





**BELİRTİK SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN OLASILIKÇIL EVRİM  
KURAMINDA YÖNEYÜS TOPLAMLARINDAKİ IRAKGÖRÜR DİZEYLERİN  
DÖRDÜLLEŞTİRİMİLE YALINLAŞTIRIMI: HENON-HEİLES DİZGELERİ**

**YÜKSEK LİSANS SAVI**

**Melike Ebru KIRKIN**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı**

**Sav Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP**

**HAZİRAN 2016**



**BELİRTİK SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN OLASILIKÇIL EVRİM  
KURAMINDA YÖNEYÜS TOPLAMLARINDAKİ İRAKGÖRÜR DİZEYLERİN  
DÖRDÜLLEŞTİRİMİLE YALINLAŞTIRIMI: HENON-HEILES DİZGELERİ**

**YÜKSEK LİSANS SAVI**

**Melike Ebru KIRKIN  
(702111004)**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı**

**Sav Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP**

**HAZİRAN 2016**



İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702111004 sırasayılı Yüksek Lisans Öğrencisi Melike Ebru KIRKIN, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm koşulları yerine getirdikten sonra hazırladığı “BELİRTİK SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN OLASILIKÇIL EVRİM KURAMINDA YÖNEYÜS TOPLAMLARINDAKİ İRAKGÖRÜR DİZEYLERİN DÖRDÜLLEŞTİRİMİLE YALINLAŞTIRIMI: HENON-HEILES DİZGELERİ” başlıklı savını aşağıdaki onayimleri olan sınav kurulu önünde başarı ile sunmuştur.

**Sav Danışmanı :** **Prof. Dr. Metin DEMİRALP** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Sınav Kurulu Üyeleri :** **Doç. Dr. Adem TEKİN** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Doç. Dr. M. Alper TUNGA** .....  
Bahçeşehir Üniversitesi

.....

**Teslim Tarihi :** **02 Mayıs 2016**  
**Savunma Tarihi :** **10 Haziran 2016**







*Anneme*



## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini ve katkılarını esirgemeyen, gereksinim duyduğum her an bana zaman ayıran danışmanım Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e kısıtsız teşekkürlerimi sunarım. Sav çalışmamın tüm aşamalarındaki değerli yardımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Coşar GÖZÜKIRMIZI'ya teşekkürü borç bilirim.

Bu çalışmaya katkı sağlayan Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu'na (BEBBYT) teşekkür ederim.

Yaşamım boyunca verdikleri kısıtsız destek için aileme kısıtsız teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2016

Melike Ebru KIRKIN



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ .....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
KISALTIMLAR .....	xi
ÇİZELGE DİZELGESİ .....	xiii
ÇİZİM DİZELGESİ .....	xv
ÖZET .....	xvii
SUMMARY .....	xxi
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. BELİRTİK VE ÖZERK SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN BAŞLANGIÇ DEĞER SORUNUNUN ÇÖZÜMÜ İÇİN OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI</b> .....	<b>5</b>
2.1 Birinci Kerteden STD Küme'si için Olasılıkçıl Evrim Kuramı .....	5
2.1.1 Sorun'un tanımı .....	5
2.1.2 Betimleyici işlevin toplamdizi açılımı ile doğrucul denklem küme'lerinin oluşurumu .....	5
2.1.3 Olasılıkçıl evrim dizeyinin belirlenimi .....	6
2.1.3.1 Biçimcil çözüm .....	7
2.2 İkinci Kerteden STD Küme'si için Olasılıkçıl Evrim Kuramı .....	8
2.2.1 Sorun'un tanımı .....	8
2.2.2 Betimleyici işlevin dolaysızüslü toplamdizi açılımı .....	9
2.2.3 Olasılıkçıl evrim dizeyinin oluşurumu .....	10
2.3 İki Bilinmeyenli Belirtik Sıradan Türevli Denklemlerin Çözümü için Olasılıkçıl Evrim Kuramı .....	12
<b>3. OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI BAĞLAMINDA DEĞİŞMEZLİK EKLENİMLİ UZAY GENİŞLETİMİ</b> .....	<b>17</b>
3.1 Sorun'un Tanımı .....	17
3.2 Dizge Yöneyinin Genişletimi .....	18
3.3 Genişletilmiş Dizge Yöneyi ile Oluşturulan STD'in Katsayılarının Belirlenimi ve Esneklik Yönetimi .....	19
3.4 Genişletilmiş Birinci Katsayı Dizeyinin Ölçeklenen Birimdzeyleştirimi .....	20
3.5 DEUG ile Dördül STD Küme'sine İndirgeme Olgusu .....	21
3.5.1 Özyineleyiş ile genel bir yapı oluşturulması .....	22
3.5.2 Yakınsaklık inceleyişi .....	23
<b>4. DÖRDÜLLEŞTİRİM</b> .....	<b>27</b>
4.1 Sorun'un Tanımı .....	27
4.2 Irakgörür Dizeylerin Dördülleştirimi .....	28
4.3 Tıkızlaştırım Olguları .....	30

4.3.1 F dizeyinin öbeklerinin bakışimli ve değiştirimli oluş olgusu .....	30
4.3.2 F dizeyinin öbeklerinin eşit oluş olgusu.....	32
4.3.3 F dizeyinin öbeklerinin birim dizeye eşit oluş olgusu.....	33
4.4 Dördülleştirilmiş Irakgörür Dizeylerin Özyineleyişi.....	33
<b>5. HÉNON HEILES DİZGELERİNİN DEVİNİMLERİNİN DÖRDÜLLEŞTİRİM OLGUSUYLA BELİRLENİŞİ.....</b>	<b>37</b>
5.1 Hénon Heiles Dizgesi .....	37
5.2 Betikleyiş .....	39
<b>6. SONUÇLAR.....</b>	<b>71</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>73</b>
<b>EKLER .....</b>	<b>75</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>81</b>



## **KISALTIMLAR**

<b>OLEVKU</b>	: Olasılıkçıl Evrim Kuramı
<b>PREVTH</b>	: Probabilistic Evolution Theory
<b>STD</b>	: Sıradan Türevli Denklem
<b>ODE</b>	: Ordinary Differential Equation
<b>DEUG</b>	: Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletimi
<b>CASE</b>	: Constancy Adding Space Extension
<b>SquTelMats</b>	: Squarified Telescope Matrices
<b>BEBBYT</b>	: Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu
<b>G4SMC</b>	: Group for Science and Methods of Computing







## ÇİZELGE DİZELGESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 5.1 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri. ....	39
Çizelge 5.2 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri. ....	40
Çizelge 5.3 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri. ....	41
Çizelge 5.4 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri. ....	41
Çizelge 5.5 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri. ....	42
Çizelge 5.6 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri. ....	43
Çizelge 5.7 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri. ....	44
Çizelge 5.8 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri. ....	44
Çizelge 5.9 : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri. ....	45
Çizelge 5.10 : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri. ....	46
Çizelge 5.11 : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri. ....	47
Çizelge 5.12 : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri. ....	47
Çizelge 5.13 : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri. ....	48
Çizelge 5.14 : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri. ....	48
Çizelge 5.15 : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri. ....	49
Çizelge 5.16 : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri. ....	49
Çizelge 5.17 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri. ....	50
Çizelge 5.18 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri. ....	51
Çizelge 5.19 : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri. ....	52

<b>Çizelge 5.20</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri. ....	52
<b>Çizelge 5.21</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri.....	53
<b>Çizelge 5.22</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri.....	54
<b>Çizelge 5.23</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.....	55
<b>Çizelge 5.24</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.....	55
<b>Çizelge 5.25</b> : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri. ....	56
<b>Çizelge 5.26</b> : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri. ....	57
<b>Çizelge 5.27</b> : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri. ....	57
<b>Çizelge 5.28</b> : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri. ....	58
<b>Çizelge 5.29</b> : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri. ....	58
<b>Çizelge 5.30</b> : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri. ....	59
<b>Çizelge 5.31</b> : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri. ....	60
<b>Çizelge 5.32</b> : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri. ....	60

## ÇİZİM DİZELGESİ

### Sayfa

<b>Çizim 5.1</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre birinci $(x_1(t))$ işlevinin çizimi. ....	40
<b>Çizim 5.2</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre ikinci $(x_2(t))$ işlevinin çizimi. ....	42
<b>Çizim 5.3</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre üçüncü $(x_3(t))$ işlevinin çizimi. ....	43
<b>Çizim 5.4</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre dördüncü $(x_4(t))$ işlevinin çizimi. ....	45
<b>Çizim 5.5</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci $(x_1(t))$ işlevinin çizimi. ....	46
<b>Çizim 5.6</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci $(x_2(t))$ işlevinin çizimi. ....	47
<b>Çizim 5.7</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre üçüncü $(x_3(t))$ işlevinin çizimi. ....	48
<b>Çizim 5.8</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre dördüncü $(x_4(t))$ işlevinin çizimi. ....	50
<b>Çizim 5.9</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre birinci $(x_1(t))$ işlevinin çizimi. ....	51
<b>Çizim 5.10</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre ikinci $(x_2(t))$ işlevinin çizimi. ....	53
<b>Çizim 5.11</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre üçüncü $(x_3(t))$ işlevinin çizimi. ....	54
<b>Çizim 5.12</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre dördüncü $(x_4(t))$ işlevinin çizimi. ....	56
<b>Çizim 5.13</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci $(x_1(t))$ işlevinin çizimi. ....	57
<b>Çizim 5.14</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci $(x_2(t))$ işlevinin çizimi. ....	58
<b>Çizim 5.15</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre üçüncü $(x_3(t))$ işlevinin çizimi. ....	59
<b>Çizim 5.16</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre dördüncü $(x_4(t))$ işlevinin çizimi. ....	61
<b>Çizim 5.17</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre birinci $(x_1(t))$ işlevinin çizimi. ....	61
<b>Çizim 5.18</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre ikinci $(x_2(t))$ işlevinin çizimi. ....	62
<b>Çizim 5.19</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre üçüncü $(x_3(t))$ işlevinin çizimi. ....	62
<b>Çizim 5.20</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre dördüncü $(x_4(t))$ işlevinin çizimi. ....	63
<b>Çizim 5.21</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci $(x_1(t))$ işlevinin çizimi. ....	63
<b>Çizim 5.22</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci $(x_2(t))$ işlevinin çizimi. ....	64
<b>Çizim 5.23</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre üçüncü $(x_3(t))$ işlevinin çizimi. ....	64

<b>Çizim 5.24</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.....	65
<b>Çizim 5.25</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi. ....	65
<b>Çizim 5.26</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimi. ....	66
<b>Çizim 5.27</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimi. ....	66
<b>Çizim 5.28</b> : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi. ....	67
<b>Çizim 5.29</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi. ....	67
<b>Çizim 5.30</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimi. ....	68
<b>Çizim 5.31</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimi. ....	68
<b>Çizim 5.32</b> : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.....	69



# BELİRTİK SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN OLASILIKÇIL EVRİM KURAMINDA YÖNEYÜS TOPLAMLARINDAKİ IRAKGÖRÜR DİZEYLERİN DÖRDÜLLEŞTİRİMİLE YALINLAŞTIRIMI: HENON-HEILES DİZGELERİ

## ÖZET

Olasılıkçıl evrim kuramı genellikle özerk (ing: autonomous) ve belirtik (ing: explicit) sıradan türevli denklemlerin başlangıç değer sorunlarının çözümünde kullanılmaktadır. Belirtik denklem, en yüksek üslü kerteden türevin bir yanda yalın olarak bırakıldığı, diğer yanda da daha az kerteden türevlerin ve bilinmeyenlerin yazıldığı bir yapıdır. Burada kerte birden farklı bir doğal sayı da olabilir. Ancak birden yüksek doğal sayılı kertesini olan bir sıradan türevli denklem birinci kerteden ama daha fazla bilinmeyeni olan bir sıradan türevli denklem küme'si getirilebilir. Dolayısıyla

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

biçiminde bir denklem yazılabilir. Burada alt sırasayısının tanım bölgesi denklem sayısını betimleyen bir olgudur. Bu denklemlerin her biri özelsiz olarak sol yanında  $t$  bağımsız değişkenli  $x$ 'in birinci kerteden türevi, sağ yanında ise bilinmeyenlerin türevi ve bağımsız değişken olan  $t$ 'ye bağımlı bir işlevi içerecek biçimde yazılabilir. Ancak bu denklemlerdeki  $t$ 'nin varlığı ayrıştırım ve çeşitli yaklaşıtırm yöntemlerinde sorun yaratabilmektedir. Dolayısıyla açık olarak  $t$ 'ye bağımlılığı görünmeyen sağ yanlı denklemler yazılabilmelidir. Bu durumda  $t$  yerine  $x_{n+1}$ 'in türevi yazılabilir.  $x_{n+1}$ 'in türevi de 1'e eşittir. Böylelikle  $(n + 1)$  sayıda denklem elde edilir ve bu denklemler de sağ yanında  $t$ 'nin açık olarak görülmediği işlevlerin olduğu bir yapı olarak gündeme gelir. Bu tür yapılara da özerk denklemler denir. Bu durumda özerklik, uzayın genişletilerek, diğer bir deyişle bilinmeyenler tarafından örtülen uzayın boyutunu bir arttırıp işlem yapmak anlamına gelir. Birinci kerteden olan her bir denklemden bir tane değişmez elde edilir. Bu değişmezlerin eşsiz bir biçimde belirlenebilmesi için koşul vermek gerekir. Koşullar, çok sayıda  $t$  anında verilebilir. OEK'da özerklik söz konusuysa  $t$ 'nin başlangıç değeri 0 olarak alınabilir. Burada  $t$  olarak kullanılan bağımsız değişken zaman değişkeni anlamına gelmektedir. Başlangıç koşulu olarak birtakım değişmezlere zamanın başlangıç anında

$$x_i(0) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

biçiminde değerler verildiği varsayılabilir.  $n$  sayısının ne düzeyde büyük olduğu bilinmediğinden bu denklemler yöney gösterilimi kullanılarak tıktır bir biçimde

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \quad (3)$$

olarak yazılabilir. Burada sağ yandaki yapıya betimleyici işlev yöneyi adı verilir. Başlangıç koşulu yöney biçimli olarak yazılırsa  $\mathbf{a}$  yöneyinin öğelerinin  $a_1$ 'den  $a_n$ 'ye dek olan sayılar olduğu kestirilebilir. Bu bağlamda olayın irdelenebilmesi için çok

değişkenli Taylor toplam dizisi kullanılabilir. Taylor toplam dizisinden uygun bir gösterim elde edebilmek için Kronecker üslü toplam dizisi gündeme getirilebilir. Dolayısıyla dizge yöneyi adı verilen "system" sözcüğünü çağrıştıran  $s$  ile simgelenen ve  $n$  sayıda  $t$ 'ye bağımlı işlevlerden oluşan öğeleri olan

$$\mathbf{s}(t) \equiv [s_1(t) \dots s_n(t)]^T \equiv \left[ \left( x_1(t) - x_1^{(e)} \right) \dots \left( x_n(t) - x_n^{(e)} \right) \right]^T \quad (4)$$

biçiminde bir yöney olarak gündeme getirilebilir. Bu dizge yöneyi, Taylor toplam dizisinin "expansion point" sözcüğünü çağrıştıran  $e$  ile simgelenen açılım noktasıdır.  $s$  ile  $s$ 'nin Kronecker çarpımında birinci çarpanın her bir öğesini ikinci çarpan yöneyiyle çarparak bir yöney oluşturulur. Bu yöneyin öğeleri de sıra gözeterek  $s_1^2, s_1s_2, s_2s_1, s_2^2$  olarak ikili çarpımlardan oluşur.

Dizge yöneyinin Kronecker üslüsü

$$\mathbf{s}(t)^{\otimes m} \equiv \mathbf{s}(t) \otimes \dots \otimes \mathbf{s}(t)$$

$$\mathbf{s}(t)^{\otimes m} = \begin{bmatrix} s_1(t)\mathbf{s}(t)^{\otimes(m-1)} \\ \vdots \\ s_n(t)\mathbf{s}(t)^{\otimes(m-1)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}(t)^{\otimes 0} = 1 \quad (5)$$

biçiminde gündeme getirilebilir. Tüm cebircil olguların üs alımlarında 0. üssün karşılığı 1'dir. Burada da dizge yöneyinin 0. üslüsü alınca  $n^0$ , diğer bir deyişle tek bir tane öğe elde edilir ve bu öğe de 1 seçilmek durumundadır. Bu duruma da uyluşım (ing: convention) adı verilir. Dolayısıyla (8)'nin sağ yan işlevi

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j \mathbf{s}(t)^{\otimes j} \quad (6)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,  $j$ . Kronecker üslüsü için,  $n^j$  öğeli bir uzaydan  $n$  öğeli bir uzaya götüreceği olan bir dönüşüm uygulanmalıdır. Dolayısıyla  $\mathbf{F}_j$ ,  $n \times n^j$  öğeli olmalıdır. Burada  $j$  sayısı arttıkça, gittikçe büyüyen dikdörtgen dizeler gündeme gelir.  $\mathbf{F}_j$ 'lerin yöneleğim (ing: gradient) işlecinin  $j$ . Kronecker üslüsünün  $j!$ 'e bölümü ile eşdeğer olması gerekir. Taylor açılımı eşsizdir. Bu durumda  $\mathbf{f}$ 'nin türevi eşsiz bir biçimde belirlenebilir. Bu da süreklilik ve çözümcüllüğün olduğu anlamına gelir.  $s$ 'nin Kronecker dördülünde dördüllerin yanı sıra değişik konumlandırılmış ikililer elde edilir ve aynı türden öğelerin yinelenişi söz konusudur. Bu çarpımda bu öğenin sırasının değişeceği varsayılırsa  $\mathbf{F}_j$ 'nin yapısına, bir yerinde 1, başka bir yerinde  $-1$  olan bir yöneyin içerildiği dış çarpım eklenirse, tüm anlatım değişmez. Eklentinin başına katsayı koyulursa da değişmez. Bu da  $\mathbf{F}_j$ 'nin eşsiz olmadığı anlamına gelir ve içindeki belirsizliklerin giderilişi için eşbölünüm kanıtı kullanılabilir.

Dizge yöneyinin sayılabilir sonsuzlukta Kronecker üslüsü olduğu için sonsuz doğrucul ve bağdaşık bir sıradan türevli denklem takımı oluşturulabilir ve katsayı da değişmez bir dize olur. Bu evrim dizeyi olarak adlandırılır. Öbek biçimli üst Hessenberg yapısında yazılabilen evrim dizeyi asal köşegen altındaki köşegenin sıfırlardan oluşabilmesi için uzay genişletimi uygulanarak üst üçgen biçim (ing: triangularization) elde edilir. Bunun yararı da öbeklerin özdeğerlerinin bütün evrim

dizeyinin özdeğerlerini betimleyecek olan bir olgu oluşudur ve sonlu öbeklerle çalışmanın yüksek yalınlıklı oluşudur. Asal köşegen sağındaki köşegenlerin sonlu sayıda kılınabilmesi için sağ yan işlev yöneyi devriği ile yöneleğim işlecinin çarpımı olarak tanımlanan "evrim işleci" altında kapalı olan bir işlev küme öğelerini yeni bilinmeyenler olarak alıp onlarla ilerlemek olanaklıdır. Böylece, sonlu sayıda asal köşegen işlevi ve sıfırdan farklı öbekleri olan köşegenler ortaya çıkar. Bu durumda,  $f$  ile gösterilen toplam dizisi çokçokterimliye indirgenmiş olur. Bu olguya da çokçokterimlilik (ing: multinomiality) adı verilir. Çokçokterimli yapılar da ikinci derece çokçokterimli yapılarına indirgenebilir. İkinci derece çokçokterimli yapılar asal köşegen ile onun sol ve sağ en yakın komşularını içeren yapılardır. Sonunda denklemler evrim dizeyinin bu özellikleri olan sıradan türevli denklem küme'sine dönüştürülebilir.

Değişmez Eklenimli Uzay Genişletimi (DEUG) olgusu ile dizge yöneyine bir değişmez ekleyerek evrim dizeyindeki asal köşegenin üzerindeki öbeklerin uygun bir birim dizeyele orantılı yazılabildiği duruma getirilebilir. Dolayısıyla, sıradan türevli denklemin çözümü evrencil bir yapı içerisinde gündeme getirilir. DEUG ile  $F_0$  sorunu ortadan kalkar. Buradan da irakgörür dizeyler ile ilgili açılımın değiştirimi gündeme gelir. Seyrekliği çok yüksek olan bu anlatımlar çok sayıda 0 içerir. Irakgörür dizeylerde birim dizeyele Kronecker çarpımları elde edilir. Diğer bir deyişle sıfırları bol olan çok büyük dizeyler elde edilir. Dolayısıyla bol sıfırlarla uğraşmak yerine dikdörtgencil yapıları sıkıştırarak, içinde doğrucul olmayan yapılar taşısa da, bir dördül dizeyin başlangıç yöneyi üzerine etkisiyle oluşan yapıya odaklanılır.





**COMPACTION WITH SQUARIFICATION OF TELESCOPE MATRICES  
OF KRONECKER POWER SERIES PRODUCED BY  
PROBABILISTIC EVOLUTION THEORY:  
HENON-HEILES SYSTEMS**

**SUMMARY**

Probabilistic evolution theory may be used in the solution of initial value problem of explicit autonomous ordinary differential equations. Explicit means that the highest order derivative may be separated to appear on one side of the equality. On the other side, the smaller order derivatives of unknowns and unknowns themselves appear. The order of the equation may be higher than 1. A higher order ODE may be converted to a set of first order ODEs through introduction of new unknowns. Therefore,

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

may be formed. Here,  $n$  shows the total number of unknowns. The equations have temporal derivative of  $x$  unknowns on the left hand side. On the right hand side, the descriptive functions (right hand side functions) depend on the unknown functions and  $t$ . The fact that  $t$  shows itself explicitly in addition to appearing through the unknown functions, may be problematic in decomposition methods. For that reason, it is important to form an equation set where  $t$  dependence is only through the unknown functions. Instead of  $t$ , it is possible to put  $x_{n+1}$  where  $x_{n+1}$  is the newly introduced unknown function. The temporal derivative of  $x_{n+1}$  is 1. Therefore,  $(n + 1)$  equations with  $(n + 1)$  unknowns is formed such that  $t$  dependence on the right hand side is only through the unknown functions. Such equations are known as autonomous equations. Autonomy is formed through the extension of space; increasing the dimension of space spanned by the unknowns by 1.

In order to solve the ODEs for the unknowns, the appropriate initial condition must be provided. It may be the case that they are given at value  $t = 0$ . Thus,

$$x_i(0) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

is under consideration. It is possible to show this in a more compact form as

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \quad (9)$$

where the vector shown under the function at the right hand side is the system vector. The initial vector is  $\mathbf{a}$  having the elements  $a_1$  through  $a_n$ .

Multivariate Taylor expansion of the right hand side is possible. However, it is also possible to form somewhat more compact expressions through Kronecker power series. The system vector shown by  $\mathbf{s}$  is

$$\mathbf{s}(t) \equiv [s_1(t) \dots s_n(t)]^T \equiv \left[ (x_1(t) - x_1^{(e)}) \dots (x_n(t) - x_n^{(e)}) \right]^T \quad (10)$$

where superscript  $e$  denotes the coordinate of the expansion point. The Kronecker product of  $\mathbf{s}$  by itself forms a vector with  $n^2$  elements. The Kronecker power operation denotes sequential Kronecker squaring. Thus,

$$\mathbf{s}(t)^{\otimes m} \equiv \mathbf{s}(t) \otimes \dots \otimes \mathbf{s}(t)$$

$$\mathbf{s}(t)^{\otimes m} = \begin{bmatrix} s_1(t)\mathbf{s}(t)^{\otimes(m-1)} \\ \vdots \\ s_n(t)\mathbf{s}(t)^{\otimes(m-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}(t)^{\otimes 0} = 1 \quad (11)$$

is under consideration. As a convention, 0th Kronecker power is taken as scalar 1. Using in (8)

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j \mathbf{s}(t)^{\otimes j} \quad (12)$$

may be obtained.  $\mathbf{F}_j$  have various sizes in order to be compatible with the vectors they are acting on. They represent transformations from  $n^j$ -element space to  $n$  element space. Therefore,  $\mathbf{F}_j$  is an  $n \times n^j$  matrix. As  $j$  increases, the horizontal rectangularity of the matrices also increases.

By using this structure in the ODE set and after some algebra, a formal solution may be obtained. This formal solution involves the application of certain matrices on the Kronecker powers of the vector related to the initial conditions. This is only possible through certain properties of the right hand side functions. To be more exact, it is possible for conical right hand side functions. Second degree right hand side functions may be formed into a set where purely second degree terms appear on the right hand side. That is possible through the use of certain flexibilities. These flexibilities come into existence through two reasons: the use of constancy adding space extension and the nature of Kronecker power operation.

This thesis focuses on the use of what is called squarification, a newly proposed method to decrease the computational burden of probabilistic evolution theory. Squarification helps us to avoid Kronecker powering operation through introducing initial value dependence on the coefficient matrices. Different aspects of the squarification procedure is detailed, also focusing on certain reductive cases. In addition, an application to a Hénon-Heiles system is given in detail exemplifying each step of probabilistic evolution theory.

The right hand sides of Hénon-Heiles which is defined with four equation, can be written as second degree multinomial ODEs as follows

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (13)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_1x_3 \quad (14)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (15)$$

$$\dot{x}_4 = -x_3 - (x_1^2 - x_3^2) = -x_3 - x_1^2 + x_3^2 \quad (16)$$

Substituting this ODEs,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{F}_2\mathbf{x}_2^{\otimes 2}$  can be constructed as follows

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\otimes 2} \quad (17)$$

After "Constancy Adding Space Extension (CASE)" is applied, the  $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{F}_1$  and  $\mathbf{F}_2$  can be rewritten as extended. Since the solution of the Hénon-Heiles system can be found, it is formed algorithms which is composed of using the recursion of Squarification is given below by Mupad.

$$\mathbf{S}_j = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k \mathbf{a}] \mathbf{S}_{j-1-k}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Using the different initial conditions, the results are detailed for truncation orders and different iteration differences.



## 1. GİRİŞ

Olasılıkçıl evrim kuramı belirtik ve sıradan türevli denklemin ya da denklem takımının başlangıç değer sorununun çözümünde kullanılan önemli bir olgudur. Bu bağlamda bilimsel yazında birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların başlıcaları olarak [1-7] gösterilebilir. Tüme yaygın bir yapıda olan OLEVKU genellikle buyrukdizileme için uygun olan ayrıklaştırım tabanlı yöntemlerin yanığı yığılımı sorununu içermemektedir. Bu da bize kolaylıklar sağlamaktadır.

Bu savın ilk bölümünde evrim dizeyinin oluşturumu ve biçimsel çözümü üzerine odaklanılmış ve kesme yaklaşımı ile yaklaşık çözümün elde edilebilmesi için izlenecek yollar ayrıntılandırılmıştır.

Kesme yaklaşımının çözümçül olarak oluşturabilmesi için sıradan türevli denklem takımındaki sonsuz ögeli katsayı dizeyi üçgenil yapı haline getirilir. Bunun için de genellik yitimlerinin en aza indirgenebilmesi ve tekilliklerden kaçınılabilmesi için uzay genişletimi olgusu kullanılacaktır.

Bu savın üçüncü bölümünde dizge yöneyi genişletilerek oluşturulan sıradan türevli denklemin katsayıları belirlenmiş ve esneklik olgusu incelenmiştir. Kolaylık sağlanması için birinci katsayı dizeyi birim dizeye ölçeklendirilmiştir. Boy çözümlemesi yapılarak OLEVKU'nun yakınsayım bölgesi oluşturulmuştur. DEUG bağlamında boy dördülü enküçükleyimi kullanılarak OLEVKU'da ortaya çıkan esneklikler iyileştirilmiştir.

Henon-Heiles dizgesiyle oluşturulan sıradan türevli denklem takımının  $F_2$  dizeyi  $5 \times 25$  türünde bol sıfırlardan oluşan bir dizge olarak ortaya çıkmıştır. Yakınsamayı uzay genişletiminin oldukça etkilediği gözlemlenmiştir.

Bu savın dördüncü bölümünde irakgörür dizgeyle dördülleştirimi olgusuna odaklanılmıştır. Tıkızlaştırım için  $F$  dizeyinin öbeklerinin bakışımı ve değıştirimli olma, eşit olma ve birim dizeye eşit olma özellikleri incelenmiştir. Dördülleştirilmiş

ırakgörür dizeyleri bağlamında S'lerin özyineleyişli yapısı gündeme getirilerek betikleyiş yapılmıştır.

Bu savın son bölümünde dört denklem takımından oluşan Henon-Heiles dizgeleri ikinci dereceden çokçokterimli sıradan türevli denklem takımı olarak yazılmıştır. Bu denklemin çözümünde Dördülleştirim kullanılan OLEVKU yöntemi ile kullanılmayan OLEVKU yöntemi karşılaştırılmıştır. Başlangıç değerleri arttırıldığında sonuçlarda nasıl bir etki yarattığı olgusu incelenmiştir. Kesme kerteleri arttıkça sonuçlarda ve yineleme farklarında nasıl bir değişim olduğu incelenmiştir. Bu konuyla ilgili betikleyiş yapılmış ve sonuçlar grafik ve tablolarla gösterilmiştir. Bilimcil yazında bununla ilgili çalışmalar yapılmıştır [66-71].

Bu sav, çokçokterimli işlevlerden oluşan bir sıradan türevli denklem takımının başlangıç değer sorununun çözümünde dizey boyutlarının büyütüldüğü yapıdan kaçınmak için boyutları değişmeyen dizey ve yöneylerle çalışmayı olanaklı kılan dördülleştirilmiş ırakgörür dizeyleri arasında bir özyineleyiş elde etmeyi amaçlamaktadır.

Tez süresince olasılıkçıl evrim yaklaşımı ya da kuramı bağlamında kullanılan kaynaklar aşağıda örneklendirilmiştir.

Evrin dizeyinin izgecil özelliklerinin ve uzay genişletiminin gündeme getirildiği çalışmalar [1-3] örnek gösterilebilir. Sıradan türevli denklem takımına taban oluşturacak çalışmalar [4-7] örnek gösterilebilir. Verilen bir dizgenin yalınlaştırımına ve evrim dizeylerinin oluşturmuna yönelik çalışmalar [8-11] da gündeme getirilmektedir. İki köşegencil evrim dizeyinden özyineleyiş yapısı oluşturmumu [8], bu yapının Van der Pol denklem takımında kullanılması [9-10] çalışmalarında gündeme getirilmektedir. Tekilliklerin yol açtığı sorunların giderilmesine yönelik çalışmalar [12] de gündeme getirilmektedir. Liouville işleybilimi bağlamındaki çalışmalar [13], başal işleybilimi bağlamındaki çalışmalar [14], nicem beklenen değer evrimine yönelik çalışmalar [15], gökcisim işleybilimine yönelik çalışmalar [16], iki bilinmeyenliliğe uygulanıma yönelik çalışmalar [17] de gündeme getirilmektedir. Başal dizgelerde yüksek kerteliliğin işlendiği yapı [18] çalışmasında yer almaktadır. Gizilgüç ve Hamilton işleçlerinin olduğu yapılarda uzay genişletimi konusu [19-22] çalışmalarında gündeme getirilmektedir. Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar

Gösterilimi'ne uygulanım [23] örnek olarak gösterilebilir. Başlangıç koşullarının yarattığı sorunların giderilmesine yönelik çalışmalar [24-25], özerk ve belirtik sıradan türevli denklem takımının başlangıç değer sorununun çözümünde genelleştirmelere yönelik [26-27], yakınsaklık çözümlemesi ve kesme yaklaştıranlarının gündeme getirildiği çalışmalar [28-29], evrim düzeyinin işleçlerinin özışlevlerinin kullanılarak yakınsayışın incelenmesine yönelik çalışmalar [30-31], nicem dizgeler ve uyumsuz salınım için yakınsayış sorunun çözümüne odaklanıldığı çalışmalar [32-34] örnek olarak gösterilebilir. Katsayı dizyelerinin esnekliklerinin kullanılarak tekil yöneylerinin irdelenmesine yönelik çalışma [35], Kronecker üslüsünün belirlenimine yönelik çalışma [36], uzay genişletiminin ayrıntılandırılmasına yönelik çalışma [37], çekirdek ayrıştırılabilirliği olgusunun gündeme getirildiği çalışma [38], yakınsayış artırmak için dizge yöneyinin üslülerinin dizge yöneyine eklenmesine yönelik çalışma [39], Kronecker üslü toplam dizileri esneklik yönetimi, çekirdek ayrıştırılabilirliği, uzay genişletimi ve irakgörür dizyelerinin kullanılarak çözüm oluşturmuna yönelik çalışmalar [40-41], değişmezlik eklenimli uzay genişletimine taban oluşturacak çalışmalar [42], Padé oranlarının kullanılarak Kronecker üslü toplam dizileri için işlev yaklaştırmı oluşturmuna yönelik çalışmalar [43], özerk ikinci dereceliliğe indirgeyime yönelik çalışma [44], çokdeğişkenli Hausdorff devinim probleminin çözümüne ilişkin çalışma [45], özerk sıradan türevli denklemlerin çözümünde Çokdeğişkenliliği Artırılmış Çarpımlar Gösterilimi'nin kullanılmasına yönelik çalışma [46], olasılıkçıl evrim kuramıyla ilgili yapılan ilk çalışmalar [47-48], dördülleştirim olgusuna taban oluşturacak çalışmalar [49-50] örnek gösterilebilir. Hénon Heiles kümesinin oluşturulması ve özellikleri [51-52] kaynaklarında gündeme getirilmektedir. Tez bağlamında yapılan çalışmalar [53-57] olarak gösterilebilir.





## 2. BELİRTİK VE ÖZERK SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERİN BAŞLANGIÇ DEĞER SORUNUNUN ÇÖZÜMÜ İÇİN OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI

### 2.1 Birinci Kerteden STD Küme'si için Olasılıkçıl Evrim Kuramı

#### 2.1.1 Sorun'un tanımı

Olasılıkçıl evrim kuramı, belirtik (ing: explicit) ve özerk (ing: autonomous) bir sıradan türevli denklemin ya da denklem küme'sinin başlangıç değer sorununun çözümünde kullanılan önemli bir olgudur. İlgilenilen sıradan türevli denklem küme'si

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t)), \quad \xi(0) = a \quad (2.1)$$

biçiminde olduğu öngörülün. Bu denklem küme'sinin birinci kereden (ing: order) belirtik ve sağ yan işlevlerinin  $t$  zamanına göre  $\xi$  işlevlerine bağımlı olduğu görülmektedir. Burada çözüm elde edebilmek için sonlu bir bölgede tekilliğin olmadığı durumlara odaklanılacaktır.

#### 2.1.2 Betimleyici işlevin toplamdizi açılımı ile doğrucul denklem küme'lerinin oluşturumu

(2.1)'den sağ yan işlevinin toplamdizi açılımı (ing: series expansion)

$$f(\xi(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j (\xi(t) - x^{(r)})^j \quad (2.2)$$

biçimindedir. Burada sağ yan işlevinin  $x^{(r)}$  noktasındaki Taylor açılımının doğal sayı üslülerinin, birbirinden doğrucul bağımsız olduğu öngörülen,  $(\xi(t) - x^{(r)})^j$  taban işlevlerinden oluştuğu öngörülmektedir. Bu taban işlevlerinin zamana bağımlı  $x_j(t)$  işlevleriyle gösterildiği gözönüne alınırsa

$$x_j(t) \equiv (\xi(t) - x^{(r)})^j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

yazılabilir. Burada başlangıç zamanının sıfır olduğu gözönüne alınırsa

$$x_j(0) = (a - x^{(r)})^j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

biçiminde bir taban işlevi elde edilir. Bu denklemde (2.1)'deki başlangıç koşulu kullanılmıştır. (2.3)'ün her iki yanının türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\dot{x}_j(t) &= j x_{j-1}(t) \dot{\xi}(t) \\
&= j \sum_{k=0}^{\infty} \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^{j-1} f_k \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^k \\
&= j \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^{k+j-1} \\
&= j \sum_{k=0}^{\infty} f_k x_{k+j-1}(t)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

biçiminde taban işlevlerinin zamana göre türevi elde edilir. Burada (2.1)'deki  $\dot{\xi}(t)$  yerine  $f(\xi(t))$ 'in Taylor açılımı kullanılarak bir adet bilinmeyen ve denklemden sonsuz adet sıradan türevli denklem elde edilmiştir ve kesin olarak doğruculluk sağlanmıştır. Bunun tam evriği durumlarda da (sonsuz denklem yerine bir denklem ile) ilerlenebilir. (2.5)'den

$$\dot{x}_j(t) = j \sum_{k=0}^{\infty} f_k x_{k+j-1}(t), \quad j = 0, 1, \dots, \tag{2.6}$$

bağıntısı yazılabilir. Başlangıç koşulu ise

$$x_j(0) = \left( a - x^{(r)} \right)^j \tag{2.7}$$

biçimindedir.

### 2.1.3 Olasılıkçıl evrim dizeyinin belirlenimi

(2.6) denklemi  $j$  değerleri kullanılarak dizeycil olarak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_0 & f_1 & f_2 & \cdots \\ 0 & 2f_0 & 2f_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 3f_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada  $f$ 'lerden oluşan sonsuz dizeyi  $\mathbf{E}$  ile simgelenirse

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{x}(t), \tag{2.9}$$

biçiminde daha yalın bir denklem elde edilir. Buradaki  $\mathbf{E}$  dizeyine evrim dizeyi adı verilir.

### 2.1.3.1 Biçimcil çözüm

(2.9) denklemini başlangıç koşulu altında her iki tarafın tümlevi alınarak biçimcil olarak çözüldüğünde

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{E}}\mathbf{x}(0) \quad (2.10)$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Burada üstel dizeyin belirlenimi için evrim dizeyinin özdeğerleri kullanılacaktır. (2.8)'deki evrim dizeyinin köşegenin altındaki köşegenlerden sonra dibe doğru sıfırlardan oluştuğu ve öbek biçimli üst Hessenberg yapısında olduğu görülmektedir. Bu biçim, denklemlere varolan bilinmeyenler türünden yeni bilinmeyenler ekleyerek, yalnızca asal köşegen ve üstündeki köşegenlerin sıfırdan değişik değerli oluşları sağlanabilmektedir ve bu yeni yapıya da üstüçüncül biçim adı verilmektedir. Burada da evrim dizeyinin özdeğerleri incelenecektir. Evrim dizeyi ile (2.7) bağlamında başlangıç vektörünün çarpımı

$$\mathbf{E}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots \\ 0 & 2f_0 & 2f_1 & \dots \\ 0 & 0 & 3f_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a - x^{(r)} \\ (a - x^{(r)})^2 \\ (a - x^{(r)})^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu çarpım gerçekleştirildiğinde

$$\mathbf{E}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} f_j (a - x^{(r)})^j \\ \sum_{j=0}^{\infty} 2f_j (a - x^{(r)})^{j+1} \\ \sum_{j=0}^{\infty} 3f_j (a - x^{(r)})^{j+2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

bir yapı ortaya çıkar. Burada toplam olarak görünen büyüklükler  $f$  türünden yazılırsa aşağıdaki yapıya bürünür.

$$\mathbf{E}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(a - x^{(r)}) \\ f(a - x^{(r)}) 2(a - x^{(r)}) \\ f(a - x^{(r)}) 3(a - x^{(r)})^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

biçiminde elde edilir. Burada,  $f(a - x^{(r)})$  ortak çarpan olduğundan o eşitlik

$$\mathbf{Ex}(0) = f(a - x^{(r)}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(a - x^{(r)}) \\ 3(a - x^{(r)})^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

biçiminde de yazılabilir. Bu eşitlik,  $\frac{\partial}{\partial a}$  türev işleci kullanılarak

$$\mathbf{Ex}(0) = f(a - x^{(r)}) \frac{\partial}{\partial a} \begin{bmatrix} 1 \\ a - x^{(r)} \\ (a - x^{(r)})^2 \\ (a - x^{(r)})^3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

biçiminde de gösterilebilir. Bu eşitlik de daha yalın olarak

$$\mathbf{Ex}(0) = f(a - x^{(r)}) \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{x}(0) \quad (2.16)$$

biçiminde de yazılabilir.

## 2.2 İkinci Kerteden STD Küme'si için Olasılıkçıl Evrim Kuramı

### 2.2.1 Sorun'un tanımı

İkinci kerteden bir bilinmeyenli özerk zamana bağımlı sıradan türevli denklemi iki başlangıç koşulu altında

$$\ddot{\xi}(t) = f(\xi(t)), \quad \xi(0) = a, \quad \dot{\xi}(0) = b \quad (2.17)$$

biçiminde gösterilebilir. Betimleyici işlevin Taylor açılımının ve taban işlevlerinin sırasıyla (2.2) ve (2.3)'deki gibi olduğu göz önüne alınırsa taban işlevinin başlangıç zamanına göre türevi

$$\begin{aligned} x_j(0) &= (a - x^{(r)})^j, \\ \dot{x}_j(0) &= j(a - x^{(r)})^{j-1} b, \end{aligned} \quad (2.18)$$

biçiminde gösterilebilir. (2.3)'ün zamana göre ikinci türevi, (2.4) denklemi bağlamında

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_j(t) &= j(j-1) \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^{j-2} \dot{\xi}(t)^2 \\
&+ j \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^{j-1} \ddot{\xi}(t), \\
j &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.19}$$

biçimindedir.

### 2.2.2 Betimleyici işlevin dolaysızslü toplamdizi açılımı

(2.19)'da bilinmeyen işlevin ikinci türevi (2.1) ve (2.17) kullanılarak

$$\ddot{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.20}$$

biçiminde yazılabilir.  $\xi(t)$ 'yi bulabilmek için her iki tarafın tümlevini alırsak

$$\frac{1}{2} \dot{\xi}(t)^2 = \frac{c}{2} + F(\xi(t)) \tag{2.21}$$

biçiminde bir yapı ortaya çıkar. Burada  $F(\xi)$  ve  $c$ 'nin aşağıdaki gibi olduğu göz önüne alınmaktadır.

$$F(\xi) \equiv \int_{x^{(r)}}^{\xi(t)} d\bar{\xi} f(\bar{\xi}) \tag{2.22}$$

$$c \equiv b^2 - 2F(a) \tag{2.23}$$

$f(\xi(t))$ 'nin tümlevi, diğer bir deyişle  $F(\xi(t))$

$$F(\xi(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k+1} \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^{k+1} \tag{2.24}$$

biçimindedir. (2.20), (2.21) ve (2.24) kullanılarak (2.19) eşitliği

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_j(t) &= cj(j-1) \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^{j-2} \\
&+ j(j-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2f_k}{k+1} \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^{j+k-2} \\
&+ j \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left( \xi(t) - x^{(r)} \right)^{j+k-1} \\
j &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.25}$$

biçiminde ortaya çıkar. Bu eşitliğin sağ yanının taban işlevleri (2.3) denklemini bağlamında simgelenirse

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_j(t) &= cj(j-1)x_{j-2}(t) \\
&+ j(j-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2f_k}{k+1} x_{j+k-1} \\
&+ j \sum_{k=0}^{\infty} f_k x_{j+k-1} \\
j &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.26}$$

biçiminde yazılabilir. Burada bağdaşık, doğrucul ve özyineleyişli sıradan türevli denklem küme'si oluşturulmuştur. Buradan daha yalın olarak

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{x}(t) \tag{2.27}$$

biçiminde elde edilen denklemin

$$\mathbf{x}(t) \equiv [x_0(t) \ x_1(t) \ \dots] \tag{2.28}$$

başlangıç koşulu altında olduğu gündeme gelir.

### 2.2.3 Olasılıkçıl evrim dizeyinin oluşturumu

(2.26)'nın birinci toplamındaki  $cj(j-1)$  yerine  $\mathbf{E}^{(3)}$ , ikinci toplamındaki  $j(j-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2f_k}{k+1}$  yerine  $\mathbf{E}^{(2)}$  ve üçüncü toplamındaki  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  yerine  $\mathbf{E}^{(1)}$  yazılırsa evrim dizeyi

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^{(3)} \tag{2.29}$$

olarak gösterilir. O halde evrim dizeyleri

$$\mathbf{E}^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \dots \\ 0 & 2f_0 & 2f_1 & 2f_2 & \dots \\ 0 & 0 & 3f_0 & 3f_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$\mathbf{E}^{(2)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{4}{1}f_0 & \frac{4}{2}f_1 & \frac{4}{3}f_2 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{12}{1}f_0 & \frac{12}{2}f_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$$\mathbf{E}^{(3)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 6c & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 12c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 20c & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

biçimlerinde elde edilir. Başlangıç zamanına göre taban işlevleri yöneyi ve türevi, (2.4) bağlamında

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ (a-x^{(r)}) \\ (a-x^{(r)})^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a},$$

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(a-x^{(r)}) \\ 3(a-x^{(r)})^2 \\ \vdots \end{bmatrix} = b \frac{d\mathbf{a}}{da} \quad (2.33)$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemleri (2.27) ile birleştirirsek

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \frac{d\mathbf{a}}{da} \quad (2.34)$$

biçiminde bir başlangıç sorunu ortaya çıkar. İkinci kereden sonsuz bağdaşık doğrucul sıradan türevli denklem küme'si,  $\mathbf{x}(t)$  bilinmeyen yöneyinin birinci türevine eşdeğer yeni bir bilinmeyen tanımlayarak iki tane birinci kereden sonsuz doğrucul ve bağdaşık sıradan türevli denklem takımı yöneyine indirgenebilmektedir. Evrim düzeyinin izgecil özellikleri kullanılarak

$$\mathbf{E}\mathbf{e}_j^{(r)} = \varepsilon_j \mathbf{e}_j^{(r)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.35)$$

$$\mathbf{E}^T \mathbf{e}_j^{(\ell)} = \varepsilon_j \mathbf{e}_j^{(\ell)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.36)$$

biçiminde yazılabilir.  $\mathbf{e}_j^{(\ell)}$  ve  $\mathbf{e}_j^{(r)}$ , sırasıyla sol ve sağ özyöneyle göstermektedir. Dikgenlik ve birimboylulukları

$$\mathbf{e}_j^{(\ell)T} \mathbf{e}_k^{(r)} = \delta_{j,k} \quad (2.37)$$

biçiminde yazılabilir. Her bir özyöneylein cebircil ve uzamcıl (ing: geometrical) çokkatlılığı aynı ise bu denklemin izgecil ayrıştırımı

$$\mathbf{E} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \mathbf{e}_k^{(r)} \mathbf{e}_j^{(\ell)T} \quad (2.38)$$

biçiminde gösterilebilir. Cebircil ve uzamcıl çokkatlılık eşitliği evrim düzeyinin sağ özyöneylelerinin bütünlüğünü ortaya çıkarır. Bu bağıntılar bağlamında (2.18)'in tümlevi alındığında

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{x}}_j(t) \mathbf{e}_j^{(r)} \quad (2.39)$$

biçiminde bir denklem ortaya çıkar.

$$\tilde{\mathbf{x}}_j(t) \equiv \mathbf{e}_j^{(\ell)T} \mathbf{x}(t), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.40)$$

Burada bilinmeyen öğelerden oluşan  $\tilde{x}_j(t)$  yöneyi açık olarak gösterilmiştir. Bu bilinmeyenleri bulmak için olasılıkçıl evrim dizeyi kullanılmaktadır. Bu durumda (2.26) denkleminin ikinci kereden zamana bağımlı türevi

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_j(t) = \varepsilon_j \tilde{\mathbf{x}}_j(t), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.41)$$

biçiminde elde edilir. Bu denklem çözüldüğü zaman  $\alpha$ 'lar keyfi değişirgeler olmak üzere

$$\tilde{\mathbf{x}}_j(t) = \alpha_1 e^{\varepsilon_j^{(1)}t} + \alpha_2 e^{\varepsilon_j^{(2)}t} \quad (2.42)$$

biçiminde bir denklem ortaya çıkar. Başlangıç zamanına göre bu denklem ve türevi

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_j(0) &= \alpha_1 + \alpha_2 = \mathbf{e}^{(\ell)T} \mathbf{a} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_j(0) &= \alpha_1 \varepsilon_j^{(1)} + \alpha_2 \varepsilon_j^{(2)} = b \mathbf{e}^{(\ell)T} \frac{d\mathbf{a}}{da} \end{aligned} \quad (2.43)$$

biçiminde gösterilir. Böylece  $\alpha$  değişirgeleri için eşsiz bir çözüm elde edilmiş olur.

### 2.3 İki Bilinmeyenli Belirtik Sıradan Türevli Denklemlerin Çözümü için Olasılıkçıl Evrim Kuramı

Birinci kereden belirtik ve sağ yan işlevleri çözümcül olan iki bilinmeyenli sıradan türevli denklemlerin başlangıç değer sorunu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f(x_1(t), x_2(t)), \quad x_1(0) = a_1 \\ \dot{x}_2(t) &= f(x_1(t), x_2(t)), \quad x_2(0) = a_2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

biçimindedir. Sağ yan işlevlerinin  $x_1^{(r)}$  ve  $x_2^{(r)}$ , ye göre Taylor açılımı

$$f_i(x_1(t), x_2(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_{j,k}^{(i)} \left( x_1(t) - x_1^{(r)} \right)^j \left( x_2(t) - x_2^{(r)} \right)^k, \quad i = 1, 2 \quad (2.45)$$

biçiminde gösterilir.  $x^{(r)}$  noktasındaki taban takımı ve sağ yan işlevlerinin yöneyi

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^{(r)} \\ x_2(t) - x_2^{(r)} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $\mathbf{s}$  ile simgelenen dizge yöneyi bağımsız değişkenler ile açılım noktaları arasındaki değişikliği gösterir. Bu durumda betimleyici işlevin



Kronecker açılımı

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

biçimindedir.  $\mathbf{f}$  işlevi dizge yöneyinin Kronecker üslüleri üzerinde bir sonsuz toplam olarak gösterilebilir.

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}^{(k)} \mathbf{s}^{\otimes k} \quad (2.48)$$

Burada dolaysız çarpım Kronecker çarpımı olarak da adlandırılır. Burada  $k$  kez çarpım  $k$  üslü olarak gösterilmektedir.

Bir dizge yöneyinin kendisi ile dolaysız çarpımı  $[s_1 \mathbf{s}^T \dots s_n \mathbf{s}^T]^T$  biçimindedir. O halde dizge yöneyinin  $k$ . Kronecker üslüsü  $\mathbf{s}^{\otimes k} = [s_1 \mathbf{s}^{\otimes(k-1)T} \dots s_n \mathbf{s}^{\otimes(k-1)T}]^T$  özyineleyişli bağıntısı olarak gösterilebilir. Bir yöneyin sıfıncı Kronecker üslüsü uyuşum gereği 1'dir. Birinci Kronecker üslüsü ise yöneyin özüne eşittir.

$$\mathbf{s}^{\otimes k} \equiv \bigotimes_{j=1}^k \mathbf{s} \quad (2.49)$$

(2.46)'nın  $k$ . Kronecker üslüsü  $2^k$  yöneye sahip olur. (2.47)'de  $\mathbf{f}^{(0)}$  ilk katsayısı,  $\mathbf{s}^{\otimes 0} = 1$  olduğundan

$$\mathbf{f}^{(0)} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}) \\ f_2(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

biçiminde bir yöney elde edilir.  $k = 1$  ise  $\mathbf{f}^{(1)}$  katsayı dizeyi  $f_{1,1}^{(1,c)}$ ,  $f_{1,2}^{(1,c)}$ ,  $f_{2,1}^{(1,c)}$  ve  $f_{2,2}^{(1,c)}$  den oluşur. Bu durumda

$$\mathbf{f}^{(1)} \mathbf{s}^{\otimes 1} = \begin{bmatrix} f_{1,1}^{(1,c)} (x_1(t) - x_1^{(r)}) + f_{1,2}^{(1,c)} (x_2(t) - x_2^{(r)}) \\ f_{2,1}^{(1,c)} (x_1(t) - x_1^{(r)}) + f_{2,2}^{(1,c)} (x_2(t) - x_2^{(r)}) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

biçiminde yazılabilir.  $\mathbf{f}^{(1)}$  betimleyici işlevini Jacobian dizeyi olarak

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_r & \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_r \\ \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_r & \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_r \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $2 \times 2$  türünde bir dizey elde edilmiştir.  $\mathbf{f}^{(2)}$  dizeyi  $f_{1,1}^{(2,c)}$ ,  $f_{1,2}^{(2,c)}$ ,  $f_{1,3}^{(2,c)}$ ,  $f_{1,4}^{(2,c)}$ ,  $f_{2,1}^{(2,c)}$ ,  $f_{2,2}^{(2,c)}$ ,  $f_{2,3}^{(2,c)}$  ve  $f_{2,4}^{(2,c)}$  öğelerinden oluşan  $2 \times 4$  türünde bir dizeydir. Bu durumda  $k = 2$  ise bu denklemin sağ yanı

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{f}^{(2)}\mathbf{s}^{\otimes 2}\right)_1 &= f_{1,1}^{(2,c)} \left(x_1(t) - x_1^{(r)}\right)^2 \\
&+ \left(f_{1,2}^{(2,c)} + f_{2,1}^{(2,c)}\right) \left(x_1(t) - x_1^{(r)}\right) \left(x_2(t) - x_2^{(r)}\right) \\
&+ f_{1,4}^{(2,c)} \left(x_2(t) - x_2^{(r)}\right)^2
\end{aligned} \tag{2.53}$$

biçiminde yazılabilir.  $\mathbf{f}_1$  için Taylor açılımının ikinci dereceden ögeleri ile eşitliğin sağ yanlarının karşılaştırımı için

$$f_{1,1}^{(2,c)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\right)_r, \quad f_{1,4}^{(2,c)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}\right)_r \tag{2.54}$$

$$f_{1,2}^{(2,c)} + f_{2,1}^{(2,c)} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_r \tag{2.55}$$

eşitlikleri yazılabilir. (2.55)'de toplamların eşdağılımı kullanılarak

$$f_{1,2}^{(2,c)} = f_{2,1}^{(2,c)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_r \tag{2.56}$$

biçiminde bir eşitlik yazılabilir. O durumda

$$\begin{aligned}
f_{1,2}^{(2,c)} &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_r, \\
f_{2,1}^{(2,c)} &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1}\right)_r
\end{aligned} \tag{2.57}$$

biçiminde bağıntılar yazılabilir.  $\mathbf{f}^{(2)}$  katsayısının Kronecker üslüsünde ilk yataysirasının yapısı aslında açılım noktasında betimleyici işlev  $f_1$ 'in dizey biçimine açılabilir. Aynı şekilde  $\mathbf{f}^{(2)}$  katsayısının Kronecker üslüsünde ikinci yataysirasının yapısı açılım noktasında betimleyici işlev  $f_2$ 'nin dizey biçimine getirilebilmektedir. (2.48) denkleminde de kullanılan zamana bağımlı  $\mathbf{s}^{\otimes k}$  dizge yöneyi

$$\mathbf{s}_k(t) \equiv \mathbf{s}^{\otimes k}(t) \tag{2.58}$$

biçiminde göz önüne alındığında bu denklemin türevi

$$\dot{\mathbf{s}}_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{s}^{\otimes j}(t) \otimes \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t)\right) \otimes \mathbf{s}^{\otimes (k-j-1)}(t) \tag{2.59}$$

biçimindedir. Burada çarpımların türevleri üzerinde Leibniz kuralı (Çarpımların türevlenim kuralı) kullanılmıştır.

$$\mathbf{s}^{\otimes j}(t) \equiv (\mathbf{I}\mathbf{s}(t))^{\otimes j} = \mathbf{I}^{\otimes j} \mathbf{s}^{\otimes j}(t) \tag{2.60}$$

Buradaki  $\mathbf{s}^{\otimes j}(t)$ , birim dizey ile çarpımı biçiminde yazılabilir. Burada Kronecker çarpımın dağılım özelliği kullanılmıştır.  $\mathbf{s}^{\otimes j}(t)$  yöneyinin (2.59) denkleminin ikinci ögesi ile Kronecker çarpımından

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^{\otimes j}(t) \otimes \mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t) &= (\mathbf{I}^{\otimes j} \mathbf{s}^{\otimes j}(t)) \otimes (\mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t)) \\ &= (\mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m)}) \mathbf{s}^{\otimes j+m}(t)\end{aligned}\quad (2.61)$$

biçiminde bir eşitlik elde edilir. Elde edilen bu bağıntı da (2.59)'un üçüncü ögesiyle Kronecker çarpımından

$$\mathbf{s}^{\otimes j}(t) \otimes \mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t) \otimes \mathbf{s}^{\otimes(k-j-1)}(t) = (\mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes(k-j-1)}) \mathbf{s}^{\otimes k+m-1}(t) \quad (2.62)$$

biçiminde bir eşitlik elde edilir. Dolayısıyla (2.59)

$$\dot{\mathbf{s}}_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}_{k,m} \mathbf{s}^{\otimes m}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.63)$$

biçiminde evrim dizeyi kullanılarak yazılabilir. Burada sağ yandaki sonsuz toplamda  $\mathbf{s}$ 'i  $m$ . Kronecker üslüsü olarak yazabilmek için (2.62)'deki  $m$ 'ler yerine  $m - k + 1$  yazılmalıdır. Tüm  $\mathbf{E}_{k,m}$  öbekleri için  $m, k - 1$ 'den daha az olduğu sürece sıfırlanır. Bu durumda evrim dizeyi

$$\mathbf{E}_{k,m} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m-k+1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes(k-j-1)}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.64)$$

biçiminde yazılabilir. Evrim dizeyi

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{E}_{1,0} & \mathbf{E}_{1,1} & \mathbf{E}_{1,2} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{E}_{2,1} & \mathbf{E}_{2,2} & \mathbf{E}_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{s}(t) = [\mathbf{s}^{\otimes 0} \quad \mathbf{s}^{\otimes 1} \quad \mathbf{s}^{\otimes 2} \quad \dots]^T \quad (2.66)$$

biçiminde dizeycil olarak gösterilebilir. Bu bağlamda

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{E} \mathbf{s}(t) \quad (2.67)$$

biçiminde bir denklem yazılabilir. Burada  $\mathbf{E}$ , değişmez katsayılı bir dizeydir. Bu denklem biçimcil olarak çözüldüğünde

$$\mathbf{s}(t) = e^{t\mathbf{E}} \mathbf{s}(0) \quad (2.68)$$

biçiminde bir eşitlik elde edilir.

Evrim dizeyinin üstüçgencil Hessenberg biçimi kesme yaklaşımının yapısına ve izgencil araştırmalara kolaylık getirmez. Dolayısıyla bu durumdan kurtulmak için (2.64) denklemini  $m = k - 1$  için

$$\mathbf{E}_{k,k-1} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(0)} \otimes \mathbf{I}^{(k-j-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.69)$$

biçiminde yazılabilir. Betimleyici işlevler açılım noktasında uygun bir şekilde sıfırlandığı zaman evrim dizeyi üçgencil öbek biçiminde gündeme gelir.  $m = k$  olduğu zaman evrim dizeyi

$$\mathbf{E}_{k,k} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(1)} \otimes \mathbf{I}^{(k-j-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

biçiminde yazılabilir.

### 3. OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI BAĞLAMINDA DEĞİŞMEZLİK EKLENİMLİ UZAY GENİŞLETİMİ

#### 3.1 Sorun'un Tanımı

Evrım dizeyi, asal köşegenin altındaki köşegenden sonra dibe doğru hep sıfırlar içeren, öbek biçimli, üst Hessenberg yapısında yazılabilmektedir. Bu biçim, eski bilinmeyenler türünden yeni bilinmeyenler ekleyerek, yalnız asal köşegen ve üstündeki köşegenlerin sıfırdan değişik olduğu bir yapıya dönüştürülebilmektedir ve buradan yeni denklemler elde edilebilmektedir. Buna üstüçgencil biçim denilir. Asal köşegen öbeklerinin özdeğerleri, bütün evrım dizeyinin özdeğerlerini betimlediğinden ve bu öbekler sonlu öbekler olduğundan bize kolaylık sağlamaktadır. Ancak, bu durumda asal köşegenin üzerinin sıfır olmayan kesiminin sonsuza doğru gitmemesi için neler yapabileceği de araştırılmalıdır. Sağ yan işlevleri, evrım işleci altında kapalı bir yapıya sahip ise elde edilen denklemlerin sayılabilir de olsa sonsuz sayıda olmayışı gerekmektedir. Kapalılığı sağlayan asal değerler seçildiği zaman, sıfırdan değişik öbekleri olan köşegenler ve sonlu sayıda asal köşegen işlevi ortaya çıkmaktadır. Bu köşegenlerin sayısı sonlu olduğunda denklem yapısı çokçokterimliye indirgenmektedir. Bu olgu İngilizce'de multinomial olarak adlandırılmaktadır. Dolayısıyla, herhangi bir sıradan türevli denklem genellikle uygulamıcıl açıdan çok fazla bir yitim olmaksızın çokçokterimli duruma indirgenebilmektedir. Çokçokterimli yapılar da ikinci derece çokçokterimli yapılarına indirgenebilmektedir. Öteki bir söylemle, yatay ve düşey sırada sonsuz sayıda öbeğin olmadığı denkleme dönüştürülebilmektedir.

Dolaysızüslü toplam dizisi açılımlarında ortaya çıkan sonsuz sayıda terimler uygulamıcıl açıdan istenen bir durum değildir. Daha çok sonlu sayıda terimler içeren açılımlar yeğlenmektedir. Betimleyici işlevler içerisinde de çokçokterimliler olabilmektedir. Tek değişkenli durumlardan çok değişkenli durumlara geçmek için çokçokterimlilik kullanılmaktadır. Çokçokterimlilik, verilen dizgede özünden varolmayabilir. Ancak, uygulamıcıl olarak, çoğu durumlarda bilinmeyenlerin bazı diğer işlevlerine bağlı olan çokçokterimli, betimleyici işlevler içerebilmektedir. Öteki bir söylemle, bu

öteki işlevler, yeni bilinmeyen işlevler olarak tanımlanabilmektedir. Bu bilinmeyen değişiklikler STD'lerin özlerinden daha çok bilinmeyenler içerebilmektedir. Bu da eşsizliğin olmadığı anlamına gelmektedir. Bilinmeyenlerin sayısındaki bu olası artış düşünülürse bu olguya "Uzay Genişletimi" adı verilmektedir.

Uzay genişletimi, çok değişkenlilik için kullanışlı değildir. Uzay genişletimi aynı zamanda çokterimliliği yalınlaştırmada kullanılabilir ve STD'leri çözümlerken yeni bilinmeyenlerde ikinci derece çokçokterimli yapı ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda tüm çokçokterimli yapıların ikinci derece çokçokterimli durumlara dönüştürülebildiği söylenebilir. İkinci dereceliliği öngörerek (3.1) denklemi yazılabilmektedir. Bu denklem aynı zamanda daha da yalınlaştırılabilir.

Bir değiştirge eklenimi ile bilinmeyenlerin sayısı artırılabilir. Buna da Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletimi (DEUG) adı verilmektedir. DEUG uygulandığı zaman elde edilen STD'de  $F_0$  yöneyi ortadan kalkar. Eğer  $F_0$ , sıfır dizeyi,  $F_1$  dizeyi de birim dizey olsaydı, DEUG kullanılmasına gerek kalmazdı. Ancak, bu durumda DEUG kullanılsa da bir olumsuz yaratmamaktadır.

İkinci dereceden sağ yanlı, belirtik ve özerk STD'leri

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2 \mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \quad (3.1)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu denklemde  $F_0$ ,  $F_1$  ve  $F_2$ ,  $t$  bağımlılığı bulunmayan büyüklüklerdir.  $F_0$ ,  $n \times 1$  türünde değişmez (sabit) bir dizeydir.  $F_1$  büyüklüğü de  $n \times n$  türünde dördül bir dizeydir.  $F_2$  büyüklüğü ise  $n \times n^2$  türünde dikdörtgencil bir dizey olarak simgelenmektedir.  $F_2$ 'nin  $n \times n^2$  türünde olmasının nedeni  $\mathbf{x}(t)$  yöneyinin dolaysızslu karesine etki etmesinden kaynaklanmaktadır.  $\mathbf{x}(t)$  yöneyi ise  $n$  ögeli bilinmeyen işlevlerden oluşan bir dizge yöneyidir. Eşsiz bir çözüm elde edebilmek için

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \equiv [a_1 \dots a_n]^T \quad (3.2)$$

ile verilen bir başlangıç yöneyi tanımlamak gereklidir. Tanımladığımız başlangıç yöneyinin ögeleri sayıdır.

### 3.2 Dizge Yöneyinin Genişletimi

"System" sözcüğünü çağrıştıran  $s$  ile simgelenen,  $t$ 'ye bağımlı,  $n$  sayıda bilinmeyen işlevlerden oluşan dizge yöneyini  $a_{n+1}$  değiştirgesi ekleyerek DEUG bağlamında

genişletmemiz gerekirse

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ a_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

biçiminde bir başka dizge yöneyi ortaya çıkmaktadır. Bu yöneyin zamancıl türevi alındığında

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

yapısında bir yöney elde edilmektedir. Burada,  $a_{n+1}$  belirsiz ama değişmez bir sayıl olduğu için türevi alındığında 0 elde edilmektedir ve  $\mathbf{x}(t)$  yöneyinin türevi, (3.1) denkleminde verildiği gibidir.  $\mathbf{s}$  ile  $\mathbf{s}$  Kronecker çarpımı, diğer bir deyişle, (3.3) eşitliğindeki dizge yöneyinin dolaysızsüslü dördülü

$$\mathbf{s}(t)^{\otimes 2} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \\ a_{n+1}\mathbf{x}(t) \\ a_{n+1}\mathbf{x}(t) \\ a_{n+1}^2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

biçiminde gündeme getirilebilmektedir. Buradan  $n^2$  öğeli ikili çarpımlardan oluşan bir yöney elde edilmektedir. Burada  $(n+1)^2 \times (n+1)^2$  yerdeğiştirim dizeyi, oluşturulmuştur. Döndürüm dizeyi, evriğinin devriğine eşit olduğu bir yapıdadır.

### 3.3 Genişletilmiş Dizge Yöneyi ile Oluşturulan STD'in Katsayılarının Belirlenimi ve Esneklik Yönetimi

DEUG ile oluşturulan bu dizge yöneyinin zamancıl türevi, (3.4) eşitliği bağlamında  $(n+1) \times (n+1)$  ve  $(n+1) \times (n+1)^2$  türünden değişmez öğelerden oluşan katsayı dizeleriyle

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{G}_1\mathbf{s}(t) + \mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{s}(t)^{\otimes 2} \quad (3.6)$$

biçiminde bir STD yazılabilmektedir. (3.6) denkleminde tanımlanan dizeler

$$\mathbf{G}_1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{(1)} & \mathbf{G}_{1,2}^{(1)} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{(1)} & \mathbf{G}_{2,2}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{G}_2 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{(2)} & \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} & \mathbf{G}_{1,3}^{(2)} & \mathbf{G}_{1,4}^{(2)} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{(2)} & \mathbf{G}_{2,2}^{(2)} & \mathbf{G}_{2,3}^{(2)} & \mathbf{G}_{2,4}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

biçimindedir ve (3.6) denklemini tutarlı olmalıdır. Bu iki dizeyde toplam 12 öbek bulunmaktadır.

$\mathbf{G}_1$  ve  $\mathbf{G}_2$  katsayı dizeleri (3.6) denkleminde yerine konulduğunda

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^{(2)}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} + \left[ \mathbf{G}_{1,1}^{(1)}\mathbf{x}(t) + a_{n+1} \left( \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{1,3}^{(2)} \right) \right] \mathbf{x}(t) + a_{n+1}\mathbf{G}_{1,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{1,4}^{(2)} \\ \mathbf{G}_{2,1}^{(2)}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} + \left[ \mathbf{G}_{2,1}^{(1)}\mathbf{x}(t) + a_{n+1} \left( \mathbf{G}_{2,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{2,3}^{(2)} \right) \right] \mathbf{x}(t) + a_{n+1}\mathbf{G}_{2,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{2,4}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

biçiminde yeni bir yöney elde edilmektedir. (3.4) denkleminde gösterildiği üzere birinci ögesi  $\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2\mathbf{x}(t)^{\otimes 2}$ , ikinci ögesi ise 0'a eşittir. Bu durumda (3.9) eşitliğinin ögeleri

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{1,1}^{(2)}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} + \left[ \mathbf{G}_{1,1}^{(1)}\mathbf{x}(t) + a_{n+1} \left( \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{1,3}^{(2)} \right) \right] \mathbf{x}(t) + a_{n+1}\mathbf{G}_{1,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{1,4}^{(2)} \\ = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{G}_{2,1}^{(2)}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} + \left[ \mathbf{G}_{2,1}^{(1)}\mathbf{x}(t) + a_{n+1} \left( \mathbf{G}_{2,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{2,3}^{(2)} \right) \right] \mathbf{x}(t) + a_{n+1}\mathbf{G}_{2,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{2,4}^{(2)} = 0 \quad (3.11)$$

biçiminde doğrucul birleşimler olarak tanımlanabilmektedir. (3.11) denkleminde ise katsayılarda 0'a eşitlik söz konusudur. Buradan da aşağıdaki gibi eşitlikler elde edilmektedir.

$$\mathbf{G}_{1,1}^{(2)} = \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{G}_{1,1}^{(1)} + a_{n+1} \left( \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{1,3}^{(2)} \right) = \mathbf{F}_1, \quad a_{n+1}\mathbf{G}_{1,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{1,4}^{(2)} = \mathbf{F}_0 \quad (3.12)$$

$$\mathbf{G}_{2,1}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_{2,1}^{(1)} + a_{n+1} \left( \mathbf{G}_{2,2}^{(2)} + \mathbf{G}_{2,3}^{(2)} \right) = \mathbf{0}, \quad a_{n+1}\mathbf{G}_{2,2}^{(1)} + a_{n+1}^2\mathbf{G}_{2,4}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

Bu denklemler bağlamında da yalnızca 6 öbek, diğer öbekler türünden yazılabilmektedir.

### 3.4 Genişletilmiş Birinci Katsayı Dizeyinin Ölçeklenen Birimdizeyleştirimi

Belirsiz olan  $\mathbf{G}_1$  dizeyi, bilinmeyen bir  $\beta$  değişirgesiyle

$$\mathbf{G}_1 \equiv \beta\mathbf{I}_{n+1} \quad (3.14)$$

biçiminde yazılabilmektedir. Bu durumda (3.6) denkleminde  $\mathbf{G}_1$  yerine  $\beta\mathbf{I}_{n+1}$  yerleştirildiğinde

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \beta\mathbf{I}_{n+1}\mathbf{s}(t) + \mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{s}(t)^{\otimes 2} \quad (3.15)$$

biçiminde bir yapı ortaya çıkmaktadır. Bu denklem işlev dönüşümüyle biçimcil olarak çözüldüğünde

$$\mathbf{s}(t) \equiv e^{\beta t}\bar{\mathbf{s}}(t) \quad (3.16)$$



biçiminde bir sonuç elde edilmektedir. Bu işlev dönüşümünün yardımıyla bu denklemin zamancıl türevi alındığında aşağıdaki gibi yapılar gündeme gelmektedir.

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = e^{\beta t} \mathbf{G}_2 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{s}(t)^{\otimes 2} \quad (3.17)$$

$$u(t) = \frac{e^{\beta t} - 1}{\beta} \quad (3.18)$$

değişken dönüşümü de uygulandığı zaman aşağıdaki gibi bir yapı elde edilmektedir.

$$\frac{d\tilde{\mathbf{s}}(u)}{du} = \mathbf{G}_2 \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{s}}(u)^{\otimes 2} \quad (3.19)$$

Bu eşitlikte (3.21)'de tanımlanan başlangıç koşullarıyla, sağ yandaki bilinmeyene göre yalnızca dördül yapıda terimlerin bulunduğu bir yapı gündeme gelmektedir.

Buradan da  $t$  yerine  $u(t)$ 'yi bağımsız değişken gibi kullanarak

$$\tilde{\mathbf{s}}(u) \equiv \bar{\mathbf{s}} \left( \frac{\ln(1 + \beta u)}{\beta} \right) \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilmektedir. Başlangıç yöneyini de

$$\tilde{\mathbf{s}}(0) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n+1}]^T \quad (3.21)$$

biçiminde tanımlamak olanaklıdır.

### 3.5 DEUG ile Dördül STD Küme'sine İndirgeme Olgusu

İkinci dereceden, belirtik ve özerk STD ya da küme'si, DEUG ile sağ yan işlevleri dördül olan bir STD ya da küme'sine indirgenebilmektedir.  $\mathbf{G}_2 \mathbf{P}^{-1}$ , irakgörür bir dizey olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{G}_2 \mathbf{P}^{-1} \quad (3.22)$$

Başlangıç yöneyi de aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir.

$$\tilde{\mathbf{a}} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n+1}]^T \quad (3.23)$$

Bu durumda (3.19) denklemini

$$\frac{d\tilde{\mathbf{s}}(u)}{du} = \mathbf{M}_1 \tilde{\mathbf{s}}(u)^{\otimes 2}, \quad \tilde{\mathbf{s}}(0) = \tilde{\mathbf{a}} \quad (3.24)$$

biçiminde daha yalın bir biçimde yazılabilmektedir.

### 3.5.1 Özyineleyiş ile genel bir yapı oluşturulması

(3.24) denkleminin tümlevi alındığında

$$\tilde{\mathbf{s}}(u) = \tilde{\mathbf{a}} + \int_0^u d\bar{u} \mathbf{M}_1 \tilde{\mathbf{s}}(\bar{u})^{\otimes 2} \quad (3.25)$$

eşitliği ortaya çıkmaktadır. Bu denklemdeki işi kolaylaştırmak açısından  $\tilde{\mathbf{s}}(\bar{u})^{\otimes 2}$ 'nin bulunması gereklidir.

$$\frac{d\tilde{\mathbf{s}}(u)^{\otimes 2}}{du} = \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{s}}^{\otimes 3}, \quad \tilde{\mathbf{s}}(0)^{\otimes 2} = \tilde{\mathbf{a}}^{\otimes 2} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{I}_n \quad (3.27)$$

biçimindeki tanımın geçerli olduğu öngörülerek (3.26) denkleminin tümlevi alındığında

$$\tilde{\mathbf{s}}(u)^{\otimes 2} = \tilde{\mathbf{a}}^{\otimes 2} + \int_0^u d\bar{u} \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{s}}(\bar{u})^{\otimes 3} \quad (3.28)$$

yapısında bir eşitlik ortaya çıkmaktadır. Buradan elde edilen  $\tilde{\mathbf{s}}(\bar{u})^{\otimes 2}$ 'i (3.25) denkleminde yerleştirdiğimizde

$$\tilde{\mathbf{s}}(u) = \tilde{\mathbf{a}} + u \mathbf{M}_1 \tilde{\mathbf{a}}^{\otimes 2} + \int_0^u du_1 \int_0^{u_1} du_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{s}}(u_2)^{\otimes 3} \quad (3.29)$$

biçiminde bir eşitlik ortaya çıkmaktadır. Buradan da tek bir tümlev kullanarak, daha yalın bir biçimde

$$\tilde{\mathbf{s}}(u) = \tilde{\mathbf{a}} + u \mathbf{M}_1 \tilde{\mathbf{a}}^{\otimes 2} + \int_0^u du_1 (u - u_1) \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{s}}(u_1)^{\otimes 3} \quad (3.30)$$

yazılabilmektedir.  $\tilde{\mathbf{s}}(\bar{u})^{\otimes 2}$  için (3.28)'de dolaysızüçüslüsüne bağımlı duruma getirilip, dolaysızdörtüslüsü için de denklem oluşturulup, dolaysızdörtüslüsüne bağımlı duruma getirilip denklem oluşturulabilmektedir. Bu olgu bu biçimde yineleyişli olarak sürecektir. Bu bağlamda (3.32) ve (3.33)'deki tanımlara bağlı olarak, genel olarak aşağıdaki gibi yapı oluşturulabilmektedir.

$$\tilde{\mathbf{s}}(u) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{u^k}{k!} \mathbf{T}_k \tilde{\mathbf{a}}^{\otimes k+1} + \frac{1}{(j-1)!} \int_0^u du_1 (u - u_1)^{j-1} \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{s}}(u_1)^{\otimes j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

$n^{j+1}$  boyutlu bir Kartezyen uzaydan  $n^j$  boyutlu bir uzaya dönüşüm yapan  $\mathbf{M}_j$ , yatay dikdörtgen irakgörür bir dizeydir.

$$\mathbf{T}_j = \prod_{k=1}^j \mathbf{M}_k, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

$$\mathbf{M}_j = \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{I}_n^{j-k-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

### 3.5.2 Yakınsaklık inceleyişi

Yakınsayış saptayışı için (3.32) ve (3.33)'de verilen dizeylerden

$$\|\mathbf{M}_j\| \leq j \|\mathbf{M}_1\|, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

$$\|\mathbf{T}_j\| \leq j! \|\mathbf{M}_1\|^j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

biçiminde boy eşitsizliği yazmak olanaklıdır. Buradan da,

$$\|\mathbf{M}_1\| \|\tilde{\mathbf{a}}\| |u| < 1 \quad (3.36)$$

yapısında bir yakınsayış koşulu ortaya çıkmaktadır. Bu eşitsizliğin sol yanını zamandan bağımsız olarak küçültmeye eğilim gösterilirse,  $\|\mathbf{M}_1\| \|\tilde{\mathbf{a}}\|$  çarpımının en küçük değerini elde etmek gereklidir.

$$\|\mathbf{M}_1\|^2 \equiv \text{İz}(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1) \equiv \text{İz}(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_1^T) \quad (3.37)$$

(3.14) denklemini gözönüne alınarak  $\mathbf{G}_1$  dizeyinin öbekleri

$$\mathbf{G}_{1,1}^{(1)} \equiv \beta \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{G}_{1,2}^{(1)} \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_{2,1}^{(1)} \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_{2,2}^{(1)} \equiv \beta \quad (3.38)$$

biçiminde tanımlanabilmektedir. (3.12) ve (3.13) denklemlerinin çözümleri kullanılarak

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} & \frac{1}{a_{n+1}} \mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}} \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} & \frac{1}{a_{n+1}^2} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{2,2}^{(2)} & -\mathbf{G}_{2,2}^{(2)} & -\frac{\beta}{a_{n+1}} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

yapısında bir dizey elde edilmektedir.  $\mathbf{G}_2$  dizeyinin boy dördülü alındığında

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_2\|^2 = \|\mathbf{F}_2\|^2 &+ \left\| \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right\|^2 + \left\| \frac{1}{a_{n+1}} \mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}} \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right\|^2 \\ &+ \frac{1}{a_{n+1}^4} \|\mathbf{F}_0\|^2 + 2 \left\| \mathbf{G}_{2,2}^{(2)} \right\|^2 + \frac{\beta^2}{a_{n+1}^2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

biçiminde bir denklem elde edilmektedir. (3.22) denklemini kullanarak yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}_1\|^2 = \|\mathbf{F}_2\|^2 &+ \left\| \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right\|^2 + \left\| \frac{1}{a_{n+1}} \mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}} \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right\|^2 \\ &+ \frac{1}{a_{n+1}^4} \|\mathbf{F}_0\|^2 + 2 \left\| \mathbf{G}_{2,2}^{(2)} \right\|^2 + \frac{\beta^2}{a_{n+1}^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

biçiminde yazılabilmektedir.  $\mathbf{M}_1$  dizeyi,  $\mathbf{G}_{2,2}^{(2)2}$  bilinmeyen katsayı dizeyinin öğelerinden birine göre türevi alınıp, 0'a eşitlendiği zaman

$$\mathbf{G}_{2,2}^{(2)} = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

biçiminde bir olgu gündeme gelmektedir. Bu bağlamda (3.12) denkleminde  $\mathbf{G}_{2,2}^{(2)2}$  yerine 0 yerleştirilerek

$$\|\mathbf{M}_1\|^2 = \|\mathbf{F}_2\|^2 + \|\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\|^2 + \left\| \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right\|^2 + \frac{1}{a_{n+1}^4}\|\mathbf{F}_0\|^2 + \frac{\beta^2}{a_{n+1}^2} \quad (3.43)$$

biçiminde bir denklem elde edilmektedir. Buradan da aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right\|^2 + \frac{\beta^2}{a_{n+1}^2} &= \frac{n+1}{a_{n+1}^2}\beta^2 - \text{İz} \left( \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right) \frac{\beta}{a_{n+1}} \\ &+ \text{İz} \left\{ \left( \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right)^T \left( \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$\beta$ 'ya göre türevi alınıp, 0'a eşitlendiğinde

$$\beta = \frac{1}{2(n+1)} \text{İz} \left( \mathbf{F}_1 - a_{n+1}\mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right) \quad (3.45)$$

biçiminde bir denklem elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \frac{\beta}{a_{n+1}}\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right\|^2 + \|\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}\|^2 &= \frac{n}{a_{n+1}^2}\beta^2 - \text{İz} \left( \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right) \frac{\beta}{a_{n+1}} \\ &+ \text{İz} \left\{ \left( \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right)^T \left( \frac{1}{a_{n+1}}\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right) \right\} + \text{İz} \left( \mathbf{G}_{1,2}^{(2)T} \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

eşitliği için de  $\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}$ 'e göre eniyilemiş yapılacak olursa,  $\beta$  türünden öğeler elde edilmektedir.

$$\left[ \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right]_{j,k} = \frac{1}{2a_{n+1}} [\mathbf{F}_1]_{j,k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq k \quad (3.47)$$

Aynı yoldan köşegen öğeler için de aşağıdaki gibi sonuç elde edilmektedir.

$$\left[ \mathbf{G}_{1,2}^{(2)} \right]_{j,j} = \frac{1}{2a_{n+1}} [\mathbf{F}_1]_{j,j} - \frac{\beta}{4a_{n+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.48)$$

Bu oluşturduğumuz denklemlerle  $\beta$  değiştirgesi türünden  $\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}$  dizeyinin tüm öğeleri elde edilmektedir.

$\beta$  değiştirgesini de elde etmek için (3.48) denklemini önce  $j$  ve  $k$  değerlerini eř alıp sonra  $j$  üzerinde 1'den  $n$ 'ye dek toplayarak

$$\text{İz}(\mathbf{G}_{1,2}^{(2)}) = \frac{1}{2a_{n+1}}\text{İz}(\mathbf{F}_1) - \frac{n}{4a_{n+1}}\beta \quad (3.49)$$

biçiminde bir yapı ortaya çıkarılabilmektedir. (3.45) denklemini bu denkleme yerleştirildiğinde  $\beta$  değiştirgesi için

$$\beta = \frac{2}{7n+8}\text{çz}(\mathbf{F}_1) \quad (3.50)$$

ile verilen yapı elde edilmektedir. Bu durumda  $\beta$  değiştirgesi türündeki tüm öğelerde belirsizlik ortadan kalkmaktadır ve eklenen  $a_{n+1}$  değiştirgesi için  $\mathbf{M}_1$  dizeyinin boyu enküçüklenmiş olacaktır.



## 4. DÖRDÜLLEŞTİRİM

### 4.1 Sorun'un Tanımı

Savda OLEVKU bağlamında, sağ yanları verilen ikinci derece çokçokterimli işlevler olan birinci kereden, belirtik, özerk sıradan türevli denklem küme'lerinin başlangıç değer sorunlarının çözümü için etkin bir yöntem geliştirilmiştir. Savın bu bölümünde önceki bölümlerde sunulan dizey boyutlarının büyütüldüğü yapıdan kaçınmak için birim dizeyler ile Kronecker çarpım kullanılarak dördülleştirim olgusu üzerine odaklanılmıştır. Çoğunlukla bilgisayar bilimlerinde kullanılan Dördülleştirim (ing: Squarification), herhangi bir köşeyi uzamcıl olarak dördül yapıya çevirme olayına denilmektedir.

İkinci derece çokçokterimlilik açısından düşünüldüğünde ikinci dereceden sıradan türevli bir denklem uzay genişletimiyle (3.1) yapısına getirilebiliyor. Özyineleyişlik kurulmasında karşılaşılan  $\mathbf{F}_0$  sorunun ortadan kaldırılabilmesi için önceki bölümde de ayrıntılandırılan DEUG yapısı gündeme getirilir. Dolayısıyla  $\mathbf{F}_0$ 'ın  $\mathbf{0}$  olarak alınabileceği özel bir yapıya indirgenir. Bu bağlamda (3.1)'in çözümü yakınsak olmak koşuluyla

$$\mathbf{x}(t) = -e^{\beta t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \right)^j \mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes(j+1)} \quad (4.1)$$

yapısında olan bir Kronecker toplam dizisi biçimindedir. DEUG kullanımıyla

$$\mathbf{F}_0 \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_1 \equiv -\beta \mathbf{I}_n \quad (4.2)$$

biçiminde ortaya çıkan yeni yapı  $\mathbf{F}_1$ 'in sayıl olan  $\beta$  değıştirgesiyle ilgili birim dizeyle orantılılık kavramını gündeme getirmektedir. (4.1)'deki  $\mathbf{T}_j$ 'ler

$$\mathbf{T}_j \equiv \prod_{k=1}^j \mathbf{M}_k, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

biçiminde  $\mathbf{M}$ 'lerle simgelendirilen dizeylerin çarpımıdır. Bu dizeylerin her biri  $n^j$  sayıda yatay sırası,  $n^{j+1}$  sayıda düşey sırası olan dikdörtgen dizeylerdir. Hem eni hem de boyu büyüyen dikdörtgenler dizeylerin yan yana gelmesiyle oluştuğu için tüm

çarpım dizey irakgörür (ing: telescope) yapısında ortaya çıkar. Buradan  $\mathbf{M}_k$  dizeyi

$$\mathbf{M}_k \equiv \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbf{I}_n^{\otimes \ell} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes k-1-\ell}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

biçiminde gündeme gelir. Burada tek gözlü dürbün de denilebilen 'monocular' sözcüğünü çağrıştıran  $\mathbf{M}$ 'ler son derece seyrek bir yapıya sahiptir. Buradaki üreteç dizeyi  $\mathbf{F}$ , dikdörtgen bir dizeydir. Buradan ilk üç terim tanımlanacak olursa

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{F} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{M}_2 = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{M}_3 = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 2}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F}) \quad (4.7)$$

biçiminde gündeme gelir. Buradaki bağıntılar kullanılarak irakgörür dizey yapıları elde edilebilir.  $j, 0$  olarak alındığında tanım olarak ilk irakgörür dizey

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{I} \quad (4.8)$$

biçiminde gündeme gelmektedir.  $\mathbf{T}_1, \mathbf{M}_1$ 'e,  $\mathbf{T}_2, \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$ 'e ve  $\mathbf{T}_3$  de  $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_3$ 'e eşit olduğundan

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= \mathbf{F} [(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})] \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + \mathbf{F}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{F} [(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})] [(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 2}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F})] \quad (4.11)$$

biçiminde yapılar gündeme gelir.

## 4.2 Irakgörür Dizelerin Dördülleştirimi

Seyrek ve bol sıfırlı olan irakgörür dizeyle  $\mathbf{a}$  yöneyinin ilgili Kronecker üslüsünün çarpımı dördülleştirim ile daha tıkHz bir yapıda yazılabilir ve seyreklik ortadan kaldırılabilir ya da en az düzeye indirgenebilir. İlk denklemdeki  $\mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes j+1}$  çarpımı

$$\mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes j+1} = \mathbf{S}_j(\mathbf{a}) \mathbf{a} = \mathbf{S}_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki amaç  $\mathbf{S}_j(\mathbf{a})$  dizeyini yalın bir biçimde belirlemek ve bilgisayarda buyrukdizilendirilebilecek bir yapı oluşturarak seyreklikten kurtulmaktır.



Buradaki  $\mathbf{S}_j$ 'ler "Dördülleştirilmiş Irakgörür Dizelyer" (ing: Squarified Telescope Matrices), kısaltılmışı "SquTelMats" olarak adlandırılır.  $\mathbf{S}_j(\mathbf{a})$  dizelyeri yukarıdaki yapılar da kullanılarak eşsiz bir biçimde bulunabilir.  $j = 0$  ise (4.8)'den

$$\mathbf{T}_0 \mathbf{a} = \mathbf{a} = \mathbf{S}_0(\mathbf{a}) \mathbf{a} \implies \mathbf{S}_0(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{I}_n \quad (4.13)$$

sonucu gündeme gelir.  $\mathbf{I}$  birim dizelyi  $n \times n$  türündedir.  $j = 1$  ise (4.9)'dan

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{a}^{\otimes 2} = \mathbf{M}_1 \mathbf{a}^{\otimes 2} = \mathbf{F} \mathbf{a}^{\otimes 2} \quad (4.14)$$

biçiminde gündeme gelir.  $\mathbf{F}$  dizelyi  $n \times n^2$  türünde bir dizelydir. Bu dizelyin,  $n$  sayıda dördül alt dizely yerleştirilerek, bölünümü göndeme getirilebilir.

$$\mathbf{F} \equiv [ \mathbf{F}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{F}^{(n)} ] \quad (4.15)$$

Eğer  $\mathbf{F}$  dizelyi bu türden dördül yapıları öbek olarak içeren bir yapı olarak düşünülebilirse

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{F}^{(i)} \quad (4.16)$$

biçiminde Kronecker çarpımlarının toplamı olarak yazılabilir. Buradaki  $\mathbf{e}_i^T$ 'ler  $n$  ögeli kartezyen birim dizelylerdir.  $\mathbf{F}$ 'in bu biçimde yazılabilmesi kendisinin  $\mathbf{a}^{\otimes 2}$  ile çarpımında kolaylık getireceği anlamına gelir. Bu bağlamda

$$\mathbf{F} \mathbf{a}^{\otimes 2} = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{F}^{(i)} \right) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \quad (4.17)$$

biçimindedir. Kronecker çarpımının değişim ve dağılım özelliğinden dolayı toplamın iç kesimi

$$\left( \mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{F}^{(i)} \right) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{e}_i^T \mathbf{a}) \otimes \left( \mathbf{F}^{(i)} \mathbf{a} \right) \quad (4.18)$$

biçimindedir. Bir sayıl ile bir dizelyin veya yöneyin Kronecker çarpımı, sayıl ile dizely veya yöneyin çarpımına eşittir. Burada  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}$  yöneyinin  $i$ . ögesi olarak  $a_i$  biçiminde simgelenirilebilir. Bu durumda

$$\left( \mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{F}^{(i)} \right) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) = a_i \mathbf{F}^{(i)} \mathbf{a}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19)$$

biçiminde de yazılabilir. Bu da

$$\mathbf{F} \mathbf{a}^{\otimes 2} = \left( \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{F}^{(i)} \right) \mathbf{a} \quad (4.20)$$

biçiminde bir eşdeğerliliği gündeme getirir. Burada dördül dizeyin doğrucul bir birleşimi vardır. Bu doğrucul birleşimin katsayıları yine  $\mathbf{a}$  yöneyinin öğeleridir. Demek ki ayraçlar arasındaki toplam da dördül bir dizeydir. Burada ikinci dereceden bir ölçeklenim ve doğrucul olmayış söz konusudur. Sonsuz boyuttan yayılıp doğrucullaştırım olayı sağlanmıştı. Şimdi de tıkızlaştırım sırasında o doğruculluk, doğrucul olmayışa götürecektir.  $\mathbf{F}$  daha özelsiz (ing: general) biçimde

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \left( \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{F}^{(i)} \right) \mathbf{b} \quad (4.21)$$

olarak yazılabilir. Buradan  $\mathbf{F}$  ile  $\mathbf{a}$  arasında bir tanım yaparak

$$[\mathbf{F}, \mathbf{a}] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{F}^{(i)} \quad (4.22)$$

iki tane değişeni olan yapı biçiminde dördülleştirmeyi simgeleyebiliriz.  $[\mathbf{F}, \mathbf{a}]$ 'a dördülleştirici (ing: squarifier) adı verilir. Buradan birinci dördülleştirilmiş ırakgörür dizeyi

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{a}^{\otimes 2} = [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a} \quad (4.23)$$

biçiminde yazılabilir.

### 4.3 Tıkızlaştırım Olguları

Savda, burada, türlü durumlardaki tıkızlaştırım için  $\mathbf{F}$  dizeyinin öbeklerinin bakışımli ve değiştirimli olma, eşit olma ve birim dizeye eşit olma olgusu incelenecektir.

#### 4.3.1 $\mathbf{F}$ dizeyinin öbeklerinin bakışımli ve değiştirimli oluş olgusu

$\mathbf{F}$  dizeyinin  $n \times n$ 'lik öbekleri  $\phi$  ile simgelenirse

$$\mathbf{F} \equiv [ \phi_1 \quad \dots \quad \phi_n ], \quad \phi_j \phi_k - \phi_k \phi_j = \mathbf{0}, \quad \phi_j = \phi_j^T, \quad j, k = 1, 2, \dots, n \quad (4.24)$$

biçiminde yapılar gündeme getirilebilir. Burada  $\phi$ 'ler bakışık olmalıdır. İkinci bağıntıda  $\phi$ 'ler çarpıma girdiğinde çarpımların değiştirimli olacağı gözlemlenir. Dolayısıyla  $\mathbf{F}$ 'nin bakışık ve değiştirimli dördül dizeylerden oluştuğu öngörülerek bir kısıtlama getirilebilir.

Değiştirimli dizeylerin izgecil gösterimleri

$$\phi_j = \varphi_{j,1} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \dots + \varphi_{j,n} \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.25)$$

biçimindedir. Burada dizeler kuramından yararlanarak her bir dördül düzeyde değişik bir özdeğer takımı olduğu ve özyöneylemlerin birbirleriyle çakıştığı söylenebilir.  $\mathbf{F}$  düzeyi  $n$  ögeli iki farklı yöneyin Kronecker çarpımıyla etkileştiğinde

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^n a_j \boldsymbol{\phi}_j \mathbf{b}. \quad (4.26)$$

biçiminde bir yapı gündeme gelir. Bu eşitlik (4.25) yapısı kullanılarak

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^n \varphi_{j,k} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{b} \quad (4.27)$$

biçiminde gündeme gelir. Burada  $\mathbf{u}$ 'lar üzerinde doğrucul bir birleşim vardır. Dolayısıyla bu eşitlik

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_j \varphi_{j,k} \right) (\mathbf{u}_k^T \mathbf{b}) \mathbf{u}_k \quad (4.28)$$

biçiminde de yazılabilir.  $\boldsymbol{\phi} \equiv [\boldsymbol{\varphi}_{1,k} \ \boldsymbol{\varphi}_{2,k} \ \cdots \ \boldsymbol{\varphi}_{n,k}]^T$  biçiminde bir yöney tanımlandığında

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_k) (\mathbf{u}_k^T \mathbf{b}) \mathbf{u}_k \quad (4.29)$$

biçiminde bir yapı gündeme gelir. Bu yapıların uygulayımıcıl olarak gösterilimi için dördüncü dördülleştirilmiş irakgörür düzeyinin bir terimi

$$\mathbf{F}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{F})(\mathbf{I}_n^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F})(\mathbf{I}_n^{\otimes 3} \otimes \mathbf{F})\mathbf{a}^{\otimes 5} \quad (4.30)$$

biçiminde gündeme getirilsin. Bu denklemin son terimleri arasındaki Kronecker çarpım

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_n^{\otimes 3} \otimes \mathbf{F})\mathbf{a}^{\otimes 5} &= \mathbf{a}^{\otimes 3} \otimes \mathbf{F}\mathbf{a}^{\otimes 2} = \mathbf{a}^{\otimes 3} \otimes \mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \\ &= \left[ \mathbf{a}^{\otimes 3} \otimes \left( \sum_{k=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_k) (\mathbf{u}_k^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_k \right) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

biçimindedir. Burada  $\mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a})$ , (4.29) kullanılarak yazılmıştır. (4.30)'daki bir sonraki terimin bu bağıntıyla çarpımı

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I}_n^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F}) \left[ \mathbf{a}^{\otimes 3} \otimes \left( \sum_{k=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_k) (\mathbf{u}_k^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_k \right) \right] \\ &= \mathbf{a}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F} \left( \mathbf{a} \otimes \left( \sum_{k=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_k) (\mathbf{u}_k^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_k \right) \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

biçimindedir. Burada  $\mathbf{a}^{\otimes 3}$  yöneyi,  $\mathbf{a}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{a}$  biçiminde düşünülerek birim dizeye çarpımı sağlanmıştır. Bu bağıntı

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{I}_n^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F}) \left[ \mathbf{a}^{\otimes 3} \otimes \left( \sum_{k=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_k) (\mathbf{u}_k^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_k \right) \right] \\
&= \mathbf{a}^{\otimes 2} \otimes \sum_{k_2=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_2}) \left( \mathbf{u}_{k_2}^T \left[ \sum_{k_1=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_1}) (\mathbf{u}_{k_1}^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_{k_1} \right] \right) \mathbf{u}_{k_2} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

biçiminde de yazılabilir. Dikgenlik ve birimboyluluk (ing: orthonormality) de kullanılarak

$$(\mathbf{I}_n^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F}) \left[ \mathbf{a}^{\otimes 3} \otimes \left( \sum_{k=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_k) (\mathbf{u}_k^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_k \right) \right] = \mathbf{a}^{\otimes 2} \otimes \sum_{k_1=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_1})^2 (\mathbf{u}_{k_1}^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_{k_1} \quad (4.34)$$

biçiminde bir yapı gündeme gelir. Bu bağıntının da  $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{F}$  ile çarpımı

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{F}) \left( \mathbf{a}^{\otimes 2} \otimes \sum_{k_1=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_1})^2 (\mathbf{u}_{k_1}^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_{k_1} \right) &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{F} \left( \mathbf{a} \otimes \sum_{k_1=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_1})^2 (\mathbf{u}_{k_1}^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_{k_1} \right) \\
&= \mathbf{a} \otimes \sum_{k_1=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_1})^3 (\mathbf{u}_{k_1}^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_{k_1} \quad (4.35)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Bu bağıntı da (4.30)'daki ilk terimle çarpıldığında

$$\mathbf{F}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{F})(\mathbf{I}_n^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F})(\mathbf{I}_n^{\otimes 3} \otimes \mathbf{F})\mathbf{a}^{\otimes 5} = \sum_{k_1=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_1})^4 (\mathbf{u}_{k_1}^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_{k_1} \quad (4.36)$$

özyöneylemlerin doğrucul birleşimi biçiminde bir yapı gündeme gelir.  $\mathbf{S}_4$ 'ün daha karmaşık bir terimi gündeme getirilirse, inceleyişler sonunda,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{F})(\mathbf{I}_n^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F})(\mathbf{I}_n^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{a}^{\otimes 5} \\
&= \sum_{k_2=1}^n \sum_{k_1=1}^n (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_2}) (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_1}) (\mathbf{u}_{k_1}^T \mathbf{a}) (\mathbf{u}_{k_1}^T \boldsymbol{\varphi}_{k_2}) (\mathbf{u}_{k_2}^T \mathbf{a}) \mathbf{u}_{k_2} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

biçiminde bir yapı elde edilir.

### 4.3.2 F dizeyinin öbeklerinin eşit oluşusu

$\mathbf{F}$  dizeyinin öbeklerinin birbirine eşit olduğu öngörülürse

$$\begin{aligned}
[\mathbf{F}, \mathbf{a}] &= \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \mathbf{a} \boldsymbol{\phi}, \quad [\mathbf{F}, \mathbf{a}]^j = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^j \boldsymbol{\phi}^j, \\
[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}] &= \sum_{i_2=1}^n \mathbf{e}_{i_2}^T \left( \sum_{i_1=1}^n \mathbf{e}_{i_1}^T \mathbf{a} \boldsymbol{\phi} \right) \mathbf{a} \boldsymbol{\phi} = \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=1}^n \mathbf{e}_{i_2}^T (\mathbf{e}_{i_1}^T \mathbf{a} \boldsymbol{\phi}) \mathbf{a} \boldsymbol{\phi} \quad (4.38)
\end{aligned}$$

$$[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} = \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=1}^n \mathbf{e}_{i_3}^T (\mathbf{e}_{i_2}^T (\mathbf{e}_{i_1}^T \mathbf{a} \boldsymbol{\phi}) \mathbf{a} \boldsymbol{\phi}) \mathbf{a} \boldsymbol{\phi} \quad (4.39)$$

biçiminde dördülleştirme yapıları elde edilir.

### 4.3.3 F dizeyinin öbeklerinin birim dizeye eşit oluş olgusu

F dizeyinin öbeklerinin birim dizeye eşit olduğu öngörülürse dördülleştirim

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}, \mathbf{a}] &= \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \mathbf{a} \right) \mathbf{I} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{I}, \quad [\mathbf{F}, \mathbf{a}]^j = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^j \mathbf{I}, \\ [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}] &= \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=1}^n \mathbf{e}_{i_2}^T (\mathbf{e}_{i_1}^T \mathbf{a}) \mathbf{a} = \left( \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=1}^n a_{i_1} a_{i_2} \right) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a}] &= \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=1}^n \mathbf{e}_{i_3}^T (\mathbf{e}_{i_2}^T (\mathbf{e}_{i_1}^T \mathbf{a}) \mathbf{a}) \mathbf{a} \\ &= \left( \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_1=1}^n a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \right) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.41)$$

biçiminde yapılar olarak gündeme gelebilir. Dolayısıyla dördülleştirilmiş irakgörür dizeler topluluğunun ilk birkaç ögesi

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{S}_1 = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \mathbf{I}, \quad \mathbf{S}_2 = 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{S}_3 = 6 \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^3 \mathbf{I} \quad (4.42)$$

biçiminde yazılabilir.

### 4.4 Dördülleştirilmiş Irakgörür Dizelerin Özyineleyişi

Dördülleştirim yöntemi ile daha yüksek indisli  $\mathbf{S}_j$  dizeleri bulabilmek için kuramcıl olarak geliştirmeler gereklidir. Bunun için de dördülleştirilmiş irakgörür dizeleri arasında bir özyineleyiş elde edilmelidir.

Birinci dördülleştirilmiş irakgörür dizeyi

$$\mathbf{S}_1 = [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a} \quad (4.43)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan ikinci dördülleştirilmiş irakgörür dizeyinin terimleri

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I})\mathbf{a}^{\otimes 3} &= \mathbf{F}(\mathbf{F}\mathbf{a}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{F}([\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \\ &= [\mathbf{F}[\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.44)$$

biçiminde elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})\mathbf{a}^{\otimes 3} &= \mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{F}\mathbf{a}^{\otimes 2}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}) \\ &= [\mathbf{F}, \mathbf{a}][\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dolayısıyla ikinci dördülleştirim irakgörür dizeyi

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_2 &= [\mathbf{F}[\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} + [\mathbf{F}, \mathbf{a}][\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a} \\
&= [\mathbf{F}, \mathbf{a}]^2 + [\mathbf{F}[\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} \\
&= [\mathbf{F}, \mathbf{S}_1\mathbf{a}] + [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{S}_1
\end{aligned} \tag{4.46}$$

biçiminde  $\mathbf{S}_1$  kullanılarak yazılabilir. Üçüncü dördülleştirilmiş irakgörür dizeyinin terimleri benzer işlemler uygulanarak

$$\mathbf{F}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{F})\mathbf{a}^{\otimes 4} = [\mathbf{F}, \mathbf{a}]^3\mathbf{a} \tag{4.47}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I})\mathbf{a}^{\otimes 4} = [\mathbf{F}, \mathbf{a}][\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} \tag{4.48}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{F})\mathbf{a}^{\otimes 4} = [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}][\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a} \tag{4.49}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I})\mathbf{a}^{\otimes 4} = [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}][\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} \tag{4.50}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I})\mathbf{a}^{\otimes 4} = [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} \tag{4.51}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I})\mathbf{a}^{\otimes 4} = [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}][\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a} \tag{4.52}$$

biçiminde elde edilir.  $\mathbf{S}_3$  dizeyi,  $\mathbf{S}_2$  ve  $\mathbf{S}_1$  biçiminden

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_3 &= [\mathbf{F}, \mathbf{a}]^3\mathbf{a} \\
&+ [\mathbf{F}, \mathbf{a}][\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} \\
&+ [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}][\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a} \\
&+ [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}][\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} \\
&+ [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{a} \\
&+ [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}][\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a} \\
&= [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{S}_2 + 2[\mathbf{F}, \mathbf{S}_1\mathbf{a}]\mathbf{S}_1 + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_2\mathbf{a}]
\end{aligned} \tag{4.53}$$

olarak yazılabilir. Bu biçimde benzer işlemlerin uygulanmasıyla ilerlenerek sonraki dizeyler

$$\mathbf{S}_4 = [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{S}_3 + 3[\mathbf{F}, \mathbf{S}_2\mathbf{a}][\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 3[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}]\mathbf{a}]\mathbf{S}_2 + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_3\mathbf{a}] \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_5 &= [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{S}_4 + 4[\mathbf{F}, \mathbf{S}_3 \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 6[\mathbf{F}, \mathbf{S}_2 \mathbf{a}] \mathbf{S}_2 \\ &+ 4[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_3 + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_4 \mathbf{a}] \end{aligned} \quad (4.55)$$

yapılarıyla gündeme gelir. Bu yapılarda ortaya çıkan örüntü temel alınarak

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_6 &= [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{S}_5 + 5[\mathbf{F}, \mathbf{S}_4 \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 5[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_4 + 10[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_3 \\ &+ 10[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{S}_3 \mathbf{a}] \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_5 \mathbf{a}] \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_7 &= [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{S}_6 + 6[\mathbf{F}, \mathbf{S}_5 \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 6[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_5 + 15[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_4 \\ &+ 15[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{S}_4 \mathbf{a}] \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 20[\mathbf{F}, \mathbf{S}_3 \mathbf{a}] \mathbf{S}_3 + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_6 \mathbf{a}]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

yapıları gündeme gelir. Buradan

$$\mathbf{S}_j = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k \mathbf{a}] \mathbf{S}_{j-1-k}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.58)$$

özyineleyiş yapısı elde edilerek  $j = 7$  durumundan öteye geçilebilmektedir.





## 5. HÉNON HEİLES DİZGELERİNİN DEVİNİMLERİNİN DÖRDÜLLEŞTİRİM OLGUSUYLA BELİRLENİŞİ

### 5.1 Hénon Heiles Dizgesi

Fransız gökbilimci ve uzbilimci olan Michel Hénon ve Amerikan Astrofizikçi Carl Heiles gökada çevresindeki bir yıldızın doğrucul olmayan devinimi üzerinde çalışarak gökadamal devimbilimdeki üçüncü tümlevini buldular. Bunu bulmak için belirli sayıdaki başlangıç koşulu için yalınlaştırılmış, iki boyutlu, bakışimsız gizilgücü gündeme getirdiler. Buradaki gizilgüçlü devinimi belirlemek için Hénon Heiles olarak adlandırdıkları dört sıradan türevli denklemden oluşan kümeyi kullandılar. 1964 yılında bu konuyla ilgili “The Applicability Of The Third Integral Of Motion: Some Numerical Experiments” başlıklı bilimcil yazıları yayınlandı.

Hénon Heiles dizgesi

$$\dot{x} = p_x \quad (5.1)$$

$$\dot{p}_x = -x - 2\lambda xy \quad (5.2)$$

$$\dot{y} = p_y \quad (5.3)$$

$$\dot{p}_y = -y - \lambda(x^2 - y^2) \quad (5.4)$$

olarak dört denklem ile tanımlanmaktadır. Burada devinirlik  $p$ , konum ise  $x$  ile simgelenmektedir. Hénon Heiles dizgelerinin sağ yanlarını, ikinci dereceden çokçokterimli STD küme’si olarak yazabilmek için  $x$ ’i  $x_1$ ,  $p_x$ ’i  $x_2$ ,  $y$ ’i  $x_3$  ve  $p_y$ ’i de  $x_4$  olarak simgelersek

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.5)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_1x_3 \quad (5.6)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (5.7)$$

$$\dot{x}_4 = -x_3 - (x_1^2 - x_3^2) = -x_3 - x_1^2 + x_3^2 \quad (5.8)$$

biçiminde bir yapı ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda (3.1)’de verilen ikinci dereceden sıradan türevli denklem küme’sini

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2x_1x_3 \\ x_4 \\ -x_3 - x_1^2 + x_3^2 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\otimes 2} \quad (5.9)$$

olarak yazmak olanaklıdır. Burada  $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{F}_1$  ve  $\mathbf{F}_2$  büyüklükleri

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

eşitlikleriyle tanımlanabilmektedir.  $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{F}_1$  ve  $\mathbf{F}_2$  (3.1) denkleminde yerlerine yerleştirildiğinde

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{\otimes 2} \quad (5.11)$$

biçiminde bir yapı elde edilir.

Hénon Heiles dizgesi için DEUG kullanıldığında  $\mathbf{F}_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\xi} & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\xi} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\xi} & 0 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\xi} & 0 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

biçiminde  $5 \times 25$  türünde bol sıfırlı bir dizey olarak gündeme gelir. Bu yapının yalnızca 12 ögesi sıfırdan değişiktir.

## 5.2 Betikleyiş

Burada verilen sayısal sonuçlar Ubuntu 14.10 Linux sürümü ortamında, MuPAD Pro 4.0.6 sürümü ile betikleyiş altında, çizimler de Gnuplot 4.6 sürümü ile betikleyiş altında elde edilmiştir. Sınavış amaçlı Dördülleştirim kullanılan OLEVKU yöntemi ile kullanılmayan OLEVKU yöntemi karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların birebir örtüştüğü gözlemlenmiştir. Ancak Dördülleştirim kullanılmayan OLEVKU yönteminde en fazla 8. kerteğe kadar çıkılabılmıştır. Dördülleştirim kullanılmadığı durumda tıkanma uzişin bellek ve işlemler yeterliği gereksinimlerinden olmaktadır. Dördülleştirim kullanıldığı OLEVKU yönteminde kesimcil yaklaşırtım (ing: truncation approximation) kertesini için daha yüksek kertelele kadar çıkılabildiği gözlemlenmiştir. Gözlemlerin tümü dördülleştirimini önemiini çok kesin bir biçimde ortaya koymaktadır. Dolayısıyla, dördülleştirim kullanımının bir “olmazsa olmaz” olduğu kesin bir dille vurgulanabilir.

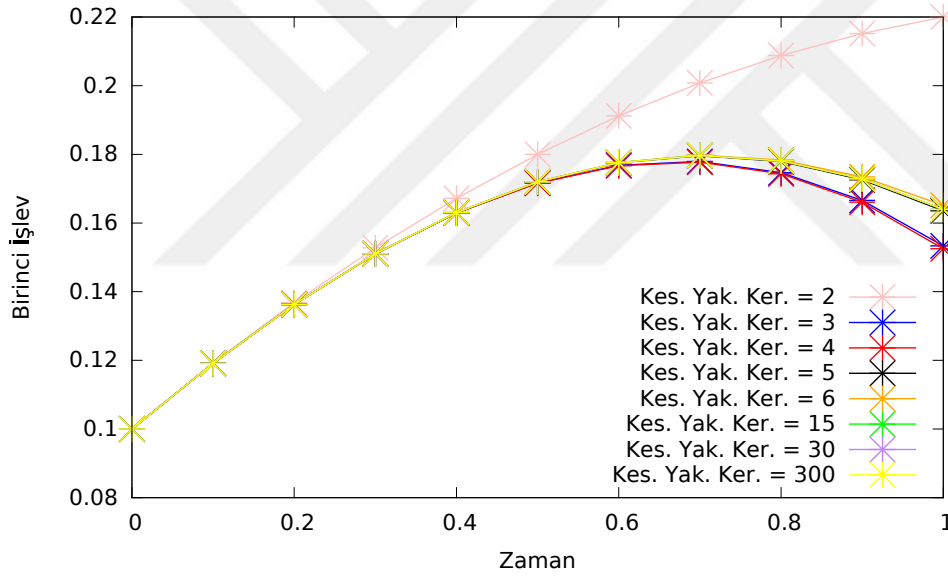
Dördülleştirim kullanılarak  $a_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 0.2$ ,  $a_3 = 0.3$  ve  $a_4 = 0.4$  başlangıç koşulları altında 2., 3., 4., 5., 6., 15., 30. ve 300. kesimcil yaklaşırtım kertelelerinde elde edilen işlevlerin değlemlerinin 0.1 uzunluğunda adımlarla ve 0 ile 1 zaman aralığındaki çizimleri ve çizelge gösterilimleri aşağıda verilmektedir.

**Çizelge 5.1** : Değişik kesimcil yaklaşırtım kertesine göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değlemleri.

Zaman	2	3	4	5
0.0	0.1	0.1	0.1	0.1
0.1	0.119200000000	0.119133333333	0.119133250000	0.119133360667
0.2	0.136800000000	0.136266666667	0.136265333333	0.136268874667
0.3	0.152800000000	0.151000000000	0.150993250000	0.151020142000
0.4	0.167200000000	0.162933333333	0.162912000000	0.163025322667
0.5	0.180000000000	0.171666666667	0.171614583333	0.171960416667
0.6	0.191200000000	0.176800000000	0.176692000000	0.177552544000
0.7	0.200800000000	0.177933333333	0.177733250000	0.179593224667
0.8	0.208800000000	0.174666666667	0.174325333333	0.177951658667
0.9	0.215200000000	0.166600000000	0.166053250000	0.172588006000
1.0	0.220000000000	0.153333333333	0.152500000000	0.163566666667

**Çizelge 5.2** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6	15	30	300
0.0	0.1	0.1	0.1	0.1
0.1	0.119133362247	0.119133362143	0.119133362142	0.119133362143
0.2	0.136268975787	0.136268962197	0.136268962197	0.136268962198
0.3	0.151021293820	0.151021057330	0.151021057330	0.151021057330
0.4	0.163031794347	0.163029993017	0.163029993016	0.163029993017
0.5	0.171985104167	0.171976386828	0.171976386828	0.171976386828
0.6	0.177626260480	0.177594617209	0.177594617207	0.177594617207
0.7	0.179779110087	0.179684976060	0.179684976041	0.179684976042
0.8	0.178365846187	0.178123887790	0.178123887583	0.178123887583
0.9	0.173427682780	0.172871678393	0.172871676924	0.172871676924
1.0	0.165146666667	0.163977492117	0.163977483654	0.163977483654



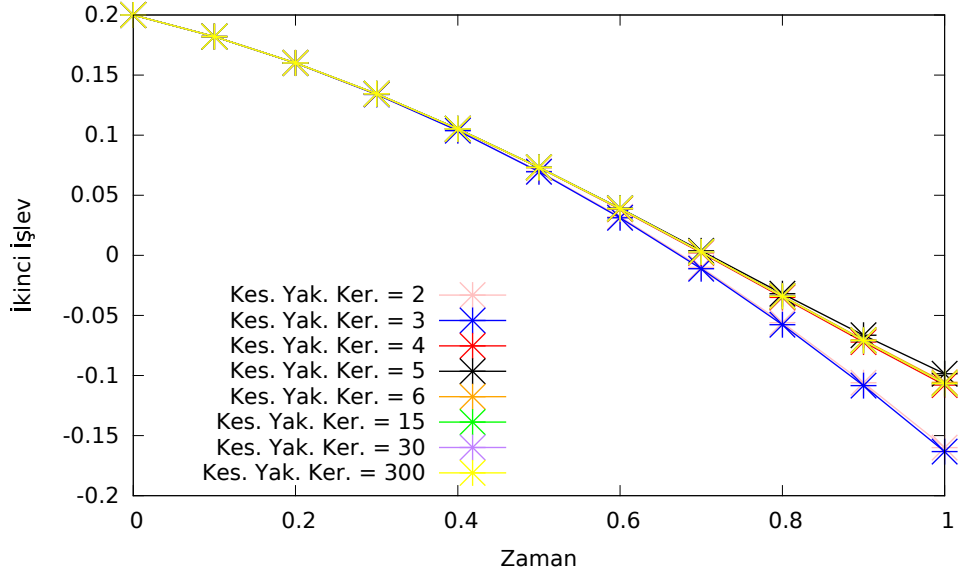
**Çizim 5.1** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi.

**Çizelge 5.3** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2	3	4	5
0.0	0.2	0.2	0.2	0.2
0.1	0.182000000000	0.181996666667	0.182002200000	0.182002294800
0.2	0.160000000000	0.159973333333	0.160061866667	0.160064900267
0.3	0.134000000000	0.133910000000	0.134358200000	0.134381236400
0.4	0.104000000000	0.103786666667	0.105203200000	0.105300275200
0.5	0.070000000000	0.069583333333	0.073041666667	0.073337916667
0.6	0.320000000000	0.031280000000	0.038451200000	0.039188364800
0.7	-0.010000000000	-0.011143333333	0.002142200000	0.003735503600
0.8	-0.560000000000	-0.057706666667	-0.035042133333	-0.031935726933
0.9	-0.106000000000	-0.108430000000	-0.072125800000	-0.066527954800
1.0	-0.160000000000	-0.163333333333	-0.108000000000	-0.098520000000

**Çizelge 5.4** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6	15	30	300
0.0	0.2	0.2	0.2	0.2
0.1	0.182002287675	0.182002287495	0.182002287495	0.182002287495
0.2	0.160064444302	0.160064422039	0.160064422039	0.160064422039
0.3	0.134376042680	0.134375676906	0.134375676906	0.134375676907
0.4	0.105271093475	0.105268469216	0.105268469216	0.105268469216
0.5	0.073226597222	0.073214664611	0.073214664610	0.073214664610
0.6	0.038855966720	0.038815380563	0.038815380534	0.038815380534
0.7	0.002897319835	0.002784532448	0.002784532107	0.002784532107
0.8	-0.033803357297	-0.034073248634	-0.034073251507	-0.034073251507
0.9	-0.070314176680	-0.070889344880	-0.070889363606	-0.070889363607
1.0	-0.105644444444	-0.106761251564	-0.106761351416	-0.106761351416



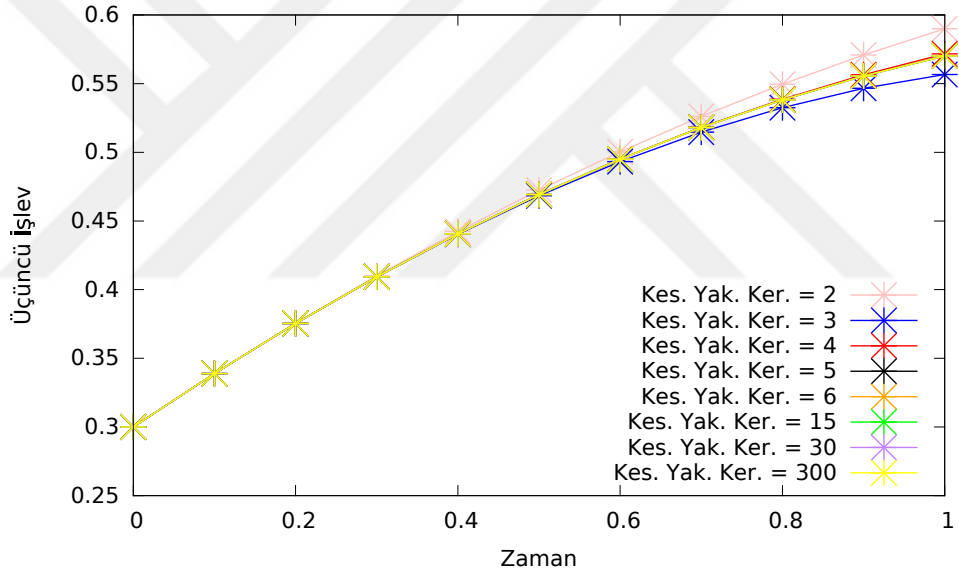
**Çizim 5.2 :** Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimi.

**Çizelge 5.5 :** Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2	3	4	5
0.0	0.3	0.3	0.3	0.3
0.1	0.338900000000	0.338866666667	0.338868166667	0.338868152000
0.2	0.375600000000	0.375333333333	0.375357333333	0.375356864000
0.3	0.410100000000	0.409200000000	0.409321500000	0.409317936000
0.4	0.442400000000	0.440266666667	0.440650666667	0.440635648000
0.5	0.472500000000	0.468333333333	0.469270833333	0.469225000000
0.6	0.500400000000	0.493200000000	0.495144000000	0.495029952000
0.7	0.526100000000	0.514666666667	0.518268166667	0.518021664000
0.8	0.549600000000	0.532533333333	0.538677333333	0.538196736000
0.9	0.570900000000	0.546600000000	0.556441500000	0.555575448000
1.0	0.590000000000	0.556666666667	0.571666666667	0.570200000000

**Çizelge 5.6 :** Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6	15	30	300
0.0	0.3	0.3	0.3	0.3
0.1	0.338868151995	0.338868152011	0.338868152011	0.338868152011
0.2	0.375356863715	0.375356865389	0.375356865389	0.375356865389
0.3	0.409317932760	0.409317956605	0.409317956605	0.409317956605
0.4	0.440635629796	0.440635773876	0.440635773876	0.440635773876
0.5	0.469224930556	0.469225459170	0.469225459169	0.469225459169
0.6	0.495029744640	0.495031097890	0.495031097888	0.495031097888
0.7	0.518021141116	0.518023620305	0.518023620281	0.518023620281
0.8	0.538195570916	0.538198309940	0.538198309723	0.538198309723
0.9	0.555573086040	0.555571796276	0.555571794775	0.555571794775
1.0	0.570195555556	0.570178460094	0.570178451583	0.570178451583



**Çizim 5.3 :** Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimi.

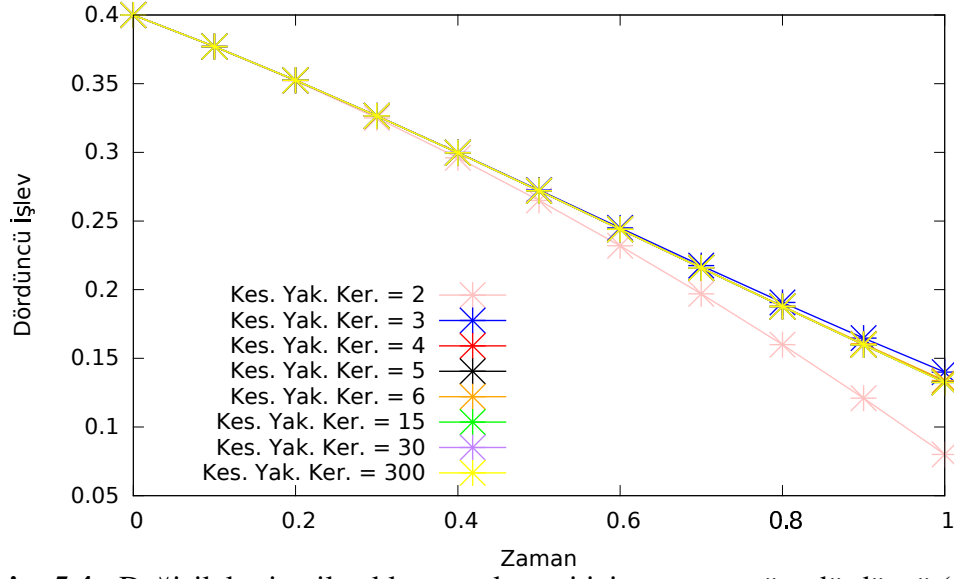
**Çizelge 5.7** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2	3	4	5
0.0	0.4	0.4	0.4	0.4
0.1	0.377000000000	0.377060000000	0.377059266667	0.377059266400
0.2	0.352000000000	0.352480000000	0.352468266667	0.352468258133
0.3	0.325000000000	0.326620000000	0.326560600000	0.326560535200
0.4	0.296000000000	0.299840000000	0.299652266667	0.299651993600
0.5	0.265000000000	0.272500000000	0.272041666667	0.272040833333
0.6	0.232000000000	0.244960000000	0.244009600000	0.244007526400
0.7	0.197000000000	0.217580000000	0.215819266667	0.215814784800
0.8	0.160000000000	0.190720000000	0.187716266667	0.187707528533
0.9	0.121000000000	0.164740000000	0.159928600000	0.159912853600
1.0	0.080000000000	0.140000000000	0.132666666667	0.132640000000

**Çizelge 5.8** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6	15	30	300
0.0	0.4	0.4	0.4	0.4
0.1	0.377059267629	0.377059267449	0.377059267449	0.377059267449
0.2	0.352468336782	0.352468313902	0.352468313902	0.352468313902
0.3	0.326561431060	0.326561044675	0.326561044675	0.326561044675
0.4	0.299657027129	0.299654175718	0.299654175718	0.299654175718
0.5	0.272060034722	0.272046685354	0.272046685352	0.272046685352
0.6	0.244064861440	0.244018051710	0.244018051686	0.244018051686
0.7	0.215959362349	0.215825034900	0.215825034614	0.215825034614
0.8	0.188029674382	0.187697070382	0.187697068000	0.187697068000
0.9	0.160565935540	0.159830642172	0.159830626763	0.159830626763
1.0	0.133868888889	0.132383268911	0.132383187364	0.132383187364





**Çizim 5.4 :** Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.

Burada kesimcil yaklaşım kertesini artırıldığında işlevlerin değerlerinin birbirlerine çok çok yaklaştığı gözlenmektedir.

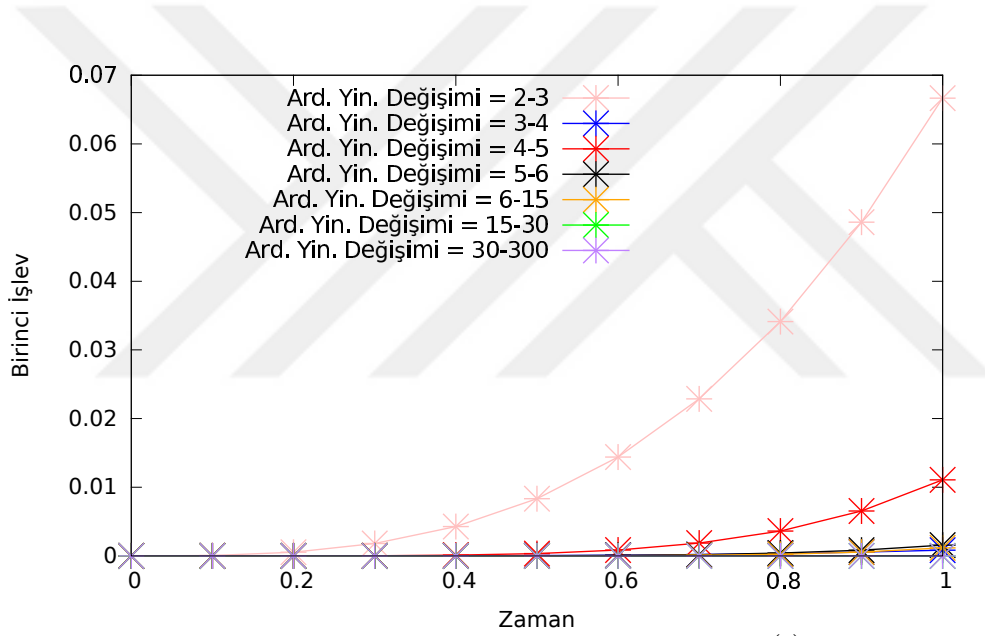
$a_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 0.2$ ,  $a_3 = 0.3$  ve  $a_4 = 0.4$  başlangıç koşulları altında elde edilen işlevlerin 2. ve 3., 3. ve 4., 4. ve 5., 5. ve 6., 6. ve 15., 15. ve 30., 30. ve 300. ardışık yineleyiş değişimlerinde 0.1 adımda ve 0 ile 1 zaman aralığında çizim ve çizelge gösterimleri aşağıdaki gibidir:

**Çizelge 5.9 :** Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2-3	3-4	4-5	5-6
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000066666667	0.000000083333	0.000000110667	0.000000001580
0.2	0.000533333333	0.000001333333	0.000003541333	0.000000101120
0.3	0.001800000000	0.000006750000	0.000026892000	0.000001151820
0.4	0.004266666667	0.000021333333	0.000113322667	0.000006471680
0.5	0.008333333333	0.000052083333	0.000345833333	0.000024687500
0.6	0.014400000000	0.000108000000	0.000860544000	0.000073716480
0.7	0.022866666667	0.000200083333	0.001859974667	0.000185885420
0.8	0.034133333333	0.000341333333	0.003626325333	0.000414187520
0.9	0.048600000000	0.000546749999	0.006534755999	0.000839676780
1.0	0.066666666667	0.000833333333	0.011066666666	0.001580000000

**Çizelge 5.10** : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6-15	15-30	30-300
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000000000104	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.000000013589	0.000000000000	0.000000000000
0.3	0.000000236489	0.000000000000	0.000000000000
0.4	0.000001801330	0.000000000000	0.000000000000
0.5	0.000008717339	0.000000000000	0.000000000000
0.6	0.000031643271	0.000000000002	0.000000000000
0.7	0.000094134023	0.000000000023	0.000000000000
0.8	0.000241958397	0.000000000207	0.000000000000
0.9	0.000556004387	0.000000001469	0.000000000000
1.0	0.001169174549	0.000000008464	0.000000000000



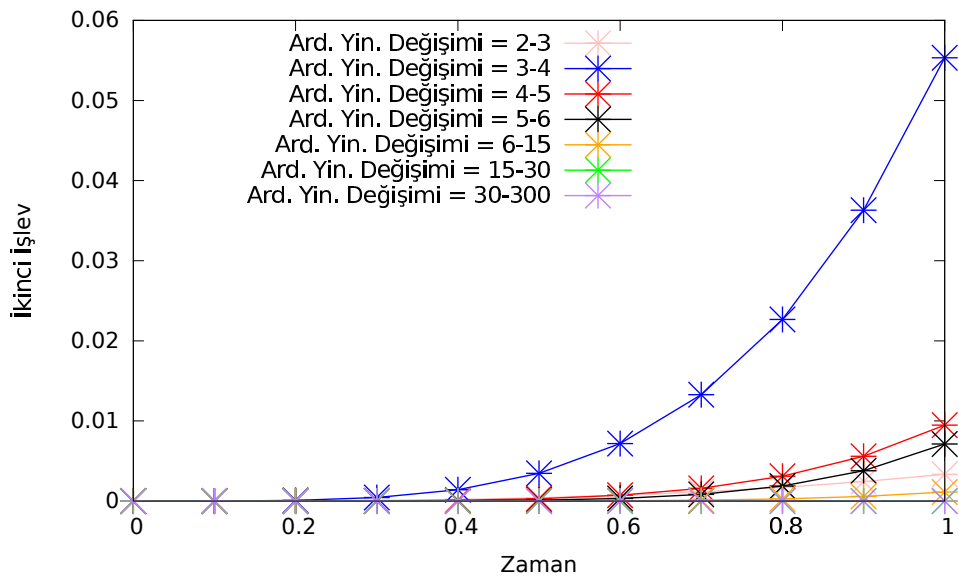
**Çizim 5.5** : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi.

**Çizelge 5.11** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2-3	3-4	4-5	5-6
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000003333333	0.000005533333	0.000000094800	0.000000071240
0.2	0.000026666667	0.000088533333	0.000003033600	0.000000455964
0.3	0.000090000000	0.000448200000	0.000023036400	0.000005193720
0.4	0.000213333000	0.001416533000	0.000097075200	0.000029181724
0.5	0.000416667000	0.003458333000	0.000296250000	0.000111319000
0.6	0.288720000000	0.007171200000	0.000737165000	0.000332398000
0.7	0.001143333000	0.013285533000	0.001593304000	0.000838184000
0.8	0.502293333000	0.022664533000	0.003106406000	0.001867630000
0.9	0.002430000000	0.036304200000	0.005597845000	0.003786222000
1.0	0.003333333000	0.055333333000	0.009480000000	0.007124444000

**Çizelge 5.12** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6-15	15-30	30-300
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000000000180	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.000000022264	0.000000000000	0.000000000000
0.3	0.000000365774	0.000000000000	0.000000000000
0.4	0.000002624259	0.000000000000	0.000000000000
0.5	0.000011932611	0.000000000001	0.000000000000
0.6	0.000040586158	0.000000000029	0.000000000000
0.7	0.000112787000	0.000000000341	0.000000000000
0.8	0.000269891000	0.000000002872	0.000000000000
0.9	0.000575168000	0.000000018726	0.000000000000
1.0	0.001116807000	0.000000099852	0.000000000000



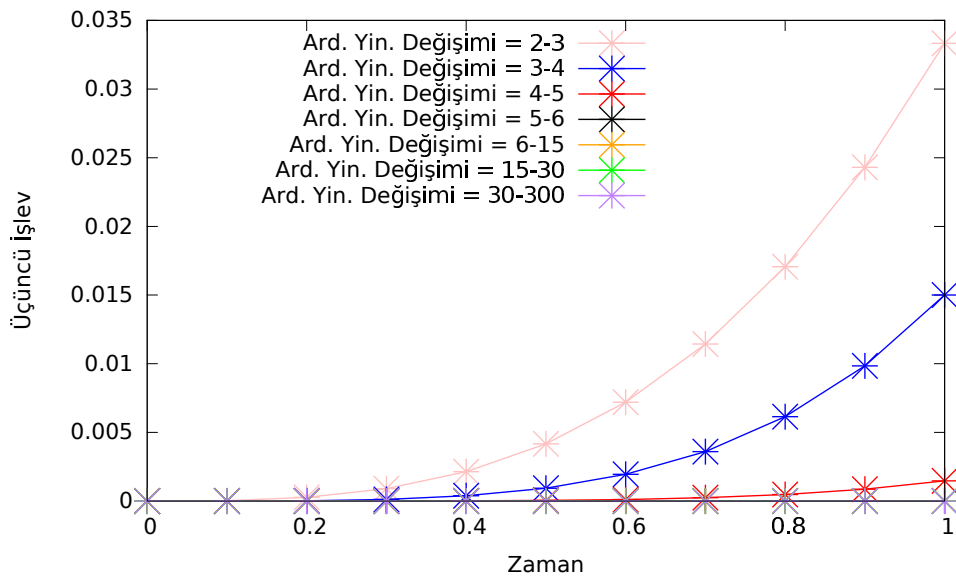
**Çizim 5.6** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimi.

**Çizelge 5.13** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2-3	3-4	4-5	5-6
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000033333333	0.000001500000	0.000000014667	0.000000000004
0.2	0.000266667000	0.000024000000	0.000000469333	0.000000000284
0.3	0.000900000000	0.000121500000	0.000003564000	0.000000003240
0.4	0.002133333000	0.000384000000	0.000015018667	0.000000018204
0.5	0.004166667000	0.000937500000	0.000045833333	0.000000069444
0.6	0.007200000000	0.001944000000	0.000114048000	0.000000207360
0.7	0.011433333000	0.003601500000	0.000246503000	0.000000522884
0.8	0.017066667000	0.006144000000	0.000480597000	0.000001165084
0.9	0.024300000000	0.009841500000	0.000866052000	0.000002361960
1.0	0.033333333000	0.015000000000	0.001466667000	0.000004444444

**Çizelge 5.14** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6-15	15-30	30-300
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000000000015	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.000000001674	0.000000000000	0.000000000000
0.3	0.000000023844	0.000000000000	0.000000000000
0.4	0.000000144080	0.000000000000	0.000000000000
0.5	0.000000528614	0.000000000000	0.000000000000
0.6	0.000001353250	0.000000000002	0.000000000000
0.7	0.000002479190	0.000000000024	0.000000000000
0.8	0.000002739024	0.000000000216	0.000000000000
0.9	0.000001289764	0.000000001501	0.000000000000
1.0	0.000017095462	0.000000008511	0.000000000000



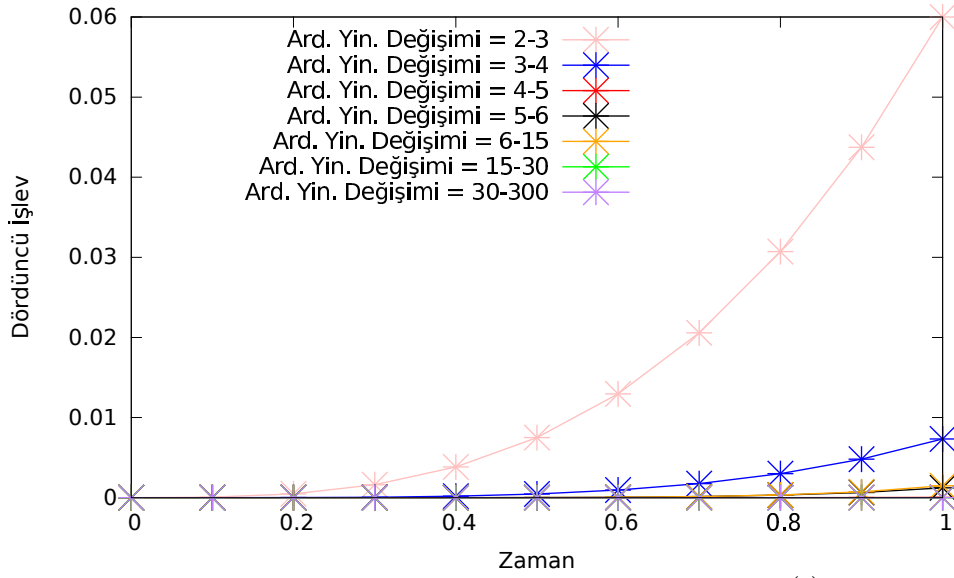
**Çizim 5.7** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimi.

**Çizelge 5.15** : Ardışık yineleyişlerdeki değışime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2-3	3-4	4-5	5-6
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000060000000	0.000000733333	0.000000000267	0.000000001229
0.2	0.000480000000	0.000011733333	0.0000000008533	0.0000000078649
0.3	0.001620000000	0.000059400000	0.0000000064800	0.0000000895860
0.4	0.003840000000	0.000187733000	0.000000273067	0.000005033529
0.5	0.007500000000	0.000458333000	0.000000833333	0.000019201389
0.6	0.012960000000	0.000950400000	0.000002073600	0.000057335040
0.7	0.020580000000	0.001760733000	0.000004481867	0.000144578000
0.8	0.030720000000	0.003003733000	0.000008738133	0.000322146000
0.9	0.043740000000	0.004811400000	0.000015746400	0.000653082000
1.0	0.060000000000	0.007333333000	0.000026666667	0.001228889000

**Çizelge 5.16** : Ardışık yineleyişlerdeki değışime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6-15	15-30	30-300
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000000000180	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.000000022880	0.000000000000	0.000000000000
0.3	0.000000386385	0.000000000000	0.000000000000
0.4	0.000002851411	0.000000000000	0.000000000000
0.5	0.000013349368	0.000000000001	0.000000000000
0.6	0.000046809730	0.000000000025	0.000000000000
0.7	0.000134327000	0.000000000286	0.000000000000
0.8	0.000332604000	0.000000002382	0.000000000000
0.9	0.000735293000	0.000000015408	0.000000000000
1.0	0.001485620000	0.000000081547	0.000000000000



**Çizim 5.8** : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.

Buradan da imsiz yanılığın (ing: absolute error) azalış gösterdiği ve özellikle 5. ve 6., 6. ve 15., 15. ve 30., 30. ve 300. ardışık yineleme değişimlerinde sıfırlandığı gözlemlenmektedir. Bu da yakınsayışı göstermektedir.

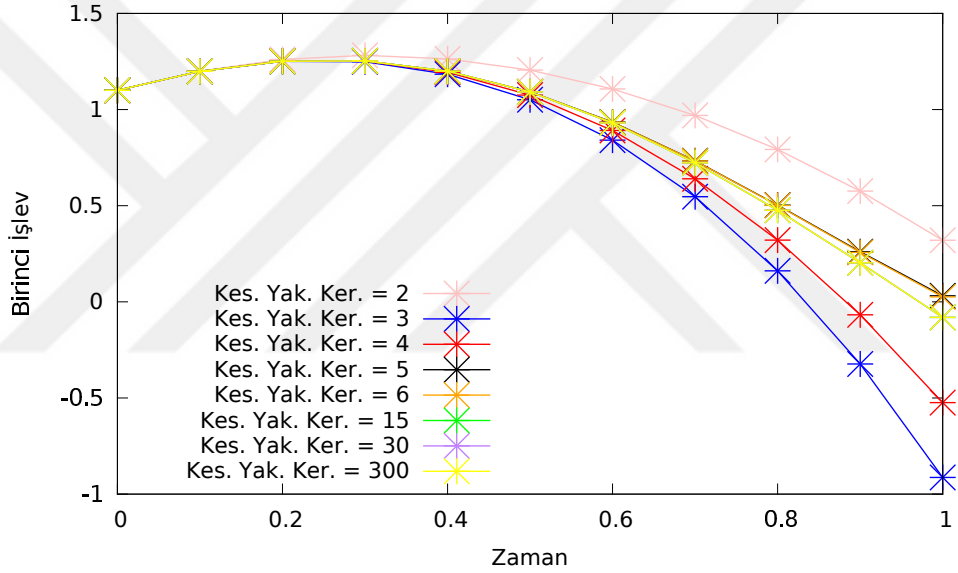
$a_1 = 1.1$ ,  $a_2 = 1.2$ ,  $a_3 = 1.3$  ve  $a_4 = 1.4$  başlangıç koşulları altında 2., 3., 4., 5., 6., 15., 30. ve 300. kesimcil yaklaşım kertesinde elde edilen işlevlerin değerlerinin 0.1 adımda ve 0 ile 1 zaman aralığındaki çizim ve çizelge gösterimleri aşağıdaki gibidir:

**Çizelge 5.17** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2	3	4	5
0.0	1.1	1.1	1.1	1.1
0.1	1.200200000000	1.198966666667	1.199005583333	1.199011140667
0.2	1.260800000000	1.250933333333	1.251556000000	1.251733834667
0.3	1.281800000000	1.248500000000	1.251652250000	1.253002682000
0.4	1.263200000000	1.184266666667	1.194229333333	1.199920042667
0.5	1.120500000000	1.050833333333	1.075156250000	1.092522916667
0.6	1.107200000000	0.840800000000	0.891236000000	0.934449824000
0.7	0.969800000000	0.546766666667	0.640205583333	0.733607684667
0.8	0.792800000000	0.161333333333	0.320736000000	0.502838698667
0.9	0.576200000000	-0.322900000000	-0.0675677500	0.260587226000
1.0	0.320000000000	-0.913333333333	-0.5241666667	0.031566666667

**Çizelge 5.18** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6	15	30	300
0.0	1.1	1.1	1.1	1.1
0.1	1.199005583333	1.199011140667	1.199011120408	1.199011120407
0.2	1.251556000000	1.251733834667	1.251731641070	1.251731641070
0.3	1.251652250000	1.253002682000	1.252967764859	1.252967764859
0.4	1.194229333333	1.199920042667	1.199670912161	1.199670912161
0.5	1.075156250000	1.092522916667	1.091385667375	1.091385667375
0.6	0.891236000000	0.934449824000	0.930550788724	0.930550788724
0.7	0.640205583333	0.733607684667	0.722661231688	0.722661231689
0.8	0.320736000000	0.502838698667	0.476322909577	0.476322909617
0.9	-0.067567750000	0.260587226000	0.203235116484	0.203235118070
1.0	-0.524166666667	0.031566666667	-0.081887717977	-0.081887675525



**Çizim 5.9** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi.

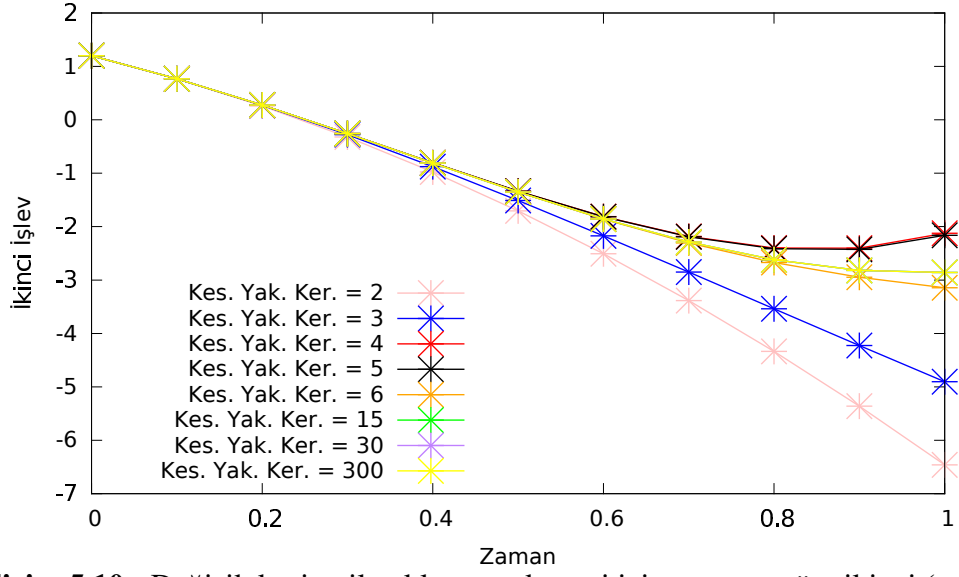
**Çizelge 5.19** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2	3	4	5
0.0	1.2	1.2	1.2	1.2
0.1	0.767000000000	0.768556666667	0.768834533333	0.768834163467
0.2	0.260000000000	0.272453333333	0.276899200000	0.276887364267
0.3	-0.321000000000	-0.278970000000	-0.256462800000	-0.256552677600
0.4	-0.976000000000	-0.876373333333	-0.805239466667	-0.805618210133
0.5	-1.705000000000	-1.510416666667	-1.336750000000	-1.337905833333
0.6	-2.508000000000	-2.171760000000	-1.811644800000	-1.814520883200
0.7	-3.385000000000	-2.851063333333	-2.183905466667	-2.190121815733
0.8	-4.336000000000	-3.538986666667	-2.400844800000	-2.412964590933
0.9	-5.361000000000	-4.226190000000	-2.403106800000	-2.424947056800
1.0	-6.460000000000	-4.903333333333	-2.124666666667	-2.161653333333

**Çizelge 5.20** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6	15	30	300
0.0	1.2	1.2	1.2	1.2
0.1	0.768833181331	0.768833176719	0.768833176719	0.768833176719
0.2	0.276824507591	0.276824514355	0.276824514355	0.276824514355
0.3	-0.257268654420	-0.257258262492	-0.257258262495	-0.257258262495
0.4	-0.809641037369	-0.809487762127	-0.809487762156	-0.809487762156
0.5	-1.353251701389	-1.352178704113	-1.352178698652	-1.352178698652
0.6	-1.860343399680	-1.855369015315	-1.855368798286	-1.855368798286
0.7	-2.305669081709	-2.288079702555	2.2880758475488	-2.288075847537
0.8	-2.670425534009	-2.619222406417	-2.619179508837	-2.619179508153
0.9	-2.946894158580	-2.818369628290	-2.818025546066	-2.818025521233
1.0	-3.143788888889	-2.857269372990	-2.855113982898	-2.855113371963





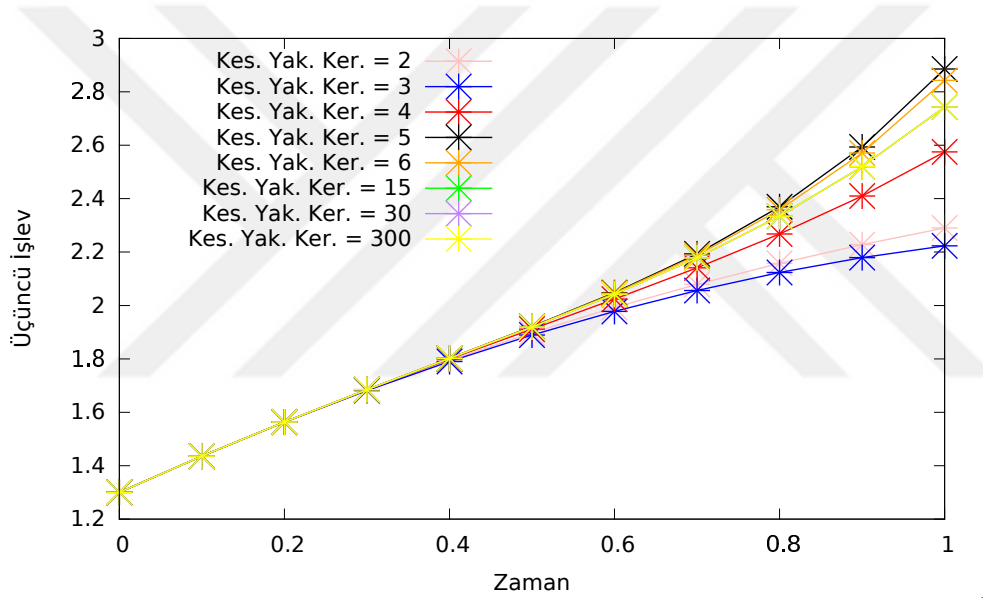
**Çizim 5.10** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimi.

**Çizelge 5.21** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2	3	4	5
0.0	1.3	1.3	1.3	1.3
0.1	1.435900000000	1.435833333333	1.435868500000	1.435871605333
0.2	1.563600000000	1.563066666667	1.563629333333	1.563728704000
0.3	1.683100000000	1.681300000000	1.684148500000	1.684903096000
0.4	1.794400000000	1.790133333333	1.799136000000	1.802315861333
0.5	1.897500000000	1.889166666667	1.911145833333	1.920850000000
0.6	1.992400000000	1.197800000000	2.023576000000	2.047723072000
0.7	2.079100000000	2.056233333333	2.140668500000	2.192859837333
0.8	2.157600000000	2.123466666667	2.267509333333	2.369264896000
0.9	2.227900000000	2.179300000000	2.410028500000	2.593395328000
1.0	2.290000000000	2.223333333333	2.575000000000	2.885533333333

**Çizelge 5.22** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6	15	30	300
0.0	1.3	1.3	1.3	1.3
0.1	1.435871562918	1.435871549713	1.435871549713	1.435871549713
0.2	1.563725989404	1.563724297697	1.563724297697	1.563724297697
0.3	1.684872175060	1.684843446512	1.684843446510	1.684843446510
0.4	1.802142127218	1.801929788191	1.801929788012	1.801929788012
0.5	1.920187256944	1.919195994397	1.919195988147	1.919195988147
0.6	2.045744131840	2.042294772539	2.042294659428	2.042294659428
0.7	2.187869689638	2.178098048882	2.178096751898	2.178096751898
0.8	2.358145912604	2.334399124408	2.334388490006	2.334388490030
0.9	2.570853962740	2.519672891565	2.519605463928	2.519605464872
1.0	2.843117777778	2.743115679957	2.742766861312	2.742766886563



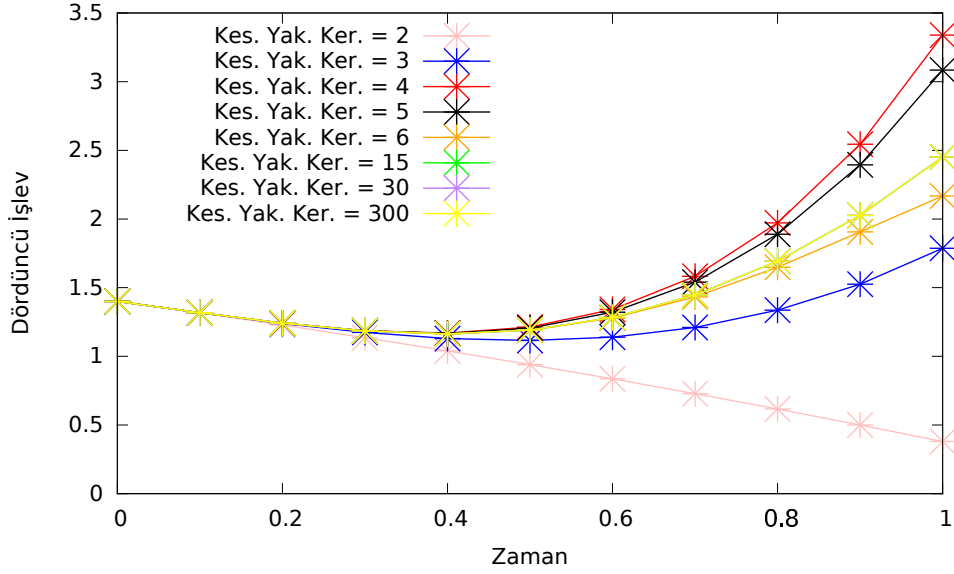
**Çizim 5.11** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre zamana göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimi.

**Çizelge 5.23** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2	3	4	5
0.0	1.4	1.4	1.4	1.4
0.1	1.316000000000	1.317406666667	1.317561933333	1.317559388400
0.2	1.228000000000	1.239253333333	1.241737600000	1.241656162133
0.3	1.136000000000	1.173980000000	1.186556600000	1.185938181200
0.4	1.040000000000	1.130026666667	1.169774933333	1.167168921600
0.5	0.940000000000	1.115833333333	1.212875000000	1.204922083333
0.6	0.836000000000	1.139840000000	1.341065600000	1.321276198400
0.7	0.728000000000	1.210486666667	1.583281933333	1.540509238800
0.8	0.616000000000	1.336213333333	1.972185600000	1.888793224533
0.9	0.500000000000	1.525460000000	2.544164600000	2.393888831600
1.0	0.380000000000	1.786666666667	3.339333333333	3.084840000000

**Çizelge 5.24** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesine göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6	15	30	300
0.0	1.4	1.4	1.4	1.4
0.1	1.317558470996	1.317558463520	1.317558463520	1.317558463520
0.2	1.241597448248	1.241596995262	1.241596995262	1.241596995262
0.3	1.185269393360	1.185270644321	1.185270644321	1.185270644320
0.4	1.163411232996	1.163489691868	1.163489691895	1.163489691895
0.5	1.190587638889	1.191293884427	1.191293888776	1.191293888776
0.6	1.278473776640	1.282184338946	1.282184480393	1.282184480394
0.7	1.432577523316	1.446880302788	1.446882652108	1.446882652115
0.8	1.648301153849	1.693001832978	1.693027127371	1.693027127770
0.9	1.906342496240	2.026095322126	2.026294387000	2.026294401476
1.0	2.167435555556	2.452106209978	2.453338475704	2.453338831463



**Çizim 5.12** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.

Burada başlangıç koşulları değiştirildiğinde işlevin değerlerinin değiştiği gözlemlenmektedir. Kesimcil yaklaşım kertesini artırıldığında işlevlerin değerlerinin birbirlerine çok çok yaklaştığı gözlenmektedir.

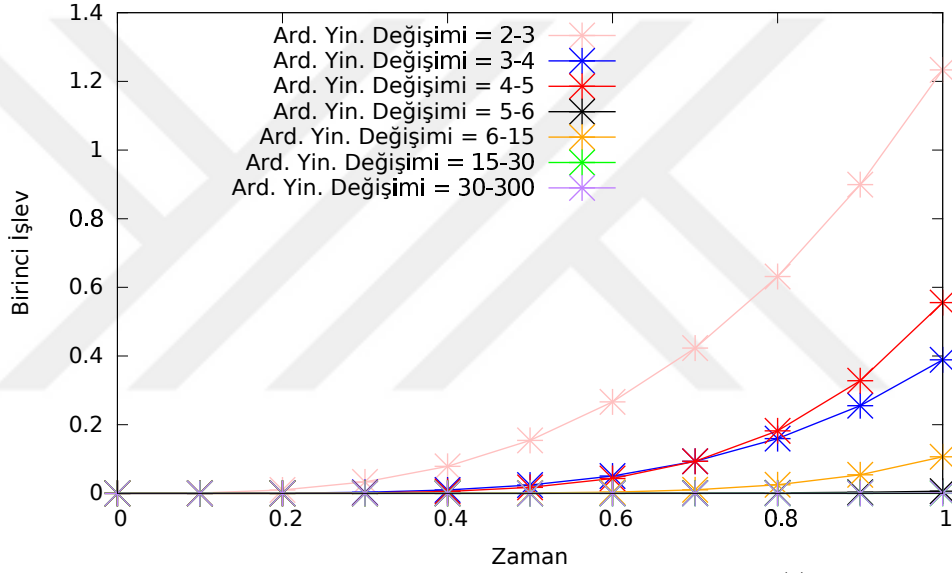
$a_1 = 1.1, a_2 = 1.2, a_3 = 1.3$  ve  $a_4 = 1.4$  başlangıç koşulları altında elde edilen işlevlerin 2. ve 3., 3. ve 4., 4. ve 5., 5. ve 6., 6. ve 15., 15. ve 30., 30. ve 300. ardışık yineleyiş değişimlerinde 0.1 adımda ve 0 ile 1 zaman aralığında çizim ve çizelge gösterimleri aşağıdaki gibidir:

**Çizelge 5.25** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2-3	3-4	4-5	5-6
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.001233333000	0.000038916667	0.000005557333	0.000000006164
0.2	0.009866667000	0.000622667000	0.000177835000	0.000000394524
0.3	0.033300000000	0.003152250000	0.001350432000	0.000004493880
0.4	0.078933333000	0.009962667000	0.005690709000	0.000025249564
0.5	0.069666667000	0.024322917000	0.017366667000	0.000096319444
0.6	0.266400000000	0.050436000000	0.043213824000	0.000287608000
0.7	0.423033333000	0.093438917000	0.093402101000	0.000725241000
0.8	0.631466667000	0.159402667000	0.182102699000	0.001615972000
0.9	0.899100000000	0.255332250000	0.328154976000	0.003276039000
1.0	1.233333333000	0.389166667000	0.555733333000	0.006164444000

**Çizelge 5.26** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6-15	15-30	30-300
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000000014094	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.000001799072	0.000000000000	0.000000000000
0.3	0.000030423257	0.000000000004	0.000000000000
0.4	0.000223881000	0.000000000357	0.000000000000
0.5	0.001040917000	0.000000012522	0.000000000000
0.6	0.003611200000	0.000000227196	0.000000000000
0.7	0.010218600000	0.000002612550	0.000000000001
0.8	0.024878325000	0.000021491670	0.000000000040
0.9	0.053939285000	0.000136786000	0.000000001586
1.0	0.106579231000	0.000710709000	0.000000042452



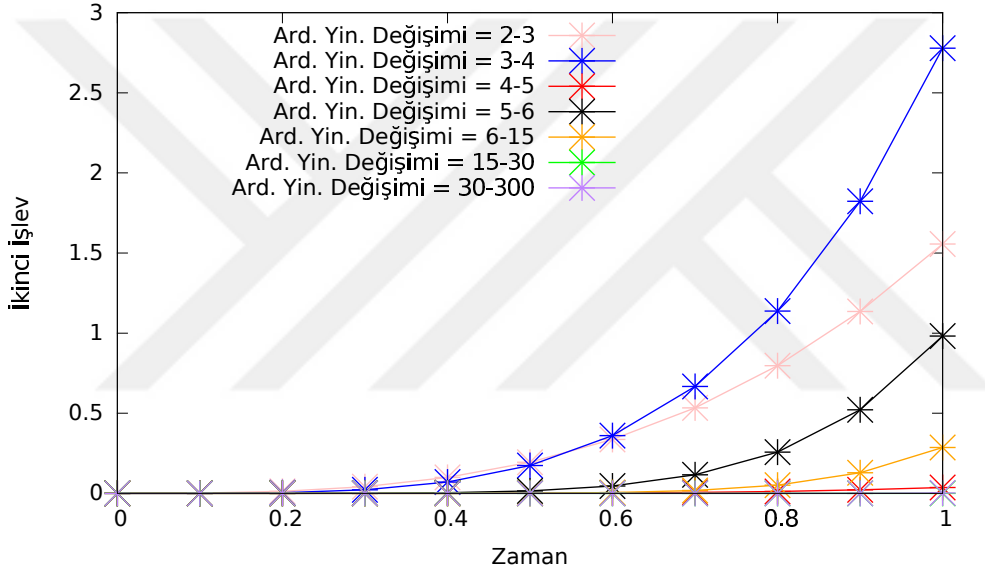
**Çizim 5.13** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi.

**Çizelge 5.27** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2-3	3-4	4-5	5-6
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.001556667000	0.000277867000	0.000000369867	0.000000982136
0.2	0.012453333000	0.004445867000	0.000011835733	0.000062856676
0.3	0.042030000000	0.022507200000	0.000089877600	0.000715977000
0.4	0.099626667000	0.071133867000	0.000378743000	0.004022827000
0.5	0.194583333000	0.173666667000	0.001155833000	0.015345868000
0.6	0.336240000000	0.360115200000	0.002876083000	0.045822516000
0.7	0.533936667000	0.667157867000	0.006216349000	0.115547266000
0.8	0.797013333000	1.138141867000	0.012119791000	0.257460943000
0.9	1.134810000000	1.823083200000	0.021840257000	0.521947102000
1.0	1.556666667000	2.778666667000	0.036986667000	0.982135556000

**Çizelge 5.28** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6-15	15-30	30-300
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000000004612	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.000000006764	0.000000000000	0.000000000000
0.3	0.000010391927	0.000000000002	0.000000000000
0.4	0.000153275000	0.000000000029	0.000000000000
0.5	0.001072997000	0.000000005461	0.000000000000
0.6	0.004974384000	0.000000217029	0.000000000000
0.7	0.017589379000	0.000003855006	0.000000000011
0.8	0.051203128000	0.000042897581	0.000000000683
0.9	0.128524530000	0.000344082000	0.000000024833
1.0	0.286519516000	0.002155390000	0.000000610934



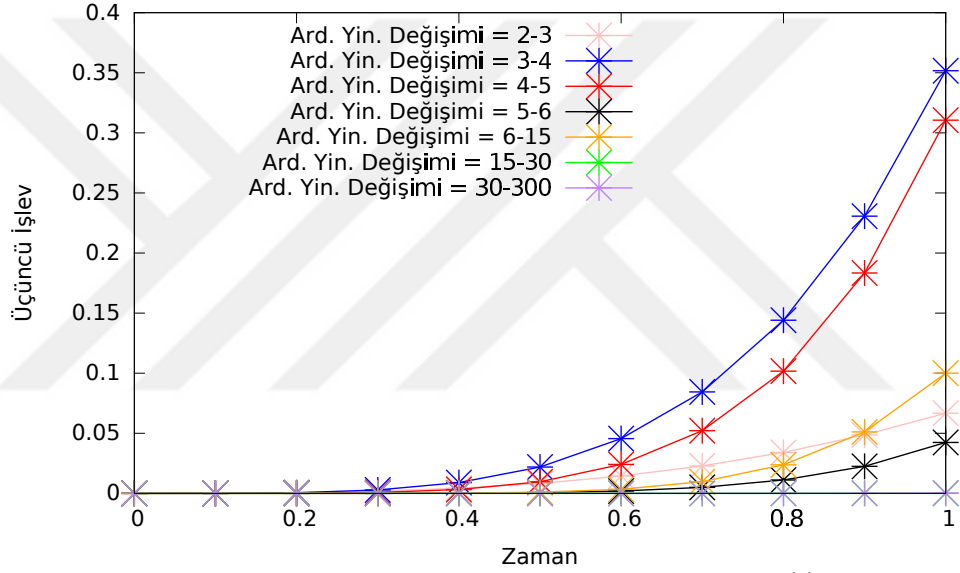
**Çizim 5.14** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimi.

**Çizelge 5.29** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2-3	3-4	4-5	5-6
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000066666667	0.000035166667	0.000003105333	0.000000042416
0.2	0.000533333000	0.000562667000	0.000099370667	0.000002714596
0.3	0.001800000000	0.002848500000	0.000754596000	0.000030920940
0.4	0.004266667000	0.009002667000	0.003179861000	0.000173734000
0.5	0.008333333000	0.021979167000	0.009704167000	0.000662743000
0.6	0.017960000000	0.082577600000	0.024147072000	0.001978940000
0.7	0.022866667000	0.084435167000	0.052191337000	0.004990148000
0.8	0.034133333000	0.144042667000	0.101755563000	0.011118983000
0.9	0.048600000000	0.230728500000	0.183366828000	0.022541365000
1.0	0.066666667000	0.351666667000	0.310533333000	0.042415556000

**Çizelge 5.30** : Ardışık yineleyişlerdeki değışime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin değeri.

Zaman	6-15	15-30	30-300
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000000013205	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.000001691707	0.000000000000	0.000000000000
0.3	0.000028728548	0.000000000002	0.000000000000
0.4	0.000212339000	0.000000000179	0.000000000000
0.5	0.000991263000	0.000000006250	0.000000000000
0.6	0.003449359000	0.000000113110	0.000000000000
0.7	0.009771641000	0.000001296983	0.000000000000
0.8	0.023746788000	0.000010634402	0.000000000024
0.9	0.051181071000	0.000067427638	0.000000000945
1.0	0.100002098000	0.000348819000	0.00000025251



**Çizim 5.15** : Ardışık yineleyişlerdeki değışime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimi.

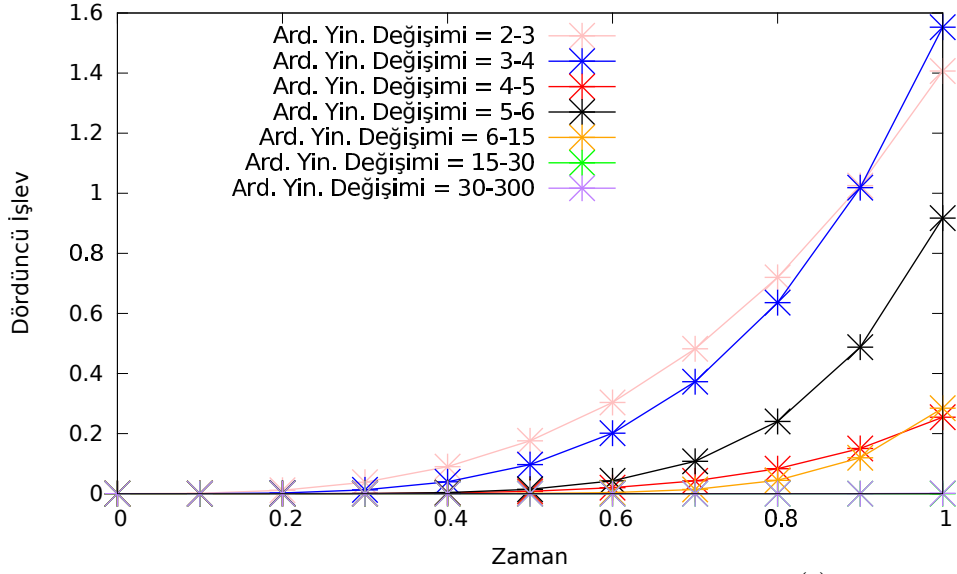
**Çizelge 5.31** : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	2-3	3-4	4-5	5-6
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.001406667000	0.000155267000	0.000002544933	0.000000917404
0.2	0.011253333000	0.002484267000	0.000081437867	0.000058713884
0.3	0.037980000000	0.012576600000	0.000618419000	0.000668788000
0.4	0.090026667000	0.039748267000	0.002606012000	0.003757689000
0.5	0.175833333000	0.097041667000	0.007952917000	0.014334444000
0.6	0.303840000000	0.201225600000	0.019789402000	0.042802422000
0.7	0.482486667000	0.372795267000	0.042772695000	0.107931715000
0.8	0.720213333000	0.635972267000	0.083392375000	0.240492071000
0.9	1.025460000000	1.018704600000	0.150275768000	0.418754633500
1.0	1.406666667000	1.552666667000	0.254493333000	0.917404444000

**Çizelge 5.32** : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin değerleri.

Zaman	6-15	15-30	30-300
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.1	0.000000007476	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.000000452986	0.000000000000	0.000000000000
0.3	0.000001250961	0.000000000001	0.000000000000
0.4	0.000078458873	0.000000000026	0.000000000000
0.5	0.000706246000	0.000000004349	0.000000000000
0.6	0.003710562000	0.000000141447	0.000000000000
0.7	0.014302779000	0.000002349320	0.000000000007
0.8	0.044700679000	0.000025294393	0.000000000399
0.9	0.119752826000	0.000199065000	0.000000014476
1.0	0.284670654000	0.001232266000	0.000000355758

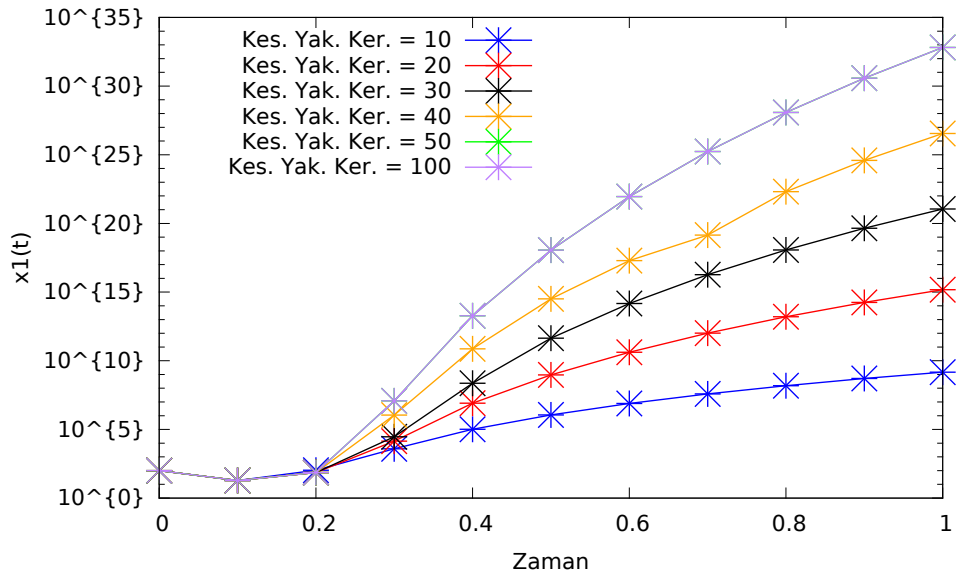




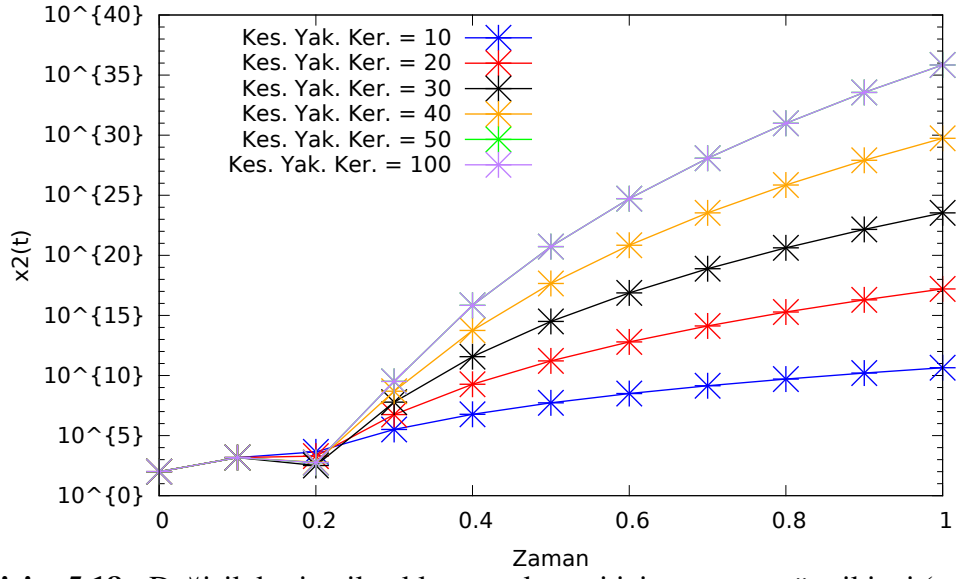
**Çizim 5.16 :** Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.

Buradan imsiz yanılığın azalış gösterdiği ve yalnızca 30. ve 300. ardışık yineleyiş değişiminde sıfırlandığı gözlemlenmektedir. Bu da başlangıç koşulu değerlerinin arttıkça yakınsayışın azaldığını gösterir.

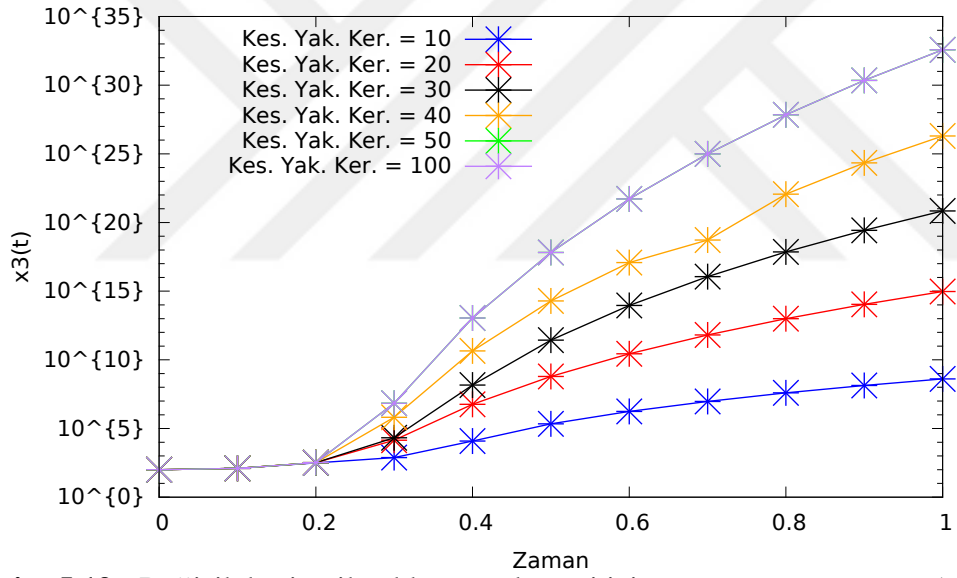
$a_1 = 100.1$ ,  $a_2 = 100.2$ ,  $a_3 = 100.3$  ve  $a_4 = 100.4$  başlangıç koşulları altında 10., 20., 30., 40., 50., 100., kesimcil yaklaşım kertesinde elde edilen işlevlerin değerlerinin 0.1 adımda ve 0 ile 1 zaman aralığındaki çizim ve çizelge gösterilimleri aşağıdaki gibidir:



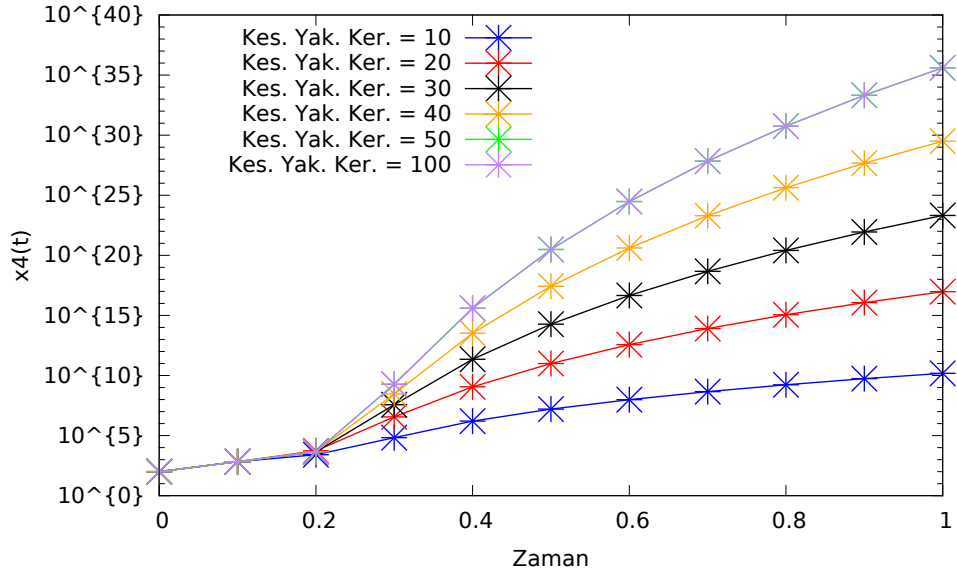
**Çizim 5.17 :** Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi.



**Çizim 5.18 :** Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimini.

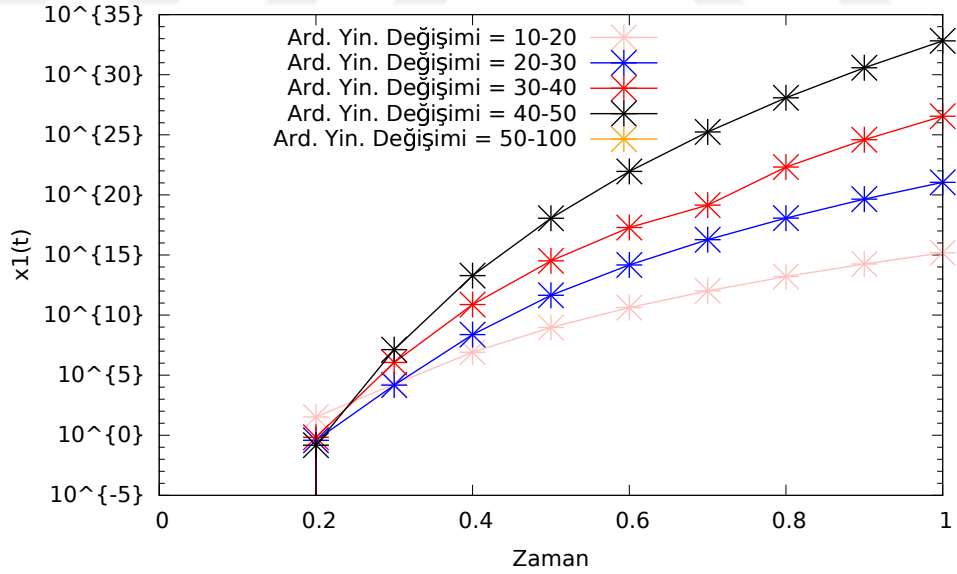


**Çizim 5.19 :** Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimini.

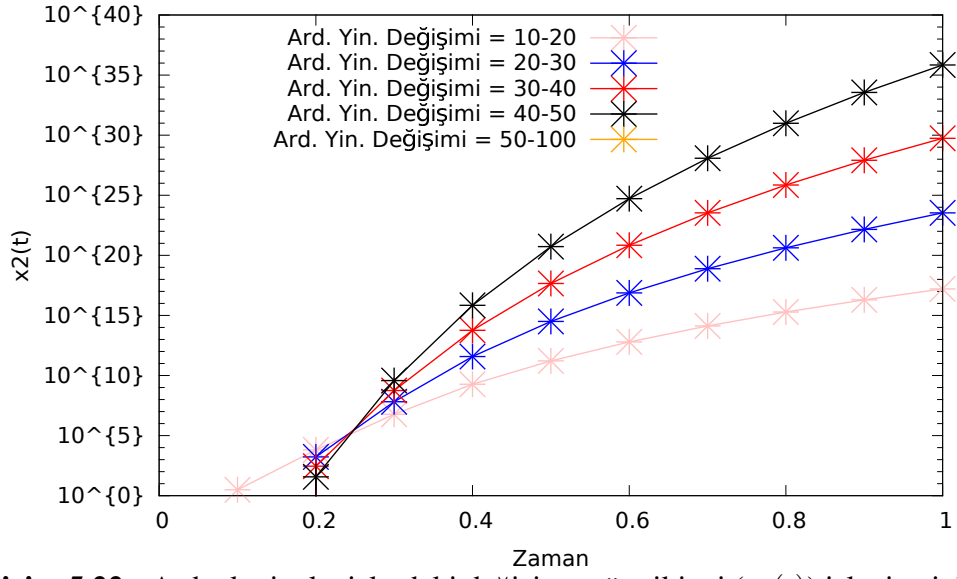


**Çizim 5.20** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesı için zamana göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.

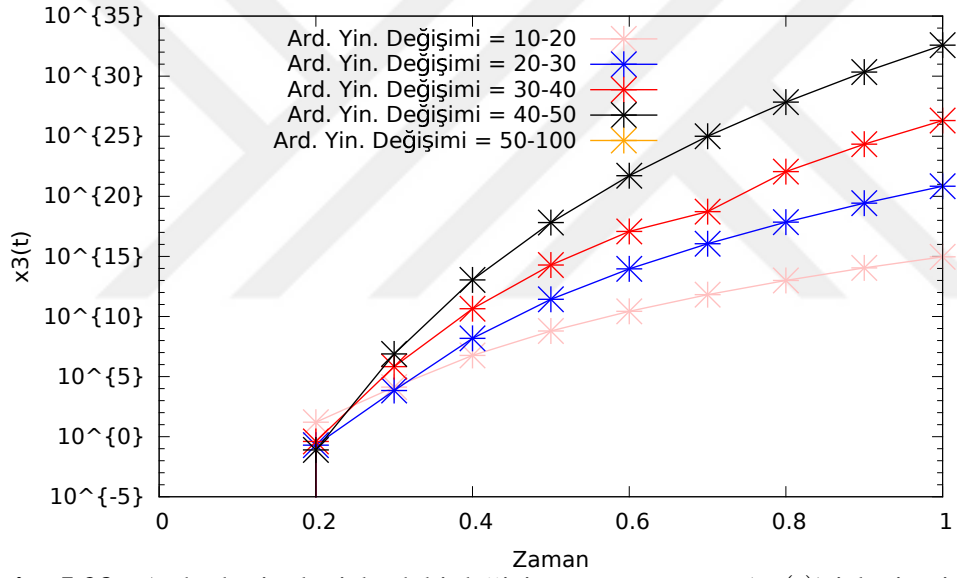
$a_1 = 100.1$ ,  $a_2 = 100.2$ ,  $a_3 = 100.3$  ve  $a_4 = 100.4$  başlangıç koşulları altında elde edilen işlevlerin 10. ve 20., 20. ve 30., 30. ve 40., 40. ve 50., 50. ve 100. ardışık yineleyiş değişimlerinde 0.1 adımda ve 0 ile 1 zaman aralığında çizim ve çizelge gösterilimleri aşağıdaki gibidir:



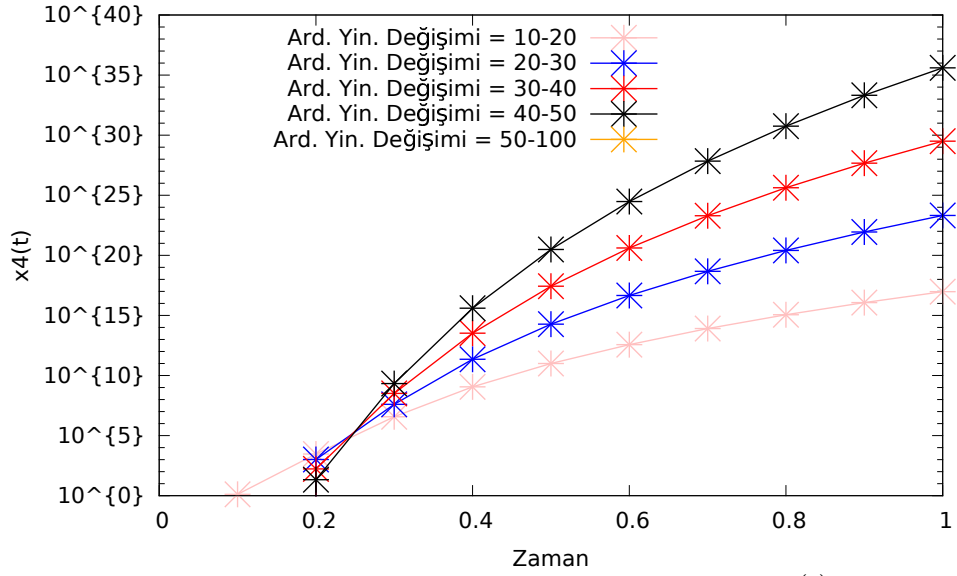
**Çizim 5.21** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi.



**Çizim 5.22** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimi.



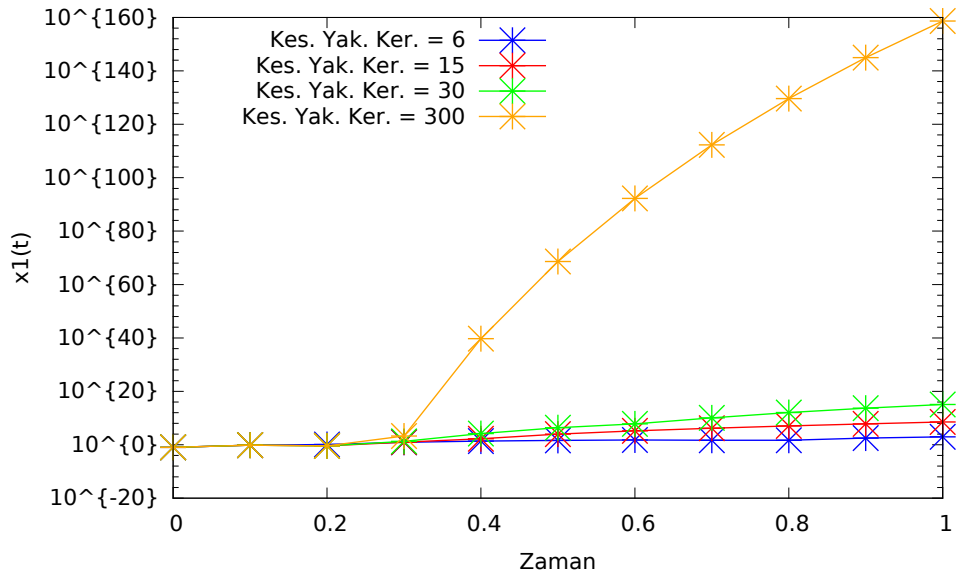
**Çizim 5.23** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimi.



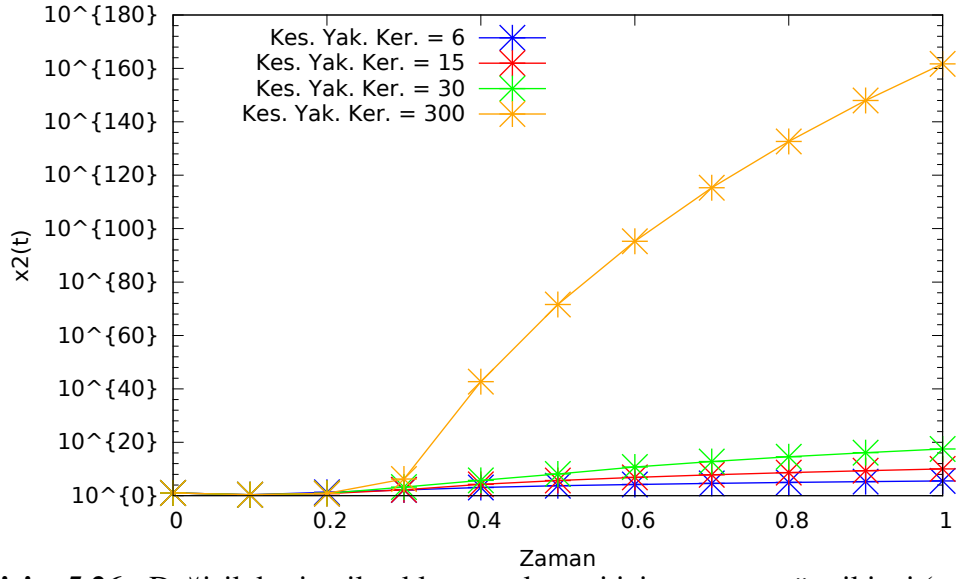
**Çizim 5.24 :** Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.

Burada başlangıç koşul değerleri artırıldığında ıraksama gözlenmektedir. Dolayısıyla başlangıç koşulu değerleri ne düzeyde küçük seçilirse o düzeyde anlamlı sonuçlar elde edileceği ve yakınsayışın artacağı dile getirilebilir.

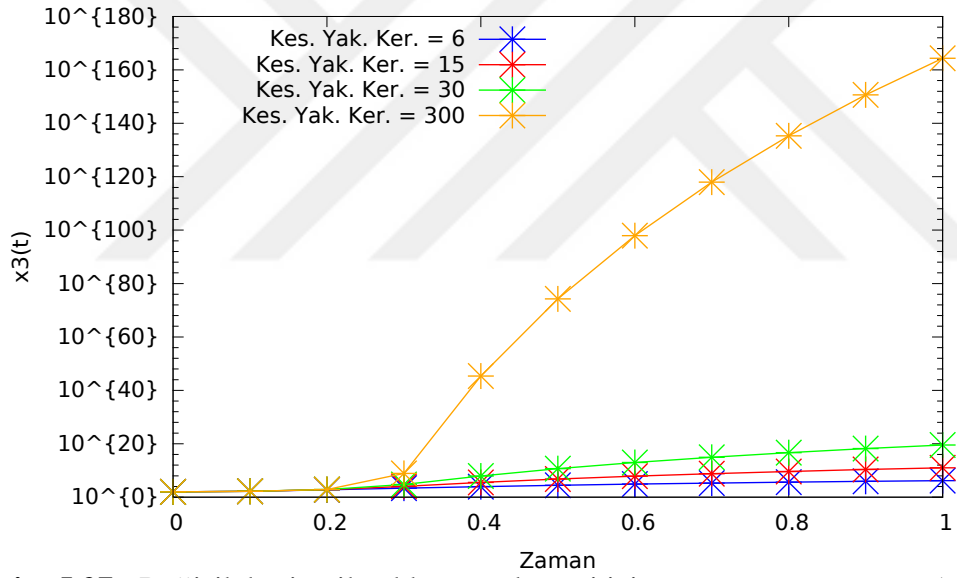
$a_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 10.1$ ,  $a_3 = 100.1$  ve  $a_4 = 50.1$  başlangıç koşulları altında 6., 15., 30., 300. kesimcil yaklaşım mertelerinde elde edilen işlevlerin değerlerinin 0.1 adımda ve 0 ile 1 zaman aralığındaki çizim ve çizelge gösterilimleri aşağıdaki gibidir:



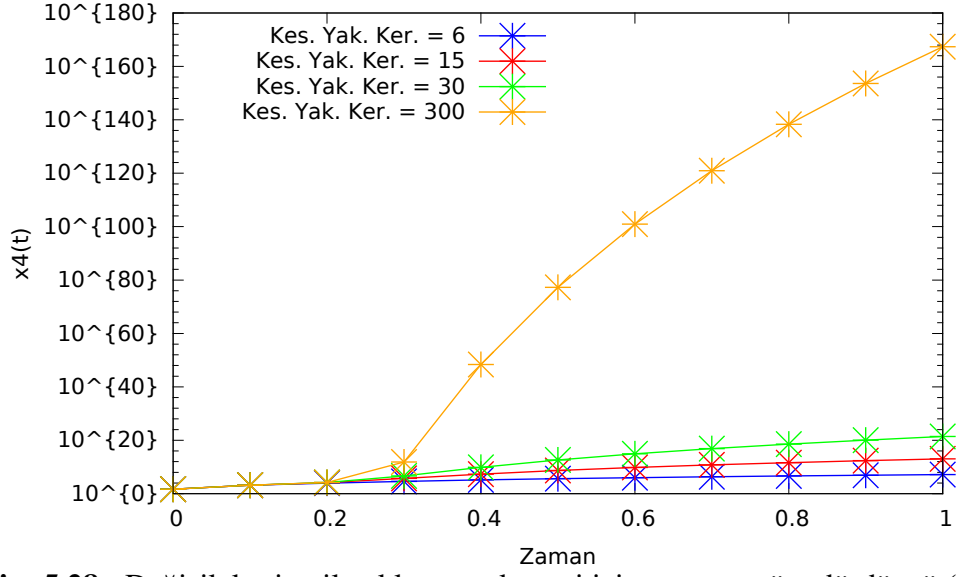
**Çizim 5.25 :** Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi.



**Çizim 5.26** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimini.

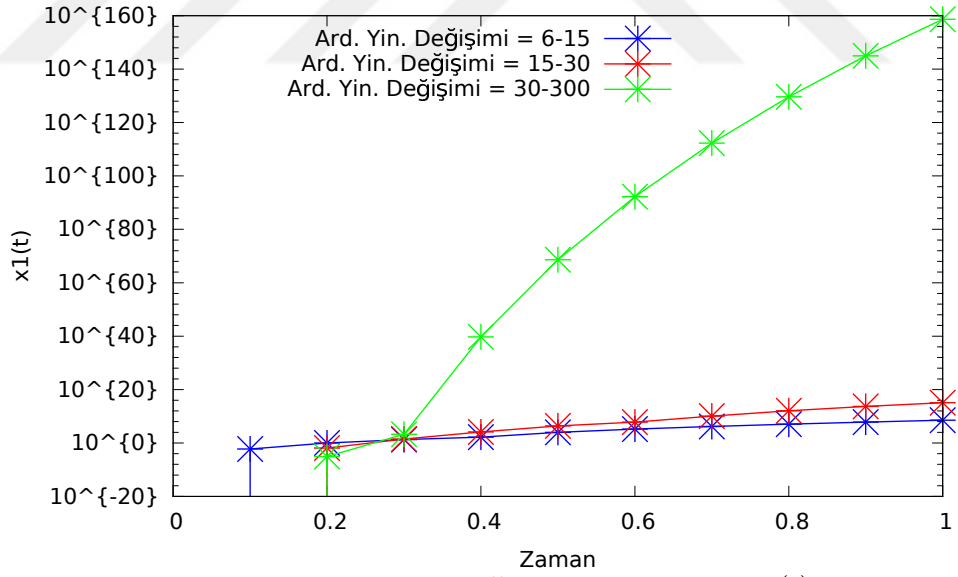


**Çizim 5.27** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesini için zamana göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimini.

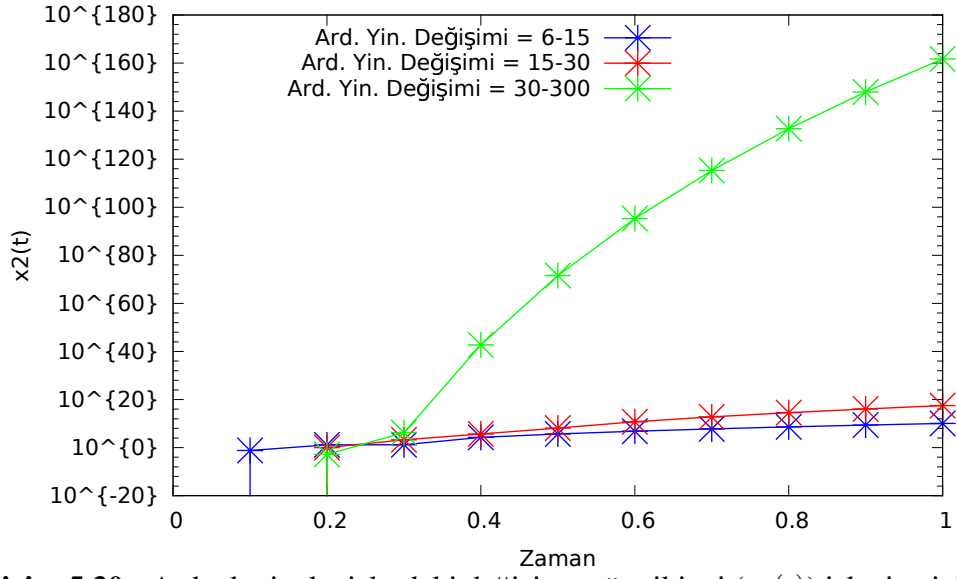


**Çizim 5.28** : Değişik kesimcil yaklaşım kertesı için zamana göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.

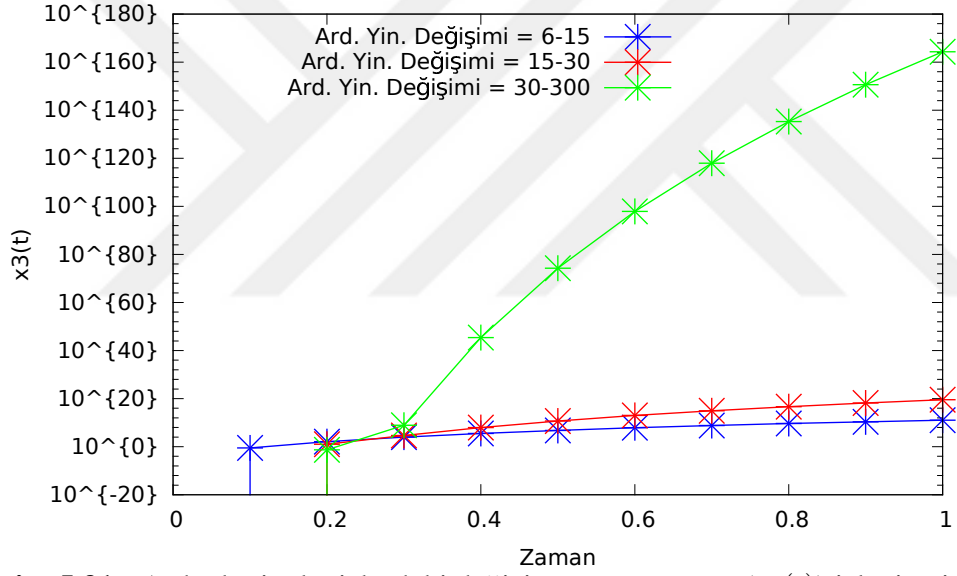
$a_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 10.1$ ,  $a_3 = 100.1$  ve  $a_4 = 50.1$  başlangıç koşulları altında elde edilen işlevlerin 6. ve 15., 15. ve 30., 30. ve 300. ardışık yineleyiş değişimlerinde 0.1 adımda ve 0 ile 1 zaman aralığında çizim ve çizelge gösterilimleri aşağıdaki gibidir:



**Çizim 5.29** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre birinci ( $x_1(t)$ ) işlevin çizimi.

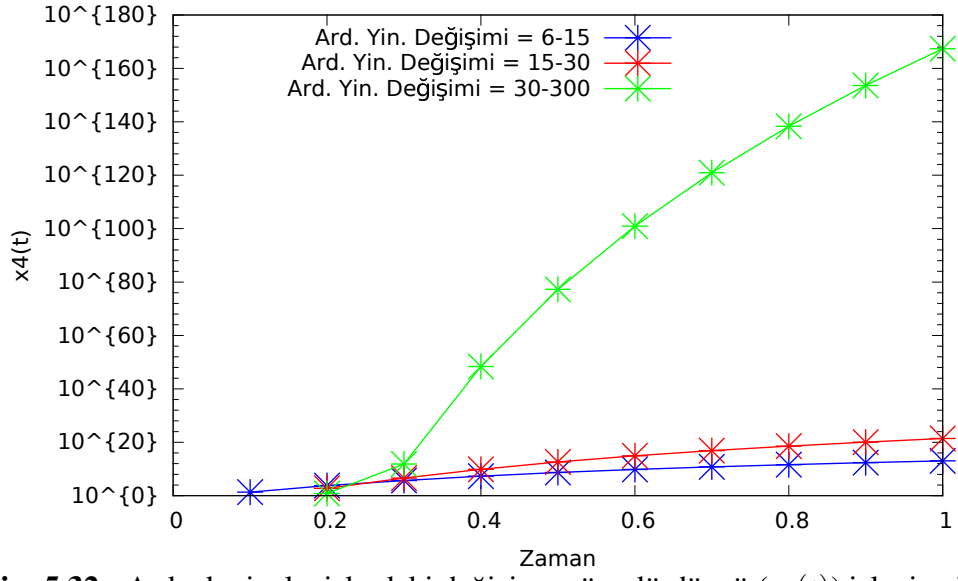


**Çizim 5.30** : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre ikinci ( $x_2(t)$ ) işlevin çizimi.



**Çizim 5.31** : Ardışık yinelemlerdeki değişime göre üçüncü ( $x_3(t)$ ) işlevin çizimi.





**Çizim 5.32** : Ardışık yineleyişlerdeki değişime göre dördüncü ( $x_4(t)$ ) işlevin çizimi.



## 6. SONUÇLAR

- Sıradan türevli denklemlerin çözümünde OLEVKU bağlamında üretilen kro-neckerüslü toplam dizilerin irakgörür dizelerinin dördülleştirimiyle yalınlaştırımı üzerine odaklanılmıştır. Dördülleştirilmiş dizelerin dizeycil özyineleyiş yapısı elde edilmiştir.
- Henon - Heiles dizgelerinin çözümünde Dördülleştirim kullanılan OLEVKU yöntemi ve kullanılmayan OLEVKU yöntemi karşılaştırıldığında belirli bir kerteeye kadar elde edilen sonuçların birebir aynı olduğu gözlemlenmiştir.
- Dördülleştirim kullanılmayan OLEVKU yönteminde en fazla 8. kerteeye kadar çıkılabilmektedir.
- Dördülleştirimin kullanıldığı OLEVKU yönteminde daha yüksek kesme kerteelerine çıkılabilmektedir.
- Kesme kertesini arttıkça mutlak hatanın azaldığı ve yakınsamanın arttığı gözlemlenmiştir.
- Başlangıç koşulu değerleri küçük seçildiğinde anlamlı sonuçlar elde edilmiştir.



## KAYNAKLAR

- [1] **Demiralp, M.** (2012). A probabilistic evolution approach trilogy, part 1: quantum expectation value evolutions, block triangularity and conicality, truncation approximants and their convergence, *Journal of Mathematical Chemistry*, **51**(4), 1170–1186.
- [2] **Demiralp, M. ve Baykara, N.** (2012). A probabilistic evolution approach trilogy, part 2: spectral issues for block triangular evolution matrix, singularities, space extension, *Journal of Mathematical Chemistry*, **51**(4), 1187–1197.
- [3] **Demiralp, M. ve Tunga, B.** (2012). A probabilistic evolution approach trilogy, part 3: temporal variation of state variable expectation values from Liouville equation perspective, *Journal of Mathematical Chemistry*, **51**(4), 1198–1210.
- [4] **Demiralp, E., Demiralp, M. ve Hernandez-Garcia, L.** (2012). A probabilistic foundation for dynamical systems: phenomenological reasoning and principal characteristics of probabilistic evolution, *Journal of Mathematical Chemistry*, **50**, 870–880.
- [5] **Demiralp, M., Demiralp, E. ve Hernandez-Garcia, L.** (2012). A probabilistic foundation for dynamical systems: theoretical background and mathematical formulation, *Journal of Mathematical Chemistry*, **50**, 850–869.
- [6] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2012). A contemporary linear representation theory for ordinary differential equations: probabilistic evolutions and related approximants for unidimensional autonomous systems, *Journal of Mathematical Chemistry*, **51**, 58–72.
- [7] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2011). A contemporary linear representation theory for ordinary differential equations: multilinear algebra in folded arrays (folarrs) perspective and its use in multidimensional case, *Journal of Mathematical Chemistry*, **51**, 38–57.
- [8] **Hunutlu, F., Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Truncation Approximants to Probabilistic Evolution for ODEs Having Two Diagonal Banded Evolution Matrices Under Initial Conditions: Simple Case, **J. Vigo-Aguiar**, (düzenleyen), *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, ICMMSE 2012, cilt 2 of ISBN: 978-84-615-5392-1, Murcia, İspanya*, s.720–731.

- [9] **Hunutlu, F., Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Truncation Approximants and Their Qualities in the Probabilistic Evolution of Van der Pol Equation Under Initial Conditions, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, s.256–261.
- [10] **Hunutlu, F., Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Conicalization of the Probabilistic Evolutions for the ordinary and forced Van der Pol equation under given initial conditions, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS)*, Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.39–44.
- [11] **Tuna, S. ve Demiralp, M.** (2012). Certain Validations of Probabilistic Evolution Approach for Initial Value Problems, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, s.246–249.
- [12] **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Taking Care of the Singularities in the Probabilistic Evolutionary Quantum Expectation Value Dynamics, J. Vigo-Aguiar, (düzenleyen), *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, ICMMSSE 2012*, cilt 1 of ISBN: 978-84-615-5392-1, Murcia, İspanya, s.153–156.
- [13] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic Evolution of the State Variable Expected Values in Liouville Equation Perspective, for a Many Particle System Interacting Via Elastic Forces, **J. Vigo-Aguiar**, (düzenleyen), *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, ICMMSSE 2012*, cilt 3 of ISBN: 978-84-615-5392-1, Murcia, İspanya, s.1186–1197.
- [14] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic evolutions in classical dynamics: Conicalization and block triangularization of Lennard-Jones systems, *AIP Conference Proceedings*, 1479(1), 1986–1989.
- [15] **Demiralp, M.** (2012). Quantum Expected Value Dynamics in Probabilistic Evolution Perspective, J. Vigo-Aguiar, (düzenleyen), *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012*, cilt 2 of ISBN: 978-84-615-5392-1, Murcia, İspanya, s.449–459.
- [16] **Demiralp, M.** (2012). Singing in the Magic Empire of Stars: Probabilistic Evolution Approach to Celestial Mechanical Problems, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and*

*Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, s.14–14, açkıcıl konu şma.

- [17] **Bodur, D. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic Evolution Approach to First Order Explicit Ordinary Differential Equations for Two Unknown Case, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, s.203–207.
- [18] **Öztürk, T.N. ve Demiralp, M.** (2012). Classical Dynamics of Isolated Univariate Quartic Anharmonic Oscillator via Probabilistic Evolution, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, s.224-228.
- [19] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2012). Quantum Expected Value Dynamics in Probabilistic Evolution Perspective for Systems under Dynamic Weak External Fields, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, s.241–245.
- [20] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2012). Getting Triangularity and Conicality in the Probabilistic Evolutionary Expectation Dynamics of the Purely Quartic Quantum Anharmonic Oscillator, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, s.268–271.
- [21] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2012). Quantum Optimal Control Theoretical Observable Transitions Between State and Costate in Probabilistic Evolution Perspective, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, s.272–277.
- [22] **Baykara, N.A., Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2012). Univariate single quantum harmonic oscillator from probabilistic evolution perspective, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS)*, Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.27–32.
- [23] **Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2012). Enhanced Multivariate Product Representation at Constancy Level in Probabilistic Evolution Approach to First Order Explicit ODEs, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, s.229–234.

- [24] **Okan, A., Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Fluctuation suppression to optimize initial data to increase the quality of truncation approximants in probabilistic evolution approach for ODEs: Basic philosophy, AIP Conference Proceedings, 1479(1), 2007–2010.
- [25] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2012). Analytic continuation possibilities for divergent initial vectors in the probabilistic evolution of explicit ODEs, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, ISBN: 978-1-61804-115-9, WSEAS Press, İstanbul, Türkiye, s.181–186.
- [26] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic evolution for the most general first order single unknown explicit ODEs: Autonomization, Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.57–62.
- [27] **Öztürk, T. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic evolution in purely second order one unknown autonomous explicit ODEs under initial conditions, Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.63–68.
- [28] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2012). Convergence of Probabilistic Evolution Truncation Approximants via Eigenfunctions of Evolution Operator, Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry, MCBC'12, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, ABD, s.45–50.
- [29] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2011). Probabilistic Evolutions: The Ultimate, Natural and Exact Linearisation of ODEs, AIP Proceedings for the 9th International Conference on Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE2011), Halkidiki, Yunanistan, s.basımda.
- [30] **Gözükırmızı, C.** (2012). Space extension possibilities for probabilistic evolution with multinomial right hand side functions, AIP Conference Proceedings, 1479(1), 2019–2022.
- [31] **Demiralp, M.** (2012). Preface of the Third ICNAAM symposium on recent developments in Hilbert space tools and methodology for scientific computing, AIP Conference Proceedings, 1479(1), 1981–1981.
- [32] **Demiralp, M. ve Bayat, S.** (2013). Fluctuation Free Limit Behavior of the One Dimensional Quantum Systems in Space Extension Perspective: Exponentially Anharmonic Symmetric Oscillator, Proceedings of the 12th International Conference on Applied Computer and Applied Computational Science, ACACOS'13, World Scientific and



Engineering Academy and Society (WSEAS), Malezya, s.201–206.

- [33] **Demiralp, M. ve Ayvaz, M.** (2013). Expectation Value Dynamics for Isolated Quantum Systems in the Fluctuationlessness Perspective: One Dimensional Symmetric Quartic Anharmonic Oscillator, Proceedings of the 12th International Conference on Applied Computer and Applied Computational Science, ACACOS'13, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Malezya, s.195–200.
- [34] **Demiralp, M. ve Kalay, B.** (2013). Singular One Dimensional Quantum Systems in Fluctuation Free Expectation Dynamics: Reciprocal Interparticle Distance Dependent Systems, Proceedings of the 12th International Conference on Applied Computer and Applied Computational Science, ACACOS'13, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Malezya, s.207–211.
- [35] **Demiralp, M.** (2013). Enforcing the core rectangular matrices to be in most reductive structures in probabilistic evolution approach, via mathematical fluctuations, Proceedings of the 2013 International Conference on Applied Mathematics and Computational Methods in Engineering, s.171–178.
- [36] **Demiralp, M.** (2013). Binomial expansion for the Kronecker powers of vector sums, Recent Advances in Finite Differences and Applied and Computational Mathematics, ISBN: 978-1-61804-184-5, s.140–145.
- [37] **Demiralp, M.** (2013). Constancy adding space extension (CASE) to get Kronecker Power Series kernel separability in conical explicit ordinary differential equations, Proceedings of the 13th conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, s.496–503.
- [38] **Demiralp, M.** (2013). Kernel separability in Kronecker power solutions for conical explicit ordinary differential equations, Proceedings of the 13th conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, s.504–512.
- [39] **Demiralp, E., Hernandez Garcia, L. ve Demiralp, M.** (2013). Using population level models to characterize individual behavior with space extension and PEA, Proceedings of the 13th conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, s.487–495.
- [40] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations. Part 1: Arbitrariness and equipartition theorem in Kronecker power series, Journal of Mathematical Chemistry, 52(3), 866–880.
- [41] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations.

Part 2: Kernel separability, space extension, and, series solution via telescopic matrices, *Journal of Mathematical Chemistry*, 52(3), 881–898.

- [42] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2013). Governing the reductive flexibilities in the Kronecker power representation of ODEs, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960 474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.120–124.
- [43] **Kirkin, M.E. ve Demiralp, M.** (2013). Reciprocal approximants for Kronecker power series, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.166–170.
- [44] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2013). Reducing multinomiality into conicality in autonomous explicit ODEs, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.187–191.
- [45] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2013). Multivariate Hausdorff Moment Problem Arising From Quantum Mechanical Applications of Probabilistic Evolution Approach, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.201–205.
- [46] **Gözükırmızı, C.** (2013). Enhanced Multivariate Products Representation based Scalarization of Integrals Appearing in Solutions of Probabilistic Evolution Equations of Conical ODEs, *Proceedings of the 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG13)*, ISBN: 978-960-474-339-1, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.79–84.
- [47] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.** (1993). Lie algebraic factorization of multivariable evolution operators: Definition and the solution of the canonical problem, *International Journal of Engineering Science*, 31(2), 307 – 331.
- [48] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.** (1991). Factorization of certain evolution operators using lie algebra: Formulation of the method, *Journal of Mathematical Chemistry*, 6, 165–191, 10.1007/BF01192579.
- [49] **Demiralp, M.** (2014). Squarificating the Telescope Matrix Images of Initial Value Vector in Probabilistic Evolution Theory (PET), *Proceedings of the 19th International Conference on Applied Mathematics (AMATH'14)*, ISBN: 978-1-61804-258-3, WSEAS Press, Istanbul, Türkiye, 2014, pp. 99–104.
- [50] **Kırkin, M.E. ve Gözükırmızı, C.** (2015). Probabilistic Evolution Theory for

ODE sets with second degree multinomial right hand side functions: Certain reductive cases, *In Proceedings of 11th International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering (ICCMSE 2015)*, Atina, Yunanistan.

- [51] **Henon, M. ve Heiles, C.** (1964). The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments, *in The Astrophysical Journal*, 69, pp. 73-79 1964, URL doi:[http://dx. doi.org/10.1086/109234](http://dx.doi.org/10.1086/109234) .
- [52] **Skiadas, C.H. ve Skiadas, C.** (2009). Chaotic Modeing and Simulation Analysis of Chaotic Models, Attractors and Forms, ISBN: 9781420079005 CRC Press, 2009.
- [53] **Kırkın, M.E. ve Demiralp, M.** (2016). A Case Study on Squarification in Probabilistic Evolution Theory (PREVTH) for Henon-Heiles Systems, *10th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM'16)*, *International Journal of Computers*, Istanbul, Türkiye, s.158-165.
- [54] **Kırkın, M.E. ve Demiralp, M.** (2016). Compaction of Probabilistic Evolution Theoretical (PREVTH) Results via Telescope Matrix Squarification: Confirmation on Henon-Heiles Systems, *Journal of Chemistry* (Gönderildi).
- [55] **Gözükırmızı, C., Kırkın, M.E. ve Demiralp, M.** (2016). Probabilistic Evolution Theory for the Solution of Explicit Autonomous Ordinary Differential Equations: Squarified Telescope Matrices, *Journal of Mathematical Chemistry* (Gönderildi).
- [56] **Gözükırmızı, C. ve Kırkın, M.E.** (2016). Classical Symmetric Fourth Degree Potential Systems in Probabilistic Evolution Theoretical Perspective: Most Facilitative Conicalization and Squarification of Telescope Matrices, *International Conference in Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace (ICNPAA)*, La Rochelle, Fransa (Gönderildi).
- [57] **Kırkın, M.E. ve Demiralp, M.** (2016). More Practicalization of Probabilistic Evolution Theory: Case Studies for the Squarification of Telescope Matrices, *International Conference in Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace (ICNPAA)*, La Rochelle, Fransa (Gönderildi).



## ÖZGEÇMİŞ

**Ad-Soyad:** Melike Ebru KIRKIN

**Doğum Tarihi ve Yeri:** 04.06.1989, Antalya

**E-Posta:** ebrkirkın@itu.edu.tr, melikeebrkrkn@gmail.com

**Lisans:** Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstatistik Bölümü (2011)

### TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- **Kırkın, M.E.** ve Demiralp, M. (2016). Compaction of Probabilistic Evolution Theoretical (PREVTH) Results via Telescope Matrix Squarification: Confirmation on Henon-Heiles Systems, *Journal of Chemistry* (Gönderildi).
- **Gözükırmızı, C.**, Kırkın, M.E. ve Demiralp, M. (2016). Probabilistic Evolution Theory for the Solution of Explicit Autonomous Ordinary Differential Equations: Squarified Telescope Matrices, *Journal of Mathematical Chemistry* (Gönderildi).
- **Gözükırmızı, C.** ve Kırkın, M.E. (2016). Classical Symmetric Fourth Degree Potential Systems in Probabilistic Evolution Theoretical Perspective: Most Facilitative Conicalization and Squarification of Telescope Matrices, *International Conference in Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace (ICNPAA)*, La Rochelle, Fransa (Gönderildi).
- **Kırkın, M.E.** ve Demiralp, M. (2016). More Practicalization of Probabilistic Evolution Theory: Case Studies for the Squarification of Telescope Matrices, *International Conference in Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace (ICNPAA)*, La Rochelle, Fransa (Gönderildi).
- **Kırkın, M.E.** ve Demiralp, M. (2016). A Case Study on Squarification in Probabilistic Evolution Theory (PREVTH) for Henon-Heiles Systems, *10th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM'16)*, *International Journal of Computers*, İstanbul, Türkiye, s.158-165.
- **Kırkın, M.E.** ve Gözükırmızı, C. (2015). Probabilistic Evolution Theory for ODE sets with second degree multinomial right hand side functions: Certain reductive cases, *In Proceedings of 11th International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering (ICCMSE 2015)*, Atina, Yunanistan.
- **Kırkın, M.E.** ve Demiralp, M. (2013). Reciprocal Approximants for Kronecker Power Series, *The Proceedings of the WSEAS 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG'13)*, WSEAS Press, Antalya, Türkiye, s.166-170.