

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**BLACK-SCHOLES KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN
SONLU ELEMAN VE SONLU FARK YÖNTEMLERİ
İLE ÇÖZÜM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hayati Ünsal ÖZER

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Duran

KASIM 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**BLACK-SCHOLES KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN
SONLU ELEMAN VE SONLU FARK YÖNTEMLERİ
İLE ÇÖZÜM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hayati Ünsal ÖZER
702121009**

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet DURAN

KASIM 2015

İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702121009 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Hayati Ünsal ÖZER, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "Black-Scholes Kısmi Diferansiyel Denkleminin Sonlu Eleman ve Sonlu Fark Yöntemleri İle Çözüm Analizi" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Ahmet DURAN**

İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Mustafa Serdar ÇELEBİ**

İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali KARACA

İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **27 Kasım 2015**
Savunma Tarihi : **25 Aralık 2015**

Canım Aileme,

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında bilgi ve deneyimini benimle paylaşarak destek olan danışmanım Doç. Dr. Ahmet Duran'a yardımları için teşekkür ederim.

Hayat boyu destekçim canım aileme çok teşekkür ederim.

Kasım 2015

Hayati Ünsal ÖZER
Matematik Müh.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET.....	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ...	1
1.1 Black-Scholes Kısmi Diferansiyel Denklemi	1
1.2 Sonlu Farklar Yöntemi	4
1.3 Sonlu Eleman Yöntemi	5
2. BLACK-SCHOLES KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	9
2.1 Açık Yöntem	9
2.2 Kapalı Yöntem	10
2.3 Crank-Nicolson Yöntemi	10
2.4 Uygulama	11
2.4.1 Alım opsiyonu.....	12
2.4.2 Satım opsiyonu.....	16
3. BLACK-SCHOLES KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	21
3.1 Zayıf (Ağırlıklı-İntegral) Formülasyonu	21
3.2 Sonlu Eleman Yaklaşımı	22
3.2.1 Konumsal yaklaşım.....	22
3.2.2 Zamansal yaklaşım.....	24
3.3 Sonlu Eleman Modeli	25
3.4 Uygulama	26
3.4.1 Alım opsiyonu.....	26
3.4.2 Satım opsiyonu.....	30
3.4.3 Ağ iyileştirmesi	34
4. SONUÇ.....	37
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ.....	41

KISALTMALAR

KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklem
SFY	: Sonlu Farklar Yöntemi
SEY	: Sonlu Elemanlar Yöntemi
B-S	: Black-Scholes
C-N	: Crank-Nicolson

SEMBOLLER

Π	: Portföy
V	: Opsiyon
S	: Hisse Senedi
C	: Call (alım) Opsiyonu
P	: Put (satım) Opsiyonu
K	: İşlem Fiyatı
S_0	: Hisse Senedi başlangıç fiyatı
T	: Vade bitiş zamanı
r	: Faiz Oranı
σ	: Volatilite

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	12
Çizelge 2.2 : SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=30, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	13
Çizelge 2.3 : SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=30, r=0.05, \sigma=0.6, T=1$).....	16
Çizelge 2.4 : SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	17
Çizelge 2.5 : SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=30, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	18
Çizelge 3.1 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	27
Çizelge 3.2 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=18, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	28
Çizelge 3.3 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	31
Çizelge 3.4 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=18, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	32
Çizelge 3.5 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu ağ iyileştirme yapıldığında hata karşılaştırması ($K=12, S=0:100, \sigma=0.2, r=0.05, T=1, \Delta t=0.01$).....	34
Çizelge 3.6 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu ağ iyileştirme yapıldığında hata karşılaştırması ($K=18, S=0:100, \sigma=0.2, r=0.05, T=1, \Delta t=0.01$).....	35

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	15
Şekil 2.2: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=30, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	15
Şekil 2.3: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	19
Şekil 2.4: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=30, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	20
Şekil 3.1: SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	28
Şekil 3.2: SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=18, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	30
Şekil 3.3: SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	32
Şekil 3.4: SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=18, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	33
Şekil 3.5: SEY_Farklı adım aralıkları ve hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu hata karşılaştırılması ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	36
Şekil 3.6: SEY_Farklı adım aralıkları ve hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu hata karşılaştırılması ($K=18, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$).....	36

BLACK-SHOLES KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SONLU ELEMAN VE SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜM ANALİZİ

ÖZET

Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemi (Black & Scholes, 1973) matematiksel finans alanında ve finans endüstrisinde en çok kullanılan ünlü denklemlerden birisidir. Bu tez çalışmasında, Black-Scholes kısmi diferansiyel denkleminin sonlu eleman lineer yaklaşımı ve sonlu fark yöntemi kullanılarak sayısal çözüm analizi yapılmıştır. Literatürde bilinen uygun sayısal yöntemler kullanılmıştır. Opsiyon sözleşmelerinin fiyatlandırılması için, Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemiyle elde edilen sayısal çözüm ile Black-Scholes formülü ile bulunan sonuç karşılaştırılmaktadır. Çeşitli finansal koşullarda analizler yapılmaktadır. Ayrıca, sonlu eleman ve sonlu fark sayısal yöntemlerinin Black-Scholes kısmi diferansiyel denkleminin uygulanmasında ortaya çıkan sayısal hataların davranışı ve kaynağı araştırılmaktadır.

Çalışmanın ilk bölümünde, (Hull, 2008) ve (Wilmott, 2007) temel alınıp, Black-Scholes kısmi diferansiyel denkleminin elde edilmiş yöntemlerinden biri gösterilerek denklem tanıtılmaktadır. Sonrasında sonlu fark yöntemleri ve sonlu eleman yöntemleri hakkında genel bilgiler verilmektedir. İkinci bölümde sonlu fark yöntemlerinden açık (explicit) yöntem, kapalı (implicit) yöntem ve Crank-Nicolson yöntemi kısaca anlatılmaktadır (Wilmott, Howison and Dewynne, 1995). Uygulamada Crank-Nicolson yöntemi kullanıldı. Farklı koşullar altında alım (call) ve satım (put) opsiyonları sözleşmesi fiyatları Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilerek Black-Scholes formülüne karşı gelen fiyatlar ile karşılaştırıldı. Elde edilen hataların çizelgelerine ve grafiklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Black-Scholes denkleminin çözümü için sonlu eleman yöntemi kullanıldı. Yöntemin kullanılabilmesi için denklemin zayıf formu elde edildi. Elde edilen bu zayıf form üzerinden konumsal ve zamansal yaklaşım uygulandı. Zamansal yaklaşım için de Crank-Nicolson yöntemi seçildi. Yaklaşımında elde edilecek cebirsel denklemler için lineer (doğrusal) eleman yaklaşım fonksiyonları kullanıldı. Uygulama yine farklı koşullardaki alım ve satım opsiyonları üzerinden yapıldı. Elde edilen sözleşme fiyatları Black-Scholes formülü ile karşılaştırılarak elde edilen hatalar çizelgeler ve grafikler üzerinden yorumlandı. Son olarak sonlu eleman yöntemi lineer eleman yaklaşımı için ağ iyileştirilmesi varlığı araştırılıp bununla ilgili örnekler çizelge ve grafik üzerinden verildi.

Sonuç olarak, başlangıç hisse fiyatı ile hisse işlem fiyatının yakın olduğu durumlarda hata miktarında salınımlar gözlemlendi. Sonlu eleman yöntemi lineer eleman yaklaşımı ile elde edilen hataların sonlu fark yöntemi Crank-Nicolson yaklaşımına göre daha büyük olduğu görüldü.

Anahtar Sözcükler: Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemi, sonlu eleman yöntemi, sonlu fark yöntemi, hata analizi, matematiksel finans, opsiyon sözleşmesi, Avrupa alım opsiyonu, Avrupa satım opsiyonu

SOLUTION ANALYSIS OF BLACK-SCHOLES PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION BY FINITE ELEMENT AND FINITE DIFFERENCE METHODS

SUMMARY

Black-Scholes partial differential equation (Black & Scholes, 1973) is one of the most famous equations in mathematical finance and financial industry. In this thesis, numerical solution analysis is done for Black-Scholes partial differential equation using finite element method with linear approach and finite difference methods. The methods which are used, are known in literature. The numerical solutions are compared with Black-Scholes formula for option pricing. The numerical errors are determined for the finite element and finite difference applications to Black-Scholes partial differential equation. The aim of this thesis is to examine the behavior and source of the corresponding errors under various market situations.

Black-Scholes partial differential equation is introduced in the first chapter of this thesis. One of the derivations of the Black-Scholes PDE is showed based on (Hull, 2008) and (Wilmott, 2007). The derivation starts with establishing a model to stock price. Then, it continues with developping a portfolio which consist of one long option and one short stock. Also, Itô's lemma is needed to reach the equation. In the final part of the first chapter, general informations are given about finite difference and finite element methods. The basic informations about the finite difference method are given in the light of (Willmott, Howison and Dewynne, 1995).

In chapter two, the approximated solution of Black-Scholes PDE is calculated by the finite difference method. The Crank-Nicolson method is used because it is more efficient than the forward difference and the backward difference methods. We used MATLAB software to compute the approximated solution for the call and put options. The approximated solution is compared with exact solution using Black-Scholes formula. We examine the behavior of the corresponding errors for various market situations such as stable market and high volatility conditions. In the graphs, the oscillations are observed when the initial stock price is close to the exercise price.

In chapter three, the basic informations about the finite element method are given in the light of (Reddy, 1993). The finite element method divides a given problem into a set of simple subproblems, then finds the approximated solution assembling solutions produced for each subproblem.

The finite element method has three basic features. First, the set of geometrically simple subdomains of the problem gives a geometrically complex domain. Second, any continuous function which can be showed by a linear combination of algebraic polynomials derives the approximation function over each finite element. Third, satisfying the governing equations gives algebraic relations among the undetermined coefficients.

Given a problem, the approximated solution with finite element method consists of these steps:

- Discretization of the given domain into a set of finite elements
- Differential equation is expressed in a weak form
- Derivation of element equation for all elements. Construct finite element interpolation functions and compute element matrices
- Assembly of element equation to obtain general equation system
- Imposition of the boundary conditions
- Solution of the assembled equations

The solution of time-dependent differential equations involves two steps: Spatial approximation and temporal approximation. The spatial finite element model results in a set of time-dependent ordinary differential equation. In temporal approximation step, finite difference method is used to obtain algebraic equations from time-dependent ordinary differential equation.

In chapter three, the approximated solution of Black-Scholes PDE is calculated by the finite element method. First, weak form of differential equation is derived. After that, spatial approximation and temporal approximation are implemented to obtain algebraic equations. Linear-element approximation functions are used to construct the algebraic equations. The approximated solution is computed for the call and put options using MATLAB software. The approximated solution is compared with the exact solution coming from Black-Scholes formula. Like the behavior of errors coming from the finite difference method, the oscillations are observed when the initial stock price is close to the exercise price. In addition, mesh refinement is examined for finite element method with linear-element approximation. Domain is divided in different spatial step intervals and error values are computed corresponding to each different spatial step interval then computed error values are compared in the tables and the graphs.

In finite difference method, the oscillations are observed when the initial stock price is close to exercise price under low volatility conditions. This result is compatible with (Hackmann, 2009). We observe that the absence of limit on normal distribution function $N(d_1)$ as exercise time approaches causes the oscillations when the initial stock price is close to exercise price.

Generally, Black-Scholes model is more useful when financial market is stable. We observe that the number of oscillations increases under high volatility conditions. Moreover, the cumulative rounding error rose when the number of steps and the remaining time for exercise increased during the application of finite difference method to Black-Scholes partial differential equation. These observations are compatible with literature.

Likewise, the oscillations in finite element method are similar to finite difference method as the initial stock price is close to exercise price. The errors in finite element method are greater than those of finite difference method. The reason for this is thought as related to the chosen linear element approximation functions in the finite element method. Also, better results may be obtained for selected different element approximation functions (See: Topper, 2005).

We tested the effectiveness of the mesh refinement for the finite element method with linear-element approximation. We divided the domain set for different spatial step intervals (Δs) for various initial stock prices, given a fixed exercise price. As a result of the mesh refinement, it is seen that there are different cases for the finite element method with linear approximation and more efficient results are obtained in the case of low exercise price.

Key words: Black-Scholes partial differential equation, finite element method, finite difference method, error analysis, mathematical finance, option contract, European call option, European put option

1. GİRİŞ

Matematiksel Finans alanının konularından opsiyonların fiyatlandırma problemleri için Black-Scholes denkleminin (Black & Scholes, 1973) bulunmasından sonra kısmi diferansiyel denklemler kullanılmaya başlandı. Bu kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri içinse sayısal yöntemlerden faydalanılır. Bu tez çalışmasında, Black-Scholes kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü için sayısal yöntemlerden Sonlu Fark Yöntemi (SFY) ve Sonlu Eleman Yöntemi (SEY) ele alınmıştır.

Sonlu Fark Yöntemi tanım kümesi içerisinde belirlenmiş düğüm noktalarını kullanarak yaklaşık çözüm ararken Sonlu Eleman Yöntemi tüm tanım kümesi üzerinden işlem yapar. Düzgün verilmiş tanım kümeleri için her iki yöntem de iyi çalışırken, tanım kümesini düzensiz veya değişik şekillerde olduğu durumlarda ise SEY daha iyi çalışması beklenmektedir. Ayrıca, sınır koşullarının türevler içerdiği karmaşık durumları SEY'in daha iyi ele aldığı düşünülmektedir. (Topper, 2005).

Tek boyutlu problemler için, Sonlu Eleman Yöntemi ile çözüme yaklaşmanın daha karmaşık olduğu ilk aşamada göze çarpar (Achdou & Piranneau) buna karşın SFY ile yapılan hesabın ve uygulamanın SEY'e göre daha kolay olduğu söylenebilir.

İki ve daha fazla boyutlu problemlerde ise, tanım kümesinin düzensiz olduğu denkleme SEY ile yaklaşmanın daha iyi olduğu ve oluşturulan ağ'ın (mesh) iyileştirilmesinde Sonlu Eleman Yönteminin daha elverişli olduğuna dair görüşler mevcuttur. (Alberty, 2004).

1.1 Black-Scholes Kısmi Diferansiyel Denklemi

Bu alt bölümde Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemin elde edilişi Hull(2008) ve Wilmott(2007) temel alınarak anlatılacaktır.

Bir hisse senedi opsiyonunun fiyatına modelleme yapabilmek için, öncelikle hissenin kendi fiyatına bir model geliştirebilmek gerekir. Bir hisse senedi fiyatı S 'nin, drift oranı olarak bilinen μ oranında zamanla artış göstererek μS olması beklenir. Bunun

anlamı δt gibi küçük bir zaman diliminde, hisse senedi fiyatı S için beklenen artış $\mu S \delta t$ 'dir. Bu modeli,

$$\delta S = \mu S \delta t \quad (1.1)$$

şeklinde gösterebiliriz. $\delta t \rightarrow 0$ limitinde

$$dS = \mu S dt \quad (1.2)$$

olarak ifade edilebilir.

Gerçek hayatta bir hisse senedi fiyatının aynı zamanda volatilité göstermesi beklenir. Hisse senedinin δt zaman diliminde yüzdelik getiri değişkenliği, hisse senedi fiyatına bakılmaksızın aynı olduğu varsayılabilir. Bu durumda δt zaman dilimindeki değişimin standart sapması hisse senedi fiyatıyla orantılıdır. Böylece model,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1.3)$$

Bu denklem, hisse senedi fiyatı davranışının modeli olarak kullanılır. σ değişkeni; hisse senedi fiyatının volatilitésini, μ değişkeni beklenen getiri oranını temsil etmektedir.

Bir Π portföyünün, uzun vadeli bir $V(S, t)$ opsiyonu ile kısa vadeli delta Δ miktarınca bir hisse senedi ΔS 'ten oluştuğu düşünülürse, portföy aşağıda verilen denklem ile ifade edilir.

$$\Pi = V(S, t) - \Delta S \quad (1.4)$$

Portföyün, t zamanından $t \rightarrow t + \delta t$ zamanına geldiğinde, portföy değerindeki değişimin ne olacağı araştırılmak istenir. Bu değişimin, denklemde yer alan opsiyon ve hisse senedindeki değişimlere bağlı olduğu görölmektedir. Dolayısıyla, portföydeki değişim aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$d\Pi = dV(S, t) - \Delta dS \quad (1.5)$$

Buradan $dV(S, t)$ elde etmek için Itô lemasından faydalanılır,

Itô Leması: (Itô, 1944) $V = V(S(t), t)$ iken S aşağıdaki denklemi sağlıyorsa

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1.6)$$

Böylece dV aşağıdaki denklemi sağlar;

$$dV(S, t) = \left(\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{dV(S, t)}{dS} dz \quad (1.7)$$

Elde edilen bu $dV(S, t)$ ve denklem (1.3) denklem (1.5) yerine koyulacak olursa, $d\Pi$ için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{dV(S, t)}{dS} dz - \Delta(\mu S dt + \sigma S dz) \quad (1.8)$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafında yer alan dz 'li terimler, dz 'den dolayı denklemin rassal terimleridir. Bu rassallık portföyün riskli olmasına sebebiyet vermektedir. Bu durumdan kurtulmak yani portföyü risksiz bir hale getirmek için dz 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenmesi gerekir.

$$\sigma S \frac{dV(S, t)}{dS} dz - \Delta \sigma S dz = 0 \quad (1.9)$$

Buradan,

$$\Delta = \frac{dV(S, t)}{dS} \quad (1.10)$$

alınarak portföy risksiz bir hale getirilir. Δ ifadesi portföy denkleminde yerine konulursa elde edilen portföy,

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} \right) dt \quad (1.11)$$

Portföydeki bu değişim tamamen risksizdir. Bu durumda portföy değerindeki artış, bir miktar nakit paranın risksiz faiz getirisi olan bir hesapta elde edeceği artışa eşit olmak zorundadır. Yani,

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (1.12)$$

olacağında bu iki portföy değeri birbirine eşitlenirse,

$$\left(\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} \right) dt = r\Pi dt \quad (1.13)$$

Buradaki portföy değeri olan Π yerine (1.4) 'teki eşitliği yazılırsa,

$$\left(\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} \right) dt = r(V(S, t) - \Delta S) dt \quad (1.14)$$

Denklemin sağ tarafında yer alan ΔS yerine (1.10) 'daki ifade koyulursa,

$$\left(\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V(S, t) - S \frac{dV(S, t)}{dS} \right) dt \quad (1.15)$$

Her taraf dt 'ye bölüldüğünde, meşhur Black-Scholes denklemi (Black & Scholes, 1973) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{dV(S, t)}{dS} - rV(S, t) = 0 \quad (1.16)$$

Black-Scholes kısmi denklemlerinin bu kısımda gösterilen dışında farklı elde edilmiş yöntemleri de bulunmaktadır. Diğer elde edilmiş yöntemleri için (Rouah) ve (Shreve, 2004) 'e bakılabilir.

1.2 Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yöntemi (SFY) diferansiyel denklem çözümünde kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemdeki amaç, denklemde yer alan her bir kısmi türev için sayısal yaklaşık bir çözüm bulabilmektir. Bunu yapabilmek için, diferansiyel denklemde yer alan kısmi türevlere çözüm aranan nokta civarında Taylor seri açılımı yapılır.

Bir $f(x, y)$ fonksiyonu için, x 'in h komşuluğunda Taylor seri açılımı olan $f(x + h, y)$ ve $f(x - h, y)$ denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$f(x + h, y) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} h^3 + O(h^4) \quad (1.17)$$

$$f(x - h, y) = f(x, y) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} h^3 + O(h^4) \quad (1.18)$$

İleri fark yaklaşımı denklem (1.17) kullanarak birinci mertebeden aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \quad (1.19)$$

Geri fark yaklaşımı denklem (1.18) kullanarak birinci mertebeden aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x, y) - f(x - h, y)}{h} \quad (1.20)$$

Merkezi fark yaklaşımı denklem (1.18)'den denklem (1.17)'nin çıkarılmasıyla birinci mertebeden aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h} \quad (1.21)$$

İkinci mertebe kısmi türevler için yaklaşımı yine bu yolla elde etmek mümkündür. Denklem (1.17) ve denklem (1.18)'in toplanmasıyla ikinci mertebeden merkezi fark yaklaşımı aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{f(x + h, y) - 2f(x, y) + f(x - h, y)}{h^2} + O(h^2) \quad (1.22)$$

Zamana bağlı kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu fark yöntemi ile çözümünde kullanılan yöntemlerin bazıları şunlardır,

Açık (explicit) Yöntem; sayısal çözümün bir sonraki zaman adımındaki değeri, bir önceki zaman adımında verilmiş değerler yardımıyla bulunur.

Kapalı (implicit) Yöntem; açık formül bilinmediğinden tüm grid noktalar üzerinde denklem yazılarak elde edilen denklem sistemi çözülerek yaklaşık çözüm elde edilir.

Crank-Nicolson Yöntemi; açık ve kapalı yöntemlerin ortalamasıdır.

1.3 Sonlu Eleman Yöntemi

Sonlu eleman yöntemi (SEY), bir problemin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde üretilen çözümle probleme yaklaşık bir çözümün bulunduğu bir yöntemdir.

Sonlu eleman yönteminde genel olarak, verilen bir diferansiyel denklemin çözümü için

$$u \approx \sum_{i=1}^n u_i \psi_i \quad (1.23)$$

Şeklinde cebirsel basit fonksiyonlar ile yaklaşık bir u çözümü aranır.

Sonlu eleman yöntemi için üç temel özellik vardır: Birincisi, verilen bir problemin geometrik olarak karmaşık tanım kümesi, sonlu eleman olarak adlandırılan geometrik olarak basit alt bölgelerin birleşimi olarak gösterilir. İkincisi, her bir sonlu eleman üzerindeki yaklaşım fonksiyonu, cebirsel denklemlerin lineer kombinasyonu

olarak gösterilen sürekli bir fonksiyonun kullanılmasıyla elde edilir. Üçüncüsü, eleman denklemleri çözümün sürekliliğini ve/veya fiziksel niceliklerin dengesini kullanarak bir araya getirilir. Yaklaşım fonksiyonları, interpolasyon teorisindeki kavramlar kullanılarak cebirsel polinomlar ve katsayılarından elde edilir. (Reddy, 1993).

Sonuç olarak, sonlu eleman yöntemi öncelikle alt bölgelere ayrılmış her bir eleman için sistem özelliklerini içeren denklemlerin çıkartılıp sonrasında tüm sistemi yansıtacak şekilde eleman denklemlerini birleştirerek sisteme ait lineer denklem takımının elde edilmesidir. Bir elemana ait denklemlerin elde edilmesinde değişik yöntemler kullanılabilir. Bunlar içinde en çok kullanılan dört temel yöntem şunlardır: (Topcu & Taşgetiren, 1998)

- a) Direkt yaklaşım: Bu yaklaşım daha çok tek boyutlu ve basit problemler için uygundur.
- b) Varyasyonel yaklaşım: Bir fonksiyonelin ekstremize yani maksimum ve minimum edilmesi demektir.
- c) Ağırlıklı kalanlar yaklaşımı: Bir fonksiyonun çeşitli değerler karşılığında elde edilen yaklaşık çözümü ile gerçek çözüm arasındaki farkların bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamlarını minimize etme işlemidir. Bu yaklaşım kullanılarak eleman özelliklerinin elde edilmesinin avantajı, fonksiyonellerin elde edilemediği problemlerde uygulanabilir olmasıdır.
- d) Enerji dengesi yaklaşımı: Bir sisteme giren ve çıkan termal veya mekanik enerjilerin eşitliği ilkesine dayanır.

Verilen bir problemin sonlu eleman ile çözümü şu adımları içerir:

- 1) Tanım kümesinin sonlu eleman kümesine ayrıklaştırılması
- 2) Diferansiyel denklemin zayıf (ağırlıklı-integral) formülünde ifade edilmesi
- 3) Bütün elemanlar için eleman denkleminin belirlenmesi. Sonlu eleman interpolasyon fonksiyonların oluşturulması ve eleman matrisinin hesaplanması.
- 4) Genel sistem denklemini oluşturmak için sonlu eleman denklemlerinin birleştirilmesi

5) Sınır koşullarının uygulanması

6) Birleştirilmiş sistem denkleminin çözümü

Zamana bağlı diferansiyel denklemlerin çözümü iki aşamada gerçekleştirilir. İlk aşamada diferansiyel denklemlere zamana bağlı adi diferansiyel denklemler elde etmek için sonlu eleman yöntemi ile yaklaşım uygulanır. İkinci aşamada, zamana bağlı bu diferansiyel denklemlerden cebirsel denklem elde etmek için sonlu fark yöntemi yaklaşımı uygulanır.

2. BLACK-SCHOLES KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemin çözümü için sonlu fark yöntemleri arasından bölüm (1.2)'de bahsedilen açık (explicit), kapalı (implicit) ve crank-nicolson yöntemleri en çok tercih edilen yöntemlerdir. (Bkz. Wilmott, Howison ve Dewynne, 1995)

2.1 Açık Yöntem

Denklem (1.16)'da verilen Black-Scholes KDD'nin hisse senedi fiyatı S için merkezi fark, zamanı t için geri fark yaklaşımları kullanılırsa

$$\frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (m \Delta S)^2 \left(\frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{\Delta S^2} \right) + r(m \Delta S) \left(\frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2 \Delta S} \right) - rV_m^{n+1} = 0 \quad (2.1)$$

Denklem (2.1) düzenlenirse aşağıdaki gibi ifade edilir

$$V_m^n = \alpha V_{m+1}^{n+1} + \beta V_m^{n+1} + \gamma V_{m-1}^{n+1} \quad (2.2)$$

$$0 < n \leq N, 0 < m < M$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \Delta t (\sigma^2 m^2 + rm)$$

$$\beta = 1 - \Delta t (\sigma^2 m^2 + r)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \Delta t (\sigma^2 m^2 - rm)$$

Denklem (2.2)'de görüldüğü üzere V_m^n bilinmeyen değeri, V_{m+1}^{n+1} , V_m^{n+1} , V_{m-1}^{n+1} bilinen değerlere bağlı olarak hesaplanır. Bu yöntem uygulanabilirlik açısından kolay olmasına rağmen, çözümün yakınsaklığı $\frac{\Delta t}{\Delta S^2}$ oranına bağlıdır.

2.2 Kapalı Yöntem

Denklem (1.16)'da verilen Black-Scholes KDD'nin hisse senedi fiyatı S için merkezi fark, zamanı t için ileri fark yaklaşımları kullanılırsa

$$\frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (m \Delta S)^2 \left(\frac{V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n}{\Delta S^2} \right) + r(m \Delta S) \left(\frac{V_{m+1}^n - V_{m-1}^n}{2 \Delta S} \right) - r V_m^n = 0 \quad (2.3)$$

Denklem (1.23) düzenlenirse aşağıdaki gibi ifade edilir

$$V_m^{n+1} = \alpha V_{m+1}^n + \beta V_m^n + \gamma V_{m-1}^n \quad (2.4)$$

$$0 < n < N, 0 < m < M$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \Delta t (\sigma^2 m^2 + r m)$$

$$\beta = 1 - \Delta t (\sigma^2 m^2 + r)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} \Delta t (\sigma^2 m^2 - r m)$$

Denklem (2.4)'de görüldüğü üzere V_m^{n+1} bilinen değerine karşılık, $V_{m+1}^n, V_m^n, V_{m-1}^n$ bilinmeyen değerleri var. Bu yöntem uygulanabilirlik açısından zor olmasına rağmen, çözümün yakınsaklığı $\frac{\Delta t}{\Delta S^2}$ oranına bağlı değildir.

2.3 Crank-Nicolson Yöntemi

Crank-Nicolson yöntemi denklem (2.1)'te verilen açık (explicit) yöntem ile denklem (2.3)'te verilen kapalı (implicit) yöntemin ortalamasına karşılık gelir. (Bkz. Wilmott, Howison ve Dewynne, 1995)

$$\begin{aligned} & \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{2 \Delta t} + O((dt)^2) \\ &= -\frac{\sigma S^2}{4} \left(\frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{\Delta S^2} + \frac{V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n}{\Delta S^2} \right) \\ & - \frac{r S}{4} \left(\frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2 \Delta S} + \frac{V_{m+1}^n - V_{m-1}^n}{2 \Delta S} \right) + \frac{r}{2} (V_m^{n+1} + V_m^n) \\ & + O((ds)^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Denklem (2.5) düzenlenirse aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\alpha V_{m+1}^n + \beta V_m^n + \gamma V_{m-1}^n = -V_{m+1}^{n+1} - (\beta - 2)V_m^{n+1} - \gamma V_{m-1}^{n+1} \quad (2.6)$$

$$\alpha = -\frac{1}{4}\Delta t(\sigma^2 m^2 + rm)$$

$$\beta = 1 + \frac{\Delta t}{2}(\sigma^2 m^2 + r)$$

$$\gamma = -\frac{1}{4}\Delta t(\sigma^2 m^2 - rm)$$

Denklem (2.6)'de görüldüğü üzere V_{m+1}^{n+1} , V_m^{n+1} , V_{m-1}^{n+1} bilinen değerlerine karşılık, V_{m+1}^n , V_m^n , V_{m-1}^n bilinmeyen değerleri var. Bu yöntem daha öncesinde bahsedilen açık ve kapalı yöntemlere göre daha etkili olmasından dolayı uygulamada bu yöntem üzerinde çalışıldı.

2.4 Uygulama

Black-Scholes kısmi diferansiyel denkleminin bir önceki kısımda bahsedilen sonlu fark yöntemlerinden olan Crank-Nicolson yöntemi ile çözümü alım ve satım opsiyonları için MATLAB'da yapılmıştır. Elde edilen yaklaşık çözüm, Black-Scholes formülüne karşı gelen tam çözüm ile karşılaştırılmıştır. Black-Scholes formülü ile oluşturulan tam çözüm için MATLAB'ın *blsprice* fonksiyonu kullanılmıştır. Black-Scholes formülü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (2.7)$$

$$P = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (2.8)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

C: Alım (Call) opsiyonu

P: Satım (Put) opsiyonu

Burada $N(x)$ normal dağılım fonksiyonudur. Ayrıca, sabit bir S_0 için $t \rightarrow T$ 'ye yaklaşırken $\lim N(d_1)$ üç farklı değer alır:

$$\lim_{t \rightarrow T} N(d_1) = \begin{cases} 0 & S_0 < K \\ \frac{1}{2} & S_0 = K \\ 1 & S_0 > K \end{cases}$$

değerlerini alır (Saunders, 2005). Diğer bir ifadeyle limit yoktur.

Kullanılan parametreler:

S_0 : Hisse senedi başlangıç fiyatı K : Hisse senedi işlem fiyatı

r : Risksiz faiz oranı σ : Volatility

T : Vade bitim tarihi

2.4.1 Alım opsiyonu

Alım opsiyonuna çözüm aranırken kullanılan sınır koşulları:

$$\begin{cases} C_0^n = 0 & 0 \leq n \leq N \\ C_M^n = M\Delta S - Ke^{-r(N-n)\Delta t} & 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

Ve bitiş koşulu:

$$C_m^N = \max(0, m\Delta s - K) , \quad 0 \leq m \leq M$$

Alım opsiyonu için fiyat ve hata tablosu çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2'de sabit işlem fiyatına karşı değişen hisse başlangıç fiyatlarına göre oluşturuldu. Alım opsiyonu için hataların en büyük değerleri 10^{-2} ile 10^{-3} aralığında değişkenlik gösterdiği görülmektedir.

Çizelge 2.1 : SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)

S_0	B-S Form	C-N	Err
5	0.0000	0.0001	0.000072
6	0.0003	0.0009	0.000589
7	0.0042	0.0064	0.002155
8	0.0288	0.0319	0.003122
9	0.1161	0.1150	0.001066
10	0.3247	0.3139	0.010858
11	0.7005	0.6810	0.019513
12	1.2541	1.2328	0.021319
13	1.9626	1.9455	0.017121
14	2.7871	2.7761	0.010962
15	3.6883	3.6825	0.005788
16	4.6359	4.6334	0.002497
17	5.6093	5.6086	0.000791

Çizelge 2.1 (Devam): SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi (K=12, r=0.05, $\sigma=0.2$, T=1)

S_0	B-S Form	C-N	Err
18	6.5964	6.5963	0.000067
19	7.5903	7.5905	0.000160
20	8.5875	8.5877	0.000182
21	9.5862	9.5864	0.000141
22	10.5857	10.5858	0.000094
23	11.5854	11.5855	0.000057
24	12.5853	12.5854	0.000033
25	13.5853	13.5853	0.000018
26	14.5853	14.5853	0.000010
27	15.5853	15.5853	0.000005
28	16.5852	16.5853	0.000003
29	17.5852	17.5852	0.000001
30	18.5852	18.5852	0.000001
31	19.5852	19.5852	0.000000
32	20.5852	20.5852	0.000000
33	21.5852	21.5852	0.000000
34	22.5852	22.5852	0.000000
35	23.5852	23.5852	0.000001
36	24.5852	24.5852	0.000001
37	25.5852	25.5852	0.000002
38	26.5852	26.5853	0.000004
39	27.5852	27.5853	0.000008
40	28.5852	28.5853	0.000013
41	29.5852	29.5853	0.000023
42	30.5852	30.5853	0.000038
43	31.5852	31.5853	0.000061
44	32.5852	32.5853	0.000097
45	33.5852	33.5854	0.000151
46	34.5852	34.5855	0.000228
47	35.5852	35.5856	0.000339
48	36.5852	36.5857	0.000494
49	37.5852	37.5860	0.000706
50	38.5852	38.5862	0.000991

Çizelge 2.2 : SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi (K=30, r=0.05, $\sigma=0.2$, T=1)

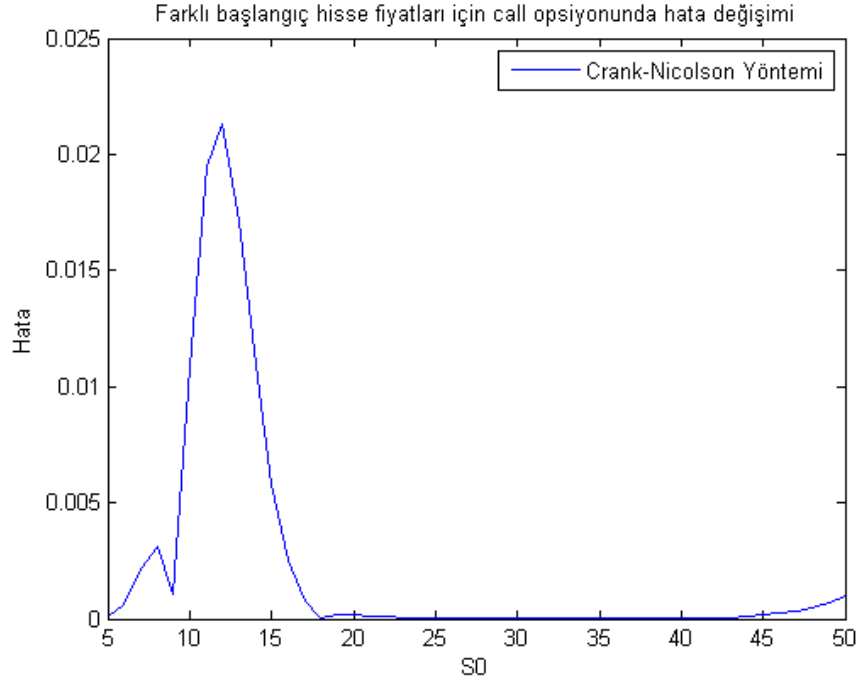
S_0	B-S Form	C-N	Err
5	0.0000	0.0000	0.000000
6	0.0000	0.0000	0.000000
7	0.0000	0.0000	0.000000
8	0.0000	0.0000	0.000000
9	0.0000	0.0000	0.000000
10	0.0000	0.0000	0.000000

Çizelge 2.2 (Devam): SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi (K=30, r=0.05, $\sigma=0.2$, T=1)

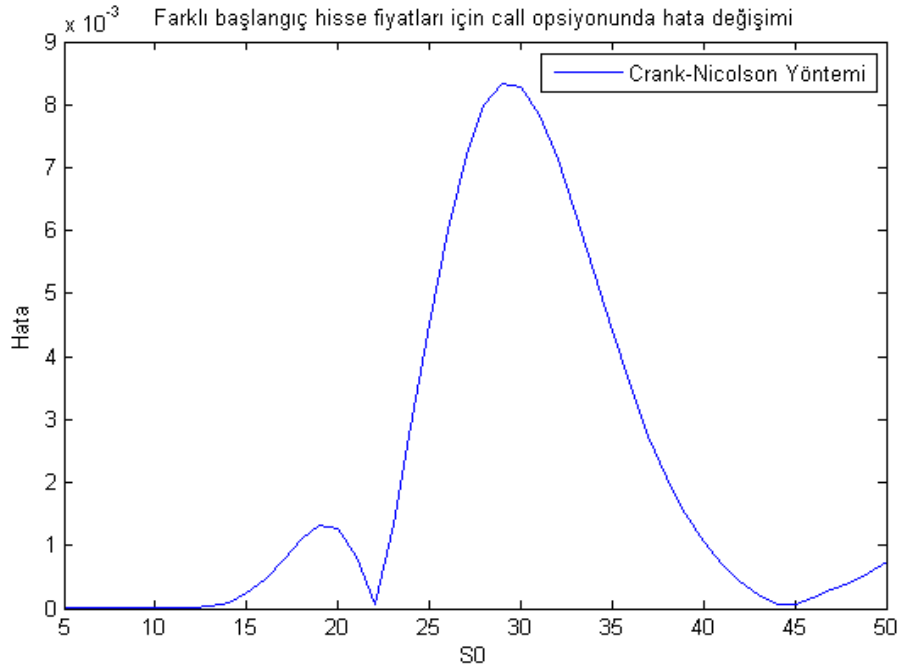
S_0	B-S Form	C-N	Err
11	0.0000	0.0000	0.000002
12	0.0000	0.0000	0.000010
13	0.0000	0.0001	0.000035
14	0.0002	0.0003	0.000100
15	0.0007	0.0010	0.000237
16	0.0024	0.0028	0.000466
17	0.0066	0.0074	0.000777
18	0.0163	0.0174	0.001100
19	0.0360	0.0373	0.001311
20	0.0719	0.0732	0.001258
21	0.1324	0.1333	0.000816
22	0.2270	0.2269	0.000068
23	0.3656	0.3642	0.001351
24	0.5578	0.5549	0.002897
25	0.8119	0.8074	0.004515
26	1.1338	1.1278	0.006007
27	1.5274	1.5202	0.007203
28	1.9934	1.9854	0.007995
29	2.5305	2.5222	0.008343
30	3.1352	3.1269	0.008268
31	3.8023	3.7944	0.007837
32	4.5257	4.5186	0.007142
33	5.2989	5.2926	0.006281
34	6.1150	6.1097	0.005345
35	6.9676	6.9632	0.004410
36	7.8507	7.8472	0.003532
37	8.7589	8.7561	0.002746
38	9.6873	9.6853	0.002069
39	10.6321	10.6306	0.001508
40	11.5897	11.5887	0.001055
41	12.5575	12.5568	0.000700
42	13.5332	13.5328	0.000427
43	14.5149	14.5147	0.000218
44	15.5012	15.5012	0.000058
45	16.4910	16.4911	0.000070
46	17.4835	17.4837	0.000183
47	18.4780	18.4783	0.000294
48	19.4739	19.4743	0.000417
49	20.4709	20.4715	0.000567
50	21.4688	21.4695	0.000756

Sabit tutulan işlem fiyatının küçük olduğu durumda, hisse senedi başlangıç fiyatının küçük olduğu yerlerdeki hataların işlem fiyatının büyük olduğu yerlerdeki hatalardan daha büyük olduğu gözlemlenmektedir. Şekil 2.1 ve şekil 2.2’de ilgili

hata değişim grafikleri gösterildi. Hisse senedi başlangıç fiyatının sabit tutulan işlem fiyatına yakın olduğu yerlerde hatanın salınım yaptığı görölmektedir.



Şekil 2.1: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)



Şekil 2.2: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=30$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)

Çizelge 2.3'te volatilitenin yüksek olduğu durumda hata değişimi incelenmiştir. Bu durum için sabit tutulan işlem fiyatının büyük olduğu değer ele alınmıştır. Volatilitenin yüksek olması hata değerlerinin volatilitenin küçük olduğu duruma göre çok büyük farklar göstermediği görülmekle beraber, hatanın daha çok salınım yapmasına sebebiyet verdiği gözlemlenmektedir.

Çizelge 2.3: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi (K=30, r=0.05, σ=0.6, T=1)

S_0	B-S Form	C-N	Err
5	0.0037	0.0039	0.000203
6	0.0111	0.0114	0.000265
7	0.0264	0.0267	0.000276
8	0.0536	0.0538	0.000226
9	0.0966	0.0967	0.000119
10	0.1594	0.1593	0.000029
11	0.2454	0.2452	0.000199
12	0.3577	0.3574	0.000371
13	0.4988	0.4983	0.000525
14	0.6706	0.6699	0.000644
15	0.8743	0.8736	0.000712
16	1.1109	1.1102	0.000720
17	1.3809	1.3802	0.000661
18	1.6841	1.6836	0.000533
19	2.0205	2.0201	0.000338
20	2.3894	2.3893	0.000082
21	2.7902	2.7904	0.000225
22	3.2219	3.2224	0.000566
23	3.6835	3.6845	0.000924
24	4.1740	4.1753	0.001274
25	4.6923	4.6938	0.001589
26	5.2370	5.2388	0.001837
27	5.8070	5.8090	0.001983
28	6.4011	6.4031	0.001988
29	7.0182	7.0200	0.001809
30	7.6570	7.6584	0.001402
31	8.3163	8.3171	0.000717
32	8.9952	8.9949	0.000296
33	9.6925	9.6908	0.001690
34	10.4072	10.4037	0.003520
35	11.1383	11.1324	0.005845

2.4.2 Satım opsiyonu

Satım opsiyonuna çözüm aranırken kullanılan sınır koşulları:

$$\begin{cases} P_0^n = 0 & 0 \leq n \leq N \\ P_M^n = Ke^{-r(N-n)\Delta t} - M\Delta S & 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

Ve bitiş koşulu:

$$P_m^N = \max(0, K - m\Delta s) , \quad 0 \leq m \leq M$$

Satım opsiyonuna göre elde edilen sonuçlar çizelge 2.4 ve çizelge 2.5'te gösterilmektedir. Hisse başlangıç fiyatlarının küçük olduğu durumlarda, küçük işlem fiyatına karşı gelen hataların, büyük işlem fiyatına karşı gelen hatalardan daha büyük olduğu görülmektedir. Bu durum hisse başlangıç fiyatları büyüdükçe tersine dönmektedir. Çizelgeler doğrultusunda oluşturulan hata değişim grafikleri şekil 2.3 ve şekil 2.4'de verilmektedir.

Çizelge 2.4: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi (K=12, r=0.05, $\sigma=0.2$)

S_0	B-S Form	C-N	Err
5	6.4148	6.4148	0.000072
6	5.4150	5.4156	0.000589
7	4.4190	4.4211	0.002155
8	3.4435	3.4466	0.003122
9	2.5308	2.5298	0.001066
10	1.7395	1.7286	0.010858
11	1.1153	1.0958	0.019513
12	0.6688	0.6475	0.021319
13	0.3774	0.3602	0.017121
14	0.2018	0.1908	0.010962
15	0.1031	0.0973	0.005788
16	0.0507	0.0482	0.002497
17	0.0241	0.0233	0.000791
18	0.0112	0.0111	0.000067
19	0.0051	0.0052	0.000160
20	0.0023	0.0024	0.000182
21	0.0010	0.0011	0.000141
22	0.0004	0.0005	0.000094
23	0.0002	0.0002	0.000057
24	0.0001	0.0001	0.000033
25	0.0000	0.0001	0.000018
26	0.0000	0.0000	0.000010
27	0.0000	0.0000	0.000005
28	0.0000	0.0000	0.000003
29	0.0000	0.0000	0.000001
30	0.0000	0.0000	0.000001
31	0.0000	0.0000	0.000000
32	0.0000	0.0000	0.000000
33	0.0000	0.0000	0.000000
34	0.0000	0.0000	0.000000
35	0.0000	0.0000	0.000000
36	0.0000	0.0000	0.000000

Çizelge 2.4 (Devam): SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2$)

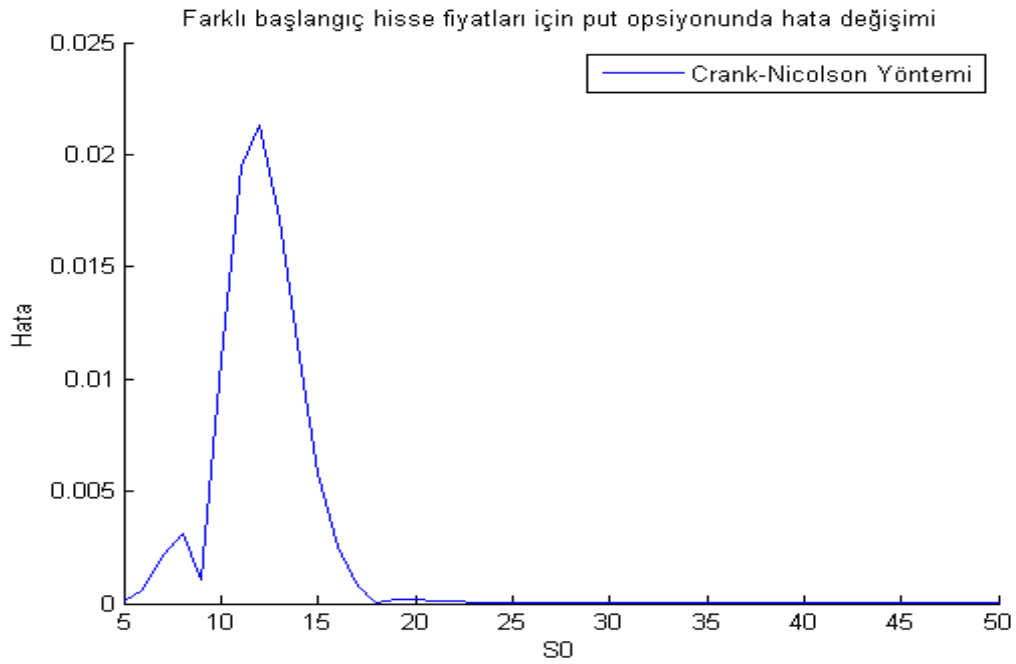
S_0	B-S Form	C-N	Err
37	0.0000	0.0000	0.000000
38	0.0000	0.0000	0.000000
39	0.0000	0.0000	0.000000
40	0.0000	0.0000	0.000000
41	0.0000	0.0000	0.000000
42	0.0000	0.0000	0.000000
43	0.0000	0.0000	0.000000
44	0.0000	0.0000	0.000000
45	0.0000	0.0000	0.000000
46	0.0000	0.0000	0.000000
47	0.0000	0.0000	0.000000
48	0.0000	0.0000	0.000000
49	0.0000	0.0000	0.000000
50	0.0000	0.0000	0.000000

Çizelge 2.5: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=30, r=0.05, \sigma=0.2$)

S_0	B-S Form	C-N	Err
5	23.5369	23.5369	0.000000
6	22.5369	22.5369	0.000000
7	21.5369	21.5369	0.000000
8	20.5369	20.5369	0.000000
9	19.5369	19.5369	0.000000
10	18.5369	18.5369	0.000000
11	17.5369	17.5369	0.000002
12	16.5369	16.5369	0.000010
13	15.5369	15.5370	0.000035
14	14.5371	14.5372	0.000100
15	13.5376	13.5378	0.000237
16	12.5392	12.5397	0.000466
17	11.5435	11.5443	0.000777
18	10.5532	10.5543	0.001100
19	9.5728	9.5742	0.001311
20	8.6088	8.6101	0.001258
21	7.6693	7.6701	0.000816
22	6.7639	6.7638	0.000068
23	5.9025	5.9011	0.001351
24	5.0947	5.0918	0.002897
25	4.3488	4.3442	0.004515
26	3.6707	3.6647	0.006007
27	3.0642	3.0570	0.007203
28	2.5303	2.5223	0.007995
29	2.0674	2.0591	0.008343
30	1.6721	1.6638	0.008268
31	1.3392	1.3313	0.007837

Çizelge 2.5 (Devam): SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=30, r=0.05, \sigma=0.2$)

S_0	B-S Form	C-N	Err
32	1.0626	1.0555	0.007142
33	0.8358	0.8295	0.006281
34	0.6519	0.6466	0.005345
35	0.5045	0.5001	0.004411
36	0.3876	0.3841	0.003533
37	0.2957	0.2930	0.002747
38	0.2242	0.2221	0.002072
39	0.1690	0.1675	0.001513
40	0.1266	0.1256	0.001065
41	0.0944	0.0937	0.000717
42	0.0701	0.0696	0.000454
43	0.0518	0.0515	0.000263
44	0.0381	0.0380	0.000128
45	0.0279	0.0279	0.000037
46	0.0204	0.0204	0.000021
47	0.0149	0.0149	0.000055
48	0.0108	0.0109	0.000072
49	0.0078	0.0079	0.000078
50	0.0056	0.0057	0.000077



Şekil 2.3: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$)



Şekil 2.4: SFY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=30$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)

Şekiller incelendiğinde, alım opsiyonundaki duruma benzer şekilde hisse başlangıç fiyatının işlem fiyatı civarında olduğu durumlarda hatanın salınımlar yaptığı gözlemlenmektedir.

3. BLACK-SCHOLES KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (Reddy, 1993) temel alınarak sonlu eleman yöntemi anlatılacaktır. Black-Scholes kısmi diferansiyel denkleminin çözümü için sonlu eleman yönteminde doğrusal (lineer) eleman yaklaşımı kullanılacak, vanilla (alım-satım) opsiyon fiyatlandırması ve ilgili hata analizi yer alacaktır.

3.1 Zayıf (Ağırlıklı-İntegral) Formülasyonu

Zayıf form üç aşamada elde edilir:

İlk olarak, diferansiyel denklemdeki tüm ifade tek bir tarafa toplanır dolayısıyla diğer taraf sıfıra eşit olur (denklem 1.16 elde edilen Black-Scholes denklemi bu şekilde ifade edildiği için bu kısım elde var), sonrasında tüm denklem ağırlık fonksiyonu ω ile çarpılır ve problemin tanım kümesi üzerinde integrali alınır.

$$0 = \int_{\Omega} \omega \left[\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{dV(S, t)}{dS} - rV(S, t) \right] dS \quad (3.1)$$

Bu oluşan ifadeye aynı zamanda denklemin “Ağırlıklı-İntegral Formu” da denir.

İkinci aşamada, bağımlı değişken ve ağırlık fonksiyonu arasında türevin dengeli dağılımı için kısmi integrasyon kullanılır ve, birincil ve ikincil değişkenlerin oluşumu için sınır terimleri belirlenir.

$$S^2 \omega \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(S^2 \omega \frac{\partial V}{\partial S} \right) - 2S \omega \frac{\partial V}{\partial S} - S^2 \frac{\partial \omega}{\partial S} \frac{\partial V}{\partial S} \quad (3.2)$$

$$0 = \int_{\Omega} \left[\omega \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial S} \left(S^2 \omega \frac{\partial V}{\partial S} \right) - 2S \omega \frac{\partial V}{\partial S} - S^2 \frac{\partial \omega}{\partial S} \frac{\partial V}{\partial S} \right) + rS \omega \frac{dV}{dS} - r\omega V \right] dS \quad (3.3)$$

$$0 = \int_{\Omega} \left[\omega \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial \omega}{\partial S} \frac{\partial V}{\partial S} + (r - \sigma^2) S \omega \frac{\partial V}{\partial S} - r \omega V \right] dS - \frac{1}{2} \sigma^2 \left[S^2 \omega \frac{\partial V}{\partial S} \right]_{\Omega} \quad (3.4)$$

Üçüncü aşamada; temel sınır koşullarının sağlanması için ağırlık fonksiyonunu kısıtlayarak ve verilen ikincil değişken değerleri yerlerine koyarak sınır terimleri yeniden ifade edilir.

$$\Omega = (S_A, S_B)$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial V}{\partial S} \equiv Q$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \left[S^2 \omega \frac{\partial V}{\partial S} \right]_{\Omega} \Rightarrow \left[\omega \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial V}{\partial S} \right]_{S_A}^{S_B} \Rightarrow (\omega(S_B) Q_B - \omega(S_A) Q_A)$$

Dolayısı ile denklem (3.4) aşağıdaki gibi düzenlenir;

$$0 = \int_{S_A}^{S_B} \left[\omega \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial \omega}{\partial S} \frac{\partial V}{\partial S} + (r - \sigma^2) S \omega \frac{\partial V}{\partial S} - r \omega V \right] dS - (\omega(S_B) Q_B - \omega(S_A) Q_A) \quad (3.5)$$

3.2 Sonlu Eleman Yaklaşımı

Zayıf form olan denklem (3.5) görüldüğü üzere Black-Scholes denkleminin eşit bir denklem olup birinci mertebeden zamana bağlı bir problemi ifade etmektedir. Bu problemin çözümü için zamana bağlı diferansiyel denklemi cebirsel denklemlere çevirecek bir sonlu eleman yaklaşımı tanımlamak gerekir. Bu yaklaşım iki adımda oluşturulur:

1. Konumsal yaklaşım
2. Zamansal yaklaşım

3.2.1 Konumsal yaklaşım

Diferansiyel denklemin çözümüne tanım kümesinin ayrıştırılmasıyla oluşan her bir eleman aşağıdaki ifade ile yaklaşır:

$$u(S, t) \approx U^e(S, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \psi_j^e(S) \quad (3.6)$$

Burada u_j^e 'ler sonlu elemanın düğüm noktalarında çözümün değerlerini ve ψ_j^e 'ler eleman yaklaşım fonksiyonlarını temsil etmektedir. Denklem (3.6) herhangi bir t zamanı için u 'nun konumsal yaklaşımını göstermektedir. Bu adım, elemandaki $u_j^e(t)$ düğüm değişkenleri için zamana bağlı adi diferansiyel denklemlerin kümesi ile sonuçlanır.

Bu durumda n cebirsel denklemi elde edebilmek için denklem (3.6)'yı V yerine, ayrıca Rayleigh-Ritz (ya da Galerkin) yöntemi gereğince zayıf formdaki ağırlık fonksiyonu ω yerine $\psi_1^e, \psi_2^e, \dots, \psi_n^e$ yerleştirilir:

$$0 = \int_{S_A}^{S_B} \left[\psi_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial t} \psi_j \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial S} \left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \right) + (r - \sigma^2) S \psi_i \left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \right) - r \psi_i \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \right] dS - (\psi_i(S_B) Q_B - \psi_i(S_A) Q_A) \quad (3.7)$$

Bu ifadeyi düzenlersek:

$$0 = \sum_{j=1}^n \int_{S_A}^{S_B} \left\{ \left[\psi_i \psi_j \frac{\partial u_j}{\partial t} \right] + \left[\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial S} \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \right) + \left((r - \sigma^2) S \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \right) - r \psi_i \psi_j \right] u_j \right\} dS - (\psi_i(S_B) Q_B - \psi_i(S_A) Q_A) \quad (3.8)$$

Elde edilen bu denklem matris şeklinde aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$[M^e]\{\dot{u}\} + [K^e]\{u\} = \{\hat{Q}\} \quad (3.9)$$

$$M_{ij} = \int_{S_A}^{S_B} \psi_i \psi_j dS \quad (3.9a)$$

$$K_{ij} = \int_{S_A}^{S_B} \left[\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial S} \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \right) + \left((r - \sigma^2) S \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial S} \right) - r \psi_i \psi_j \right] dS \quad (3.9b)$$

$$\hat{Q}_i = -(\psi_i(S_B) Q_B - \psi_i(S_A) Q_A) \quad (3.9c)$$

3.2.2 Zamansal yaklaşım

Denklem (3.9)'daki zamana bağlı türev durumundan, bu denklemi çözmek için kullanılan en yaygın yöntem α -ailesi yaklaşımıdır. Bu yaklaşım iki adımda ele alınır. İlk adım için, bağımlı değişkenin zamana göre türev değeri sonlu fark yöntemi yaklaşımına göre hesaplanır:

$$\{\dot{u}\}_{s+\alpha} = \frac{\{u\}_{s+1} - \{u\}_s}{\Delta t_{s+1}} \quad (3.10)$$

İkinci adımda, bu bağımlı değişkenin zamana göre türev değeri ağırlıklı ortalamayla hesaplanır. Bu ağırlıklı ortalama, ardışık iki zaman adımındaki değişkenin değerleri ile yapılan lineer interpolasyonla hesaplanır:

$$\{\dot{u}\}_{s+\alpha} = (1 - \alpha)\{\dot{u}\}_s + \alpha\{\dot{u}\}_{s+1} \quad (3.11)$$

Bu iki adım yani denklem (3.10) ve (3.11) birbirine eşitlenecek olursa:

$$(1 - \alpha)\{\dot{u}\}_s + \alpha\{\dot{u}\}_{s+1} = \frac{\{u\}_{s+1} - \{u\}_s}{\Delta t_{s+1}} \quad (3.12)$$

Denklem (3.12) t_{s+1} zamanında adi diferansiyel denklemleri u_j 'li cebirsel denklemlere indirgemek için kullanılır. Bunun için öncelikle denklemin her tarafı Δt_{s+1} ve denklem (3.9a)'daki $[M]$ denklem sistemi ile çarpılır.

$$\Delta t_{s+1}(1 - \alpha)[M]\{\dot{u}\}_s + \Delta t_{s+1}\alpha[M]\{\dot{u}\}_{s+1} = [M](\{u\}_{s+1} - \{u\}_s) \quad (3.13)$$

Denklem (3.13)'te yer alan $[M]\{\dot{u}\}_s$ ve $[M]\{\dot{u}\}_{s+1}$ yerine denklem (3.9)'un $t = t_s$ ve $t = t_{s+1}$ için karşı gelen değerleri çekilerek yazılır:

$$[M]\{\dot{u}\}_s + [K]\{u\}_s = \{\hat{Q}\}_s \quad (3.14a)$$

$$[M]\{\dot{u}\}_{s+1} + [K]\{u\}_{s+1} = \{\hat{Q}\}_{s+1} \quad (3.14b)$$

Bu durumda denklem (3.13) düzenlenip aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$([M] - \Delta t_{s+1}(1 - \alpha)[K])\{u\}_s = ([M] + \Delta t_{s+1}\alpha[K])\{u\}_{s+1} - \Delta t_{s+1}(\alpha\{\hat{Q}\}_{s+1} + (1 - \alpha)\{\hat{Q}\}_s) \quad (3.15)$$

Elde edilen denklem (3.15) basit bir ifadeyle aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$[A]\{u\}_s = [B]\{u\}_{s+1} - \Delta t\{\hat{Q}\} \quad (3.16)$$

$$[A] = ([M] - \Delta t_{s+1}(1 - \alpha)[K]) \quad (3.16a)$$

$$[B] = ([M] + \Delta t_{s+1} \alpha [K]) \quad (3.16b)$$

$$\{\hat{Q}\} = \left(\alpha \{\hat{Q}\}_{s+1} + (1 - \alpha) \{\hat{Q}\}_s \right) \quad (3.16c)$$

Buradaki α değeri için aşağıdaki integrasyon şemalarından biri seçilir.

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{ileri fark,} & O(\Delta t) \\ 1/2 & \text{Crank - Nicolson,} & O((\Delta t)^2) \\ 2/3 & \text{Galerkin,} & O((\Delta t)^2) \\ 1 & \text{Geri fark,} & O(\Delta t) \end{cases}$$

Bu tez çalışmasında Crank-Nicolson şemasına karşı gelen $\alpha = 1/2$ değeri kullanılmıştır. (Bkz: Reddy, 1993)

3.3 Sonlu Eleman Modeli

Bir önceki kısımda elde edilen denklem (3.16)'nın çözümü için [A] ve [B] matrislerinin hesaplanması ile mümkündür. [A] ve [B] matrislerinin hesaplanması için [M] ve [K] matrislerinin hesaplanması gerektiği görülmektedir. [M] ve [K] matrisleri denklem (3.9a) ve (3.9b)'den elde edilir. Denklem (3.9a) ve (3.9b)'de görüldüğü üzere [M] ve [K] matrisleri $\psi_{i,j}$ yaklaşım fonksiyonlarına bağlı olduğu için bu fonksiyonların belirlenmesi gerekir.

Bu tez çalışmasında $\psi_{i,j}$ yaklaşım fonksiyonları için lineer(doğrusal) eleman yaklaşım fonksiyonları ele alınacaktır. Bu durumda denklem (3.6)'da verilen her bir eleman için yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$U^e(S, t) = \sum_{j=1}^n u_j^e(t) \psi_j^e(S) = \psi_1^e(S) u_1^e + \psi_2^e(S) u_2^e \quad (3.17)$$

Denklem (3.17)'de yer alan lineer interpolasyon fonksiyonları olan ψ_i^e 'ler S genel koordinat düzlemi içinde ifade edilmektedir. Bu ψ_i^e fonksiyonlarına lineer bir model oluşturabilmek için bu fonksiyonlar her bir elemana karşılık gelecek bir \bar{x} yerel koordinat düzleminde tanımlanır. Tanım kümesi her bir eleman için $\Omega = (S_A, S_B) = (\bar{x}_e, \bar{x}_{e+1}) = (0, h)$ olarak ele alınır. ψ_i^e lineer interpolasyon fonksiyonları ise her bir eleman için aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h} \quad , \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h} \quad (3.18)$$

Bundan sonra denklem (3.9a) ve (3.9b)'de verilen $[M]$ ve $[K]$ matrisleri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$M_{ij} = \int_0^h \psi_i \psi_j d\bar{x} \quad (3.19a)$$

$$K_{ij} = \int_0^h \left[\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \bar{x}^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{x}} \right) + \left((r - \sigma^2) \bar{x} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{x}} \right) - r \psi_i \psi_j \right] d\bar{x} \quad (3.19b)$$

Denklem (3.19a) ve (3.19b)'de verilen $[M]$ ve $[K]$ matrisleri hesaplanacak olursa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$[M] = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.20a)$$

$$[K] = \frac{\sigma^2 - r}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma^2 h}{6} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + \frac{rh}{6} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20b)$$

3.4 Uygulama

Black-Scholes kısmi diferansiyel denkleminin sonlu eleman yöntemi ile çözümü bu kısma kadar bir eleman üzerinden anlatılmıştır. Elde edilen bu bir eleman üzerinden yaklaşık çözüm tanım kümesinde ayrıklaştırılan tüm elemanlar için MATLAB'da bir araya getirilerek alım ve satım opsiyonları için uygulama yapılmıştır. Elde edilen yaklaşık çözüm, Black-Scholes formülüne karşı gelen tam çözüm ile karşılaştırılmıştır. Black-Scholes formülü ile oluşturulan tam çözüm için MATLAB'ın *blsprice* fonksiyonu kullanılmıştır.

Kullanılan parametreler:

S_0 : Hisse senedi başlangıç fiyatı K : Hisse senedi işlem fiyatı

r : Risksiz faiz oranı σ : Volatility

T : Vade bitim tarihi

3.4.1 Alım opsiyonu

Alım opsiyonuna çözüm aranırken kullanılan sınır koşulları:

$$\begin{cases} C_0^n = 0 & 0 \leq n \leq N \\ C_M^n = M\Delta S - K e^{-r(N-n)\Delta t} & 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

Ve bitiş koşulu:

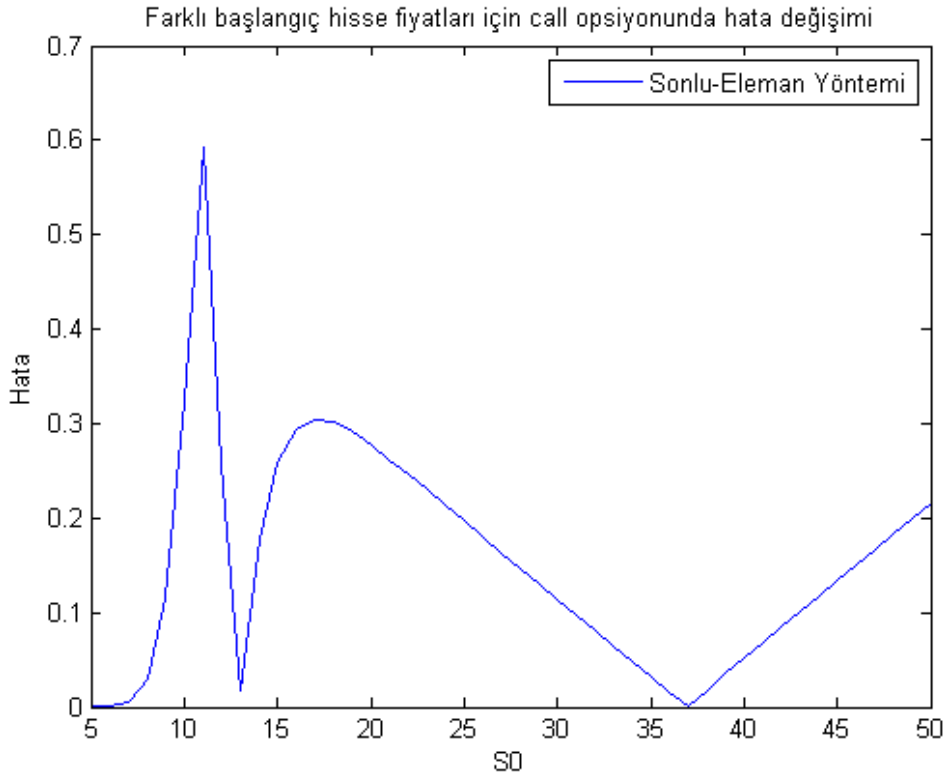
$$C_m^N = \max(0, m\Delta s - K) , \quad 0 \leq m \leq M$$

Çizelge 3.1 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi (K=12, r=0.05, $\sigma=0.2$, T=1)

S_0	B-S Form	SEY	Err
5	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0003	-0.0000	0.0003
7	0.0042	0.0000	0.0042
8	0.0288	-0.0000	0.0288
9	0.1161	0.0000	0.1160
10	0.3247	-0.0001	0.3248
11	0.7005	0.1070	0.5935
12	1.2541	0.9970	0.2571
13	1.9626	1.9801	0.0175
14	2.7871	2.9637	0.1766
15	3.6883	3.9471	0.2588
16	4.6359	4.9306	0.2947
17	5.6093	5.9141	0.3047
18	6.5964	6.8975	0.3011
19	7.5903	7.8810	0.2907
20	8.5875	8.8645	0.2770
21	9.5862	9.8479	0.2617
22	10.5857	10.8314	0.2457
23	11.5854	11.8149	0.2295
24	12.5853	12.7984	0.2130
25	13.5853	13.7818	0.1965
26	14.5853	14.7653	0.1800
27	15.5853	15.7488	0.1635
28	16.5852	16.7322	0.1470
29	17.5852	17.7157	0.1305
30	18.5852	18.6992	0.1139
31	19.5852	19.6827	0.0974
32	20.5852	20.6661	0.0809
33	21.5852	21.6496	0.0644
34	22.5852	22.6331	0.0478
35	23.5852	23.6165	0.0313
36	24.5852	24.6000	0.0148
37	25.5852	25.5835	0.0018
38	26.5852	26.5670	0.0183
39	27.5852	27.5504	0.0348
40	28.5852	28.5339	0.0513
41	29.5852	29.5174	0.0679
42	30.5852	30.5008	0.0844
43	31.5852	31.4843	0.1009
44	32.5852	32.4678	0.1175
45	33.5852	33.4513	0.1340
46	34.5852	34.4347	0.1505

Çizelge 3.1 (Devam): SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$)

S_0	B-S Form	SEY	Err
47	35.5852	35.4182	0.1670
48	36.5852	36.4017	0.1836
49	37.5852	37.3851	0.2001
50	38.5852	38.3686	0.2166



Şekil 3.1: SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$)

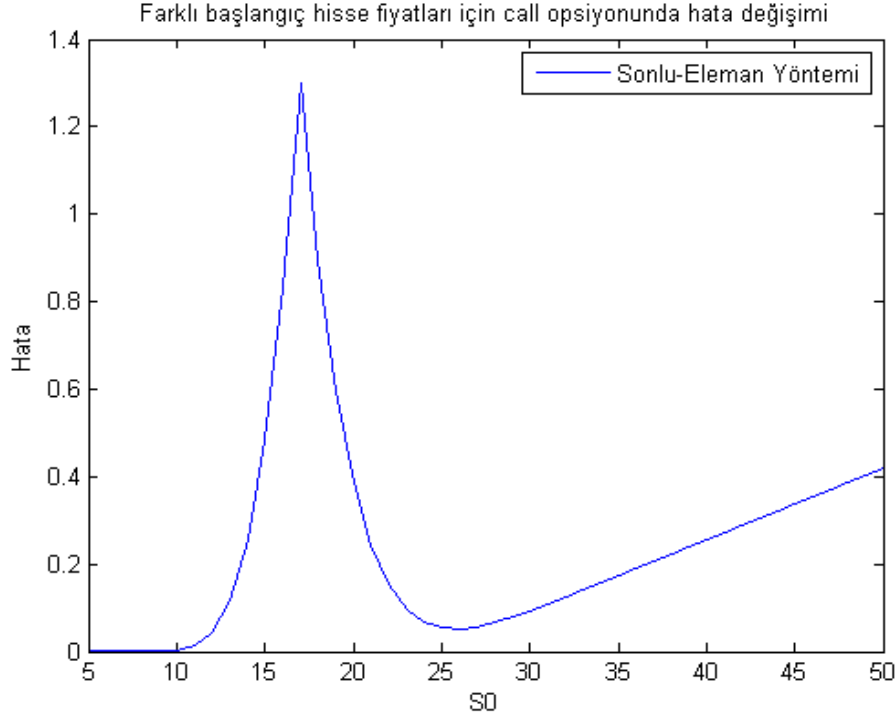
Çizelge 3.2 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=18, r=0.05, \sigma=0.2, T=1$)

S_0	B-S Form	SEY	Err
5	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	-0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	-0.0000	0.0000
9	0.0004	0.0000	0.0004
10	0.0029	-0.0000	0.0029
11	0.0129	0.0000	0.0129
12	0.0432	-0.0000	0.0432

Çizelge 3.2 (Devam): SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi (K=18, r=0.05, $\sigma=0.2$, T=1)

S_0	B-S Form	SEY	Err
13	0.1146	0.0000	0.1146
14	0.2540	-0.0000	0.2540
15	0.4871	0.0000	0.4871
16	0.8329	-0.0002	0.8331
17	1.2988	0.0007	1.2981
18	1.8811	0.9874	0.8937
19	2.5672	1.9700	0.5972
20	3.3399	2.9537	0.3861
21	4.1806	3.9372	0.2434
22	5.0722	4.9206	0.1516
23	6.0004	5.9041	0.0963
24	6.9538	6.8876	0.0663
25	7.9243	7.8710	0.0533
26	8.9059	8.8545	0.0514
27	9.8946	9.8380	0.0566
28	10.8878	10.8215	0.0663
29	11.8837	11.8049	0.0788
30	12.8813	12.7884	0.0929
31	13.8798	13.7719	0.1080
32	14.8790	14.7554	0.1237
33	15.8785	15.7388	0.1397
34	16.8782	16.7223	0.1559
35	17.8781	17.7058	0.1723
36	18.8780	18.6892	0.1888
37	19.8779	19.6727	0.2052
38	20.8779	20.6562	0.2217
39	21.8779	21.6397	0.2382
40	22.8779	22.6231	0.2548
41	23.8779	23.6066	0.2713
42	24.8779	24.5901	0.2878
43	25.8779	25.5735	0.3043
44	26.8779	26.5570	0.3209
45	27.8779	27.5405	0.3374
46	28.8779	28.5240	0.3539
47	29.8779	29.5074	0.3704
48	30.8779	30.4909	0.3870
49	31.8779	31.4744	0.4035
50	32.8779	32.4578	0.4200

Alım opsiyonuna göre elde edilen sonuçlar çizelge 3.1 ve çizelge 3.2’de gösterilmektedir. Bu sonuçlara göre işlem fiyatının küçük tutulduğu durumda farklı hisse başlangıç fiyatları için hataların daha küçük olduğu görülmektedir. Çizelgeler 3.1 ve 3.2 doğrultusunda oluşturulan hata değişim grafikleri şekil 3.1 ve şekil 3.2’de verilmektedir.



Şekil 3.2: SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu fiyat ve hata değişimi (K=18, r=0.05, σ=0.2, T=1)

Şekiller incelendiğinde, hisse başlangıç fiyatının işlem fiyatı civarında olduğu durumlarda hatanın keskin salınımlar yaptığı gözlemlenmektedir.

3.4.2 Satım opsiyonu

Satım opsiyonuna çözüm aranırken kullanılan sınır koşulları:

$$\begin{cases} P_0^n = 0 & 0 \leq n \leq N \\ P_M^n = Ke^{-r(N-n)\Delta t} - M\Delta S & 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

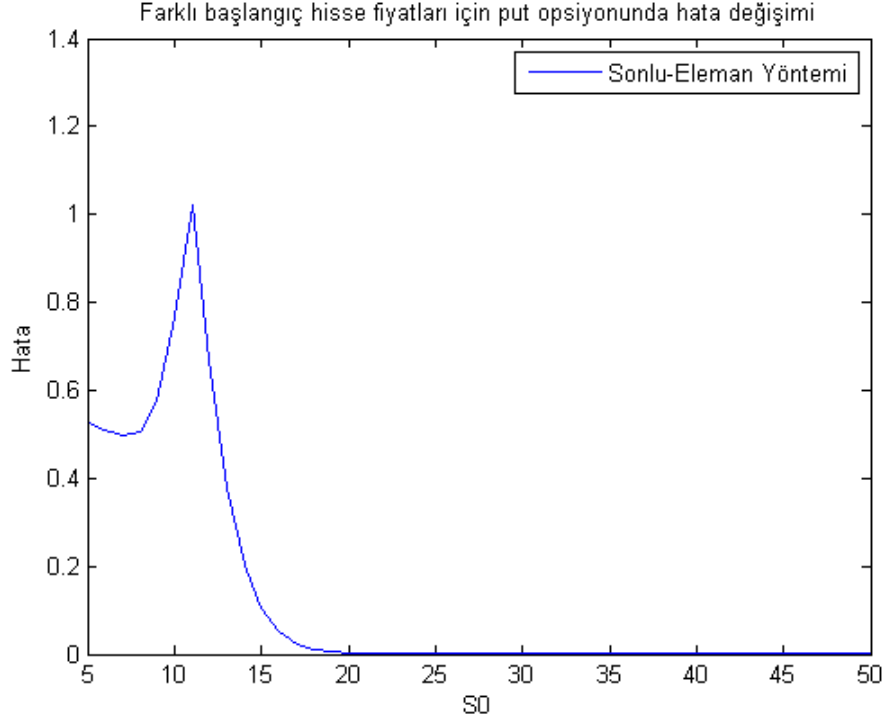
Ve bitiş koşulu:

$$P_m^N = \max(0, K - m\Delta s), \quad 0 \leq m \leq M$$

Satım opsiyonuna göre elde edilen sonuçlar çizelge 3.1 ve çizelge 3.2'de gösterilmektedir. Hisse başlangıç fiyatlarının küçük olduğu durumlarda, küçük işlem fiyatına karşı gelen hataların, büyük işlem fiyatına karşı gelen hatalardan daha büyük olduğu görülmektedir. Bu durum hisse başlangıç fiyatları büyüdükçe tersine dönmektedir. Çizelgeler doğrultusunda oluşturulan hata değişim grafikleri şekil 3.3 ve şekil 3.4'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, alım opsiyonundaki duruma benzer şekilde hisse başlangıç fiyatının işlem fiyatı civarında olduğu durumlarda hatanın keskin salınımlar yaptığı gözlemlenmektedir.

Çizelge 3.3 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi (K=12, r=0.05, $\sigma=0.2$, T=1)

S_0	B-S Form	SEY	Err
5	6.4148	5.8877	0.5270
6	5.4150	4.9041	0.5109
7	4.4190	3.9207	0.4983
8	3.4435	2.9372	0.5063
9	2.5308	1.9537	0.5771
10	1.7395	0.9702	0.7693
11	1.1153	0.0938	1.0215
12	0.6688	0.0003	0.6686
13	0.3774	-0.0001	0.3774
14	0.2018	0.0000	0.2018
15	0.1031	-0.0000	0.1031
16	0.0507	0.0000	0.0507
17	0.0241	-0.0000	0.0241
18	0.0112	0.0000	0.0112
19	0.0051	-0.0000	0.0051
20	0.0023	0.0000	0.0023
21	0.0010	-0.0000	0.0010
22	0.0004	-0.0000	0.0004
23	0.0002	0.0000	0.0002
24	0.0001	-0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000
26	0.0000	-0.0000	0.0000
27	0.0000	0.0000	0.0000
28	0.0000	-0.0000	0.0000
29	0.0000	0.0000	0.0000
30	0.0000	-0.0000	0.0000
31	0.0000	0.0000	0.0000
32	0.0000	-0.0000	0.0000
33	0.0000	0.0000	0.0000
34	0.0000	-0.0000	0.0000
35	0.0000	0.0000	0.0000
36	0.0000	-0.0000	0.0000
37	0.0000	0.0000	0.0000
38	0.0000	-0.0000	0.0000
39	0.0000	0.0000	0.0000
40	0.0000	-0.0000	0.0000
41	0.0000	0.0000	0.0000
42	0.0000	-0.0000	0.0000
43	0.0000	0.0000	0.0000
44	0.0000	-0.0000	0.0000
45	0.0000	0.0000	0.0000
46	0.0000	-0.0000	0.0000
47	0.0000	0.0000	0.0000
48	0.0000	-0.0000	0.0000
49	0.0000	0.0000	0.0000
50	0.0000	-0.0000	0.0000



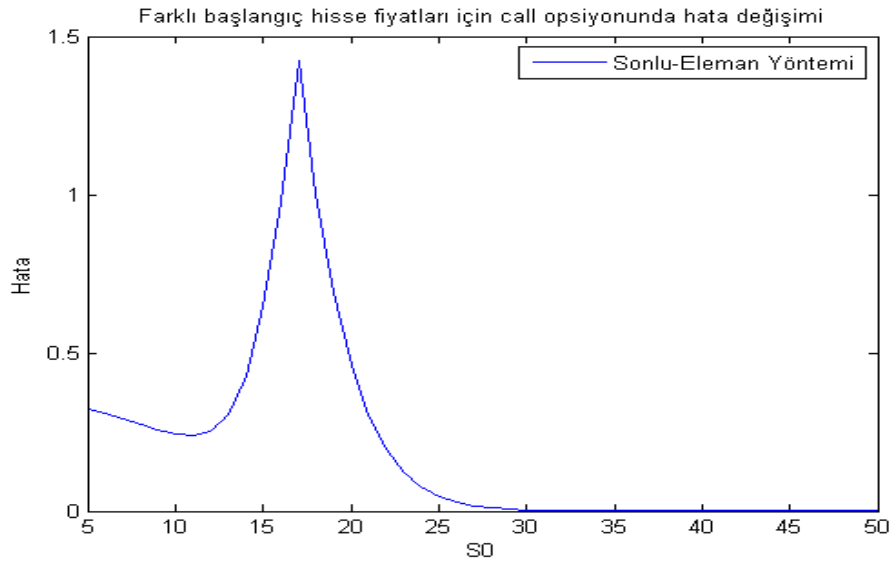
Şekil 3.3: SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=12$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)

Çizelge 3.4 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=18$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)

S_0	B-S Form	SEY	Err
5	12.1221	11.7987	0.3235
6	11.1221	10.8148	0.3073
7	10.1221	9.8315	0.2907
8	9.1222	8.8480	0.2742
9	8.1226	7.8645	0.2581
10	7.1250	6.8810	0.2440
11	6.1350	5.8976	0.2375
12	5.1653	4.9141	0.2512
13	4.2368	3.9306	0.3062
14	3.3761	2.9471	0.4290
15	2.6093	1.9637	0.6455
16	1.9550	0.9800	0.9750
17	1.4209	-0.0026	1.4235
18	1.0032	0.0007	1.0025
19	0.6894	-0.0002	0.6896
20	0.4620	0.0001	0.4620
21	0.3027	-0.0000	0.3027
22	0.1943	0.0000	0.1943
23	0.1225	-0.0000	0.1225
24	0.0760	0.0000	0.0760

Çizelge 3.4 (Devam): SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=18$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)

S_0	B-S Form	SEY	Err
25	0.0465	-0.0000	0.0465
26	0.0281	0.0000	0.0281
27	0.0168	-0.0000	0.0168
28	0.0099	0.0000	0.0099
29	0.0058	-0.0000	0.0058
30	0.0034	0.0000	0.0034
31	0.0020	-0.0000	0.0020
32	0.0011	0.0000	0.0011
33	0.0006	-0.0000	0.0006
34	0.0004	0.0000	0.0004
35	0.0002	-0.0000	0.0002
36	0.0001	0.0000	0.0001
37	0.0001	-0.0000	0.0001
38	0.0000	0.0000	0.0000
39	0.0000	-0.0000	0.0000
40	0.0000	0.0000	0.0000
41	0.0000	-0.0000	0.0000
42	0.0000	0.0000	0.0000
43	0.0000	-0.0000	0.0000
44	0.0000	0.0000	0.0000
45	0.0000	-0.0000	0.0000
46	0.0000	0.0000	0.0000
47	0.0000	-0.0000	0.0000
48	0.0000	0.0000	0.0000
49	0.0000	-0.0000	0.0000
50	0.0000	0.0000	0.0000



Şekil 3.4: SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için satım opsiyonu fiyat ve hata değişimi ($K=18$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)

3.4.3 Ağ iyileştirme

Sonlu elaman yöntemi lineer yaklaşım için ağ iyileştirme (mesh refinement) çalışması tanım kümesi farklı Δs aralıklara bölünerek farklı hisse başlangıç fiyatlarına (S_0) karşılık sabit hisse işlem fiyatı (K) alınarak yapıldı. Black-Scholes formülü kullanılarak elde edilen hata değerleri çizelge 3.5 ve çizelge 3.6 verildi. Ağ iyileştirme ile ilgili çalışma neticesinde farklı hisse işlem fiyatı K için iyileştirme sonuçlarında farklı durumların oluştuğu görüldü. K 'nın küçük değerleri için iyileştirmenin daha etkili olduğu gözlemlendi. Dolayısıyla K değeri arttıkça iyileştirmenin etkisi azalmaktadır.

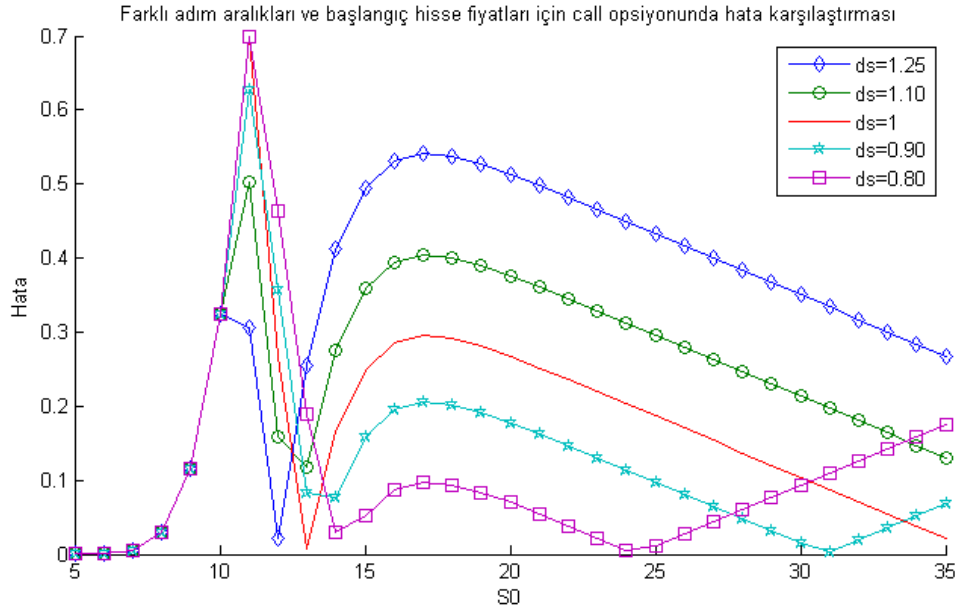
Çizelge 3.5 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu ağ iyileştirme yapıldığında hata karşılaştırması ($K=12$, $S=0:100$, $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $T=1$, $\Delta t=0.01$)

S_0	$\Delta s=1.25$	$\Delta s=1.1$	$\Delta s=1$	$\Delta s=0.9$	$\Delta s=0.8$
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
7	0.0042	0.0042	0.0042	0.0042	0.0042
8	0.0288	0.0288	0.0288	0.0288	0.0288
9	0.1161	0.1161	0.1160	0.1160	0.1161
10	0.3247	0.3248	0.3249	0.3249	0.3248
11	0.3055	0.5027	0.6998	0.6281	0.6999
12	0.0214	0.1578	0.2666	0.3568	0.4638
13	0.2541	0.1171	0.0074	0.0819	0.1895
14	0.4128	0.2761	0.1667	0.0771	0.0304
15	0.4951	0.3583	0.2488	0.1593	0.0518
16	0.5310	0.3942	0.2847	0.1952	0.0877
17	0.5410	0.4042	0.2948	0.2052	0.0977
18	0.5374	0.4006	0.2912	0.2016	0.0941
19	0.5270	0.3902	0.2807	0.1912	0.0837
20	0.5133	0.3765	0.2670	0.1775	0.0700
21	0.4980	0.3612	0.2518	0.1622	0.0547
22	0.4821	0.3452	0.2358	0.1462	0.0388
23	0.4658	0.3290	0.2195	0.1299	0.0225
24	0.4494	0.3125	0.2031	0.1135	0.0061
25	0.4329	0.2961	0.1866	0.0970	0.0104
26	0.4164	0.2795	0.1701	0.0805	0.0269
27	0.3998	0.2630	0.1536	0.0640	0.0435
28	0.3833	0.2465	0.1370	0.0475	0.0600
29	0.3668	0.2300	0.1205	0.0310	0.0765
30	0.3503	0.2134	0.1040	0.0144	0.0930
31	0.3337	0.1969	0.0875	0.0021	0.1096
32	0.3172	0.1804	0.0709	0.0186	0.1261
33	0.3007	0.1639	0.0544	0.0352	0.1426
34	0.2842	0.1473	0.0379	0.0517	0.1591
35	0.2676	0.1308	0.0213	0.0682	0.1757

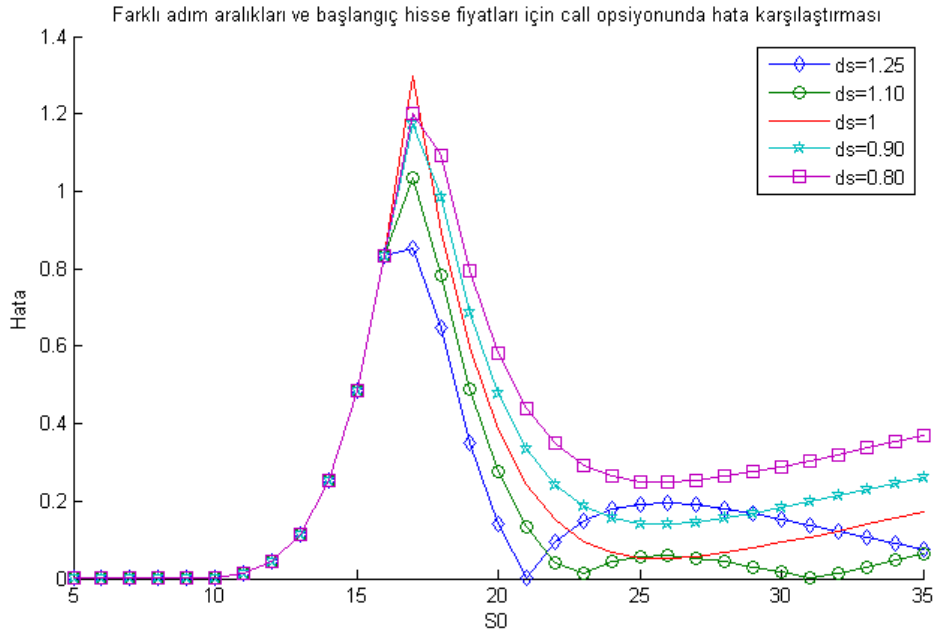
Çizelge 3.6 : SEY_Farklı hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu ağ iyileştirme yapıldığında hata karşılaştırması ($K=18$, $S=0:100$, $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $T=1$, $\Delta t=0.01$)

S_0	$\Delta s=1.25$	$\Delta s=1.1$	$\Delta s=1$	$\Delta s=0.9$	$\Delta s=0.8$
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004
10	0.0029	0.0029	0.0029	0.0029	0.0029
11	0.0129	0.0129	0.0129	0.0129	0.0129
12	0.0432	0.0432	0.0432	0.0432	0.0432
13	0.1146	0.1146	0.1146	0.1146	0.1146
14	0.2540	0.2540	0.2540	0.2540	0.2540
15	0.4872	0.4872	0.4871	0.4871	0.4871
16	0.8328	0.8328	0.8331	0.8329	0.8330
17	0.8545	1.0352	1.2981	1.1727	1.1996
18	0.6485	0.7849	0.8937	0.9839	1.0916
19	0.3506	0.4876	0.5972	0.6866	0.7940
20	0.1400	0.2767	0.3861	0.4757	0.5832
21	0.0029	0.1340	0.2434	0.3330	0.4404
22	0.0947	0.0421	0.1516	0.2411	0.3486
23	0.1500	0.0132	0.0963	0.1858	0.2933
24	0.1800	0.0432	0.0663	0.1558	0.2633
25	0.1930	0.0562	0.0533	0.1428	0.2503
26	0.1949	0.0581	0.0514	0.1410	0.2484
27	0.1896	0.0528	0.0566	0.1462	0.2537
28	0.1800	0.0431	0.0663	0.1559	0.2633
29	0.1675	0.0307	0.0788	0.1683	0.2758
30	0.1534	0.0166	0.0929	0.1824	0.2899
31	0.1383	0.0015	0.1080	0.1975	0.3050
32	0.1226	0.0142	0.1237	0.2132	0.3207
33	0.1066	0.0302	0.1397	0.2293	0.3367
34	0.0903	0.0465	0.1559	0.2455	0.3530
35	0.0740	0.0629	0.1723	0.2619	0.3693

Çizelge 3.5 ve çizelge 3.6'daki ağ iyileştirme durumları şekil 3.5 ve şekil 3.6'da grafik üzerinde gösteriliyor. Hisse işlem fiyatı (K)'nın 12 olduğu durumda, hisse başlangıç fiyatının 13 ile 27 aralığına bakılırsa Δs 'in azaldıkça hatanın da azaldığı görülecektir. Dolayısıyla bu koşullar altında ağ iyileştirmenin etkili olduğu söylenebilir. Ayrıca, hisse başlangıç fiyatı işlem fiyatından uzaklaştıkça ağ iyileştirmenin etkisinin azaldığı görülmektedir. K'nın 18 olduğu durumda ise ağ iyileştirmenin etkisi K'nın 12 olduğu duruma göre daha azaldığı farkediliyor.



Şekil 3.5: SEY_Farklı adım aralıkları ve hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu hata karşılaştırılması ($K=12$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)



Şekil 3.6: SEY_Farklı adım aralıkları ve hisse başlangıç değerleri için alım opsiyonu hata karşılaştırılması ($K=18$, $r=0.05$, $\sigma=0.2$, $T=1$)

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Black-Scholes kısmi diferansiyel denkleminin sonlu eleman lineer yaklaşımı ve sonlu fark yöntemi kullanılarak sayısal çözümlerde ortaya çıkan hatanın karşılaştırılması hedeflenmiştir. Karşılaştırmada tam çözüm için Black-Scholes formülü kullanılmıştır. Farklı finansal koşullarda analizler yapılmaktadır. Black-Scholes modeli finansal marketin sakin olduğu durumlarda daha kullanışlıdır.

Sonlu fark yönteminde volatilitenin düşük olduğu finansal durumlarda, başlangıç hisse fiyatı ile işlem fiyatının yakın olduğu durumlarda hata miktarında salınımlar gözlemlenmiştir. Bu sonuç (Hackmann, 2009) ile tutarlıdır. Başlangıç hisse fiyatı ile işlem fiyatının yakın olduğu durumlarda hata miktarında salınımlar olması, bitiş koşulu sırasında normal dağılım fonksiyonu $N(d_1)$ değerinin limitinin olmayışından kaynaklandığına inanmaktayız.

Volatilitenin yüksek olduğu durumlarda hata miktarındaki salınım sayısı artmaktadır. Ayrıca, sonlu fark sayısal yönteminin Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemine uygulamasında işlem kalan zamanı ve adım sayısı arttıkça birikimli yuvarlama hatasının arttığı gözlemlenmiştir. Gözlemlenen sonuçlar literatürle tutarlıdır.

Sonlu eleman yöntemi ile elde edilen sonuçlar sonlu fark yöntemi ile paralellik göstermekle beraber, hataların sonlu fark yöntemindekine göre daha büyük olduğu görülmektedir. Hataların büyük olması SEY’de seçilen doğrusal (lineer) eleman yaklaşım fonksiyonu ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Daha farklı seçilen eleman yaklaşım fonksiyonları için daha iyi sonuçlar elde edilebilir. (Bkz: Topper, 2005). Ayrıca, SEY’in başlangıç hisse fiyatı ile işlem fiyatının yakın olduğu durumlarda hata miktarındaki salınımların SFY ile benzerlik gösterdiği de gözlenmektedir. Yaptığımız ağ iyileştirmesinde SEY lineer yaklaşım için farklı durumlar oluştuğu görülmüş olup, işlem fiyatının küçük olduğu durumlarda daha etkili sonuç vermiştir.

KAYNAKLAR

- Achdou Y. & Pironneau O.** (n.d.). *Finite Element Methods for Option Pricing*, Erişim:15.Aralık.2015, <https://www.ljll.math.upmc.fr/pironneau/publi/publications/ramafem2.pdf>
- Alberty, J.** (2004). *Nonlinear Black Scholes Modeling – FDM vs FEM*, Master's thesis, Christ Church College, University of Oxford.
- Black F. & Scholes, M.** (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol 81, No. 3, pp. 637-654
- Hackmann, D.** (2009). Solving The Black Scholes Equation Using a Finite Difference Method.
- Hull , J. C.** (2008). *Options, Futures and Other Derivatives (7 ed.)*. Prentice Hall.ISBN 0-13-505283-1
- Itô, K.** (1944). Stochastic Integral. Proc. Imperial Acad. Tokyo 20 519-524
- Reddy, J. N.** (1993). *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill New York NY
- Rouah, F. B.** (n. d.). *Four Derivations of the Black Scholes PDE*, Mathematical Finance notes, Erişim: 15 Kasım 2015, <http://www.frouah.com/pages/finmath.html>
- Saunders, D.** (2005). *Mathematical Finance 2 Lecture Notes*, University of Pittsburgh, USA.
- Shreve, S.** (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, New York NY
- Topcu, M. & Taşgetiren S.** (1998). *Mühendisler için Sonlu Elemanlar Metodu*, Mühendislik Fakültesi Matbaası, Denizli
- Topper, J.** (2005). *Option Pricing with Finite Elements*, Wilmott Magazine, 84-90
- Wilmott, P., Howison, S. & Dewynne, J.** (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press
- Wilmott, P.** (2007). *Introduces Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, Ltd

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Hayati Ünsal Özer
Doğum Tarihi ve Yeri : 10/03/1986 İzmir
E-posta : ozerh@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2012, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü