değerleri ile birlikte tutulduğu, dolayısıyla dizey boyutunun $m \times n \times 3$ olduğu yapı mevcuttur. Sayısal görüntülerin en sık temsil edildiği sınıf olup, renk uzayları kırmızı, yeşil ve maviden oluşmaktadır [24]. Şekil 3.5'te örnek bir alanda yer alan piksel değerlerin, her bir renk uzayındaki (Kırmızı-Yeşil-Mavi) dizey yapıları ayrı olarak görüntülenmektedir.

3.2 Görüntü Sıkıştırma

Teknoloji yardımıyla görüntüler üzerinde işlem yapabilmek, aslında bir maliyet oluşturmaktadır. Görüntülerin saklanması, gerektiğinde işlenmeye hazır hale getirilmesi ve yeni görüntülerin oluşturulması gibi zaman ve hesaplama maliyetleri, bilgisayar sistemlerinde bellek kullanımını öne çıkarır. Sayısal görüntülerin dizey olarak tutulduğu ve işlendiği daha önce belirtilmiştir. Görüntü boyutu ve özelliğinin değişmesi ile birlikte maliyetlerde de bir değişim söz konusu olacaktır. Çalışmanın devamında da kullanılacak örnek bir görüntü, 384×512 boyutlarında 3 farklı renk uzayına sahiptir. Böyle bir görüntünün bellekte işgal ettiği alanı hesaplamak için aşağıdaki gibi bir hesaplama yapılabilir.

$$(384 \times 512 \times 3)/1024 = 576 \quad (3.1)$$

(3.1)'deki gibi bir hesaplama sonucunda aslında örnek bir görüntü için bellekte 576 kilobayt (KB)'lık bir yer tutulması gerektiği görülmektedir. 384 ve 512 sayıları satır ve sütun toplam piksel değerlerini, 3 sayısı ise gerçek bir görüntüdeki kırmızı, yeşil ve mavi boyutlarını ifade etmektedir. O halde görüntü, gerçek değerli bir görüntü yerine tek boyuttaki gri tonlamalı bir görüntü olsaydı, bu değerlerin 2/3 oranında daha az yer kullanılacağını da hatırlatmakta fayda vardır. Sadece saklama için yapılan bu küçük hesaplamada, sahip olunan görüntüler daha büyük düzeyde veya daha kesin sinyal değerlerine sahip de olabilirdi. Böyle durumlarda görüntülerin saklanması ve üzerlerinde işlemlerin yapılabilmesi amacıyla sıkıştırma kavramına değinmek gerekmektedir.

Görüntü sıkıştırma, özgün bir görüntünün daha az veri ile temsil edilebilmesidir. Temsil edilebilme kısmında görüntüyü oluşturan verilerin belirli kısıtlamalar ve yöntemler dâhilinde işleme alınması gerekmektedir. Verilerin birbirleri olan etkileşimleri dikkate alınarak, özgün görüntüye benzer görüntülerin oluşturulması asıl hedeftir [25]. Ortaya çıkan yeni görüntülerin insan gözünün ayırt edebileceği farklılıklardan, ayırt etme sınırları dışında yer alan farklılıklar da bulunacaktır. Bu farkların hesaplanabilmesi ve nesnel bir yorumla ifade edilebilmesi için de bazı hata ölçümlerinden faydalanılmaktadır. Görüntüler için mevcutta kullanılan ve kabul gören iki adet ölçüm bulunmaktadır. Bu ölçümler “Karesel Ortalama Hata (Mean Square Error - MSE)” ve “Doruk Sinyal Gürültü Oranı (Peak Signal to Noise Ratio – PSNR)” dir.

3.2.1 Karesel Ortalama Hata

Özgün görüntüler ile hesaplama sonucu elde edilen görüntüler arasındaki farkları belirlemenin bir yolu, karesel ortalama hatadan yararlanmaktır. İki veri arasındaki farkın karesi alınarak yapılan bu işlemde, özgün veriden uzaklaşma oranı arttıkça hata değeri daha hızlı oranda artmaktadır. Yöntemin en büyük getirisi, hata değerlerinin eş kabul edilmeyerek farkların sonuca etkisinin ayrı ayrı gözlenebilmesidir. Görüntüler için tanımlanacak karesel ortalama hata [26].

$$MSE = \frac{1}{m \times n} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [f(m,n) - g(m,n)]^2 \quad (3.2)$$

gibi olur. (3.2)'de m ve n değerleri görüntü dizeyindeki satır ve sütun değerlerini, $f(m,n)$ (m,n) konumundaki veriyi, $g(m,n)$ ise hesaplama sonucu oluşan yeni görüntüde (m,n) konumundaki veriyi temsil etmektedir.

3.2.2 Doruk Sinyal Gürültü Oranı

Doruk Sinyal Gürültü Oranı (PSNR)'nda gönderilen yüksek sinyallerin gürültüye oranı hesaplanmaktadır. Sinyal analizinde temiz sinyallerin elde edilmesinde önemli bir değer olan PSNR ölçüm birimi Desibel (Db) kullanılır ve bu birim temiz bir görüntüde 8 bit derinlikte 30Db ile 50Db arasında bulunmaktadır [27].

$$PSNR = 20 \times \log_{10} \left(\frac{\max_f}{\sqrt{MSE}} \right) \quad (3.3)$$

PSNR değerinin bulunmasında, (3.3)'te \max_f olarak ilgili görüntüde yer alan piksellerin azami genişlikleri kullanılmıştır. 8 bitlik bir görüntüde bu değer $2^8 - 1 = 255$ olmaktadır. \sqrt{MSE} olarak da karesel ortalama hataların karekökü kullanılmaktadır.

3.2.3 Tekil Değer Ayrışımı Uygulamaları

Görüntülerin gerçek renkli ve gri tonlamalı örnekleri, 2.1'de tanımı yapılan "Tekil Değer Ayrışımı" yöntemiyle daha az sayıda veri ile temsil edilebilmektedir. Bu yöntemle herhangi bir boyuttaki dizey, kendisini oluşturan bazı özel dizelere ayrılmakta ve görüntü özgünlüğünü bozmayan tekil değerler atılarak daha az maliyetle yeni bir görüntü oluşturulmaktadır [28].

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_r & \dots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{bmatrix} & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

(3.4)'te gösterilimi yapılan TDA yöntemindeki, U, V ve Σ dizeyleri görülmektedir. Σ dizeyinde yer alan elemanlarda $\sigma_1 \dots \sigma_r$ iç dizey elemanları, görüntü özelliklerini bozmayan, 0 harici tekil değerlerdir.

TDA ile sıkıştırma sonucunda görüntü dizyelerinin bellek kullanımları da azalmaktadır. Tek bir renk uzayında, sıkıştırılmayan bir görüntü için kullanılan bellek miktarı aşağıdaki gibi hesaplanabilmektedir.

$$I = m \times n \quad (3.5)$$

(3.5)'te I ile gösterilen bellek miktarı $m \times n$ boyutundaki bir görüntü dizyesinin kullandığı miktardır. Bu dizyeden k adet tekil değer seçilerek oluşturulan yeni sıkıştırılmış görüntüde ise bellek miktarı

$$\begin{aligned} I &= mk + nk + k \\ &= k(m + n + 1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

olmaktadır. Sıkıştırılan görüntüde U dizyesinin kullandığı bellek miktarı mk , V dizyesinin nk ve Σ dizyesinin de k 'dir. Burada önemli bir koşul olarak, seçilen tekil değerlerin sayısında bir sınırlama yapılması gerekmektedir. Bellek kullanımının azaltılması amacıyla yapılan ayrıştırım işleminde (3.5)'teki sıkıştırılmayan görüntünün bellek miktarı, (3.6)'da sıkıştırılan görüntünün bellek miktarından küçük olmamalıdır. Bu sebeple,

$$\begin{aligned} k(m + n + 1) &< mn \\ k &< \frac{mn}{m + n + 1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

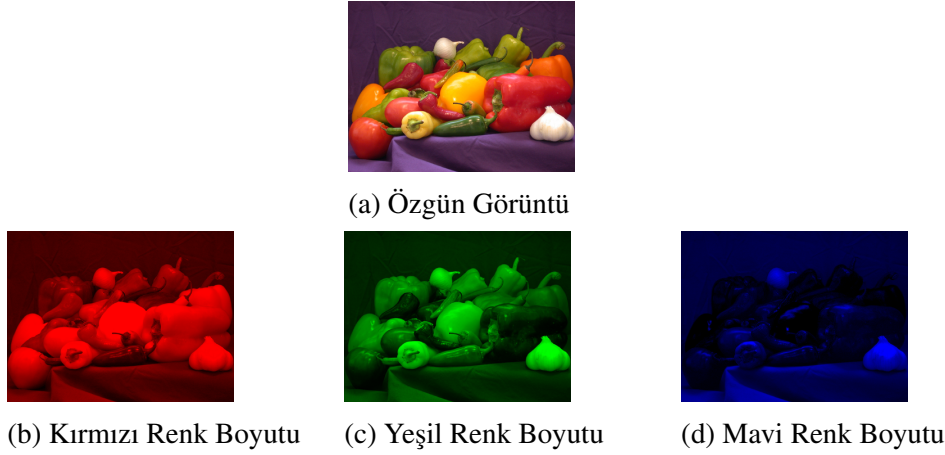
koşulu, seçilen tekil değer sayısı k için geçerli olmalıdır. k için koşulun sağlanması sonucunda, sıkıştırılmayan görüntüye göre sıkıştırılan görüntüde bellek kullanımı azalmakta, dolayısıyla maliyet düşmektedir.

Gri tonlamalı görüntülerde tek bir renk uzayında işlem yapıldığı için tekil değer ayrışımını kullanmakta sorun bulunmamaktadır. Gerçek renkli görüntülerde ise, renk uzay adedi üç tanedir ve mevcut yöntemle tek uzaya indirgenerek çözüm bulunması

mümkün değildir. Bunun yerine, her bir uzay kendi içerisinde bağımsız olarak düşünülmeli ve her bir uzay için tekil değer ayrışımı kullanılmalıdır.

$$A = \begin{bmatrix} A_R \\ A_G \\ A_B \end{bmatrix} \xrightarrow{SVD} \begin{bmatrix} U_1 \Sigma_R V_1 \\ U_2 \Sigma_G V_2 \\ U_3 \Sigma_B V_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

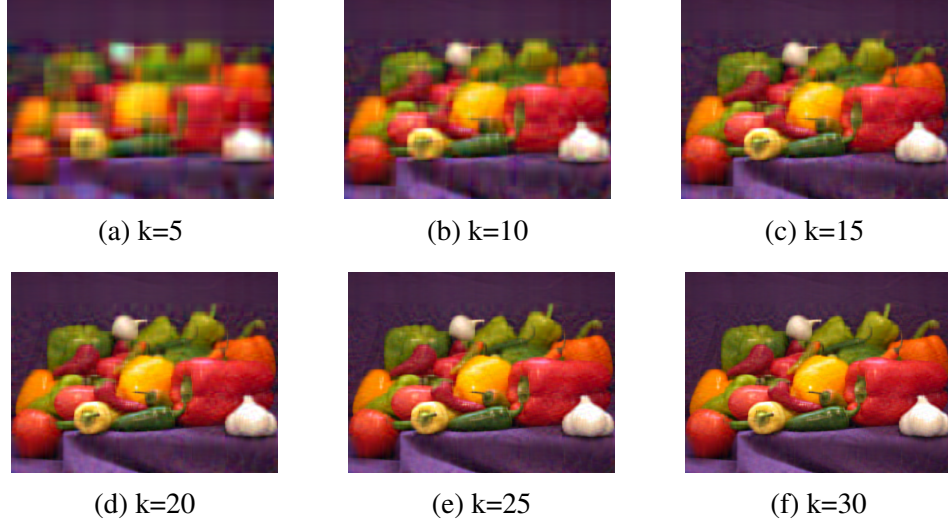
(3.8)'te A görüntü dizeyi öncelikle renk uzaylarına ayrılmakta ve her bir renk uzayı için TDA işlemi ayrı ayrı uygulanmaktadır. İşlemler sonucunda ortonormal yöneyler ve tekil değerlerin oluşturduğu köşegen dizeler yine her bir renk uzayı için ayrı olarak kullanılmaktadır. Şekil 3.6 ilk resimdeki örnek bir görüntü, Şekil 3.6b, Şekil 3.6c ve Şekil 3.6d 'de sırasıyla kırmızı, yeşil ve mavi renk uzaylarına ayrılmıştır.



Şekil 3.6: Kırmızı-Yeşil-Mavi Renk Boyutları

TDA işlemlerini gerçek renkli görüntüler üzerinde kullanırken öncelikle renk uzayına ayırma işlemi uygulanmaktadır. Sonrasında her bir renk uzayına ayrı ayrı TDA yöntemini uygulandığında renklerin her birisi için farklı dizeler elde edilmektedir. İşlem sonucunda elde edilen dizeler, sıkıştırma sonrasında sahip olunan yeni görüntülerdir. Kaç adet tekil değer kullanılacağı kararı ise, Şekil 3.7'deki uygulama sonucunda elde edilen görüntülerde verilecektir.

TDA ayrıştırma işlemi sonucunda farklı tekil değerler ile elde edilen görüntüler Şekil 3.7'de gösterilmiştir. Şekil 3.7a, Şekil 3.7b, Şekil 3.7c, Şekil 3.7d, Şekil 3.7e ve Şekil 3.7f 'de k ile gösterilen değerler, en büyük özdeğerleri temsil etmektedir. Bunların haricinde kalan değerler ise görüntü özgünlüğüne çok fazla etki etmeyen tekil değerler olarak kabul edilip, işleme alınmamıştır. k değerleri büyüdükçe, görüntü, özgünlüğüne git gide yaklaşmaktadır. Buradaki amaç, özgün görüntüdeki dize boyutlarına erişmeden daha düşük boyutlardaki yeni dizeler ile görüntüyü temsil etmektir. Özgün



Şekil 3.7: Farklı Tekil Değerdeki Görüntüler

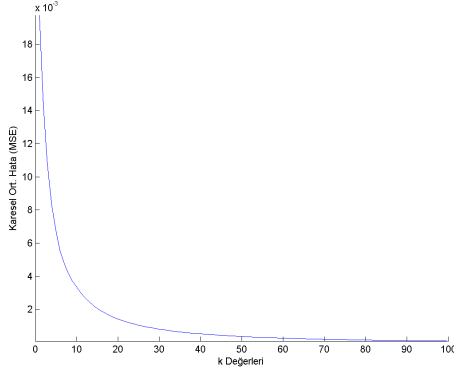
görüntüdeki $384 \times 512 \times 3$ dizey boyutları, Şekil 3.7’de görülen k değerleri ile $k \times k \times 3, k = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ için daha düşük maliyetle hesaplanabilmektedir. Karesel ortalama hata ve doruk sinyal gürültü oranı ile yeni oluşturulan görüntülerdeki hatalar Çizelge 3.1’de incelenebilmektedir.

Çizelge 3.1: TDA Yöntemi ile Sıkıştırılan Görüntünün Hata Ölçümleri

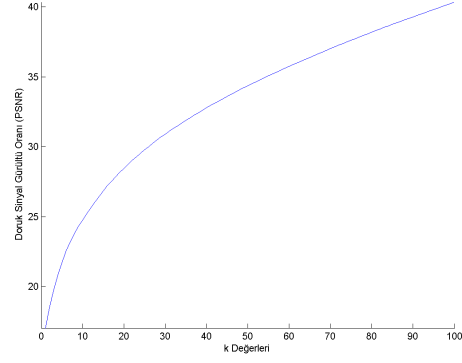
k Değerleri	MSE	PSNR (Db)
1	0.0198	17.0443
5	0.0068	21.6968
10	0.0033	24.7660
25	0.0011	29.7776
50	0.000366	34.3673
75	0.000173	37.6217
100	0.000092	40.3419

Çizelge 3.1’ de bulunan değerler, artan k değerlerine karşılık gelen MSE ve PSNR değerleriyle incelenmesi gerekmektedir.

Çizelge 3.1’de elde edilen sonuçlar grafik halinde gösterilmek istenildiğinde, Şekil 3.8 elde edilmektedir. Şekil 3.8a’daki grafikten de görüleceği üzere k değerlerinin küçük aralıklarda artışı ile birlikte karesel ortalama hatada sert düşüşler ortaya çıkmaktadır. Şekil 3.8a’da ise PSNR değerleri logaritmik olarak artan bir yapıya sahiptir. Daha önce kabul edilen 30 – 50 Db sınırları içerisinde yer almaktadır. Kısacası, tekil değerler özgün görüntüdeki dizey boyutlarının üçte birine eriştiğinde bile gözle görülebilen ve



(a) Tekil Değerler - MSE



(b) Tekil Değerler - PSNR

Şekil 3.8: Farklı Tekil Değerlere (k) Karşılık Hata Ölçümleri

algılanabilen hatalarda büyük düşüş meydana gelmekte, PSNR seviyesi kabul gören derecelere yükselmekte ve karesel hata düşmektedir.

3.2.4 Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi Uygulamaları

Görüntülerin dizey gösterilimi olarak incelenebildiği bilinmektedir. Dizey, ister kare isterse de dikdörtgen dizey şeklinde olsun, ÇYÇÜDG yöntemini uygulamak, herhangi bir sorun teşkil etmeyecektir.

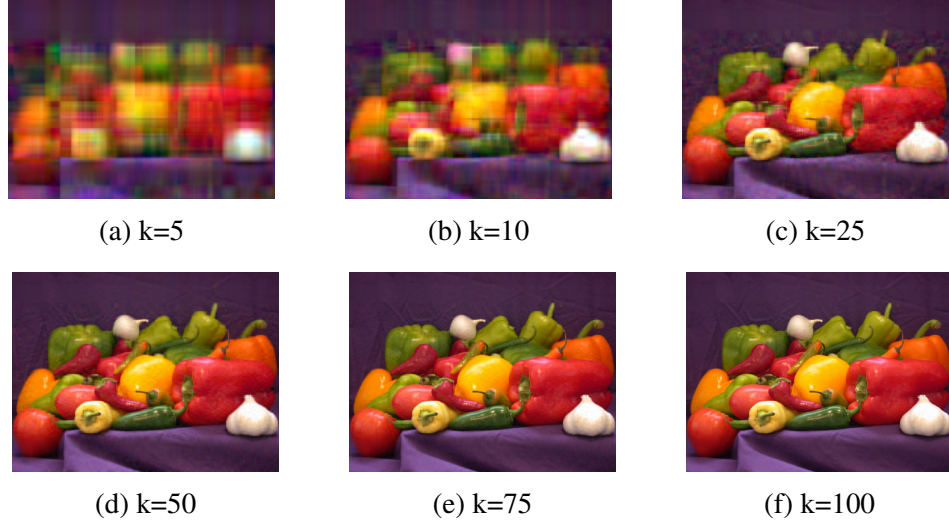
Bellek kullanımı açısından ÇYÇÜDG yöntemi incelendiğinde, tek renk uzayında TDA yönteminde yapılan hesaplama benzer şekilde U ve V dizeylerinin kullanım miktarları aynıdır. Köşegen dizeyde TDA yönteminden farklı olarak alınan üçköşegencil tekil değerleri ise bellek miktarında küçük bir fazlalığa neden olmaktadır. k adet tekil değer kullanılarak sıkıştırılan bir görüntünün bellekteki kullanım miktarı

$$\begin{aligned}
 I &= mk + nk + 3k - 2 \\
 &= k(m + n + 3) - 2
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

(3.9)'da gösterilmektedir. TDA yöntemine göre daha çok sayıda işleme alınan bu köşegen değerleri, bellek kullanımında az da olsa artışa neden olmaktadır.

Dizey gösterilimi şeklinde incelenecek görüntüde, ilk işlem olarak renkli görüntü renk uzaylarına ayrılacaktır. Bu işlem, TDA'nın görüntü üzerinde incelenmesinde de kullanılmıştır. ÇYÇÜDG başlangıç öngörümüleri yardımıyla j . adımda özyineleme

işlemleri sonlandırılacak ve çeşitli adımlarda elde edilen görüntü ekrana yansıtılmış olacaktır.



Şekil 3.9: Farklı Tekil Değerdeki ÇYÇÜDG Görüntüleri

Özyineleme işlemleri çeşitli tekil değerler için sonlandırıldığında oluşan görüntüler Şekil 3.9'daki gibidir. ÇYÇÜDG işleminde, özyineleme işlemlerinin sayısı arttıkça özgün görüntüye ulaşılma imkânı da artmaktadır. Düşük adımlarda oluşan görüntüler, özgün görüntülerden bir hayli uzak olsa da, özgün düzey boyutlarına ulaşmadan adım sayıları artırıldığında görüntünün belirginliği de farkedilmektedir.

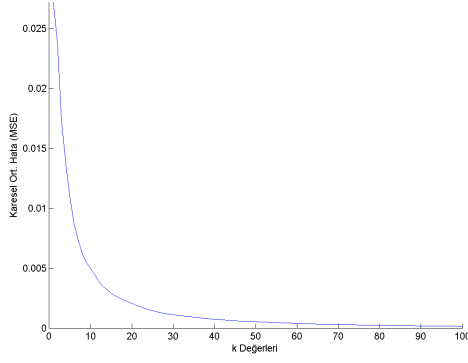
TDA yönteminde kullanıldığı gibi, hata ölçümlerinin de bu görüntülerde açıklanması mümkündür. Ölçümler yapılırken, hazırda mevcut olan özgün görüntü ile farklı adımlarda elde edilen görüntüler arasındaki farklar hesaplanmıştır.

Çizelge 3.2: ÇYÇÜDG ile Sıkıştırılan Görüntünün Hata Ölçümleri

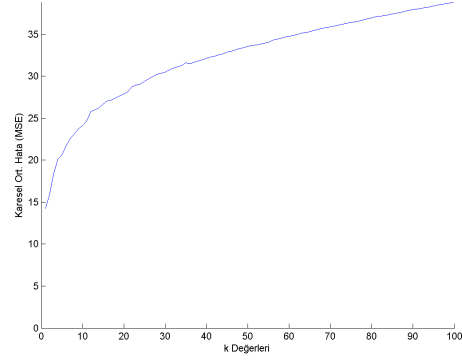
k Değerleri	MSE	PSNR (Db)
1	0.0272	14.2446
5	0.0110	20.6299
10	0.0050	24.1271
25	0.0015	29.3935
50	0,00052	33.5893
75	0.00026	36.4097
100	0.00014	38.8358

Çizelge 3.2'den bulunan değerlerin, artan k değerlerine karşılık gelen MSE ve PSNR değerleriyle incelenmesi gerekmektedir.

ÇYÇÜDG için hata ölçümlerinin yer aldığı Şekil 3.10, aslında TDA yönteminde bulunan grafikte benzerlik taşımaktadır. Her ikisinde de ortak nokta olarak,



(a) Tekil Değerler - MSE



(b) Tekil Değerler - PSNR

Şekil 3.10: Farklı Tekil Değerlere (k) Karşılık Hata Ölçümleri

özyinelemelerin artmasıyla birlikte azalma eğilimi gösteren MSE değerleri ve tam tersi artan PSNR değerleridir. Hem TDA hem de ÇYÇÜDG yöntemleri karşılaştırıldığında, elde edilen veriler ve yöntemlerin doğruluğu daha net bilgiler verecektir. Bu amaçla, öncelikle TDA yönteminde uygulanan adımlar ile görüntü oluşturulmuş, sonrasında ise ÇYÇÜDG yöntemi ile aynı görüntüye yeniden ulaşmaya çalışılmıştır. Her iki yöntemin kendine has özellikleri ile oluşturulan görüntülerin hata ölçümleri ise Çizelge 3.3'teki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 3.3: Tekil Değer Ayırıştırması – ÇYÇÜDG Hata Analizi

k	TDA			ÇYÇÜDG		
	MSE	PSNR (Db)	Bellek (Byte)	MSE	PSNR (Db)	Bellek (Byte)
1	0.0198	17.0443	262650	0.0272	14.2446	264521
5	0.0068	21.6968	368661	0.0110	20.6299	381207
10	0.0033	24.7660	419271	0.0050	24.1271	433009
25	0.0011	29.7776	495060	0.0015	29.3935	503881
50	0.000366	34.3673	600659	0.00052	33.5893	605503
75	0.000173	37.6217	623126	0.00026	36.4097	635895
100	0.000092	40.3419	647982	0.00014	38.8358	670662

Çizelge 3.3'ten hareketle, belirli adım aralıklarında, iki yöntem de azalan karesel ortalama hata eğilimine sahiptir. Yine, her iki yöntem de artan ve kabul edilen PSNR değerleri arasına erişebilme özelliğini taşımaktadır. Bellek kullanımı incelendiğinde, özgün görüntünün yaklaşık 768 Kb yer tuttuğu bilindiğinde, sıkıştırılan görüntülerin hem TDA hem de ÇYÇÜDG yöntemleriyle daha az bellek kullanmakta olduğu görülmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta ise, aynı adım sayılarında TDA yönteminde ÇYÇÜDG yöntemine göre hata oranının daha az çıkmasıdır. Bu, aslında özgün görüntü elde etmede daha az maliyetle daha hızlı, yani daha iyi görüntü

elde etme imkânı sunmaktadır. ÇYÇÜDG' nin TDA yöntemi ile kıyaslanması, hatta TDA yönteminden daha hızlı sonuca ulaşabilmesi amacıyla da çalışmalar devam etmektedir.

4. GÖRÜNTÜ ONARIMI

Sayısal görüntülerde zaman zaman karşılaşılan, göze hoş gelmeyen bazı bozukluklar olabilmektedir. Görüntünün net olarak algılanamadığı ve gözde beğeni hissini zayıfladığı bu durumlar, sayısal görüntülerde onarım veya zenginleştirme gibi kavramların gelişmesinde etkili olmuştur. Genellikle, görüntünün elde edilmesi veya aktarılması esnasında oluşan bozulmalar, yukarıda bahsedilen durumların kaynağı olmakta ve görüntü işlemede sıkça kullanılan gürültü tanımını oluşturmaktadır [29]. Gürültü oluşması, görüntünün elde edileceği zamandaki ışık miktarındaki değişim, hareketin varlığı gibi sebepler veya iletilmesi esnasındaki kalitesiz malzemelerin kullanımı, sıcaklık değişimleri gibi olumsuz etkenlerden kaynaklanabilir. Görüntülerde yer alan bu gürülteler, oluşan yeni görüntüleri özgün görüntülerden bir hayli uzaklaştırabilmektedir.

Bu olumsuz durumların giderilmesi amacıyla görüntü onarımından (restorasyon) bahsedilecektir. Görüntü zenginleştirmeden farklı olarak, görüntü onarımında mevcut olan bozuklukların giderilmesi-azaltılması amaçlanmaktadır. Görüntü zenginleştirme ise varolan sağlam görüntüler üzerinde oynama yapılarak daha iyi, güzel gibi kavramlarla algılanması söz konusudur. Yani, zenginleştirme öznel bir işlem iken, görüntü onarımı birtakım matematiksel işlemler tabanlı nesnel bir işlemdir [29]. Görüntülerde yer alan gürültülerin giderilmesi hatta çoğu zaman ancak azaltılabilmesi için modeller oluşturulmaktadır. Bu modellerin tanımları ve uygulamaları sonraki bölümde ele alınacaktır. Öncelikle görüntü onarımı işlemlerine başlanmadan önce izlenecek adımların belirtilmesi gerekmektedir.

İlk başta, özgün görüntü üzerine gürültü işlevleri eklenerek yeni, bozuk bir görüntü elde edilecektir. Bozulan görüntünün onarımı için de birtakım çözüm yöntemleri uygulanarak, görüntüdeki baskın değerler alınıp, gürültülü değerler ihmal edilerek özgün görüntüye benzer görüntüler oluşturulacaktır. Uygulanan yöntemlerin hata ölçümleri yapılarak doğruluklarına karar verilecek ve son olarak da uygulama adımları verilen karara göre tekrarlanıp, tekrarlanmayacaktır.

Gürültülü bir görüntünün matematiksel olarak gösterilimi,

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + \eta(x,y) \quad (4.1)$$

olarak ifade edilebilir. 4.1 eşitliğinde $g(x,y)$ bozulan görüntüyü, $h(x,y)$ indirgeme işlevini, $f(x,y)$ gürültü eklenmeden önceki görüntüyü ve son olarak buradaki uygulamalar için önemli bir işlev olan $\eta(x,y)$ de eklenen gürültüyü temsil etmektedir. İndirgeme işlevinin yer almadığı durumlarda eşitlik,

$$g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y) \quad (4.2)$$

4.1 'den 4.2 haline gelecektir. 4.2'de de belirtilen $\eta(x,y)$ işlevi içinse birden fazla model bulunmaktadır.

4.1 Gürültü Modelleri

Bu bölümde, görüntüler üzerine uygulanacak bazı gürültü işlevleri yer almaktadır. 4.2'de bulunan $\eta(x,y)$ için ortaya konulan model tiplerinde, gürültünün gri seviyesi bazı özel dağılımlar ile gösterilmiştir. Bu özel dağılımlar düzgün dağılımlı olabildiği gibi, düzensiz veya sabit değerlerden de oluşabilmektedir.

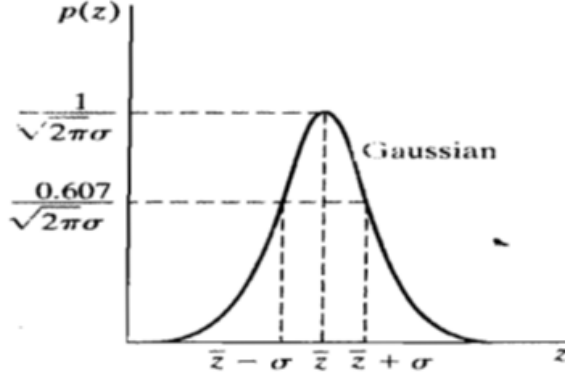
Her bir model tipinin sahip olduğu dağılıma göre görüntü üzerindeki etkileri birbirlerinden çok farklı olacaktır.

4.1.1 Gaussian Gürültüsü

Gürültü modellerinde sıkça kullanılan Gaussian modelinde, gürültünün gri seviye değerleri normal olarak dağılmıştır. 4.3'teki gibi normal bir dağılımda, z piksel yoğunluğunu, \bar{z} ortalama değeri, σ standart sapmayı ve σ^2 de varyansı temsil etmektedir [30].

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma^2}} \quad (4.3)$$

Normal dağılıma uyan Gauss gürültü modelinde de, gürültünün gri seviye değerleri Şekil 4.1'de gösterilmektedir.



Şekil 4.1: Gauss Gürültüsü

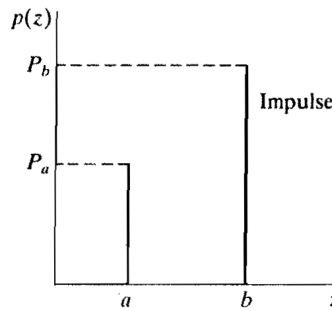
Kaynak: Gonzalez, R.C. and Woods, R.E. (2008). Digital Image Processing, Pearson Prentice Hall,3. sürüm, s.337

4.1.2 Tuz-Biber Gürültüsü

Bir diğer gürültü çeşidi olan tuz-biber gürültüsünde, Gauss dağılımı gibi dağılımlara uyan gürültüler yerine iki değere sahip gürültüler mevcuttur. Bu değerlerin olasılığı 0.1'den düşük olmakla birlikte olasılık arttıkça gürültü etkisi de artmaktadır. Tuz-biber isimlendirmesi, görüntü üzerinde oluşan keskin açık renkli beyaz noktalar (tuz) ve keskin siyah renkli noktalardan (biber) kaynaklanmaktadır. z piksel yoğunluğunu, a, b iki mümkün değeri göstermek üzere, tuz-biber gürültüsünün olasılık yoğunluk işlevi aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir [31].

$$P(z) = \begin{cases} P_a & , z = a \\ P_b & , z = b \\ 0 & , z \neq a, b \end{cases} \quad (4.4)$$

4.4'te a, b iki mümkün değerine karşılık gelen yoğunluk işlevleri Şekil 4.2'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 4.2: Tuz-Biber Gürültüsü

Kaynak: Gonzalez, R.C. and Woods, R.E. (2008). Digital Image Processing, Pearson Prentice Hall,3. sürüm, s.337

4.2 Görüntü Onarımı için Tekil Değer Ayrışımı Uygulamaları

Görüntü onarımında, TDA uygulamasından önce mevcut görüntü üzerinde bazı işlemler gerçekleştirilmektedir. Görüntünün elde edilmesi esnasında birtakım elektriksel aksaklıkların meydana geldiği ve haliyle görüntünün üzerinde gürültülerin oluştuğu varsayılmaktadır.

Uygulamalarda kullanılan iki farklı tipteki gürültü örneğinde, gürültü tipleri ve oluşan gürültülü görüntüler farklılık gösterse de TDA yöntemi ile kullanılan görüntü onarımı işlemi benzerdir.

$$b = A + \eta \quad (4.5)$$

Gauss gürültü örneğinde, 4.5'te örnek görüntü dizeyi A üzerine eklenen gürültü işlevi ve oluşan gürültülü görüntü görülmektedir. Gürültülü b görüntüsünde, η gürültü işlevi, Gauss gürültü tipine has özellikleri taşımaktadır.

$$\eta = \sqrt{\sigma} * \gamma + \mu \quad (4.6)$$

Gürültü işlevinin temsil edildiği 4.6 ile γ işlevi, özgün görüntü boyutlarında normal dağılıma uyan rassal değerler olarak seçilmektedir. Gürültülü elde edilen b görüntü dizeyinde TDA uygulaması ile gürültü özelliği gösteren 0 veya 0 'a çok yakın tekil değerler ihmal edilerek temiz görüntülerin elde edilmesi sağlanmaktadır.

Tuz-Biber gürültü örneğinde ise, örnek görüntü dizeyi A 'ya gürültü işlevi ekleme yerine, görüntü piksel değerlerinin değiştirilmesi işlemi yapılmaktadır.

$$b = A * \eta \quad (4.7)$$

Tuz-Biber gürültü özelliklerine sahip η işlevi, belirli olasılıklarda A görüntü dizeyi elemanlarına 0 ve 1 değerlerini atamaktadır.

$$b(i, j) = \begin{cases} 0 & , \quad \eta(i, j) < (d/2) \\ 1 & , \quad \eta(i, j) \geq (d/2) \quad \& \quad \eta(i, j) < d \end{cases} \quad (4.8)$$

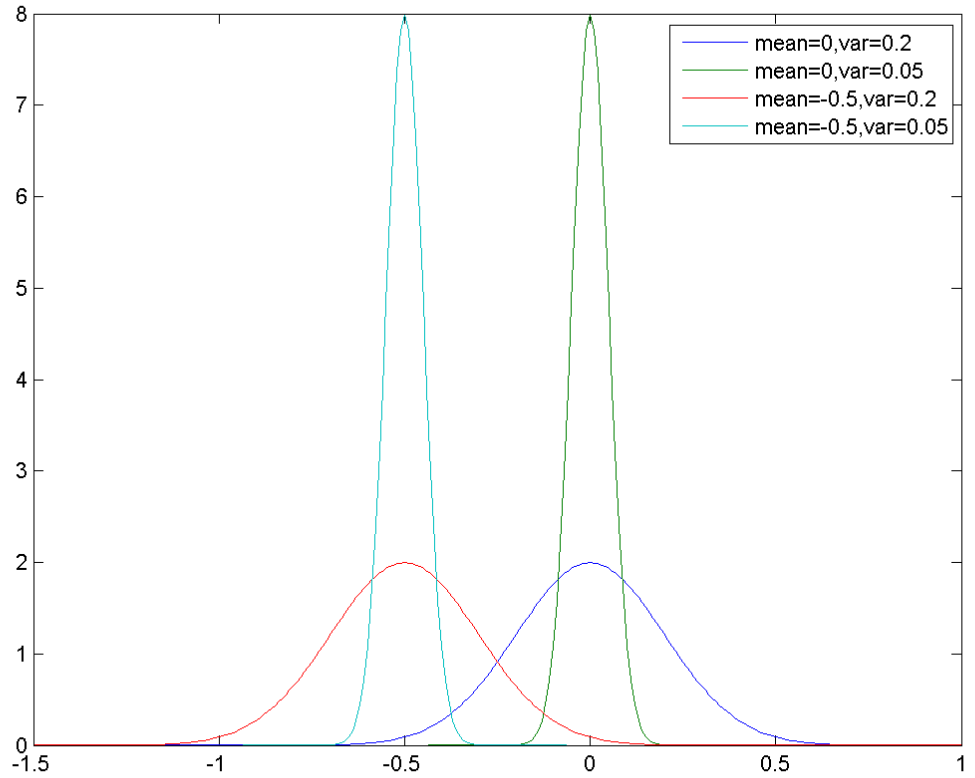
Tuz-Biber gürültüsünde gürültü yoğunluğunu temsil eden d' 'ye göre η işlevinin özellikleri değişerek özgün görüntüler üzerinde açık-koyu noktalar oluşmaktadır.

Gürültülerin eklenmesi sonrası aynı yapıda elde edilen gürültülü görüntülere TDA yöntemi ile onarım işlemleri gerçekleştirilmektedir.

$$b = USV^T = u_1\sigma_1v_1^T + u_2\sigma_2v_2^T + \dots + u_k\sigma_kv_k^T + \dots + u_r\sigma_rv_r^T \quad (4.9)$$

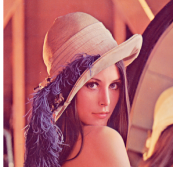
Gürültülü görüntü üzerinde TDA işleminin yapıldığı 4.9'da uygun tekil değer sayılarının seçimi ise önemlidir. Tekil değerlerde görüntüyü temsil eden k adet baskın değer alınmakta, geriye kalan ve gürültüyü oluşturan $n - k$ adet değer ihmal edilmektedir. Bu sebeple, onarım işlemleri farklı tekil değer sayılarında sonlandırılarak gerekli hata ölçümleri yapıp, işlemlerin devamına karar verilmektedir.

Uygulamalara başlanılmadan önce, normal dağılıma uygun olarak seçilen gürültülerin farklı ortalama ve varyans değerleri aynı grafik üzerinde Şekil 4.3'te görülmektedir.

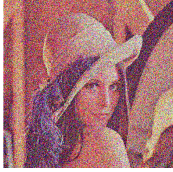


Şekil 4.3: Gauss Gürültü Örnekleri

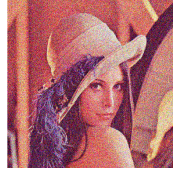
Gürültü tipi olarak dört farklı özellikteki Gauss gürültüsünün seçilerek, özgün görüntü üzerine eklenmesiyle oluşan yeni görüntüler Şekil 4.4'teki gibi elde edilebilmektedir.



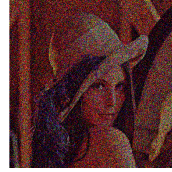
(a) Özgün Görüntü



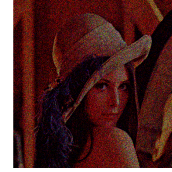
(b) $\mu : 0, \sigma^2 : 0.2$



(c) $\mu : 0, \sigma^2 : 0.05$



(d) $\mu : -0.5, \sigma^2 : 0.2$



(e) $\mu : -0.5, \sigma^2 : 0.05$

Şekil 4.4: Gauss Gürültüsünün Görüntülere Etkisi

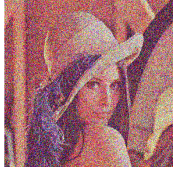
Şekil 4.4'te dört ayrı özellikteki Gauss gürültüsünün, özgün görüntüye etkisi görülmektedir. Elde edilen yeni görüntüler, özgün görüntünün üzerine eklenen birbirinden farklı ortalama ve varyans değerlerdeki gürültülerin eklenmesiyle oluşmuştur. Bu gürültülerin görüntülerdeki tonlama, belirginlik gibi bazı özellikleri değiştirdikleri fark edilmektedir.

Bu kısımdan sonraki amaç, görüntüler üzerinde oluşan gürültülerin TDA yöntemi ile temizlenmeye çalışılması ve özgün görüntüye benzer fakat birebir aynı olamayan görüntülerin elde edilmesi olacaktır.

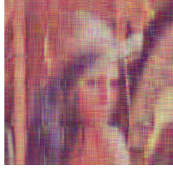
Şekil 4.4'te yer alan gürültülü görüntüler üzerine, sırasıyla TDA uygulaması, uygun tekil değerlerin seçilmesi ve hata ölçümlerinin yapılması işlemleri gerçekleştirilecektir.

Uygulamaların ilk adımında, Şekil 4.4b'ye TDA yöntemi uygulandıktan sonra farklı tekil değerler alınarak oluşturulan yeni görüntüler Şekil 4.5'te görülmektedir. Tekil değer sayıları arttığında görüntülerde görsel olarak bir iyileşmenin varlığından söz etmek mümkündür. Nesnel bir değerlendirme ve karşılaştırmaların yapılabilmesi için TDA ile görüntü onarımı Şekil 4.4'teki diğer görüntülere de uygulanmalıdır.

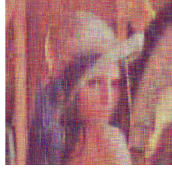
Şekil 4.4c'ye TDA uygulaması gerçekleştirildiğinde, Şekil 4.6'da da görüleceği gibi tekil değerlere karşılık gelen gürültülü görüntüler oluşmaktadır. Bu kısımda da işleme alınan tekil değerlerle, görüntü belirginliklerinin artması doğru orantılı olarak gitmektedir.



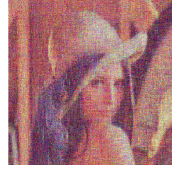
(a) Gürültülü Görüntü



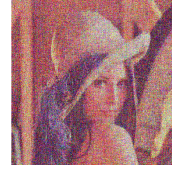
(b) k=10



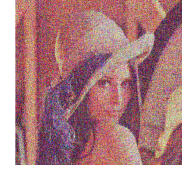
(c) k=20



(d) k=50

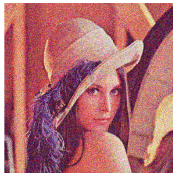


(e) k=100

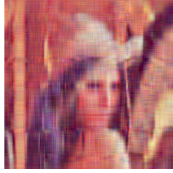


(f) k=150

Şekil 4.5: $\mu = 0, \sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsü TDA Uygulaması



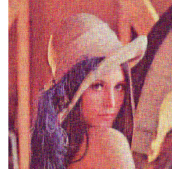
(a) Gürültülü Görüntü



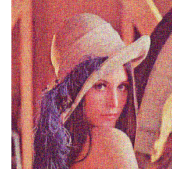
(b) k=10



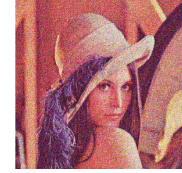
(c) k=20



(d) k=50



(e) k=100



(f) k=150

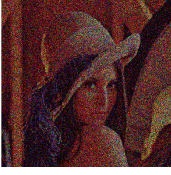
Şekil 4.6: $\mu = 0, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsü TDA Uygulaması

Devam edilerek, Şekil 4.4d 'ye TDA uygulaması gerçekleştirildiğinde, Şekil 4.7'deki gibi gürültülü görüntüler elde edilmektedir.

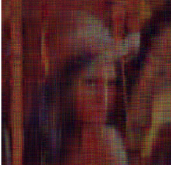
TDA uygulamasında son olarak, Şekil 4.4e 'ye TDA işlemi gerçekleştirildiğinde, Şekil 4.8'deki tekil değerlere karşılık gelen gürültülü görüntüler ortaya çıkmaktadır.

Onarım işlemleri sonrasında elde edilen görüntülerdeki hata değerlerinin, özgün görüntüye eklenen hatalara göre karşılaştırılması gerekmektedir. Karşılaştırma yapılırken başlangıçtaki belirli ortalama ve varyans değerlerindeki gürültülü görüntü, özgün görüntüye göre hem karesel ortalama hata hem de doruk sinyal gürültü oranı açısından incelenmektedir.

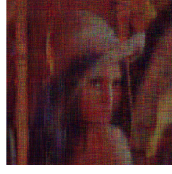
Sonrasında ise hesaplama yapılan tekil değer sayıları arttırılarak, onarım işleminde TDA yönteminin kullanılmasıyla ortaya çıkan görüntülerdeki hatalar Çizelge 4.1'deki gibi karşılaştırılmaktadır.



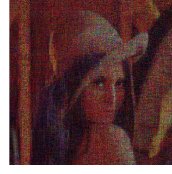
(a) Gürültülü Görüntü



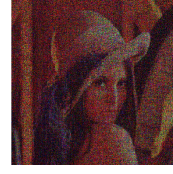
(b) k=10



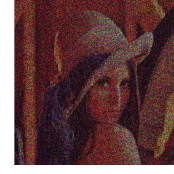
(c) k=20



(d) k=50

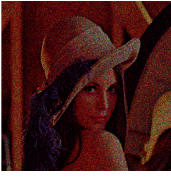


(e) k=100

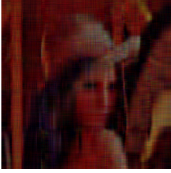


(f) k=150

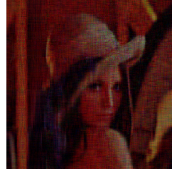
Şekil 4.7: $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsü TDA Uygulaması



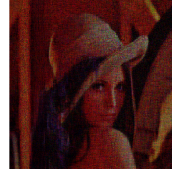
(a) Gürültülü Görüntü



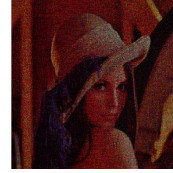
(b) k=10



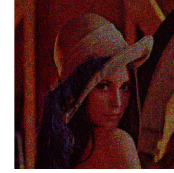
(c) k=20



(d) k=50



(e) k=100



(f) k=150

Şekil 4.8: $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsü TDA Uygulaması

Çizelge 4.1'den hareketle, belirli ortalama ve varyans değerlerindeki Gauss gürültüsü için onarım işleminde TDA yönteminin verdiği sonuçlar değişkenlik göstermektedir. Bu değişkenlik, sabit ortalama ve varyans değerlerinde tekil değerlerin sayısına göre artan bir eğilimdedir.

En başta gürültülü olan görüntünün karesel ortalama hatası ve doruk sinyal gürültü oranı istenilen seviyelerde değildir. Elde edilen hata değerleri büyüktür.

TDA işlemiyle tekil değer sayılarının artırılarak boyutların yeniden oluşturulduğu görüntülerde, 0'a yakın tekil değerlerin işleme alınması sebebiyle, hatalar artma eğilimine geçmektedir. Eğer özgün görüntüdeki boyutlara kadar tekil değerler (k) büyütülseydi, ilk baştaki gürültülü görüntünün hata değerlerine ulaşılmış olacaktır. Bu ise kabul edilebilecek bir durum değildir.

Çizelge 4.1: TDA ile Görüntü Onarımı

$\mu = 0$, $\sigma^2 = 0.2$	MSE	PSNR
Gürültülü Görüntü	0.1093	9.6145
$k = 10$	0.01697	18.94655
$k = 20$	0.02297	18.32824
$k = 50$	0.03963	16.92923
$k = 100$	0.06150	15.85099
$k = 150$	0.07766	15.03251
$\mu = 0$, $\sigma^2 = 0.05$	MSE	PSNR
Gürültülü Görüntü	0.0413	13.8528
$k = 10$	0.00763	22.08366
$k = 20$	0.00781	22.27978
$k = 50$	0.01387	20.71513
$k = 100$	0.02244	19.30035
$k = 150$	0.02881	17.88130
$\mu = -0.5$, $\sigma^2 = 0.2$	MSE	PSNR
Gürültülü Görüntü	0.1716	7.6512
$k = 10$	0.11580	8.21718
$k = 20$	0.11954	9.65275
$k = 50$	0.12964	11.06273
$k = 100$	0.14312	10.86680
$k = 150$	0.15291	10.83156
$\mu = -0.5$, $\sigma^2 = 0.05$	MSE	PSNR
Gürültülü Görüntü	0.1701	7.6922
$k = 10$	0.15566	5.14255
$k = 20$	0.15583	6.03071
$k = 50$	0.15866	7.80731
$k = 100$	0.16249	8.42609
$k = 150$	0.16531	8.52510

4.3 Görüntü Onarımı için Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegen-cil Dizey Gösterilimi Uygulamaları

TDA yöntemi ile onarım işlemi gibi bu bölümde de daha farklı bir yöntemle onarım işlemi gerçekleştirilecektir. TDA yöntemine benzer şekilde dizeylerin daha az boyutlarda gösteriliminin sağlandığı ÇYÇÜDG yöntemi ile onarımda, öncelikle özgün görüntü üzerine Gauss ve Tuz-Biber gürültüsü eklenmektedir. Eklenen bu gürültü özellikleri bir önceki bölümde yer alan gürültü özellikleri ile aynı yapıdadır.

Eklenen Gauss gürültü özelliği 4.10'da ve Tuz-Biber gürültü özelliği de 4.11'de görülmektedir.

$$\eta = \sqrt{\sigma} * \gamma + \mu \quad (4.10)$$

$$b(i, j) = \begin{cases} 0 & , \quad \eta(i, j) < (d/2) \\ 1 & , \quad \eta(i, j) \geq (d/2) \quad \& \quad \eta(i, j) < d \end{cases} \quad (4.11)$$

Sonrasında, farklı tipteki iki gürültünün özgün görüntüye eklenmesiyle elde edilen gürültülü görüntüler üzerinde onarım işlemine başlanılmaktadır. Gürültüyü azaltmak amacıyla ÇYÇÜDG'nin özyineleme adımları tekrarlanmakta, her bir adım sonrası oluşan görüntülerin karesel ortalama hata ve doruk sinyal gürültü oranları hesaplanmaktadır.

$$A^{(k)} = \alpha_{k+1} u_{k+1} v_{k+1}^T + \beta_{k+1} u_{k+2} v_{k+1}^T + \gamma_{k+1} u_{k+1} v_{k+2}^T + A^{(k+1)} \quad (4.12)$$

TDA yönteminden farklı olarak seçilen destek yöneyleri ve katsayılar yardımıyla ÇYÇÜDG yönteminde onarım işlemi gerçekleştirilmektedir. Özyineleme adımları sonrası oluşan görüntü özellikleri tekil değer sayılarının seçimine bağlı olarak değişmektedir. Görüntüdeki baskın tekil değerler alınarak, geriye kalan ve gürültüyü oluşturan değerler ihmal edilmektedir. Tekil değer sayılarının belirlenmesinin ardından özyineleme işlemleri durdurulmakta ve oluşan görüntüler incelenmektedir.

k adet tekil değer kullanıldığı ÇYÇÜDG yöntemi ile onarım işleminde elde edilen görüntü düzeyi 4.13'teki gibidir.

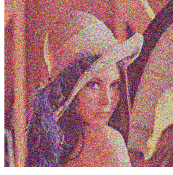
$$A = \sum_{j=1}^k \alpha_j u_j v_j^T + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j u_{j+1} v_j^T + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j u_j v_{j+1}^T \quad (4.13)$$

4.13'te gösterilimi yapılan görüntü dizeyinde, öncelikle $\mu = 0$, $\sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsüne sahip ÇYÇÜDG ile onarım uygulaması gerçekleştirilecek ve farklı tekil değerler olarak ortaya çıkan görüntüler incelenecektir.

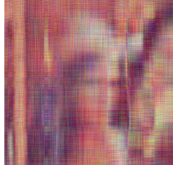
Şekil 4.4b'ye ÇYÇÜDG yöntemi uygulandığında farklı tekil değerlerde görüntüler Şekil 4.9'daki gibi oluşmaktadır.

Şekil 4.9'da tekil değer sayılarının artmasına bağlı olarak, görüntülerin daha belirginleşmeye başladığı görülebilmektedir. Belirginleşen görüntüler, TDA ile görüntü onarımı uygulaması sonrası oluşan görüntülere benzerlik göstermektedir.

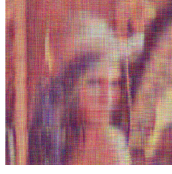
İşlemlere devam edilerek ÇYÇÜDG ile diğer ortalama ve varyans değerlerindeki gürültülü resimler incelenebilmektedir.



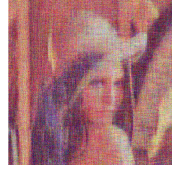
(a) Gürültülü Görüntü



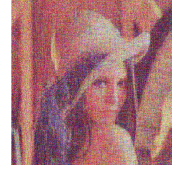
(b) k=10



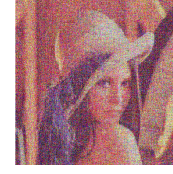
(c) k=20



(d) k=50



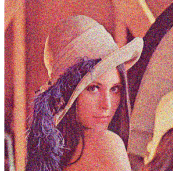
(e) k=100



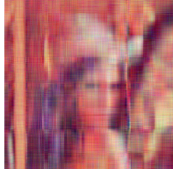
(f) k=150

Şekil 4.9: $\mu = 0, \sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsü ÇYÇÜDG Uygulaması

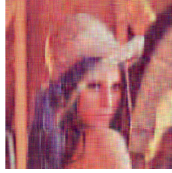
$\mu = 0, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsüne sahip Şekil 4.4c'deki görüntüye ÇYÇÜDG uygulaması sonrası farklı tekil değerlerle ortaya çıkan görüntüler Şekil 4.10'daki gibidir.



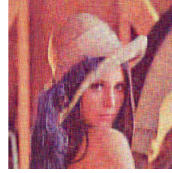
(a) Gürültülü Görüntü



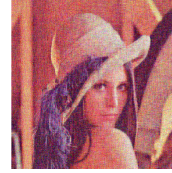
(b) k=10



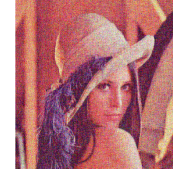
(c) k=20



(d) k=50



(e) k=100



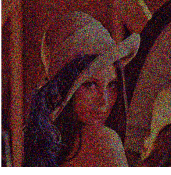
(f) k=150

Şekil 4.10: $\mu = 0, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsü ÇYÇÜDG Uygulaması

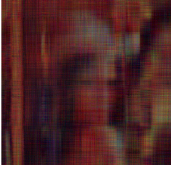
Şekil 4.10'da benzer şekilde farklı ortalama ve varyans değerlerine sahip gürültüler yer alsa da, tekil değer sayılarının artmasıyla beraber görüntülerdeki belirginlikler de artmaktadır.

Devam edilerek, $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsüne sahip Şekil 4.4d'deki görüntüye ÇYÇÜDG uygulaması sonrası farklı tekil değerlerle ortaya çıkan görüntüler Şekil 4.11'deki gibidir.

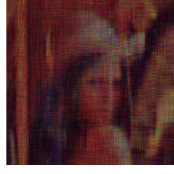
Son olarak, $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsüne sahip 4.4e'deki görüntüye ÇYÇÜDG uygulaması sonrası farklı tekil değerlerle ortaya çıkan görüntüler Şekil 4.12'de elde edilmektedir.



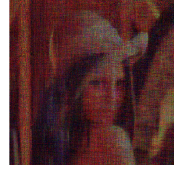
(a) Gürültülü Görüntü



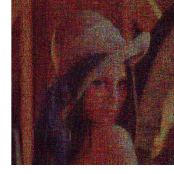
(b) k=10



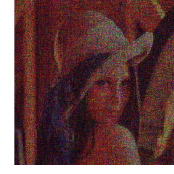
(c) k=20



(d) k=50

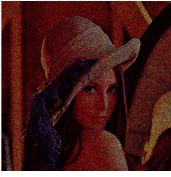


(e) k=100

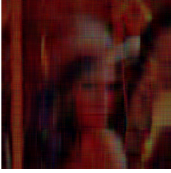


(f) k=150

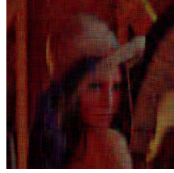
Şekil 4.11: $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.2$ Gauss Gürültüsü ÇYÇÜDG Uygulaması



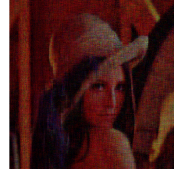
(a) Gürültülü Görüntü



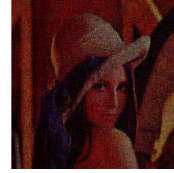
(b) k=10



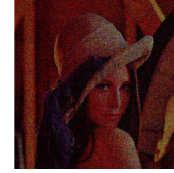
(c) k=20



(d) k=50



(e) k=100



(f) k=150

Şekil 4.12: $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.05$ Gauss Gürültüsü ÇYÇÜDG Uygulaması

Dört farklı Gauss gürültüsü için, ÇYÇÜDG ile görüntü onarımı uygulanmış ve en büyük tekil değerler alınarak, daha az boyutlardaki görüntü dizeyleri oluşturulmuştur.

Görüntü onarımı amacıyla yapılan işlemler, Çizelge 4.2’de görülmektedir.

Başlangıçta gürültü eklenen görüntülerdeki ve onarımla birlikte artan tekil değerlere karşılık elde edilen görüntülerdeki hata değerleri çizelgeye eklenmiştir. Hata ölçümleri, bu çalışmada kaynak olarak karesel ortalama hata ve doruk sinyal görüntü onarımını kapsamaktadır.

Çizelge 4.2’de görünen veriler, TDA yöntemi ile bulunan veriler ile aynı özellik göstermektedir.

İki yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için aynı çizelge üzerinde veriler incelenebilmektedir. Bu veriler içerisine diğer bir gürültü yöntemi olan Tuz-Biber gürültüsü de eklenip, bir sonraki bölümde karşılaştırılması yapılmıştır.

Çizelge 4.2: ÇYÇÜDG ile Görüntü Onarımı

$\mu = 0$, $\sigma^2 = 0.2$	MSE	PSNR
Gürültülü Görüntü	0.1094	9.6164
$k = 10$	0.01716	18.23446
$k = 20$	0.01891	18.62251
$k = 50$	0.02902	17.62680
$k = 100$	0.04503	16.84223
$k = 150$	0.05942	16.16384
$\mu = 0$, $\sigma^2 = 0.05$	MSE	PSNR
Gürültülü Görüntü	0.0412	13.8528
$k = 10$	0.00963	20.78558
$k = 20$	0.00817	21.75878
$k = 50$	0.01083	21.35280
$k = 100$	0.01684	19.78066
$k = 150$	0.02229	18.97849
$\mu = -0.5$, $\sigma^2 = 0.2$	MSE	PSNR
Gürültülü Görüntü	0.1717	7.6512
$k = 10$	0.11583	7.55874
$k = 20$	0.11699	8.15717
$k = 50$	0.12324	9.75103
$k = 100$	0.13319	11.21335
$k = 150$	0.14206	11.20981
$\mu = -0.5$, $\sigma^2 = 0.05$	MSE	PSNR
Gürültülü Görüntü	0.1705	7.6922
$k = 10$	0.15679	4.77865
$k = 20$	0.15575	5.15895
$k = 50$	0.15703	6.68575
$k = 100$	0.15980	7.69184
$k = 150$	0.16231	8.48220

4.4 Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi ve Tekil Değer Ayrışımı Yöntemleri ile Görüntü Onarımı Karşılaştırması

Bölüm 4.2 ve Bölüm 4.3 'te görüntü onarımı için hem TDA yöntemi hem de ÇYÇÜDG ile aynı görüntü üzerinde farklı tekil değerlerde uygulamaları gerçekleştirilmiştir. Uygulamalar sonucunda görüntüdeki gürültülerin giderilmesi amacıyla ortaya çıkan sonuçlar da gösterilmiştir. Bu uygulamalar arasına Tuz-Biber gürültüsü de eklenerek, Çizelge 4.3 'e eklenmiş ve yöntemlerin karşılaştırılabilmesi daha olanaklı hale gelmiştir. Çizelge 4.3 içerisinde Tuz-Biber gürültüsündeki gürültü yoğunluğu (d) temel seçimdir. Bu değer TDA yöntemindeki μ ve σ gibi gürültü özelliğini tayin eden bir göstergedir.

Çizelge 4.3: Farklı Gürültü Özelliklerinde TDA – ÇYÇÜDG Hata Analizi

		TDA						ÇYÇÜDG					
		Gauss			Tuz-Biber			Gauss			Tuz-Biber		
		$\mu = 0, \sigma^2 = 0.2$			$d = 0.02$			$\mu = 0, \sigma^2 = 0.2$			$d = 0.02$		
		MSE	PSNR	Zaman(sn.)	MSE	PSNR	Zaman(sn.)	MSE	PSNR	Zaman(sn.)	MSE	PSNR	Zaman(sn.)
k=10		0.01697	18.94655	488.3528	0.00556	23.6484	40.2471	0.01716	18.23446	2.0136	0.00735	21.96782	1.8739
k=20		0.02297	18.32824	488.6082	0.00336	25.42877	40.5352	0.01891	18.62251	4.0982	0.00426	24.57235	3.7116
k=50		0.03963	16.92923	489.3845	0.00258	26.96298	41.3633	0.02902	17.6268	10.1402	0.00279	26.56636	9.1944
k=100		0.06150	15.85099	490.6738	0.00355	26.06525	42.6994	0.04503	16.84223	19.7131	0.00308	26.41597	18.4092
k=150		0.07766	15.03251	491.9593	0.00444	24.41327	44.0723	0.05942	16.16384	29.4466	0.00369	25.44062	27.6410
		$\mu = 0, \sigma^2 = 0.05$			$d = 0.05$			$\mu = 0, \sigma^2 = 0.05$			$d = 0.05$		
k=10		0.00763	22.08366	253.4422	0.00603	23.38808	107.8778	0.00963	20.78558	1.8356	0.00797	21.84257	1.9963
k=20		0.00781	22.27978	253.7372	0.00431	24.50197	108.1657	0.00817	21.75878	3.8481	0.00524	23.69829	4.0264
k=50		0.01387	20.71513	254.6584	0.00542	24.47493	108.9949	0.01083	21.3528	10.0348	0.00494	24.33258	9.6096
k=100		0.02244	19.30035	256.1185	0.00837	22.21236	110.3895	0.01684	19.78066	19.5196	0.00678	24.0342	19.0224
k=150		0.02881	17.88130	257.6809	0.01063	21.26632	111.7449	0.02229	18.97849	29.1628	0.00864	22.27393	28.5269
		$\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.2$			$d = 0.2$			$\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.2$			$d = 0.2$		
k=10		0.1158	8.21718	858.9289	0.01027	20.8158	332.0132	0.11583	7.55874	1.9218	0.01215	19.82529	1.8638
k=20		0.11954	9.65275	859.1891	0.01251	20.70289	332.2733	0.11699	8.15717	3.8399	0.01154	20.87542	3.7451
k=50		0.12964	11.06273	859.9675	0.02167	19.99096	333.0511	0.12324	9.75103	9.5680	0.01647	20.01364	9.4085
k=100		0.14312	10.8668	861.2590	0.0339	17.85254	334.3482	0.13319	11.21335	19.2082	0.02528	19.45045	18.5912
k=150		0.15291	10.83156	862.5731	0.04292	16.82021	335.6414	0.14206	11.20981	29.8088	0.03328	18.33428	28.1927
		$\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.05$			$d = 0.5$			$\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.05$			$d = 0.5$		
k=10		0.15566	5.14255	786.2919	0.02947	17.01097	574.4557	0.15679	4.77865	1.8436	0.0276	16.85482	2.0579
k=20		0.15583	6.03071	786.5502	0.03767	17.12575	574.7160	0.15575	5.15895	3.6274	0.03117	16.47762	3.8299
k=50		0.15866	7.80731	787.3290	0.05978	15.89464	575.4968	0.15703	6.68575	9.3086	0.04488	16.56378	9.3251
k=100		0.16249	8.42609	788.6429	0.0887	15.05721	576.7895	0.1598	7.69184	18.6150	0.06635	16.26522	18.9412
k=150		0.16531	8.5251	789.9328	0.11007	14.03506	578.0950	0.16231	8.4822	27.9742	0.08559	15.08634	28.2419

Çizelge 4.3'te, iki ayrı yöntemin farklı gürültü çeşitleri ile uygulamaları mevcuttur. Bu verilerden hareketle yöntemlerin karşılaştırılması amacıyla şu sonuçlar çıkartılabilir.

Gerek TDA yönteminin gerekse ÇYÇÜDG'nin görüntü sıkıştırma alanında etkili oldukları düşünülürse, görüntülerdeki gürültülerin temizlenmesi amacıyla bu yöntemlerle birlikte süzgeçleme gibi işlemler de uygulanmalıdır. Gürültü eklendikten sonra görüntülerdeki hatalar fazla, yöntemlerin uygulanması sonrası indirgenen hatalar yine fazla görülmektedir. Burada bahsedilen fazla ifadesi, ortaya çıkan karesel ortalama hatanın 0'a ne kadar uzak veya PSNR değerinin beklenen aralıklardan ne kadar sapma yapması ile ilgili bir göstergedir.

Her iki yöntemde de, aynı ortalamalarda varyans değerlerinin azalması görüntülerdeki gürültülerin azalması sonucunu doğurmuştur. Bu, matematiksel olarak da düşünüldüğünde sapmaların azalması etkisi ile oluşan bir durumdur. Yöntemlerin uygulanması sonucu da yine düşük varyans değerlerinde, düşük gürültülerin görülmesi teyit edilmiştir.

Gürültü tipleri farklı olsa da, iki yöntemde de tekil değerlerin ayrıştırılması veya özyinelemelerin gerçekleştirilmesi sonucu oluşan gürültüler artma eğilimi göstermiştir. Önemli bir sonuç olarak, aynı tekil değerlerde TDA yönteminin vermiş olduğu hata ölçüsü, ÇYÇÜDG'ye göre daha azdır.

Hesaplama maliyetleri açısından zaman değerleri incelendiğinde bu kısımda ÇYÇÜDG yönteminin TDA yöntemine göre üstünlüğü görülmektedir. TDA yönteminde ayrıştırma işlemine fazla zaman harcanmakta, ÇYÇÜDG yönteminde ise her bir özyineleme adımında zaman farkı artmaktadır. Buna rağmen yine de hesaplama zamanı, TDA yöntemine göre oldukça düşüktür ve hesaplama maliyeti de dolayısıyla daha azdır.

4.5 Süzgeçleme ile Tekil Değer Ayrışımı ve Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegen Dizey Gösterilimi Yöntemlerinde Görüntü Onarımı

TDA ve ÇYÇÜDG yöntemleri ile elde edilen yeni görüntüler, özgün görüntülere göre daha az bileşenler cinsinden ifade ediliyor ve gürültü eklenen özgün görüntülerdeki gürültüyü az da olsa temizleyebiliyordu. Amaç, gürültüyü tamamen temizleyebilmek olmasa da hata oranlarını daha da azaltmak ve PSNR değerlerini uygun seviyelere

getirebilmek olmalıdır. Görüntü sıkıştırma yöntemleri ile gürültülerin gözle görülür oranda azaltılabilmesi için bu yöntemlere ek olarak bazı süzgeçleme yöntemlerini de kullanılacaktır.

Uygulama adımları, özgün görüntüler üzerine eklenen Tuz-Biber gürültüsü ile başlatılmıştır. Oluşan gürültülü görüntü için hem TDA yöntemi hem de ÇYÇÜDG uygulanarak, yine gürültülü bir görüntü elde edilmektedir. Gürültülerin gözle görülür oranda azaltılması amacıyla da son olarak uygulanan bazı özel süzgeçlemeler ile ortaya çıkan sonuçlar incelenecektir [32].

4.5.1 Tekil Değer Ayrışımı Yöntemi ve Süzgeçleme Uygulaması

Bölüm 4.2’de gürültülü görüntüler üzerine TDA yöntemi uygulanmış ve görüntüdeki gürültülerden kurtulmak amaçlanmıştır. Farklı tekil değerlerde elde edilen sonuçların, özgün görüntü ile karşılaştırılması sonucunda hata değerleri incelenmiş ve sonuçlar ortaya konulmuştur.

Bu bölümde, daha önce TDA yöntemi ile elde edilen ve 150 adet tekil değer kullanıldığı ($k = 150$) bir gürültülü görüntü üzerinde süzgeçleme işlemleri gerçekleştirilecektir.



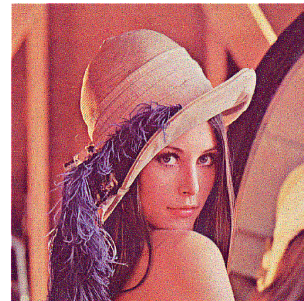
(a) Tuz-Biber Gürültülü Görüntü($k=150$; $d=0.02$)



(b) Gauss



(c) Medyan



(d) Unsharp

Şekil 4.13: Tuz-Biber Gürültüsü TDA ve Süzgeçleme Uygulaması

Şekil 4.13'teki ilk resimde TDA yöntemi sonucu elde edilen görüntü yer almaktadır. Görüntüde hala mevcut olan gürültülerin giderilebilmesi amacıyla Şekil 4.13b'de Gauss süzgeçlemesi, Şekil 4.13c'de Medyan süzgeçleme ve son olarak da Şekil 4.13d'de Unsharp süzgeçlemesi kullanılmıştır. Kullanılan bu özel süzgeçleme yöntemleri sonucunda oluşan görüntülerdeki gürültü, gözle görülebilir derecede azalmıştır. Görüntülerdeki iyileşmenin nesnel bir şekilde değerlendirilebilmesi amacıyla hata ölçümleri de hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar, bir sonraki bölümde karşılaştırmalı olarak ortaya konulacaktır.

4.5.2 Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegenlik Dizey Gösterilimi ve Süzgeçleme Uygulaması

Bölüm 4.3'te gürültülü görüntüler üzerine ÇYÇÜDG yöntemi uygulanmış ve gürültüler giderilmek istenmiştir. Çeşitli tekil değerlerdeki sonuçların, özgün görüntü ile karşılaştırılmasıyla hata değerleri bulunmuş ve sonuçlar ortaya konulmuştur. Bu bölümde de, ÇYÇÜDG yöntemi ile elde edilen ve 150 adet tekil değer kullanıldığı ($k = 150$) bir gürültülü görüntü üzerinde süzgeçleme işlemleri gerçekleştirilecektir.



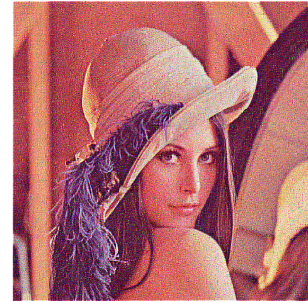
(a) Tuz-Biber Gürültülü Görüntü ($k=150$; $d=0.02$)



(b) Gauss



(c) Medyan



(d) Unsharp

Şekil 4.14: Tuz-Biber Gürültüsü ÇYÇÜDG ve Süzgeçleme Uygulaması

Şekil 4.14'teki ilk resimde ÇYÇÜDG yöntemi sonucu elde edilen görüntü yer almaktadır. Görüntüde hala mevcut olan gürültülerin giderilebilmesi amacıyla Şekil

4.14b’de Gauss süzgeçlemesi, Şekil 4.14c’de Medyan süzgeçleme ve son olarak da Şekil 4.14d’de Unsharp süzgeçlemesi kullanılmıştır. Kullanılan bu özel süzgeçleme yöntemleri sonucunda oluşan görüntülerdeki gürültü Bölüm 4.5.1’de TDA yöntemi ile oluşan görüntülerdeki gibi azalmıştır.

Hem TDA yöntemi hem de ÇYÇÜDG ile elde edilen sonuçlar ve karşılaştırılmalarının yapılabilmesi için Çizelge 4.4 oluşturulmuştur.

Çizelge 4.4: TDA ve ÇYÇÜDG Süzgeçleme Hata Analizi

	MSE	PSNR	MSE	PSNR
	TDA&Medyan Süzgeçleme		ÇYÇÜDG&Medyan Süzgeçleme	
k=10	0.00542	23.63701	0.00715	21.86745
k=20	0.00307	25.56017	0.00397	24.66804
k=50	0.00158	28.43441	0.00203	27.36062
k=100	0.00111	29.80987	0.00137	29.13338
k=150	0.00087	30.81139	0.0011	29.97184
	TDA&Gauss Süzgeçleme		ÇYÇÜDG&Gauss Süzgeçleme	
k=10	0.00542	23.58678	0.00714	21.85171
k=20	0.00308	25.64381	0.00397	24.59976
k=50	0.00164	28.27717	0.00206	27.2887
k=100	0.00135	28.97523	0.00151	28.64201
k=150	0.00128	29.16338	0.00136	28.9347
	TDA&Unsharp Süzgeçleme		ÇYÇÜDG&Unsharp Süzgeçleme	
k=10	0.01055	26.87576	0.01299	26.36221
k=20	0.01142	26.65908	0.01275	26.14201
k=50	0.02512	23.39175	0.02212	23.50953
k=100	0.05773	23.98573	0.04267	23.39648
k=150	0.0836	23.25552	0.06302	23.92925

Çizelge 4.4’te TDA yöntemi ve ÇYÇÜDG ile birlikte bazı özel süzgeçleme yöntemlerinin Tuz-Biber gürültüsü eklenmiş görüntüler üzerindeki etkileri gösterilmektedir.

Onarım işlemlerinde süzgeçleme yöntemlerinin de kullanılmasıyla hatalar ciddi oranda azaltılmış ve daha küçük boyutlarla temsil edilebilebilen yani daha az maliyetli dizeylerden oluşan görüntüler üzerindeki gürültüler ciddi oranda temizlenebilmiştir.

İki yöntemin birbirlerine göre üstünlükleri incelendiğinde, sıkıştırma anlamındaki TDA’nın başarısı, süzgeçleme ile birlikte gürültü onarımında kullanıldığında da devam etmektedir. Aynı süzgeçleme çeşidinde ve aynı tekil değerlerde hem karesel hatanın düşük olmasıyla, hem de doruk sinyal görüntü oranının daha yüksek olmasıyla bu üstünlük görülebilmektedir.

4.6 Görüntü Onarımında Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegen-cil Dizey Gösterilimi'ndeki Başlangıç Öngörülerinin Etkisi

Çalışmaların bu kısma kadar olan bölümlerinde, görüntüler üzerinde sıkıştırılmalardan, onarımlara, farklı yöntemler ve gürültü çeşitleri ile olan uygulamalara değinilmiştir. Uygulamalarda, özellikle ÇYÇÜDG kullanılırken en başından beri başlangıç öngörülerini her bir terimi 1'lerden oluşan birim dizeler seçilmiştir. Bu son kısımda ise farklı başlangıç öngörülerini seçilerek ÇYÇÜDG'nin görüntü onarımı üzerindeki etkinliğinin artırılması için bazı değişiklikler gerçekleştirilecektir. Değişiklikler sonucunda, görüntülerdeki hata değerlerinin, önceki kısımlarda sabit terimli dizeler ile elde edilen görüntülerdeki hata değerlerinden daha düşük değerler bulunması amaçlanmaktadır. Uygulama adımlarının başında, yine gürültü eklenen görüntülerin alınması, ÇYÇÜDG ile sıkıştırma işlemi uygulanması, sonrasında süzgeçleme işlemi yapılarak özgün görüntüye benzer yeni görüntülerin oluşturulabilmesi yer almaktadır. Bölüm 4.5.2'de uygulanan adımlar devam ettirilerek, bu sefer sadece başlangıç öngörümü değişikliği ile, aynı görüntüler üzerinde elde edilen hata değerlerinin gösterimi gerçekleştirilebilir.

Çizelge 4.5'ten hareketle öncelikle uygulanan adımlar sırasıyla gözden geçirilebilir.

Her bir hata değeri, ÇYÇÜDG'nin $k = 1$ 'den $k = 150$ 'ye kadar özyineleme adımlarındaki, üç farklı süzgeçleme yöntemi (Medyan, Gauss, Unsharp) sonucu oluşan değerleri temsil etmektedir. Temsilde, bazı özel k değerlerine karşılık gelen MSE ve PSNR kullanılmıştır.

Destek işlevlerinin uygulanmasında seçilen başlangıç yöneyleri, tablodaki sıraya uygun olarak; tamamı birlerden oluşan "Birler Dizeyi", tamamı rastgele seçilen "Rastgele Dizey", özgün görüntüdeki farklı boyutlara karşılık gelen dizey elemanlarının ortalaması "Destek Dizeyleri", TDA sonucu oluşan en büyük özyöneylerin farklı boyutlardaki ortalaması "TDA Destek İşlevleri ($k=150$)" ve son olarak yine TDA sonucu oluşan en küçük özyöneylerin farklı boyutlardaki ortalaması "TDA Destek İşlevleri ($k=1$)" şeklindedir.

Çizelge 4.5'te, ÇYÇÜDG yöntemi ile birlikte kullanılan üç adet süzgeçleme tekniğinin verimliliği görülmektedir. Hataların karşılaştırılmasında, nispeten daha küçük hata değerleri, onarım sonucunda özgün görüntüye daha fazla yaklaşıldığının sonucudur.

Hata değerleri en yüksek seviyelere, destek işlevleri farkı ve tekil değer sayılarına bakılmaksızın YDG ile birlikte uygulanan Unsharp szgelemesinde çıkmıştır. Geriye kalan iki süzgeçleme yönteminde, hangisinin daha iyi verimliliğe sahip olduğu ise kullanılan tekil değer sayılarıyla bağlantılıdır.

YDG ile birlikte uygulanan Medyan ve Gauss szgelemelerindeki hatalar birbirlerine çok yakındır. Karşılaştırma yapılırken, her iki yöntemde kullanılan destek işlevlerinin aynı olduğu varsayılmaktadır. Farklı tekil değerdeki değerler incelenildiğinde, etkili sonuçların düşük k değerlerindeki YDG ile birlikte uygulanan Gauss süzgeçlemede alındığı görülmektedir. Buna rağmen, k değerleri yükseldikçe Gauss süzgeçleme ile alınan hatalar, Medyan süzgeçleme ile alınan hatalara göre daha büyük olmaktadır. Her iki yöntemin hata değerlerinin hemen hemen eşitlendiği tekil değer sayısı ise 20 olarak görünmektedir.

Süzgeçleme yöntemlerindeki destek işlevlerinin etkisi incelendiğinde, bütün yöntemlerdeki en büyük hata değerleri rastgele dizelerin seçilmesi ile alınmıştır. TDA destek işlevlerinin seçimi ise en etkin sonuçları meydana getirmiştir. TDA destek işlevlerinin kaç adet tekil değerden seçilerek ($k=1$ veya $k=150$) alınması gerektiği ise değişkenlik göstermektedir. Çizelge incelendiğinde hem 1 hem de 150 adet tekil değerden oluşan TDA işlevlerinin farklı k değerlerindeki hataları birbirlerine göre net bir üstünlük sağlayamamaktadır.

Çizelgeden kesin olarak çıkartılabilen sonuçlar, YDG ile birlikte uygulanan Unsharp szgelemesinin diğer iki szgelemeye göre zayıf kaldığı yönündedir. Ayrıca, düşük k değerlerinde Gauss, yüksek k değerlerinde ise Medyan szgelemenin daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Kritik k değeri ise yaklaşık 20'dir. Destek işlevlerinin etkisi bakımından, en kötü sonuçların rastgele alınan dizelerde, en iyi sonuçların ise farklı tekil değerler ile oluşturulan TDA destek işlevlerinde olduğu gözlenmiştir. Dolayısıyla, görüntü onarma işleminde, YDG ve TDA destek işlevleriyle kullanılacak Medyan veya Gauss szgelemeleri daha iyi sonuç vermektedir.

Çizelge 4.5: ÇYÇÜDG'de Başlangıç Öngörülerinin Etkisi

ÇYÇÜDG&Medyan Süzgeçleme											
k=10 k=20 k=50 k=100 k=150	Birler Dizeyi		Rastgele Dizey		Destek Dizeyleri		TDA Destek İşlevi (k=150)		TDA Destek İşlevi (k=1)		
	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	
	0.00715	21.86745	0.00731	21.65133	0.00704	22.03176	0.00703	21.97521	0.00704	22.07301	
	0.00397	24.66804	0.00412	24.56622	0.00402	24.58697	0.00399	24.61055	0.00401	24.55549	
	0.00203	27.36062	0.00205	27.23372	0.00202	27.37373	0.00203	27.48556	0.00202	27.46035	
	0.00137	29.13338	0.00138	29.03975	0.00138	29.22726	0.00137	28.9652	0.00136	29.18485	
	0.0011	29.97184	0.00111	29.85644	0.0011	29.95102	0.0011	29.93268	0.00110	30.07298	
ÇYÇÜDG&Gauss Süzgeçleme											
k=10 k=20 k=50 k=100 k=150	Birler Dizeyi		Rastgele Dizey		Destek Dizeyleri		TDA Destek İşlevi (k=150)		TDA Destek İşlevi (k=1)		
	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	
	0.00714	21.85171	0.0073	21.67014	0.00703	21.98098	0.00702	22.00069	0.00703	22.02525	
	0.00397	24.59976	0.00412	24.45643	0.00402	24.60256	0.00399	24.60141	0.00401	24.56214	
	0.00206	27.2887	0.00208	27.24861	0.00206	27.27579	0.00207	27.25392	0.00205	27.35062	
	0.00151	28.64201	0.00151	28.56058	0.00151	28.73135	0.00151	28.54968	0.00150	28.82297	
	0.00136	28.9347	0.00137	28.94072	0.00136	29.07416	0.00136	28.9554	0.00136	29.07745	
ÇYÇÜDG&Unsharp Süzgeçleme											
k=10 k=20 k=50 k=100 k=150	Birler Dizeyi		Rastgele Dizey		Destek Dizeyleri		TDA Destek İşlevi (k=150)		TDA Destek İşlevi (k=1)		
	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	
	0.01299	26.36221	0.01363	25.99537	0.01285	26.08444	0.0129	25.79023	0.01279	25.59205	
	0.01275	26.14201	0.01323	26.03414	0.0129	26.29147	0.0128	25.93313	0.01270	25.65078	
	0.02212	23.50953	0.02238	23.72582	0.02225	24.14395	0.02219	23.55685	0.02186	23.50011	
	0.04267	23.39648	0.04293	22.16418	0.04347	22.93648	0.04266	22.65324	0.04254	23.32447	
	0.06302	23.92925	0.06337	23.08446	0.06415	22.38913	0.06307	23.61353	0.06299	23.29331	

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, son zamanlarda geliştirilmiş olan Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegenlik Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG) yönteminin görüntü işleme konusundaki uygulanabilirliği ve başarısı araştırılmıştır. Uygulama konusu olarak görüntü sıkıştırma ve görüntü onarımı konuları seçilmiş ve ÇYÇÜDG yönteminin nasıl uygulanacağı tez içerisinde detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Yöntemden elde edilen sonuçlar gerek çizelgeler gerekse şekiller yardımı ile ayrıntılı olarak verilmiştir. Ayrıca sonuçlar, aynı uygulamalar için Tekil Değer Ayrışımı (TDA) yönteminden elde edilen sonuçlarla da karşılaştırılmıştır. Görüntülerdeki gürültülerin giderilmesinde, görüntü sıkıştırma amacıyla kullanılan TDA yöntemi ve ÇYÇÜDG'nin burada da kullanımı amaçlanmıştır. Görüntü onarımı için farklı şekillerde daha önce de kullanılmış olan TDA yöntemi, ilk kez onarımda kullanılan ÇYÇÜDG'ye kaynak olarak alınmıştır. Çalışmalarla ortaya çıkan sonuçların değerlendirilmesi gerekirse, hem TDA yöntemi hem de ÇYÇÜDG'nin görüntü sıkıştırma konusunda etkili oldukları bilinmesine rağmen, gürültülerin giderilmesi amacıyla farklı işlemler de gerçekleştirilmelidir. Bu nedenle, çalışmada gürültü giderilmesi amacıyla, süzgeçleme uygulaması ve başlangıç öngörülerinin değiştirilmesi sağlanmıştır. İşlemler sonucunda görüntü dizyelerinin boyutları küçültülerek, hem maliyette bir kazanç sağlanmış, hem de görüntü üzerindeki gürültüler bir seviyeye kadar azaltılmıştır.

ÇYÇÜDG ve sonrasındaki bazı özel süzgeçleme yöntemlerinde ortaya çıkan sonuçlarda, ÇYÇÜDG'deki başlangıç yöneylerinin seçimi önemlidir. Çalışmadan ortaya çıkan verilerde en iyi sonuçlar TDA destek işlevlerinin başlangıç öngörümü olarak kullanılmasıyla alınmıştır. Sonraki iyi sonuçlar ise sırasıyla başlangıç öngörülerinin birler yöneyi ve ortalama yöneyler olarak alınmasıyla elde edilmiş olup, en kötü sonuçlar ise rastgele seçilen yöneylerin başlangıç öngörümü alınmasıyla elde edilmiştir.

Sonuçta, görüntüler üzerinde hem sıkıştırma hem de onarma işlemleri incelenmiş ve birçok açıdan farklı uygulama ile test edilmiştir. Bu çalışmada, Prof.

Dr. Metin DEMİRALP ve grubu, İTÜ Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) tarafından geliştirilen ÇYÇÜDG yönteminin ilk olarak görüntü onarımında kullanılması sağlanmıştır. Burada, yalnızca ÇYÇÜDG yönteminin görüntü onarımında kullanılabileceği gösterilmekle kalınmamış, aynı zamanda literatürde yerini almış olan TDA yöntemi ile karşılaştırmaları da yapılarak performansı ölçülmüştür. Elde edilen sonuçlardan görüleceği gibi, yöntem TDA yöntemini geçememekte fakat yöntemin hesaplama karmaşıklığının az olması sayesinde TDA'ya üstünlük sağlamaktadır.

Yöntemin daha da geliştirilmesi amacıyla başlangıç öngörülerinin iyileştirilmesi gibi birtakım çalışmalar devam etmekte olup, bu çalışmalara bilimsel yayınlarla da her geçen gün katkı sağlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Kolmogorov, A.N.** (1963). On the Representation of Continuous Functions of Many Variables by Superposition of One Variable and Addition, *English Translation: American Math. Soc.*, **2**(28), 55 – 59.
- [2] **Sobol, I.** (1993). Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *MMCE*, **1**(4), 407.
- [3] **Rabitz, H. ve Aliş, .F.** (1999). General Foundations of High Dimensional Model Representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, **25**, 197 – 233.
- [4] **Aliş, .F., Shorter, J., K., S. ve Rabitz, H.** (1999). Efficient Input-Output Model Representation, *Computer Physics Communications*, **117**, 11 – 20.
- [5] **Shorter, J., Ip, P. ve Rabitz, H.** (1999). An Efficient Chemical Kinetics Solver Using High Dimensional Model Representation, *J.Phys.Chem.A*, **103**, 7192 – 7198.
- [6] **Rabitz, H. ve Aliş, .F.** (2001). Efficient Implementation of HDMR, *Journal of Mathematical Chemistry*, **29-2**, 127–142.
- [7] **Rabitz, H., Li, G. ve Rosenthal, C.** (2001). High Dimensional Model Representation, *Journal of Physical Chemistry A*, **105-33**, 7765–7777.
- [8] **Demiralp, M.** (2003). High Dimensional Model Representation and Its Application Varieties, *The Fourth International Conference on Tools For Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia.
- [9] **Demiralp, E. ve Demiralp, M.** (2014). Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEPR) for Matrix Decomposition, *Proceedings of the 14th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2014)*, cilt 2, Cádiz, Spain.
- [10] **Özay E.K. ve Demiralp, M.** (2014). Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEPR) Studies: Decomposing the Planarly Unfolded Three-way Arrays, *Proceedings of the 2014 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2014)*, cilt 3, Halkidiki, Greece, s.785–793, contributed presentation in the special session, "Recent Methodological Developments in Function Approximation, Multiway Array Decompositions, ODE and PDE Solutions: Applications From Dynamical Systems to Quantum and Statistical Dynamics".

- [11] **Clay, D.**, (2012). *Linear Algebra and Its Applications*, Wiley, New York, 4. sürüm, s.414 – 422.
- [12] **Strang, G.**, (2005). *Linear Algebra and Its Applications*, Cengage Learning, Hampshire, 4. sürüm, s.364 – 370.
- [13] **Sobol, I.** (2003). Theorems and Examples on High Dimensional Model Representation, *Reliability Engineering and Safety*, **79**, 187 – 193.
- [14] **Demiralp, M.** (2001). Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi, Değişmezlik ve Toplamsallık Ölçenleri, Çarpımsal Gösterilim ve Çarpımsallık Ölçenleri, *12. Ulusal Mekanik Kongresi*, Konya, s.147 – 155.
- [15] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2010). The Influence of the Support Functions on the Quality of Enhanced Multivariate Product Representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, **48**(3), 827 – 840.
- [16] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2009). Support function influences on the univariate of the enhanced multivariate product representation, *Seventh International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering*, Rhodes, Greece.
- [17] **Özay E.K. ve Demiralp, M.** (2011). Piecewise Vector High Dimensional Model Representation, *AIP Proceedings for the 9th International Conference on Numerical Analysis and applied Mathematics (ICNAAM2011)*, cilt1389, Halkidiki, Greece, s.1147–1151.
- [18] **Solomon, C. ve Breckon, T.**, (2011). *Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab*, Wiley-Blackwell, West Sussex, UK, 2. sürüm, s.1–3.
- [19] **Qidwai, U. ve Chen, C.**, (2010). *Digital Image Processing: An Algorithmic Approach with MATLAB*, Chapman and Hall/CRC, London, UK, 1. sürüm, s.1–2.
- [20] **Gonzalez, R.C., W.R. ve Eddins, S.**, (2009). *Digital Image Processing Using MATLAB*, Gatesmark, USA, 2. sürüm, s.12–14.
- [21] **A.g.e.** s.27–28.
- [22] **The MathWorks Inc** (2015). *Image Processing Toolbox™ User's Guide*, s. 2.10–2.12, alındığı tarih: 12.04.2015, http://it.mathworks.com/help/pdf_doc/images/images_tb.pdf.
- [23] **A.g.e.**, s. 2.13.
- [24] **A.g.e.**, s. 2.14.
- [25] **Gonzalez, R. ve Woods, R.**, (2008). *Digital Image Processing*, bölüm 8, Pearson Prentice Hall, 3 sürüm, s.547–548.
- [26] **Huynh-Thu, Q. ve Ghanbari, M.** (2008). Scope of validity of PSNR in image/video quality assessment, *Electronics Letters*, **44**(13), 800–801, <http://dx.doi.org/10.1049/el:20080522>.

- [27] **Jakšić, B., G.B.I.R.P.M. ve Milošević, M.** (2013). Analysis of Brightness Effect on the Quality of Pictures After Compression with Jpeg and Spiht Compression Method, *Electronics Letters*, https://www.academia.edu/5498039/Analisis_of_brightness_effect_on_the_quality_of_pictures_after_compression_with_jpeg_and_spiht_compression_method.
- [28] **Angel, R. ve Vuthy, T.**, (2010), Using the Singular Value Decomposition (SVD) for Image Compression, MSc., thesis, Royal University of PhnomPenh, alındığı tarih: 13.04.2015 <http://volunteerlecturerprogram.com/wp-content/uploads/2013/01/vuthythesis.pdf>.
- [29] Gonzalez, R.C. and Woods, R.E., **a.g.e.** s.333–336.
- [30] **A.g.e.** s.336–337.
- [31] **A.g.e.** s.338–339.
- [32] **Gokhale, U. M., J.Y.V.** (2013). Noise Estimation Using Filtering and SVD for Image Tampering Detection, *International Journal of Engineering Science and Innovative Technology (IJESIT)*, 2(1).

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Orkun KUŞ

Doğum Yeri ve Tarihi: Üsküdar 22.11.1987

Adres: Elmalıkent M. Hanzade S. No:7/C Ümraniye İSTANBUL

E-Posta: orkunkus@yahoo.com

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü (2010)

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

Kale Holding A.Ş. 04/2013 - Present

Yazılım Geliştirme Uzman Yardımcısı

Finans Emeklilik ve Hayat A.Ş. 06/2012 - 09/2013

Sistem Analiz Yetkili Yard.

Sertifikalar:

Microsoft 2778: Writing Queries Using Microsoft SQL Server 2008 Transact—SQL
(BilgeAdam, 21-22 December 2013, 18 Hours)

İlişki Yönetimi, Yazılı ve Sözlü İletişim Eğitimi (Gel Gelişelim , 14-15.06.2013 / 16 Hours)

High Level MS Excel (Professional Minds 10.02.2012 – 11.02.2012 /12 Hours)

Oracle Hyperion Financial Management(Keysoft 26.10.2011 - 27.10.2011 /16 Hours)