

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI İLE
ÇOK NESNECİKLİ DİZGELERİN DEVİNİMİNİN İNCELENİŞİ VE
PADÉ ORANLARIYLA DA YAKLAŞTIRIM**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif TATAROĞLU

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

KASIM 2017

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI İLE
ÇOK NESNECİKLİ DİZGELERİN DEVİNİMİNİN İNCELENİŞİ VE
PADÉ ORANLARIYLA DA YAKLAŞTIRIM**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Elif TATAROĞLU
(702141006)**

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

KASIM 2017

İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702141006 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Elif TATAR-OĞLU, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI İLE ÇOK NESNECİKLİ DİZGELERİN DEVİNİMİNİN İNCELENİŞİ VE PADÉ ORANLARIYLA DA YAKLAŞTIRIM” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Metin DEMİRALP**

İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Burcu TUNGA**

İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Özlem YILMAZ

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

.....

Teslim Tarihi : **16 Kasım 2017**

Savunma Tarihi : **14 Aralık 2017**





Aileme



ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini ve katkılarını esirgemeyen, gereksinim duyduğum her an bana zaman ayıran danışmanım Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e kısıtsız teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmaya katkı sağlayan Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu'na (BEBBYT) teşekkür ederim.

Yaşamım boyunca verdikleri kısıtsız destek için aileme kısıtsız teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak danışmanım Prof. Dr. Metin Demiralp ve Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) ile tanışmama vesile olan çok sevgili hocam Yrd. Doç. Dr. Özlem YILMAZ'a kısıtsız teşekkürlerimi sunarım.

Kasım 2017

Elif TATAROĞLU



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÇİZELGE DİZELGESİ	xiii
ÇİZİM DİZELGESİ.....	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ.....	1
2. OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI	3
2.1 Olasılıkçıl Evrim Kuramına Giriş	3
2.1.1 Uzay genişletimi.....	4
2.1.2 Değişmezlik eklenimli uzay genişletimi	5
2.1.3 Tümlev denkleştirim.....	6
2.1.4 Çözümün dolaysız üslü toplam dizisi'nde ırakgörür düzey kat- sayılarının dördülleştirimi	7
2.1.5 Denklemde sağ yan dördülleştirimi.....	7
2.1.6 Dördül ırakgörür altında görüntüde ve dördül ırakgörür'de özyineleyiş	8
3. KRONECKER ÜSLÜ UZAYLAR	11
3.1 Kronecker Üslü Uzaylar	11
3.1.1 İki elemanlı yöneyden üretilen Kronecker uzayları	11
3.1.2 Üç elemanlı yöneyden üretilen Kronecker uzayları	17
3.1.3 Yöneylemlerin dolaysız ya da Kronecker dördüllerinin gömülü olduğu altuzay.....	20
3.1.4 Katman(Çokkatlı), Harita(Çizin), Atlas kavramları	22
4. İKİ NESNECİK SORUNUNA OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI BAĞLAMINDA YAKLAŞIM	25
4.1 İki Nesnecek Sorununa Olasılıkçıl Evrim Kuramı Bağlamında Yaklaşım	25
4.1.1 Dizgenin Hamilton işlevi ve denklemler	25
4.1.1.1 Dizgenin devinim denklemlerinin oluşturumu	27
4.1.1.2 Kütle özeğinin deviniminin ayrıştırımı.....	27
4.1.1.3 Nesneceklerarası bağıl deviniminin ayrıştırımı.....	28
4.1.1.4 Kütle özeğinin devinimi.....	28
4.1.2 Dizgenin doğrucul bağıl devinimi	29
4.1.2.1 Başlangıç yöneylerinin doğrucul bağımlı olduğu durum	29
4.1.2.2 Dizgenin düzlemcil bağıl devinimi.....	30
4.1.3 Açısal devinirlik	31
4.1.3.1 Çembercil konaçlarda açısal devinirlik korunumu	31

4.1.3.2 Dizgenin çembercil konaçlarda devinimi	32
4.1.4 Çembercil konaçlarda dizgenin Hamilton işlevi	34
4.1.5 Çembercil konaçlarda yarıçapçıl devinimin belirlenişi	34
4.1.6 Söbekçil gezingeler	35
4.1.7 OLEVKU denklemlerinin oluşturulması.....	35
4.1.8 Katsayı yöneyi F_0 , dördül katsayı dizeyi F_1 ve dikdörtgen katsayı dizeyi F_2	38
4.1.9 Değişmez eklenimli uzay genişletimi.....	38
4.1.10Dördülleştirim.....	39
5. PADÉ YAKLAŞTIRANLARI VE İKİ NESNECİK SORUNUNA UYGULANIŞI.....	41
5.1 Padé Yaklaştıranlarının Elde Edilişi	41
5.2 İki Nesnecek Sorununa Olasılıkçıl Evrim Kuramı Bağlamında Yaklaşım- dan Elde Edilen Bağıntılara Padé Yaklaştıranları Uygulanışı	47
5.2.1 OLEVKU yakınsaklık bölgesi içinde kalan aralıkta sonuçlar.....	47
5.2.2 OLEVKU yakınsaklık bölgesi dışında kalan aralıkta sonuçlar.....	58
6. SONUÇLAR.....	67
KAYNAKLAR.....	69
ÖZGEÇMİŞ	73

KISALTMALAR

STD	: Sıradan Türevli Denklem
ODE	: Ordinary Differential Equation
OLEVKU	: Olasılıkçıl Evrim Kuramı
PREVTH	: Probabilistic Evolution Theory
DEUG	: Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletimi
CASE	: Constancy Adding Space Extension
DİraDi	: Dördüleştirilmiş İrakgörür Dizey
SquTelMat	: Squarified Telescope Matrix
BEBBYT	: Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu
G4SMC	: Group for Science and Methods of Computing



ÇİZELGE DİZELGESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : e^x işlevinin Padé Yaklaştıranları uygulanması sonucunda elde edilen yanılığ değerleri	44
Çizelge 5.2 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri	49
Çizelge 5.3 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri.....	50
Çizelge 5.4 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri ...	51
Çizelge 5.5 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri.	52
Çizelge 5.6 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri	54
Çizelge 5.7 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri.....	55
Çizelge 5.8 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri	57
Çizelge 5.9 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri.....	58
Çizelge 5.10 : $r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri	59
Çizelge 5.11 : $p_r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri	60
Çizelge 5.12 : $r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri.....	61
Çizelge 5.13 : $p_r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri.....	62
Çizelge 5.14 : $r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri ...	63
Çizelge 5.15 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri.	64
Çizelge 5.16 : $r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri	65
Çizelge 5.17 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerleri.....	66



ÇİZİM DİZELGESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizim 3.1 : Konaç Değişim İşlevi.....	23
Çizim 5.1 : e^x işlevinin için Padé Yaklaştıranları ile elde edilen sonuçların grafiği.....	43
Çizim 5.2 : e^x işlevi için Padé Yaklaştıranları ile elde edilen sonuçların yanılğı grafiği.....	44
Çizim 5.3 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	50
Çizim 5.4 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	50
Çizim 5.5 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği.....	51
Çizim 5.6 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği.....	52
Çizim 5.7 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	54
Çizim 5.8 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	55
Çizim 5.9 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	57
Çizim 5.10 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	58
Çizim 5.11 : $r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği.....	59
Çizim 5.12 : $p_r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği.....	60
Çizim 5.13 : $r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	61
Çizim 5.14 : $p_r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	62
Çizim 5.15 : $r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği.....	63
Çizim 5.16 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği.....	64
Çizim 5.17 : $r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	65
Çizim 5.18 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında padé yaklaştıranları ile elde edilen değerlerin grafiği.....	66



OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI İLE ÇOK NESNECİKLİ DİZGELERİN DEVİNİMİNİN İNCELENİŞİ VE PADÉ ORANLARIYLA DA YAKLAŞTIRIM

ÖZET

Olasılıkçıl Evrim Kuramı (OLEVKU), belirtik ve özerk (ing: autonomous) sıradan türevli denklemlerin ya da denklem takımının başlangıç değer sorununun çözümü için kullanılan ve son 10 yıl içerisinde geliştirilen bir kuramdır.

Başlangıç olarak t zaman değişkenine bağımlı olan bir sıradan türevli denklem (STD) takımı alınır. Alınan bu denklem takımındaki t değişkenine bağımlılık denklemin özerk bir yapıda oluşunu engeller. Ancak başlangıç değeri a_{n+1} olan yeni bir $x_{n+1}(t)$ değişkeni ekleyerek özerk olmayan yapıdaki bu denklem takımını özerk duruma getirilebilir. Sonrasında seri açılım noktası kullanılarak sıradan türevli denklem yeniden yazılır. Ek olarak yöntem için önemli bir olgu olan Kronecker çarpımı olgusuna yer verilir ve sağ yöneyi Kronecker üslüleri kullanılarak yeniden yazılır. Bu yazımda denklemin sağ yanında \mathbf{F}_j dizeyi ile $s(t)$ işlevlerinin Kronecker üslülerinin çarpımı yer alır. $s(t)$ işlevleri $n \times 1$ boyutundadır. Bu demektir ki $s(t)^{\otimes j}$ işlevi n^j öğelidir. Çarpımın sonucu $n^j \times 1$ boyutunda olduğundan dolayı, \mathbf{F}_j dizeyi $n \times n^j$ boyutunda olmalıdır. Diğer bir deyişle \mathbf{F}_j dizeyi $j = 0$ iken n öğeli olan, ancak j 'nin 2 ve daha büyük değerleri için genişliği katlanarak artan dikdörtgen bir dizeydir. Tüm bu yapılan tanımlamalar sonunda en genel hali ile $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ başlangıç değeri olan bir ikinci derece sağ yanlı bir OLEVKU bağıntısı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2 \mathbf{x}(t)^{\otimes 2}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{a}\end{aligned}\tag{1}$$

(1) sırasayılı eşitliğe a_{n+1} değişmezi eklenerek uzay genişletilir ve bu işleme Değişmez Eklenimli Uzay Genişletimi (DEUG) adı verilir. Değişmezin eklenimi ile \mathbf{F}_0 0 olarak ve \mathbf{F}_1 β katsayılı I birim dizeyine orantılı olarak elde edilir. Elde edilen bu bağıntının sağ yanı $e^{\beta t}$ parantezine alınır, ancak bu işlem ile denklemin özerk yapısı yitirilmiş olunur. Yeniden özerk yapıyı elde etmek için t 'ye olan bağımlılık yeni bir u işlevi tanımlanarak u 'lar üzerinden gösterilir. Elde edilen son bağıntıda dolaysız üslü türev alınır. Bu işlem sonunda elde edilen bağıntıdan yararlanarak bakaç dizeyi (ing: monocular matrix) ve irakgörür dizey (ing: telescope matrix) tanımları yapılır. Irakgörür dizeyler ile ilgili söylenebilecek en önemli olgu, j . irakgörür dizeyinin, ilk j bakaç dizeyin çarpımı ile elde ediliyor oluşudur. u işlevleri kullanılarak yeniden yazılan bağıntıda u 'ya göre tümlev olarak m . Kronecker çarpımı içeren yeni bir bağıntı elde edilir ve bu bağıntıda $m \rightarrow \infty$ iken kalan terimin sıfırlanacağı öngörümü ile kalansız çözümü veren bağıntıya ulaşılır. OLEVKU için en önemli olgulardan biri olan dördülleştirim olgusuna yer verilerek, irakgörür dizeyleri içeren bağıntı dördül irakgörür dizeyler türünden yeniden yazılır. Bu sayede boyutu çok yüksek ve oldukça fazla 0 değeri içeren dikdörtgen dizeyler yerine daha az 0 içeren dördül dizeyler ile ilenir. Elde edilen son denklemin sağ yan dördülleştirimi yapılır ve toplam dizeye

açılır. Bağintıda yer alan u 'nun üslülerinin birbirinden bağımsız oluşları kullanılarak her iki yanda aynı toplamdizi altında kalan ve aynı katsayıya sahip olan terimler birbirine eşitlenir. Bu olgu OLEVKU için diğer önemli gelişmelerden biri olan özyineleme bağıntısını gündeme getirir. Yakın geçmişte bu özyineleyişin yöneyler ve dizeler üzerinde geçerli olduğu kanıtlanmıştır. Kuramın son aşaması olarak bu özyineleyişin kanıtlanışına yer verilir.

Araştırmalar sırasında Olasılıkçıl Evrim Kuramı'nda kullanılan Kronecker çarpımı ile ilgili yeni bir olgu olan Kronecker üslü uzaylar olgusu gündeme gelmiştir. Bu bağlamda farklı Kronecker üslüne ve öge sayıları için elde edilen yöneyler incelenmiştir. İnceleyleşte iki ögeli yöneylerin ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci Kronecker üslüleri, üç ögeli yöneylerin ikinci ve üçüncü Kronecker üslülerine yer verilmiştir. İnceleyleşler sonunda iki ögeli yöneyler için genel bir anlatım geliştirilmiş ve yöneyin öge sayısı farketmeksizin tek sayılı Kronecker üslülerinin bulunduğu uzayın bir altuzay oluşturduğu, ancak çift sayılı Kronecker üslülerinin bulunduğu uzayın bir altuzay oluşturamayacağı, daha özel bir durum olan katman (ing: manifold) oluşturduğu olgusu gösterilmiş ve kısaca katman, harita ve atlas kavramlarına yer verilmiştir.

Tezin gündeminde olan diğer bir önemli olgu da gökmekaniğindeki iki nesnecik sorununa OLEVKU bağlamında yaklaşımdır. Bunun için dizgenin Hamilton işlevi yazılmış ve Hamilton işlevinde ilgili değışkene göre türev olarak konum ve devinirlik bağıntıları yazılmıştır. Her iki nesneciğın üç boyuttaki devinirlik bileşenleri birbiri ile toplanarak yeni devinirlik tanımları yapılmış ve denklemler yeniden yazılmıştır. Benzer şekilde konum konaçlarının ögeleri farkına yeni birer değışken gözüyle bakılmıştır. Ek olarak indirgenmiş kütle tanımı yapılmış ve tüm bu tanımlamalardan yararlanarak baştaki 12 denklemlili devinim her biri 3 denklemlili olan iki ayrışık devinime dönüştürülmüştür. Böylece, Hamilton işlevi kütle özeğı ve bağılı devinim ile ilgili olarak iki kesime ayrılmış bulunmakla birlikte toplam değışken sayısı 6'ya indirgenmiştir.

İki nesnecik sorunu ile ilgili yazılan bağıntılar, yöneyler kullanılarak yeniden yazılmıştır. Bağılı konaçlar (ing: coordinates) kullanılarak dizgenin doğrucul bağılı devinim denklemleri yazılmış ve başlangıç yöneylerinin doğrucul bağımlı ve bağımsız olma durumları incelenmiştir. Açısal devinirlik olgusuna yer verilmiş ve çembercil konaçlarda açısal devinirlik incelenmiştir. Çembercil konaçları kullanabilmek için yeni konaç tanımları yapılmıştır. Konum üzerinde yapılan tüm bu işlemler devinirlik yöneyi içinde yapılmıştır. Konum ve devinirlik bağıntıları üzerinde yapılan işlemler ile başlarda 12 olan, sonra 6'ya indirgenen bilinmeyen sayısı 4'e indirgenmiştir. Son durumda toplam 4 bağıntı elde edilmiştir.

Çembercil konaçlarda yarıçapçıl devinim incelenmiştir. Bu inceleniş sonunda tümlev altında bir bağıntı elde edilir. Bu adım analitik çözüme geçilen bir adım olmasından dolayı önemli bir adımdır. Bu işlem bağıntıdaki tüm bilinmeyen değışkenler hesaplanarak ve sayısal tümlev alınarak elde edilir.

Bu ana kadar yapılan tanımlamalar sonucunda bağıntıların yeniden yazılması ile $r'(t)$ ve $p'_r(t)$ olmak üzere 2 sıradan türevli denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$r'(t) = \frac{p_r(t)}{\mu}, \quad r(0) = r_0 \quad (2)$$

$$p'_r(t) = \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu} \frac{1}{r(t)^3} - \frac{v}{r(t)^2}, \quad p_r(0) = p_{r,0}$$

Bu 2 sıradan türevli denklem OLEVKU uygulanacak olan denklemlerdir. OLEVKU bağlamında sağ yanı en çok ikinci dereceden çokterimlilerden oluşan bağıntılar yazılmalıdır. Bu nedenle uzay genişletimi olgusu gündeme gelmiştir. Uzay genişletiminde adım adım $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ ve $u_4(t)$ işlevleri tanımlanır. Bu işlevler kullanılarak elde bulunan 2 sıradan türevli denklemden sağ yanı en çok ikinci dereceden çokterimlilerden oluşan 6 denklem elde edilmiştir. Elde edilen bu 6 denklemi ögesi olarak alan bir $x(t)$ yöneyi tanımlanır ve bu $x(t)$ yöneyi kullanılarak ikinci derece sağ yanlı OLEVKU bağıntısı yazılır. İki nesne sorunu bağlamında \mathbf{F}_0 , \mathbf{F}_1 ve \mathbf{F}_2 yazılır. Yöneye bir bilinmeyen eklenerek, diğer bir deyişle DEUG uygulanarak denklem sayısı ve yöneyin boyu 1 artırılır. Bu işlem ile en çok ikinci derece sağ yanlı yapısında olan işlevler, salt ikinci derece sağ yanlı çokterimli işlevlere dönüştürülür. Elde edilen son bağıntıda dördüleştirim uygulanarak OLEVKU seri çözümünün yer aldığı bağıntı elde edilir. Son bağıntıdan $x(t)$ yöneyinin ögeleri işlevler olarak elde edilir ve elde edilen bu işlevlere Padé yaklaşımları uygulanarak çözüme yaklaşılr.

Sav çalışmasında, Padé yaklaşımları olarak, Padé yaklaşımları tablosunda köşegende yer alan $[1,1]$, $[2,2]$, $[3,3]$, $[4,4]$, $[5,5]$ ikileri, köşegenin hemen üzerinde kalan $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$ ikilileri ve köşegenin hemen altında kalan $[2,1]$, $[3,2]$, $[4,3]$, $[5,4]$ ikileri kullanılmıştır. Uygulamalarda Olasılıkçıl Evrim Kuramı'nın yakınsaklık bölgesi içinde kalan $[0,1]$ aralığı, Olasılıkçıl Evrim Kuramı'nın yakınsaklık bölgesi dışında kalan $[-2,0]$ aralığı ve Olasılıkçıl Evrim Kuramı'nın hem yakınsaklık bölgesi içinde hem de yakınsaklık bölgesi dışında kalan $[0,2]$ aralığı incelenmiştir. İncelemeler sonucunda Padé yaklaşımları kullanılarak elde edilen sonuçların daha iyi yakınsadığı, Olasılıkçıl Evrim Kuramı'nın yakınsaklık bölgesi dışında kalan aralıktaki yakınsamayı da Olasılıkçıl Evrim Kuramı'ndan daha az salınım göstererek yaptığı gözlemlenmiştir.



**ANALYSIS OF THE MOTION OF MANY PARTICLE PROBLEM
BY USING PROBABILISTIC EVOLUTION THEORY AND
APPROXIMATION WITH PADÉ APPROXIMANTS**

SUMMARY

Probabilistic Evolution Theory has been proposed and developed in few recent years. It is established to solve the initial value problems of the explicit first order ODEs or ODE sets, beyond that, to investigate certain properties of the solutions.

As a start, we take an explicit ODE with a time dependence which is shown as t . The explicit time (independent variable t) dependence makes the descriptive vector function nonautonomous. This means the structure of the descriptive function changes from time instant to time instant. Without any generality loss it is always possible to change nonautonomy to autonomy by adding a new unknown $x_{n+1}(t)$ which is in fact just t and the accompanying initial value a_{n+1} to the unknown vector and initial vector respectively. After that we rewrite the ODEs by using the expansion point. Moreover, Kronecker product and Kronecker power series definitions are given. After giving information and definitions about Kronecker powers, the descriptive function vector can be written by using Kronecker power series as a product of \mathbf{F}_j matrices and Kronecker powers of $\mathbf{s}(t)$ functions where $j \in [0, \infty]$. The function $s(t)$ has n elements each of which is an unknown function. Hence its type $n \times 1$. This makes the number of the elements in $s(t)^{\otimes j}$ n^j . Hence this Kronecker power's type is $n^j \times 1$. On the other hand, the binary product $F_j s(t)^{\otimes j}$ must be of the type $n \times 1$. This means that the type of the matrix F_j should be $n \times n^j$. In other words, F_j is a vector of n elements for $j = 0$ while it becomes an $n \times n$ type square matrix whereas for all j s greater than or equal to 2 it becomes an horizontal rectangular matrix whose width increase very rapidly as grows unboundedly while its height remain constant.

By using the above mentioned definitions, the simplest conical case through PREVTH can be written as follows.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2 \mathbf{x}(t)^{\otimes 2}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{a} \end{aligned} \tag{3}$$

Furthermore, on the other hand, just extending the space by importing a constant to the unknowns, which is called Constancy Adding Space Extension (CASE), it is possible to get rid of F_0 and to make the matrix F_1 proportional to the correspondant identity matrix with a coefficient β . So even conicality is reduced to a very efficient structure which facilitates the further analysis pretty much. After these procedures, the right handside function of the equation is put in brackets by using a coefficient $e^{\beta t}$. By doing this, the autonomous structure is changed into nonautonomous structure. To have the autonomous structure again, the dependency to t can be written by defining a new u function. By taking derivatives in the last equation, the monocular matrix and telescope matrix definitions are given. It is important to mention about telescope matrix that j th telescope matrix \mathbf{T}_j uses first j monocular matrices in a cascaded way

such that it brings the image from n^{j+1} dimensional space to n dimensional space. Even though it realizes somehow a direct transfer it uses the monocular matrices as the intermediate agents.

After taking the integral in the last equation, a new equation is obtained with m .th Kronecker power. It is possible to obtain a solution without any residual by using the last equation with the prediction while $m \rightarrow \infty$. As a next step, squarification definition is given and the equation is rewritten by using this definition. Moreover, it is important to use the information that the powers of u are independent. By using this information, it can be said that the terms under the same sum with the same coefficient are equal. This step brings into question recursion which is one of the most important development about PREVTH. The proof of the recursion, which is done by Demiralp's group, is given for both vectors and matrices.

After giving details about PREVTH, another new development and a new perspective about Kronecker powers is defined and detailed which is Kronecker power spaces. For this definition, different Kronecker powers and vectors with different number of elements are considered. In this research, second, third, fourth and fifth Kronecker powers of two element vectors, second and third Kronecker powers of three element vectors are used. At the end of this research, a generalized equation is defined for two element vectors. Additionally, it is considered that if the Kronecker power is an odd number, the vectors are located in a subspace. On the contrary, if the Kronecker power is an even number, the vectors are not located in a subspace, they are located in a manifold which is a special definition. And briefly, manifold, map and atlas definitions are given.

Then, two particles celestial mechanical system interacting via central forces has been taken as the targets. A two particle system in Classical Mechanics has totally twelve unknown temporal function such that the positions of two particles in three dimensional physical Cartesian space can be described by totally six unknown temporally varying functions while the velocities of those two particles are described by six temporally varying unknown functions. The equations of motion for this system is defined through equations amongst the partial derivative of a system function describing the total energy of the system. The resulting equations are rst order ODEs on the unknowns positions and momenta hence they are composed of twelve ODEs. The mass center positions and their relevant momentum unknowns (totally six unknowns) can be separated out as long as the other unknowns are organized as relative coordinates (the coordinates of one particle relative to the other). The equations of mass center describe the motion of a free particle under no external influence and they can be solved analytically.

Considering the differences between positions as new relative position unknowns help us to write the distance function by using three unknowns. If we consider that there are three unknowns for the momentum too, this means there are totally six unknowns which is less unknowns than the beginning. By using the new defined relative positions and description function it is possible to construct the relative motion equations. Two case are analyzed whether the initial position and momentum vectors are linearly independent or not. Above analysis implies that the two particle system's motion can be described in the plane where the initial position and momentum vectors reside. This means there will be just four unknowns and four ODEs with appropriate initial

conditions. It is very important that we began with twelve unknowns at the beginning and now we have only four unknowns.

The sole dependence of the potential on a single distance function reminds us to use the circular (polar) coordinates. New unit vectors are defined and it is noticed that the new defined unit vectors vary in time so they have non-vanishing temporal derivatives. As a next step, we can use the angular momentum conservation law in construction of the equations of motion in circular coordinates. By using the radial momentum and angular momentum, all the equations are rewritten. It is possible to solve the last equation analytically. Instead of the solution of the equation one can seek a relation between the polar coordinate evolutions.

At the end of these evolutions, we take the following two ODEs as the target of PREVTH.

$$r'(t) = \frac{p_r(t)}{\mu}, \quad r(0) = r_0 \tag{4}$$

$$p_r'(t) = \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu} \frac{1}{r(t)^3} - \frac{v}{r(t)^2}, \quad p_r(0) = p_{r,0}$$

Even though PREVTH expects conicality (second degree multinomiality) at the right hand side of target ODEs, these ODEs do not have such type of right hand sides. However it is possible to use space extension herein. As steps of space extension $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ and $u_4(t)$ functions are defined. After applying space extension, we obtain 6 equations which are in conical structure and appropriate for the application of PREVTH. We can rewrite these equations concise form which is given in the (3). For our two particle system $\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}_6$ and \mathbf{F}_1 is composed of two outer products from six dimensional Cartesian space standard unit vectors while \mathbf{F}_2 is a rectangular matrix of 6×36 type. After Constancy Adding Space Extension (CASE) is applied, which adds just a constant function as a new unknown, the number of equations and the dimension of the vector increases by one. After that by using the squarified telescope matrices, the Kronecker power series equation is obtained. Each element of PREVTH solution vector can be individually approximated by certain Padé approximants. The main $r(t)$ and $p_r(t)$ functions will be taken as the targets of approximation implementation.

In this thesis, Padé approximants are represented by using $[n, m]$ couples. n represents the degree of numerator and m represents the degree of denominator. In the implementation, $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 3]$, $[4, 4]$ and $[5, 5]$ couples are used which reside on diagonal in the Padé table, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, $[4, 5]$ couples are used which reside just above the diagonal in the Padé table and $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[4, 3]$, $[5, 4]$ couples are used which reside just below the diagonal in the Padé table. In this work, $[0, 1]$, $[-2, 0]$ and $[0, 2]$ intervals are used to approach the functions. It is important to tell that the results are very parallel to what we have expected in the convergence properties at the beginning of this study.



1. GİRİŞ

Olasılıkçıl Evrim Kuramı [1], belirtik ve özerk (ing: autonomous) sıradan türevli denklemlerin ya da denklem takımının başlangıç değer sorununun çözümü için kullanılan önemli bir kuramdır. Olasılıkçıl Evrim Kuramı bağlamında bilimcil olarak birçok çalışma yapılmış ve yayınlanmıştır. Bu çalışmalardan bazıları [2–10] olarak gösterilebilir. OLEVKU bağlamında son dönemlerde geliştirilen en önemli olgulardan biri de kuramın yöneyler ve dizeler üzerinde özyineli oluşunun kanıtlanmasıdır.

Savın ikinci bölümünde, Olasılıkçıl Evrim Kuramı ayrıntılı olarak verilmektedir [11–15]. Bu ayrıntılandırma sürecinde, kuramın en önemli yapı taşları olarak sayılabilecek Kronecker çarpımı, sağ yanın ikinci dereceli çokterimli olarak anlatılması, uzay genişletimi, Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletimi (DEUG), bakaç ve ırakgörür dizelerin elde edilişleri, dördülleştirme ve özyineleyiş olgularına yer verilmiştir [16–18]. Değişmezlik eklenimli uzay genişletiminde, ikinci derece sağ yanlı anlatıma bir değişmez ekleyerek boyutu bir arttırış ve bunu yaparak F_0 dizeyinin sıfırlanışı, F_1 dizeyinin birim düzey (I) ile orantılı olarak elde ediş olgusu vardır [19,20].

Savın üçüncü bölümünde, Olasılıkçıl Evrim Kuramında yer alan Kronecker Çarpımı, çarpımın getirdiği esneklik olgusundan yola çıkarak çarpım sonucunda elde edilen yöneyler ve bu yöneylerin hangi uzayda bulunduğu olguları Kronecker Üslü Uzaylar olgusu olarak gündeme getirilmiştir. İki ögeli yöneylerin ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci Kronecker üslüleri; üç ögeli yöneylerin ikinci ve üçüncü Kronecker üslüleri incelenmiş ve bu incelemeler sonunda iki ögeli yöneyler için genel bir anlatım geliştirilmiştir [21–23].

Savın dördüncü bölümünde, savın en önemli olgularından biri olan İki Nesnecik Sorununa Olasılıkçıl Evrim Kuramı bağlamında yaklaşıma yer verilmiştir [5, 24, 25]. İki nesnecik sorununun başal devinbilimde Hamilton işlevi [4, 24] yardımıyla elde edilen anlatımları ve bu anlatımlardan yola çıkarak dizgenin devinim denklemleri oluşturulmuştur. Bu denklemlerden yola çıkarak kütle özeğinin deviniminin ve nesneciklerarası bağıl deviniminin ayrıştırılış olgularına yer verilmiştir. Bağıl

konaçlar (ing: coordinates) kullanılarak dizgenin doğrucul bağıl devinim denklemleri yazılmış ve bu durum için başlangıç yöneylerinin doğrucul bağımlı ve bağımsız olduğu durumlar incelenmiştir. Açısal devinirlik olgusundan yararlanarak dizgenin çembercil konaçlardaki devinimi incelenmiş ve dizgenin Hamilton işlevi yeniden yazılmıştır. Çembercil konaçlarda yarıçapçıl devinimin belirlenmesi ile r ve t arasındaki ilişki tümlev altında gösterilmiştir. Bu gösterim analitik olarak tümlevlenebilir olduğundan, tümlev alınarak analitik çözüme ulaşılabilir.

Savda çembercil konaçların incelenişinin ardından elde edilen Hamilton işlevinde türev alarak $r(t)$ ve $p_r(t)$ işlevlerini verecek olan iki sıradan türevli denklem elde edilir. Bu iki sıradan türevli denklemde uzay genişletimi [3, 6, 26] olgusunu uygulayarak altı OLEVKU bağıntısı yazılır. Bu altı OLEVKU bağıntısının en önemli özelliği tümünün en çok ikinci dereceden sağ yanlı işlevler oluşudur [27, 28].

Savın beşinci bölümünde Padé yaklaşımları olgusuna yer verilmiştir. Padé oranları ile soruna iki çokterimlinin oranını alarak yaklaşılır. Bu çalışmada Padé yaklaşımları $R[a, b]$ ikilileri olarak yazılmış ve bu anlatımda a payda, b payda bulunan çokterimlinin derecesini simgeler. Farklı ikililerin simgelediği Padé yaklaşımlarının denklem dizgesi kullanılarak elde edilmesi ve denklem dizgesinin çözülmesi ile verilen sorun için sonuçların elde edilişi örneklendirilerek anlatılmıştır.

Savın altıncı ve son bölümünde, savın asıl amacı olan Olasılıkçıl Evrim Kuramı ile Padé yaklaşımları yönteminin birleştirilmesi olgusuna yer verilmiştir [29]. Bu birleştirme çalışmasında, gündemimizdeki iki nesnel sorunun son evresi olarak elde edilen OLEVKU bağıntılarına Padé oranları ile yaklaşım uygulamak ve OLEVKU kullanılarak elde edilen sonuçlar ile Padé yaklaşımları uygulanılışından sonra elde edilen sonuçların karşılaştırılmasına yer verilmiştir.

2. OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI

2.1 Olasılıkçıl Evrim Kuramına Giriş

Olasılıkçıl Evrim Kuramı (OLEVKU), Sıradan Türevli Denklemlerin (STD) çözümü için geliştirilen bir yöntemdir. Bunun için öncelikle (2.1) ile verilen ve t değişkenine bağlı olan bir denklem takımını alınabilir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \quad (2.1)$$

t değişkenine olan bu bağımlılık özerk olmadığını gösterir. Ancak başlangıç değeri a_{n+1} olan yeni bir $x_{n+1}(t)$ değişkeni ekleyerek özerk olmayan yapıdaki bu denklem takımını özerk hale getirmek olanaklıdır. x_n^e açılım (expansion) noktalarını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\mathbf{s}(t) \equiv \left[\left(x_1(t) - x_1^{(e)} \right) \dots \left(x_n(t) - x_n^{(e)} \right) \right]^T \quad (2.2)$$

(2.1) eşitliği (2.2) kullanılarak yeniden yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{s}(t)), \quad \mathbf{s}(0) = \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - \mathbf{x}^{(e)} \quad (2.3)$$

Olasılıkçıl evrim kuramında kullanılan önemli olgulardan biri de Kronecker çarpımıdır. Sırasıyla boyutları n_b ve n_c olan b ve c yöneylerinin Kronecker çarpımı aşağıdaki şekilde gösterilir. Çarpım sonucunda elde edilen yöney $n_b \times n_c$ boyutundadır.

$$\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} b_1 \mathbf{c} \\ \vdots \\ b_{n_b} \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Benzer şekilde bir a yöneyinin m . Kronecker üslüsü aşağıdaki anlatım ile verilir.

$$\mathbf{a}^{\otimes m} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \dots \otimes \mathbf{a} \quad (2.5)$$

Yukarıda verilen Kronecker çarpımına ait özellikler kullanılarak sağ yan yöneyini Kronecker üslüleri kullanarak aşağıda verilen bağıntı ile yazabiliriz.

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j \mathbf{s}(t)^{\otimes j} \quad (2.6)$$

$\mathbf{s}(t)$ yöneyinin ikinci Kronecker üslüsü (2.7) ile verilir.

$$\mathbf{s}^{\otimes 2}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t)^2 \\ s_1(t)s_2(t) \\ s_2(t)s_1(t) \\ s_2(t)^2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

(2.7) yöneyine dik olarak aşağıda verilen \mathbf{u} yöneyini alabiliriz.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Ancak (2.7) eşitliğindeki $\mathbf{s}(t)$ yöneyine dik olarak bulunabilecek bu \mathbf{u} yöneyi tek türlü değildir. Nedeni kronecker üslülerinin özel yapısından kaynaklanmaktadır. Bu rastgele seçilebilirlik aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak verir.

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{j!} \{ \nabla f^{\otimes j} \}_{\mathbf{s}=\mathbf{0}}^T, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2.9)$$

2.1.1 Uzay genişletimi

Yukarıda doğrudan $\mathbf{s}(t)$ bağımlılığı olan \mathbf{f} işlevlerini, aşağıdaki eşitliklerden faydalanarak yeniden yazmak olanaklıdır. Bunu yaparak $\mathbf{s}(t)$ işlevlerine bağlı olan u işlevleri tanımlanır ve dolayısı ile \mathbf{f} işlevlerinin $\mathbf{s}(t)$ işlevlerine olan bağımlılıkları u işlevleri üzerinden verilmiş olunur.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(u_1(\mathbf{s}(t)), \dots, u_m(\mathbf{s}(t))) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(\mathbf{s}(t)) &= f(u_1(\mathbf{s}(t)), \dots, u_m(\mathbf{s}(t)))^T \nabla_{\mathbf{s}} u_j(\mathbf{s}(t)), \\ j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.11)$$

Bu işlemler, aşağıdaki eşitlik ile verilen Lie Operatörünün ($\widehat{\mathcal{L}}$) tanımlanmasına olanak verir [2].

$$\widehat{\mathcal{L}} = f(u_1(\mathbf{s}(t)), \dots, u_m(\mathbf{s}(t)))^T \nabla_{\mathbf{s}} \quad (2.12)$$

Lie operatöründen faydalanarak (2.11) eşitliği aşağıdaki eşitlik ile yeniden yazılabilir.

$$\dot{u}_j(\mathbf{s}(t)) = \widehat{\mathcal{L}} u_j(\mathbf{s}(t)), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.13)$$

Aşağıdaki bağıntı ile verilen sıradan türevli denklemi ikinci derece sağ yanlı bir OLEVKU bağıntısı olarak yazabildiğimizi söyleyebiliriz. Yazının devamında bu yazım ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}(t)) \equiv \beta \mathbf{I} \mathbf{s}(t)^{\otimes 1} + \mathbf{F}_2 \mathbf{s}(t)^{\otimes 2} \quad (2.14)$$

En genel hali ile $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ başlangıç değeri olan ikinci derece sağ yanlı bir OLEVKU bağıntısı aşağıdaki şekilde verilebilir. Burada ele alınan \mathbf{x} yöneyi n öğeli ise, \mathbf{F}_0 $n \times 1$, \mathbf{F}_1 $n \times n$ ve \mathbf{F}_2 $n \times n^2$ boyutundadır.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2 \mathbf{x}(t)^{\otimes 2}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{a}\end{aligned}\quad (2.15)$$

2.1.2 Değişmezlik eklenimli uzay genişletimi

a_{n+1} değişmezi eklenerek uzay genişletilebilir. Bu değişmezin eklenimi ile \mathbf{F}_0 0 olarak ve \mathbf{F}_1 β katsayılı I birim dizeyine orantılı olarak elde edilir. Bu işlemler sonunda elde edilen \mathbf{F}_2 dizeyini \mathbf{F} olarak gösterelim.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(t) &\equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ a_{n+1} \end{bmatrix}, \quad + \text{Esneklik Eklenimi} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \beta \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(t)^{\otimes 2}, \\ \bar{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{a}\end{aligned}\quad (2.16)$$

(2.16) ile verilen sıradan türevli denklemin sağ yanını $e^{\beta t}$ parantezine alarak derecede yalınlaştırım yapmak ve aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklıdır. Bunu yaparak sağ yandaki özerkliği yitirmiş oluyoruz.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(t) &\equiv e^{\beta t} \bar{\bar{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= e^{\beta t} \mathbf{F} \bar{\bar{\mathbf{x}}}(t)^{\otimes 2}, \\ \bar{\bar{\mathbf{x}}}(0) &= \mathbf{a}\end{aligned}\quad (2.17)$$

Aşağıdaki eşitlik ile verilen ve t bağımlılığı bulunan bir u işlevi tanımlamak olanaklıdır. Bu tanımlamayı yaparak β değerinin 0 olmadığı durumlarda, t 'nin yörüngesini doğru olmaktan bir eğri olmaya doğru çevirmiş oluyoruz. Diğer bir deyişle uzay genişletimi ile zaman değişkeninin yörüngesini değiştirerek özerkliği yeniden sağlamış oluyoruz.

$$\begin{aligned}u &\equiv \frac{e^{\beta t} - 1}{\beta}, \quad \mathbf{y}(u) \equiv \bar{\bar{\mathbf{x}}}(t), \\ \frac{d\mathbf{y}}{du} &= \mathbf{F} \mathbf{y}(u)^{\otimes 2}, \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{a}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Yukarıda verilen tanımlamalardan yararlanarak $\mathbf{y}(u)$ 'nun m . Kronecker üslüsünün u 'ya göre türevi alınarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir. Bu işlem sırasında Leibniz kuralı ile

türev alınmaktadır.

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} (\mathbf{y}(u)^{\otimes m}) &= \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{y}(u)^{\otimes j} \otimes \frac{d\mathbf{y}(u)}{du} \otimes \mathbf{y}(u)^{\otimes(m-j-1)}, \\ &= \left(\sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{I}_n^{\otimes j} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes(m-j-1)} \right) \mathbf{y}(u)^{\otimes(m+1)}, \\ & \quad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.19)$$

(2.19) eşitliğinde büyük ayrıçlar arasında kalan anlatıma Bakaç Dizeyi (ing: Monocular Matrix) adı verilir. \mathbf{M} ile gösterilir. Bakaç dizeyi kullanılarak (2.19) eşitliği aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_m &\equiv \left(\sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{I}_n^{\otimes j} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes(m-j-1)} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{d}{du} (\mathbf{y}(u)^{\otimes m}) &= \mathbf{M}_m \mathbf{y}(u)^{\otimes(m+1)}, \\ \mathbf{y}(0)^{\otimes m} &= \mathbf{a}^{\otimes(m+1)} \quad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.20)$$

2.1.3 Tümlev denkleştirim

(2.20) eşitliğinde u 'ya göre tümlev alarak aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklıdır.

$$\mathbf{y}(u)^{\otimes m} = \mathbf{a}^{\otimes(m+1)} + \mathbf{M}_m \int_0^u d\mathbf{v} \mathbf{y}(v)^{\otimes(m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

(2.21) eşitliğinde $m = 1$ alarak aşağıdaki kalanı üç kat tümlevli çözüm eşitliğini yazmak olanaklıdır. Bu eşitliklerde yer alan \mathbf{T}_j dizeyleri Irakgörürler ya da Irakgörür Dizeyler (ing: Telescope Matrices) olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(u) &= \mathbf{a} + \mathbf{M}_1 \int_0^u d\mathbf{v} \mathbf{y}(v)^{\otimes 2} \\ &= \mathbf{T}_0 \mathbf{a} + u \mathbf{T}_1 \mathbf{a}^{\otimes 2} + \mathbf{T}_2 \int_0^u d\mathbf{v}_1 \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 \mathbf{y}(v_2)^{\otimes 3} \\ &= \sum_{j=0}^2 \frac{u^j}{j!} \mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes(j+1)} + \mathbf{T}_3 \int_0^u d\mathbf{v}_1 \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 \int_0^{v_2} d\mathbf{v}_3 \mathbf{y}(v_3)^{\otimes 4}\end{aligned}\quad (2.22)$$

(2.23) eşitliğinden de görülebileceği üzere m . Irakgörür Dizey, ilk m tane Bakaç Dizeyinin çarpımı ile elde edilir.

$$\mathbf{M}_0 \equiv \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{T}_m \equiv \mathbf{M}_0 \dots \mathbf{M}_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

(2.22) ile verilen eşitlikte kalanı $(m + 1)$ dereceli tümlev oluşturduğumuzda aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(u) &= \sum_{j=0}^m \frac{u^j}{j!} \mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes(j+1)} + \mathbf{T}_{m+1} \int_0^u d\mathbf{v}_1 \dots \int_0^{v_m} d\mathbf{v}_{m+1} \mathbf{y}(v_{m+1})^{\otimes(m+2)}, \\ & \quad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.24)$$

(2.24) eşitliğinde $m \rightarrow \infty$ iken kalan terimin sıfırlanacağı öngörümü ile aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\mathbf{y}(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes(j+1)} \quad (2.25)$$

2.1.4 Çözümün dolaysız üslü toplam dizisi'nde irakgörür dizey katsayılarının dördülleştirimi

Aşağıdaki eşitlikte yer alan \mathbf{T} irakgörür dizeyi $n \times n^{m+1}$ boyutundadır. Bu dizeyin $n^{m+1} \times 1$ boyutundaki bir \mathbf{a} yöneyi ile çarpılması sonucunda $n \times 1$ boyutunda bir yöney oluşacaktır. Buradaki \mathbf{S}_m dizeyi m . dördül irakgörür dizeydir.

$$\mathbf{T}_m \mathbf{a}^{\otimes(m+1)} \equiv \mathbf{S}_m(\mathbf{a}) \mathbf{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

(2.26) eşitliğinin geçerli olduğunu düşünerek aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\mathbf{y}(u) = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \mathbf{S}_j(\mathbf{a}) \right\} \mathbf{a} \quad (2.27)$$

(2.26) ve (2.27) eşitliklerini kullanarak çözümün dördül irakgörür toplamdizisinin u 'ya göre türevini alarak aşağıdaki eşitliğe ulaşabiliriz.

$$\frac{d\mathbf{y}(u)}{du} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{a}) \right\} \mathbf{a} \quad (2.28)$$

2.1.5 Denkleme sağ yan dördülleştirimi

Olasılıkçıl Evrim Kuramının en önemli olgularından biri olan Dördülleştirim (ing:Squarification) olgusunu kullanarak sıradan türevli denklemi aşağıdaki şekilde yazabiliriz. Burada $[$ ve $]$ uzbilimcil gösterim arasında kalan terim dördül terimi temsil eder.

$$\mathbf{F}\mathbf{y}(u)^{\otimes 2} = [\mathbf{F}, \mathbf{y}(u)] \mathbf{y}(u) \quad (2.29)$$

y 'nin s 'ler türünden nasıl yazıldığını biliyoruz. Bu bize sağ yan dördül dizeyinin toplamdizi açılımını aşağıdaki şekilde yazmamıza ve bu eşitlikte sağ yandaki işlemin doğrucul olması, sayıl olan $(u^j/j!)$ çarpanının dışarı çıkarılabilmesine olanak verir.

$$[\mathbf{F}, \mathbf{y}(u)] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_j(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \quad (2.30)$$

Aşağıdaki eşitlik ile sağ yanın toplamdizi açılımı verilmiştir. Bu eşitlik Kronecker üslülerinin sanki Cauchy çarpımı yapılcasına yazılmış halidir. Buradaki işlevlerin

hepsinde \mathbf{S} bağımlılığı vardır. Burada, önce eşitliğin ilk satırında j üzerinde değişken dönüşümü yaparak ikinci satır elde edilir. Sonrasında ikinci satırda üçgenil özdeşlik özelliğinden faydalanarak, j üzerindeki toplam başa alınabilir ve eşitlik $j = 0$ değerinden başlatılabilir duruma gelir. Tüm işlemler sonunda üçüncü satırda yer alan anlatıma ulaşılır.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{F}, \mathbf{y}(u)] \mathbf{y}(u) &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \mathbf{S}_j(\mathbf{a}) \right\} \mathbf{a} \\
&= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \sum_{j=k}^{\infty} \frac{u^{j-k}}{(j-k)!} \mathbf{S}_{j-k}(\mathbf{a}) \right\} \mathbf{a} \\
&= \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \mathbf{S}_{j-k}(\mathbf{a}) \right\} \mathbf{a} \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Yukarıda yapılan tanımlamaları ve (2.31) eşitliğini kullanılarak denklemin toplamdizi açılımını aşağıdaki şekilde yazabiliriz. Buradaki önemli olgu u 'nun üslülerinin birbirlerinden doğrucul bağımsız olduklarını biliyor olmamız. Bu bilgi ile aynı toplam altında kalan ve $(u^j/j!)$ katsayısına sahip olan terimlerin birbirine eşit olması gerekir.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{a}) \mathbf{a} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \mathbf{S}_{j-k}(\mathbf{a}) \mathbf{a} \quad (2.32)$$

2.1.6 Dördül irakgörür altında görüntüde ve dördül irakgörür'de özyineleyiş

Yukarıdaki eşitlikteki olgu OLEVKU için çok önemli olan özyineleyiş tanımına götürüyor. Aşağıdaki yer alan eşitlik ile verilen özyineleyiş yöneyler üzerinde olan bir özyineleyiştir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{a}) \mathbf{a} &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \mathbf{S}_{j-k}(\mathbf{a}) \mathbf{a} \\
j &= 0, 1, 2, \dots \quad \mathbf{S}_0 = \mathbf{T}_0 = \mathbf{I}_n \quad (2.33)
\end{aligned}$$

(2.33) eşitliğindeki a 'nın kaldırılmış halinde olan dizey eşitliğini öngörüyoruz. Bunun sağlanabilmesi için önceki yöney eşitliğinden bu eşitliğe geçişin tek türlü (unique) olması gerekiyor. Yöneyden dizey yapısına geçişte boyut büyüdüğünden, daima sıfırlanışların olabileceği olgusunu göz önünde bulundurarak, tek türlü yapı elde edilemeyeceğini varsayarsak, $\mathbf{S}_j(a)$ ve $\bar{\mathbf{S}}_j(a)$ olmak üzere 2 farklı dördül dizey alıyoruz. Bunu aşağıda yer alan ilk eşitlikte yerine yazıyoruz. $\mathbf{S}_j(a)$ ve $\bar{\mathbf{S}}_j(a)$ dizeylerinin farklı olduğu öngürümünden yola çıkarak aralarındaki farkı $\mathbf{R}_j(a)$ gibi

bir dizey ile gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{a}) &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \mathbf{S}_{j-k}(\mathbf{a}) \\
\mathbf{S}_j(\mathbf{a}) &\equiv \bar{\mathbf{S}}_j(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_j(\mathbf{a}), \quad \mathbf{R}_j(\mathbf{a}) \mathbf{a} = 0, \\
\bar{\mathbf{S}}_{j+1}(\mathbf{a}) &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \bar{\mathbf{S}}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \bar{\mathbf{S}}_{j-k}(\mathbf{a}) \\
\mathbf{R}_{j+1}(\mathbf{a}) &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \bar{\mathbf{S}}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \mathbf{R}_{j-k}(\mathbf{a}) \\
j &= 0, 1, 2, \dots \quad \bar{\mathbf{S}}_0 = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{R}_0(\mathbf{a}) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

(2.34) sırasayılı özyinelemenin her iki tarafı aşağıdaki toplam altına alınırsa,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \mathbf{R}_{j+1}(\mathbf{a}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \bar{\mathbf{S}}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \mathbf{R}_{j-k}(\mathbf{a}) \tag{2.35}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte türev alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \mathbf{R}_j(\mathbf{a}) \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} [\mathbf{F}, \bar{\mathbf{S}}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \mathbf{R}_j(\mathbf{a}) \\
\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \mathbf{R}_j(\mathbf{a}) &= \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} [\mathbf{F}, \bar{\mathbf{S}}_k(\mathbf{a}) \mathbf{a}] \right) \mathbf{R}_0(\mathbf{a}) \\
\mathbf{R}_j(\mathbf{a}) &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.36}$$

elde edilir. Burada yer alan üstel ifade 0 olamayacağından dolayı, (2.36)'nın son eşitliği gösteriyor ki eşitliğin sağlanabilmesi için $\mathbf{R}_j(\mathbf{a}) = 0$ olmalıdır.

Bu $\mathbf{R}_j(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ile ayrılabilir olduğu anlamına geliyor. Böylece $\mathbf{S}_j(\mathbf{a})$ ve $\mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{a})$ olarak iki ayrı toplam ile yazılabiliyor. Bu işlemi yaparak (2.33)'daki özyineleyişin dizeler üzerinde de doğrucul bir özyineleyiş olduğu gösterilmiş oldu.

Kanıtın Sonucu

Yukarıda verilen çözümlemeler bağlamında varılan bağıntı, Dördülleştirilmiş Irakgörür Dizeleri arasında var olduğu öngörülen özyineleyişin eşsiz nitelikli olarak geçerliliğinin kanıtıdır.

Uygulamcıl Sonuç

Aşağıda yeniden verilen özyineleyişlerin her ikisi de Olasılıkçıl Evrim Kuramı (OLEVKU) çözümlerinde kullanılabilecek geçerli olgulardır.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{a})\mathbf{a} &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k(\mathbf{a})\mathbf{a}] \mathbf{S}_{j-k}(\mathbf{a})\mathbf{a} \\ \mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{a}) &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k(\mathbf{a})\mathbf{a}] \mathbf{S}_{j-k}(\mathbf{a}) \\ j &= 0, 1, 2, \dots \quad \mathbf{S}_0 = \mathbf{T}_0 = \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (2.37)$$

O halde tüm dördül irakgörür dizelerin elde edilmişinde kullanılacak özyineleyiş aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{j+1}(\mathbf{a}) &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k(\mathbf{a})\mathbf{a}] \mathbf{S}_{j-k}(\mathbf{a}) \\ j &= 0, 1, 2, \dots \quad \mathbf{S}_0 = \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (2.38)$$

Uzay Genişletimi Sırasında Denklem Sayısının Eniyilenişi

Olasılıkçıl Evrim Kuramı'ndaki bir diğer önemli gelişme, sağ yanın en çok ikinci dereceden çok çok terimlilerden oluşabilmesi için kullanılan uzay genişletimi sırasında elde edilen denklem sayısındaki eniyilemedir. Bu sayede daha az denklem kullanılır ve elde edilen \mathbf{F}_j dizyelerinin boyutları da daha küçük olur.

3. KRONECKER ÜSLÜ UZAYLAR

3.1 Kronecker Üslü Uzaylar

Kronecker Üslü Uzaylar olgusu ilk olarak WSEAS 2016 toplantısı için hazırlanan genişletilmiş yazıda gündeme gelmiştir. Sonrasında Kronecker üslüne bağlı olarak uzay boyutu, öge sayısı ve ögelerin hangi kısıtlara sahip olduğu olguları daha ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu bölümde bunun ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilecektir.

Öncelikle farklı Kronecker üslüne ve öge sayıları için elde edilen yöneyleri inceleyelim. Bu yöneyler başlangıç yöneyi kullanılarak elde edilmektedir. n ögeli bir başlangıç yöneyi için m . Kronecker Üslü Uzayın ögeleri olan yöneyler n^m boyutundadır. Çalışma da yöney ögelerinin gösteriliminde de koyu renk kullanılmıştır.

3.1.1 İki elemanlı yöneyden üretilen Kronecker uzayları

İki ögeli bir s yöneyi alalım.

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Kronecker Üs : 2

$$\mathbf{s}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} s_1^2 \\ s_1 s_2 \\ s_2 s_1 \\ s_2^2 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{s}^{\otimes 2} \in \mathcal{K}_4$$

$$s_1^2 > 0, s_2^2 > 0, s_1 s_2 = s_2 s_1$$

$$\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2^{(4)} - \mathbf{e}_3^{(4)} \quad (3.3)$$

Bu \mathbf{u} taban yöneyi $\mathbf{s}^{\otimes 2}$ yöneyine dik olan bir yöneydir.

$$\mathbf{u}^T \mathbf{s}^{\otimes 2} = 0 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{e}_1^{(4)T} \mathbf{s}^{\otimes 2} > 0 \quad (3.5)$$

$$\mathbf{e}_4^{(4)T} \mathbf{s}^{\otimes 2} > 0 \quad (3.6)$$

Aşağıdaki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ yöneylerini tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{e}_1^{(4)} \rightarrow \mathbf{v}_1^T \mathbf{u} = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{e}_4^{(4)} \rightarrow \mathbf{v}_2^T \mathbf{u} = 0 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{v}_3 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_3^T \mathbf{u} = 0 \quad (3.9)$$

Bu bizim $\mathbf{s}^{\otimes 2}$ yöneyini aşağıdaki gibi yazabilmemize olanak verir.

$$\mathbf{s}^{\otimes 2} = c_1^2 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3^2 \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} c_1^2 \\ \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ c_3^2 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (3.10)$$

Burada c_1 ve c_3 belirsiz katsayılarında koşul var. Artılığı güvence altına almalıyız. Eksi değerleri alamaz. Belirsiz katsayılardaki bu durum doğrucul olmama olgusunu gündeme getiriyor. (3.5) ve (3.6) sırasayılı eşitliklerden kaynaklanan kısıtlardan dolayı altuzay oluşturamadığımızı söyleyebiliriz.

Kronecker Üs : 3

$$\mathbf{s}^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} s_1^3 \\ s_1^2 s_2 \\ s_2 s_1^2 \\ s_1 s_2^2 \\ s_2 s_1^2 \\ s_1 s_2^2 \\ s_2^2 s_1 \\ s_2^3 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (3.11)$$

Taban yöneyleri,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.13)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.15)$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{s}^{\otimes 3} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.16)$$

Aşağıda verilen yöneyleri tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2^{\otimes 3}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{8 \times 1}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{s}^{\otimes 3} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + c_4 \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} c_1 \\ \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_4}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_4}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_4}{\sqrt{3}} \\ c_2 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (3.18)$$

Belirsiz katsayılar üzerinde herhangi bir koşul bulunmadığından, hem artı hem de artı olmayan değerleri alabileceğinden altuzay oluşturur diyebiliriz.

Kronecker Üs : 4

$\mathbf{s}^{\otimes 4}$ yöneyi 16×1 türünde olan bir yöneydir. Parantezler arasında verilen altsırasayılar yöneyin kaçınıcı ögesi olduğuna işaret eder.

$$\mathbf{s}_{(1)}^{\otimes 4} = s_1^4 \quad (3.19)$$

$$\mathbf{s}_{(2)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(3)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(5)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(9)}^{\otimes 4} = s_1^3 s_2 \quad (3.20)$$

$$\mathbf{s}_{(4)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(6)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(7)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(10)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(11)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(13)}^{\otimes 4} = s_1^2 s_2^2 \quad (3.21)$$

$$\mathbf{s}_{(8)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(12)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(14)}^{\otimes 4} = \mathbf{s}_{(15)}^{\otimes 4} = s_1 s_2^3 \quad (3.22)$$

$$\mathbf{s}_{(16)}^{\otimes 4} = s_2^4 \quad (3.23)$$

$$\mathbf{e}_1^{(16)T} \mathbf{s}^{\otimes 4} > 0 \quad \mathbf{e}_7^{(4)T} \mathbf{s}^{\otimes 4} > 0 \quad (3.24)$$

$$\mathbf{e}_{16}^{(4)T} \mathbf{s}^{\otimes 4} > 0 \quad \mathbf{e}_{10}^{(4)T} \mathbf{s}^{\otimes 4} > 0 \quad (3.25)$$

$$\mathbf{e}_4^{(4)T} \mathbf{s}^{\otimes 4} > 0 \quad \mathbf{e}_{11}^{(4)T} \mathbf{s}^{\otimes 4} > 0 \quad (3.26)$$

$$\mathbf{e}_6^{(4)T} \mathbf{s}^{\otimes 4} > 0 \quad \mathbf{e}_{13}^{(4)T} \mathbf{s}^{\otimes 4} > 0 \quad (3.27)$$

Taban yöneyleri,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.28)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{u}_5 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.32)$$

$$\mathbf{u}_6 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_2^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.33)$$

$$\mathbf{u}_7 = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.34)$$

$$\mathbf{u}_8 = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.35)$$

$$\mathbf{u}_9 = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.36)$$

$$\mathbf{u}_{10} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.37)$$

$$\mathbf{u}_{11} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{s}^{\otimes 4} = 0, \quad i = 1, \dots, 11 \quad (3.39)$$

Aşağıda verilen yöneyleri tanımlayabiliriz. Kullanılan üstsırayılar yöneyin kaçınıcı ögesi olduğuna işaret eder.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1^{\otimes 4}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2^{\otimes 4} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{v}_3^{(2)} = \mathbf{v}_3^{(3)} = \mathbf{v}_3^{(5)} = \mathbf{v}_3^{(9)} = \frac{1}{\sqrt{4}} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{v}_4^{(8)} = \mathbf{v}_4^{(12)} = \mathbf{v}_4^{(14)} = \mathbf{v}_4^{(15)} = \frac{1}{\sqrt{4}} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{v}_5^{(4)} = \mathbf{v}_5^{(6)} = \mathbf{v}_5^{(7)} = \mathbf{v}_5^{(10)} = \mathbf{v}_5^{(11)} = \mathbf{v}_5^{(13)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{s}^{\otimes 4} = c_1^4 \mathbf{v}_1 + c_2^4 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + c_4 \mathbf{v}_4 + c_5 \mathbf{v}_5 \quad (3.44)$$

c_1 ve c_2 belirsiz katsayılarında bulunan artı değer alma koşulu doğruculluğu bozuyor, bu nedenle altuzay oluşturamadığını söyleyebiliriz. Bu örnekten de görülebileceği gibi çift sayılı Kronecker üslü olduğu durumda yine altuzay oluşturamama olgusu gündeme gelmiştir. İncelemelerimiz devam edecektir.

Kronecker Üs : 5

$\mathbf{s}^{\otimes 5}$, 32x1 türünde olan bir yöneydir. Elemanları aşağıda verildiği gibidir. Alt sırasayı olarak görünen sayılar yöneyin kaçınıcı ögesi olduğuna işaret eder.

$$\mathbf{s}_{(1)}^{\otimes 5} = s_1^5 \quad (3.45)$$

$$\mathbf{s}_{(2)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(3)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(5)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(9)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(17)}^{\otimes 5} = s_1^4 s_2 \quad (3.46)$$

$$\mathbf{s}_{(4)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(6)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(7)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(10)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(11)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(13)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(18)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(19)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(21)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(25)}^{\otimes 5} = s_1^3 s_2^2 \quad (3.47)$$

$$\mathbf{s}_{(8)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(12)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(14)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(15)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(20)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(22)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(23)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(26)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(27)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(29)}^{\otimes 5} = s_1^2 s_2^3 \quad (3.48)$$

$$\mathbf{s}_{(16)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(24)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(28)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(30)}^{\otimes 5} = \mathbf{s}_{(31)}^{\otimes 5} = s_1 s_2^4 \quad (3.49)$$

$$\mathbf{s}_{(32)}^{\otimes 5} = s_2^5 \quad (3.50)$$

Taban yöneyleri,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1^{\otimes 4} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.51)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1^{\otimes 4} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1^{\otimes 4} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_1^{\otimes 4} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 4} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{u}_5 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.55)$$

$$\mathbf{u}_6 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.56)$$

$$\mathbf{u}_7 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.57)$$

$$\mathbf{u}_8 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.58)$$

$$\mathbf{u}_9 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{u}_{10} = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.60)$$

$$\mathbf{u}_{11} = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.61)$$

$$\mathbf{u}_{12} = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{u}_{13} = \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 3} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{u}_{14} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{u}_{15} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.65)$$

$$\mathbf{u}_{16} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.66)$$

$$\mathbf{u}_{17} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{u}_{18} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.68)$$

$$\mathbf{u}_{19} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.69)$$

$$\mathbf{u}_{20} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.70)$$

$$\mathbf{u}_{21} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.71)$$

$$\mathbf{u}_{22} = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} - \mathbf{e}_2^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{u}_{23} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 4} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 3} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{u}_{24} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 4} - \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{u}_{25} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 4} - \mathbf{e}_2^{\otimes 3} \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.75)$$

$$\mathbf{u}_{26} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 4} - \mathbf{e}_2^{\otimes 4} \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.76)$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{s}^{\otimes 5} = 0, \quad i = 1, \dots, 26 \quad (3.77)$$

Aşağıda verilen yöneyleri tanımlayabiliriz. Bu \mathbf{v}_i yöneyleri, 32×1 türünde olan yöneylerdir. ($i = 1, 2, \dots, 6$)

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1^{\otimes 5}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2^{\otimes 5} \quad (3.78)$$

Üst sırasayı olarak görünen sayılar yöneyin kaçınıcı öğesi olduğuna işaret eder.

$$\mathbf{v}_3^{(2)} = \mathbf{v}_3^{(3)} = \mathbf{v}_3^{(5)} = \mathbf{v}_3^{(9)} = \mathbf{v}_3^{(17)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{v}_4^{(4)} = \mathbf{v}_4^{(6)} = \mathbf{v}_4^{(7)} = \mathbf{v}_4^{(10)} = \mathbf{v}_4^{(11)} = \mathbf{v}_4^{(13)} = \mathbf{v}_4^{(18)} = \mathbf{v}_4^{(19)} = \mathbf{v}_4^{(21)} = \mathbf{v}_4^{(25)} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{v}_5^{(8)} = \mathbf{v}_5^{(12)} = \mathbf{v}_5^{(14)} = \mathbf{v}_5^{(15)} = \mathbf{v}_5^{(20)} = \mathbf{v}_5^{(22)} = \mathbf{v}_5^{(23)} = \mathbf{v}_5^{(26)} = \mathbf{v}_5^{(27)} = \mathbf{v}_5^{(29)} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{v}_6^{(16)} = \mathbf{v}_6^{(24)} = \mathbf{v}_6^{(28)} = \mathbf{v}_6^{(30)} = \mathbf{v}_6^{(31)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{s}^{\otimes 5} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + c_4 \mathbf{v}_4 + c_5 \mathbf{v}_5 + c_6 \mathbf{v}_6 \quad (3.83)$$

Belirsiz katsayılara ait herhangi bir kısıt olmadığından altuzay oluşturabilir diyebiliriz.

3.1.2 Üç elemanlı yöneyden üretilen Kronecker uzayları

Üç öğeli bir \mathbf{s} yöneyi alalım.

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Kronecker Üs : 2

$$\mathbf{s}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} s_1^2 \\ s_1 s_2 \\ s_1 s_3 \\ s_2 s_1 \\ s_2^2 \\ s_2 s_3 \\ s_3 s_1 \\ s_3 s_2 \\ s_3^2 \end{bmatrix}_{9 \times 1} \quad (3.85)$$

Taban yöneyleri,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.86)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.87)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.88)$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{s}^{\otimes 2} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.89)$$

$$\mathbf{e}_1^{(9)T} \mathbf{s}^{\otimes 2} > 0 \quad (3.90)$$

$$\mathbf{e}_5^{(9)T} \mathbf{s}^{\otimes 2} > 0 \quad (3.91)$$

$$\mathbf{e}_9^{(9)T} \mathbf{s}^{\otimes 2} > 0 \quad (3.92)$$

Aşağıda verilen yöneyleri tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1^{(9)}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_5^{(9)}, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_9^{(9)} \quad (3.93)$$

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9 \times 1}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9 \times 1}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}_{9 \times 1} \quad (3.94)$$

$$\mathbf{s}^{\otimes 2} = c_1^2 \mathbf{v}_1 + c_2^2 \mathbf{v}_2 + c_3^2 \mathbf{v}_3 + c_4 \mathbf{v}_4 + c_5 \mathbf{v}_5 + c_6 \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} c_1^2 \\ c_4 \\ \frac{c_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_5}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_2^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_6}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_5}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_6}{\sqrt{2}} \\ c_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

c_1, c_2, c_3 belirsiz katsayılarında koşul var. Artılığı güvence altına almalıyız. Eksik değerleri alamaz. Belirsiz katsayılardaki bu durum doğrucul olmama olgusunu gündeme getiriyor. (75),(76) ve (77) sırasayılı eşitliklerden kaynaklanan kısıtlardan dolayı altuzay oluşturamadığımızı söyleyebiliriz.

Kronecker Üs : 3

$\mathbf{s}^{\otimes 3}$ yöneyi 27×1 türünde olan bir yöneydir. Altsırasayılar yöneyin kaçınıcı ögesi olduğuna işaret eder.

$$\mathbf{s}_{(1)}^{\otimes 3} = s_1^3, \quad \mathbf{s}_{(14)}^{\otimes 3} = s_2^3, \quad \mathbf{s}_{(27)}^{\otimes 3} = s_3^3 \quad (3.96)$$

$$\mathbf{s}_{(2)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(4)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(10)}^{\otimes 3} = s_2 s_1^2, \quad \mathbf{s}_{(18)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(24)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(26)}^{\otimes 3} = s_2 s_3^2 \quad (3.97)$$

$$\mathbf{s}_{(3)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(7)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(19)}^{\otimes 3} = s_3 s_1^2, \quad \mathbf{s}_{(15)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(17)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(23)}^{\otimes 3} = s_3 s_2^2 \quad (3.98)$$

$$\mathbf{s}_{(5)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(11)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(13)}^{\otimes 3} = s_1 s_2^2, \quad \mathbf{s}_{(9)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(21)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(25)}^{\otimes 3} = s_1 s_3^2 \quad (3.99)$$

$$\mathbf{s}_{(6)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(8)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(12)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(16)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(20)}^{\otimes 3} = \mathbf{s}_{(22)}^{\otimes 3} = s_1 s_2 s_3 \quad (3.100)$$

Taban yöneyleri,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.101)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \quad (3.102)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.103)$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1^{\otimes 2} \quad (3.104)$$

$$\mathbf{u}_5 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.105)$$

$$\mathbf{u}_6 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} - \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.106)$$

$$\mathbf{u}_7 = \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.107)$$

$$\mathbf{u}_8 = \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2^{\otimes 2} \quad (3.108)$$

$$\mathbf{u}_9 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3^{\otimes 2} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (3.109)$$

$$\mathbf{u}_{10} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3^{\otimes 2} - \mathbf{e}_3^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.110)$$

$$\mathbf{u}_{11} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3^{\otimes 2} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (3.111)$$

$$\mathbf{u}_{12} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3^{\otimes 2} - \mathbf{e}_3^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.112)$$

$$\mathbf{u}_{13} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.113)$$

$$\mathbf{u}_{14} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (3.114)$$

$$\mathbf{u}_{15} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.115)$$

$$\mathbf{u}_{16} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (3.116)$$

$$\mathbf{u}_{17} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (3.117)$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{s}^{\otimes 3} = 0, \quad i = 1, \dots, 17 \quad (3.118)$$

Aşağıda verilen yöneyleri tanımlayabiliriz. Üst sırasayılar yöneyin kaçınıcı ögesi olduğuna işaret eder.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1^{\otimes 3}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2^{\otimes 3}, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3^{\otimes 3} \quad (3.119)$$

$$\mathbf{v}_4^{(2)} = \mathbf{v}_4^{(4)} = \mathbf{v}_4^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{v}_9^{(18)} = \mathbf{v}_9^{(24)} = \mathbf{v}_9^{(26)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (3.120)$$

$$\mathbf{v}_5^{(3)} = \mathbf{v}_5^{(7)} = \mathbf{v}_5^{(19)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{v}_7^{(15)} = \mathbf{v}_7^{(17)} = \mathbf{v}_7^{(23)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (3.121)$$

$$\mathbf{v}_6^{(5)} = \mathbf{v}_6^{(11)} = \mathbf{v}_6^{(13)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{v}_8^{(9)} = \mathbf{v}_8^{(21)} = \mathbf{v}_8^{(25)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (3.122)$$

$$\mathbf{v}_{10}^{(6)} = \mathbf{v}_{10}^{(8)} = \mathbf{v}_{10}^{(12)} = \mathbf{v}_{10}^{(16)} = \mathbf{v}_{10}^{(20)} = \mathbf{v}_{10}^{(22)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{\otimes 3} &= c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + c_4 \mathbf{v}_4 + c_5 \mathbf{v}_5 + c_6 \mathbf{v}_6 + c_7 \mathbf{v}_7 \\ &\quad + c_8 \mathbf{v}_8 + c_9 \mathbf{v}_9 + c_{10} \mathbf{v}_{10} \end{aligned} \quad (3.124)$$

Görüldüğü üzere belirsiz katsayılar da doğruculluğu bozan herhangi bir kısıt bulunmamaktadır. Böylece altuzay oluşturabilir diyebiliriz.

Sonuç

Kronecker Üslü Uzaylar ile ilgili yapılan bu çalışma sonucunda yöneylerin öge sayısı ne olursa olsun çift sayılı Kronecker üslülerinde altuzay oluşmazken, tek sayılı Kronecker üslülerinde altuzay oluşabilmektedir.

3.1.3 Yöneyleerin dolaysız ya da Kronecker dördüllerinin gömülü olduğu altuzay

Burada önceki yapılan çalışmalar göz önüne alınarak Kronecker dördül durumu için genel bir yapı elde edilmeye çalışılmıştır. Burada $\mathbf{e}_i^{(n)}$ yöneyleri, n ögeli standart birim yöneylerdir.

$$\mathbf{x}^{\otimes 2} \equiv \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j^{(n)} \right)^{\otimes 2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mathbf{e}_i^{(n)} \otimes \mathbf{e}_j^{(n)} \quad (3.125)$$

$$\mathbf{e}_{j_1}^{(n)T} \mathbf{e}_{j_2}^{(n)} = \delta_{j_1, j_2}, \quad 1 \leq j_1, j_2 \leq n \quad (3.126)$$

(3.125) sırasayılı eşitliği yeni öbekler kullanarak aşağıdaki biçimde yeniden yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\otimes 2} &= \sum_{j=1}^n x_j^2 \left(\mathbf{e}_j^{(n)} \otimes \mathbf{e}_j^{(n)} \right) \\ &\quad + \sum_{j_1=1}^{n-1} \sum_{j_2=j_1+1}^n x_{j_1} x_{j_2} \left(\mathbf{e}_{j_1}^{(n)} \otimes \mathbf{e}_{j_2}^{(n)} + \mathbf{e}_{j_2}^{(n)} \otimes \mathbf{e}_{j_1}^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (3.127)$$

Dikgenlik olgusunu kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\left(\mathbf{e}_{j_1}^{(n)} \otimes \mathbf{e}_{j_2}^{(n)} \right)^T \left(\mathbf{e}_{k_1}^{(n)} \otimes \mathbf{e}_{k_2}^{(n)} \right) = \left(\mathbf{e}_{j_1}^{(n)T} \mathbf{e}_{k_1}^{(n)} \right) \otimes \left(\mathbf{e}_{j_2}^{(n)T} \mathbf{e}_{k_2}^{(n)} \right) = \delta_{j_1, k_1} \delta_{j_2, k_2} \quad (3.128)$$

$$\mathbf{e}_j^{(n)} \otimes \mathbf{e}_j^{(n)} = \mathbf{e}_{(j-1)n+j}^{(n^2)} \quad (3.129)$$

$$\mathbf{e}_{j_1}^{(n)} \otimes \mathbf{e}_{j_2}^{(n)} = \mathbf{e}_{(j_1-1)n+j_2}^{(n^2)}, \quad \mathbf{e}_{j_2}^{(n)} \otimes \mathbf{e}_{j_1}^{(n)} = \mathbf{e}_{(j_2-1)n+j_1}^{(n^2)} \quad (3.130)$$

Bunların, (3.127) sırasayılı eşitlikte kullanımı aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak sağlar.

$$\mathbf{x}^{\otimes 2} = \sum_{j=1}^n x_j^2 \mathbf{e}_{(j-1)n+j}^{(n^2)} + \sum_{j_1=1}^{n-1} \sum_{j_2=j_1+1}^n x_{j_1} x_{j_2} \left(\mathbf{e}_{(j_1-1)n+j_2}^{(n^2)} + \mathbf{e}_{(j_2-1)n+j_1}^{(n^2)} \right) \quad (3.131)$$

(3.131) sırasayılı eşitlikteki toplananların toplam sayısını bulmak için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$n_{2KT} = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2} \quad (3.132)$$

Eğer, (3.131) sırasayılı eşitlikteki toplananların toplam sayısı n_T ile simgelenecek olursa, (3.132) sırasayılı eşitlikteki de yararlanarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$n_T = n + n_{2KT} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (3.133)$$

Toplanan sayısı bulunduktan sonra, sıra (3.131) sırasayılı eşitlikteki yöneyleri sıralı adlandırılma gelir. Bu amaçla, tek bir sırasayı olarak j kullanılabilir. (3.131) sırasayılı eşitlikteki birim yöneyleri, soldan sağa sırasayılandırım durumunda, \mathbf{v}_j ile simgelersek, j sıralandırım sayısı için,

$$j \in \mathbb{Z}_{\frac{n(n+1)}{2}}^+ \quad (3.134)$$

yazılabilir. (3.131) sırasayılı eşitlikteki ilk n toplanan için n sayıda taban yöneyi tanımlanabilir. Bu amaçla, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\mathbf{v}_j \equiv \mathbf{e}_{(j-1)n+j}^{(n^2)}, \quad j \in \mathbb{Z}_n^+ \quad (3.135)$$

Öte yandan, (3.131) sırasayılı eşitlikteki iki katlı sonlu toplamın toplananlarının yöneylerinden üretilen taban yöneyleri de aşağıdaki eşitlikler ile yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{j(j_1, j_2)} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}_{(j_1-1)n+j_2}^{(n^2)} + \mathbf{e}_{(j_2-1)n+j_1}^{(n^2)} \right) \\ & \quad j_1 \in \mathbb{Z}_{n-1}^+, \quad j_1 + 1 \leq j_2 \leq n \\ j(j_1, j_2) &\equiv \left(n - \frac{j_1}{2} - \frac{1}{2} \right) j_1 + j_2, \end{aligned} \quad (3.136)$$

Burada sıralayışı sağlayan ve j_1 ile j_2 'ye bağımlı olan tamsayı işlevcil anlatımının üretiliş kısa ayrıntıları aşağıdaki eşitliklerle verilmektedir.

$$\begin{aligned}
j(j_1, j_2) &\equiv \underbrace{n}_{1. \text{ Top.}} + \underbrace{(n-1) + (n-2) + \cdots + (n-j+1)}_{j_1 \text{'in özünden bir küçük değerlerindeki durumların sayısı}} + \underbrace{j_2 - j_1}_{j_2 \text{'den katkı}}, \\
&\quad \left(n - \frac{j_1}{2} - \frac{1}{2} \right) j_1 + j_2, \quad j_1 \in \mathbb{Z}_{n-1}^+, \quad j_1 + 1 \leq j_2 \leq n \\
&= n + \sum_{k=1}^{j_1-1} (n-k) + j_2 - j_1
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Böylece, bir taban takımı oluşturulmuş olur. Bunlar türünden (3.131) sırasayılı eşitliği yeniden, aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{\otimes 2} &= \sum_{j=1}^n x_j^2 \mathbf{v}_j + \sum_{j_1=1}^{n-1} \sum_{j_2=j_1+1}^n \sqrt{2} x_{j_1} x_{j_2} \mathbf{v}_{j(j_1, j_2)}, \\
j(j_1, j_2) &\equiv \left(n - \frac{j_1}{2} - \frac{1}{2} \right) j_1 + j_2, \\
j_1 &\in \mathbb{Z}_{n-1}^+, \quad j_1 + 1 \leq j_2 \leq n
\end{aligned} \tag{3.138}$$

Sonuç

Daha öncede belirtildiği gibi, tüm bu yapılan çalışmalar sonucunda söyleyebiliriz ki, tek sayılı Kronecker üslüleri altuzay oluşturabilir. Ancak çift sayılı Kronecker üslülerinin daha özel bir durum olan katman (manifold) oluşturduğunu söyleyebiliriz. Elde edilen bu sonuçlar eşliğinde katman (manifold) kavramı ile ilişkili olan aşağıdaki topolojik tanımları vermekte yarar vardır.

3.1.4 Katman(Çokkatlı), Harita(Çizin), Atlas kavramları

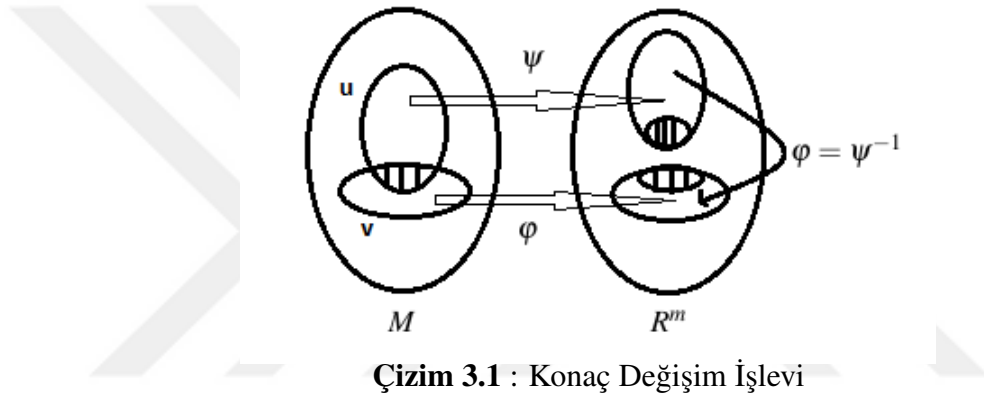
Homeomorfizma: A ve B topolojik uzaylar olmak üzere, A 'dan B 'ye sürekli, birebir, örten ve tersi de sürekli bir gönderime **homeomorfizma** denir.

Topolojide, verilen bir topolojik uzay topluluğu için homeomorfizma sınıflarını bulmak ve bu uzayları bu sınıflara göre sınıflandırmak temel problemlerden biridir. Örneğin, tüm 1 boyutlu çokkatlıların (manifold) homeomorfizma sınıfları bilinmektedir. 1 boyutlu bağlantılı bir çokkatlı, ya $(0, 1)$ açık aralığına, ya $[0, 1]$ kapalı aralığına, ya $(0, 1]$ aralığına ya da çembere homeomorfiktir (eşyapılıdır).

İki boyutlu çokkatlılara yüzey denir. Tıkız, bağlantılı bir yüzeyin homeomorfizma sınıfı, Euler sayısı ve yön verilebilir olup olmadığıyla belirlenir.

Tanım: M herhangi bir topolojik uzay ve $U \subset M$ açık olsun. $\psi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ işlevi bir homeomorfizma ise ψ 'ye M üzerinde m -boyutlu konaç dizgesi (m-dimensional chart) denir. M üzerindeki m -boyutlu konaç dizgelerinin bir ailesi \mathcal{A} olsun.

- i) Eğer \mathcal{A} 'daki konaç dizgesi işlevlerinin tanım kümesinin birleşimi M 'ye eşit oluyor ve
- ii) $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ve $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, M üzerinde $U \cap V \neq \emptyset$ olan \mathcal{A} 'nın iki ögesi için konaç değişimi(change of coordinates) olarak isimlendirilen, $\phi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ işlevi bir C^∞ difeomorfizma oluyor ise \mathcal{A} 'ya M üzerinde C^∞ atlas denir.



Eğer yukarıdaki tanımda sadece i) koşulunu alırsak; yani $\forall x \in M$ için bu noktanın \mathbb{R}^m 'ye homeomorfik olan bir açık komşuluğu bulunabiliyorsa, bu çokkatlıya topolojik çokkatlı denir.

Bir küme üzerinde birden fazla atlas tanımlanabilir. \mathcal{A} , M Hausdorff topolojik uzayı üzerinde bir atlas olsun. \mathcal{A} 'nın öğeleriyle düzgün örtüşen her konaç dizgesi, yine \mathcal{A} 'nın ögesi oluyorsa, \mathcal{A} 'ya M üzerinde bir tam atlas denir.

\mathcal{A} , M topolojik uzayı üzerinde bir atlas ise \mathcal{A} atlasını kapsayan bir ve yalnız bir tam atlas olduğu ispatlanmıştır.

M Hausdorff topolojik uzayı üzerinde \mathcal{A} , C^∞ tam atlası bulunabiliyorsa, M kümesine m -boyutlu türevlenebilir çokkatlı veya düzgün çokkatlı denir ve (M^m, \mathcal{A}) veya kısaca M^m ile gösterilir.

M üzerinde verilen herhangi bir atlası kapsayan tek bir tam atlas bulunabildiğinden, M bu atlasla birlikte düzgün çokkatlıdır.

Örnek 1:

Her $m > 1$ doğal sayısı için;

$$\mathbb{R}^m = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \mid \forall 1 \leq i \leq m \text{ için } x_i \in \mathbb{R}\} \quad (3.139)$$

m-boyutlu Öklid uzayı düzgün bir çokkatlıdır. Ayrıca,

$$B^m = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 < 1\} \quad (3.140)$$

açık birim dairesi de m-boyutlu düzgün bir çokkatlıdır.

Örnek 2:

$$S^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1} \quad (3.141)$$

birim küresi m-boyutlu düzgün bir çokkatlıdır.

4. İKİ NESNECİK SORUNUNA OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI BAĞLAMINDA YAKLAŞIM

4.1 İki Nesnecek Sorununa Olasılıkçıl Evrim Kuramı Bağlamında Yaklaşım

4.1.1 Dizgenin Hamilton işlevi ve denklemler

Başal Devinbilim’de iki nesnecek dizgelerinde, çoğunlukla, salt nesneceklerarası uzaklığa bağlı gizilgüçler biçim olarak kullanılır. Bu çalışmada da, öyle yapılacaktır.

$$V = V(r_{1,2}(t)),$$
$$r_{1,2}(t) \equiv \sqrt{(q_1(t) - q_4(t))^2 + (q_2(t) - q_5(t))^2 + (q_3(t) - q_6(t))^2} \quad (4.1)$$

Burada $q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t), q_5(t), q_6(t)$ işlevleri sırasıyla birinci ve ikinci nesneceklerin, yine sırasıyla, doğa bilimci uzayda, birinci, ikinci ve üçüncü yönlerdeki konum bileşenlerini simgelemekte olup bilinmeyenlerin yarısını oluşturmaktadır. (4.1) sırasayılı bağıntıda, V ile simgelenen gizilgüç işlevi bu altı bilinmeyene bağlı bulunmakta ve bu bağımlılık salt tek bir işlev yapısı üzerinde gösterilmektedir.

Başal İşleybilimde devinim boyunca, konumun zamanla değişimine “tezlilik” denir. Tezlilik, yöneycil bir büyüklüktür ve yöneycil bir büyüklük olan konumun her doğrultudaki bileşeninin zamana bağlı değişimini o doğrultudaki bileşen olarak alır. Bu bağlamda, $v_i(t)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ile simgelenen işlevler $q_i(t)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ile simgelenen işlevlerin zamanla değişimine karşılık gelir. İngilizce’de “velocity” sözcüğü tezlilik denilen yöneye karşılık gelir.

Tezliğin, ilgili olduğu nesnenin kütlesi ile çarpılarak tanımlanan büyüklüğe “devinirlik” denir ve nesneceğin devinirlik etkileşime girdiğinde aktarabileceği enerji düzeyini betimlemek için taban oluşturur. Ancak, devinim sürdükçe, bir kesim özel anlar dışında, sıfır olmadan kalan bir büyüklüktür. Özelsizde, devinirlik p ile simgelenir. Burada odaklanan dizge için, sayısı yine altı olan, devinirlik bileşeninden sözedilebilir. Onları, $p_i(t)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) olarak simgeleyeceğiz. Bunların, v ’lere

bağımlılıkları aşağıdaki eşitliklerle tanımlanabilir.lanabilir.

$$p_i(t) \equiv m_1 v_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad p_i(t) \equiv m_2 v_i(t), \quad i = 4, 5, 6 \quad (4.2)$$

Devinim erkesi, ilgili nesnecik için, tezliğin boy dördülünün nesnecik kütlesi ile çarpımının yarısı olarak tanımlanır. Bu, toplamcıl bir tanımdır ama yönler göre bileşenlerine de ayrılabilir. Bu bağlamda, i . nesneciğin j yönündeki devinim erkesi $E_{i,j}^{(d)}$, ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3$) ile simgelenirse aşağıdaki tanım eşitlikleri yazılabilir.

$$E_{i,j}^{(d)} \equiv \frac{1}{2} m_i v_{j+3i-3}(t)^2, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Bu eşitlik tezlikleri içermektedir. Ancak salt devinirlikleri içerecek biçimde de yazılabilirdi. Kolayca görülebileceği üzere, tezlikleri devinirlikler türünden anlatarak, (4.3) yerine aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$E_{i,j}^{(d)} \equiv \frac{1}{2m_i} p_{j+3i-3}(t)^2, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

Bu durumda, dizgenin toplam devinim erkesi bu erkelerin toplamı olarak aşağıdaki eşitlik ile yazılabilir.

$$\begin{aligned} E_T^{(d)} &\equiv \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 E_{i,j}^{(d)} = \frac{1}{2m_1} (p_1(t)^2 + p_2(t)^2 + p_3(t)^2) \\ &+ \frac{1}{2m_2} (p_4(t)^2 + p_5(t)^2 + p_6(t)^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dizgenin toplam erkesi, eğer işleyibilim tabanlı başka bir erke bileşeni yok ise, devinim erkesi ile gizilgüç erkesinin toplamı olarak anlatılır. Bu toplam Hamilton işlevi olarak bilinir ve H ile simgelenir. Bu durumda dizgenin Hamilton işlevi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) &\equiv \frac{1}{2m_1} (p_1(t)^2 + p_2(t)^2 + p_3(t)^2) + \frac{1}{2m_2} (p_4(t)^2 + p_5(t)^2 + p_6(t)^2) \\ &+ V(r_{1,2}(t)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Burada, $\mathbf{p}(t)$ ve $\mathbf{q}(t)$, öğeleri sırasıyla 6 devinirlik ve 6 konum bileşeni içeren yöneylerdir. H 'nın ya da Hamilton işlevinin t 'ye yani zamana belirtik bağımlılığı söz konusu değildir. Zamana bağımlılık örtük olarak devinirlik ve konum yöneyleri üzerindedir. Hamilton işlevinin salt örtük olarak zamana bağımlı oluşu, ilgili büyüklüğün işlev yapısının zamanla değişmediği anlamına gelir. Bu durumda ilgili büyüklüğe "Özerk" denir. Buradaki Hamilton işlevinin özerkliği, gizilgücün

özerkliğinden kaynaklanmaktadır. Özelsizde, özerkliğin korunurluğa, öteki bir deyişle değişmezliğe karşılık gelir. Burada da özerk Hamilton işlevi dizgenin toplam erkesinin korunurluğu ya da değişmezliği anlamına gelir.

4.1.1.1 Dizgenin devinim denklemlerinin oluşturumu

Dizgenin devinim denklemlerini oluşturmak için birden çok yol vardır. Bunlardan birisi “Hamilton Kuramı” yapısıdır. Hamilton Kuramı’na göre, Hamilton işlevi verilen, n özgürlük düzeyli (bilinmeyen konum ve devinirlik bileşen sayıları n olan) bir dizge için devinirlik denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

(4.7)’de, (4.6)’daki Hamilton işlev yapısı kullanılacak olursa

$$\begin{aligned} \frac{dq_{j+3-3i}(t)}{dt} &= \frac{p_{j+3-3i}(t)}{m_i}, \quad i = 1, 2, \\ \frac{dp_{j+3i-3}(t)}{dt} &= (-1)^i V'(r_{1,2}) \frac{q_j(t) - q_{j+3}(t)}{r_{1,2}(t)}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

denklemlerine ulaşılır. Burada üs ile, ilgili büyüklüğün bağımlı olduğu tek değişkene göre türev anlatılmaktadır. Bu denklemler, dizgenin devinim denklemleridir.

4.1.1.2 Kütle özeğinin deviniminin ayrıştırımı

Aşağıdaki toplam ile yeni devinirlik tanımları yapılabilir ve sağ yandaki eşitlik ile yeni devinim denklemleri yazılabilir. Sağ yanın sıfır oluşu gizilgüç işlevinin bir değişmez olduğu anlamına gelir ve gizilgüçlerin bir değişmezle ötelenişlerinin devinimi değiştirmeyeceği de bilinen bir olgu olduğundan, burada devinimi sıfır almakta bir sakınca yoktur.

$$P_j(t) \equiv p_j(t) + p_{j+3}(t) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \frac{dP_j(t)}{dt} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

Dizgenin toplam kütesini ve momentum bağıntılarını kullanarak konum bağıntılarını aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

$$M = m_1 + m_2$$

$$Q_j(t) \equiv \frac{m_1 q_j(t) + m_2 q_{j+3}(t)}{m_1 + m_2}, \quad \frac{dQ_j(t)}{dt} = \frac{1}{M} P_j(t), \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.10)$$

(4.10) sırasayılı bağıntının sağ yanının bu bileşen çiftleri arasında doğrusal bir dönüşüm oluşturduğu söylenebilir.

4.1.1.3 Nesneciklerarası bağıl deviniminin ayrıştırımı

Konum konaçlarının ögeleri farkına yeni birer değişken gözüyle bakarsak, denklem sayısını azaltmış oluruz. Bunu tanımı kullanarak yeni uzaklık işlevi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$x_j(t) \equiv q_j(t) - q_{j+3}(t), \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

$$r(t) \equiv \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2} \quad (4.12)$$

Tüm bu hesaplamalar ve aşağıdaki denklemler ile indirgenmiş kütlesi μ , bağıl konaçları x ve bağıl devinirlikleri π olan tek bir nesneciğin bağıl devinimini gündeme getirmiş oluyoruz.

$$\mu \equiv \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} \quad (4.13)$$

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = \frac{1}{\mu} \pi_j(t), \quad \frac{d\pi_j(t)}{dt} = -V'(r(t)) \frac{x_j(t)}{r(t)}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.14)$$

Böylece, başta varolan 12 denklemlilik devinim her biri 3 denklemlilik olan iki ayrışık devinime dönüştürülmüş olur. Bunların kullanımıyla, dizgenin Hamilton işlevi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} H(\mathbf{P}(t), \boldsymbol{\pi}(t), r(t)) &= \frac{1}{2M} (P_1(t)^2 + P_2(t)^2 + P_3(t)^2) \\ &+ \frac{1}{2\mu} (\pi_1(t)^2 + \pi_2(t)^2 + \pi_3(t)^2) \\ &+ V(r(t)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Yukarıdaki eşitlikten görülüyor ki, Hamilton işlevi kütle özeği ve bağıl devinim ile ilgili olarak iki kesime ayrılmış bulunmaktadır.

4.1.1.4 Kütle özeğinin devinimi

Yöneylemler kullanılarak (4.10) ve (4.11) sırasayılı eşitlikler aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} = \frac{1}{M} \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}_0 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \quad (4.17)$$

Bu, devinirliğin zamanla değişmediği anlamına gelir.

$$\mathbf{Q}(t) = \frac{1}{M} \mathbf{P}_0 t + \mathbf{Q}_0 \quad (4.18)$$

4.1.2 Dizgenin doğrucul bağıl devinimi

Bağıl konaçların kullanıldığı devinim denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\pi}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \frac{d\boldsymbol{\pi}(t)}{dt} &= -V'(r(t)) \frac{\mathbf{x}(t)}{r(t)}, & \boldsymbol{\pi}(0) &= \boldsymbol{\pi}_0\end{aligned}\quad (4.19)$$

Buradaki önemli olgu $\boldsymbol{\pi}_0$ ve \mathbf{x}_0 yöneylerinin doğrucul bağımsızlık ya da bağımlılık durumudur.

4.1.2.1 Başlangıç yöneylerinin doğrucul bağımlı olduğu durum

Başlangıç yöneylerinin doğrucul bağımlı olduğunu varsayalım. Bir döndürüm dizeyi kullanarak önceki eşitlikleri aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \frac{1}{\mu} \tilde{\boldsymbol{\pi}}(t), & \tilde{\mathbf{x}}(0) &= \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \frac{d\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t)}{dt} &= -V'(r(t)) \frac{\tilde{\mathbf{x}}(t)}{r(t)}, & \tilde{\boldsymbol{\pi}}(0) &= \tilde{\boldsymbol{\pi}}_0\end{aligned}\quad (4.20)$$

Eksen döndürümünün ardından, yöneylerin ikinci ve üçüncü öğeleri sıfır olarak elde edilir. Bunun anlamı, bu yöneyler \mathbf{e}_2 ve \mathbf{e}_3 Kartezyen ölçün yöneylerinin her ikisine birden dik olmakta, birinci eksen üzerinde kalmaktadırlar. Bu bilgiler aşağıdaki eşitliklerin yazılmasına olanak sağlar.

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \frac{1}{\mu} \tilde{\boldsymbol{\pi}}(t), & \tilde{\mathbf{x}}(0) &= (\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_1 \\ \frac{d\tilde{\boldsymbol{\pi}}}{dt}(t) &= -\frac{V'(r(t))}{r(t)} \tilde{\mathbf{x}}(t), & \tilde{\boldsymbol{\pi}}(0) &= \frac{\mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\pi}_0}{(\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{e}_1\end{aligned}\quad (4.21)$$

$t = 0$ için,

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}(0) = \frac{1}{\mu} \frac{\mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\pi}}{(\boldsymbol{\pi}_0^T \boldsymbol{\pi}_0)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{e}_1, \quad \frac{d\tilde{\boldsymbol{\pi}}}{dt}(0) = -\frac{V'(r(0))}{r(0)} (\mathbf{x}_0^T \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_1 \quad (4.22)$$

Buradan açıkça görülüyor ki, yöneylerin sadece birinci öğeleri sıfırlanmıyor.

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_1}{dt}(t) &= \frac{1}{\mu} \tilde{\pi}_1(t), & \tilde{x}_1(0) &= (\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{d\tilde{\pi}_1}{dt}(t) &= -\frac{V'(r(t))}{r(t)} \tilde{x}_1(t), & \tilde{\pi}_1(0) &= \frac{\mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\pi}_0}{(\boldsymbol{\pi}_0^T \boldsymbol{\pi}_0)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\quad (4.23)$$

4.1.2.2 Dizgenin düzlemcil bağıl devinimi

Bu bölümde başlangıç yöneylerinin doğrusal bağımsız olduğu durum üzerine durulacaktır. Aşağıdaki eşitlikleri alalım.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{\pi}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \frac{d\boldsymbol{\pi}(t)}{dt} &= -V'(r(t))\frac{\mathbf{x}(t)}{r(t)}, & \boldsymbol{\pi}(0) &= \boldsymbol{\pi}_0\end{aligned}\quad (4.24)$$

Döndürüm dizeyi kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \frac{1}{\mu}\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t), & \tilde{\mathbf{x}}(0) &= \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \frac{d\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t)}{dt} &= -V'(r(t))\frac{\tilde{\mathbf{x}}(t)}{r(t)}, & \tilde{\boldsymbol{\pi}}(0) &= \tilde{\boldsymbol{\pi}}_0\end{aligned}\quad (4.25)$$

Döndürüm dizeyinin ardından, yöneylerin üçüncü öğeleri sıfır olarak elde edilir. Bunun anlamı, bu yöneyler \mathbf{e}_3 Kartezyen ölçün yöneyine dik olmaktadır. Bu bilgiler aşağıdaki eşitliklerin yazılmasına olanak sağlar.

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}(t) &= \frac{1}{\mu}\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t), & \tilde{\mathbf{x}}(0) &= x_{0,1}\mathbf{e}_1 \\ \frac{d\tilde{\boldsymbol{\pi}}}{dt}(t) &= -\frac{V'(r(t))}{r(t)}\tilde{\mathbf{x}}(t), & \tilde{\boldsymbol{\pi}}(0) &= \tilde{\pi}_{0,1}\mathbf{e}_1 + \tilde{\pi}_{0,2}\mathbf{e}_2\end{aligned}\quad (4.26)$$

$t = 0$ için,

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}(0) = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\pi}_{0,1}\mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\pi}_{0,2}\mathbf{e}_2), \quad \frac{d\tilde{\boldsymbol{\pi}}}{dt}(0) = -\frac{V'(r(0))}{r(0)}\mathbf{x}_{0,1}\mathbf{e}_1 \quad (4.27)$$

Sıfırlanmayan öğeler kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir. Buradaki en önemli olgu denklemleri ayırtmış olmaktadır.

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_1}{dt}(t) &= \frac{1}{\mu}\tilde{\pi}_1(t), & \tilde{x}_1(0) &= x_{0,1} \\ \frac{d\tilde{\pi}_1}{dt}(t) &= -\frac{V'(r(t))}{r(t)}\tilde{x}_1(t), & \tilde{\pi}_1(0) &= \pi_{0,1} \\ \frac{d\tilde{x}_2}{dt}(t) &= \frac{1}{\mu}\tilde{\pi}_2(t), & \tilde{x}_2(0) &= x_{0,2} \\ \frac{d\tilde{\pi}_2}{dt}(t) &= -\frac{V'(r(t))}{r(t)}\tilde{x}_2(t), & \tilde{\pi}_2(0) &= \pi_{0,2}\end{aligned}\quad (4.28)$$

$$r(t) = \sqrt{\tilde{x}_1(t)^2 + \tilde{x}_2(t)^2} \quad (4.29)$$

4.1.3 Açısal devinirlik

u ve v olmak üzere iki yöney alalım. Yöneyleler arası çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathbf{w} \equiv \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad w_1 \equiv u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad w_2 \equiv u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad w_3 \equiv u_1 v_2 - u_2 v_1 \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, 3 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Aşağıdaki determinant kullanılarak (4.31) yeniden yazılabilir.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (4.32)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) \times \tilde{\mathbf{x}}'(t) = (\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_2'(t) - \tilde{x}_2(t)\tilde{x}_1'(t)) \mathbf{e}_3 \quad (4.33)$$

L ile simgelenen aşağıdaki eşitlik ‘‘Açısal Devinirlik’’ tanımıdır.

$$\mathbf{L} \equiv \tilde{\mathbf{x}}(t) \times \tilde{\boldsymbol{\pi}}(t) = (\tilde{x}_1(t)\tilde{\pi}_2(t) - \tilde{x}_2(t)\tilde{\pi}_1(t)) \mathbf{e}_3 \quad (4.34)$$

4.1.3.1 Çembercil konaçlarda açısal devinirlik korunumu

Aşağıdaki eşitliklerde, r nesnecikler arası uzaklığı, $\mathbf{F}(r)$ nesnecikler arası güçeyi (ing: Force) temsil etmektedir. Son eşitlik, gizilgüç (potansiyel enerji) ile güçey arasındaki ilişkiyi vermektedir.

$$\mathbf{r}(t) \equiv \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(r) \equiv \frac{F(r)}{r} \mathbf{r}(t), \quad F(r) \equiv -V'(r) \quad (4.35)$$

Çembercil konaçları kullanabilmek için aşağıdaki konaç tanımlarını ve evriklerini yazabiliriz.

$$\tilde{x}_1(t) = r(t) \cos \vartheta(t), \quad \tilde{x}_2(t) = r(t) \sin \vartheta(t) \quad (4.36)$$

$$r(t) = \sqrt{\tilde{x}_1(t)^2 + \tilde{x}_2(t)^2}, \quad \vartheta(t) = \arctan \left(\frac{\tilde{x}_2(t)}{\tilde{x}_1(t)} \right) \quad (4.37)$$

$$\mathbf{e}_r(t) \equiv \frac{\nabla r(t)}{\|\nabla r(t)\|} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\vartheta(t) \equiv \frac{\nabla \vartheta(t)}{\|\nabla \vartheta(t)\|} = \begin{bmatrix} -\sin \vartheta(t) \\ \cos \vartheta(t) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Yeni tanımlanan birim yöneylerin zamanla değişken oluşları onlar için aşağıdaki türev eşitliklerinin yazımına olanak sağlar.

$$\frac{d\mathbf{e}_r(t)}{dt} = \vartheta'(t)\mathbf{e}_\vartheta(t), \quad \frac{d\mathbf{e}_\vartheta(t)}{dt} = -\vartheta'(t)\mathbf{e}_r(t) \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x_r(t)\mathbf{e}_r(t) + x_\vartheta(t)\mathbf{e}_\vartheta(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t) \\ x_r(t) &\equiv r(t), \quad x_\vartheta(t) \equiv 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= F_r(t)\mathbf{e}_r(t) + F_\vartheta(t)\mathbf{e}_\vartheta(t) = F(r(t))\mathbf{e}_r \\ F_r(t) &\equiv F(r(t)) = -V'(r(t)), \quad F_\vartheta(t) \equiv 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{r}'(t) = r'(t)\mathbf{e}_r(t) + r(t)\vartheta'(t)\mathbf{e}_\vartheta(t) \quad (4.42)$$

$$\mathbf{r}''(t) = (r''(t) - r(t)\vartheta'(t)^2)\mathbf{e}_r(t) + (2r'(t)\vartheta'(t) + r(t)\vartheta''(t))\mathbf{e}_\vartheta(t) \quad (4.43)$$

Newton yasalarından ikincisi; nesneciğe etki eden gücün genliğinin nesnecikte oluşan ivme ve nesnecik kütesinin çarpımına eşit olacağını söyler. Bu bilgiyi kullanarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$2r'(t)\vartheta'(t) + r(t)\vartheta''(t) = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{d}{dt}(r(t)^2\vartheta'(t)) = 0 \quad (4.45)$$

$$r(t)^2\vartheta'(t) = r(0)^2\vartheta'(0) \equiv c_1(\text{değişmez}) \quad (4.46)$$

Açısal momentumun boy karesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t) \times \tilde{\boldsymbol{\pi}}(t)\|^2 = \mu \left(1 + \tan^2 \vartheta(t)\right) r(t)^2 \cos^2 \vartheta(t) \vartheta'(t) = \mu r(t)^2 \vartheta'(t) \quad (4.47)$$

$$p_\vartheta(t) \equiv \mu r(t)^2 \vartheta'(t) \quad (4.48)$$

Böylece, özekçil gücün altındaki dizgelerin devinimlerinin açısal devinirliklerinin salt doğrultuda değil, boyda da korunduğu sonucuna varılır.

4.1.3.2 Dizgenin çembercil konaçlarda devinimi

Bu ana dek konum üzerine odaklanılmıştır. Oysa ki, devinirlik yöneyi içinde benzer işlemler gerçekleştirilebilir.

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\pi}}(t) &= \mu \tilde{\mathbf{x}}'(t) = \mu (\tilde{x}_1(t)\mathbf{e}_1 + \tilde{x}_2(t)\mathbf{e}_2)' \\ &= \mu (r(t)\mathbf{e}_r(t))' = \mu r'(t)\mathbf{e}_r(t) + \mu r(t)\vartheta'(t)\mathbf{e}_\vartheta(t) \\ &\equiv p_r(t)\mathbf{e}_r(t) + \frac{1}{r(t)}p_\vartheta(t)\mathbf{e}_\vartheta(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$r'(t) = \frac{p_r(t)}{\mu}, \quad \vartheta'(t) = \frac{p_\vartheta(t)}{\mu r(t)^2} \quad (4.50)$$

$$p_\vartheta(t) = \mu c_1, \quad p'_\vartheta(t) = 0 \quad (4.51)$$

(4.51) sayıl açısıl devinirliğin değişmez olduğunu gösterir. Aşağıdaki eşitlikler ile gceyin gizilgc trnden anlatımı verilmektedir.

$$\mu r''(t) - \mu r(t) \vartheta'(t)^2 = -V'(r(t)) \quad (4.52)$$

$$p'_r(t) = \mu r(t) \vartheta'(t)^2 - V'(r(t)) \quad (4.53)$$

Bylece tm bilinmeyenlerin yer aldığı aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$r'(t) = \frac{p_r(t)}{\mu}, \quad r(0) = r_0 \quad (4.54)$$

$$p'_r(t) = \mu r(t) \vartheta'(t)^2 - V'(r(t)), \quad p_r(0) = p_{r,0} \quad (4.55)$$

$$\vartheta'(t) = \frac{c_1}{r(t)^2}, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 \quad (4.56)$$

$$p'_\vartheta = 0, \quad p_\vartheta(0) = \mu c_1 \quad (4.57)$$

Yarıçapçıl ve açıcıl momentum ile aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$r'(t) = \frac{p_r(t)}{\mu}, \quad r(0) = r_0 \quad (4.58)$$

$$p'_r(t) = \frac{\mu c_1^2}{r(t)^3} - V'(r(t)), \quad p_r(0) = p_{r,0} \quad (4.59)$$

$$\vartheta'(t) = \frac{c_1}{r(t)^2}, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 \quad (4.60)$$

$$p'_\vartheta = 0, \quad p_\vartheta(0) = \mu c_1 \quad (4.61)$$

Bu 4 eşitliği czmemiz gerekiyor.

4.1.4 Çembercil konaçlarda dizgenin Hamilton işlevi

Önceki denklemler kullanılarak aşağıdaki denklem seti yazılabilir.

$$\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} (r'(t)^2) = -\frac{\mu c_1^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r(t)^2} \right) - \frac{dV(r(t))}{dt} \quad (4.62)$$

$$\frac{\mu}{2} r'(t)^2 = -\frac{\mu c_1^2}{2} \frac{1}{r(t)^2} - V(r(t)) + E \quad (4.63)$$

$$E = \frac{1}{2\mu} p_r(t)^2 + \frac{1}{2\mu r(t)^2} p_\vartheta(t)^2 + V(r(t)) \quad (4.64)$$

$$E = \frac{1}{2\mu} p_r(t)^2 + \frac{1}{2\mu r(t)^2} p_\vartheta(t)^2 + \frac{1}{2\mu} \tilde{\pi}_3(t)^2 + V(r(t)) \quad (4.65)$$

E dizgenin toplam gizilgücünü (potansiyel enerjisini) temsil eder ve çembercil konaçlarda yazılan Hamilton işlevine eşittir. Bu Hamilton işlevinde türev olarak devinirlik ve konaç denklemleri elde edilir.

$$H(p_r(t), p_\vartheta(t), r(t)) = \frac{1}{2\mu} p_r(t)^2 + \frac{1}{2\mu r(t)^2} p_\vartheta(t)^2 + \frac{1}{2\mu} \tilde{\pi}_3(t)^2 + V(r(t)) \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} r'(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_r(t)} = \frac{1}{\mu} p_r(t) \\ p_r'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial r(t)} = \frac{1}{\mu r(t)^3} p_\vartheta(t)^2 - V'(r(t)) \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\vartheta'(t) = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta(t)} = \frac{1}{\mu r(t)^2} p_\vartheta, \quad p_\vartheta'(t) = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta(t)} = 0 \quad (4.68)$$

4.1.5 Çembercil konaçlarda yarıçapçıl devinimin belirlenişi

r' 'nin t 'ye olan bağımlılığını belirttik olarak vermeksizin yeniden yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \sqrt{E - \frac{\mu c_1^2}{2} \frac{1}{r^2} - V(r)}} \quad (4.69)$$

r ve t yerine \bar{r} ve \bar{t} yerleştirilirse ve sonrasında yukarıdaki denklemin her iki yanında tümlev alınırsa, t' 'nin r türünden yapısı elde edilir. Evriği alınarak r' 'nin t türünden yapısı elde edilebilir.

$$\frac{d\bar{r}}{\sqrt{E - \frac{\mu c_1^2}{2} \frac{1}{\bar{r}^2} - V(\bar{r})}} = \sqrt{\frac{2}{\mu}} d\bar{t} \quad (4.70)$$

$$\int_{r_0}^r \frac{d\bar{r}}{\sqrt{E - \frac{\mu c_1^2}{2} \frac{1}{\bar{r}^2} - V(\bar{r})}} \equiv \mathcal{F}(r) = \sqrt{\frac{2}{\mu} t} \quad (4.71)$$

4.1.6 Söbekçil gezinçler

Aşağıdaki eşitlik ile bir nesneciğın çembercil konaçlardaki gezinçesi verilirdi.

$$\frac{1}{r(\vartheta)} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{v}{\mu c_1^2} \right) \cos(\vartheta - \vartheta_0) - \frac{p_{r,0}}{\mu c_1} \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{v}{\mu c_1^2} \quad (4.72)$$

Aşağıdaki tanımları yapalım.

$$\bar{c} \equiv \frac{v}{\mu c_1^2}, \quad 1 - \frac{\mu c_1^2}{v r_0} \equiv \varepsilon \cos \phi, \quad \frac{c_1 p_{r,0}}{v} \equiv \varepsilon \sin \phi \quad (4.73)$$

Böylece aşağıdaki eşitliğı yazabiliriz.

$$\varepsilon = \sqrt{\left(1 - \frac{\mu c_1^2}{v r_0} \right)^2 + \frac{c_1^2 p_{r,0}^2}{v^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{c_1 p_{r,0} r_0}{v r_0 - \mu c_1^2} \right) \quad (4.74)$$

Tüm bu tanımlamalar kullanılarak çembercil konaçlardaki gezinçeyi aşağıdaki şekilde daha yalın bir anlatımla ifade edebiliriz.

$$\frac{1}{r(\vartheta)} = \bar{c} [1 - \varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_0 - \phi)] \quad (4.75)$$

Burada; ε değeri için 1'i aşmayacak şekilde artı tanımlı olma kısıtı vardır. Bu bağlamda aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\varepsilon \leq 1 \implies \varepsilon^2 \leq 1 \implies \left(1 - \frac{\mu c_1^2}{v r_0} \right)^2 + \frac{c_1^2 p_{r,0}^2}{v^2} \leq 1 \implies \frac{\mu^2 c_1^2}{v^2 r_0^2} - \left(\frac{2\mu}{v r_0} - \frac{p_{r,0}^2}{v^2} \right) \leq 0 \quad (4.76)$$

$$-\sqrt{2 - \frac{r_0 p_{r,0}^2}{\mu v}} \leq c_1 \leq \sqrt{2 - \frac{r_0 p_{r,0}^2}{\mu v}} \implies -\sqrt{2\mu^2 - \frac{\mu r_0 p_{r,0}^2}{v}} \leq p_{\vartheta,0} \leq \sqrt{2\mu^2 - \frac{\mu r_0 p_{r,0}^2}{v}} \quad (4.77)$$

4.1.7 OLEVKU denklemlerinin oluşturulması

Artık aşağıdaki denklemlere OLEVKU uygulanabilir.

$$r'(t) = \frac{p_r(t)}{\mu}, \quad r(0) = r_0 \quad (4.78)$$

$$p_r'(t) = \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu} \frac{1}{r(t)^3} - \frac{v}{r(t)^2}, \quad p_r(0) = p_{r,0}$$

Burada uzay genişletimi kullanılmalıdır. Çünkü Olasılıkçıl Evrim Kuramı'nda kullanılacak denklemlerin sağ yanının en çok ikinci dereceden çokterimlilerden oluşması beklenmektedir.

$$u_1(t) \equiv \frac{1}{r(t)}, \quad u_1'(t) = -\frac{1}{\mu}u_1(t)^2 p_r(t), \quad u_1(0) = \frac{1}{r_0} \quad (4.79)$$

Bir kez uzay genişletimi kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} r'(t) &= \frac{1}{\mu}p_r(t), & r(0) &= r_0 \\ p_r'(t) &= \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu}u_1(t)^3 - \nu u_1(t)^2, & p_r(0) &= p_{r,0} \\ u_1'(t) &= -\frac{1}{\mu}u_1(t)^2 p_r(t), & u_1(0) &= \frac{1}{r_0} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Yukarıdaki denklemlerden görüleceği üzere, denklemlerin sağ yanında hala ikinci dereceden fazla olan çokterimliler bulunmaktadır. Bu durumda, bir kez daha uzay genişletimi yapılması gereklidir.

$$u_2(t) \equiv u_1(t)^2, \quad u_2'(t) = -\frac{2}{\mu}u_1(t)u_2(t)p_r(t), \quad u_2(0) = \frac{1}{r_0} \quad (4.81)$$

İkinci kez uzay genişletimi kullanımının ardından aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} r'(t) &= \frac{1}{\mu}p_r(t), & r(0) &= r_0 \\ p_r'(t) &= \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu}u_1(t)u_2(t) - \nu u_2(t), & p_r(0) &= p_{r,0} \\ u_1'(t) &= -\frac{1}{\mu}u_2(t)p_r(t), & u_1(0) &= \frac{1}{r_0} \\ u_2'(t) &= -\frac{2}{\mu}u_1(t)u_2(t)p_r(t), & u_2(0) &= \frac{1}{r_0^2} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Üçüncü kez uzay genişletimi yapılırken aşağıdaki denklemler kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} u_3(t) &\equiv u_1(t)p_r(t) \\ u_3'(t) &= -\frac{1}{\mu}u_2(t)p_r(t)^2 + \frac{1}{\mu}p_{\vartheta,0}^2 u_2(t)^2 + \nu u_1(t)u_2(t) \\ u_3(0) &= \frac{p_{r,0}}{r_0} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Üçüncü kez uzay genişletimi kullanımının ardından aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
r'(t) &= \frac{1}{\mu} p_r(t), & r(0) &= r_0 \\
p_r'(t) &= \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu} u_1(t) u_2(t) v - v u_2(t), & p_r(0) &= p_{r,0} \\
u_1'(t) &= -\frac{1}{\mu} u_2(t) p_r(t), & u_1(0) &= \frac{1}{r_0} \\
u_2'(t) &= -\frac{2}{\mu} u_2(t) u_3(t), & u_2(0) &= \frac{1}{r_0^2} \\
u_3'(t) &= -\frac{1}{\mu} u_2(t) p_r(t)^2 + \frac{1}{\mu} p_{\vartheta,0}^2 u_2(t)^2 + v u_1(t) u_2(t), & u_3(0) &= \frac{p_{r,0}}{r_0}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

İki nesne sorusunda, ikinci dereceden fazla olan çokterimlilerden kurtulmak için kullanacağımız son uzay genişletimi adımı için aşağıdaki denklemler kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
u_4(t) &\equiv p_r(t)^2 \\
u_4'(t) &= \frac{2p_{\vartheta,0}}{\mu} u_2(t) u_3(t) + 2v u_1(t) u_3(t) \\
u_4(0) &= p_r^2
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Son uzay genişletimi adımının ardından aşağıdaki 6 denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
r'(t) &= \frac{1}{\mu} p_r(t), & r(0) &= r_0 \\
p_r'(t) &= \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu} u_1(t) u_2(t) - v u_2(t), & p_r(0) &= p_{r,0} \\
u_1'(t) &= -\frac{1}{\mu} u_2(t) p_r(t), & u_1(0) &= \frac{1}{r_0} \\
u_2'(t) &= -\frac{2}{\mu} u_2(t) u_3(t), & u_2(0) &= \frac{1}{r_0^2} \\
u_3'(t) &= -\frac{1}{\mu} u_2(t) u_4(t) + \frac{1}{\mu} p_{\vartheta,0}^2 u_2(t)^2 + v u_1(t) u_2(t), & u_3(0) &= \frac{p_{r,0}}{r_0} \\
u_4'(t) &= \frac{2p_{\vartheta,0}^2}{\mu} u_2(t) u_3(t) - 2v u_1(t) u_3(t), & u_4(0) &= p_r^2
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Artık en çok ikinci dereceden sağ yan işlevli bu denklemler OLEVKU uygulanabilmesi için uygun yapıdadır.

4.1.8 Katsayı yöneyi \mathbf{F}_0 , dördül katsayı dizeyi \mathbf{F}_1 ve dikdörtgen katsayı dizeyi \mathbf{F}_2

Kapalı bir yapı kullanmak için, dizgenin yöneyi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ p_r(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Böylece STD aşağıdaki yapıya gelir.

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \quad (4.88)$$

İki nesnek sorunu bağlamında \mathbf{F}_0 ve \mathbf{F}_1

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_1 = \frac{1}{\mu}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^T - \nu\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4^T \quad (4.89)$$

ve \mathbf{F}_2

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = & \frac{p_{\vartheta,0}^2}{2\mu}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_{16}^T + \frac{p_{\vartheta,0}^2}{2\mu}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_{21}^T + \left(-\frac{1}{2\mu}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_{20}^T\right) + \left(-\frac{1}{2\mu}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_{10}^T\right) \\ & + \left(-\frac{1}{\mu}\mathbf{e}_4\mathbf{e}_{23}^T\right) + \left(-\frac{1}{\mu}\mathbf{e}_4\mathbf{e}_{28}^T\right) + \left(-\frac{1}{2\mu}\mathbf{e}_5\mathbf{e}_{24}^T\right) + \left(-\frac{1}{2\mu}\mathbf{e}_5\mathbf{e}_{34}^T\right) \\ & + \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu}\mathbf{e}_5\mathbf{e}_{22}^T + \frac{\nu}{2}\mathbf{e}_5\mathbf{e}_{16}^T + \frac{\nu}{2}\mathbf{e}_5\mathbf{e}_{21}^T + \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu}\mathbf{e}_6\mathbf{e}_{23}^T \\ & + \frac{p_{\vartheta,0}^2}{\mu}\mathbf{e}_6\mathbf{e}_{28}^T + (-\nu\mathbf{e}_6\mathbf{e}_{17}^T) + (-\nu\mathbf{e}_6\mathbf{e}_{27}^T) \end{aligned} \quad (4.90)$$

olarak elde edilir. Burada \mathbf{e}_i 6 ögeli i . Kartezyen ölçün yöneyini temsil eder. Eşitliklerden görülebileceği gibi 6×6 boyutundaki \mathbf{F}_1 dizeyinin 2 ögesi, 6×36 boyutundaki \mathbf{F}_2 dizeyinin de 15 ögesi sıfırdan farklı olarak elde ediliyor.

4.1.9 Değişmez eklenimli uzay genişletimi

Değişmez Eklenimli Uzay Genişletimi (DEUG), denklem sayısını 1 arttırarak, en çok ikinci derece sağ yanlı çokterimli yapısında olan işlevleri, salt ikinci derece sağ yanlı çokterimli işlevlere dönüştürür. Bu işlem sonucunda, \mathbf{G}_0 katsayı yöneyi sıfırlanır ve \mathbf{G}_1 katsayı dizeyi birim dizeyeyle orantılı hale gelir. \mathbf{G}_2 yeni denklem takımı

ile önceki denklem takımı arasında tutarlılık oluşturur. \mathbf{P}^{-1} permütasyon dizeyidir. Tanımlamalardan sonra STD takımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} dt\mathbf{x}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ 1 \end{bmatrix}^{\otimes 2} \quad (4.91)$$

Permütasyon dizeyi ile çarpım sonucu aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ 1 \end{bmatrix}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \\ \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

(4.91) sırasayılı eşitliğin sağ yan işlevleri salt ikinci dereceden çokterimlidir.

4.1.10 Dördülleştirim

Seri çözümü irakgörür dizeyler kullanılarak yeniden yazılabilir. Irakgörür dizeyler \mathbf{M} bakaç dizeylerinin (ing: monocular matrices) çarpımı alınarak elde edilir.

Olasılıkçıl Evrim Kuramının Seri Çözümü

Kapalı olarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}_2\mathbf{P}^{-1} \quad (4.93)$$

(4.88) sırasayılı eşitliğin OLEVKU bağlamındaki seri çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \mathbf{S}_j \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Burada, n sayısı DEUG öncesi bilinmeyen sayısına eşittir; iki nesne için bu sayı 6'dır.

Dördülleştirilmiş irakgörür dizeyler olarak adlandırdığımız \mathbf{S}_j dizeyleri $n \times n$ boyutundaki dizeylerdir. Özyineleme kullanılarak elde edilebilirler. Burada, \mathbf{S}_j 'nin kendisi yerine bir yöneyin \mathbf{S}_j altındaki görüntüsü dikkate alınır. Özyineleme bu görüntüler arasındaki bağıntı kullanır. Aşağıdaki eşitliği tanımlayarak;

$$\boldsymbol{\xi}_j \equiv \mathbf{S}_j \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.95)$$

özyinelemeyi bu şekilde yazabiliriz.

$$\boldsymbol{\xi}_j = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} [\mathbf{F}, \boldsymbol{\xi}_k] \boldsymbol{\xi}_{j-1-k}, \quad \boldsymbol{\xi}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.96)$$

Dördülleştirme işleminde öge olarak bir dikdörtgen dizey ve bir yöney alınır. (4.93)'teki dizeyde dördül bloklar olarak;

$$\mathbf{F} \equiv \left[\mathbf{F}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{F}^{(n+1)} \right] \quad (4.97)$$

dördülleştirim aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[\mathbf{F}, \boldsymbol{\xi}_k] = \sum_{i=1}^{n+1} (\mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\xi}_k) \mathbf{F}^{(i)} \quad (4.98)$$

Bu anlatım yöneyin öğelerini katsayı olarak kullanan dördül blokların doğrusal birleşimidir. (4.94) sırasayılı eşitlikten kesmeler yaparak başlangıç değer sorununun çözümüne yaklaşılr. Bu tez çalışmasının gündemi (4.94)'teki $x(t)$ 'nin öğeleri olan işlevlere Padé yaklaştıranları uygulayarak çözüme yaklaşmaktır.

5. PADÉ YAKLAŞTIRANLARI VE İKİ NESNECİK SORUNUNA UYGULANIŞI

5.1 Padé Yaklaştıranlarının Elde Edilişi

Verilen bir $f(x)$ işlevi için en iyi çokterimli gösterimlerinden biri Taylor seri açılımıdır. Eğer açılım noktası 0 ise, Taylor seri gösterimini Maclaurin serisi olarak adlandırılır. Yanılgı ilk kesilen terim ile orantılıdır. Ayrıca seri sadece açılım noktası etrafındaki küçük yarıçapta iyi sonuç vermektedir. (Maclaurin serisi için 0 noktası gibi.)

Padé yaklaştıranları, işlevi iki çokterimlinin bölümünü alarak oluşturur. Örneğin, Taylor seri açılımı verilen bir $T_{n+m}(x)$ işlevi için, derecesi $(m+n)$ olsun; derecesi n olan $P_n(x)$ ve derecesi m olan $Q_m(x)$ olmak üzere iki çokterimli alınır. $R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ oranına **Padé yaklaştıranı** adı verilir ve derecesi $\frac{n}{m}$ 'dir. Bu derecesi $(m+n)$ olan başlangıçtaki işlev ile bağdaşır.

$$f(x) \approx R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (5.1)$$

Ayrıca, Padé yaklaşıtırımı Taylor serisinden daha geniş bir yakınsama yarıçapına sahiptir ve bölüm yapısında olmasından dolayı daha küçük dereceli çokterimlilerden oluşur. Normalizasyon ile $Q_m(x)$ 'in ilk terimi her zaman 1'dir. Tek türlü Padé yaklaşıtıran katsayılarını oluşturan bir doğrusal denklem seti vardır. a_n 'leri Taylor serisi açılımındaki katsayılar olarak varsayalım.

$$\begin{array}{ll} a_0 & = p_0 \\ a_1 + a_0q_1 & = p_1 \\ a_2 + a_1q_1 + a_0q_2 & = p_2 \\ a_3 + a_2q_1 + a_1q_2 + a_0q_3 & = p_3 \\ a_4 + a_3q_1 + a_2q_2 + a_1q_3 + a_0q_4 & = p_4 \\ \vdots & \vdots \\ a_{(m+n)} + a_{(m+n-1)}q_1 + \cdots + a_0q_{(m+n)} & = p_{(m+n)} \end{array}$$

Bu denklem setinde, $k > n$ olan p_k 'lar ve $k > m$ olan q_k 'lar 0'dır. Yanılgı, $P_n(x)$ ve $Q_m(x)$ dereceleri aynı olduğunda ya da $P_n(x)$ 'in derecesi $Q_m(x)$ 'in derecesinden

1 yüksek olduğunda enküçüktür.

$$p_{n+1} = p_{n+2} = \cdots = p_N = 0 \quad (5.2)$$

$$q_{m+1} = q_{m+2} = \cdots = q_N = 0$$

Örnek 1:

$T_5(x)$, $P_2(x)$ ve $Q_3(x)$ alalım.

Çözüm:

$$T_5(x) = \sum_{n=0}^5 c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 \quad (5.3)$$

$$P_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (5.4)$$

$$Q_3(x) = \sum_{n=0}^3 b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (5.5)$$

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + c_0 b_1 \\ a_2 &= c_2 + c_1 b_1 + c_0 b_2 \\ 0 &= c_3 + c_2 b_1 + c_1 b_2 + c_0 b_3 \\ 0 &= c_4 + c_3 b_1 + c_2 b_2 + c_1 b_3 \\ 0 &= c_5 + c_4 b_1 + c_3 b_2 + c_2 b_3 \end{aligned}$$

Örnek 2:

$f(x) = e^x$ için $R_{2,2}$ padé yaklaşımını bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \Rightarrow f(x)Q_m(x) - P_n(x) = 0 \quad (5.7)$$

$$P_n(x) = P_2(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \quad (5.8)$$

$$Q_n(x) = Q_2(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5) \quad (5.9)$$

$$f(x)Q_m(x) - P_n(x) = 0 \quad (5.10)$$

$$(1 - p_0) + (1 - p_1 + q_1)x + \left(\frac{1}{2} - p_2 + q_1 + q_2\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{q_1}{2} + q_2\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{q_1}{6} + \frac{q_2}{2}\right)x^4 + O(x^5) = 0 \quad (5.11)$$

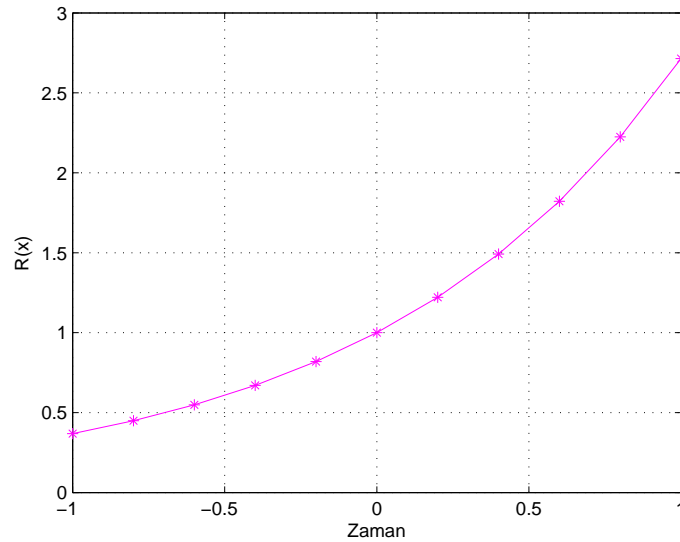
$$\begin{aligned} 1 - p_0 &= 0 \\ 1 - p_1 + q_1 &= 0 \\ \frac{1}{2} - p_2 + q_1 + q_2 &= 0 \\ \frac{1}{6} + \frac{q_1}{2} + q_2 &= 0 \\ \frac{1}{24} + \frac{q_1}{6} + \frac{q_2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

(12) sırasayılı denklemden aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{12}, \quad q_1 = -\frac{1}{2}, \quad q_2 = \frac{1}{12} \quad (5.13)$$

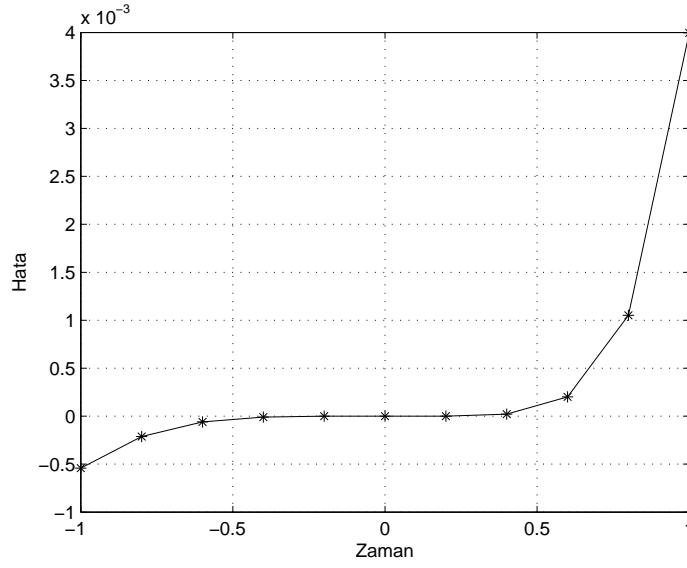
$$R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2} \quad (5.14)$$

$[-1, 1]$ aralığında, adım uzunluğu 0.2 alınarak $f(x) = e^x$ için elde edilen $R_{2,2}(x)$ grafiği:



Çizim 5.1 : e^x işlevinin için Padé Yaklaşıtıranları ile elde edilen sonuçların grafiği

$[-1, 1]$ aralığında, adım uzunluğu 0.2 alınarak elde edilen $f(x) = e^x$ ile $R_{2,2}(x)$ arasındaki yanılğı grafiği:



Çizim 5.2 : e^x işlevi için Padé Yaklaşıtıranları ile elde edilen sonuçların yanılğı grafiği

Çizelge 5.1 : e^x işlevinin Padé Yaklaşıtıranları uygulanması sonucunda elde edilen yanılğı değerleri

x noktası	Yanılğı
-1.0	-0.000541611460137
-0.8	-0.000212320286448
-0.6	-0.000060544357101
-0.4	-0.000009624294031
-0.2	-0.000000364746792
0.0	0.0
0.2	0.000000544138030
0.4	0.000021418952746
0.6	0.000200992171331
0.8	0.001051132574100
1.0	0.003996114173331

Denklem Dizgesinin Çözümü

Derecesi 5 olan bir $f(x)$ işlevi alalım.

$$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \quad (5.15)$$

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & a_0 \\
\hline
x^1 & a_1 + a_0q_1 \\
x^2 & a_2 + a_1q_1 + a_0q_2 \\
x^3 & a_3 + a_2q_1 + a_1q_2 + a_0q_3 \\
x^4 & a_4 + a_3q_1 + a_2q_2 + a_1q_3 + a_0q_4 \\
x^5 & a_5 + a_4q_1 + a_3q_2 + a_2q_3 + a_1q_4 + a_0q_5
\end{array} \quad \begin{array}{l}
-p_0 = 0 \\
-p_1 = 0 \\
-p_2 = 0 \\
-p_3 = 0 \\
-p_4 = 0 \\
-p_5 = 0
\end{array}$$

$p_0 = a_0$ olduğu açıktır.

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

(5.16) sırasayılı eşitlikte $n = 3$, $m = 2$ alınarak düzenleme yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Yukarıdaki şartları sağlayan durum için çözümü veren bir dizge elde edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & -1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & -1 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Örnek 3:

$f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$ için $R_{3,2}$ padé yaklaşımını bulunuz.

Çözüm:

Seri açılımdan aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \quad (5.19)$$

Buradan katsayıları aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \left\{ 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{24}, -\frac{1}{120} \right\} \quad (5.20)$$

(5.18) sırasayılı eşitlikteki dizge kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1/6 \\ 1/24 \\ -1/120 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Buradan,

$$\{q_1, q_2, p_1, p_2, p_3\} = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{20}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{20}, -\frac{1}{60} \right\} \quad (5.22)$$

elde edilir.

$$R_{3,2}(x) = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} \quad (5.23)$$

Diğer olasılık dahilindeki Padé yaklaşımları:

$$R_{5,0}(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 \quad (5.24)$$

$$R_{4,1}(x) = \frac{1 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{10}x^2 - \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{120}x^4}{1 + \frac{1}{5}x} \quad (5.25)$$

$$R_{2,3}(x) = \frac{1 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2}{1 + \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 + \frac{1}{60}x^3} \quad (5.26)$$

$$R_{1,4}(x) = \frac{1 - \frac{1}{5}x}{1 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{120}x^4} \quad (5.27)$$

$$R_{0,5}(x) = \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5} \quad (5.28)$$

(5.24) sırasayılı eşitlikten görüleceği üzere $R_{5,0}(x)$, işlevin Taylor seri açılımına eşit olarak elde edilmiştir.

5.2 İki Nesnecik Sorununa Olasılıkçıl Evrim Kuramı Bağlamında Yaklaşımdan Elde Edilen Bağıntılara Padé Yaklaştıranları Uygulanışı

Padé yaklaştıranlarını elde etmek için $P_n(t)$ ve $Q_m(t)$ olmak üzere iki çokterimli alınır ve $R_{n,m}(t)$ padé yaklaştıranlarını temsil etmek için kullanılacaktır. Payın derecesi n , paydanın derecesi m olarak alınacaktır. $[n, m]$ ikilisi pay ve payın derecesini temsil etmek için kullanılacaktır. Bu bilgiler kullanarak $R_{n,m}(t)$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$R_{n,m}(t) = \frac{P_n(t)}{Q_m(t)} \quad (5.29)$$

Aşağıdaki toplamdiziler kullanılarak $P_n(t)$ ve $Q_m(t)$ elde edilir.

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n p_n t^k, \quad Q_m(t) = \sum_{k=0}^m q_m t^k \quad (5.30)$$

Normalizasyon kullanılarak q_0 her zaman 1 olarak alınabilir. Farklı $[n, m]$ ikilileri için $x(t)$ 'nin öğelerini aşağıdaki gibi elde edebiliriz. Sonuçların elde edilmesinde başlangıç yöneyi olarak $[1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$ alınmıştır.

5.2.1 OLEVKU yakınsaklık bölgesi içinde kalan aralıkta sonuçlar

Köşegende yer alan ikililer için $x(t)$ 'nin öğelerini aşağıdaki gibi elde edebiliriz. Bu durum için $n = m$ olan ikililer kullanılacaktır.

$[1, 1]$ olduğu durum:

$$\begin{aligned} r(t) &= -\frac{t^2}{2} + t + 1, & p_r(t) &= \frac{3t^2}{2} - t + 1, & u_1(t) &= 4t^2 - 2t + 1 \\ u_2(t) &= \frac{3t^2}{2} - t + 1, & u_3(t) &= 4t^2 - 2t + 1, & u_4(t) &= 4t^2 - 2t + 1 \end{aligned} \quad (5.31)$$

$[2, 2]$ olduğu durum:

$$\begin{aligned} r(t) &= -\frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ p_r(t) = u_2(t) &= \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} - t + 1 \\ u_1(t) = u_3(t) = u_4(t) &= 16t^4 - 8t^3 + 4t^2 - 2t + 14t^2 - 2t + 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

[3,3] olduğu durum:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= -\frac{21t^6}{16} + \frac{7t^5}{8} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\
 p_r(t) = u_2(t) &= \frac{231t^6}{16} - \frac{63t^5}{8} + \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} - t + 1 \\
 u_1(t) = u_3(t) = u_4(t) &= 64t^6 - 32t^5 + 16t^4 - 8t^3 + 4t^2 - 2t + 14t^2 - 2t + 1
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

[4,4] olduğu durum:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= -\frac{429t^8}{128} + \frac{33t^7}{16} - \frac{21t^6}{16} + \frac{7t^5}{8} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\
 p_r(t) = u_2(t) &= \frac{6435t^8}{128} - \frac{429t^7}{16} + \frac{231t^6}{16} - \frac{63t^5}{8} + \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} - t + 1 \\
 u_1(t) = u_3(t) = u_4(t) &= 256t^8 - 128t^7 + 64t^6 - 32t^5 + 16t^4 - 8t^3 + 4t^2 - 2t + 14t^2 - 2t + 1
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

[5,5] olduğu durum:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= -\frac{2431t^{10}}{256} + \frac{715t^9}{128} - \frac{429t^8}{128} + \frac{33t^7}{16} - \frac{21t^6}{16} + \frac{7t^5}{8} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\
 p_r(t) = u_2(t) &= \frac{46189t^{10}}{256} - \frac{12155t^9}{128} + \frac{6435t^8}{128} - \frac{429t^7}{16} + \frac{231t^6}{16} - \frac{63t^5}{8} + \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} \\
 &\quad + \frac{3t^2}{2} - t + 1 \\
 u_1(t) = u_3(t) = u_4(t) &= 1024t^{10} - 512t^9 + 256t^8 - 128t^7 + 64t^6 - 32t^5 + 16t^4 - 8t^3 \\
 &\quad + 4t^2 - 2t + 14t^2 - 2t + 1
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Farklı $[n, m]$ derecelerindeki bu işlemlere Padé yaklaşımlarını uygulandığından sonra elde edilen işlemler aşağıdaki gibidir.

[1,1] olduğu durum:

$$R_{r(t)} = \frac{3t + 2}{t + 2} \tag{5.36}$$

$$R_{p_r(t)} = \frac{t + 2}{3t + 2}$$

[2,2] olduğu durum:

$$R_{r(t)} = \frac{5t^2 + 10t + 4}{t^2 + 6t + 4} \tag{5.37}$$

$$R_{p_r(t)} = \frac{t^2 + 6t + 4}{5t^2 + 10t + 4}$$

[3,3] olduğu durum:

$$R_{r(t)} = \frac{7t^3 + 28t^2 + 28t + 8}{t^3 + 12t^2 + 20t + 8} \tag{5.38}$$

$$R_{p_r(t)} = \frac{t^3 + 12t^2 + 20t + 8}{7t^3 + 28t^2 + 28t + 8}$$

[4,4] olduğu durum:

$$R_{r(t)} = \frac{(0.5625)t^4 + (3.7500)t^3 + (6.7500)t^2 + (4.5000)t + 1}{(0.0625)t^4 + (1.2500)t^3 + (3.7500)t^2 + (3.5000)t + 1} \quad (5.39)$$

$$R_{p_r(t)} = \frac{(0.0625)t^4 + (1.2500)t^3 + (3.7500)t^2 + (3.5000)t + 1}{(0.5625)t^4 + (3.7500)t^3 + (6.7500)t^2 + (4.5000)t + 1}$$

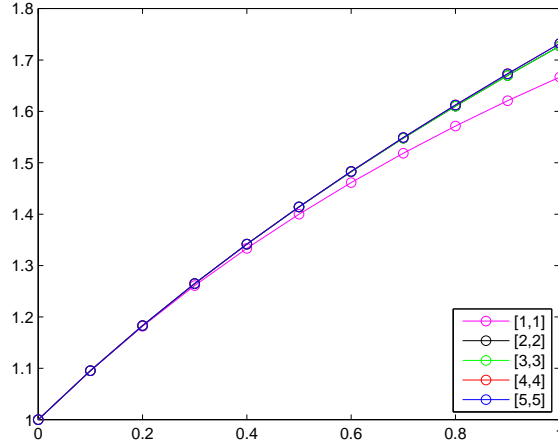
[5,5] olduğu durum:

$$R_{r(t)} = \frac{(0.3437)t^5 + (3.4375)t^4 + (9.6250)t^3 + (11.0000)t^2 + (5.5000)t + 1}{(0.0312)t^5 + (0.9375)t^4 + (4.3750)t^3 + (7.0000)t^2 + (4.5000)t + 1} \quad (5.40)$$

$$R_{p_r(t)} = \frac{(0.3437)t^5 + (3.4375)t^4 + (9.6250)t^3 + (11.0000)t^2 + (5.5000)t + 1}{(0.0312)t^5 + (0.9375)t^4 + (4.3750)t^3 + (7.0000)t^2 + (4.5000)t + 1}$$

Çizelge 5.2 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşıtları ile elde edilen değerleri

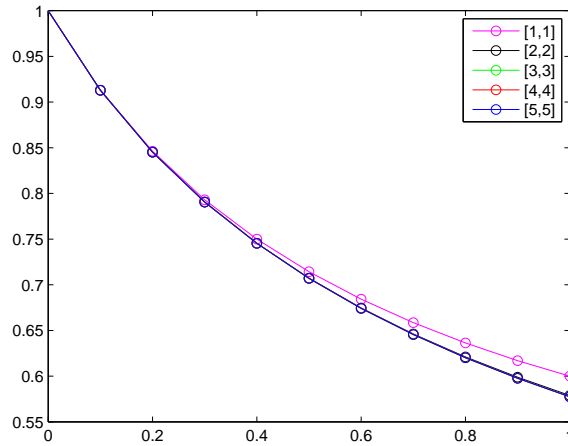
t	[1, 1]	[2, 2]	[3, 3]	[4, 4]	[5, 5]
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.0952	1.0954	1.0954	1.0954	1.0954
0.2	1.1818	1.1832	1.1832	1.1832	1.1832
0.3	1.2609	1.2649	1.2649	1.2649	1.2649
0.4	1.3333	1.3415	1.3416	1.3416	1.3416
0.5	1.4000	1.4138	1.4142	1.4142	1.4142
0.6	1.4615	1.4824	1.4832	1.4832	1.4832
0.7	1.5185	1.5478	1.5491	1.5492	1.5492
0.8	1.5714	1.6102	1.6123	1.6124	1.6125
0.9	1.6207	1.6699	1.6731	1.6733	1.6733
1.0	1.6667	1.7273	1.7317	1.7320	1.7320



Çizim 5.3 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşıtları ile elde edilen değerlerin grafiği

Çizelge 5.3 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşıtları ile elde edilen değerleri

t	[1, 1]	[2, 2]	[3, 3]	[4, 4]	[5, 5]
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9130	0.9129	0.9129	0.9129	0.9129
0.2	0.8462	0.8452	0.8452	0.8452	0.8452
0.3	0.7931	0.7906	0.7906	0.7906	0.7906
0.4	0.7500	0.7455	0.7454	0.7454	0.7454
0.5	0.7143	0.7073	0.7071	0.7071	0.7071
0.6	0.6842	0.6746	0.6742	0.6742	0.6742
0.7	0.6585	0.6461	0.6455	0.6455	0.6455
0.8	0.6364	0.6211	0.6202	0.6202	0.6202
0.9	0.6170	0.5988	0.5977	0.5976	0.5976
1.0	0.6000	0.5789	0.5775	0.5774	0.5774

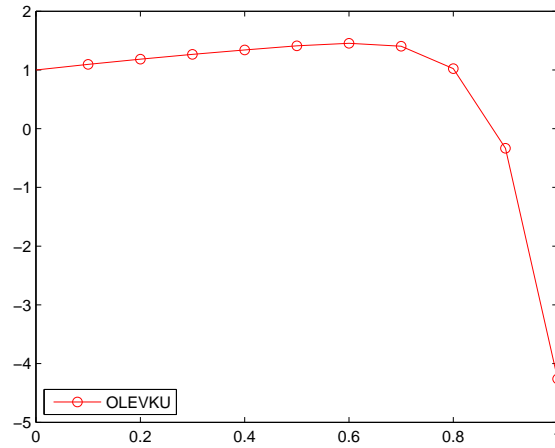


Çizim 5.4 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşıtları ile elde edilen değerlerin grafiği

[0, 1] aralığında OLEVKU'dan alınan değerlerin yer aldığı çizelge ve bu değerler ile çizilen grafik aşağıdaki gibidir.

Çizelge 5.4 : $r(t)$ işlevinin [0, 1] aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri

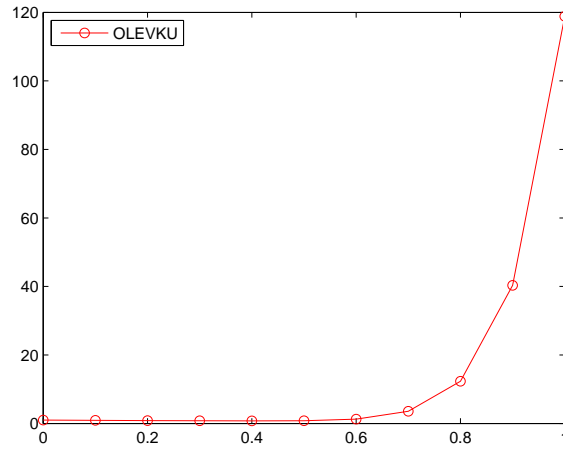
t	$r(t)$
0	1
0.1	1.095445114870703125
0.2	1.1832157076
0.3	1.264891984758203125
0.4	1.3412353024
0.5	1.409931182861328125
0.6	1.4541215524
0.7	1.402900854680078125
0.8	1.0229912576
0.9	-0.334626982785546875
1.0	-4.26171875



Çizim 5.5 : $r(t)$ işlevinin [0, 1] aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği

Çizelge 5.5 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri

t	$p_r(t)$
0	1
0.1	0.912870932066015625
0.2	0.8451593556
0.3	0.790957014047265625
0.4	0.7535391744
0.5	0.793064117431640625
0.6	1.2560365444
0.7	3.557548042719140625
0.8	12.3153478656
0.9	40.323006051909765625
1.0	118.86328125



Çizim 5.6 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği

Bu andan itibaren sadece esas işlevler olan $r(t)$ ve $p_r(t)$ dikkate alınacak; grafikler ve çizelgelerde bu iki işleve ait sonuçlara yer verilecektir.

Köşegenin hemen üzerinde kalan ikililer için $x(t)$ 'nin öğelerini aşağıdaki gibi elde edebiliriz. Bu durum için $n + 1 = m$ olan ikililer kullanılacaktır.

$[1, 2]$ olduğu durum:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ p_r(t) &= -\frac{5t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} - t + 1 \end{aligned} \quad (5.41)$$

[2,3] olduğu durum:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{7t^5}{8} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ p_r(t) &= -\frac{63t^5}{8} + \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} - t + 1 \end{aligned} \quad (5.42)$$

[3,4] olduğu durum:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{33t^7}{16} - \frac{21t^6}{16} + \frac{7t^5}{8} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ p_r(t) &= -\frac{429t^7}{16} + \frac{231t^6}{16} - \frac{63t^5}{8} + \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} \end{aligned} \quad (5.43)$$

[4,5] olduğu durum:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{715t^9}{128} - \frac{429t^8}{128} + \frac{33t^7}{16} - \frac{21t^6}{16} + \frac{7t^5}{8} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ p_r(t) &= -\frac{12155t^9}{128} + \frac{6435t^8}{128} - \frac{429t^7}{16} + \frac{231t^6}{16} - \frac{63t^5}{8} + \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Benzer şekilde köşegenin hemen üzerinde kalan ikililer dikkate alınarak $r(t)$ ve $p_r(t)$ işlevleri için Padé yaklaşımlarını aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

[1,2] olduğu durum:

$$R_{r(t)} = \frac{(1.6667)t + 1}{(-0.1667)t^2 + (0.6667)t + 1} \quad (5.45)$$

$$R_{p_r(t)} = \frac{2t + 2}{t^2 + 4t + 2}$$

[2,3] olduğu durum:

$$R_{r(t)} = \frac{(1.7500)t^2 + (2.8000)t + 1}{(-0.0500)t^3 + (0.4500)t^2 + (1.8000)t + 1} \quad (5.46)$$

$$R_{p_r(t)} = \frac{(0.7500)t^2 + (2.0000)t + 1}{(0.2500)t^3 + (2.2500)t^2 + (3.0000)t + 1}$$

[3,4] olduğu durum:

$$R_{r(t)} = \frac{(1.5000)t^3 + (4.5000)t^2 + (3.8571)t + 1}{(-0.0179)t^4 + (0.2857)t^3 + (2.1429)t^2 + (2.8571)t + 1} \quad (5.47)$$

$$R_{p_r(t)} = \frac{(0.5000)t^3 + (2.5000)t^2 + (3.0000)t + 1}{(0.1250)t^4 + (2.0000)t^3 + (5.0000)t^2 + (4.0000)t + 1}$$

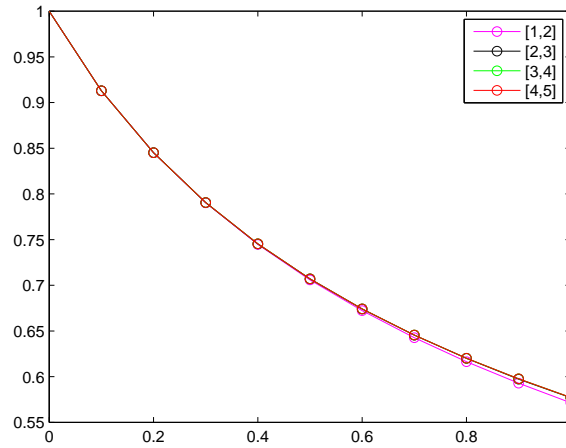
[4,5] olduğu durum:

$$R_r(t) = \frac{(1.1458)t^4 + (5.5000)t^3 + (8.2500)t^2 + (4.8889)t + 1}{(-0.0069)t^5 + (0.1736)t^4 + (2.0833)t^3 + (4.8611)t^2 + (3.8899)t + 1} \quad (5.48)$$

$$R_{pr}(t) = \frac{(0.3125)t^4 + (2.5000)t^3 + (5.2500)t^2 + (4.0000)t + 1}{(0.0625)t^5 + (1.5625)t^4 + (6.2500)t^3 + (8.7500)t^2 + (5.0000)t + 1}$$

Çizelge 5.6 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşıtıranları ile elde edilen değerleri

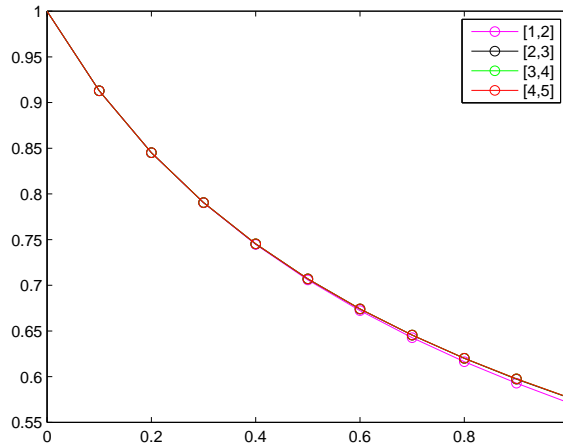
t	[1,2]	[2,3]	[3,4]	[4,5]
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1,0955	1,0954	1,0954	1,0954
0.2	1,1834	1,1832	1,1832	1,1832
0.3	1,2658	1,2649	1,2649	1,2649
0.4	1,3441	1,3417	1,3416	1,3416
0.5	1,4194	1,4143	1,4142	1,4142
0.6	1,4925	1,4835	1,4832	1,4832
0.7	1,5644	1,5497	1,5492	1,5492
0.8	1,6355	1,6134	1,6125	1,6125
0.9	1,7065	1,6748	1,6734	1,6733
1.0	1,7778	1,7344	1,7322	1,7321



Çizim 5.7 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşıtıranları ile elde edilen değerlerin grafiği

Çizelge 5.7 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşıtları ile elde edilen değerleri

t	[1,2]	[2,3]	[3,4]	[4,5]
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0,9129	0,9129	0,9129	0,9129
0.2	0,8451	0,8452	0,8452	0,8452
0.3	0,7903	0,7906	0,7906	0,7906
0.4	0,7447	0,7453	0,7454	0,7454
0.5	0,7059	0,7071	0,7071	0,7071
0.6	0,6723	0,6741	0,6742	0,6742
0.7	0,6427	0,6454	0,6455	0,6455
0.8	0,6164	0,6200	0,6202	0,6202
0.9	0,5928	0,5973	0,5976	0,5976
1.0	0,5714	0,5769	0,5773	0,5773



Çizim 5.8 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşıtları ile elde edilen değerlerin grafiği

Köşegenin hemen altında kalan ikililer için $x(t)$ 'nin öğelerini aşağıdaki gibi elde edebiliriz. Bu durum için $n - 1 = m$ olan ikililer kullanılacaktır.

[2, 1] olduğu durum:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\
 p_r(t) &= -\frac{5t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} - t + 1
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

[3, 2] olduğu durum:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \frac{7t^5}{8} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\
 p_r(t) &= -\frac{63t^5}{8} + \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} - t + 1
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

[4,3] olduğu durum:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{33t^7}{16} - \frac{21t^6}{16} + \frac{7t^5}{8} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ p_r(t) &= -\frac{429t^7}{16} + \frac{231t^6}{16} - \frac{63t^5}{8} + \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

[5,4] olduğu durum:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{715t^9}{128} - \frac{429t^8}{128} + \frac{33t^7}{16} - \frac{21t^6}{16} + \frac{7t^5}{8} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ p_r(t) &= -\frac{12155t^9}{128} + \frac{6435t^8}{128} - \frac{429t^7}{16} + \frac{231t^6}{16} - \frac{63t^5}{8} + \frac{35t^4}{8} - \frac{5t^3}{2} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Benzer şekilde köşegenin hemen altında kalan ikililer dikkate alınarak $r(t)$ ve $p_r(t)$ işlevleri için Padé yaklaşımlarını aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

[2,1] olduğu durum:

$$\begin{aligned} R_{r(t)} &= \frac{4t^2 + t + 2}{2t + 2} \\ R_{p_r(t)} &= \frac{(-0.1667)t^2 + (0.6667)t + 1}{(1.6667)t + 1} \end{aligned} \quad (5.53)$$

[3,2] olduğu durum:

$$\begin{aligned} R_{r(t)} &= \frac{(0.25000)t^3 + (2.2500)t^2 + (3.0000)t + 1}{(0.7500)t^2 + (2.0000)t + 1} \\ R_{p_r(t)} &= \frac{(-0.0500)t^3 + (0.4500)t^2 + (1.8000)t + 1}{(1.7500)t^2 + (2.8000)t + 1} \end{aligned} \quad (5.54)$$

[4,3] olduğu durum:

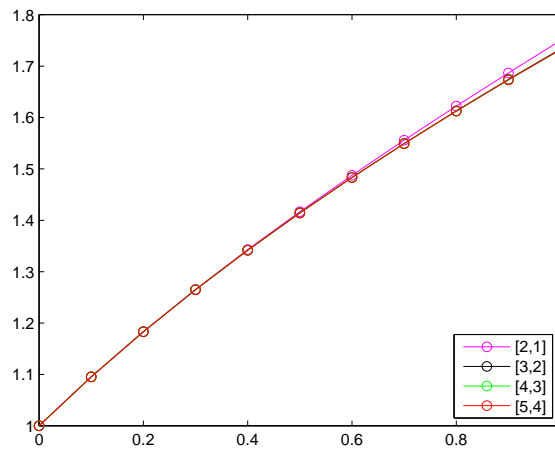
$$\begin{aligned} R_{r(t)} &= \frac{(0.1250)t^4 + (2.0000)t^3 + (5.0000)t^2 + (4.0000)t + 1}{(0.5000)t^3 + (2.5000)t^2 + (3.0000)t + 1} \\ R_{p_r(t)} &= \frac{(-0.0179)t^4 + (0.2857)t^3 + (2.1429)t^2 + (2.8571)t + 1}{(1.5000)t^3 + (4.5000)t^2 + (3.8571)t + 1} \end{aligned} \quad (5.55)$$

[5,4] olduğu durum:

$$\begin{aligned} R_{r(t)} &= \frac{(0.0625)t^5 + (1.5625)t^4 + (6.2500)t^3 + (8.7500)t^2 + (5.0000)t + 1}{(0.3125)t^4 + (2.5000)t^3 + (5.2500)t^2 + (4.0000)t + 1} \\ R_{p_r(t)} &= \frac{(-0.0069)t^5 + (0.1736)t^4 + (2.0833)t^3 + (4.8611)t^2 + (3.8899)t + 1}{(1.1458)t^4 + (5.5000)t^3 + (8.2500)t^2 + (4.8889)t + 1} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Çizelge 5.8 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerleri

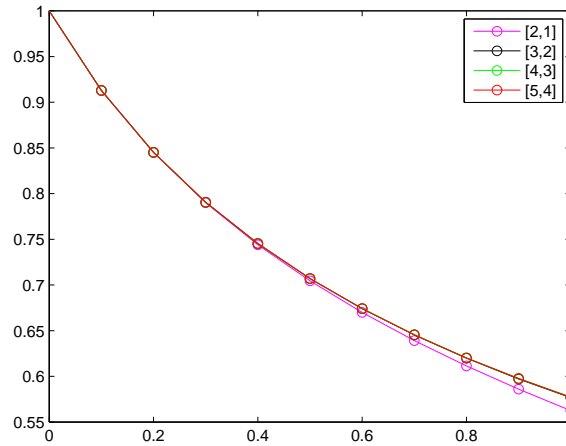
t	[2, 1]	[3, 2]	[4, 3]	[5, 4]
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1,0955	1,0954	1,0954	1,0954
0.2	1,1833	1,1832	1,1832	1,1832
0.3	1,2654	1,2649	1,2649	1,2649
0.4	1,3429	1,3417	1,3416	1,3416
0.5	1,4167	1,4143	1,4142	1,4142
0.6	1,4875	1,4834	1,4832	1,4832
0.7	1,5559	1,5495	1,5492	1,5492
0.8	1,6222	1,6130	1,6125	1,6125
0.9	1,6868	1,6742	1,6734	1,6733
1.0	1,7500	1,7333	1,7321	1,7321



Çizim 5.9 : $r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerlerin grafiği

Çizelge 5.9 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerleri

t	[2, 1]	[3, 2]	[4, 3]	[5, 4]
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0,9129	0,9129	0,9129	0,9129
0.2	0,8450	0,8452	0,8452	0,8452
0.3	0,7900	0,7906	0,7906	0,7906
0.4	0,7440	0,7453	0,7454	0,7454
0.5	0,7045	0,7070	0,7071	0,7071
0.6	0,6700	0,6741	0,6742	0,6742
0.7	0,6392	0,6453	0,6455	0,6455
0.8	0,6114	0,6198	0,6202	0,6202
0.9	0,5860	0,5971	0,5976	0,5976
1.0	0,5625	0,5766	0,5773	0,5773



Çizim 5.10 : $p_r(t)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerlerin grafiği

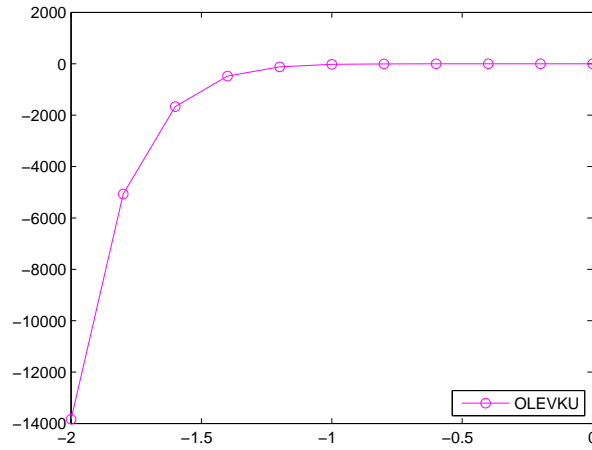
5.2.2 OLEVKU yakınsaklık bölgesi dışında kalan aralıkta sonuçlar

OLEVKU yakınsaklık bölgesi dışında kalan aralıkta Padé değerleri ile karşılaştırma yapabilmek için $[-2, 0]$ aralığı ve $h = 0.2$ adım uzunluğu ele alınacaktır.

$[-2, 0]$ aralığında $r(t)$ ve $p_r(t)$ işlevleri için OLEVKU'dan alınan değerlerin yer aldığı çizelge ve bu değerler ile çizilen grafikler aşağıdaki gibidir.

Çizelge 5.10 : $r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri

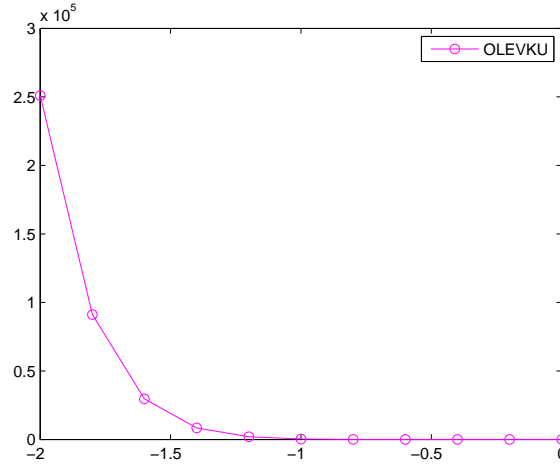
t	$r(t)$
-2	-13835
-1.8	-5067.2547618524
-1.6	-1666.5017138176
-1.4	-481.0352519276
-1.2	-118.5973197824
-1.0	-24.30859375
-0.8	-4.0269876224
-0.6	-0.3260188076
-0.4	0.4496282624
-0.2	0.7745971876
0.0	-0.29387358770



Çizim 5.11 : $r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği

Çizelge 5.11 : $p_r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri

t	$p_r(t)$
-2	250953
-1.8	91146.4679717956
-1.6	29612.8090604544
-1.4	8385.5302450644
-1.2	1999.8247392256
-1.0	385.16015625
-0.8	58.3731680256
-0.6	8.1758882644
-0.4	2.1724652544
-0.2	1.2909829956
0.0	1.0

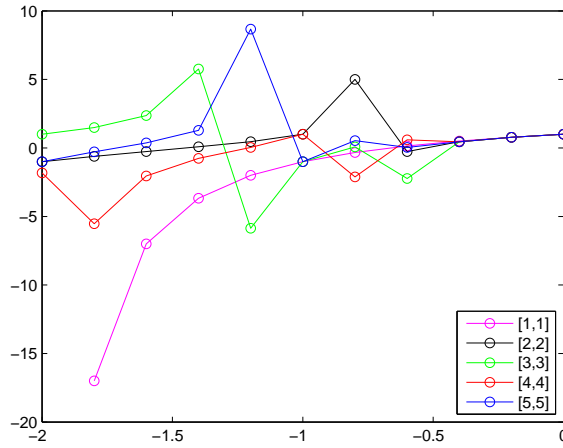


Çizim 5.12 : $p_r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği

$[-2, 0]$ aralığında Padé yaklaşımalarında köşegende yer alan ikililer kullanılarak $r(t)$ ve $p_r(t)$ işlevleri için sonuçları aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

Çizelge 5.12 : $r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerleri

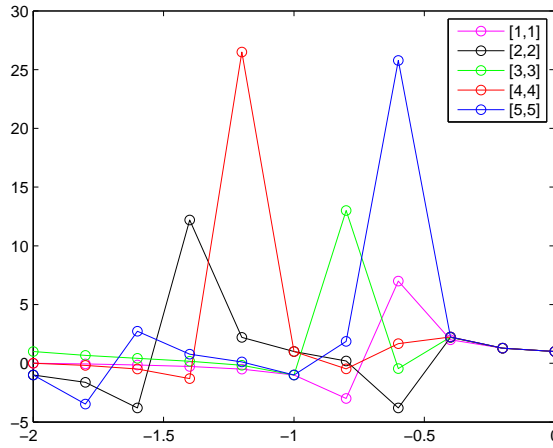
t	[1, 1]	[2, 2]	[3, 3]	[4, 4]	[5, 5]
-2	-Sonsuz	-1.0000	1.0000	-1.8178	-1.0000
-1.8	-17.0000	-0.6180	1.4849	-5.5303	-0.2882
-1.6	-7.0000	-0.2632	2.3659	-1.0497	0.3661
-1.4	-3.6667	0.0820	5.7629	-0.7655	1.2817
-1.2	-2.0000	0.4545	-5.8521	0.0377	8.6744
-1	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
-0.8	-0.3333	5.0000	0.0769	-2.1111	0.5349
-0.6	0.1429	-0.2632	-2.2308	0.5966	0.0388
-0.4	0.5000	0.4545	0.4483	0.4474	0.4472
-0.2	0.7778	0.7746	0.7746	0.7746	0.7746
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000



Çizim 5.13 : $r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerlerin grafiği

Çizelge 5.13 : $p_r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerleri

t	[1, 1]	[2, 2]	[3, 3]	[4, 4]	[5, 5]
-2	0.0000	-1.0000	1.0000	0.0000	-1.0000
-1.8	-0.0588	-1.6182	0.6734	-0.1808	-3.4701
-1.6	-0.1429	-3.8000	0.4227	-0.4879	2.7312
-1.4	-0.2727	12.2000	0.1735	-0.3064	0.7802
-1.2	-0.5000	2.2000	-0.1707	26.5000	0.1153
-1	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
-0.8	-3.0000	0.2000	13.0000	-0.4737	1.8696
-0.6	7.0000	-3.8000	-0.4483	0.6761	25.7826
-0.4	2.0000	2.2000	2.2308	2.2353	2.2360
-0.2	1.2857	1.2909	1.2910	1.2910	1.2910
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000



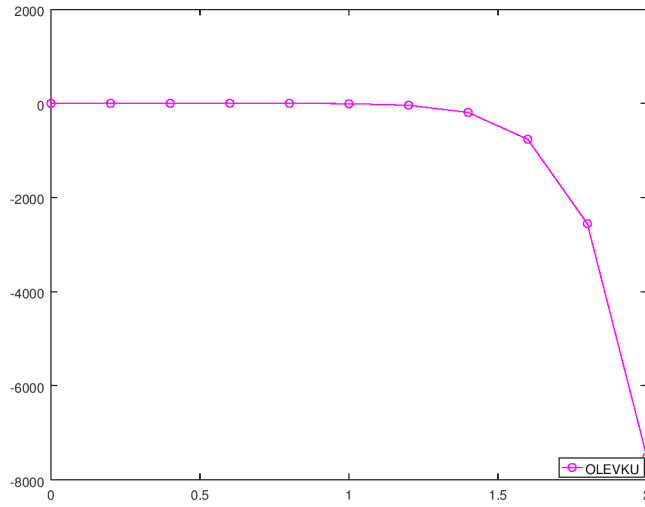
Çizim 5.14 : $p_r(t)$ işlevinin $[-2, 0]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerlerin grafiği

Olasılıkçıl Evrim Kuramının hem yakınsaklık bölgesi içinde hem de yakınsaklık bölgesi dışında kalan aralıkta Padé değerleri ile karşılaştırma yapabilmek için $[0, 2]$ aralığı ve $h = 0.2$ adım uzunluğu ele alınacaktır. Bu durumun ele alınmasındaki en önemli nedenlerden biri de t zaman değişkeninin artı tanımlı olduğu bir aralıkta çalışma yapmaktır. Sonuçlar elde edilirken köşegende yer alan Padé ikilileri kullanılacaktır.

[0,2] aralığında $r(t)$ ve $p_r(t)$ işlevleri için OLEVKU'dan alınan değerlerin yer aldığı çizelge ve bu değerler ile çizilen grafikler aşağıdaki gibidir.

Çizelge 5.14 : $r(t)$ işlevinin [0,2] aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri

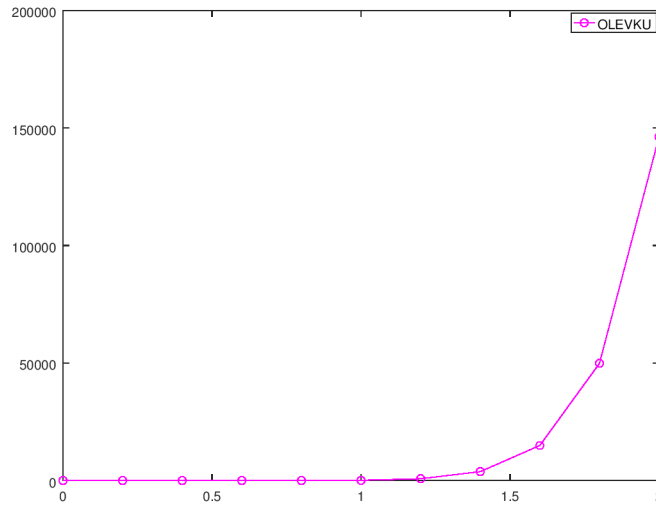
t	$r(t)$
0	1
0.2	1.1832157076
0.4	1.3412353024
0.6	1.4541215524
0.8	1.0229912576
1.0	-4.26171875
1.2	-37.6897178624
1.4	-191.7736294876
1.6	-762.4006040576
1.8	-2556.1693615724
2.0	-7519.0



Çizim 5.15 : $r(t)$ işlevinin [0,2] aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği

Çizelge 5.15 : $p_r(t)$ işlevinin $[0,2]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerleri

t	$p_r(t)$
0	1
0.2	0.8451593556
0.4	0.7535391744
0.6	1.2560365444
0.8	12.3153478656
1.0	118.86328125
1.2	777.4904697856
1.4	3795.0383051844
1.6	14933.1613369344
1.8	49860.3027398356
2.0	146301.0

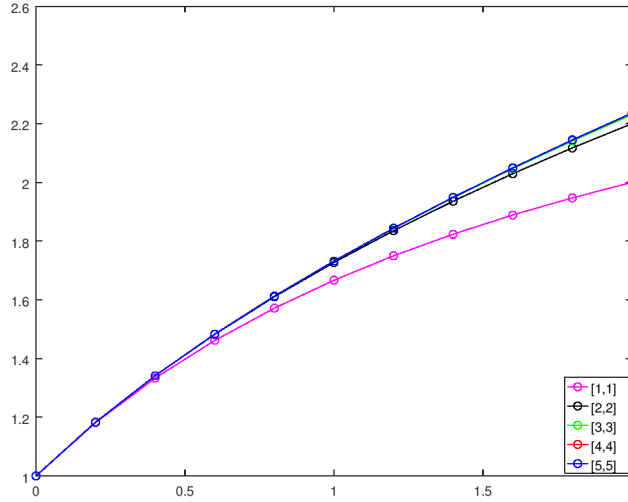


Çizim 5.16 : $p_r(t)$ işlevinin $[0,2]$ aralığında OLEVKU ile elde edilen değerlerin grafiği

$[0, 2]$ aralığında Padé yaklaşımlarında köşegende yer alan ikililer kullanılarak $r(t)$ ve $p_r(t)$ işlevleri için sonuçları aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

Çizelge 5.16 : $r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerleri

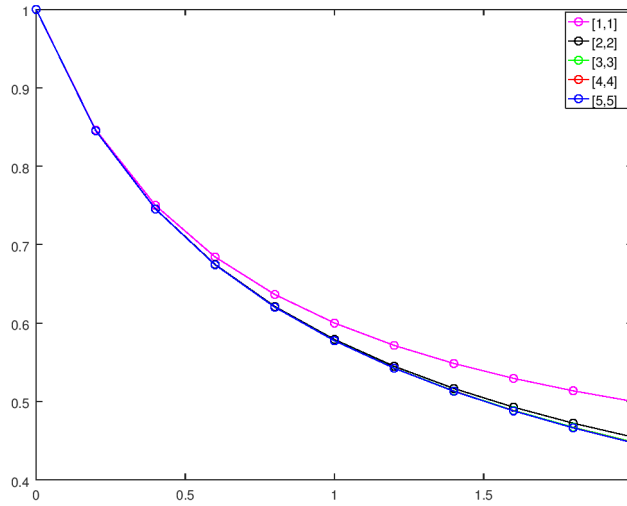
t	[1, 1]	[2, 2]	[3, 3]	[4, 4]	[5, 5]
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.2	1.1818	1.1832	1.1832	1.1832	1.1832
0.4	1.3333	1.3415	1.3416	1.3416	1.3416
0.6	1.4615	1.4824	1.4832	1.4832	1.4832
0.8	1.5714	1.6102	1.6123	1.6124	1.6125
1.0	1.6667	1.7273	1.7317	1.7320	1.7320
1.2	1.7500	1.8354	1.8432	1.8438	1.8439
1.4	1.8235	1.9359	1.9480	1.9492	1.9493
1.6	1.8889	2.0297	2.0470	2.0491	2.0494
1.8	1.9474	2.1175	2.1411	2.1443	2.1447
2.0	2.0000	2.2000	2.2308	2.2353	2.2360



Çizim 5.17 : $r(t)$ işlevinin $[0, 2]$ aralığında padé yaklaşımları ile elde edilen değerlerin grafiği

Çizelge 5.17 : $p_r(t)$ işlevinin $[0,2]$ aralığında padé yaklaşıtları ile elde edilen değerleri

t	[1, 1]	[2, 2]	[3, 3]	[4, 4]	[5, 5]
0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.2	0.84615	0.84516	0.84515	0.84515	0.84515
0.4	0.75000	0.74545	0.74536	0.74536	0.74536
0.6	0.68421	0.67458	0.67421	0.67420	0.67420
0.8	0.63636	0.62105	0.62022	0.62018	0.62017
1.0	0.60000	0.57895	0.57746	0.57736	0.57735
1.2	0.57143	0.54483	0.54255	0.54235	0.54233
1.4	0.54839	0.51655	0.51336	0.51303	0.51299
1.6	0.52941	0.49268	0.48851	0.48802	0.48796
1.8	0.51351	0.47225	0.46704	0.46636	0.46627
2.0	0.50000	0.45455	0.44828	0.44737	0.44724



Çizim 5.18 : $p_r(t)$ işlevinin $[0,2]$ aralığında padé yaklaşıtları ile elde edilen değerlerin grafiği

Sonuçlardan da görülebileceği üzere, OLEVKU'dan elde edilen değerler ve Padé yaklaşıtları ile elde edilen değerleri karşılaştırdığımızda OLEVKU'nun yakınsaklık bölgesi dışındaki aralıkta da Padé yaklaşıtları ile elde edilen sonuçlar daha iyi yakınsamaktadır. Üstelik bu yakınsamayı daha az salınım göstererek elde etmektedir.

6. SONUÇLAR

- Çok yakın geçmişte yöneyler üzerinde tanımlanan OLEVKU özyineleyiş bağıntısının dizeler üzerinde de özyineli olduğu olgusu kanıtlanmıştır. Savda bu gelişime de yer verilmiş ve vurgulanmıştır.
- Kronecker üslü uzaylar olgusu tanımlandı. İki öğeli yöneylerin ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci Kronecker üslüleri, üç öğeli yöneylerin ikinci ve üçüncü Kronecker üslüleri incelendi. Yapılan incelemeler sonucunda yöneyin öge sayısı farketmeksizin tek sayılı Kronecker üslülerinin bulunduğu uzayın bir altuzay oluşturduğu, ancak çift sayılı Kronecker üslülerinin bulunduğu uzayın bir altuzay oluşturamayacağı, daha özel bir durum olan katman (ing: manifold) oluşturduğu olgusu gösterilmiş ve kısaca katman, harita ve atlas kavramlarına yer verilmiştir.
- Öge sayısı farketmeksizin, bir yöneyin ikinci Kronecker üslüsünün elde edilebileceği genel bağıntılar verilmiştir.
- Gökmekaniğindeki iki nesnecik sorunu Olasılıkçıl Evrim Kuramı (OLEVKU) bağlamında incelenmiş ve yapısının OLEVKU uygulamaya uygun olduğu gösterilmiş ve çalışmada β değeri 0 olarak alınmıştır.
- İki nesnecik sorunu üzerinde yapılan incelemeler sonunda elde edilen iki sıradan türevli denklem kullanılarak OLEVKU bağıntıları yazılmıştır. Bu bağıntıların yazımında uzay genişletimi olgusu kullanılmış ve sağ yanı en çok ikinci dereceden çokterimlilerden oluşan altı STD elde edilmiştir.
- Elde edilen altı sıradan türevli denklemin ögesi olarak alan $x(t)$ yöneyi tanımlanmış; bu yöneye değişmezlik eklenimli uzay genişletimi (deug) bağlamında bir bilinmeyen eklenerek yedi öğeli bir yöney elde edilmiştir. Son olarak elde edilen bu yedi öğeli $x(t)$ yöneyine OLEVKU uygulanmıştır.

- Şunu belirtmemiz önemli bir olgudur ki, $r(t)$ ve $p_r(t)$ işlevlerine bağımlılıklardan dolayı $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ ve $u_4(t)$ işlevlerinde doyurucu sonuçlar elde edilememeyebilir.
- Padé yaklaşımları olgusuna yer verilmiş ve $x(t)$ yöneyine OLEVKU uygulamasının ardından elde edilen işlevlere Padé yaklaşımları uygulanmıştır. Bu yaklaşımların uygulanışlarında esas işlevler olan $r(t)$ ve $p_r(t)$ işlevleri incelenmiştir.
- Padé yaklaşımları olarak, Padé yaklaşımları tablosunda köşegende yer alan $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 3]$, $[4, 4]$ ve $[5, 5]$ ikileri, köşegenin hemen üzerinde kalan $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ ve $[4, 5]$ ikilileri ve köşegenin hemen altında kalan $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[4, 3]$ ve $[5, 4]$ ikileri kullanılmıştır.
- Olasılıkçıl Evrim Kuramı'nın yakınsaklık bölgesinde kalan $[0, 1]$ kapalı aralığında, iki nesnelik sorunundan elde edilen işlevlerin OLEVKU kullanılarak elde edilen değerleri ve Padé yaklaşımları kullanılarak elde edilen değerleri karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda yakınsaklık bölgesinde her iki yöntemde de birbirine yakın değerler elde edilmiştir.
- $[0, 1]$ aralığında OLEVKU yakınsaklık bölgesinin dışında kalan değerlere yaklaştıkça OLEVKU ile elde edilen değerlerde bozulmalar gözlemlenirken, aynı değerler için Padé yaklaşımları ile elde edilen sonuçların daha iyi yakınsadığı gözlemlenmiştir.
- Padé yaklaşımları olarak köşegende, köşegenin hemen üzerinde ya da köşegenin hemen altında yer alan ikililer kullanıldığında gündemdeki iki nesnelik sorunu için birbirine yakın değerler elde edilmiştir.
- OLEVKU'nun yakınsaklık bölgesi dışında kalan $[-2, 0]$ aralığında, zaman değişkeninin tamamen artı tanımlı olduğu ve OLEVKU'nun hem yakınsaklık bölgesi içinde hem de yakınsaklık bölgesi dışında kalan $[0, 2]$ aralığında da incelemeler yapıldı. Yapılan tüm bu çalışmalar sonucunda, Padé yaklaşımları ile elde edilen sonuçların, OLEVKU ile elde edilen sonuçlardan daha iyi yakınsadığı gözlemlendi. Üstelik bu yakınsamayı daha az salınım göstererek elde etmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Demiralp, M.** (2013). A probabilistic evolution approach trilogy, part 1: quantum expectation value evolutions, block triangularity and conicality, truncation approximants and their convergence, *J. Math. Chem.*, 51(4), pp. 1170-1186, Apr.
- [2] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.** (1993). Lie algebraic factorization of multivariable evolution operators: Definition and the solution of the canonical problem, *Int. J. Engng. Sci.*, 31(2), pp. 307-331, Feb., DOI: 10.1016/0020-7225(93)90043-T
- [3] **Demiralp, M. ve Baykara, N.A.** (2013). A probabilistic evolution approach trilogy, part 2: spectral issues for block triangular evolution matrix, singularities, space extension, *J. Math. Chem.*, pp. 1187-1197, Apr.
- [4] **Demiralp, M. ve Tunga, B.** (2013). A probabilistic evolution approach trilogy, part 3: Temporal variation of state variable expectation values from Liouville equation perspective, *J. Math. Chem.*, pp. 1198-1210, Apr.
- [5] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations. Part 1: Arbitrariness and equipartition theorem in Kronecker power series, *J. Math. Chem.*, 52(3), Mar.
- [6] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations. Part 2: Kernel separability, space extension, and, series solution via telescopic matrices, *J. Math. Chem.*, 52(3), Mar.
- [7] **Bodur, D. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic Evolution Approach to First Order Explicit Ordinary Differential Equations for Two Unknown Case, *Advances in Systems Theory, Signal Processing and Computational Science, Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation, İstanbul, Türkiye, 21-23 August 2012*, pp. 203–207.
- [8] **Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2012). Enhanced Multivariate Product Representation at Constancy Level in Probabilistic Evolution Approach to First Order Explicit ODEs, *Advances in Systems Theory, Signal Processing and Computational Science, Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation, İstanbul, Türkiye, 21-23 August 2012*, pp. 229–234.

- [9] **Tuna, S.** ve **Demiralp, M.** (2012). Certain Validations of Probabilistic Evolution Approach for Initial Value Problems, *Advances in Systems Theory, Signal Processing and Computational Science, Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation, İstanbul, Türkiye, 21-23 August 2012*, pp. 246–249.
- [10] **Okan, A., Baykara, N.A.** ve **Demiralp, M.** (2012). Fluctuation Suppression to Optimize Initial Data to Increase the Quality of Truncation Approximants in Probabilistic Evolution Approach for ODEs: Basic Philosophy, *International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 15–20 September 2012, Kos Island, Greece, AIP Proceedings*, 1479, pp. 2007–2010.
- [11] **Demiralp, M.** ve **Demiralp, E.** (2013). A contemporary linear representation theory for ordinary differential equations: probabilistic evolutions and related approximants for unidimensional autonomous systems, *J. Math. Chem.*, 51(1), pp. 58–72, Jan.
- [12] **Demiralp, M.** ve **Demiralp, E.** (2013). A contemporary linear representation theory for ordinary differential equations: multilinear algebra in folded arrays (folarrs) perspective and its use in multidimensional case, *J. Math. Chem.*, 51(1), pp. 38–57, Jan.
- [13] **Ayvaz, M.** ve **Demiralp, M.** (2012). Getting Triangularity and Conicality in the Probabilistic Evolutionary Expectation Dynamics of the Purely Quartic Quantum Anharmonic Oscillator, *Advances in Systems Theory, Signal Processing and Computational Science, Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation, İstanbul, Türkiye, 21-23 August 2012*, pp. 268–271.
- [14] **Kalay, B.** ve **Demiralp, M.** (2012). Quantum Expected Value Dynamics in Probabilistic Evolution Perspective for Systems Under Dynamic Weak External Fields, *Advances in Systems Theory, Signal Processing and Computational Science, Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation, İstanbul, Türkiye, 21-23 August 2012*, pp. 241–245.
- [15] **Demiralp, M.** ve **Bayat, S.** (2013). Fluctuation Free Limit Behavior of the One Dimensional Quantum Systems in Space Extension Perspective: Exponentially Anharmonic Symmetric Oscillator, *The Proceedings of the WSEAS 15th International Conference on Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering (MACMESE'13), 2-4 April 2013, Kuala Lumpur, Malaysia*, pp. 201–206.
- [16] **Gözükırmızı, C.** ve **Demiralp, M.** (2012). Convergence of Probabilistic Evolution Truncation Approximants via Eigenfunctions of Evolution Operator, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12), G. Enescu University, Iasi, Romania, 13-15 June 2012*, pp. 45–50.

- [17] **Hunutlu, F., Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2013). Truncation approximants to probabilistic evolution of ordinary differential equations under initial conditions via bidiagonal evolution matrices: simple case, *I. J. Comput. Math.*, 90(11), Nov.
- [18] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic Evolution for the Most General First Order Single Unknown Explicit ODEs: Autonomization, Triangularization, and, Certain Important Aspects in the Analysis, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12), G. Enescu University, Iasi, Romania, 13-15 June 2012*, pp. 57–62.
- [19] **Kırkın, M.E. ve Demiralp, M.** (2016). *Journal of Computers 1*, 158–165.
- [20] **Tataroğlu, E. ve Demiralp, M.** (2016). Solutions for the Case of Spectrally Separable Kernel Matrices in the Probabilistic Evolution Theory (PREVTH), *International Journal of Mathematical and Computational Methods, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM '16), İstanbul, Turkey, April 15–17, (2016)* 201–206.
- [21] **Bodur, D. ve Demiralp, M.** (2013). Second Degree Rectangular Eigenproblems of Cubic Multiway Arrays, *The Proceedings of the WSEAS 13th International Conference on System Theory and Scientific Computation (ISTASC'13), 6-8 August 2013, Valencia, Spain*, pp. 66–69.
- [22] **Bodur, D. ve Baykara, N.A.** (2013) A Rather General Look at the Second Degree Rectangular Eigenproblems of Cubic Multiway Arrays, *The Proceedings of the WSEAS 13th International Conference on System Theory and Scientific Computation (ISTASC'13), 6-8 August 2013, Valencia, Spain*, pp. 101–105.
- [23] **Demiralp, M.** (2014). Squarificating the telescope matrix images of initial value vector in probabilistic evolution theory (pet), *Proceedings of the 19th International Conference on Applied Mathematics (AMATH'14)*, pp. 99–104.
- [24] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2012) Probabilistic Evolutions in Classical Dynamics: Conicalization and Block Triangularization of Lennard-Jones Systems, *International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 15–20 September 2012, Kos Island, Greece, AIP Proceedings, 1479*, pp. 1986–1989.
- [25] **Tataroğlu, E. ve Demiralp, M.** (2016). An implementative application of probabilistic evolution theory: A case study for two particles celestial mechanical system, *AIP Conference Proceedings*, 1798(1):020160, 2017.
- [26] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2013). Space Extension Strategies for Probabilistic Evolution Approach: Classical Symmetric Quartic Anharmonic Oscillator, *The Proceedings of the WSEAS 13th International Conference on*

System Theory and Scientific Computation (ISTASC'13), 6-8 August 2013, Valencia, Spain, pp. 81–86.

- [27] **Kırkın, M.E** ve **Gözükırmızı, C.** (2015). Probabilistic Evolution Theory for ODE sets with second degree multinomial right hand side functions: Certain reductive cases, *Proceedings of 11th International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering, Atina, Greece, Mar.*
- [28] **Gözükırmızı, C.** ve **Tataroğlu, E.** (2016). Squarification of Telescope Matrices in the Probabilistic Evolution Theoretical Approach to the Two Particle Classical Mechanics as an Illustrative Implementation, *AIP Conference Proceedings*, 1798(1):020062, 2017.
- [29] **Tataroğlu, E.** ve **Demiralp, M.** (2017). Padé Approximants to Conicality Based Probabilistic Evolution Theory (PREVTH) Solutions: Two Classical Particles Systems Interacting via Central Forces, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2017, 4-8 July, 1965–1973.*

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Elif TATAROĞLU

Doğum Tarihi ve Yeri: 31/01/1990, İstanbul

E-Posta: tataroglue@itu.edu.tr, elif.istanbuul@gmail.com

Lisans: Karadeniz Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü (2012)

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- **Tataroğlu, E. ve Demiralp, M.** (2017). Padé Approximants to Conicality Based Probabilistic Evolution Theory (PREVTH) Solutions: Two Classical Particles Systems Interacting via Central Forces, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2017*, 4-8 July, 1965–1973.
- **Tataroğlu, E. ve Demiralp, M.** (2016). An implementative application of probabilistic evolution theory: A case study for two particles celestial mechanical system, *AIP Conference Proceedings*, 1798(1):020160, 2017.
- **Gözükırmızı, C. ve Tataroğlu, E.** (2016). Squarification of Telescope Matrices in the Probabilistic Evolution Theoretical Approach to the Two Particle Classical Mechanics as an Illustrative Implementation, *AIP Conference Proceedings*, 1798(1):020062, 2017.
- **Tataroğlu, E. ve Demiralp, M.** (2016). Solutions for the Case of Spectrally Separable Kernel Matrices in the Probabilistic Evolution Theory (PREVTH), *International Journal of Mathematical and Computational Methods, Proceedings of the 10th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM '16), İstanbul, Turkey, April 15–17, (2016)* 201–206.