ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Nergiz POYRAZ

ALTIN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2018

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ALTIN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

Nergiz POYRAZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 04/05/2018 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

……………………………..	…..…………………	..…………………….
Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ	Prof. Dr. Erol YAŞAR	Prof. Dr. Erol KILIÇ
DANIŞMAN	2. DANIŞMAN	ÜYE

……………………….	……………………………..
Prof. Dr. Ali ÖZKURT	Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN
ÜYE	ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
EnstitüMüdürü

Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FDK-2016-6175

ÖZ

DOKTORA TEZİ

ALTIN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

Nergiz POYRAZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
2. Danışman : Prof. Dr. Erol YAŞAR
Yıl: 2018, Sayfa: 151
Jüri : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Erol YAŞAR
: Prof. Dr. Erol KILIÇ
: Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışmada altın semi-Riemann manifoldların lightlike hiperyüzeyleri, half lightlike altmanifoldları ve r-lightlike altmanifoldları incelendi. Bunlar üzerinde invaryant, screen semi-invaryant ve radikal anti-invaryant sınıflar tanıtıldı. Özellikle screen semi-invaryant, ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyler ve half lightlike altmanifoldlar için bazı geometrik sonuçlar incelendi. Ayrıca semi-invaryant lightlike altmanifoldlar için bazı sonuçlar elde edildi. Buna ek olarak, bir altın semi-Riemann manifoldunun radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeyinin, half lightlike altmanifoldunun ve lightlike altmanifoldunun olmadığı gösterildi.

AnahtarKelimeler: Altın Semi-Riemann manifold, Altın yapı, Screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey, Screen semi-invaryant half lightlike altmanifold, Semi-invaryant lightlike altmanifold

ABSTRACT

PhD THESIS

LIGHTLIKE SUBMANIFOLDS OF GOLDEN SEMI-RIEMANNIAN MANIFOLDS

Nergiz POYRAZ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor	: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
2. Supervisor	: Prof. Dr. Erol YAŞAR
	Year: 2018, Sayfa: 151
Jury	: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
	: Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
	: Prof. Dr. Erol YAŞAR
	: Prof. Dr. Erol KILIÇ
	: Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
	: Prof. Dr. Ahmet YÜCESAN

In this PhD thesis, lightlike hypersurfaces, half lightlike submanifolds and r-lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds have been investigated. Invariant, screen semi-invariant and radical anti-invariant classes are introduced on these manifolds. In particular, screen semi-invariant, screen conformal screen semi-invariant hypersurfaces and half lightlike submanifolds have been studied and some geometric results have been obtained. Also, some results have been obtained for semi-invariant lightlike submanifolds. Moreover, it has been proven that a golden semi-Riemannian manifold do not have radical anti-invariant lightlike hypersurface, half lightlike or lightlike submanifold.

KeyWords: Golden semi-Riemannian manifold, Golden structure, Screen semi-invariant lightlike hypersurface, Screen semi-invariant half lightlike submanifold, Semi-invariant lightlike submanifold

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Semi-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldlarında normal vektör demeti ile teğet demetinin kesişimi trivial olmadığından non-dejenere altmanifoldlardan oldukça farklıdır. Bu yüzden lightlike altmanifoldları diferensiyal geometrinin en ilginç konularından biridir. Lightlike altmanifoldların teorisi Duggal-Bejancu, Kupeli ve Duggal-Şahin tarafından geliştirilmiştir (Kupeli, 1996; Duggal ve Bejancu, 1996; Duggal ve Şahin, 2004).

Diferensiyallenebilir geometrik yapılara sahip bazı manifoldların geometrileri oldukça ilginçtir. Bu manifoldlar ve bunlar arasındaki dönüşümler diferensiyal geometride oldukça geniş çalışılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları şunlardır. Atçeken ve Kılıç (2007) semi-Riemann çarpım manifoldların semi-invaryant lightlike altmanifoldları olarak adlandırılan yeni bir sınıf tanımladılar. Kılıç ve Şahin (2008) semi-Riemann çarpım manifoldların radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldlarını incelediler. Kılıç ve Bahadır (2012) semi-Riemann çarpım manifoldların screen semi-invaryant ve radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeylerini tanımlamıştır. Perktaş ve ark (2014) bir para-Sasakian uzay formunun lightlike hiperyüzeylerini çalışmıştır. Bahadır (2015) semi-Riemann çarpım manifoldların screen semi invaryant half lightlike altmanifoldlarını çalışmıştır. Jin (2011) belirsiz Kaehler manifoldunun real half lightlike altmanifoldlarını incelemiştir. Jin (2014) genelleştirilmiş belirsiz Sasakian uzay formların jenerik lightlike altmanifoldlarının geometrisini çalışmıştır.

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökü olan ϕ sayısı (yani, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$) altın oran olarak adlandırılır. Bu oran Johannes Kepler tarafından ifade edilmiştir. Bu yapı mimarlık, müzik, resim ve felsefe gibi bir çok alanda kullanılmıştır. Altın oran ve uygulamaları hızlı bir şekilde gelişmektedir. Bu bağlamda, diferensiyel geometride altın oran uygulaması üzerine yapılan çalışmalar büyük bir ilgi çekmiştir. Altın yapı olarak adlandırılan bir Riemann manifoldu üzerindeki yeni bir yapı Hretcanu (2007) tarafından oluşturulmuştur. Bu yapı altın orandan ilham alınarak yapılmıştır. $\tilde{M}$, $n-$boyutlu diferensiyallenebilir bir manifold $\tilde{P}$, $\tilde{M}$ üzerinde (1,1)-tipinde tensör alanı olsun. Buna göre $\tilde{P}^2 - \tilde{P} - I = 0$ denklemini sağlayan $\tilde{P}$ tensör alanına $\tilde{M}$ üzerinde bir altın yapı denir. $\tilde{P}$ altın yapısı için $\tilde{P} \neq \phi I$ olduğunu belirtelim. Eğer $\tilde{P} = \phi I$ olsaydı, o zaman $\tilde{P}$ nin minimal polinomu $X - \phi$ olurdu. Fakat, $\tilde{P}$ nin minimal polinomu $X^2 - X - 1$ dir. Crasmareanu ve Hretcanu (2007) altın yapılı Riemann manifoldunun invaryant altmanifoldlarını incelemiş. Gezer ve ark (2013) altın yapının integrallenebilirliğini araştırmış. Şahin ve Akyol (2014) altın yapı Riemann manifoldları arasında altın dönüşümler tanımlamış ve bu dönüşümlerin harmonik olduğunu göstermiştir. Özkan (2014) altın yapının yatay ve dikey liftlerini çalışmıştır. Aynı çalışmada semi-Riemann manifoldları üzerinde altın yapıyı tanımlamış ve bunu altın semi-Riemann manifoldları olarak adlandırmıştır. Buradan yola çıkarak doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışmada altın semi-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları çalışıldı.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu konu ile ilgili daha önceki çalışmalara yer verildi ve bu tezde ele alınan problemlerin tanıtımı yapıldı. İkinci bölümde temel tanım ve teoremlere yer verildi ve semi-Riemann manifoldları tanıtıldı. Ayrıca bu bölümde altın semi-Riemann manifoldu ve altın yapıyı içeren altın uzay formu tanıtıldı. Tezin orjinal bölümleri üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerdir.

Üçüncü bölümde ilk olarak lightlike hiperyüzeyler ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi ve altın semi-Riemann manifoldların lightlike hiperyüzeyleri tanıtıldı. Bir altın semi-Riemann manifoldunun radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeyinin olmadığı gösterildi. Özellikle screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeylerin bazı geometrik sonuçlarını incelendi. Burada oluşan distribüsyonların integrallenebilirliği için sonuçlar bulundu. $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$, $c_p \neq -(\phi+1)c_q$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olmak üzere M nin lokal simetrik olması için gerek ve yeter şart tamamen geodezik olduğu gösterildi. Ayrıca ekran konformal lightlike hiperyüzeyler için bazı sonuçlar bulundu.

Dördüncü bölümde half lightlike altmanifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Altın semi-Riemann manifoldların half lightlike altmanifoldları tanıtıldı. Bir altın semi-Riemann manifoldunuın radikal anti-invaryant half lightlike altmanifoldunun olmadığı gösterildi. Screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldları yoğun olarak çalışıldı. Burada oluşan distribüsyonların geometrisi incelendi. Altın semi-Riemann manifoldunun tamamen umbilik screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldunun lokal çarpım yapısına sahip olduğu gösterildi. Ayrıca Ricci tensörünün simetrik olma koşulları incelendi. Lokal altın çarpım uzay formunun $c_p \neq (\phi+1)c_q$ olmak üzere ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldlarının olmadığı gösterildi.

Beşinci bölümde ilk olarak lightlike altmanifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra altın semi-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları tanıtıldı. Bir altın semi-Riemann manifoldunun radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldunun olmadığı gösterildi. Semi-invaryant lightlike altmanifoldları tanıtıldı. Burada oluşan distribüsyonların integrallenebilme şartları incelendi ve M altmanifoldunun hangi şartlarda lokal çarpım yapısına sahip olduğu gösterildi.

Ayrıca $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$, $c_p, c_q \neq 0$ lokal altın çarpım uzay formunun irrasyonel semi-invaryant lightlike altmanifoldunun olmadığı gösterildi. Ricci tensörünü simetrik yapan bir sonuç verildi.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer danışman hocalarım Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ ve Prof. Dr. Erol Yaşar'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Doktora çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını esirgemeyen, bilgisi ve kişiliğiyle her zaman örnek aldığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Erol Kılıç'a destek ve teşviğinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Doktora Tez Jüri komitesinde bulunan, beni teşvik eden ve her tez izleme raporunda uyarılarını bildiren Sayın Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ, Sayın Prof. Dr. Erol Kılıç ve Sayın Prof. Dr. Ali Arslan Özkurt'a teşekkür ederim.

Bugüne kadar manevi desteğini hiç esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme ve sevgili eşime içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca maddi destek veren Ç. Ü. Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine (Proje No: FDK-2016- 6175) ve tüm Ç. Ü. Matematik Bölümü akademik personeline, çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

1. GİRİŞ

Dejenere (lightlike) altmanifoldların geometrisi, non-dejenere altmanifoldların geometrisinden oldukça farklıdır. Bu farklılığın nedeni, non-dejenere altmanifoldlarda tanjant demet ile normal demetin arakesiti sadece sıfırı verirken, dejenere (lightlike) altmanifoldlarda bu arakesit sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla lightlike altmanifoldların geometrisi incelenirken kullanılan metod non-dejenere altmanifoldların incelenmesinde kullanılan metoda benzemesine rağmen, bir çok obje oldıkça farklıdır. Bu yüzden dejenere (lightlike) altmanifoldları diferensiyal geometrinin önemli konularından biridir. Lightlike altmanifoldların teorisi Duggal-Bejancu, Kupeli ve Duggal-Şahin tarafından geliştirilmiştir (Kupeli, 1996; Duggal ve Bejancu, 1996; Duggal ve Şahin, 2004).

Diferensiyallenebilir geometrik yapılara sahip bazı manifoldların geometrileri oldukça ilginçtir. Bu manifoldlar ve bunlar arasındaki dönüşümler diferensiyal geometride oldukça geniş çalışılmıştır. Bir diferensiyellenebilir $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde tanımlı olan $(1,1)-$tipinde ϕ tensör alanı $\phi^3+\phi=0$ şartlarını sağlıyor ise ϕ ye $\tilde{M}$ üzerinde tanımlı olan $(3,1)$ $f-$yapı denir. Bir ϕ $f-$yapısına sahip bir $(\tilde{M},\tilde{g})$ Riemann manifoldunun geometrisi incelenirken, ϕ $f-$yapısı oldukça elverişli objedir. Dolayısıyla $f-$yapılı bir $(\tilde{M},\tilde{g})$ Riemann manifoldunun altmanifoldları, $f-$yapı sayesinde oldukça farklı sınıflara ayrılabilir ve bir çok altmanifold tanımı verilebilir (invaryant, anti-invaryant, semi-invaryant, hemen hemen semi-invaryant,...). Bir $f-$yapının aşikar örnekleri ise hemen hemen kompleks yapı ve hemen hemen kontakt yapılardır, bunlar $(3,1)$ $f-$yapılar olarak bilinir. Eğer bir $\tilde{M}$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $\varphi^3-\varphi=0$ sağlayan bir $(1,1)-$tipinde φ tensör alanı var ise buna $(3,-1)$ $f-$yapı denir. $(3,-1)$ $f-$yapı örnekleri olarak hemen hemen para-kompleks yapılar, çarpım yapılar ve para-kontakt yapılar verilebilir. Bu yapıya sahip Riemann manifoldları ve Riemann altmanifoldları birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Bejancu, 1978; Bejancu ve Papaghiuc, 1981; Kobayashi, 1981; Matsumoto ve ark., 1994; Atçeken, 2005). Bu yapının genişlemesi olarak, Goldberg ve Yano (1970)

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1I = 0$$

cebirsel denklemini sağlayan polinom yapısını tanıtmışlardır. Burada I özdeşlik dönüşümüdür ve ($x = f$ için) her $p \in \tilde{M}$ noktasında $f^{n-1}(p), f^{n-2}(p), ..., f(p), I$ lineer bağımsızdır. $Q(x)$ polinomu polinom yapı olarak adlandırılır. Bu yapılar lightlike altmanifoldlarda da yoğun olarak çalışılmıştır.

Kaehler manifoldların Cauchy-Riemann (CR)-altmanifoldların bir genellemesi olarak belirsiz Kaehler manifoldların (CR)-lightlike altmanifoldların geometrisi Duggal ve Bejancu (1996) tarafından tanıtıldı. Fakat altmanifoldların bu sınıfı kompleks ve reel alt durumlarını içermiyordu. Duggal ve Şahin (2005) kompleks ve reel alt durumlarını da içeren belirsiz Kaehler manifoldların Screen Cauchy–Riemann (SCR)-lightlike altmanifoldları olarak adlandırılan bir sınıf tanımladılar. Fakat CR ve SCR durumları arasındaki ilişkiyi içeren bir kapsama yoktu. Bu yüzden Duggal ve Şahin (2006) belirsiz Kaehler manifoldların genelleştirilmiş CR-lightlike altmanifoldları olarak adlandırılan yeni bir sınıf tanımladılar ve gösterdiler ki, bu tür altmanifoldlar reel hiperyüzeyler, invaryant, screen reel ve CR-lightlike altmanifoldlar içermektedir. Ayrıca Duggal ve Şahin belirsiz Sasakian manifoldların kontakt CR, kontakt SCR ve genelleştirilmiş Cauchy-Riemann (GCR)-lightlike altmanifoldlarını teorisini tanımladılar (Duggal ve Şahin, 2007; 2009).

Atçeken ve Kılıç (2007) semi-Riemann çarpım manifoldların semi-invaryant lightlike altmanifoldları olarak adlandırılan yeni bir sınıf tanımladılar. Kılıç ve Şahin (2008) semi-Riemann çarpım manifoldların radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldlarını incelediler. Kılıç ve Bahadır (2012) semi-Riemann çarpım manifoldların screen semi-invaryant ve radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeylerini tanımladılar. Perktaş ve ark (2014) bir para-Sasakian uzay formunun lightlike hiperyüzeylerini çalıştılar. Bahadır (2015) semi-Riemann çarpım manifoldların screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldlarını çalışmıştır. Jin (2010b) belirsiz kompleks uzay formunun ekran konformal lightlike reel hiperyüzeylerini incelemiştir. Jin (2011) belirsiz Kaehler manifoldunun real half lightlike altmanifoldlarını incelediler. Jin (2014) genelleştirilmiş belirsiz Sasakian uzay formların jenerik lightlike altmanifoldlarının geometrisini çalıştılar.

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökü olan ϕ sayısı (yani, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$) altın oran olarak adlandırılır. Bu oran Johannes Kepler tarafından ifade edilimiştir. Altın oran mimarlık, müzik, resim ve felsefe gibi bir çok alanda kullanılmıştır. Son yıllarda altın oran modern fiziksel araştırmalarda ve atom fiziğinde önemli rol oynamıştır (Heyrovska, 2005). Aynı zamanda altın oran matematiksel olasılık teorisinde, dört boyutlu manifoldların topolojisinde ve Cantorian Uzay zamanı problemlerinde kullanılmıştır (Marek-Crnjac, 2006).

Altın oran ve uygulamaları hızlı bir şekilde gelişmektedir. Bu bağlamda, diferensiyel geometride altın oran uygulaması üzerine yapılan çalışmalar büyük bir ilgi çekmiştir. Altın yapı olarak adlandırılan bir Riemann manifoldu üzerindeki yeni bir yapı Hretcanu (2007) tarafından oluşturulmuştur. Bu yapı altın orandan ilham alınarak yapılmıştır. $\tilde{M}$ $n-$boyutlu diferensiyallenebilir bir manifold $\tilde{P}$, $\tilde{M}$

üzerinde (1,1)-tipinde tensör alanı olsun. Buna göre $\tilde{P}^2 - \tilde{P} - I = 0$ denklemini sağlayan $\tilde{P}$ tensör alanına $\tilde{M}$ üzerinde bir altın yapı denir. $\tilde{P}$ altın yapısı için $\tilde{P} \neq \phi I$ olduğunu belirtelim. Eğer $\tilde{P} = \phi I$ olsaydı, o zaman $\tilde{P}$ nin minimal polinomu $X - \phi$ olurdu. Fakat, $\tilde{P}$ nin minimal polinomu $x^2 - x - 1$ dir. Hretcanu ve Crasmareanu (2007) altın yapılı Riemann manifoldunun invaryant altmanifoldlarını incelemiş. Gezer ve ark (2013) altın yapının integrallenebilirliğini araştırmış. Şahin ve Akyol (2014) altın yapı Riemann manifoldları arasında altın dönüşümler tanımlamış ve bu dönüşümlerin harmonik olduğunu göstermiştir. Özkan (2014) altın yapının yatay ve dikey liftlerini çalışmıştır. Aynı çalışmada semi-Riemann manifoldları üzerinde altın yapıyı tanımlamış ve buna altın semi-Riemann manifoldları olarak adlandırmıştır. Poyraz ve Yaşar (2017) altın semi-Riemann manifoldların lightlike hiperyüzeylerini çalıştılar.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu konu ile ilgili daha önceki çalışmalara yer verildi. İkinci bölümde temel tanım ve teoremlere yer verildi. Ayrıca bu bölümde semi-Riemann manifoldları, altın semi-Riemann manifoldu ve altın yapıyı içeren lokal altın çarpım uzay formu tanıtıldı. Tezin orjinal bölümleri üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerdir. Üçüncü bölümde ilk olarak lightlike hiperyüzeyler ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra altın semi-Riemann manifoldların lightlike hiperyüzeyleri tanıtıldı. Özellikle screen semi-invaryant ve ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeylerin bazı geometrik sonuçları incelendi. Dördüncü bölümde half lightlike altmanifoldlar ile ilgili temel bilgiler verildi. Altın semi-Riemann manifoldların half lightlike altmanifoldları ve screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldları tanıtıldı. Lokal altın çarpım uzay formunun $c_p \neq (\phi + 1)c_q$ olmak üzere ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldunun olmadığı gösterildi ve Ricci tensörünün simetrik olması için koşullar incelendi. Beşinci bölümde ilk olarak lightlike altmanifoldlar ile ilgili temel tanımlar verildi. Daha sonra altın semi-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları ve semi-invaryant lightlike altmanifoldları tanıtıldı. Burada oluşan distribüsyonların integrallenebilme şartları incelendi ve M altmanifoldunun hangi şartlarda lokal çarpım yapısına sahip olduğu gösterildi. Ayrıca bir altın semi-Riemann manifoldunun radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeyinin, half lightlike altmanifoldunun ve lightlike altmanifoldunun olmadığı gösterildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.1.1 V, $m-$boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Eğer

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü her a, $b \in \mathbb{R}$ ve u, v, $w \in V$ için

i) $g(u,v) = g(v,u)$,

ii) $g(au+bv,w) = ag(u,w)+bg(v,w)$,

$g(u,av+bw) = ag(u,v)+bg(u,w)$

şartlarını sağlıyor ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2 V, $m-$boyutlu bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

i) Her $v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise g ye pozitif tanımlı,

ii) Her $v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise g ye negatif tanımlı,

iii) Her $v \in V$ için $g(v,v) \geq 0$ ise g ye pozitif yarı-tanımlı,

iv) Her $v \in V$ için $g(v,v) \leq 0$ ise g ye negatif yarı-tanımlı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3 V, $m-$boyutlu bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere her $v \in V$ için

$$g(\xi,v) = 0$$

ise g ye V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye non-dejeneredir denir. Buradan görülür ki, g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart her $v \in V$ için

$$g(u,v) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.4 V, $m-$boyutlu bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. V nin

$$RadV = \{\xi \in V \mid g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

ile tanımlanan alt uzayına g simetrik bilineer formuna göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.5 V, $m-$boyutlu bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. Bu durumda

$$g_{|W} : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6 V, $m-$boyutlu bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. Bu durumda,

i) $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, $i \neq j$

ii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1$, $1 \leq i \leq \gamma$,

iii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = -1$, $\gamma + 1 \leq i \leq \gamma + \nu$

iv) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 0$, $\gamma + \nu + 1 \leq i \leq n = \gamma + \nu + \mu$

olacak şekilde V nin $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ bazı vardır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.7 V, $m-$boyutlu bir reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım (semi-Öklidyen metrik) denir. V üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V,g) ikilisine de skalar çarpım uzayı (semi-Öklidyen uzayı) denir.

Eğer g pozitif tanımlı ise o zaman g bir iç çarpım (Öklidyen metriği) olur ve (V,g) de Öklidyen uzay olarak adlandırılır. Eğer g nin indeksi $\nu = 1$ ise g ye Lorentz (Minkowski) metriği ve (V,g) ye de Lorentz (Minkowski) uzayı denir. Eğer g dejenere ise o zaman V vektör uzayına g ye göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.8 (W,g) reel $n-$boyutlu bir semi-Öklidyen uzay olsun. $v \in V$ için

i) $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne spacelike vektör,

ii) $g(v,v) < 0$ ise v vektörüne timelike vektör,

iii) $g(v,v) = 0$ ise v vektörüne null veya lightlike vektör,

denir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1.9 (W,g) reel $n-$boyutlu bir lightlike vektör uzayı ve $boyRadW = r < n$ olsun. Bu durumda, radikal uzayın W da tümleyeni olan SW alt uzayı non-dejeneredir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.10 (W,g) reel $n-$boyutlu bir lightlike vektör uzayı olsun. Radikal uzayın W da tümleyeni olan SW uzayına W nın ekran uzayı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.11 V, $m-$boyutlu bir reel vektör uzayı ve W da V nin alt uzayı olsun.

$g_{|W}$ dejenere ise W ya lightlike (dejenere) alt uzay denir ve

$$W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$$

dir. Burada,

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,w) = 0, \forall w \in W\}$$

altuzayına W uzayının diki denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Önerme 2.1.12 (V,g) bir semi-Öklidyen uzay ve W, V nin bir alt uzayı olsun. O zaman,

i) $boyW + boyW^{\perp} = m$,
ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,
iii) $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$,
dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.13 (V,g) bir semi-Öklidyen uzay olsun. Bu uzayın;

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, ..., \mu\}$$

$$g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0, \; g(u_\alpha, u_\beta) = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \{1, .., t\}, \varepsilon_\alpha = \mp 1$$

olacak şekildeki $\{f_1, ..., f_\mu, f_1^*, ..., f_\mu^*, u_1, ..., u_t\}$ bazına semi-Öklidyen uzayın quasi-ortonormal bazı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Önerme 2.1.14 (V,g) bir semi-Öklidyen uzay ve W da bu uzayın bir lightlike alt uzayı olsun. Bu durumda, W boyunca V uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.2 Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.2.1 M diferansiyellenebilir bir manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} g_{|_p}: & T_pM \times T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & (X_p, Y_p) & \to & g_{|_p}(X_p, Y_p) = g(X_p, Y_p) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere $(0,2)$ tipindeki g tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2 M diferansiyellenebilir bir manifold olsun. M, bir g metrik tensörü ile donatılmışsa, M ye bir semi-Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3 (M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. g metrik tensörünün indeksine semi-Riemann manifoldunun indeksi denir ve *ind* M ile gösterilir.

Eğer indeks ν ise $0 \leq \nu \leq boyM$ dir. Özel olarak, $\nu = 0$ ise her $p \in M$ için $g_{|_p}$, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan M bir Riemann manifoldu olur. $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir Lorentz manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4 M diferansiyellenebilir $n-$boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{array}{rccl} D: & M & \to & T_pM \\ & p & \to & D_p \subset T_pM \end{array}$$

şeklinde tanımlı D dönüşümüne $r-$boyutlu distribüsyon ve $X \in \Gamma(TM)$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına da D ye aittir denir. Eğer her $p \in \tilde{M}$ noktası için D_p de r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.5 M diferansiyellenebilir bir manifold ve ∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer $X,Y \in \Gamma(D)$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

ise D distribüsyonuna paraleldir denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.6 M diferansiyellenebilir $n-$boyutlu bir manifold ve D, M üzerinde $r-$boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X,Y \in \Gamma(D)$ için $[X,Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna involutivedir denir Eğer D distribüsyonu involutive ise integrallenebilirdir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.7 M bir diferensiyellenebilir manifold ve K de M üzerinde herhangi bir tensör alanı olsun. Bu durumda $p \in M$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ ve $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_X K = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \left(K(p) - (\Phi_t K)(p) \right)$$

ile tanımlanan $\mathcal{L}_X$ diferensiyel operatörüne X vektör alanına göre *Lie türevi* denir. Burada Φ,

$$\Phi : [-\varepsilon, \varepsilon] \times U \to \Phi(t,p) = \Phi_t(p)$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 2.2.8 M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\mathcal{L}_X$ de manifold üzerinde tanımlı Lie türevi olsun. O zaman her $Y,Z \in \Gamma(TM)$ ve $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için

$i)$ $\mathcal{L}_X f = X(f)$

$ii)$ $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$

iii) Ψ, M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir tensor alanı olmak üzere

$$(\mathcal{L}_X\Psi)(Y,Z) = X(\Psi(Y,Z)) - \Psi([X,Y],Z) - \Psi(Y,[X,Z])$$

dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.9 (M,g) bir *semi*-Riemann manifoldu olsun. Eğer $\mathcal{L}_X g = 0$ ise X vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Chen, 2011).

Tanım 2.2.10 $\{u_1,...,u_n\}$, $\mathbb{R}^n_v$ üzerinde doğal koordinatlar olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}^n_v$ üzerinde vektör alanları iseler

$$\nabla_V W = \sum V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre kovaryant t*ürevi* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.11 M diferansiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

∇ dönüşümü

i) $\nabla_X Y$, X ye göre $C^\infty(M,\mathbb{R})$ lineerdir,

ii) $\nabla_X Y$, Y ya göre $\mathbb{R}$ lineerdir,

iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y, \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya üzerinde bir lineer konneksiyon ve $\nabla_X Y$ ye Y nin X e göre kovaryant türevi denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.12 (M,g) bir semi-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

i) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde M nin bir tek ∇ lineer konneksiyonu vardır ve bu koneksiyona M nin Levi-Civita konneksiyonu denir. M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

Koszul formülü ile karakterize edilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.13 (M,g) bir semi-Riemann manifoldu ve ∇, M nin Levi-Civita koneksiyonu olsun. Her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R: \quad \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X,Y,Z) &\rightarrow R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

ile tanımlanan $(1,3)$ tipindeki R tensör alanına M nin Riemann eğrilik tensörü denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.14 (M,g) bir semi-Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman her $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ için

i) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$,

ii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,

iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

iv) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$,

di*r* (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.15 (M,g) bir semi-Riemann manifoldu ve bir $p \in M$ noktasındaki TpM tanjant uzayının iki boyutlu bir alt uzay P olsun. P alt uzayının bir bazı $\{X,Y\}$ olmak üzere

$$K(P) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

olarak tanımlanan $K(P)$ reel sayısına P nin kesit eğriliği denir. Eğer $K(P) = c(sbt)$ ise M semi-Riemann manifolduna sabit eğriliğe denir ve $M(c)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Sonuç 2.2.16 Eğer M semi-Riemann manifoldu sabit bir c eğriliğine sahipse M nin eğrilik tensörü her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

şeklindedir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.17 (M,g), $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1,...,e_n\}$, T_PM nin bir ortonormal bazı olmak üzere her $X,Y \in T_PM$ için *Ricci* tensörü

$$Ric(X,Y) = iz\{Z \to R(Z,X)Y\}$$

veya

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g\left(R(e_i,X)Y,e_i\right)$$

ile tanımlanır. $Ric(X,Y)$, T_PM nin $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal bazının seçiminden bağımsızdır (Chen, 2011).

Tanım 2.2.18 (M,g) bir semi-Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1,...,e_n\}$, T_PM nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Ric(e_i, e_i)$$

değerine M semi-Riemann manifoldunun skalar eğriliği denir (Kupeli, 1996).

Tanım 2.2.19 (M,g) bir semi-Riemann manifold olsun. Eğer her $X,Y \in T_PM$ için

$$Ric(X,Y) = cg(X,Y)$$

olacak şekilde c sabiti varsa (M,g) ye Einstein manifold denir (O'Neill, 1983)).

2.3 Altın Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.3.1 (Goldberg ve Yano, 1970) M, diferansiyellenebilir bir reel manifold ve ϕ, M üzerinde $(1,1)-$tipli bir tensör alanı olsun. Eğer ϕ tensör alanı $Q(x) = x^n + a^n x^{n-1} + ... + a_2 x + a_1 I = 0$ cebirsel denklemini sağlarsa ϕ ye bir polinom yapı denir. Burada I, $(1,1)-$tipli özdeşlik tensör alanı ve her $p \in M$ noktasında $\phi^{n-1}(p)$, $\phi^{n-2}(p)$,...,$\phi(p)$ lineer bağımsızdır. $Q(x)$ polinomuna ise yapı polinomu denir. Özel olarak

i) $Q(x) = x^2 + I = 0$ yapı polinomunu sağlayan ϕ tensör alanı J ile gösterilir ve J ye bir hemen hemen kompleks yapı denir. Buna göre $J^2 + I = 0 \Leftrightarrow J^2 = -I$ olur.

ii) $Q(x) = x^2 - I = 0$ denklemini sağlayan ϕ tensör alanı F ile gösterilir ve F ye hemen hemen çarpım yapı denir. Buna göre, $F^2 - I = 0 \Leftrightarrow F^2 = I$ olur.

iii) $Q(x) = x^2 - x - I = 0$ denklemini sağlayan ϕ tensör alanı $\tilde{P}$ ile gösterilir ve $\tilde{P}$ ye M manifoldu üzerinde bir altın yapı denir. Buna göre $\tilde{P}^2 - \tilde{P} - I = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}^2 = \tilde{P} + I$ olur (Crasmareanu ve Hretcanu, 2008).

Tanım 2.3.2 $(\tilde{M},\tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\tilde{P}$, $\tilde{M}$ üzerinde tanımlı $(1,1)$ tipli bir tensör alanı olsun. Eger $\tilde{P}$ tensör alanı

$$\tilde{P}^2 = \tilde{P} + I \tag{2.3.1}$$

ise $\tilde{P}$ tensör alanına $(\tilde{M},\tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir altın yapı denir. Burada I, $T\tilde{M}$ üzerindeki birim dönüşümüdür (Hretcanu, 2007).

Tanım 2.3.3 $(\tilde{M},\tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\tilde{P}$ da $\tilde{M}$ üzerinde bir altın yapı olsun. Eğer her $X,Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\tilde{g}(\tilde{P}X,Y) = \tilde{g}(X,\tilde{P}Y) \tag{2.3.2}$$

eşitliği sağlanıyorsa $\tilde{P}$ ya $\tilde{g}$ Riemann metriği ile uyumludur denir. Bu durumda $(\tilde{g},\tilde{P})$ ikilisine $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde bir altın yapı, $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ üçlüsüne de altın Riemann manifoldu denir (Hretcanu ve Crasmareanu, 2007; Crasmareanu ve Hretcanu, 2008; Hretcanu ve Crasmareanu, 2009).

Önerme 2.3.4 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ bir altın Riemann manifoldu olsun. Bu durumda her $X,Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\tilde{g}(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) = \tilde{g}(\tilde{P}X,Y) + \tilde{g}(X,Y) \tag{2.3.3}$$

eşitliği sağlanır (Hretcanu ve Crasmareanu, 2009).

Önerme 2.3.5 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ bir altın Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\tilde{P}$ altın yapısı her $p \in \tilde{M}$ noktası için $T_p\tilde{M}$ tanjant uzayı üzerinde bir izomorfizmdir (Hretcanu ve Crasmareanu, 2009).

Önerme 2.3.6 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ bir altın Riemann manifoldu olsun. $\tilde{P}$ altın yapısının eigen(öz) degerleri ϕ ve $(1-\phi)$ altın oranlardır (Hretcanu ve Crasmareanu, 2009.

Önerme 2.3.7 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ bir altın Riemann manifoldu olsun. $\tilde{M}$ nin boyutu m olmak üzere $\tilde{P}$ altın yapısının izi $iz(\tilde{P}^2) = iz(\tilde{P}) + m$ özelligine sahiptir (Hretcanu ve Crasmareanu, 2009).

Tanım 2.3.8 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\tilde{M}$ üzerinde bir $(1,1)$ tipli bir tensör alanı F olsun. Her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için $F^2 = I$ ve $\tilde{g}(FX, Y) = \tilde{g}(X, FY)$ şartlarını sağlayan F ye $\tilde{M}$ üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı ve $(\tilde{M}, \tilde{g}, F)$ üçlüsüne bir hemen hemen çarpım Riemann manifoldu denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.3.9 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\tilde{M}$ üzerindeki her F hemen hemen çarpım yapısından iki tane

$$\tilde{P}_1 = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}F), \tilde{P}_2 = \frac{1}{2}(I - \sqrt{5}F)$$

altın yapı elde edilir. Tersine, $\tilde{M}$ üzerindeki her $\tilde{P}$ altın yapısından bir F

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\tilde{P} - I)$$

hemen hemen çarpım yapısı elde edilir (Crasmareanu ve Hretcanu, 2008; Hretcanu ve Crasmareanu, 2009).

Tanım 2.3.10 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir semi-Riemann manifoldu ve $\tilde{P}$ da $\tilde{M}$ üzerinde bir altın yapı olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\tilde{g}(\tilde{P}X, Y) = \tilde{g}(X, \tilde{P}Y) \tag{2.3.4}$$

eşitliği sağlanıyorsa $\tilde{P}$ ya $\tilde{g}$ semi-Riemann metriği ile uyumludur denir. Bu durumda $(\tilde{g}, \tilde{P})$ ikilisine $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde bir altın yapı, $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ üçlüsüne de altın semi-Riemann manifoldu denir (Özkan, 2014).

Önerme 2.3.11 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ bir altın semi-Riemann manifoldu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\tilde{g}(\tilde{P}X, \tilde{P}Y) = \tilde{g}(\tilde{P}X, Y) + \tilde{g}(X, Y) \tag{2.3.5}$$

eşitliği sağlanır.

M_p ve M_q sırasıyla c_p ve c_q, sabit kesitsel eğrilikli uzay formları olsunlar. Bu durumda semi-Riemann çarpım uzay formunun hesaplanmasına benzer olarak (Yano ve Kon, 1984), $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formunun $\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X,Y)Z &= \left(-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}\right)\{\tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y + \tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)\tilde{P}X \\ &\quad - \tilde{g}(\tilde{P}X,Z)\tilde{P}Y\} + \left(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4}\right)\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)X \\ &\quad - \tilde{g}(\tilde{P}X,Z)Y + \tilde{g}(Y,Z)\tilde{P}X - \tilde{g}(X,Z)\tilde{P}Y\}. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

3. ALTIN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN LİGHTLİKE HİPERYÜZEYLERİ

3.1 Lightlike Hiperyüzeyler

Tanım 3.1.1 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $q \geq 1$ indeksli $(m+2)-$boyutlu semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasında

$$T_pM^{\perp} = \{Y_p \in T_p\tilde{M} : \tilde{g}(Y_p, X_p) = 0, \forall X_p \in T_pM\}$$

ve

$$RadT_pM = \{Y_p \in T_pM : g(Y_p, X_p) = 0, \forall X_p \in T_pM\}$$

ile tanımlanan alt uzaylara sırasıyla T_pM nin dik uzayı ve radikali denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.2 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $q \geq 1$ indeksli $(m+2)-$boyutlu semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $p \in M$ için

$$RadT_pM = T_pM \cap T_pM^{\perp} \neq \{0\}$$

ise M ye $\tilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun lightlike (dejenere, null) hiperyüzeyi denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.3 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $q \geq 1$ indeksli $(m+2)-$boyutlu semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $RadTM$ nin TM de tamamlayanı olan alt uzaya M nin ekran distribüsyonu denir ve M nin ekran distribüsyonu $S(TM)$ ile gösterilir. $S(TM)$, TM nin $RadTM$ ye ortogonal ve non-dejenere alt uzayıdır. Bu durumda

$$TM = RadTM \perp S(TM) \tag{3.1.1}$$

ayrışımına sahip oluruz. Böylece

$$T\tilde{M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{3.1.2}$$

olur. Burada $S(TM)^{\perp}$, $S(TM)$ ekran distribüsyonunun dik (ortogonal) tümleyen vektör demetidir.

M bir lightlike hiperyüzey ise $RadT_pM = T_pM^{\perp}$ dir. $ltr(TM)$, $S(TM)$ de $TM^{\perp}$ in tümleyen vektör demeti olmak üzere

$$S(TM)^{\perp} = TM^{\perp} \oplus ltr(TM). \tag{3.1.3}$$

dir. Burada $ltr(TM)$, lightlike transversal vektör demeti olarak adlandırılır ve $\oplus$ ortogonal olmayan direkt toplamdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 3.1.4 $(M, g, S(TM))$, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, M üzerinde $\xi \in \Gamma(RadTM)$ ve her $X \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\tilde{g}(N, \xi) = 1 \tag{3.1.4}$$

ve

$$\tilde{g}(X, N) = \tilde{g}(N, N) = 0, \ \ \forall X \in \Gamma(S(TM)) \tag{3.1.5}$$

olacak şekilde bir tek $N \in \Gamma(ltr(TM))$ vardır öyleki $\Gamma(ltr(TM)) = Sp\{N\}$ dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

(3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerinden

$$T\tilde{M} = TM \oplus ltr(TM) = S(TM) \perp \{TM^{\perp} \oplus ltr(TM)\} \tag{3.1.6}$$

olur. Böylece herhangi bir $S(TM)$ ekran distribüsyonu için (3.1.4) ve (3.1.5) eşitliklerini sağlayan, TM için tümleyen vektör demeti olan ve lightlike transversal vektör demeti olarak adlandırılan bir tek $ltr(TM)$ vardır (Duggal ve Bejancu, 1996).

$\{E_1,...,E_m\}$, $S(TM)$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\{E_1,...,E_m,\xi,N\}$$

ye $\tilde{M}$ nin M boyunca quasi-ortonormal çatısı denir.

(M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi ve $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ de Levi-Civita konneksiyonu olsun. Gauss ve Weingarten formülleri her $X,Y \in \Gamma(TM)$; $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \tag{3.1.7}$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^t_X N \tag{3.1.8}$$

olarak ifade edillir. Burada $\nabla_X Y, A_N X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X,Y), \nabla^t_X N \in \Gamma(ltr(TM))$ dir. ∇, M üzerinde torsiyonsuz indirgenmiş lineer konneksiyon; h, $\Gamma(ltr(TM))-$değerli simetrik bilineer form; A_N, $\Gamma(TM)$ üzerinde bir lineer operatör ve ∇^t, $tr(TM)$ üzerinde bir lineer konneksiyondur. h ve A_N ye, sırasıyla, M nin ikinci temel formu ve şekil operatörü olarak adlandırılır.

Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X,Y) = \tilde{g}(h(X,Y),\xi)$$

ve

$$\tau(X) = \tilde{g}(\nabla^t_X N,\xi)$$

olarak tanımlansın. Böylece (3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri sırasıyla

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)N, \tag{3.1.9}$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N \tag{3.1.10}$$

olur. Burada B, M lightlike hiperyüzeyinin lokal ikinci temel formu olarak adlandırılır.

Sonuç 3.1.5 (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$B(X,\xi) = 0 \tag{3.1.11}$$

dir. Yani, lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formu dejeneredir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$Q : \Gamma(TM) \to \Gamma(S(TM))$ projeksiyon olsun. Bu durumda $S(TM)$ için Gauss ve Weingarten formülleri

$$\nabla_X QY = \nabla^*_X QY + h^*(X,QY), \tag{3.1.12}$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + \nabla^{*t}_X \xi \tag{3.1.13}$$

yazılabilir. Burada $\nabla^*_X QY, A^*_\xi X \in \Gamma(S(TM))$ ve $h^*(X,QY), \nabla^{*t}_X \xi \in \Gamma(TM^\perp)$ dir (Duggal ve Bejancu, 1996). h^* ve A^*_ξ, sırasıyla $S(TM)$ nin ekran ikinci temel formu ve ekran şekil operatörü denir.

Eğer

$$C(X,QY) = \tilde{g}(h^*(X,QY),N)$$

ve

$$\varepsilon(X) = \tilde{g}(\nabla^{*t}_X \xi, N)$$

denilirse ve $\varepsilon(X) = -\tau(X)$ olduğu dikkate alınırsa (3.1.12) ve (3.1.13) denklemleri

$$\nabla_X QY = \nabla^*_X QY + C(X,QY)\xi, \tag{3.1.14}$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X - \tau(X)\xi \tag{3.1.15}$$

olur. Burada C ye $S(TM)$ nin lokal ekran temel formu denir. Bu durumda (3.1.9), (3.1.10) ve (3.1.13) eşitliklerinden

$$B(X,Y) = g(A^*_\xi X, Y), \quad g(A^*_\xi X, N) = 0 \tag{3.1.16}$$

ve

$$C(X,QY) = g(A_N X, QY), \quad g(A_N X, N) = 0 \tag{3.1.17}$$

dir. Ayrıca (3.1.16) eşitliğinden

$$A^*_\xi \xi = 0$$

bulunur.

Lemma 3.1.6 (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. ∇^*, $S(TM)$ ekran distribüsyonu üzerindeki konneksiyon ve ∇, M üzerine indirgenmiş konneksiyon olmak üzere

i) ∇^* lineer konneksiyonu bir metrik konneksiyondur.

ii) Her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = B(X,Y)\eta(Z) + B(X,Z)\eta(Y) \tag{3.1.18}$$

dir. Burada $\eta(Y) = \tilde{g}(Y,N)$ dir (Duggal ve Şahin, 1996).

(3.1.18) eşitliği M üzerine indirgenmiş konneksiyonun bir metrik konneksiyon olmadığını gösterir.

Tanım 3.1.7 (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer herhangi bir U koordinat komşuluğu üzerinde

$$B(X,Y)=\lambda g(X,Y),\ \forall X,Y\in\Gamma(TM) \tag{3.1.19}$$

olacak şekilde M de diferansiyallenebilir bir λ fonksiyonu varsa M ye tamamen umbiliktir denir. Eğer $\lambda=0$ ise M hiperyüzeyine tamamen geodeziktir denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.8 (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer herhangi bir $U\subset M$ koordinat komşuluğu ve $X,Y\in\Gamma(TM_{|U})$ için

$$C(X,QY)=\delta g(X,QY) \tag{3.1.20}$$

olacak şekilde M de diferansiyallenebilir bir δ fonksiyonu varsa $S(TM)$ ekran distribüsyonuna tamamen umbiliktir denir. Eğer U koordinat komşuluğunda $\delta=0$ ise $S(TM)$ ekran distribüsyonuna tamamen geodeziktir denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 3.1.9 (Duggal ve Bejancu, 1996) (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i) M total geodeziktir.

ii) h ikinci temel formu M üzerinde sıfırdır.

iii) $\xi\in\Gamma(RadTM)$ için A^*_ξ, M üzerinde sıfırdır.

iv) M üzerinde $\tilde{\nabla}$ ile indirgenmiş ∇ bir tek torsiyonsuz metrik konneksiyon vardır.

v) $RadTM$, ∇ ya göre paralel distribüsyondur.

vi) $RadTM$, M üzerinde Killing distribüsyondur.

Teorem 3.1.10 (Bejancu, 1996) (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $S(TM)$ ekran distribüsyonunun ∇ ya göre paralel olması için gerek ve yeter şart her bir $U \subset M$ koordinat komşuluğu üzerinde $C = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.1.11 (Duggal ve Bejancu, 1991) (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i) $S(TM)$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

ii) Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için $h^*(X,Y) = h^*(Y,X)$ dir.

iii) M nin şekil operatörü g ye göre simetriktir.

(M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\tilde{R}$, $\tilde{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ya göre ve R, M üzerindeki indirgenmiş konneksiyon ∇ ya göre eğrilik tensörleri olmak üzere (3.1.7) ve (3.1.8) eşitlikleri kullanılarak her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \\ &\quad + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

dir. Burada

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla^t_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z)$$

dir.

Lemma 3.1.12 (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + B(X,Z)A_NY - B(Y,Z)A_NX \\ &+\{(\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \\ &+\tau(X)B(Y,Z) - \tau(Y)B(X,Z)\}N\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

olur (Güneş ve ark, 2003).

Önerme 3.1.13 (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\tilde{R}$, R ve R^* sırasıyla $\tilde{\nabla}$, ∇ ve ∇^* ın eğrilik tensörü olsun. Her $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ için M ve $S(TM)$ için Gauss ve Codazzi denklemleri

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,QW) &= g(R(X,Y)Z,QW) + B(X,Z)C(Y,QW) \\ &-B(Y,Z)C(X,QW),\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \\ &+B(Y,Z)\tau(X) - B(X,Z)\tau(Y),\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(R(X,Y)QZ,N) &= (\nabla_X C)(Y,QZ) - (\nabla_Y C)(X,QZ) \\ &+C(X,QZ)\tau(Y) - C(Y,QZ)\tau(X),\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,N) = g(R(X,Y)Z,N) \tag{3.1.26}$$

dır ((Duggal ve Bejancu, 1996).

3.2 Altın Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Hiperyüzeyleri

$(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$, $(m+2)-$boyutlu bir altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$\tilde{P}X = PX + u(X)N \tag{3.2.1}$$

$$\tilde{P}N = U + u(N)N \tag{3.2.2}$$

yazabiliriz. Burada $PX, U \in \Gamma(TM)$ ve u

$$u(.) = \tilde{g}(., \tilde{P}\xi) \tag{3.2.3}$$

ile tanımlanan $1-$formdur.

Lemma 3.2.1 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu (M, g), $\tilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$P^2X = (P + I - u \otimes U)(X), \tag{3.2.4}$$

$$u(PX) = u(X)(1 - u(N)), \tag{3.2.5}$$

$$PU = (1 - u(N))U, \tag{3.2.6}$$

$$(u(N))^2 = u(N) + 1 - u(U), \tag{3.2.7}$$

$$g(PX, Y) = g(X, PY) + (\eta \otimes u - u \otimes \eta)(X, Y), \tag{3.2.8}$$

$$g(PX, PY) = g(PX, Y) + g(X, Y) + u(X)\eta(Y) - \eta(PX)u(Y) - u(X)\eta(PY) \tag{3.2.9}$$

dir.

İspat: (3.2.1) eşitliğinin her iki tarafına $\tilde{P}$ uygulanıp (2.3.1) eşitliği kullanılırsa

$$P^2X + u(PX)N + u(X)U + u(X)u(N)N = PX + u(X)N + X$$

elde edilir. Bu eşitliğin teğet ve transversal bileşenleri alınırsa (3.2.4) ve (3.2.5) eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde, (3.2.2) eşitliğinin her iki tarafına $\tilde{P}$ uygulanıp (2.3.1) kullanılırsa

$$PU + u(U)N + u(N)U + (u(N))^2N = U + u(N)N + N$$

Bu eşitliğin teğet ve transversal bileşenleri alınırsa (3.2.6) ve (3.2.7) eşitlikleri elde edilir. (2.3.4), (2.3.5) ve (3.2.1) eşitlikleri kullanılarak

$$g(PX,Y)+u(X)\eta(Y)=g(X,PY)+u(Y)\eta(X),$$

$$g(PX,PY)+u(X)\eta(PY)+\eta(PX)u(Y)=g(PX,Y)+u(X)\eta(Y)+g(X,Y)$$

bulunur. Son iki eşitlikten sırasıyla (3.2.8) ve (3.2.9) eşitlikleri elde edilir.

Lemma 3.2.2 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $\tilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $\tilde{\nabla}\tilde{P}=0$ ise o zaman her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X P)Y=g(A^*_\xi X,Y)U+u(Y)A_N X, \tag{3.2.10}$$

$$(\nabla_X u)Y=B(X,Y)u(N)-B(X,PY)-u(Y)\tau(X), \tag{3.2.11}$$

$$\nabla_X U=-PA_N X+\tau(X)U+u(N)A_N X, \tag{3.2.12}$$

$$X(u(N))=-B(X,U)-u(A_N X) \tag{3.2.13}$$

dir.

İspat: $\tilde{\nabla}\tilde{P}=0$ olsun. Bu durumda her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için $\tilde{\nabla}_X\tilde{P}Y=\tilde{P}\tilde{\nabla}_X Y$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\nabla_X PY+B(X,PY)N+X(u(Y))N-u(Y)A_N X+u(Y)\tau(X)N\\ =\;&P\nabla_X Y+u(\nabla_X Y)N+B(X,Y)U+B(X,Y)u(N)N\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğin teğet ve transversal bileşenleri alınırsa (3.2.10) ve (3.2.11) eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde, $\tilde{\nabla}_X\tilde{P}N=\tilde{P}\tilde{\nabla}_X N$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}&\nabla_X U+B(X,U)N+X(u(N))N-u(N)A_N X+\tau(X)u(N)N\\ =\;&-PA_N X-u(A_N X)N+\tau(X)U+\tau(X)u(N)N\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (3.2.12) ve (3.2.13) eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Bu tez boyunca $\tilde{\nabla}\tilde{P} = 0$ olduğu kabul edilecektir.

Tanım 3.2.3 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu (M, g), $\tilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer :

i) $\tilde{P}(TM) \subset TM$ ise M ye invaryant lightlike hiperyüzey

ii) $\tilde{P}RadTM \subset S(TM)$ ve $\tilde{P}ltr(TM) \subset S(TM)$ ise M ye screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey

iii) $\tilde{P}RadTM \subset ltr(TM)$ ise M ye radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzey denir.

Teorem 3.2.4 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve (M, g), $\tilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

i) M, P invaryanttır.

ii) u, M üzerinde sıfırdır.

iii) P, M üzerinde bir altın yapıdır.

İspat: M nin invaryant olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(TM)$ için $\tilde{P}X = PX$ olmasıdır. O zaman (3.2.1) eşitliğinden $u(X) = 0$ bulunur. Böylece (i)⇔(ii) elde edilir.

u nun M üzerinde sıfır olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(TM)$ için $\tilde{P}X = PX$ olmasıdır. O zaman

$$P^2X = P(PX) = \tilde{P}(\tilde{P}X) = \tilde{P}^2X = \tilde{P}X + X = PX + X$$

ve

$$g(PX,Y) = \tilde{g}(\tilde{P}X,Y) = \tilde{g}(X,\tilde{P}Y) = g(X,PY)$$

dır. Böylece P, M üzerinde bir altın yapıdır ve buradan (ii)⇔(iii) elde edilir.

Teorem 3.2.5 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldunun radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeyi yoktur.

İspat: $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu M, $\tilde{M}$ nin radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzey tanımından $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için $\tilde{P}\xi \in \Gamma(ltrTM)$ dir. (2.3.5) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{P}\xi,\tilde{P}\xi) &= \tilde{g}(\tilde{P}\xi,\xi)+\tilde{g}(\xi,\xi) \\ 0 &= \tilde{g}(\tilde{P}\xi,\xi)+0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\tilde{g}(\tilde{P}\xi,\xi) = 0$ ve $\tilde{P}\xi \notin \Gamma(ltrTM)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3 Altın Semi-Riemann Manifoldların Screen Semi-İnvaryant Lightlike Hiperyüzeyleri

$(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$, $(m+2)-$boyutlu altın semi-Riemann manifoldu ve $(M,g,S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer

$$D_1 = \tilde{P}RadTM, D_2 = \tilde{P}ltr(TM)$$

ve

$$D = D_0 \perp RadTM \perp \tilde{P}RadTM$$

olarak alınırsa aşağıdaki ayrışımlara sahip oluruz;

$$S(TM) = D_0 \perp \{D_1 \oplus D_2\}, \tag{3.3.1}$$

$$TM = D \oplus D_2, \tag{3.3.2}$$

$$T\tilde{M} = D \oplus D_2 \oplus ltr(TM) \tag{3.3.3}$$

burada D_0, $(m-2)-$boyutlu distribüsyondur.

U ve V

$$U = \tilde{P}N,\ V = \tilde{P}\xi \tag{3.3.4}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanları olsun.

$(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2 kullanılarak her $X, Y \in \Gamma(TM)$, $U \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(D_1)$ için

$$P^2X = (P + I - u \otimes U)(X), \tag{3.3.5}$$

$$u(PX) = u(X),\ PU = U,\ u(U) = 1, \tag{3.3.6}$$

$$g(PX, Y) = g(X, PY) + (\eta \otimes u - u \otimes \eta)(X, Y), \tag{3.3.7}$$

$$g(PX, PY) = g(PX, Y) + g(X, Y) + u(X)\eta(Y) - \eta(PX)u(Y) - u(X)\eta(PY), \tag{3.3.8}$$

$$(\nabla_X P)Y = u(Y)A_N X + B(X, Y)U, \tag{3.3.9}$$

$$(\nabla_X u)Y = -B(X, PY), \tag{3.3.10}$$

$$\nabla_X U = -PA_N X + \tau(X)U \tag{3.3.11}$$

olur. (3.2.13) eşitliğinden $B(X, U) = -u(A_N X) = -g(A_N X, V)$ olup bu eşitlikte (3.1.17) eşitliği kullanılırsa

$$B(X, U) = -C(X, V) \tag{3.3.12}$$

bulunur. Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_X V = \tilde{\nabla}_X \tilde{P}\xi = \tilde{P}\tilde{\nabla}_X \xi$$

olup bu eşitlikte (3.1.9), (3.1.15) ve (3.2.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X V = \nabla_X V + B(X,V)N = -PA^*_\xi X - u(A^*_\xi X)N - \tau(X)V$$

bulunur. Buradan eşitliğin teğet ve transversal bileşenleri alınırsa

$$\nabla_X V = -PA^*_\xi X - \tau(X)V \tag{3.3.13}$$

ve

$$B(X,V) = -u(A^*_\xi X)$$

olur. Son eşitlikte (3.1.16) eşitliği kullanılırsa $B(X,V) = -u(A^*_\xi X) = -g(A^*_\xi X, V) = -B(X,V)$ olur. Buradan

$$B(X,V) = 0 \tag{3.3.14}$$

bulunur. Diğer taraftan $\tilde{g}(U,N) = \tilde{g}(\tilde{P}N,N) = 0$ olup, $\tilde{\nabla}$ nın metrik konneksiyon oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= X\tilde{g}(U,N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X U,N) + \tilde{g}(U,\tilde{\nabla}_X N) \\ &= C(X,U) + \tilde{g}(N,\tilde{P}\tilde{\nabla}_X N) \\ &= C(X,U) + \tilde{g}(N,\tilde{\nabla}_X \tilde{P}N) \\ &= 2C(X,U) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$C(X,U) = 0 \tag{3.3.15}$$

olur.

Sonuç 3.3.1 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman, V vektör alanını M üzerinde

$$B(X,V)=0$$

dir. Yani, V vektör alanı lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formunu dejenere yapar.

Sonuç 3.3.2 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman, A^*_ξ nin D_2 de bileşeni yoktur.

İspat: (3.1.16) ve (3.3.14) eşitliklerinden $B(X,V)=g(A^*_\xi X,V)=0$ olur. Buradan ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.3 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman, A_N nin D_1 de bileşeni yoktur.

İspat: (3.1.17) ve (3.3.15) eşitliklerinden $C(X,U)=g(A_N X,U)=0$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.3.4 D_0 distribüsyonu $\tilde{P}$ ye göre invaryant distribüsyondur.

İspat: Her $X\in\Gamma(D_0)$, $\xi\in\Gamma(RadTM)$ ve $N\in\Gamma(ltr(TM))$ için

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{P}X,\xi) &= \tilde{g}(X,\tilde{P}\xi)=0,\\ \tilde{g}(\tilde{P}X,N) &= \tilde{g}(X,\tilde{P}N)=0\end{aligned}$$

dir. Böylece $\tilde{P}X$ in $RadTM$ ve $ltr(TM)$ de bileşenleri yoktur. Ayrıca her $X\in\Gamma(D_0)$, $U\in\Gamma(D_1)$ ve $V\in\Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{P}X,U) &= \tilde{g}(X,\tilde{P}U)=\tilde{g}(X,\tilde{P}^2N)=\tilde{g}(X,\tilde{P}N)+\tilde{g}(X,N)=0,\\ \tilde{g}(\tilde{P}X,V) &= \tilde{g}(X,\tilde{P}V)=\tilde{g}(X,\tilde{P}^2\xi)=\tilde{g}(X,\tilde{P}\xi)+\tilde{g}(X,\xi)=0\end{aligned}$$

olur. Şu halde $\tilde{P}X$ in D_1 ve D_2 de bileşenleri yoktur. Böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki önermeden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.5 D distribüsyonu $\tilde{P}$ ye göre invaryant distribüsyondur.

Örnek 3.3.6 $(\tilde{M} = \mathbb{R}^5_2, \tilde{g})$ bir $(-,+,-,+,+)$ işaretli semi-Öklidyen uzay ve $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\mathbb{R}^5_2$ in standart koordinat sistemi olsun. Eğer $\tilde{P}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ $= ((1-\phi)x_1, (1-\phi)x_2, \phi x_3, \phi x_4, \phi x_5)$ olarak tanımlanırsa $\tilde{P}^2 = \tilde{P} + I$ dır ve $\tilde{P}$, $\mathbb{R}^5_2$ üzerinde bir altın yapıdır. $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldunun

$$x_5 = \phi x_1 + \phi x_2 + x_3$$

ile tanımlanan bir M hiperyüzeyini göz önüne alalım. Bu durumda M nin tanjant demeti için

$$TM = Sp\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$$

dır. Burada

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \phi \frac{\partial}{\partial x_5},\ U_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \phi \frac{\partial}{\partial x_5},\ U_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_5},\ U_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dır ve M bir lightlike hiperyüzeydir. Buradan kolayca görülür ki

$$RadTM = Sp\{\xi = \phi U_1 - \phi U_2 + U_3\}$$

ve $S(TM) = Sp\{W_1, W_2, W_3\}$ dır. Burada

$$W_1 = \frac{\partial}{\partial x_4},\ W_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \phi \frac{\partial}{\partial x_3} + \phi \frac{\partial}{\partial x_5},$$

$$W_3 = -\frac{1}{2(2+\phi)}\left(-\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} + \phi \frac{\partial}{\partial x_3} - \phi \frac{\partial}{\partial x_5}\right)$$

dır. Bu durumda lightlike transversal vektör demeti

$$ltr(TM) = Sp\{N = -\frac{1}{2(2+\phi)}(\phi\frac{\partial}{\partial x_1} + \phi\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_5})\}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\tilde{P}\xi = W_2 \in S(TM),\ \tilde{P}N = W_3 \in S(TM)$$

olup

$$D_0 = Sp\{W_1\},\ D_1 = Sp\{W_2\},\ D_2 = Sp\{W_3\}$$

olarak yazılabilir. Böylece M, $\tilde{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyidir.

Örnek 3.3.7 $(\tilde{M} = \mathbb{R}^7_2, \tilde{g})$ bir $(-,-,+,+,+,+,+)$ işaretli semi-Öklidyen uzay olsun. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, $\mathbb{R}^7_2$ in standart koordinat sistemi ve t_i, $1 \leq t_i \leq 6$ reel parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned}
x_1 &= \phi t_1 - t_2 - t_3,\ x_2 = t_1 + \phi t_2 + \phi t_3,\\
x_3 &= t_1 + \phi t_2 - \phi t_3,\ x_4 = \phi t_1 - t_2 + t_3,\\
x_5 &= \cosh t_4 + \sinh t_5,\ x_6 = \cosh t_4 - \sinh t_5,\\
x_7 &= t_6
\end{aligned}$$

ile tanımlanan bir M hiperyüzeyini göz önüne alalım. Bu durumda

$$TM = Sp\{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} U_1 &= \phi\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}+\phi\frac{\partial}{\partial x_4}, U_2=-\frac{\partial}{\partial x_1}+\phi\frac{\partial}{\partial x_2}+\phi\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ U_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_1}+\phi\frac{\partial}{\partial x_2}-\phi\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}, U_4=\frac{\partial}{\partial x_5}+\frac{\partial}{\partial x_6}, \\ U_5 &= \frac{\partial}{\partial x_5}-\frac{\partial}{\partial x_6}, U_6=\frac{\partial}{\partial x_7} \end{aligned}$$

dir. M bir lightlike hiperyüzeydir. Buradan kolayca görülür ki U_1 bir dejenere vektördür. $\xi = U_1$ olarak alınırsa $RadTM = Sp\{\xi\}$ ve $S(TM) = Sp\{U_2,U_3,U_4,U_5,U_6\}$ dır. Bu durumda

$$ltr(TM)=Sp\{N=-\frac{1}{2(2+\phi)}(\phi\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_3}-\phi\frac{\partial}{\partial x_4})\}$$

olarak bulunur. Eğer $\tilde{P}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = ((1-\phi)x_1,\phi x_2,\phi x_3,(1-\phi)x_4,\phi x_5,\phi x_6,(1-\phi)x_7)$ olarak tanımlanırsa $\tilde{P}^2=\tilde{P}+I$ dır ve $\tilde{P}$, $\mathbb{R}^7_2$ üzerinde bir altın yapıdır. Ayrıca

$$\tilde{P}\xi=U_2\in S(TM), \tilde{P}N=-\frac{1}{2(2+\phi)}U_3\in S(TM)$$

olduğundan

$$D_0=Sp\{U_4,U_5,U_6\}, D_1=Sp\{U_2\}, D_2=Sp\{U_3\}$$

olarak yazılır. Böylece M, $\tilde{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyidir.

Teorem 3.3.8 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman, V vektör alanının M üzerinde paralel olması için gerek ve yeter koşul M nin $\tilde{M}$ de tamamen geodezik ve $\tau=0$ olmasıdır.

İspat: V vektör alanı M üzerinde paralel olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ için (3.2.1) ve (3.3.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$-PA_{\xi}^{*}X - \tau(X)V = -\tilde{P}A_{\xi}^{*}X + u(A_{\xi}^{*}X)N - \tau(X)V = 0$$

olur. (3.3.14) eşitliğinden $B(X,V) = g(A_{\xi}^{*}X,V) = u(A_{\xi}^{*}X) = 0$ oluşu bu eşitlikte kullanılırsa

$$-PA_{\xi}^{*}X - \tau(X)V = -\tilde{P}A_{\xi}^{*}X - \tau(X)V = 0 \tag{3.3.16}$$

bulunur. Buradan (3.3.16) eşitliğine $\tilde{P}$ uygulanırsa ve (2.3.1), (3.2.1) ve (3.3.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$-PA_{\xi}^{*}X - A_{\xi}^{*}X - \tau(X)V - \tau(X)\xi = 0 \tag{3.3.17}$$

elde edilir. O zaman (3.3.17) eşitliğinden (3.3.16) eşitliği çıkartılırsa

$$-A_{\xi}^{*}X - \tau(X)\xi = 0 \tag{3.3.18}$$

olur. $A_{\xi}^{*}X \in \Gamma(S(TM))$ olduğu için (3.3.18) eşitliğinden $\tau(X) = 0$ ve $A_{\xi}^{*}X = 0$ elde edilir. Buradan $B = 0$ bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.9 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi ve V vektör alanı M üzerinde paralel olsun. O zaman P veya U vektör alanının M üzerinde paralel olması için gerek ve yeter koşul M ve $S(TM)$ nin $\tilde{M}$ de total geodezik olmasıdır.

İspat: P, M üzerinde paralel olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (3.3.9) eşitliği göz önüne alınırsa

$$B(X,Y)U = -u(Y)A_N X \tag{3.3.19}$$

elde edilir. Eğer V paralel ise, Teorem 3.3.8 den $B = 0$ dir. (3.3.19) eşitliğinden $u(Y)A_N X = 0$ bulunur. Burada Y yerine U alınırsa her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $A_N X = 0$ bulunur. Böylece $C = 0$ olur.

Benzer şekilde, U vektör alanı M üzerinde paralel olsun. (3.2.1) ve (3.3.11) eşitliklerinden, her $X \in \Gamma(TM)$

$$-PA_N X + \tau(X)U = -\tilde{P}A_N X + u(A_N X)N + \tau(X)U = 0 \tag{3.3.20}$$

olur. (3.3.20) eşitliğine $\tilde{P}$ uygulanırsa ve (2.3.1), (3.2.1) ve (3.3.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$-PA_N X - A_N X + (u(A_N X) + \tau(X))U + (-u(A_N X) + \tau(X))N = 0 \tag{3.3.21}$$

bulunur. (3.3.21) eşitliğinden (3.3.20) eşitliği çıkartılırsa

$$-A_N X + u(A_N X)U - u(A_N X)N + \tau(X)N = 0 \tag{3.3.22}$$

elde edilir. (3.3.22) nin teğet ve normal bileşenleri alınırsa

$$A_N X = u(A_N X)U \text{ ve } u(A_N X) = \tau(X) \tag{3.3.23}$$

olur. V paralel olduğu için, Teorem 3.3.8 den $\tau(X) = 0$ dır. Böylece, (3.3.23) eşitliğinden $u(A_N X) = 0$ ve $A_N X = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.10 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M üzerinde indirgenmiş koneksiyona göre P paralel ise, o zaman D distribüsyonu indirgenmiş koneksiyona göre paraleldir ve M, $M_1 \times M_2$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada M_1, $\tilde{P}ltr(TM)$ ye teğet lightlike (null) eğri ve M_2 de D distribüsyonunun bir lifidir.

İspat: P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre D distribüsyonunun paralel olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$g(\nabla_X \xi, \tilde{P}\xi) = g(\nabla_X \tilde{P}\xi, \tilde{P}\xi) = g(\nabla_X Y, \tilde{P}\xi) = 0 \tag{3.3.24}$$

olmasıdır. (2.3.1), (3.1.9), (3.1.13) ve (3.1.16) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(\nabla_X \xi, \tilde{P}\xi) = g(\tilde{\nabla}_X \tilde{P}\xi, \xi) = B(X,V),\ g(\nabla_X \tilde{P}\xi, \tilde{P}\xi) = 0, \tag{3.3.25}$$

$$g(\nabla_X Y, \tilde{P}\xi) = g(\tilde{P}Y, \tilde{\nabla}_X \xi) = -g(\tilde{P}Y, A^*_\xi X) = -B(X, \tilde{P}Y) \tag{3.3.26}$$

bulunur. (3.3.14) eşitliğinden $B(X,V) = 0$ idi. (3.3.19) eşitliğinde $Y \in \Gamma(D_0)$ alınırsa her $X \in \Gamma(TM)$ için $B(X,Y)U = 0$ yani $B(X,Y) = 0$ bulunur. Ayrıca, D_0 invaryant olup $Y \in \Gamma(D_0)$ için $\tilde{P}Y \in \Gamma(D_0)$ dir. (3.3.19) eşitliğinden $B(X,\tilde{P}Y) = -u(\tilde{P}Y)A_N X = 0$ bulunur. Böylece (3.3.25) ve (3.3.26) eşitliğindeki tüm terimler sıfırdır. Buradan ispat tamamlanır.

Tanım 3.3.11 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M nin ikinci temel formu B, her $X,Y \in \Gamma(D_2)$ için $B(X,Y) = 0$ ise M ye D_2-tamamen geodezik lightlike hiperyüzey denir.

Teorem 3.3.12 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin lokal ikinci temel formu paralel olacak şekilde screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $\tau(\xi) \neq 0$ ise M nin D_2-tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $c_p = -(\phi+1)c_q$ olmasıdır.

İspat: Lokal ikinci temel form B nin paralel olduğunu varsayalım. $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ altın uzay formu olduğundan (2.3.6) eşitliğinden her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$

için

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= (-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})\{g(\tilde{P}Y,Z)u(X)-g(\tilde{P}X,Z)u(Y)\} \\ &+(-\frac{(1-\phi)c+\phi c_q}{4})\{g(Y,Z)u(X) \\ &-g(X,Z)u(Y)\}\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

yazılabilir. B nin paralel oluşu göz önüne alınarak (3.1.24) ve (3.3.27) eşitliklerinde $Y=\xi$ alınırsa

$$-\tau(\xi)B(X,Z)=(-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})u(X)u(Z) \tag{3.3.28}$$

bulunur. Bu eşitlikte X ve Z yerine U alınırsa

$$-\tau(\xi)B(U,U)=(-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}}) \tag{3.3.29}$$

olur ve $\tau(\xi)\neq 0$ olduğundan ispat tamamlanır.

Tanım 3.3.13 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer her $X\in\Gamma(D)$, $Y\in\Gamma(D_2)$ için $B(X,Y)=0$ ise M ye mixed geodezik lightlike hiperyüzey denir.

Teorem 3.3.14 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

i) M mixed geodeziktir.

ii) A_N nin D_2 de bileşeni yoktur.

iii) A^*_ξ nin D_1 de bileşeni yoktur.

İspat: M nin mixed geodezik olduğunu varsayalım. O zaman (3.1.17) ve (3.3.12) eşitlikleri kullanılarak her $X\in\Gamma(D)$, $V\in\Gamma(D_1)$ ve $U\in\Gamma(D_2)$ için

$$B(X,U)=-C(X,V)=-\tilde{g}(A_NX,V)$$

bulunur. Böylece (i)⇔(ii) elde edilmiş olur. (3.1.16), (3.1.17) ve (3.3.12) eşitlikleri kullanılarak

$$\tilde{g}(A_N X, V) = -\tilde{g}(A^*_\xi X, U)$$

bulunur ve (ii)⇔(iii) elde edilir.

Teorem 3.3.15 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman D distribüsyonunun M üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$B(\tilde{P}X, \tilde{P}Y) = B(\tilde{P}X, Y) + B(X, Y) \tag{3.3.30}$$

olmasıdır.

İspat: D distribüsyonu invaryant olduğundan $X \in \Gamma(D)$ için $\tilde{P}X \in \Gamma(D)$ dir. O zaman D distribüsyonunun M üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(D)$, $V \in \Gamma(D_1)$ için

$$u(\left[\tilde{P}X, Y\right]) = 0$$

olmasıdır. Buradan (2.3.1) ve (3.1.9) eşitlikleri kullanılara

$$\begin{aligned} u(\left[\tilde{P}X, Y\right]) &= \tilde{g}(\left[\tilde{P}X, Y\right], V) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X} Y, \tilde{P}\xi) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \tilde{P}X, \tilde{P}\xi) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X} \tilde{P}Y, \xi) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y \tilde{P}X, \xi) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X, \xi) \\ &= B(\tilde{P}X, \tilde{P}Y) - B(Y, \tilde{P}X) - B(X, Y) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.16 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

i) D distribüsyonu paraleldir.

ii) D distribüsyonu tamamen geodezikdir.

iii) $(\nabla_X P)Y = 0$, $X,Y \in \Gamma(D)$.

İspat: D distribüsyonunun M üzerinde paralel olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \Gamma(D)$, $V \in \Gamma(D_1)$ için

$$u(\nabla_X Y) = 0$$

dır. Buradan (3.1.9) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} u(\nabla_X Y) &= g(\nabla_X Y, V) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, V) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \tilde{P}\xi) = \tilde{g}(\tilde{P}\tilde{\nabla}_X Y, \xi) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{P}Y, \xi) = B(X, \tilde{P}Y) \end{aligned}$$

bulunur ve (i)$\Leftrightarrow$(ii) elde edilmiş olur. Her $Y \in \Gamma(D)$ için $u(Y) = 0$ olup (3.3.9) eşitliği kullanılırsa $(\nabla_X P)Y = B(X,Y)U$ olur ve (ii)$\Leftrightarrow$(iii) elde edilir.

Teorem 3.3.17 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman M nin tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart her $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(D)$ ve $U \in \Gamma(D_2)$ için

$$(\nabla_X P)Y = 0, \qquad (3.3.31)$$

$$(\nabla_X P)U = A_N X \qquad (3.3.32)$$

olmasıdır.

İspat: M nin tamamen geodezik olduğunu varsayalım. Her $Y \in \Gamma(D)$ için $u(Y) = 0$ olur ve (3.3.9) eşitliğinden $(\nabla_X P)Y = 0$ bulunur. Benzer şekilde $U \in \Gamma(D_2)$ için $u(U) = 1$ olup (3.3.9) eşitliğinde Y yerine U alınırsa $(\nabla_X P)U = A_N X$ olur.

Tersine, (3.3.31) ve (3.3.32) eşitliklerinin olduğunu varsayalım. (3.3.2) ayrışımı kullanılırsa her $Y \in \Gamma(TM)$ için $Y = Y_d + fU$ olacak biçimde $Y_d \in \Gamma(D)$ ve f fonksiyonu vardır. Buradan

$$B(X,Y) = B(X,Y_d) + fB(X,U) \tag{3.3.33}$$

olur. (3.3.9) eşitliğinde Y yerine Y_d alınırsa ve (3.3.31) eşitliği kullanılırsa $B(X,Y_d)U = -u(Y_d)A_NX = 0$ olur. Buradan $B(X,Y_d) = 0$ bulunur. Benzer şekilde (3.3.9) eşitliğinde Y yerine U yazılırsa ve (3.3.32) eşitliği kullanılırsa $(\nabla_X P)U = u(U)A_NX + B(X,U)U = A_NX + B(X,U)U = A_NX$ bulunur. Buradan $B(X,U) = 0$ olur. Böylece (3.3.33) eşitliğinden $B(X,Y) = 0$ bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.18 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M tamamen umbilik ise, o zaman M, $\tilde{M}$ de tamamen geodeziktir.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman (3.3.14) eşitliğinden her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X,V) = \lambda g(X,V) = 0 \tag{3.3.34}$$

bulunur. (3.3.34) eşitliğinde X yerine U alınırsa $\lambda = 0$ bulunur. Bu durumda $B = 0$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.19 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $S(TM)$ ekran distribusyonu tamamen umbilik ise, o zaman $S(TM)$ tamamen geodeziktir.

İspat: $S(TM)$ tamamen umbilik olsun. O zaman (3.3.15) eşitliğinden her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$C(X,U) = \delta g(X,U) = 0 \tag{3.3.35}$$

bulunur. (3.3.35) eşitliğinde X yerine V alınırsa $\delta = 0$ bulunur. Bu durumda $C = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.20 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M tamamen umbilik ise $c_p = c_q = 0$ dır.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. (3.1.24) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \\ &\quad + \tau(X)B(Y,Z) - \tau(Y)B(X,Z) \end{aligned}$$

idi. Bu eşitlikte Teorem 3.3.18 kullanılırsa

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) = 0 \tag{3.3.36}$$

bulunur. Ayrıca (3.3.27) eşitliğinde, sırasıyla, $X = U$, $Y = \xi$, $Z = U$ ve $X = U$, $Y = V$, $Z = U$ alınırsa

$$\tilde{g}(\tilde{R}(U,\xi)U,\xi) = (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{4}) \tag{3.3.37}$$

ve

$$\tilde{g}(\tilde{R}(U,V)U,\xi) = (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}) + (-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4}) \tag{3.3.38}$$

bulunur. Böylece (3.3.36), (3.3.37) ve (3.3.38) eşitliğinden $c_p = c_q = 0$ bulunur. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.21 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $S(TM)$ tamamen umbilik ise $c_p = c_q = 0$ dır.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi ve $S(TM)$ ekran distribusyonu tamamen umbilik olsun. (3.1.25) ve (3.1.26) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) &= \tilde{g}(R(X,Y)QZ,N) \\ &= (\nabla_X C)(Y,QZ) - (\nabla_Y C)(X,QZ) \\ &\quad +\tau(Y)C(X,QZ) - \tau(X)C(Y,QZ) \end{aligned}$$

idi. M nin tamamen umbilik olduğu göz önune alınırsa

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) = 0 \tag{3.3.39}$$

bulunur. Ayrıca (2.3.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(Y,QZ)\eta(X) - \tilde{g}(X,QZ)\eta(Y)\} \\ &\quad +\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)v(X) - \tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)v(Y)\} \qquad (3.3.40) \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)\eta(X) - \tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)\eta(Y) \\ &\quad +\tilde{g}(Y,QZ)v(X) - \tilde{g}(X,QZ)v(Y)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada v

$$v(X) = g(X,\tilde{P}N) \tag{3.3.41}$$

ile tanımlanan $1-$formdur.

(3.3.40) eşitliğinde sırasıyla $X = \xi$, $Y = V$, $QZ = U$ ve $X = \xi$, $Y = U$, $QZ = V$ alınırsa

$$\tilde{g}(\tilde{R}(\xi,V)U,N) = (-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4}) \tag{3.3.42}$$

ve

$$\tilde{g}(\tilde{R}(\xi,U)V,N) = (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}) + (-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4}) \tag{3.3.43}$$

bulunur. Böylece (3.3.39), (3.3.42) ve (3.3.43) eşitliğinden $c_p = c_q = 0$ bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.3.22 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

i) Gauss denklemi

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z \quad = \quad & (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y + \tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)PX \\ & -\tilde{g}(\tilde{P}X,Z)PY\} + (-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)X \\ & -\tilde{g}(\tilde{P}X,Z)Y + \tilde{g}(Y,Z)PX - \tilde{g}(X,Z)PY\} \\ & -B(X,Z)A_N Y + B(Y,Z)A_N X \end{aligned} \tag{3.3.44}$$

ii) Codazzi denklemi

$$\begin{aligned} (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \quad = \quad & \{(-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)u(X) \\ & -\tilde{g}(\tilde{P}X,Z)u(Y)\} \\ & +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(Y,Z)u(X) \\ & -\tilde{g}(X,Z)u(Y)\}\}N \end{aligned} \tag{3.3.45}$$

olur.

İspat: $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu olduğundan (2.3.6) ve (3.1.21) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y + \tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)\tilde{P}X \\ &\quad -\tilde{g}(\tilde{P}X,Z)\tilde{P}Y\} + (-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)X \\ &\quad -\tilde{g}(\tilde{P}X,Z)Y + \tilde{g}(Y,Z)\tilde{P}X - \tilde{g}(X,Z)\tilde{P}Y\} - A_{h(X,Z)}Y \qquad (3.3.46) \\ &\quad +A_{h(Y,Z)}X - (\nabla_X h)(Y,Z) + (\nabla_Y h)(X,Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y + \tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)PX \\ &\quad +\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)u(X)N - \tilde{g}(\tilde{P}X,Z)PY - \tilde{g}(\tilde{P}X,Z)u(Y)N\} \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)X - \tilde{g}(\tilde{P}X,Z)Y + \tilde{g}(Y,Z)PX \\ &\quad +\tilde{g}(Y,Z)u(X)N - \tilde{g}(X,Z)PY - \tilde{g}(X,Z)u(Y)N\} \qquad (3.3.47) \\ &\quad -A_{h(X,Z)}Y + A_{h(Y,Z)}X - (\nabla_X h)(Y,Z) + (\nabla_Y h)(X,Z) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (3.3.47) eşitliğinin transversal bileşeninden (3.3.45) eşitliği ve teğet bileşeninde $h(X,Y) = B(X,Y)N$ olduğu kullanılırsa (3.3.44) eşitliliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.23 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ altın uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin ikinci temel formu paralel olan screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman $c_p = c_q = 0$ dır.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin ikinci temel formu paralel olan screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. (3.3.45) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)u(X) - \tilde{g}(\tilde{P}X,Z)u(Y))\} \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(Y,Z)u(X) - \tilde{g}(X,Z)u(Y)\} \end{aligned} \tag{3.3.48}$$

elde edilir. (3.3.48) eşitliğinde sırasıyla $X = U$, $Y = \xi$, $Z = U$ ve $X = U$, $Y = V$, $Z = U$ alınırsa

$$(-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}) = 0 \tag{3.3.49}$$

ve

$$(-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}) + (-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4}) = 0 \tag{3.3.50}$$

olur. Böylece (3.3.49) ve (3.3.50) eşitliklerinden $c_p = c_q = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.24 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$, $c_p, c_q \neq 0$ lokal altın çarpım uzay formunun ekran distribusyonu paralel olan bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi yoktur.

İspat: $c_p, c_q \neq 0$ olmak üzere M, $\tilde{M}$ nin ekran distribusyonu paralel olan bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Diğer taraftan (3.1.25) ve (3.1.26) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) &= \tilde{g}(R(X,Y)QZ,N) \\ &= (\nabla_X C)(Y,QZ) - (\nabla_Y C)(X,QZ) \\ &\quad +C(X,QZ)\tau(Y) - C(Y,QZ)\tau(X) \end{aligned}$$

idi. Ekran distribusyonunun paralelliği kullanılarak

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) = 0 \tag{3.3.51}$$

bulunur. (3.3.40) eşitliğinde, sırasıyla, $X = \xi$, $Y = V$, $Z = U$ ve $X = V$, $Y = U$, $Z = V$ alınırsa

$$\tilde{g}(\tilde{R}(\xi, V)U, N) = (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}) \tag{3.3.52}$$

ve

$$\tilde{g}(\tilde{R}(V,U)V,N) = (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}) + (-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4}) \tag{3.3.53}$$

bulunur. Bu durumda (3.3.51), (3.3.52) ve (3.3.53) eşitliklerinden $c_p = c_q = 0$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.25 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman M nin lokal simetrik olması için gerek ve yeter koşul her $X,Y,Z,T,W \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$g((\nabla_W R)(X,Y)Z, QT) = 0 \text{ ve } \tilde{g}((\nabla_W R)(X,Y)Z, N) = 0 \tag{3.3.54}$$

sartlarını sağlamasıdır (Güneş ve ark, 2003). Yani

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z = 0 \tag{3.3.55}$$

olmasıdır.

Her $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$, $T \in \Gamma(S(TM))$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için Güneş ve ark (2003) de verilen Lemma 3.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{g}((\tilde{\nabla}_W\tilde{R})(X,Y)Z,T)) &= g((\nabla_W R)(X,Y)Z,T)+(\nabla_W B)(X,Z)C(Y,T)\\ &+B(X,Z)g((\nabla_W A_N)Y,T)-(\nabla_W B)(Y,Z)C(X,T)\\ &-B(Y,Z)g((\nabla_W A_N)X,T)-B(Y,Z)\tau(X)C(W,T)\\ &+(\nabla_Y B)(X,Z)C(W,T)-(\nabla_X B)(Y,Z)C(W,T)\\ &+B(X,Z)\tau(Y)C(W,T)-B(W,X)\tilde{R}(N,Y,Z,T)\\ &-B(W,Y)\tilde{R}(X,N,Z,T) \qquad (3.3.56)\\ &-B(W,Z)\tilde{R}(X,Y,N,T)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{g}((\tilde{\nabla}_W\tilde{R})(X,Y)Z,N) &= g((\nabla_W R)(X,Y)Z,N)+B(X,Z)g((\nabla_W(A_N)Y),N)\\ &-B(Y,Z)g((\nabla_W A_N X),N)-B(W,X)\tilde{R}(N,Y,Z,N)\\ &-B(W,Y)\tilde{R}(X,N,Z,N) \qquad (3.3.57)\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.3.26 $(\tilde{M}=M_p(c_p)\times M_q(c_q),\tilde{g},\tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $\tilde{\nabla}\tilde{P}=0$ ise her $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$ için

$$(\tilde{\nabla}_W\tilde{R})(X,Y)Z=0 \qquad (3.3.58)$$

dır. Burada $\tilde{R}$, $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunun Riemann eğrilik tensörüdür.

İspat: $(\tilde{M}=M_p(c_p)\times M_q(c_q),\tilde{g},\tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$(\tilde{\nabla}_W\tilde{R})(X,Y)Z=\tilde{\nabla}_W\tilde{R}(X,Y)Z-\tilde{R}(\tilde{\nabla}_W X,Y)Z-\tilde{R}(X,\tilde{\nabla}_W Y)Z-\tilde{R}(X,Y)\tilde{\nabla}_W Z$$

oluşu ve (2.3.6) eşitliği kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.27 *M*, $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formunun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi ve $c_p \neq -(\phi+1)c_q$ olsun. O zaman *M* nin lokal simetrik olması için gerek ve yeter şart tamamen geodezik olmasıdır.

İspat: *M*, $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formunun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi ve $c_p \neq -(\phi+1)c_q$ olsun. *M* nin lokal simetrik olduğunu varsayalım. (2.3.6) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{R}(\xi,N,\xi,N) = (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}) \tag{3.3.59}$$

bulunur. Her $W,Y \in \Gamma(TM)$ için (3.3.56), (3.3.57) ve (3.3.58) eşitliklerinde $X = \xi$ ve $Z = \xi$ alınırsa

$$(-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})B(W,Y) = 0 \tag{3.3.60}$$

bulunur. *M* lokal simetrik olduğundan (3.3.60) eşitliğinden $B = 0$ olur. Tersine *M* nin tamamen geodezik olduğunu varsayalım. (3.3.56), (3.3.57) and (3.3.58) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$g((\nabla_W R)(X,Y)Z, QT) = 0$$

ve

$$g((\nabla_W R)(X,Y)Z, N) = 0$$

bulunur. Yani *M* lokal simetriktir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

M nin indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X,Y) = iz\{Z \to R(Z,X)Y\} \tag{3.3.61}$$

ile tanımlanır. $RadTM = sp\{\xi\}$ ve $S(TM) = sp\{E_1,...,E_m\}$ olmak üzere M üzerindeki $\{E_1,...,E_m,\xi\}$ quasi-orthonormal çatısını dikkate alalım. Bu durumda her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(R(E_i,X)Y,E_i) + \tilde{g}(R(\xi,X)Y,N) \tag{3.3.62}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_i = g(E_i,E_i) = \pm 1$ dir. Genelde indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ simetrik değildir (Duggal ve Jin, 2007; Jin, 2010a). M lightlike altmanifoldunun indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ simetrik ise indirgenmiş Ricci tensör olarak adlandırılır ve Ric ile gösterilir.

$(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X,Y) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{(m-1)\tilde{g}(X,Y) \\ &\quad +((iz\tilde{P})-1)\tilde{g}(\tilde{P}X,Y) - u(Y)v(X)\} \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{(iz\tilde{P})\tilde{g}(X,Y) - u(Y)\eta(X) \\ &\quad +(m-1)\tilde{g}(\tilde{P}X,Y)\} + B(X,Y)izA_N - B(A_NX,Y) \end{aligned} \tag{3.3.63}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X,Y) - R^{(0,2)}(Y,X) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{u(X)v(Y) - u(Y)v(X)\} \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{u(X)\eta(Y) - u(Y)\eta(X)\} \\ &\quad +B(A_NY,X) - B(A_NX,Y) \end{aligned} \tag{3.3.64}$$

bulunur.

Teorem 3.3.28 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M,

$\tilde{M}$ nin tamamen umbilik screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ simetriktir.

İspat: Teorem 3.3.18 ve Teorem 3.3.20 (3.3.64) eşitliğinde kullanılırsa ispat tamamlanır.

3.4 Altın Semi-Riemann Manifoldların Ekran Konformal Screen Semi-İnvaryant Lightlike Hiperyüzeyleri

Tanım 3.4.1 (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun $(\tilde{M},\tilde{g})$. Eğer

$$A_N = \varphi A^*_\xi \tag{3.4.1}$$

yada denk olarak

$$C(X,QY) = \varphi B(X,Y), \forall X,Y \in \Gamma(TM) \tag{3.4.2}$$

olacak şekilde M nin U komşuluğu üzerinde sıfırdan farklı φ diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa M ye ekran (screen) konformal lightlike hiperyüzey denir (Atindogbe ve Duggal, 2004). Eğer φ sabit ise M ye ekran homotetik lightlike hiperyüzey denir (Duggal ve Jin, 2010).

Hatırlatma 3.4.2 M ekran konformal ise, o zaman $S(TM)$ nin ikinci temel formu C, $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetriktir yani $S(TM)$ integrallenebilirdir. Böylece M, $R_\xi \times M^*$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada R_ξ, $RadTM$ ye teğet null eğri ve M^* de $S(TM)$ nin bir lifidir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 3.4.3 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M yada $S(TM)$ tamamen umbilik ise, o zaman M, $\tilde{M}$ de tamamen geodeziktir ve $S(TM)$ nin lifi $M^\flat$, M ve $\tilde{M}$ de tamamen geodeziktir.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda Teorem 3.3.18 den $B(X,Y)=0$ idi. M nin ekran konformal oluşu bu eşitlikte kullanılırsa $C(X,QY)=\varphi B(X,Y)=0$ olur. Benzer şekilde $S(TM)$ tamamen umbilik ise Teorem 3.3.19 ve (3.4.2) eşitliğinden $B=C=0$ elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4.4 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. U,V,P den biri M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman $S(TM)$, M ve $\tilde{M}$ de tamamen geodezik ve M de $\tilde{M}$ tamamen geodeziktir.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin altın semi-Riemann manifoldunun ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer V paralel ise Teorem 3.3.8 den, $\tau=0$ ve $A^*_\xi=0$ idi. Burada $A_N=\varphi A^*_\xi$ olduğu kullanılırsa, $A_N=0$ olur.

U, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. Bu durumda (3.3.15) ve (3.3.23) eşitliklerinden her $X\in\Gamma(TM)$ için

$$C(X,U)=0$$

ve

$$A_NX=u(A_NX)U \text{ ve } u(A_NX)=\tau(X)$$

idi. (3.1.16), (3.1.17), (3.3.12) ve (3.4.1) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} C(X,U) &= g(A_NX,U)=\varphi g(A^*_\xi X,U)=\varphi B(X,U) \\ &= -\varphi C(X,V)=-\varphi g(A_NX,V)=-\varphi u(A_NX)=0 \end{aligned}$$

olur. Buradan $u(A_NX)=0$ olup $A_NX=u(A_NX)U=0$ olur. Böylece $A_N=0$ bulunur. M ekran konformal olduğundan $A^*_\xi=0$ olur.

P nin M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olduğunu varsayalım. (3.3.19) eşitliği ile V çarpılırsa

$$B(X,Y) = -u(A_N X)u(Y)$$

olur. (3.1.16), (3.3.14) ve (3.4.1) eşitliklerinden

$$u(A_N X) = \varphi u(A^*_\xi X) = \varphi g(A^*_\xi X, V) = \varphi B(X,V) = 0$$

bulunur. Böylece $u(A_N X) = 0$ olup $B(X,Y) = -u(A_N X)u(Y)$ bulunur. Böylece $B = 0$ olur. M ekran konformal olduğundan $C = 0$ bulunur. Böylece M ve $S(TM)$ tamamen geodeziktir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.5 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer

i) U, V, P den biri M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise,

ii) M ya da $S(TM)$, M ve $\tilde{M}$ de tamamen umbilik ise,

o zaman M, $M_1 \times M_2$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada M_1, $\tilde{P}ltr(TM)$ ye teğet null eğri ve M_2 de D nin bir lifidir.

İspat: U, V, P den biri M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, Teorem 3.4.4 ten M ve $S(TM)$ tamamen geodeziktir. Böylece (3.3.25) ve (3.3.26) eşitliğindeki tüm terimler sıfırdır. Benzer şekilde, M yada $S(TM)$ tamamen geodezik ise (3.3.25) ve (3.3.26) eşitliğindeki tüm terimler sıfırdır. Buradan D distribüsyonu paraleldir ve integrallenebilirdir. Böylece ispat tamamlanır.

$\{U, V\}$, $\Gamma(\tilde{P}RadTM \oplus \tilde{P}ltr(TM))$ nin bir bazı olduğundan,

$$\mu = U - \varphi V, \; \upsilon = U + \varphi V \tag{3.4.3}$$

alınırsa $\{\mu,\upsilon\}$ de $\Gamma(\tilde{P}RadTM \oplus \tilde{P}ltr(TM))$ nin ortogonal bir bazı olur.

$K(\mu) = Sp\{\mu\}$ olsun. Böylece $P(\mu) = D_0 \perp Sp\{\upsilon\}$, $S(TM)$ nin ortogonal tamamlayan vektör alt demetidir ve

$$S(TM) = K(\mu) \perp P(\mu) \tag{3.4.4}$$

olur.

Teorem 3.4.6 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel olması için gerek ve yeter şart M nin ekran homotetik ve $\tau = 0$ olmasıdır.

İspat: M, $\tilde{M}$ altın semi-Riemann manifoldunun ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. $A_N = \varphi A^*_\xi$, P nin lineer oluşu, (3.3.11) ve (3.3.13) kullanılırsa her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\nabla_X \mu &= \nabla_X U - \varphi \nabla_X V - X[\varphi]V \\
&= -PA_N X + \tau(X)U - \varphi(-PA^*_\xi X - \tau(X)V) - X[\varphi]V \\
&= \tau(X)\upsilon - X[\varphi]V, \qquad (3.4.5)
\end{aligned}$$

olur. μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel olduğu için

$$\tau(X)U + (\varphi\tau(X) - X[\varphi])V = 0 \tag{3.4.6}$$

dır. (3.4.6) eşitliği sırasıyla V ve U ile çarpılırsa $\tau(X) = 0$ ve

$$\varphi\tau(X) - X[\varphi] = 0 \tag{3.4.7}$$

elde edilir. $\tau(X) = 0$ olduğundan $X[\varphi] = 0$ bulunur. Buradan $\varphi = c$ yani M ekran homotetiktir. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.7 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman M, $R_\xi \times R_\mu \times M^\flat$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada R_ξ ve R_μ, sırasıyla, $RadTM$ ve $K(\mu)$ ye teğet null ve non-null geodezikler ve $M^\flat$ de $P(\mu)$ nin bir lifidir.

İspat: μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. (3.1.9) eşitliğinden her $X \in \Gamma(P(\mu))$ ve $Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$g(\nabla_X Y, \mu) = g(\tilde{\nabla}_X Y, \mu) = -g(Y, \tilde{\nabla}_X \mu) = -g(Y, \nabla_X \mu) = 0, \quad (3.4.8)$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \upsilon, \mu) &= g(\tilde{\nabla}_X \upsilon, \mu) = -g(\upsilon, \tilde{\nabla}_X \mu) \\ &= -g(\upsilon, \nabla_X \mu) = X[\varphi] - 2\varphi\tau(X) \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

dır. Böylece P(μ) paralel ve integrallenebilen distribüsyondur. Hatırlatma 3.4.2 de kullanılırsa ispat tamamlanmış olur.

$N(\mu) = D_0 \perp Span\{\xi, \upsilon\}$ eşitliği göz önüne alınırsa (3.1.1) ve (3.4.4) eşitliklerinden

$$TM = K(\mu) \perp N(\mu) \quad (3.4.10)$$

olarak yazılabilir.

Teorem 3.4.8 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman M, $R_\mu \times M^*$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada R_μ, $K(\mu)$ ye teğet non-null geodezik ve M^* de $N(\mu)$ nin bir lifidir.

İspat: μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. (3.1.9) eşitliğinden her $X \in$

$\Gamma(N(\mu))$ ve $Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X \xi, \mu) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, \mu) = -\tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X \mu) = -B(X, \mu), && (3.4.11)\\
g(\nabla_X \upsilon, \mu) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \upsilon, \mu) = -g(\upsilon, \tilde{\nabla}_X \mu) = -g(\upsilon, \nabla_X \mu) = 0, && (3.4.12)\\
g(\nabla_X Y, \mu) &= g(\tilde{\nabla}_X Y, \mu) = -g(Y, \tilde{\nabla}_X \mu) = -g(Y, \nabla_X \mu) = 0 && (3.4.13)
\end{aligned}
$$

olur. $B(X,\mu) = B(X,U - \varphi V) = B(X,U) - \varphi B(X,V)$ olup (3.3.14) eşitliğinden $B(X,V) = 0$ idi. Ayrıca (3.3.15) ve (3.4.2) eşitliklerinden $B(X,U) = \frac{1}{\varphi} C(X,U) = 0$ olup $B(X,\mu) = 0$ dır. Böylece $N(\mu)$ paralel ve integrallenebilen distribüsyondur. Buradan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.9 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ altın uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman $c_p = c_q = 0$ dır.

İspat: (3.1.24) ve (3.3.27) eşitlikleri kullanılırsa her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
&(-\tfrac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)u(X) - \tilde{g}(\tilde{P}X,Z)u(Y)\}\\
&+(-\tfrac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(Y,Z)u(X) - \tilde{g}(X,Z)u(Y)\} \qquad (3.4.14)\\
&= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) + \tau(X)B(Y,Z) - \tau(Y)B(X,Z)
\end{aligned}
$$

bulunur. (2.3.6), (3.1.25), (3.1.26) ve (3.4.2) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(Y,QZ)\eta(X) - \tilde{g}(X,QZ)\eta(Y)\}\\
&+\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)v(X) - \tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)v(Y)\} \qquad (3.4.15)\\
&+(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)\eta(X) - \tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)\eta(Y)\\
&+\tilde{g}(Y,QZ)v(X) - \tilde{g}(X,QZ)v(Y)\}
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) &= \tilde{g}(R(X,Y)QZ,N) = (\nabla_X C)(Y,QZ) - (\nabla_Y C)(X,QZ) \\
&\quad + C(X,QZ)\tau(Y) - C(Y,QZ)\tau(X) \\
&= XC(Y,QZ) - C(\nabla_X Y,QZ) - C(Y,\nabla_X QZ) \\
&\quad - YC(X,QZ) + C(\nabla_Y X,QZ) + C(X,\nabla_Y QZ) \\
&\quad + C(X,QZ)\tau(Y) - C(Y,QZ)\tau(X) \qquad (3.4.16) \\
&= X(\varphi B(Y,QZ)) - \varphi B(\nabla_X Y,QZ) - \varphi B(Y,\nabla_X QZ) \\
&\quad - Y(\varphi B(X,QZ)) + \varphi B(\nabla_Y X,QZ) + \varphi B(X,\nabla_Y QZ) \\
&\quad + \varphi B(X,QZ)\tau(Y) - \varphi B(Y,QZ)\tau(X) \\
&= \varphi((\nabla_X B)(Y,QZ) - (\nabla_Y B)(X,QZ) + B(X,QZ)\tau(Y) \\
&\quad - B(Y,QZ)\tau(X)) + X[\varphi]B(Y,QZ) - Y[\varphi]B(X,QZ)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4.15) ve (3.4.16) eşitlikleri (3.4.14) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&(-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\varphi\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)u(X) - \varphi\tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)u(Y) \\
&-\tilde{g}(Y,QZ)\eta(X) + \tilde{g}(X,QZ)\eta(Y) - \tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)v(X) + \tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)v(Y)\} \\
&+(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\varphi\tilde{g}(Y,QZ)u(X) - \varphi\tilde{g}(X,QZ)u(Y) \qquad (3.4.17) \\
&-\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)\eta(X) + \tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)\eta(Y) - \tilde{g}(Y,QZ)v(X) + \tilde{g}(X,QZ)v(Y)\} \\
= \;& [-X[\varphi] + 2\varphi\tau(X)]B(Y,QZ) + [Y[\varphi] - 2\varphi\tau(Y)]B(X,QZ)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.4.17) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&(-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\varphi u(X)u(QZ) + \tilde{g}(X,QZ) - u(QZ)v(X)\} \\
&+(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{-u(QZ)\eta(X) + \tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)\} \qquad (3.4.18) \\
= \;& \{\xi[\varphi] - 2\varphi\tau(\xi)\}B(X,QZ)
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte sırasıyla $X = V$, $QZ = U$ ve $X = U$, $QZ = V$ alınırsa

$$(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4}) = \{\xi\,[\varphi] - 2\varphi\tau(\xi)\}B(V,U) \tag{3.4.19}$$

ve

$$(-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}) + (-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4}) = \{\xi\,[\varphi] - 2\varphi\tau(\xi)\}B(U,V) \tag{3.4.20}$$

bulunur. (3.3.14) eşitliğinden $B(X,V) = 0$ oluşu kullanılırsa

$$-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}} = 0$$

ve

$$(-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}}) + (-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4}) = 0$$

bulunur. Buradan da $c_p = c_q = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4.10 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$, $c_p, c_q \neq 0$, lokal altın çarpım uzay formunun ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi yoktur.

Teorem 3.4.11 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ simetriktir.

İspat: $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman Teorem 3.4.9, (3.3.64) eşitliğinde yerine yazılırsa $R^{(0,2)}$ simetrik olduğu görülür . Böylece ispat tamamlanır.

4. ALTIN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN HALF LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

4.1 Half Lightlike Altmanifoldlar

Tanım 4.1.1 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $q \geq 1$ indeksli $(m+3)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $(m+1)-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer M nin radikal uzayı $RadTM$ nin rankı 1 ise M altmanifolduna $\tilde{M}$ nın bir half-lightlike altmanifoldu denir (Duggal ve Bejancu, 1992).

Tanım 4.1.2 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+3)-$boyutlu semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $(m+1)-$boyutlu bir half lightlike altmanifoldu olsun. $RadTM$ nin TM de tümleyeni olan $S(TM)$ uzayına M nin ekran distribüsyonu denir. Böylece

$$TM = RadTM \perp S(TM) \tag{4.1.1}$$

ayrışımına sahip oluruz (Duggal ve Bejancu, 1992).

Tanım 4.1.3 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+3)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $(m+1)-$boyutlu bir half lightlike altmanifoldu olsun. $RadTM$, $T_pM^{\perp}$ in 1 boyutlu bir alt demeti olduğundan $RadTM$ ye tamamlayan ve $S(TM^{\perp})$ distribüsyonu vardır. Bu distribüsyona M nin ekran transversal demeti denir. Böylece

$$TM^{\perp} = RadTM \perp S(TM^{\perp}) \tag{4.1.2}$$

olur. Burada $\tilde{g}(L,L) = \varepsilon = \pm 1$ olacak şekilde $L \in \Gamma(S\left(TM^{\perp}\right)$ birim vektör alanını seçebiliriz.

$T\tilde{M}$ da $S(TM)$ ye ortogonal tamamlayan olan $S(TM)^{\perp}$ uzayını göz önüne alalım. $S(TM)^{\perp}$ uzayına M nin ek-ekran distribüsyonu denir (Duggal ve Bejancu, 1992). Böylece

$$S(TM)^{\perp} = S(TM^{\perp}) \perp S(TM^{\perp})^{\perp} \tag{4.1.3}$$

dir. Böylece $S(TM^{\perp})^{\perp}$, $S(TM)^{\perp}$ de $S(TM^{\perp})$ in ortogonal tamamlayanıdır.

Teorem 4.1.4 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+3)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $(m+1)-$boyutlu bir half lightlike altmanifoldu olsun. U, M nin bir koordinat komşuluğu olmak üzere $\xi \in Rad(TM\mid_U)$ ve her $X \in \Gamma(S(TM)$ için

$$\tilde{g}(N,\xi) = 1, \quad \tilde{g}(N,N) = \tilde{g}(N,X) = \tilde{g}(N,L) = 0 \tag{4.1.4}$$

olacak şekilde bir tek $N \in \Gamma(ltr(TM))$ vardır. Burada $ltr(TM)$, 1-boyutlu bir vektör demeti olup $S(TM)$ ekran distribüsyonuna göre M nin lightlike transversal demeti olarak adlandırılır (Duggal ve Bejancu, 1992). Böylece M nin transversal vektör demeti

$$tr(TM) = S(TM^{\perp}) \perp ltr(TM) \tag{4.1.5}$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} T\tilde{M} &= TM \oplus tr(TM) = \{RadTM) \oplus tr(TM)\} \perp S(TM) \\ &= \{RadTM) \oplus ltr(TM)\} \perp S(TM) \perp S(TM^{\perp}) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

dir.

$\{E_1,...,E_m\}$, $S(TM)$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere (4.1.6) eşitliğinden

$$\{E_1,...,E_m,\xi,N,L\}$$

ye $\tilde{M}$ nin M boyunca quasi-ortonormal çatısı denir.

Tanım 4.1.5 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+3)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $(m+1)-$boyutlu bir half lightlike altmanifoldu olsun. $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ de Levi-Civita konneksiyonu ve $Q:\Gamma(TM)\rightarrow\Gamma(S(TM))$ projektif dönüşümü olsun. M ve $S(TM)$ için Gauss ve Weingarten formülleri her $X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $U\in\Gamma(tr(TM))$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + B(X,Y)N + D(X,Y)L, && (4.1.7)\\
\tilde{\nabla}_X U &= -A_U X + \nabla^t_X U && (4.1.8)\\
\tilde{\nabla}_X N &= -A_N X + \tau(X)N + \rho(X)L, && (4.1.9)\\
\tilde{\nabla}_X L &= -A_L X + \psi(X)N && (4.1.10)\\
\nabla_X QY &= \nabla^*_X QY + C(X,QY)\xi, && (4.1.11)\\
\nabla_X \xi &= -A^*_\xi X - \tau(X)\xi && (4.1.12)
\end{aligned}$$

dir. Burada ∇ ve ∇^*, sırasıyla, TM ve $S(TM)$ üzerine indirgenmiş lineer konneksiyonlar; B ve D terimlerine, sırasıyla, M altmanifoldun lightlike ikinci temel formu ve ekran ikinci temel formu ve C, $S(TM)$ üzerinde yerel ekran ikinci temel formu denir. A_N ve A_L, TM üzerinde şekil operatörleri; A^*_ξ ye ise $S(TM)$ üzerinde şekil operatörü denir. Ayrıca τ, ρ ve ψ TM üzerinde 1-formlardır (Duggal ve Jin, 1999).

Tanım 4.1.6 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+3)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $(m+1)-$boyutlu bir half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu h ve ekran ikinci temel formu h^*, sırasıyla,

$$h(X,Y) = B(X,Y)N + D(X;Y)L, h^*(X,Y) = C(X,QY)\xi \qquad (4.1.13)$$

ile tanımlanır (Duggal ve Şahin, 2010).

$\tilde{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğu için (4.1.7) eşitliğinden her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$

için

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = B(X,Y)\eta(Z) + B(X,Z)\eta(Y) \tag{4.1.14}$$

elde edilir ki bu yüzden indirgenmiş konneksiyon ∇ metrik konneksiyon değildir. Burada η $1-$formu

$$\eta(X) = \tilde{g}(X,N),\ \forall X \in \Gamma(TM) \tag{4.1.15}$$

ile tanımlanır. $\tilde{\nabla}$ torsiyonsuz olduğu için ∇ de torsiyonsuzdur ve bu yüzden B ve D, TM üzerinde simetriktir.

Önerme 4.1.7 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifold ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $(m+1)-$boyutlu bir half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda B ve D, $S(TM)$ ekran distribüsyonunun seçiminden bağımsızdır ve her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X,\xi) = 0,\ D(X,\xi) = -\varepsilon\psi(X) \tag{4.1.16}$$

dır (Duggal ve Şahin, 2010).

Önerme 4.1.8 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifold ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin şekil operatörleri ile ikinci temel formları arasında her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X,Y) = g(A^*_\xi X,Y), \quad g(A^*_\xi X,N) = 0, \tag{4.1.17}$$

$$C(X,QY) = g(A_N X,QY), \quad g(A_N X,N) = 0, \tag{4.1.18}$$

$$\varepsilon D(X,QY) = g(A_L X,QY), \quad g(A_L X,N) = \varepsilon\rho(X), \tag{4.1.19}$$

$$\varepsilon D(X,Y) = g(A_L X,Y) - \psi(X)\eta(Y) \tag{4.1.20}$$

bağıntıları vardır (Duggal ve Şahin, 2010).

Ayrıca (4.1.17) den

$$A^*_\xi \xi = 0$$

elde edilir.

(4.1.7), (4.1.12) ve (4.1.16) eşitlikleri kullanılarak her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A^*_\xi X - \tau(X)\xi - \varepsilon\psi(X)L \tag{4.1.21}$$

bulunur.

Tanım 4.1.9 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifold ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için $\tilde{\nabla}_X \xi \in \Gamma(TM)$ ise M ye irrasyonel half lightlike altmanifold denir (Kupeli, 1996).

M, $\tilde{M}$ nin lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda (4.1.16) ve (4.1.21) eşitlikleri kullanılarak irrasyonel tanımını

$$\psi(X) = D(X,\xi) = 0, \tag{4.1.22}$$

ile de ifade edebiliriz.

Tanım 4.1.10 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X,Y) = Hg(X,Y) \tag{4.1.23}$$

olacak şekilde $tr(TM)$ üzerinde H diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa M ye tamamen umbilik half-lightlike altmanifold denir.

(M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda yukarıdaki tanıma göre M nin tamamen umbilik olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X,Y) = \lambda g(X,Y), D(X,Y) = \delta g(X,Y) \tag{4.1.24}$$

olacak şekilde $ltr(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$ üzerinde λ ve δ diferensiyellenebilir fonksiyonlarının olmasıdır (Duggal ve Jin, 1999).

Tanım 4.1.11 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X,Y) = 0 \tag{4.1.25}$$

ise M ye tamamen geodezik half-lightlike altmanifold denir.

M nin tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$B(X,Y) = D(X,Y) = 0 \tag{4.1.26}$$

olmasıdır.

Tanım 4.1.12 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. M nin herhangi bir $U \subset M$ koordinat komşuluğu üzerinde

$$C(X,QY) = \gamma g(X,Y), \forall X,Y \in \Gamma(TM) \tag{4.1.27}$$

olacak şekilde γ diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa $S(TM)$ ekran distribüsyonuna tamamen umbiliktir (Duggal ve Jin, 1999).

Tanım 4.1.13 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. M nin herhangi bir $U \subset M$ koordinat komşuluğu ve her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$C(X,QY) = 0 \tag{4.1.28}$$

ise $S(TM)$ ekran distribüsyonuna tamamen geodeziktir (Duggal ve Jin, 1999).

Teorem 4.1.14 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $S(TM)$ screen distribüsyonu integrallenebilirdir.

ii) $S(TM)$ nin ikinci temel formu, $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetriktir.

iii) $\tilde{M}$ nin M immersiyonunun A_N şekil operatörü, $\tilde{g}$ ye göre $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetriktir (Duggal ve Bejancu, 1992).

Teorem 4.1.15 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) ∇, M üzerinde metrik konneksiyondur.

ii) B, M üzerinde sıfırdır.

iii) A^*_ξ, M üzerinde sıfırdır.

iv) ξ bir Killing vektör alanıdır.

v) $TM^\perp$, ∇ ya göre paralel distribüsyondur (Duggal ve Bejancu, 1992)

Önerme 4.1.16 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. $\tilde{R}$, R ve R^*, sırasıyla, $\tilde{\nabla}$, ∇ ve ∇^* nin eğrilik tensörü olsun.

M ve $S(TM)$ için Gauss ve Codazzi denklemleri her $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,QW) &= g(R(X,Y)Z,QW) \\ &\quad +B(X,Z)C(Y,QW)-B(Y,Z)C(X,QW) \\ &\quad +\varepsilon\{D(X,Z)D(Y,QW)-D(Y,Z)D(X,QW)\}, \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= (\nabla_X B)(Y,Z)-(\nabla_Y B)(X,Z) \\ &\quad +B(Y,Z)\tau(X)-B(X,Z)\tau(Y) \\ &\quad +D(Y,Z)\psi(X)-D(X,Z)\psi(Y), \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,N) &= g(R(X,Y)Z,N) \\ &\quad +\varepsilon\{D(X,Z)\rho(Y)-D(Y,Z)\rho(X)\}, \end{aligned} \tag{4.1.31}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,N) &= g(A^*_\xi X,A_N Y)-g(A^*_\xi Y,A_N X) \\ &\quad -2d\tau(X,Y)+\rho(X)\psi(Y)-\rho(Y)\psi(X), \end{aligned} \tag{4.1.32}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(R(X,Y)QZ,QW) &= g(R^*(X,Y)QZ,QW)+C(X,QZ)B(Y,QW) \\ &\quad -C(Y,QZ)B(X,QW), \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(R(X,Y)QZ,N) &= (\nabla_X C)(Y,QZ)-(\nabla_Y C)(X,QZ) \\ &\quad +C(X,QZ)\tau(Y)-C(Y,QZ)\tau(X) \end{aligned} \tag{4.1.34}$$

olur.

4.2 Altın Semi-Riemann Manifoldların Half Lightlike Altmanifoldları

$(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$, $(m+2)-$boyutlu bir altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin bir half lightlike altmanifoldu olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $L \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ için

$$\tilde{P}X = PX + u(X)N + w(X)L, \quad (4.2.1)$$

$$\tilde{P}N = U + u(N)N + w(N)L, \quad (4.2.2)$$

$$\tilde{P}L = W + u(L)N + w(L)L \quad (4.2.3)$$

yazabiliriz. Burada $PX,U,W \in \Gamma(TM)$, u ve w

$$u(.) = g(.,\tilde{P}\xi), w(.) = \varepsilon g(.,\tilde{P}L) \quad (4.2.4)$$

ile tanımlanan $1-$formlardır.

Lemma 4.2.1 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu M, $\tilde{M}$ nin lightlike altmanifoldu olsun. O zaman her $X,Y \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $L \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ için

$$P^2X = PX + X - u(X)U - w(X)W, \quad (4.2.5)$$

$$u(PX) = u(X)(1-u(N)) - w(X)u(L), \quad (4.2.6)$$

$$w(PX) = w(X)(1-w(L)) - u(X)w(N), \quad (4.2.7)$$

$$PU = (1-u(N))U - w(N)W, \quad (4.2.8)$$

$$u(U) = 1 + u(N) - (u(N))^2 - w(N)u(L), \quad (4.2.9)$$

$$w(U) = w(N)(1-u(N)) - w(N)w(L), \quad (4.2.10)$$

$$PW = (1 - w(L))W - u(L)U, \tag{4.2.11}$$

$$u(W) = u(L)(1 - u(N) - w(L)), \tag{4.2.12}$$

$$w(W) = 1 + w(L) - (w(L))^2 - u(L)w(N), \tag{4.2.13}$$

$$g(PX,Y) - g(X,PY) = (\eta \otimes u - u \otimes \eta)(X,Y), \tag{4.2.14}$$

$$\begin{aligned} g(PX,PY) &= g(PX,Y) + g(X,Y) + u(X)\eta(Y) - \eta(PX)u(Y) \\ &\quad -u(X)\eta(PY) - \varepsilon w(X)w(Y) \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

dir.

İspat: (4.2.1) eşitliğinin her iki tarafına $\tilde{P}$ uygulanıp (2.3.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & P^2X + u(PX)N + w(PX)L + u(X)(U + u(N)N + w(N)L) \\ & +w(X)(W + u(L)N + w(L)L) \\ = \; & PX + u(X)N + w(X)L + X \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin teğet, lightlike transversal ve ekran transversal bileşenleri alınırsa (4.2.5), (4.2.6) ve (4.2.7) eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde, (4.2.2) ve (4.2.3) eşitliğinin her iki tarafına $\tilde{P}$ uygulanıp (2.3.1) eşitliği kullanılırsa elde edilen eşitliğin teğet, lightlike transversal ve ekran transversal bileşenleri alınırsa (4.2.8)-(4.2.13) arası eşitlikler elde edilir. (2.3.4), (2.3.5) ve (4.2.1) eşitlikleri kullanılarak

$$g(PX,Y) + u(X)\eta(Y) = g(X,PY) + u(Y)\eta(X),$$

ve

$$\begin{aligned} & g(PX,PY) + u(X)\eta(PY) + \eta(PX)u(Y) + \varepsilon w(X)w(Y) \\ = \; & g(PX,Y) + u(X)\eta(Y) + g(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. Son iki eşitlikten sırasıyla (4.2.14) ve (4.2.15) eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.2 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu M, $\tilde{M}$ nin lightlike altmanifoldu olsun. O zaman her $X,Y \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$ ve $L \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ için

$$(\nabla_X P)Y = u(Y)A_N X + w(Y)A_L X + B(X,Y)U + D(X,Y)W, \tag{4.2.16}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_X u)Y &= -B(X,PY) - \tau(X)u(Y) - \psi(X)w(Y) \\ &\quad + B(X,Y)u(N) + D(X,Y)u(L),\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

$$(\nabla_X w)Y = -D(X,PY) - \rho(X)u(Y) + B(X,Y)w(N) + D(X,Y)w(L), \tag{4.2.18}$$

$$\nabla_X U = -PA_N X + \tau(X)U + \rho(X)W + u(N)A_N X + w(N)A_L X, \tag{4.2.19}$$

$$B(X,U) = -X(u(N)) - \psi(X)w(N) - u(A_N X) + \rho(X)u(L), \tag{4.2.20}$$

$$\begin{aligned}D(X,U) &= -X(w(N)) - \rho(X)u(N) - w(A_N X) \\ &\quad + \tau(X)w(N) + \rho(X)w(L),\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

$$\nabla_X W = -PA_L X + u(L)A_N X + w(L)A_L X + \psi(X)U, \tag{4.2.22}$$

$$\begin{aligned}B(X,W) &= -\tau(X)u(L) - \psi(X)w(L) - u(A_L X) \\ &\quad + \psi(X)u(N) - X(u(L)),\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

$$D(X,W) = -\rho(X)u(L) - X(w(L)) - w(A_L X) + \psi(X)w(N) \tag{4.2.24}$$

dir.

İspat: $\tilde{\nabla}\tilde{P} = 0$ olduğunu kabul etmiştik. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\tilde{\nabla}_X \tilde{P} Y = \tilde{P} \tilde{\nabla}_X Y$ oluşu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& \nabla_X PY + B(X,PY)N + D(X,PY)L + X(u(Y))N \\
& + u(Y)(-A_N X + \tau(X)N + \rho(X)L) + X(w(Y))L + w(Y)(-A_L X + \psi(X)N) \\
= \; & P\nabla_X Y + u(\nabla_X Y)N + w(\nabla_X Y)L + B(X,Y)(U + u(N)N + w(N)L) \\
& + D(X,Y)(W + u(L)N + w(L)L)
\end{aligned}
$$

dir. Bu eşitliğin teğet, lightlike transversal ve ekran transversal bileşenleri alınırsa (4.2.16), (4.2.17) ve (4.2.18) elde edilir. Benzer şekilde, $\tilde{\nabla}_X \tilde{P} N = \tilde{P} \tilde{\nabla}_X N$ ve $\tilde{\nabla}_X \tilde{P} L = \tilde{P} \tilde{\nabla}_X L$ olduğu kullanılarak (4.2.19)-(4.2.24) arası eşitlikler elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.2.3 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu M, $\tilde{M}$ nin half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer :

i) $\tilde{P}(TM) \subset TM$ ise M ye invaryant half lightlike altmanifoldu

ii) $\tilde{P}Rad(TM) \subset S(TM)$, $\tilde{P}ltr(TM) \subset S(TM)$ and $\tilde{P}S(TM^{\perp}) \subset S(TM)$ ise M ye screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu

iii) $\tilde{P}Rad(TM) \subset ltr(TM)$ ise M ye radikal anti-invaryant half lightlike altmanifoldu denir.

Teorem 4.2.4 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu M, $\tilde{M}$ nin half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

i) M, P invaryanttır.

ii) u ve *w*, *M* üzerinde sıfırdır.

iii) P, M üzerinde bir altın yapıdır.

İspat: M nin invaryant olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(TM)$ için $\tilde{P}X = PX$ olmasıdır. O zaman (4.2.1) den $u(X) = w(X) = 0$ bulunur. Böylece (i)⇔(ii) elde edilir.

u ve w nun M üzerinde sıfır olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(TM)$ için $\tilde{P}X = PX$ olmasıdır. O zaman

$$P^2X = P(PX) = \tilde{P}(\tilde{P}X) = \tilde{P}X + X = PX + X$$

ve

$$g(PX,Y) = \tilde{g}(\tilde{P}X,Y) = \tilde{g}(X,\tilde{P}Y) = g(X,PY)$$

bulunur. Böylece P, M üzerinde bir altın yapıdır ve buradan (ii)⇔(iii) elde edilir.

Teorem 4.2.5 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldunun radikal anti-invaryant half lightlike altmanifoldu yoktur.

İspat: $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu M, $\tilde{M}$ nin radikal anti-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Radikal anti-invaryant half lightlike altmanifold tanımından $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için $\tilde{P}\xi \in \Gamma(ltrTM)$ dir. (2.3.5) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{P}\xi,\tilde{P}\xi) &= \tilde{g}(\tilde{P}\xi,\xi) + \tilde{g}(\xi,\xi)\\ 0 &= \tilde{g}(\tilde{P}\xi,\xi) + 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\tilde{g}(\tilde{P}\xi,\xi) = 0$ ve $\tilde{P}\xi \notin \Gamma(ltrTM)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Buradan ispat tamamlanır.

4.3 Altın Semi-Riemann Manifoldların Screen Semi-İnvaryant Half Lightlike Altmanifoldları

$(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$, $(m+2)$-boyutlu altın semi-Riemann manifoldu ve $(M,g,S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer

$$D_1 = \tilde{P}RadTM, D_2 = \tilde{P}ltr(TM), D_3 = \tilde{P}S(TM^{\perp})$$

olarak alınırsa aşağıdaki ayrışıma sahip oluruz;

$$S(TM) = D_0 \perp \{D_1 \oplus D_2\} \perp D_3 \tag{4.3.1}$$

burada D_0, $(m-4)-$boyutlu distribüsyondur. Eğer

$$D = D_0 \perp RadTM \perp \tilde{P}RadTM \text{ ve } D^{\perp} = D_2 \perp D_3 \tag{4.3.2}$$

olarak alınırsa aşağıdaki ayrışımlara sahip oluruz;

$$TM = D \oplus D^{\perp}, \tag{4.3.3}$$

$$T\tilde{M} = \{D \oplus D^{\perp}\} \oplus ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}). \tag{4.3.4}$$

U, V ve W

$$U = \tilde{P}N,\ V = \tilde{P}\xi,\ W = \tilde{P}L \tag{4.3.5}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanları olsun.

$(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve $(M,g,S(TM))$, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Lemma 4.2.1 ve 4.2.2 kullanılarak her $X,Y \in \Gamma(TM)$, $U \in \Gamma(D_2)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_3)$ için

$$P^2X = PX + X - u(X)U - w(X)W, \tag{4.3.6}$$

$$u(PX) = u(X), w(PX) = w(X), PU = U, PW = W, \tag{4.3.7}$$

$$u(U) = 1, w(U) = 0, u(W) = 0, w(W) = 1, \tag{4.3.8}$$

$$g(PX,Y) - g(X,PY) = (\eta \otimes u - u \otimes \eta)(X,Y), \tag{4.3.9}$$

$$\begin{aligned} g(PX,PY) &= g(PX,Y) + g(X,Y) + \eta(PX)u(Y) \\ &\quad -u(X)\eta(PY) - \varepsilon w(X)w(Y), \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

$$(\nabla_X P)Y = u(Y)A_N X + w(Y)A_L X + B(X,Y)U + D(X,Y)W, \tag{4.3.11}$$

$$(\nabla_X u)Y = -B(X,PY) - u(Y)\tau(X) - \psi(X)w(Y), \tag{4.3.12}$$

$$(\nabla_X w)Y = -D(X,PY) - \rho(X)u(Y), \tag{4.3.13}$$

$$\nabla_X U = -PA_N X + \tau(X)U + \rho(X)W, \tag{4.3.14}$$

$$\nabla_X W = -PA_L X + \psi(X)U, \tag{4.3.15}$$

$$B(X,U) = -C(X,V), B(X,W) = -\varepsilon D(X,V), \varepsilon D(X,U) = -C(X,W), \tag{4.3.16}$$

$$D(X,W) = 0 \tag{4.3.17}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_X V = \tilde{\nabla}_X \tilde{P}\xi = \tilde{P}\tilde{\nabla}_X \xi \tag{4.3.18}$$

olduğundan (4.1.7), (4.1.21) ve (4.2.1) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X V &= \nabla_X V + B(X,V)N + D(X,V)L = -PA^*_\xi X - u(A^*_\xi X)N \\ &\quad -w(A^*_\xi X)L - \tau(X)V - \varepsilon\psi(X)W \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

bulunur. Buradan eşitliğin teğet ve lightlike transversal bileşenleri alınırsa

$$\nabla_X V = -PA^*_\xi X - \tau(X)V - \varepsilon\psi(X)W \tag{4.3.20}$$

ve

$$B(X,V) = -u(A^*_\xi X)$$

olur. Son eşitlikte (4.1.17) ve (4.2.4) eşitlikleri kullanılırsa $B(X,V) = -u(A^*_\xi X) = -g(A^*_\xi X,V) = -B(X,V)$ olup

$$B(X,V) = 0 \tag{4.3.21}$$

bulunur. Diğer taraftan $\tilde{g}(U,N) = \tilde{g}(\tilde{P}N,N) = 0$ olup, $\tilde{\nabla}$ nın metrik konneksiyon oluşu (2.3.4), (4.1.7) ve (4.1.11) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} 0 &= X\tilde{g}(U,N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X U,N) + \tilde{g}(U,\tilde{\nabla}_X N) \\ &= C(X,U) + \tilde{g}(N,\tilde{P}\tilde{\nabla}_X N) \\ &= C(X,U) + \tilde{g}(N,\tilde{\nabla}_X \tilde{P}N) \\ &= 2C(X,U) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$C(X,U) = 0 \tag{4.3.22}$$

olur.

Sonuç 4.3.1 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman, V vektör alanının M üzerinde

$$B(X,V) = 0$$

dir. Yani, V vektör alanı half lightlike altmanifoldun ikinci temel formunu dejenere yapar.

Sonuç 4.3.2 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman, A^*_ξ nin D_2 de bileşeni yoktur.

İspat: (4.1.17) ve (4.3.21) eşitliklerinden $B(X,V) = g(A^*_\xi X,V) = 0$ olur. Buradan ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.3 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman, A_N nin D_1 de bileşeni yoktur.

İspat: (4.1.18) ve (4.3.22) eşitliklerinden $C(X,U) = g(A_N X,U) = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.4 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman, A_L nin D_3 de bileşeni yoktur.

İspat: (4.1.19) ve (4.3.17) eşitliklerinden $\varepsilon D(X,W) = g(A_L X,W) = 0$ olur. Buradan ispat tamamlanır.

Önerme 4.3.5 D_0 distribüsyonu $\tilde{P}$ ye göre invaryant distribüsyondur.

İspat: Her $X \in \Gamma(D_0)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $L \in \Gamma(S(TM^\perp))$ için

$$\begin{aligned} g(\tilde{P}X,\xi) &= g(X,\tilde{P}\xi) = 0 \\ g(\tilde{P}X,N) &= g(X,\tilde{P}N) = 0 \\ g(\tilde{P}X,L) &= g(X,\tilde{P}L) = 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece $\tilde{P}X$ in $RadTM$, $ltr(TM)$ ve $S(TM^\perp)$ de bileşenleri yoktur. Ayrıca her

$X \in \Gamma(D_0)$, $U \in \Gamma(D_2)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_3)$ için

$$\begin{aligned} g(\tilde{P}X,U) &= g(X,\tilde{P}U) = \tilde{g}(X,\tilde{P}^2N) = g(X,\tilde{P}N) + g(X,N) = 0 \\ g(\tilde{P}X,V) &= g(X,\tilde{P}V) = \tilde{g}(X,\tilde{P}^2\xi) = g(X,\tilde{P}\xi) + g(X,\xi) = 0 \\ g(\tilde{P}X,W) &= g(X,\tilde{P}W) = \tilde{g}(X,\tilde{P}^2L) = g(X,\tilde{P}L) + g(X,L) = 0 \end{aligned}$$

olur. Şu halde $\tilde{P}X$ in D_1, D_2 ve D_3 de bileşenleri yoktur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.6 D distribüsyonu $\tilde{P}$ ye göre invaryant distribüsyondur.

Örnek 4.3.7 $(\tilde{M} = \mathbb{R}^7_3, \tilde{g})$ bir $(-,+-,+,+,+,-)$ işaretli semi-Öklidyen uzay ve $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, $\mathbb{R}^7_3$ in standart koordinat sistemi olsun. Eğer $\tilde{P}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = (\phi x_1, \phi x_2, (1-\phi)x_3, (1-\phi)x_4, \phi x_5, (1-\phi)x_6, \phi x_7)$ olarak tanımlanırsa $\tilde{P}^2 = \tilde{P} + I$ dır ve $\tilde{P}$, $\mathbb{R}^7_3$ üzerinde bir altın yapıdır. $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldunun altmanifoldu

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 + \phi t_2 - \frac{\phi}{2(2+\phi)} t_3,\ x_2 = t_1 + \phi t_2 + \frac{\phi}{2(2+\phi)} t_3, \\ x_3 &= \phi t_1 - t_2 + \frac{1}{2(2+\phi)} t_3,\ x_4 = \phi t_1 - t_2 - \frac{1}{2(2+\phi)} t_3, \\ x_5 &= \sqrt{2}\phi t_4 + t_5,\ x_6 = -t_4,\ x_7 = \phi t_4 + \sqrt{2} t_5 \end{aligned}$$

ile verilsin. Burada t_i, $1 \le t_i \le 5$ reel parametrelerdir. Bu durumda M nin tanjant demeti için

$$TM = Sp\{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \phi\frac{\partial}{\partial x_3} + \phi\frac{\partial}{\partial x_4},\ U_2 = \phi\frac{\partial}{\partial x_1} + \phi\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}, \\ U_3 &= -\frac{1}{2(2+\phi)}(\phi\frac{\partial}{\partial x_1} - \phi\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}),\ U_4 = \sqrt{2}\phi\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{\partial}{\partial x_6} + \phi\frac{\partial}{\partial x_7}, \\ U_5 &= \frac{\partial}{\partial x_5} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_7} \end{aligned}$$

olarak verilir ve M bir half lightlike altmanifolddur. Buradan kolayca görülür ki U_1 bir dejenere vektördür. $\xi = U_1$ olarak alınırsa $RadTM = Sp\{\xi\}$ ve $S(TM) = Sp\{U_2, U_3, U_4, U_5\}$ dir. Bu durumda

$$ltr(TM) = Sp\{N = -\frac{1}{2(2+\phi)}(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} + \phi\frac{\partial}{\partial x_3} - \phi\frac{\partial}{\partial x_4})\}$$

ve

$$S(TM^{\perp}) = Sp\{L = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_5} + \phi\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{\partial}{\partial x_7}\}$$

dır. M, $\tilde{M}$ nin $1-$lightlike altmanifoldudur. Ayrıca

$$\tilde{P}\xi = U_2,\ \tilde{P}N = U_3,\ \tilde{P}L = U_4$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D_0 &= Sp\{U_5\},\ D_1 = Sp\{U_2\}, \\ D_2 &= Sp\{U_3\},\ D_3 = Sp\{U_4\} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu durumda M, $\tilde{M}$ nin bir screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldudur.

Örnek 4.3.8 Let $(\tilde{M} = \mathbb{R}^8_2, \tilde{g})$ bir $(+,+,-,+,-,+,+,+)$ işaretli semi-Öklidyen uzay ve $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$, $\mathbb{R}^8_2$ in standart koordinat sistemi olsun. Eğer

$\tilde{P}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = (\phi x_1,\phi x_2,\phi x_3,\phi x_4,(1-\phi)x_5,\phi x_6,(1-\phi)x_7,(1-\phi)x_8)$ olarak tanımlanırsa $\tilde{P}^2=\tilde{P}+I$ dır ve $\tilde{P}$, $\mathbb{R}^8_2$ üzerinde bir altın yapıdır. M altmanifoldu

$$\begin{aligned}
x_1 &= t_1+t_4+\phi t_5+t_6,\ x_2=-t_2+t_4+\phi t_5,\\
x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}t_1+\frac{1}{\sqrt{2}}t_2+\sqrt{2}t_4+\sqrt{2}\phi t_5+\frac{1}{\sqrt{2}}t_6,\ x_4=\frac{1}{2}\log(1+(t_1-t_2)^2),\\
x_5 &= (1-\phi)t_2+\phi t_4-t_5,\ x_6=\phi t_3,\ x_7=-(1-\phi)t_2+\phi t_4-t_5,\ x_8=t_3
\end{aligned}$$

ile verilsin. Burada t_i, $1\le t_i\le 6$, reel parametrelerdir. Bu durumda $TM = Sp\{U_1,U_2,U_3,U_4,U_5,U_6\}$ elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{(t_1-t_2)}{(1+(t_1-t_2)^2)}\frac{\partial}{\partial x_4},\\
U_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{(t_1-t_2)}{(1+(t_1-t_2)^2)}\frac{\partial}{\partial x_4}+(1-\phi)\frac{\partial}{\partial x_5}-(1-\phi)\frac{\partial}{\partial x_7},\\
U_3 &= \phi\frac{\partial}{\partial x_6}+\frac{\partial}{\partial x_8},\ U_4=\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_3}+\phi\frac{\partial}{\partial x_5}+\phi\frac{\partial}{\partial x_7},\\
U_5 &= \phi\frac{\partial}{\partial x_1}+\phi\frac{\partial}{\partial x_2}+\sqrt{2}\phi\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_5}-\frac{\partial}{\partial x_7},\ U_6=\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

dır. Buradan U_4 in bir dejenere vektör olduğu kolayca görülür ve M, $\tilde{M}$ nin $8-$boyutlu $1-$lightlike altmanifoldudur. $\xi=U_4$ olarak alınırsa $RadTM=Sp\{\xi\}$ ve $S(TM)=Sp\{W_1=U_1,W_2=U_5,W_3=-\frac{\phi}{2(2+\phi)}(U_1+U_2),W_4=U_3,W_5=U_6\}$ dır. Bu durumda

$$ltr(TM)=Sp\{N=-\frac{1}{2(2+\phi)}(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}+\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_3}+\phi\frac{\partial}{\partial x_5}-\phi\frac{\partial}{\partial x_7})\}$$

ve

$$S(TM^{\perp})=Sp\{L=\frac{\partial}{\partial x_6}-\phi\frac{\partial}{\partial x_8}\}$$

şeklinde elde edilir. Bu yüzden M, $\tilde{M}$ nin half lightlike altmanifoldudur. Üstelik

$$\tilde{P}\xi=W_2,\ \tilde{P}N=W_3,\ \tilde{P}L=W_4$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D_0 &= Sp\{W_1,W_5\},\ D_1 = Sp\{W_2\}, \\ D_2 &= Sp\{W_3\},\ D_3 = Sp\{W_4\} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda M, $\tilde{M}$ nin bir screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldudur.

Teorem 4.3.9 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer D_0 distribüsyonu M üzerinde integrallenebilir ise, o zaman D_0 distribüsyonunun lifi üzerine indirgenen $(1,1)-$tensör alanı altın yapıdır.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu M', D_0 ın lifi olsun. O zaman her $p \in M'$ için $T_pM' = (D_0)_p$ dır. Her $X \in \Gamma(D)$ için $u(X) = w(X) = 0$ olup (4.2.1) eşitliğinden $\tilde{P}X = PX$ dir.

P' ile tanımlanan M' üzerinde $(1,1)-$tensör alanı olsun. D_0 distribüsyonu $\tilde{P}$-invaryant olduğu için $P' = P_{|D_0}$ dır. (2.3.1) eşitliğinden

$$P'^2X = P^2X = \tilde{P}^2X = \tilde{P}X + X = PX + X = P'X + X$$

olup P', D_0 distribüsyonunun lifi üzerinde bir altın yapıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.3.10 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer D distribüsyonu M üzerinde integrallenebilir ise, o zaman D distribüsyonunun lifi üzerine indirgenen $(1,1)-$tensör alanı altın yapıdır.

Teorem 4.3.11 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman D_0 distribüsyonunun M

üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$
\begin{aligned}
B(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) &= B(X,\tilde{P}Y)+B(X,Y), \\
C(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) &= C(Y,\tilde{P}X)+C(X,Y), \\
D(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) &= D(X,\tilde{P}Y)+D(X,Y), \\
C(\tilde{P}X,Y) &= C(Y,\tilde{P}X)
\end{aligned} \tag{4.3.23}
$$

olmasıdır.

İspat: D_0 distribüsyonu invaryant olduğundan $X \in \Gamma(D_0)$ için $\tilde{P}X \in \Gamma(D_0)$ dir. O zaman D_0 distribüsyonunun M üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \Gamma(D_0)$, $U \in \Gamma(D_1)$, $V \in \Gamma(D_2)$ ve $W \in \Gamma(D_3)$ için

$$u([\tilde{P}X,Y]) = v([\tilde{P}X,Y]) = w([\tilde{P}X,Y]) = \eta([\tilde{P}X,Y]) = 0$$

olmasıdır. Burada v

$$v(X) = g(X,\tilde{P}N) \tag{4.3.24}$$

ile tanımlanan $1-$formdur.

Bu durumda (2.3.5), (4.1.7) ve (4.1.11) eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
u([\tilde{P}X,Y]) &= \tilde{g}([\tilde{P}X,Y],\tilde{P}\xi) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y - \tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}\xi) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y,\tilde{P}\xi) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}\xi) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}\tilde{P}Y,\xi) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\xi) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_YX,\xi) \\
&= B(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) - B(Y,\tilde{P}X) - B(Y,X),
\end{aligned} \tag{4.3.25}
$$

$$\begin{aligned}
v([\tilde{P}X,Y]) &= \tilde{g}([\tilde{P}X,Y],\tilde{P}N) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y-\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}N)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y,\tilde{P}N)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}N)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}\tilde{P}Y,N)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,N)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_YX,N)\\
&= C(\tilde{P}X,\tilde{P}Y)-C(Y,\tilde{P}X)-C(Y,X),
\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

$$\begin{aligned}
w([\tilde{P}X,Y]) &= \tilde{g}([\tilde{P}X,Y],\tilde{P}L) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y-\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}L)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y,\tilde{P}L)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}L)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}\tilde{P}Y,L)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,L)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_YX,L)\\
&= \varepsilon D(\tilde{P}X,\tilde{P}Y)-\varepsilon D(Y,\tilde{P}X)-\varepsilon D(Y,X),
\end{aligned} \tag{4.3.27}$$

$$\begin{aligned}
\eta([\tilde{P}X,Y]) &= \tilde{g}([\tilde{P}X,Y],N) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y-\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,N)\\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y,N)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,N)\\
&= C(\tilde{P}X,Y)-C(Y,\tilde{P}X)
\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

bulunur. Böylece (4.3.25), (4.3.26), (4.3.27) ve (4.3.28) eşitliklerinden ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.12 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman D distribüsyonunun M üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}
B(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) &= B(X,\tilde{P}Y)+B(X,Y),\\
D(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) &= D(X,\tilde{P}Y)+D(X,Y)
\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

olmasıdır.

İspat: D distribüsyonu invaryant olduğundan $X \in \Gamma(D)$ için $\tilde{P}X \in \Gamma(D)$ dir. O zaman D distribüsyonunun M üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(D)$, $V \in \Gamma(D_2)$ ve $W \in \Gamma(D_3)$ için için

$$\begin{aligned} u(\left[\tilde{P}X, Y\right]) &= \tilde{g}(\left[\tilde{P}X, Y\right], V) = 0, \\ w(\left[\tilde{P}X, Y\right]) &= \tilde{g}(\left[\tilde{P}X, Y\right], W) = 0 \end{aligned}$$

olmasıdır. Böylece (4.3.25) ve (4.3.27) eşitliklerinden ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.13 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

i) D distribüsyonu paraleldir.

ii) $B(X, \tilde{P}Y) = D(X, \tilde{P}Y) = 0, X, Y \in \Gamma(D)$,

iii) $(\nabla_X P)Y = 0, X, Y \in \Gamma(D)$.

İspat: O zaman D distribüsyonunun M üzerinde paralel olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(D)$, $V \in \Gamma(D_1)$, $W \in \Gamma(D_3)$ için

$$u(\nabla_X Y) = 0, w(\nabla_X Y) = 0$$

olmasıdır. Buradan

$$\begin{aligned} u(\nabla_X Y) &= g(\nabla_X Y, V) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, V) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \tilde{P}\xi) = B(X, \tilde{P}Y), \\ w(\nabla_X Y) &= g(\nabla_X Y, W) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, W) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \tilde{P}L) = \varepsilon D(X, \tilde{P}Y) \end{aligned}$$

bulunur ve (i)$\Leftrightarrow$(ii) dır. $X, Y \in \Gamma(D)$ için $u(Y) = w(Y) = 0$ oluşu (4.3.11) eşitliği kullanılırsa

$$(\nabla_X P)Y = B(X, Y)U + D(X, Y)W$$

olur. Böylece (ii)$\Leftrightarrow$(iii) elde edilir.

Teorem 4.3.14 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman M nin tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart her $X\in\Gamma(TM)$, $Y\in\Gamma(D)$, $U\in\Gamma(D_2)$ ve $W\in\Gamma(D_3)$ için

$$(\nabla_X P)Y = 0, \quad (4.3.30)$$

$$(\nabla_X P)U = A_N X, \quad (4.3.31)$$

$$(\nabla_X P)W = A_L X \quad (4.3.32)$$

olmasıdır.

İspat: M nin tamamen geodezik olduğunu varsayalım. Her $Y\in\Gamma(D)$ için $u(Y)=w(Y)=0$ olur ve (4.3.11) eşitliğinden $(\nabla_X P)Y=0$ bulunur. (4.3.11) eşitliğinde $Y=U$ alınırsa $(\nabla_X P)U=A_N X$ olur. Benzer şekilde (4.3.11) eşitliğinde Y yerine W yazılırsa $(\nabla_X P)W=A_L X$ elde edilir.

Tersine, (4.3.30), (4.3.31) ve (4.3.32) eşitliklerinin olduğunu varsayalım. $Y\in\Gamma(TM)$ için (4.3.3) ayrışımı kullanılırsa $Y=Y_d+fU+hW$ olacak biçimde $Y_d\in\Gamma(D)$, f ve h fonksiyonları vardır. Buradan $Y\in\Gamma(TM)$ için

$$B(X,Y) = B(X,Y_d)+fB(X,U)+hB(X,W), \quad (4.3.33)$$

$$D(X,Y) = D(X,Y_d)+fD(X,U)+hD(X,W) \quad (4.3.34)$$

olur. (4.3.11) eşitliğinde Y yerine Y_d alınırsa ve (4.3.30) eşitliği kullanılırsa $B(X,Y_d)U+D(X,Y_d)W=-u(Y_d)A_N X-w(Y_d)A_L X=0$ bulunur. Bu eşitlik sırasıyla V ve W ile çarpılırsa $B(X,Y_d)=D(X,Y_d)=0$ bulunur. (4.3.11) eşitliğinde Y yerine U yazılırsa ve (4.3.31) eşitliği kullanılırsa $B(X,U)U+D(X,U)W=0$ bulunur. Bu eşitlik sırasıyla V ve W ile çarpılırsa $B(X,U)=D(X,U)=0$ bulunur.

(4.3.17) eşitliğinden $D(X,W)=0$ idi. Benzer şekilde (4.3.11) eşitliğinde Y yerine W yazılırsa, (4.3.17) ve (4.3.32) eşitlikleri kullanılırsa $B(X,W)U=0$ olur. Bu eşitlik V ile çarpılırsa $B(X,W)=0$ bulunur. Buradan (4.3.33) ve (4.3.34) eşitlikleri dikkate alınırsa $B(X,Y)=D(X,Y)=0$ olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 4.3.15 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer her $X\in\Gamma(D)$ ve $Y\in\Gamma(D^{\perp})$ için

$$B(X,Y)=D(X,Y)=0 \qquad (4.3.35)$$

ise M ye mixed geodezik half lightlike altmanifold denir.

Teorem 4.3.16 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $X\in\Gamma(D)$ ve $Y\in\Gamma(D^{\perp})$ için aşağıdakiler denktir.

i) M mixed geodeziktir.

ii) $A_{\tilde{P}Y}X$ nin D_2 ve D_3 de bileşeni yoktur.

iii) $(\nabla_Y P)X=0$.

İspat: M nin mixed geodezik olduğunu varsayalım. O zaman her $X\in\Gamma(D)$, $Y\in\Gamma(D^{\perp})$ için

$$B(X,Y)=D(X,Y)=0$$

dir. Bu durumda (2.3.5), (4.1.7) ve (4.1.8) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,\xi) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{P}Y,\tilde{P}\xi)-\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{P}Y,\xi) \qquad (4.3.36) \\ &= -\tilde{g}(A_{\tilde{P}Y}X,\tilde{P}\xi)-B(X,\tilde{P}Y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varepsilon D(X,Y) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, L) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{P}Y, \tilde{P}L) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{P}Y, L) \\ &= -\tilde{g}(A_{\tilde{P}Y}X, \tilde{P}L) - \varepsilon D(X, \tilde{P}Y) \end{aligned} \tag{4.3.37}$$

elde edilir. (4.3.36) ve (4.3.37) eşitliklerinden, sırasıyla,

$$B(X,Y) + B(X,\tilde{P}Y) = B(X,\tilde{P}^2Y) = -\tilde{g}(A_{\tilde{P}Y}X, \tilde{P}\xi)$$

ve

$$\varepsilon D(X,Y) + \varepsilon D(X,\tilde{P}Y) = \varepsilon D(X,\tilde{P}^2Y) = -\tilde{g}(A_{\tilde{P}Y}X, \tilde{P}L)$$

bulunur. Böylece (i)⇔(ii) ispatlanmış olur. $X \in \Gamma(D)$ ve $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için $u(X) = w(X) = 0$ olup (4.3.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (\nabla_Y P)X &= B(Y,X)U + D(Y,X)W \\ &= B(X,Y)U + D(X,Y)W \end{aligned}$$

olur. Böylece (ii)⇔(iii) ispatlanmış olur.

Teorem 4.3.17 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman M tamamen geodeziktir.

İspat: $(M,g,S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman (4.3.17) ve (4.3.21) eşitliğinden her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X,V) = D(X,W) = 0$$

idi. Böylece (4.1.24) eşitliğinden

$$B(X,V) = \lambda g(X,V) = 0, \tag{4.3.38}$$

$$D(X,W) = \delta g(X,W) = 0 \tag{4.3.39}$$

bulunur. (4.3.38) Y yerine U yazılırsa ve (4.3.39) eşitliğinde Y yerine W yazılırsa $\lambda = \delta = 0$ bulunur. Bu durumda $B = D = 0$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.18 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $S(TM)$ ekran distribusyonu tamamen umbilik ise, o zaman $S(TM)$ tamamen geodeziktir.

İspat: $S(TM)$ tamamen umbilik olsun. O zaman (4.1.27) ve (4.3.22) eşitliklerinden her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$C(X,U) = \gamma g(X,U) = 0 \tag{4.3.40}$$

bulunur. (4.3.40) eşitliğinde X yerine V alınırsa $\gamma = 0$ bulunur. Bu durumda $C = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.19 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M tamamen umbilik ise $c_p = c_q = 0$ dir.

İspat: M nin tamamen umbilik olduğunu varsayalım. Her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için (4.1.30) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \\ &\quad + B(Y,Z)\tau(X) - B(X,Z)\tau(Y) \\ &\quad + D(Y,Z)\psi(X) - D(X,Z)\psi(Y) \end{aligned}$$

idi. Bu eşitlikte Teorem 4.3.17 kullanılırsa

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) = 0 \tag{4.3.41}$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= (-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})\{g(\tilde{P}Y,Z)u(X)-g(\tilde{P}X,Z)u(Y)\}\\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c+\phi c_q}{4})\{g(Y,Z)u(X)\\ &\quad -g(X,Z)u(Y)\}\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

bulunur. (4.3.42) eşitliğinde, sırasıyla, $X=U$, $Y=\xi$, $Z=U$ ve $X=U$, $Y=V$, $Z=U$ alınırsa

$$\tilde{g}(\tilde{R}(U,\xi)U,\xi) = (-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}}) = 0 \tag{4.3.43}$$

ve

$$\tilde{g}(\tilde{R}(U,V)U,\xi) = (-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}}) + (-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4}) = 0 \tag{4.3.44}$$

elde edilir. Böylece (4.3.43) ve (4.3.44) eşitliklerinden $c_p = c_q = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.20 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve $(M,g,S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(S(TM))$ için

i) P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise o zaman $\rho(X) = \psi(X) = D(X,U) = 0$ ve

$$C(X,Z)u(Y) + \varepsilon D(X,Z)w(Y) + B(X,Y)v(Z) + D(X,Y)w(Z) = 0, \tag{4.3.45}$$

$$B(X,Y) = -C(X,V)u(Y) - \varepsilon D(X,V)w(Y), \quad (4.3.46)$$
$$D(X,Y) = -C(X,W)u(Y), \quad (4.3.47)$$

bulunur.

ii) V vektör alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise o zaman $\tau(X) = u(A^*_\xi X) = 0$ ve

$$A^*_\xi X = w(A^*_\xi X)W \text{ ve } w(A^*_\xi X) = -\varepsilon\psi(X), \quad (4.3.48)$$

olur.

iii) U vektör alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise o zaman

$$A_N X = u(A_N X)U + w(A_N X)W,\ u(A_N X) = \tau(X) \text{ ve } w(A_N X) = \rho(X) \quad (4.3.49)$$

bulunur.

iv) W vektör alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise o zaman $\rho(X) = w(A_L X) = 0$ ve

$$A_L X = \psi(X)U,\ u(A_L X) = \psi(X) \quad (4.3.50)$$

olur.

Ayrıca V, U ve W vektör alanlarının hepsi M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise o zaman $S(TM)$ M de tamamen geodezik ve τ ve ρ 1-formları M üzerinde sıfırdır.

İspat: P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için (4.3.11) eşitliğinin $Z \in \Gamma(S(TM))$ ile iç çarpımı alınırsa

$$g(A_N X,Z)u(Y) + g(A_L X,Z)w(Y) + B(X,Y)g(U,Z) + D(X,Y)g(W,Z) = 0$$

olur. Buradan (4.3.45) eşitliği elde edilir. (4.3.11) eşitliği V vektör alanı ile iç çarpımı alınırsa (4.3.46) eşitliği bulunur. Benzer şekilde (4.3.11) eşitliğinin W vektör alanı ile iç çarpımı alınıp (4.3.17) eşitliği kullanılırsa (4.3.47) eşitliği elde edilir. Ayrıca (4.3.11) eşitliği N ile iç çarpımı alınırsa

$$\varepsilon\rho(X)w(Y) = 0 \tag{4.3.51}$$

bulunur. (4.3.51) eşitliğinde Y yerine W alınırsa $\rho(X) = 0$ bulunur. (4.3.11) eşitliği U vektör alanı ile iç çarpımı alınıp

$$C(X,U)u(Y) + \varepsilon D(X,U)w(Y) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.3.22) eşitliği kullanılırsa

$$\varepsilon D(X,U)w(Y) = 0 \tag{4.3.52}$$

olur. (4.3.52) eşitliğinde Y yerine W yazılırsa $D(X,U) = 0$ bulunur. Ayrıca (4.3.47) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa

$$D(X,\xi) = -C(X,W)u(\xi)$$

olur. Buradan $D(X,\xi) = -\varepsilon\psi(X) = 0$ olup $\psi(X) = 0$ bulunur.

V vektör alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için (4.2.1) ve (4.3.20) eşitliklerinden

$$-\tilde{P}A^*_\xi X + u(A^*_\xi X)N + w(A^*_\xi X)L - \tau(X)V - \varepsilon\psi(X)W = 0$$

idi. (4.3.21) eşitliğinden $B(X,V) = g(A^*_\xi X, V) = u(A^*_\xi X) = 0$ oluşu yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa

$$-\tilde{P}A^*_\xi X + w(A^*_\xi X)L - \tau(X)V - \varepsilon\psi(X)W = 0 \tag{4.3.53}$$

olur. (4.3.53) eşitliğine $\tilde{P}$ uygulanırsa ve (2.3.1), (4.2.1) and (4.3.5) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} -PA^{*}_{\xi}X - A^{*}_{\xi}X - \tau(X)V + (w(A^{*}_{\xi}X) \\ -\varepsilon\psi(X))W - \tau(X)\xi - w(A^{*}_{\xi}X)L - \varepsilon\psi(X)L &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.54}$$

bulunur. (4.3.54) eşitliğinden (4.3.53) eşitliği çıkartılırsa

$$-A^{*}_{\xi}X + w(A^{*}_{\xi}X)W - \tau(X)\xi - w(A^{*}_{\xi}X)L - \varepsilon\psi(X)L = 0 \tag{4.3.55}$$

elde edilir. (4.3.55) nin teğet ve normal bileşenleri alınırsa

$$\tau(X) = 0,\ A^{*}_{\xi}X = w(A^{*}_{\xi}X)W \text{ ve } w(A^{*}_{\xi}X) = -\varepsilon\psi(X) \tag{4.3.56}$$

bulunur. Böylece (ii) elde edilir. Benzer şekilde (iii) ve (iv) de elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

V, U ve W vektör alanlarının hepsi M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. Bu durumda (iii) den $A_N X = u(A_N X)U + w(A_N X)W$ idi. (ii) ve (iii) den $u(A_N X) = \tau(X) = 0$ ve (iii) ve (iv) den $\rho(X) = w(A_N X) = 0$ bulunur. Böylece $A_N = 0$ yani $S(TM)$, M de tamamen geodezik olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.21 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman M irrasyoneldir.

İspat: Kabul edelim ki P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. O zaman Teorem 4.3.20 (i) den $\psi(X) = 0$ olup ispat açıktır.

Teorem 4.3.22 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman P ve V vektör alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise M, $\tilde{M}$ de total geodeziktir ve ρ, ψ ile τ 1-formları sıfırlanır.

İspat: P ve V vektör alanı M üzerinde paralel olduğunu varsayalım. O zaman Teorem 4.3.20 (i) ve (ii) den $\rho(X) = \psi(X) = \tau(X) = 0$ ve $A^*_\xi X = -\varepsilon\psi(X)W$ dir. Böylece $A^*_\xi = 0$ yani $B = 0$ bulunur. (4.3.47) eşitliğinde $Y \in \Gamma(D)$ alınırsa $D(X,Y) = -C(X,W)u(Y) = 0$ olur. Böylece her $Y \in \Gamma(D)$ için $D(X,Y) = 0$ bulunur. Ayrıca (4.3.17) eşitliğinden ve Teorem 4.3.20 (i) den $D(X,U) = D(X,W) = 0$ idi. (4.3.34) eşitliği dikkate alınırsa $D(X,Y) = 0$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.23 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman D ve $D^{\perp}$ distribüsyonları integrallenebilirdir ve M, $M^{\sharp} \times M^{\flat}$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada $M^{\sharp}$ ve $M^{\flat}$, sırasıyla, D ve $D^{\perp}$ nin lifidir.

İspat: P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre D ve $D^{\perp}$ nin paralel olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma(D_0)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için sırasıyla

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \xi, V) &= g(\nabla_X V, V) = g(\nabla_X Y, V) = 0, \\ g(\nabla_X \xi, W) &= g(\nabla_X V, W) = g(\nabla_X Y, W) = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z W, N) &= g(\nabla_Z W, U) = g(\nabla_Z W, Y) = 0, \\ g(\nabla_Z U, N) &= g(\nabla_Z U, U) = g(\nabla_Z U, Y) = 0 \end{aligned}$$

olmasıdır. (2.3.4), (2.3.5), (4.1.7), (4.1.21) eşitlikleri kullanılırsa her $X \in \Gamma(D)$ ve $Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \xi, V) &= B(X,V), \quad g(\nabla_X \xi, W) = \varepsilon D(X,V), \\ g(\nabla_X V, V) &= 0, \qquad\qquad g(\nabla_X V, W) = \varepsilon D(X,V) - \psi(X), \\ g(\nabla_X Y, V) &= B(X,\tilde{P}Y), \quad g(\nabla_X Y, W) = \varepsilon D(X,\tilde{P}Y) \end{aligned} \tag{4.3.57}$$

olur. (2.3.4), (2.3.5), (4.1.7), (4.1.9), (4.1.11) eşitlikleri, $\tilde{\nabla}$ nın metrik konneksiyon oluşu kullanılırsa her $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z W, N) &= -\varepsilon D(Z,U), \qquad\qquad g(\nabla_Z U, N) = C(Z,U), \\ g(\nabla_Z W, U) &= -\varepsilon D(Z,U) - \varepsilon\rho(Z), \quad g(\nabla_Z U, U) = 0, \\ g(\nabla_Z W, Y) &= -\varepsilon D(Z,\tilde{P}Y), \qquad\qquad g(\nabla_Z U, Y) = -C(Z,\tilde{P}Y) \end{aligned} \tag{4.3.58}$$

bulunur.

(4.3.21) eşitliğinden $B(X,V) = 0$ idi. (4.3.47) eşitliğinde Y yerine V alınırsa her $X \in \Gamma(TM)$ için $D(X,V) = 0$ elde edilir. D_0 invaryant olup $Y \in \Gamma(D_0)$ için $\tilde{P}Y \in \Gamma(D_0)$ olur. (4.3.46) ve (4.3.47) eşitliğinde Y yerine $\tilde{P}Y$ yazılırsa $B(X,\tilde{P}Y) = D(X,\tilde{P}Y) = 0$ bulunur. Teorem 4.3.20 (i) den her $X \in \Gamma(TM)$ için $\psi(X) = D(X,U) = \rho(X) = 0$ idi. (4.3.45) eşitliğinde $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için Y yerine, sırasıyla, $U \in \Gamma(D_2)$ ve $\tilde{P}Y \in \Gamma(D_0)$ yazılırsa $C(Z,U) = C(Z,\tilde{P}Y) = 0$ elde edilir. Böylece (4.3.57) ve (4.3.58) eşitliğindeki tüm terimler sıfırlanır. Buradan D ve $D^{\perp}$ paralel ve integrallenebilen distribüsyondur. Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 4.3.24 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M tamamen umbilik ise D integrallenebilirdir ve M, $R_u \times R_w \times M^{\sharp}$ lokal çarpım yapısına sahiptir.

Burada R_u ve R_w, sırasıyla, $\tilde{P}ltr(TM)$ ve $\tilde{P}S(TM)^{\perp}$ ye teğet null ve non-null eğriler ve $M^{\flat}$ de D nin bir lifidir.

İspat: M nin tamamen umbilik olduğunu varsayalım. O zaman Teorem 4.3.17 den M tamamen geodezik ve $B = D = \psi = 0$ dır. Bu durumda (4.3.57) eşitliğindeki tüm terimler sıfırdır. Böylece D indirgenmiş konneksiyona göre paralel ve integrallenebilen distribüsyondur. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.25 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $S(TM^{\perp})$ nin ekran transversal demetinin $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu yönünde paralel olması için gerek ve yeter şart $\Gamma(TM)$ üzerinde $A_L = 0$ olmasıdır (Jin, 2010c).

Teorem 4.3.26 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin $S(TM^{\perp})$ distribüsyonu paralel olacak şekilde half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $S(TM)$ tamamen umbilik ise $c_p = c_q = 0$ dır.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin $S(TM^{\perp})$ distribüsyonu paralel olacak şekilde half lightlike altmanifoldu olsun. (4.1.31) ve (4.1.34) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) &= (\nabla_X C)(Y,QZ) - (\nabla_Y C)(X,QZ) + C(X,QZ)\tau(Y) \\ &\quad - C(Y,QZ)\tau(X) + \varepsilon\{D(X,QZ)\rho(Y) - D(Y,QZ)\rho(X)\} \end{aligned}$$

idi. $S(TM)$ ekran distribüsyonu tamamen umbilik ve ekran (screen) transversal distribüsyonu paralel olduğu için

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) = 0 \tag{4.3.59}$$

olur. (2.3.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(\xi,Y)QZ,N) &= (-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(Y,QZ)-u(QZ)v(Y)\} \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ) \\ &\quad -u(QZ)\eta(Y)\}\end{aligned} \tag{4.3.60}$$

bulunur. (4.3.60) eşitliğinde Y, Z yerine, sırasıyla, V, U alınırsa

$$\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{2\sqrt{5}}=0 \tag{4.3.61}$$

olur. Benzer şekilde, (4.3.60) eşitliğinde Y, Z yerine, sırasıyla, U, V alınırsa

$$(-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})+(-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4})=0 \tag{4.3.62}$$

elde edilir. (4.3.61) ve (4.3.62) eşitliklerinden $c_p=c_q=0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

M nin indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X,Y)=iz\{Z\to R(Z,X)Y\} \tag{4.3.63}$$

ile tanımlanır. $RadTM=sp\{\xi\}$ ve $S(TM)=sp\{E_1,...,E_m\}$ olmak üzere M üzerindeki $\{E_1,...,E_m,\xi\}$ quasi-orthonormal çatı alanını dikkate alalım. Bu quasi-orthonormal çatı alanını kullanarak her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i g(R(E_i,X)Y,E_i)+\bar{g}(R(\xi,X)Y,N) \tag{4.3.64}$$

dir. Burada $\varepsilon_i=g(E_i,E_i)=\pm1$ dir. Genelde bir half lightlike altmanifoldun indirgenmiş Ricci tipi tensörü simetrik değildir. M lightlike altmanifoldunun indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ simetrik ise indirgenmiş Ricci tensör olarak adlandırılır ve *Ric* ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996; Duggal ve Jin, 1999; Duggal ve Jin, 2007).

$(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X,Y) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{(m-1)\tilde{g}(X,Y) - u(Y)v(X) \\ &+((iz\tilde{P})-1)\tilde{g}(\tilde{P}X,Y)\} \\ &+(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{(m-1)\tilde{g}(\tilde{P}X,Y) \\ &+(iz\tilde{P})\tilde{g}(X,Y) - u(Y)\eta(X)\} \\ &+B(X,Y)izA_N + D(X,Y)izA_L - g(A_NX, A^*_\xi Y) - \\ &-\varepsilon g(A_LX, A_LY) + \rho(X)\psi(Y) \end{aligned} \tag{4.3.65}$$

olur. (4.3.65) eşitliğinden

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X,Y) - R^{(0,2)}(Y,X) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})(u(X)v(Y) - u(Y)v(X)) \\ &+(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})(u(X)\eta(Y) - u(Y)\eta(X)) \\ &+g(A^*_\xi X, A_NY) - g(A^*_\xi Y, A_NX) \\ &+\rho(X)\psi(Y) - \rho(Y)\psi(X) \end{aligned} \tag{4.3.66}$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi, N) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})(u(Y)v(X) - u(X)v(Y)) \\ &+(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})(u(Y)\eta(X) \\ &-u(X)\eta(Y)) \end{aligned} \tag{4.3.67}$$

olur. (4.1.32) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,N) &= g(A^*_\xi X, A_N Y) - g(A^*_\xi Y, A_N X)\\ &\quad -2d\tau(X,Y) + \rho(X)\psi(Y) - \rho(Y)\psi(X),\end{aligned}$$

idi. Bu eşitlik (4.3.67) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}2d\tau(X,Y) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{u(X)v(Y) - u(Y)v(X)\}\\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{u(X)\eta(Y) - u(Y)\eta(X)\}\\ &\quad +g(A^*_\xi X, A_N Y) - g(A^*_\xi Y, A_N X) \qquad (4.3.68)\\ &\quad +\rho(X)\psi(Y) - \rho(Y)\psi(X)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.3.66) ve (4.3.68) eşitliklerinden

$$R^{(0,2)}(X,Y) - R^{(0,2)}(Y,X) = 2d\tau(X,Y) \qquad (4.3.69)$$

yabulunur. Böylece (4.3.69) eşitliğinden Teorem 4.3.27 elde edilir.

Teorem 4.3.27 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ altın uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ simetrik olması için gerek ve yeter şart τ nun kapalı olmasıdır.

4.4 Altın Semi-Riemann Manifoldların Ekran Konformal Screen Semi-İnvaryant Half Lightlike Altmanifoldları

Tanım 4.4.1 (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$A_N X = \varphi A^*_\xi X \qquad (4.4.1)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı φ difreransiyellenebilir fonksiyonu varsa M ye ekran (screen) konformal denir (Duggal ve Şahin, 2004).

Önerme 4.4.2 (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun half lightlike altmanifoldu olsun. M nin ekran konformal olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$C(X,QY) = \varphi B(X,Y) \tag{4.4.2}$$

olmasıdır (Duggal ve Şahin, 2004).

Hatırlatma 4.4.3 M ekran konformal half lightlike altmanifold olsun. Bu durumda $S(TM)$ nin lokal screen temel formu C, $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetriktir yani $S(TM)$ integrallenebilirdir. Böylece M, $R_\xi \times M^*$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada R_ξ, $RadTM$ ye teğet null eğri ve M^* de $S(TM)$ nin bir lifidir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 4.4.4 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise M ve $S(TM)$, $\tilde{M}$ de tamamen geodeziktir ve ρ ileψ 1-formları sıfırdır.

İspat: P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olduğunu varsayalım. O zaman Teorem 4.3.20 den $\rho(X) = \psi(X) = 0$ idi. Her $Y \in \Gamma(TM)$ için (4.3.33) ve (4.3.34) ayrışımı vardır. (4.3.46) ve (4.3.47) eşitliklerinden $Y \in \Gamma(D)$ alınırsa $B(X,Y) = D(X,Y) = 0$ olur. (4.3.22) ve (4.4.2) eşitliklerinden $C(X,U) = \varphi B(X,U) = 0$ olur ve buradan $B(X,U) = 0$ bulunur. (4.3.47) eşitliğinde Y yerine V yazılırsa $D(X,V) = 0$ olur ve (4.3.16) eşitliğinden $B(X,W) = -\varepsilon D(X,V) = 0$ elde edilir. (4.3.17) eşitliğinden ve Teorem 4.3.20 (i) den $D(X,U) = D(X,W) = 0$

olur. Böylece $B = D = 0$ ve ekran konformal olduğundan $C = 0$ olur. Buda iddianın ispatıdır.

Teorem 4.4.5 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M tamamen umbilik ise, o zaman M ve $S(TM)$ tamamen geodeziktir.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman Teorem 4.3.17 den ve (4.4.2) eşitliğinden $B = C = D = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.6 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal tamamen umbilik screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda U veya W, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman D ve $D^{\perp}$ integrallenebilirdir ve M, $M_2 \times M^{\sharp}$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada $M^{\sharp}$ ve M_2 sırasıyla D ve $D^{\perp}$ nin lifidir.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Teorem 4.4.5 ten M ve $S(TM)$ tamamen geodezik olduğundan (4.3.57) eşitliğindeki tüm terimler ve (4.3.58) eşitliğindeki $\rho(Z)$ dışındaki tüm terimleri sıfırdır. $S(TM)$ tamamen geodezik ve U paralel olduğu kullanılırsa, Teorem 4.3.20 (iii) den $w(A_N X) = \varepsilon C(X, W) = \rho(X) = 0$ elde edilir.

Eğer W paralel ise, Teorem 4.3.20 (iv) den $\rho(X) = 0$ olur. Böylece D ve $D^{\perp}$ M üzerinde integrallenebilen ve paralel distribüsyonlardır.

(4.1.13), (4.3.16), (4.3.21) ve (4.4.2) eşitlikleri kullanılırsa her $X \in \Gamma(TM)$,

$V \in \Gamma(D_1)$ ve $U \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned} h(X,U) &= B(X,U)N + D(X,U)L = -C(X,V)N - C(X,W)L \\ &= -\varphi B(X,V)N - \varepsilon\varphi B(X,W)L \\ &= \varphi B(X,V)N + \varphi D(X,V)L = \varphi h(X,V) \end{aligned}$$

olur ve

$$h(X, U - \varphi V) = 0 \tag{4.4.3}$$

bulunur.

$\{U,V\}$, $\Gamma(\tilde{P}RadTM \oplus \tilde{P}ltr(TM))$ nin bir bazı olduğundan

$$\mu = U - \varphi V, \upsilon = U + \varphi V \tag{4.4.4}$$

alınırsa $\{\mu, \upsilon\}$ de $\Gamma(\tilde{P}RadTM \oplus \tilde{P}ltr(TM))$ nin ortogonal bir bazı olur.

$R(\mu) = Sp\{\mu\}$ olsun. Bu durumda (4.3.1) ayrışımından $S(\mu) = D_0 \perp Sp\{\upsilon, W\}$, $S(TM)$ nin ortogonal tamamlayan vektör alt demetidir ve

$$S(TM) = R(\mu) \perp S(\mu) \tag{4.4.5}$$

olur.

Teorem 4.4.7 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin $S(TM^{\perp})$ distribüsyonu paralel olacak şekilde ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel olması için gerek ve yeter şart M nin ekran homotetik olması, τ ile ψ 1-formları sıfır olmasıdır.

İspat: M, $\tilde{M}$ altın semi-Riemann manifoldunun ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. $A_N = \varphi A^*_\xi$, P nin lineer oluşu, (4.3.14) ve (4.3.20) eşitlikleri kullanılırsa her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\nabla_X \mu &= \nabla_X U - \varphi \nabla_X V - X[\varphi] V \\
&= -PA_N X + \tau(X)U + \rho(X)W - \varphi(-PA^*_\xi X - \tau(X)V - \varepsilon\psi(X)W) - X[\varphi] V \\
&= \tau(X)U + (\varphi\tau(X) - X[\varphi])V + (\rho(X) + \varepsilon\varphi\psi(X))W \qquad (4.4.6)
\end{aligned}$$

olur. μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel olduğu için

$$\tau(X)U + (\varphi\tau(X) - X[\varphi])V + (\rho(X) + \varepsilon\varphi\psi(X))W = 0 \qquad (4.4.7)$$

dır. Bu eşitliği sırasıyla U, V ve W ile çarpılırsa $\tau(X) = 0$ ve

$$\varphi\tau(X) - X[\varphi] = (\rho(X) + \varepsilon\varphi\psi(X)) = 0 \qquad (4.4.8)$$

bulunur. Buradan $X[\varphi] = 0$ ve buradan $\varphi = c$ yani M nin ekran homotetiktir. Eğer $S(TM^\perp)$ paralel ise Teorem 4.3.25 den $\rho(X) = g(A_L X, N) = 0$ bulunur. Buradan $\psi(X) = 0$ bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.8 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin $S(TM^\perp)$ distribüsyonu paralel olacak şekilde ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman M, $R_\xi \times R_\mu \times M^\sharp$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada R_ξ $RadTM$ ye teğet null eğri, R_μ $R(\mu)$ ye teğet non-null geodezik ve $M^\flat$ de $S(\mu)$ nin bir lifidir. Ayrıca M ekran homotetiktir.

İspat: μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. (4.4.5) ve (4.4.6) eşitliklerinden $X \in \Gamma(S(\mu))$ ve $Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \mu) &= g(\tilde{\nabla}_X Y, \mu) = -g(Y, \tilde{\nabla}_X \mu) = -g(Y, \nabla_X \mu) = 0, \\ g(\nabla_X \upsilon, \mu) &= g(\tilde{\nabla}_X \upsilon, \mu) = -g(\upsilon, \tilde{\nabla}_X \mu) = X[\varphi] - 2\varphi\tau(X), \\ g(\nabla_X W, \mu) &= g(\tilde{\nabla}_X W, \mu) = -g(W, \tilde{\nabla}_X \mu) = -g(W, \nabla_X \mu) = -\rho(X) - \varepsilon\varphi\psi(X) \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

dır. Böylece Teorem 4.4.7 den (4.4.9) eşitliğindeki tüm terimler sıfırlanır ve $S(\mu)$ paralel ve integrallenebilen distribüsyondur. Hatırlatma 4.4.3 ten ispat tamamlanmış olur.

$G(\mu) = D_0 \perp Sp\{\xi, \upsilon, W\}$ eşitliği göz önüne alınırsa (4.1.1) ve (4.4.5) eşitliklerinden

$$TM = R(\mu) \perp G(\mu) \tag{4.4.10}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 4.4.9 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin $S(TM^{\perp})$ distribüsyonu paralel olacak şekilde ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. Eğer μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman M, $L_\mu \times M^\flat$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada L_μ, $R(\mu)$ ye teğet non-null geodezikler ve $M^\flat$ de $G(\mu)$ nin bir lifidir. Ayrıca M ekran homotetiktir.

İspat: μ indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. (4.4.6) ve (4.4.10) eşitliklerinden $X \in \Gamma(G(\mu))$ ve $Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \mu) &= g(\tilde{\nabla}_X Y, \mu) = -g(Y, \tilde{\nabla}_X \mu) = -g(Y, \nabla_X \mu) = 0, \\ g(\nabla_X \xi, \mu) &= g(\tilde{\nabla}_X \xi, \mu) = -g(\xi, \tilde{\nabla}_X \mu) = -B(X, \mu) = 0, \\ g(\nabla_X \upsilon, \mu) &= g(\tilde{\nabla}_X \upsilon, \mu) = -g(\upsilon, \tilde{\nabla}_X \mu) = X[\varphi] - 2\varphi\tau(X), \\ g(\nabla_X W, \mu) &= g(\tilde{\nabla}_X W, \mu) = -g(W, \tilde{\nabla}_X \mu) = -\rho(X) - \varepsilon\varphi\psi(X) \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

dır. Böylece Teorem 4.4.7 den (4.4.11) eşitliğindeki tüm terimler sıfırlanır ve $G(\mu)$ paralel ve integrallenebilen distribüsyondur.

Teorem 4.4.10 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin ekran konformal screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $c_p = (\phi+1)c_q$ dır.

İspat: (4.1.30) ve (4.3.42) eşitlikleri kullanılırsa her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\left\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)u(X) - \tilde{g}(\tilde{P}X,Z)u(Y)\right\} \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(Y,Z)u(X) - \tilde{g}(X,Z)u(Y)\} \\ &= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) + B(Y,Z)\tau(X) \qquad (4.4.12) \\ &\quad -B(X,Z)\tau(Y) + D(Y,Z)\psi(X) - D(X,Z)\psi(Y) \end{aligned}$$

bulunur. (2.3.6), (4.1.31), (4.1.34) ve (4.4.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(Y,QZ)\eta(X) - \tilde{g}(X,QZ)\eta(Y) \\ &\quad +\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)v(X) - \tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)v(Y)\} \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)\eta(X) \qquad (4.4.13) \\ &\quad -\tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)\eta(Y) + \tilde{g}(Y,QZ)v(X) - \tilde{g}(X,QZ)v(Y)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)QZ,N) &= \tilde{g}(R(X,Y)QZ,N)+\varepsilon\{D(X,QZ)\rho(Y)-D(Y,QZ)\rho(X)\} \\
&= (\nabla_X C)(Y,QZ)-(\nabla_Y C)(X,QZ) \\
&\quad +C(X,QZ)\tau(Y)-C(Y,QZ)\tau(X) \\
&\quad +\varepsilon\{D(X,QZ)\rho(Y)-D(Y,QZ)\rho(X)\} \\
&= XC(Y,QZ)-C(\nabla_X Y,QZ)-C(Y,\nabla_X QZ) \\
&\quad -YC(X,QZ)+C(\nabla_Y X,QZ)+C(X,\nabla_Y QZ) \\
&\quad +C(X,QZ)\tau(Y)-C(Y,QZ)\tau(X) \\
&\quad +\varepsilon\{D(X,QZ)\rho(Y)-D(Y,QZ)\rho(X)\} \\
&= X(\varphi B(Y,QZ))-\varphi B(\nabla_X Y,QZ)-\varphi B(Y,\nabla_X QZ) \qquad (4.4.14) \\
&\quad -Y(\varphi B(X,QZ))+\varphi B(\nabla_Y X,QZ)+\varphi B(X,\nabla_Y QZ) \\
&\quad +\varphi B(X,QZ)\tau(Y)-\varphi B(Y,QZ)\tau(X) \\
&\quad +\varepsilon\{D(X,QZ)\rho(Y)-D(Y,QZ)\rho(X)\} \\
&= \varphi((\nabla_X B)(Y,QZ)-(\nabla_Y B)(X,QZ))+\varphi B(X,QZ)\tau(Y) \\
&\quad -\varphi B(Y,QZ)\tau(X)+X[\varphi]B(Y,QZ)-Y[\varphi]B(X,QZ) \\
&\quad +\varepsilon\{D(X,QZ)\rho(Y)-D(Y,QZ)\rho(X)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.4.12), (4.4.13) ve (4.4.14) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
& (-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\varphi\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)u(X)-\varphi\tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)u(Y) \\
& -\tilde{g}(Y,QZ)\eta(X)+\tilde{g}(X,QZ)\eta(Y)-\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)v(X)+\tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)v(Y)\} \\
& +(-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4})\{\varphi\tilde{g}(Y,QZ)u(X)-\varphi\tilde{g}(X,QZ)u(Y) \qquad (4.4.15) \\
& -\tilde{g}(\tilde{P}Y,QZ)\eta(X)+\tilde{g}(\tilde{P}X,QZ)\eta(Y)-\tilde{g}(Y,QZ)v(X)+\tilde{g}(X,QZ)v(Y)\} \\
= \; & [-X[\varphi]+2\varphi\tau(X)]B(Y,QZ)+[Y[\varphi]-2\varphi\tau(Y)]B(X,QZ) \\
& -[\varphi\psi(Y)+\varepsilon\rho(Y)]D(X,QZ)+[\varphi\psi(X)+\varepsilon\rho(X)]D(Y,QZ)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte QZ yerine μ yazılırsa ve (4.4.3) eşitliği kullanılırsa

$$(-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4})\{-\varphi u(X)\eta(Y)+\varphi u(Y)\eta(X)+v(X)\eta(Y)-v(Y)\eta(X)\}=0$$

elde edilir. Bu eşitlikte $X=V$, $Y=\xi$ alınırsa

$$(-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4})=0$$

olur. Buradan $c_p=(\phi+1)c_q$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.11 $\tilde{M}=M_p(c_p)\times M_q(c_q),\tilde{g},\tilde{P})$, $c_p\neq(\phi+1)c_q$ lokal altın çarpım uzay formunun ekran konformal bir screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu yoktur.

5. ALTIN SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

5.1 r-Lightlike Altmanifoldlar

Tanım 5.1.1 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $q \geq 1$ indeksli $(m+n)-$boyutlu semi-Riemann manifoldu ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $m-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $p \in M$ için

$$Rad : p \in M \to RadTpM$$

dönüşümü, M üzerinde rankı $r > 0$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir distribüsyon tanımlıyorsa M ye $r-$lightlike altmanifold denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

M nin boyutu, ek boyutu ve $RadTM$ nin rankına göre dört farklı durum ortaya çıkar ve bu özelliklerine göre lightlike altmanifoldlar aşağıdaki şekilde de isimlendirilir;

1. Durum : Eğer $0 < r < min\{m,n\}$ ise M ye $r-$lightlike,

2. Durum : Eğer $r = n < m$, $S\left(TM^{\perp}\right) = \{0\}$ ise M ye coisotropic altmanifold,

3. Durum : Eğer $r = m < n$, $S(TM) = \{0\}$ ise M ye isotropic altmanifold,

4. Durum : Eğer $r = m = n$, $S(TM) = \{0\} = S\left(TM^{\perp}\right)$ ise M ye tamamen lightlike altmanifold (Duggal ve Bejancu, 1996).

Birinci durum olan $r-$lightlike altmanifoldların geometrik yapısını incelemek yeterli olacaktır. Çünkü diğer durumlar $r-$lightlike altmanifoldların özel durumlarıdır.

Tanım 5.1.2 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+n)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin

$m-$boyutlu bir lightlike altmanifoldu olsun. $RadTM$ nin TM de tümleyeni olan $S(TM)$ uzayına M nin ekran distribüsyonu denir.

Böylece

$$TM = RadTM \perp S(TM) \tag{5.1.1}$$

ayrışımına sahip oluruz. Buradan altmanifoldun tanjant demetine ortogonal olan

$$TM^{\perp} = \cup T_p M^{\perp}$$

ile tanmlanırsa M lightlike olduğu için $TM^{\perp}$, $T\tilde{M}\mid_M$ de TM ye tamamlayan değildir. Çünkü $RadTM = TM \cap TM^{\perp}$ ve M üzerinde rankı $r > 0$ olan bir distribüsyondur. $TM^{\perp}$ de $RadTM$ ye ortogonal tamamlayan bir vektör demetini $S\left(TM^{\perp}\right)$ ile tanımlayalım. Önerme 2.1.9 dikkate alınırsa $\tilde{g}$ metriği $S\left(TM^{\perp}\right)$ üzerinde non-dejenere olduğundan, $TM^{\perp}$ demeti

$$TM^{\perp} = RadTM \perp S(TM^{\perp}) \tag{5.1.2}$$

ortogonal direkt toplam şeklinde yazılabilir. Burada $S\left(TM^{\perp}\right)$ vektör demetine M altmanifoldunun transversal ekran distribüsyonu denir. Buradan $S(TM)$ demeti $T\tilde{M}\mid_M$ demetinin non-dejenere altvektör demeti olduğundan

$$T\tilde{M}_{|M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{5.1.3}$$

ortogonal direkt ayrışımı elde edilir. Burada $S\left(TM^{\perp}\right)$ demeti, $T\tilde{M}\mid_M$ de $S(TM)$ demetine ortogonal tamamlayan vektör demetidir. Ayrıca $S\left(TM^{\perp}\right)$ demeti, $S(TM)^{\perp}$ in altvektör demeti ve her ikisi de non-dejenere olduğundan

$$S(TM)^{\perp} = S(TM^{\perp}) \perp S(TM^{\perp})^{\perp} \tag{5.1.4}$$

yazılabilir. Bundan sonra bir $r-$lightlike altmanifoldu $(M,g,S(TM),S\left(TM^{\perp}\right))$ ile göstereceğiz. Ayrıca bu bölümde kullanılacak indisler

$$i,j,...\in\{1,...,r\},\alpha,\beta,...\in\{r+1,...,n\}$$

şeklindedir.

Teorem 5.1.3 (Duggal ve Bejancu, 1996) $(M,g,S(TM),S\left(TM^{\perp}\right))$, $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir $r-$lightlike altmanifoldu olsun. Bu altmanifoldun bir koordinat komşuluğu U ve $\{\xi_1,...,\xi_r\}$ de $\Gamma(RadTM_{|U})$ uzayının bir bazı olduğunu varsayalım. Bu durumda, M üzerinde

$$\tilde{g}(N_i,\xi_j)=\delta_{ij},\quad \tilde{g}(N_i,N_j)=0 \tag{5.1.5}$$

olacak şekilde bazı $\{N_1,...,N_r\}$ olan $S(TM^{\perp})^{\perp}$ demetinde $RadTM$ ye komplemant olan bir vektör demeti vardır. Bu vektör demetine M nin lightlike transversal vektör demeti denir ve $ltr(TM)$ ile gösterilir.

Şimdi

$$tr(TM)=ltr(TM)\perp S(TM^{\perp}) \tag{5.1.6}$$

vektör demetini göz önüne alalım. $tr(TM)$ ye M nin transversal demeti denir. Buna göre

$$\begin{aligned} T\tilde{M}_{|M} &= TM\oplus tr(TM)=\{RadTM\oplus tr(TM)\}\perp S(TM) \\ &= \{RadTM\oplus ltr(TM)\}\perp S(TM)\perp S(TM^{\perp}) \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

olarak yazılabilir.

$\{W_{r+1},...,W_m\}$ ve $\{L_{r+1},...,L_n\}$ sırasıyla $S(TM)$ ve $S\left(TM^{\perp}\right)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere M boyunca $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki lokal quasi-ortonormal çatısı

$$\{\xi_1,...,\xi_r,N_1,...,N_r,W_{r+1},...,W_m,L_{r+1},...,L_n\}$$

dir.

$(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+n)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve $(M,g,S(TM),S\left(TM^{\perp}\right))$, $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $m-$boyutlu bir lightlike altmanifoldu olsun. $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ de Levi-Civita konneksiyonu ve $Q:\Gamma(TM)\to\Gamma(S(TM))$ projektif dönüşümü olsun. M ve $S(TM)$ için Gauss ve Weingarten formülleri her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^{r} h_i^l(X,Y)N_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,Y)L_\alpha, \tag{5.1.8}$$

$$\tilde{\nabla}_X N_i = -A_{N_i}X + \sum_{j=1}^{r}\tau_{ij}(X)N_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n}\rho_{i\alpha}(X)L_\alpha, \tag{5.1.9}$$

$$\tilde{\nabla}_X L_\alpha = -A_{L_\alpha}X + \sum_{i=1}^{r}\psi_{\alpha i}(X)N_i + \sum_{\beta=r+1}^{n}\sigma_{\alpha\beta}(X)L_\beta, \tag{5.1.10}$$

$$\nabla_X QY = \nabla_X^* QY + \sum_{i=1}^{r} h_i^*(X,QY)\xi_i, \tag{5.1.11}$$

$$\nabla_X \xi_i = -A_{\xi_i}^* X - \sum_{j=1}^{r}\tau_{ji}(X)\xi_j, \tag{5.1.12}$$

dir. Burada ∇ ve ∇^*, sırasıyla, M ve $S(TM)$ üzerine indirgenmiş lineer konneksiyonlar, U koordinat komşuluğunda h_i^l ve h_α^s, sırasıyla, M altmanifoldunun yerel lightlike ikinci temel formları ve yerel ekran ikinci temel formları, h_i^* $S(TM)$ üzerinde yerel ekran ikinci temel formları olarak adlandırılırlar. Ayrıca A_{N_i}, $A_{\xi_i}^*$ vr A_{L_α}, TM üzerinde lineer operatörler ve τ_{ij}, $\rho_{i\alpha}$, $\psi_{\alpha i}$ ve $\sigma_{\alpha b}$ M üzerinde 1-formlardır.

Teorem 5.1.4 $(M,g,S(TM),S(TM^{\perp}))$ bir lightlike altmanifoldun yerel lightlike ikinci temel formları $S(TM)$, $S(TM^{\perp})$ ve $ltr(TM)$ vektör demetlerine bağlı değildir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$\tilde{\nabla}$ bir metrik konneksiyon olduğundan her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için (5.1.8)-(5.1.12) arası eşitliklerden

$$\begin{aligned} g(A^*_{\xi_i}X,Y) &= h^l_i(X,Y)+\sum_{j=1}^{r} h^l_j(X,\xi_i)\eta_j(Y),\ g(A^*_{\xi_i}X,N_j)=0, && (5.1.13)\\ g(A_{L_\alpha}X,Y) &= \varepsilon_\alpha h^s_\alpha(X,Y)+\sum_{i=1}^{r}\psi_{\alpha i}(X)\eta_i(Y), && (5.1.14)\\ g(A_{L_\alpha}X,N_i) &= \varepsilon_\alpha\rho_{i\alpha}(X),\ \varepsilon_b\sigma_{\alpha b}=-\varepsilon_\alpha\sigma_{b\alpha}, && (5.1.15)\\ g(A_{N_i}X,QY) &= h^*_i(X,QY),\ \eta_j(A_{N_i}X)+\eta_i(A_{N_j}X)=0 && (5.1.16)\end{aligned}$$

bulunur. Burada her $i \in \{1,...,r\}$ için

$$\eta_i(X)=\tilde{g}(X,N_i), \forall X \in \Gamma(TM) \qquad (5.1.17)$$

ile tanımlanır ve $\varepsilon_\alpha=\tilde{g}(L_\alpha,L_\alpha)=\pm 1$, L_α nın işaretidir.

(5.1.13) eşitliğinde Y yerine sırasıyla ξ_j ve ξ_i yazılırsa,

$$h^l_i(X,\xi_j)+h^l_j(X,\xi_i)=0,\ h^l_i(X,\xi_i)=0 \qquad (5.1.18)$$

elde edilir. Ayrıca (5.1.13) eşitliğinde $Y=\xi_j$ ve $Y=\xi_k$ alınırsa,

$$h^l_i(\xi_j,\xi_k)=0 \qquad (5.1.19)$$

bulunur. Diğer taraftan, (5.1.14) eşitliğinde Y yerine ξ_i yazılırsa

$$h^s_\alpha(X,\xi_i)=-\varepsilon_\alpha\psi_{\alpha i}(X), \forall X \in \Gamma(TM) \qquad (5.1.20)$$

olur. Böylece (5.1.8), (5.1.12) ve (5.1.20) eşitliklerinden

$$\tilde{\nabla}_X \xi_i = -A^*_{\xi_i} X - \sum_{j=1}^{r} \tau_{ji}(X)\xi_j + \sum_{j=1}^{r} h^l_j(X,\xi_i)N_j - \sum_{\alpha=r+1}^{n} \varepsilon_\alpha \psi_{\alpha i}(X) L_\alpha \tag{5.1.21}$$

dır.

Tanım 5.1.5 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+n)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve $(M,g,S(TM),S(TM^{\perp}))$, $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $m-$boyutlu bir lightlike altmanifoldu olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ ve her i için $\tilde{\nabla}_X \xi_i \in \Gamma(TM)$ ise M ye bir irrasyonel lightlike altmanifold denir (Kupeli, 1996).

M, $\tilde{M}$ nin $r-$lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda yukarıdaki tanımı

$$h^l_j(X,\xi_i) = 0,\, h^s_\alpha(X,\xi_i) = -\varepsilon_\alpha \psi_{\alpha i}(X) = 0 \tag{5.1.22}$$

ile de ifade edebiliriz.

Tanım 5.1.6 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+n)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve $(M,g,S(TM),S(TM^{\perp}))$, $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $m-$boyutlu bir lightlike altmanifoldu olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X,Y) = Hg(X,Y) \tag{5.1.23}$$

olacak şekilde $tr(TM)$ üzerinde H diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa M ye tamamen umbilik lightlike altmanifold denir (Duggal ve Jin, 2003). Eğer $H = 0$ ise M altmanifolduna tamamen geodezik denir.

M, $\tilde{M}$ nin lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda yukarıdaki tanım göre M nin tamamen umbilik olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h^l_i(X,Y) = A_i g(X,Y), h^s_\alpha(X,Y) = B_\alpha g(X,Y) \tag{5.1.24}$$

olacak şekilde herhangi bir U koordinat komşuluğunda A_i ve B_α diferensiyellenebilir fonksiyonlarının olmasıdır (Duggal ve Jin, 2003).

Tanım 5.1.7 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+n)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve $(M,g,S(TM),S(TM^{\perp}))$, $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $m-$boyutlu bir lightlike altmanifoldu olsun. Her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$h_i^*(X,QY)=\gamma_i g(X,Y) \tag{5.1.25}$$

olacak şekilde herhangi bir $U\subset M$ koordinat komşuluğunda γ_i diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa $S(TM)$ ekran distribüsyonuna tamamen umbiliktir. Eğer her $i\in\{1,...,r\}$ için $\gamma_i=0$ ise $S(TM)$ ekran distribüsyonuna tamamen geodezik denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Önerme 5.1.8 $(\tilde{M},\tilde{g})$, $(m+n)-$boyutlu semi-Riemann manifold ve $(M,g,S(TM),S(TM^{\perp}))$, $(\tilde{M},\tilde{g})$ nin $m-$boyutlu bir lightlike altmanifoldu olsun. $\tilde{R}$, R ve R^* sırasıyla $\tilde{\nabla}$, ∇ ve ∇^* ın eğrilik tensörü olsun. M ve $S(TM)$ için Gauss ve Codazzi denklemleri her $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,QW) &= g(R(X,Y)Z,QW)\\ &+\sum_{i=1}^{r}\{h_i^l(X,Z)h_i^*(Y,QW)-h_i^l(Y,Z)h_i^*(X,QW)\} \quad (5.1.26)\\ &+\sum_{\alpha=r+1}^{n}\varepsilon_\alpha\{h_\alpha^s(X,Z)h_\alpha^s(Y,QW)-h_\alpha^s(Y,Z)h_\alpha^s(X,QW)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi_i) &= (\nabla_X h_i^l)(Y,Z)-(\nabla_Y h_i^l)(X,Z)\\ &+\sum_{j=1}^{r}\{h_i^l(Y,Z)\tau_{ji}(X)-h_i^l(X,Z)\tau_{ji}(Y)\} \quad (5.1.27)\\ &+\sum_{\alpha=r+1}^{n}\{h_\alpha^s(Y,Z)\psi_{\alpha i}(X)-h_\alpha^s(X,Z)\psi_{\alpha i}(Y)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,L_\alpha) &= (\nabla_X h^s_\alpha)(Y,Z)-(\nabla_Y h^s_\alpha)(X,Z)\\ &+\sum_{i=1}^{r}\{h^l_i(X,Z)\rho_{i\alpha}(X)-h^l_i(Y,Z)\rho_{i\alpha}(X)\}\\ &+\sum_{\beta=r+1}^{n}\{h^s_\beta(Y,Z)\sigma_{\alpha\beta}(X)-h^s_\beta(X,Z)\sigma_{\alpha\beta}(Y)\},\end{aligned} \tag{5.1.28}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,N_i) &= \tilde{g}(R(X,Y)Z,N_i)\\ &+\sum_{j=1}^{r}\{h^l_j(X,Z)\eta_i(A_{N_j}Y)-h^l_j(Y,Z)\eta_i(A_{N_j}X)\}\\ &+\sum_{\alpha=r+1}^{n}\varepsilon_\alpha\{h^s_\alpha(X,Z)\rho_{i\alpha}(Y)-h^s_\alpha(Y,Z)\rho_{i\alpha}(X)\},\end{aligned} \tag{5.1.29}$$

$$\begin{aligned}g(R(X,Y)QZ,N_i) &= (\nabla_X h^*_i)(Y,QZ)-(\nabla_Y h^*_i)(X,QZ)+\\ &\sum_{j=1}^{r}\{h^*_j(X,QZ)\tau_{ij}(Y)-h^*_j(Y,QZ)\tau_{ij}(X)\}\end{aligned} \tag{5.1.30}$$

dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

5.2 Altın Semi-Riemann Manifoldların Semi-İnvaryant Lightlike Altmanifoldları

Tanım 5.2.1 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu (M,g) de $\tilde{M}$ nin lightlike altmanifoldu olsun. Eğer :

i) $\tilde{P}(TM)=TM$ ise M ye invaryant lightlike altmanifoldu,

ii) $\tilde{P}RadTM\subset S(TM)$, $\tilde{P}ltr(TM\subset S(TM)$ and $\tilde{P}S(TM^\perp)\subset S(TM)$ ise M ye semi-invaryant lightlike altmanifoldu,

iii) $\tilde{P}RadTM\subset ltr(TM)$ ise M ye radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldu denir.

$(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$, $(m+n)-$boyutlu altın semi-Riemann manifoldu ve $(M,g,S(TM),(S(TM^\perp))$, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun.

Eğer

$$D_1 = \tilde{P}RadTM, D_2 = \tilde{P}ltr(TM), D_3 = \tilde{P}S(TM^{\perp})$$

olarak alınırsa

$$S(TM) = D_0 \perp \{D_1 \oplus D_2\} \perp D_3 \tag{5.2.1}$$

olur. Böylece aşağıdaki ayrışımlara sahip oluruz

$$TM = D_0 \perp \{D_1 \oplus D_2\} \perp D_3 \perp RadTM, \tag{5.2.2}$$

$$T\tilde{M} = D_0 \perp \{D_1 \oplus D_2\} \perp D_3 \perp \{RadTM \oplus ltr(TM)\} \perp S(TM^{\perp}). \tag{5.2.3}$$

Eğer

$$D = D_0 \perp RadTM \perp \tilde{P}RadTM \tag{5.2.4}$$

ve

$$D^{\perp} = D_2 \perp D_3 \tag{5.2.5}$$

olarak alınırsa (5.2.2) ve (5.2.3) eşitlikleri aşağıdaki gibi olur

$$TM = D \oplus D^{\perp}, \tag{5.2.6}$$

$$T\tilde{M} = \{D \oplus D^{\perp}\} \oplus ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}). \tag{5.2.7}$$

Önerme 5.2.2 D_0 distribüsyonu $\tilde{P}$ ye göre invaryant distribüsyondur.

İspat: Her $X \in \Gamma(D_0)$, $\xi_i \in \Gamma(RadTM)$, $N_i \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $L_\alpha \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$

$$g(\tilde{P}X, \xi_i) = g(X, \tilde{P}\xi_i) = 0$$

$$g(\tilde{P}X, N_i) = g(X, \tilde{P}N_i) = 0$$

$$g(\tilde{P}X, L_\alpha) = g(X, \tilde{P}L_\alpha) = 0$$

dir. Böylece $\tilde{P}X$ in $RadTM$, $ltr(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$ de bileşenleri yoktur. Ayrıca her $X \in \Gamma(D_0)$, $U_i \in \Gamma(D_2)$, $V_i \in \Gamma(D_1)$ ve $W_\alpha \in \Gamma(D_3)$ için

$$\begin{aligned} g(\tilde{P}X, U_i) &= g(X, \tilde{P}U_i) = \tilde{g}(X, \tilde{P}^2 N_i) = g(X, \tilde{P}N_i) + g(X, N_i) = 0 \\ g(\tilde{P}X, V_i) &= g(X, \tilde{P}V_i) = \tilde{g}(X, \tilde{P}^2 \xi_i) = g(X, \tilde{P}\xi_i) + g(X, \xi_i) = 0 \\ g(\tilde{P}X, W_\alpha) &= g(X, \tilde{P}W_\alpha) = \tilde{g}(X, \tilde{P}^2 L_\alpha) = g(X, \tilde{P}L_\alpha) + g(X, L_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

olur. Şu halde $\tilde{P}X$ in D_1, D_2 ve D_3 ün distribüsyonuna ait bileşenleri yoktur. Böylece D_0 distribüsyonu $\tilde{P}$ invaryanttır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.2.3 *D distribüsyonu $\tilde{P}$ ye göre invaryant distribüsyondur.*

Her $i \in \{1, ..., r\}$, $\alpha \in \{r+1, ..., n\}$ için U_i, V_i ve W_α

$$V_i = \tilde{P}\xi_i,\ U_i = \tilde{P}N_i,\ W_\alpha = \tilde{P}L_\alpha \tag{5.2.8}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanları olsun. Her $i \in \{1, ..., r\}$, $\alpha \in \{r+1, ..., n\}$ için u_i, v_i ve w_α

$$u_i(X) = g(X, V_i),\ v_i(X) = g(X, U_i),\ w_\alpha(X) = \varepsilon_\alpha g(X, W_\alpha) \tag{5.2.9}$$

ile tanımlanan $1-$formlar olsun. Ayrıca her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{P}X = PX + \sum_{i=1}^{r} u_i(X) N_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(X) L_\alpha \tag{5.2.10}$$

yazılabilir.

Teorem 5.2.4 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin lightlike altmanifoldu olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

i) M, P invaryanttır.

ii) Her $i \in \{1,...,r\}$, $\alpha \in \{r+1,...,n\}$ için u_i ve w_α $1-$formları, M üzerinde sıfırdır.

iii) P, M üzerinde bir altın yapıdır.

İspat: M nin invaryant olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(TM)$ için $\tilde{P}X = PX$ olmasıdır. O zaman (5.2.10) den her $i \in \{1,...,r\}$, $\alpha \in \{r+1,...,n\}$ için $u_i(X) = w_\alpha(X) = 0$ bulunur. Böylece (i)$\Leftrightarrow$(ii) elde edilir.

Her $i \in \{1,...,r\}$, $\alpha \in \{r+1,...,n\}$ için u_i ve w_α nın M üzerinde sıfırlanması için gerek ve yeter koşul her $X \in \Gamma(TM)$ için $\tilde{P}X = PX$ olmasıdır. O zaman

$$P^2X = P(PX) = \tilde{P}(\tilde{P}X) = \tilde{P}X + X = PX + X$$

ve

$$g(PX,Y) = \tilde{g}(\tilde{P}X,Y) = \tilde{g}(X,\tilde{P}Y) = g(X,PY)$$

bulunur. Böylece P, M üzerinde bir altın yapıdır ve buradan (ii)$\Leftrightarrow$(iii) elde edilir.

Teorem 5.2.5 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldunun radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldu yoktur.

İspat: $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu M, $\tilde{M}$ nin radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Radikal anti-invaryant lightlike altmanifold tanımından $\xi_i \in \Gamma(RadTM)$ için $\tilde{P}\xi_i \in \Gamma(ltrTM)$ dir. (2.3.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{P}\xi_i,\tilde{P}\xi_j) &= \tilde{g}(\tilde{P}\xi_i,\xi_j) + \tilde{g}(\xi_i,\xi_j) \\ 0 &= \tilde{g}(\tilde{P}\xi_i,\xi_j) + 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece her $i,j \in \{1,...,r\}$ için $\tilde{g}(\tilde{P}\xi_i,\xi_j) = 0$ ve $\tilde{P}\xi_i \notin \Gamma(ltrTM)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Buradan ispat tamamlanır.

Lemma 5.2.6 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman her $X,Y \in \Gamma(TM)$

$$P^2X = PX + X - \sum_{i=1}^{r} u_i(X)U_i - \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(X)W_\alpha, \tag{5.2.11}$$

$$u_i(PX) = u_i(X), w_\alpha(PX) = w_\alpha(X), \tag{5.2.12}$$

$$PV_i = V_i + \xi_i, u_j(V_i) = w_\alpha(V_i) = 0, \tag{5.2.13}$$

$$PU_i = U_i, u_i(U_i) = 1, w_\alpha(U_i) = 0, \tag{5.2.14}$$

$$PW_\alpha = W_\alpha, u_i(W_\alpha) = 0, w_\alpha(W_\beta) = \varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\beta}, \tag{5.2.15}$$

$$g(PX,Y) - g(X,PY) = \sum_{i=1}^{r}\{u_i(Y)\eta_i(X) - u_i(X)\eta_i(Y)\}, \tag{5.2.16}$$

$$\begin{aligned} g(PX,PY) \quad = \quad & g(PX,Y) + g(X,Y) + \sum_{i=1}^{r}\{u_i(X)\eta_i(Y) - u_i(Y)\eta_i(PX) \\ & -u_i(X)\eta_i(PY)\} - \sum_{\alpha=r+1}^{n} \varepsilon_\alpha w_\alpha(X)w_\alpha(Y) \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

dir.

İspat: (5.2.10) eşitliğinin her iki tarafına $\tilde{P}$ uygulanıp (2.3.1) ve (5.2.8) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & P^2X + \sum_{i=1}^{r} u_i(PX)N_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(PX)L_\alpha \\ & + \sum_{i=1}^{r} u_i(X)U_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(X)W_\alpha \\ & = PX + \sum_{i=1}^{r} u_i(X)N_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(X)L_\alpha + X \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin teğet, lightlike transversal ve ekran transversal bileşenleri alınırsa (5.2.11) ve (5.2.12) eşitlikleri elde edilir. (5.2.10) eşitliğinde X yerine V_i yazılırsa

$$\tilde{P}V_i = PV_i + \sum_{j=1}^{r} u_j(V_i)U_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(V_i)L_\alpha \tag{5.2.18}$$

olur ve diğer taraftan (2.3.1) eşitliğinden

$$\tilde{P}V_i = \tilde{P}^2\xi_i = \tilde{P}\xi_i + \xi_i = V_i + \xi_i \tag{5.2.19}$$

bulunur. (5.2.18) ve (5.2.19) eşitlikleri karşılaştırılırılarak elde edilen eşitliğin teğet, lightlike transversal ve ekran transversal bileşenleri alınırsa (5.2.13) eşitliği elde edilir. Benzer işlemler U_i ve W_α için yapılırsa (5.2.14) ve (5.2.15) eşitlikleri elde edilir. Ayrıca (2.3.4), (2.3.5) ve (5.2.10) eşitliklerinden

$$g(PX,Y) + \sum_{i=1}^{r} u_i(X)\eta_i(Y) = g(X,PY) + \sum_{i=1}^{r} u_i(Y)\eta_i(X),$$

ve

$$\begin{aligned} & g(PX,PY) + \sum_{i=1}^{r}(u_i(X)\eta_i(PY) + u_i(Y)\eta_i(PX)) + \varepsilon_\alpha w_\alpha(X)w_\alpha(Y) \\ = \; & g(PX,Y) + \sum_{i=1}^{r} u_i(X)\eta_i(Y) + g(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. Son iki eşitlikten sırasıyla (5.2.16) ve (5.2.17) eşitlikleri elde edilir.

Lemma 5.2.7 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_X P)Y &= \sum_{i=1}^{r} u_i(Y)A_{N_i}X + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(Y)A_{L_\alpha}X \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} h_i^l(X,Y)U_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,Y)W_\alpha, \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

$$(\nabla_X u_i)Y = -h_i^l(X,PY) - \sum_{j=1}^{n} \tau_{ji}(X)u_j(Y) - \sum_{\alpha=r+1}^{r} \psi_{\alpha i}(X)w_\alpha(Y), \tag{5.2.21}$$

$$(\nabla_X w_\alpha)Y = -h_\alpha^s(X,PY) - \sum_{j=1}^{r} \rho_{j\alpha}(X)u_j(Y) - \sum_{\beta=r+1}^{r} \sigma_{\beta\alpha}(X)w_\beta(Y), \tag{5.2.22}$$

$$\nabla_X V_i = -PA^*_{\xi_i}X - \sum_{j=1}^{r}\tau_{ji}(X)V_j + \sum_{j=1}^{r}h^l_j(X,\xi_i)U_j - \sum_{\alpha=r+1}^{n}\varepsilon_\alpha\psi_{\alpha i}(X)W_\alpha, \quad (5.2.23)$$

$$\nabla_X U_i = PA_{Ni}X + \sum_{j=1}^{r}\tau_{ij}(X)U_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n}\rho_{i\alpha}(X)W_\alpha, \quad (5.2.24)$$

$$\nabla_X W_\alpha = -PA_{L_\alpha}X + \sum_{i=1}^{n}\psi_{\alpha i}(X)U_i + \sum_{\beta=r+1}^{n}\sigma_{\alpha\beta}(X)W_\beta, \quad (5.2.25)$$

$$\begin{aligned} h^l_j(X,V_i) &= -h^l_i(X,V_j), h^s_\alpha(X,V_i) = -\varepsilon_\alpha h^l_i(X,W_\alpha), && (5.2.26)\\ h^l_j(X,U_i) &= -h^*_i(X,V_j), h^s_\alpha(X,U_i) = -\varepsilon_\alpha h^*_i(X,W_\alpha), && (5.2.27)\\ \varepsilon_\beta h^s_\beta(X,W_\alpha) &= -\varepsilon_\alpha h^s_\alpha(X,W_\beta) && (5.2.28)\end{aligned}$$

dır.

İspat: $\tilde{\nabla}\tilde{P} = 0$ olduğundan her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{P}Y = \tilde{P}\tilde{\nabla}_X Y \quad (5.2.29)$$

olur. Bu eşitlikte (5.1.8), (5.1.9), (5.1.10), (5.2.8) ve (5.2.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\nabla_X PY + \sum_{i=1}^{r}h^l_i(X,PY)N_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n}h^s_\alpha(X,PY)L_\alpha + \sum_{i=1}^{r}X(u_i(Y))N_i + \\ &\sum_{i=1}^{r}u_i(Y)(-A_{N_i}X + \sum_{j=1}^{r}\tau_{ij}(X)N_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n}\rho_{i\alpha}(X)L_\alpha) + \sum_{\alpha=r+1}^{n}X(w_\alpha(Y))L_\alpha \\ &+ \sum_{\alpha=r+1}^{n}w_\alpha(Y)(-A_{L_\alpha}X + \sum_{i=1}^{r}\psi_{\alpha i}(X)N_i + \sum_{\beta=r+1}^{n}\sigma_{\alpha\beta}(X)L_\beta) \\ = \quad &P\nabla_X Y + \sum_{i=1}^{r}u_i(\nabla_X Y)N_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n}w_\alpha(\nabla_X Y)L_\alpha + \sum_{i=1}^{r}h^l_i(X,Y)U_i \\ &+ \sum_{\alpha=r+1}^{n}h^s_\alpha(X,Y)W_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin teğet, lightlike transversal ve ekran transversal bileşenleri alınırsa (5.2.20), (5.2.21) ve (5.2.22) eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde, (5.2.29) eşitliğinde Y yerine ξ_i , N_i ve L_α yazılırsa elde eşitliğin teğet, lightlike transversal ve ekran transversal bileşenleri alınırsa (5.2.23)-(5.2.28) arası eşitlikleri elde edilir.

Örnek 5.2.8 $(\mathbb{R}^9_3, \tilde{g})$ bir $(-,+,-,-,+,+,+,+,+)$ işaretli semi-Öklidyen uzay ve $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$, $\mathbb{R}^9_3$ in standart koordinat sistemi olsun. Eğer $\tilde{P}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = ((1-\phi)x_1, \phi x_2, \phi x_3, \phi x_4, (1-\phi)x_5, (1-\phi)x_6, \phi x_7, (1-\phi)x_8, \phi x_9)$ olarak tanımlanırsa $\tilde{P}^2 = \tilde{P} + I$ dır ve $\tilde{P}$, $\mathbb{R}^9_3$ üzerinde bir altın yapıdır. $\tilde{M}$ nin

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{2}\phi t_1 - \sqrt{2}t_2 + \frac{\sqrt{2}}{4(2+\phi)}t_3,\ x_2 = \sqrt{2}t_1 + \sqrt{2}\phi t_2 + \frac{\sqrt{2}}{4(2+\phi)}\phi t_3, \\
x_3 &= t_1 + \phi t_2 - \frac{\phi}{4(2+\phi)}t_3 + t_5 + \sqrt{2}t_6,\ x_4 = t_1 + \phi t_2 - \frac{\phi}{4(2+\phi)}t_3 - t_5 - \sqrt{2}t_6, \\
x_5 &= \sqrt{2}\phi t_1 - \sqrt{2}t_2 - \frac{\sqrt{2}}{4(2+\phi)}t_3,\ x_6 = -t_4 + t_6, \\
x_7 &= \phi t_4 - t_7,\ x_8 = -t_4 - t_6,\ x_9 = \phi t_4 + t_7
\end{aligned}$$

ile verilen bir M altmanifoldunu göz önüne alalım. Burada t_i, $1 \le i \le 7$ ler reel parametrelerdir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
U_1 &= \sqrt{2}\phi\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} + \sqrt{2}\phi\frac{\partial}{\partial x_5}, \\
U_2 &= -\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\phi\frac{\partial}{\partial x_2} + \phi\frac{\partial}{\partial x_3} + \phi\frac{\partial}{\partial x_4} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_5}, \\
U_3 &= \frac{1}{4(2+\phi)}(\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\phi\frac{\partial}{\partial x_2} - \phi\frac{\partial}{\partial x_3} - \phi\frac{\partial}{\partial x_4} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_5}), \\
U_4 &= -\frac{\partial}{\partial x_6} + \phi\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{\partial}{\partial x_8} + \phi\frac{\partial}{\partial x_9}, \\
U_5 &= \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4},\ U_6 = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_6} - \frac{\partial}{\partial x_8},\ U_7 = -\frac{\partial}{\partial x_7} + \frac{\partial}{\partial x_9}
\end{aligned}$$

olmak üzere $TM = Sp\{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7\}$ dir. Bu durumda kolayca görülür ki U_1 bir dejenere vektördür. $\xi = U_1$ olarak alınırsa $RadTM = Sp\{\xi\}$ ve $S(TM)$ $= Sp\{U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7\}$ dir. Böylece M, $9-$boyutlu bir $1-$lightlike altmanifolddur. Bu durumda

$$ltr(TM) = Sp\{N = -\frac{1}{4(2+\phi)}(\sqrt{2}\phi\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} - \sqrt{2}\phi\frac{\partial}{\partial x_5})\}$$

ve

$$S(TM^{\perp}) = Sp\{L = \phi\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{\partial}{\partial x_7} + \phi\frac{\partial}{\partial x_8} + \frac{\partial}{\partial x_9}\}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\tilde{P}\xi = U_2,\ \tilde{P}N = U_3,\ \tilde{P}L = U_4$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D_0 &= Sp\{U_5, U_6, U_7\},\ D_1 = Sp\{U_2\}, \\ D_2 &= Sp\{U_3\},\ D_3 = Sp\{U_4\} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu durumda M, $\tilde{M}$ nin bir semi-invaryant lightlike altmanifoldudur.

Örnek 5.2.9 $(\mathbb{R}^{10}_4, \tilde{g})$ bir $(+,-,-,-,+,+,+,-,+,+)$ işaretli semi-Öklidyen uzay ve $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$, $\mathbb{R}^{10}_4$ in standart koordinat sistemi olsun. Eğer $\tilde{P}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = (\phi x_1, \phi x_2, \phi x_3, (1-\phi)x_4, (1-\phi)x_5, \phi x_6, (1-\phi)x_7, \phi x_8, \phi x_9, \phi x_{10})$ olarak tanımlanırsa $\tilde{P}^2 = \tilde{P} + I$ dır ve $\tilde{P}$, $\mathbb{R}^{10}_4$ üzerinde bir altın yapıdır. M altmanifoldu

$$\begin{aligned}
x_1 &= t_1+\phi t_2+\frac{\phi}{2(2+\phi)}t_3,\ x_2=t_1\cos t_4+\phi t_2\cos t_4-\frac{\phi}{2(2+\phi)}t_3\cos t_4,\\
x_3 &= t_1\sin t_4+\phi t_2\sin t_4-\frac{\phi}{2(2+\phi)}t_3\sin t_4,\ x_4=\phi t_1-t_2+\frac{1}{2(2+\phi)}t_3,\\
x_5 &= \phi t_1-t_2-\frac{1}{2(2+\phi)}t_3,\ x_6=\phi t_5,\ x_7=t_5,\ x_8=t_6+\sqrt{2}t_7+t_8,\\
x_9 &= \sqrt{2}t_6+t_7+\sqrt{2}t_8,\ x_{10}=t_6-t_8
\end{aligned}$$

ile verilsin. Burada t_i, $1\leq i\leq 8$ ler reel parametrelerdir. Bu durumda $TM = Sp\{U_1,U_2,U_3,U_4,U_5,U_6,U_7,U_8\}$ elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}+\cos t_4\frac{\partial}{\partial x_2}+\sin t_4\frac{\partial}{\partial x_3}+\phi\frac{\partial}{\partial x_4}+\phi\frac{\partial}{\partial x_5},\\
U_2 &= \phi\frac{\partial}{\partial x_1}+\phi\cos t_4\frac{\partial}{\partial x_2}+\phi\sin t_4\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_4}-\frac{\partial}{\partial x_5},\\
U_3 &= \frac{1}{2(2+\phi)}(\phi\frac{\partial}{\partial x_1}-\phi\cos t_4\frac{\partial}{\partial x_2}-\phi\sin t_4\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_4}-\frac{\partial}{\partial x_5}),\\
U_4 &= (t_1+\phi t_2-\frac{\phi}{2(2+\phi)}t_3)(-\sin t_4\frac{\partial}{\partial x_2}+\cos t_4\frac{\partial}{\partial x_3}),\ U_5=\phi\frac{\partial}{\partial x_6}+\frac{\partial}{\partial x_7},\\
U_6 &= \frac{\partial}{\partial x_8}+\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_9}+\frac{\partial}{\partial x_{10}},\ U_7=\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_8}+\frac{\partial}{\partial x_9},\ U_8=\frac{\partial}{\partial x_8}+\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_9}-\frac{\partial}{\partial x_{10}}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda kolayca görülür ki U_1 bir dejenere vektördür. $\xi = U_1$ olarak alınırsa $RadTM = Sp\{\xi\}$ ve $S(TM) = Sp\{U_2,U_3,U_4,U_5,U_6,U_7,U_8\}$ dir. Bu durumda

$$ltr(TM) = Sp\{N = -\frac{1}{2(2+\phi)}(-\frac{\partial}{\partial x_1}+\cos t_4\frac{\partial}{\partial x_2}+\sin t_4\frac{\partial}{\partial x_3}+\phi\frac{\partial}{\partial x_4}-\phi\frac{\partial}{\partial x_5})\}$$

ve

$$S(TM^{\perp}) = Sp\{L = \frac{\partial}{\partial x_6}-\phi\frac{\partial}{\partial x_7}\}$$

olarak bulunur. Böylece M, $10-$boyutlu bir $1-$lightlike altmanifoldudur. Ayrıca

$$\tilde{P}\xi = U_2,\ \tilde{P}N = U_3,\ \tilde{P}L = U_5$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D_0 &= span\{U_4, U_6U_7, U_8\},\ D_1 = span\{U_2\}, \\ D_2 &= span\{U_3\},\ D_3 = span\{U_5\} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu durumda M, $\tilde{M}$ nin bir semi-invaryant lightlike altmanifoldudur.

Teorem 5.2.10 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman D_0 distribüsyonunun M üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(D_0)$ ve her $j \in \{1, ..., r\}$, $\beta \in \{r+1, ..., n\}$ için

$$\begin{aligned} h_j^*(\tilde{P}X, \tilde{P}Y) &= h_j^*(Y, \tilde{P}X) + h_j^*(Y, X), \\ h_j^l(\tilde{P}X, \tilde{P}Y) &= h_j^l(\tilde{P}X, Y) + h_j^l(X, Y), \\ h_\beta^s(\tilde{P}X, \tilde{P}Y) &= h_\beta^s(\tilde{P}X, Y) + h_\beta^s(X, Y), \\ h_j^*(\tilde{P}X, Y) &= h_j^*(Y, \tilde{P}X) \end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat: D_0 distribüsyonu invaryant olduğundan $X \in \Gamma(D_0)$ için $\tilde{P}X \in \Gamma(D_0)$ dir. O zaman D_0 distribüsyonunun M üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(D_0)$, $U_j \in \Gamma(D_1)$, $V_j \in \Gamma(D_2)$, $W_\beta \in \Gamma(D_3)$ ve her $j \in \{1, ..., r\}$, $\beta \in \{r+1, ..., n\}$ için

$$u_j([\tilde{P}X, Y]) = v_j([\tilde{P}X, Y]) = w_\beta([\tilde{P}X, Y]) = \eta_j([\tilde{P}X, Y]) = 0$$

olmasıdır. Bu durumda (5.1.8) ve (5.1.11) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_j(\left[\tilde{P}X,Y\right]) &= g(\left[\tilde{P}X,Y\right],\tilde{P}N_j) = g(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y - \tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}N_j) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y,\tilde{P}N_j) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}N_j) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y,\tilde{P}N_j) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,N_j) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X,N_j) \\ &= h_j^*(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) - h_j^*(Y,\tilde{P}X) - h_j^*(Y,X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_j(\left[\tilde{P}X,Y\right]) &= g(\left[\tilde{P}X,Y\right],\tilde{P}\xi_j) = g(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y - \tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}\xi_j) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{P}Y,\xi_j) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}\xi_j) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{P}Y,\xi_j) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\xi_j) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X,\xi_j) \\ &= h_j^l(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) - h_j^l(Y,\tilde{P}X) - h_j^l(Y,X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_\beta(\left[\tilde{P}X,Y\right]) &= g(\left[\tilde{P}X,Y\right],\tilde{P}L_\beta) = g(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y - \tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}L_\beta) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{P}Y,L_\beta) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,\tilde{P}L_\beta) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{P}Y,L_\beta) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,L_\beta) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y X,L_\beta) \\ &= h_\beta^s(\tilde{P}X,\tilde{P}Y) - h_\beta^s(Y,\tilde{P}X) - h_\beta^s(Y,X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\left[\tilde{P}X,Y\right],N_j) &= g(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y - \tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,N_j) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{P}X}Y,N_j) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{P}X,N_j) \\ &= h_j^*(\tilde{P}X,Y) - h_j^*(Y,\tilde{P}X) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.11 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Eğer D_0 distribüsyonu M üzerinde integrallenebilir ise, o zaman D_0 distribüsyonunun lifi üzerine indirgenen $(1,1)-$tensör alanı altın yapıdır.

İspat: M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu M', D_0 ın lifi olsun. O zaman her $p \in M'$ için $T_pM' = (D_0)_p$ dır. Her $X \in \Gamma(D_0)$ ve her $i \in \{1,...,r\}$, $\alpha \in \{r+1,...,n\}$ için (5.2.9) eşitliğinden $u_i(X) = w_\alpha(X) = 0$ dır. Böylece (5.2.10) eşitliğinden $\tilde{P}X = PX$ olur.

P' ile tanımlanan M' üzerinde $(1,1)-$tensör alanı olsun. D_0 distribüsyonu $\tilde{P}$-invaryant olduğu için $P' = P_{|_{D_0}}$ dır. (2.3.1) eşitliğinden

$$P'^2X = P^2X = \tilde{P}^2X = \tilde{P}X + X = PX + X = P'X + X.$$

olup P', D_0 distribüsyonun lifi üzerinde bir altın yapıdır.

Teorem 5.2.12 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman her $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} h_i^*(X,Z)u_i(Y) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} \varepsilon_\alpha h_\alpha^s(X,Z)w_\alpha(Y) \\ + \sum_{i=1}^{r} h_i^l(X,Y)v_i(Z) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,Y)w_\alpha(Z) &= 0,\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

$$h_i^l(X,Y) = -\sum_{j=1}^{r} h_j^*(X,V_i)u_j(Y) - \sum_{\alpha=r+1}^{n} \varepsilon_\alpha h_\alpha^s(X,V_i)w_\alpha(Y), \tag{5.2.31}$$

$$h_\alpha^s(X,Y) = -\sum_{i=1}^{r} h_i^*(X,W_\alpha)u_i(Y) - \sum_{\beta=r+1}^{n} \varepsilon_\beta h_\beta^s(X,W_\alpha)w_\beta(Y), \tag{5.2.32}$$

$$h_j^*(X,U_i) = h_\alpha^s(X,U_i) = \eta_i(A_{N_j}X) = \rho_{i\alpha}(X) = 0 \tag{5.2.33}$$

dir.

İspat: P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. Bu durumda (5.2.20) eşitliği $Z \in \Gamma(S(TM))$ vektör alanı ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{r} u_i(Y)g(A_{N_i}X,Z) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(Y)g(A_{L_\alpha}X,Z) \\ &+\sum_{i=1}^{r} h_i^l(X,Y)g(U_i,Z) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,Y)g(W_\alpha,Z) \quad = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan (5.2.30) eşitliği bulunur. Benzer şekilde (5.2.20) eşitliği V_i ve W_α vektör alanları ile iç çarpımı alınırsa buradan (5.2.31) ve (5.2.32) eşitliği elde edilir. Ayrıca (5.2.20) eşitliği U_i ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{r} u_j(Y)g(A_{N_j}X,U_i) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(Y)g(A_{L_\alpha}X,U_i) \\ &+\sum_{j=1}^{r} h_j^l(X,Y)g(U_j,U_i) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,Y)g(W_\alpha,U_i) \quad = 0 \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\sum_{j=1}^{r} h_j^*(X,U_i)u_j(Y) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} \varepsilon_\alpha h_\alpha^s(X,U_i)w_\alpha(Y) = 0$$

bulunur. Bu eşitlikte sırasıyla $Y = U_j$ ve $Y = W_\alpha$ yazılırsa $h_j^*(X,U_i) = h_\alpha^s(X,U_i) = 0$ olur. Benzer şekilde (5.2.20) eşitliği N_i vektör alanı ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{r} u_j(Y)g(A_{N_j}X,N_i) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(Y)g(A_{L_\alpha}X,N_i) \\ &+\sum_{j=1}^{r} h_j^l(X,Y)g(U_j,N_i) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,Y)g(W_\alpha,N_i) \quad = 0 \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\sum_{j=1}^{r} u_j(Y)\eta_i(A_{N_j}X) + \sum_{\alpha=r+1}^{n} \varepsilon_\alpha w_\alpha(Y)\rho_{i\alpha}(X) = 0$$

bulunur. Bu eşitlikte sırasıyla $Y = U_j$ ve $Y = W_\alpha$ yazılırsa $\eta_i(A_{N_j}X) = \rho_{i\alpha}(X) = 0$ bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 5.2.13 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman M irrasyoneldir.

İspat: Kabul edelim ki P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. (5.2.32) eşitliğinde $Y=\xi_i$ yazılırsa $h^s_\alpha(X,\xi_i)=-\varepsilon_\alpha\psi_{\alpha i}(X)=0$ olur. Bu ise M nin irrasyonel olması demektir.

Teorem 5.2.14 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman her $X\in\Gamma(TM)$ aşağıdakiler vardır.

i) V_i vektör alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise o zaman $\tau_{ji}(X)=h^l_i(X,U_j)=0$ ve

$$A^*_{\xi_i}X = \sum_{j=1}^{r} u_j(A^*_{\xi_i}X)U_j+\sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(A^*_{\xi_i}X)W_\alpha, \quad (5.2.34)$$

$$h^*_j(X,\xi_i) = h^l_i(X,V_j),\ h^l_i(X,W_\alpha)=-\psi_{\alpha i}(X) \quad (5.2.35)$$

dır.

ii) U_i vektör alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise o zaman $h^*_i(X,U_j)=0$ ve

$$A_{N_i}X=\sum_{j=1}^{r} u_j(A_{N_i}X)U_j+\sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(A_{N_i}X)W_\alpha, \quad (5.2.36)$$

$$\tau_{ij}(X)=u_j(A_{N_i}X)=h^*_i(X,V_j),\ \rho_{i\alpha}(X)=w_\alpha(A_{N_i}X)=\varepsilon_\alpha h^*_i(X,W_\alpha) \quad (5.2.37)$$

dır.

iii) W_α vektör alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise o zaman $\rho_{i\alpha}(X)=h^s_\alpha(X,U_i)=0$ ve

$$A_{L_\alpha}X=\sum_{i=1}^{r} u_i(A_{L_\alpha}X)U_i+\sum_{\beta=r+1}^{n} w_\beta(A_{L_\alpha}X)W_\beta, \quad (5.2.38)$$

$$\psi_{\alpha i}(X) = u_i(A_{L_\alpha}X) = \varepsilon_\alpha h^s_\alpha(X,V_i),\ \sigma_{\alpha\beta}(X) = w_\beta(A_{L_\alpha}X) = \varepsilon_\alpha h^s_\alpha(X,W_\beta) \tag{5.2.39}$$

dır.

Ayrıca $\{V_i, U_i, W_\alpha\}$ vektör alanlarının hepsi M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise o zaman $S(TM)$, M de tamamen geodezik ve $\tau_{ji}(X) = \rho_{i\alpha}(X) = 0$ dır.

İspat: V_i vektör alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için (5.2.23) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &-\tilde{P}A^*_{\xi_i}X + \sum_{j=1}^{r} u_j(A^*_{\xi_i}X)N_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(A^*_{\xi_i}X)L_\alpha \\ &-\sum_{j=1}^{r}\tau_{ji}(X)V_j + \sum_{j=1}^{r} h^l_j(X,\xi_i)U_j - \sum_{\alpha=r+1}^{r}\varepsilon_\alpha\psi_{\alpha i}(X)W_\alpha \quad = 0 \end{aligned} \tag{5.2.40}$$

bulunur. (5.2.40) eşitliğine $\tilde{P}$ uygulanırsa ve (2.3.1), (5.2.8) ve (5.2.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} &-PA^*_{\xi_i}X - A^*_{\xi_i}X - \tau_{ji}(X)V_j + \sum_{j=1}^{r} u_j(A^*_{\xi_i}X)U_j \\ &+\sum_{j=1}^{r} h^l_j(X,\xi_i)U_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(A^*_{\xi_i}X)W_\alpha - \sum_{\alpha=r+1}^{n}\varepsilon_\alpha\psi_{\alpha i}(X)W_\alpha \\ &-\sum_{j=1}^{r}\tau_{ji}(X)\xi_j - \sum_{j=1}^{r} u_j(A^*_{\xi_i}X)N_j + \sum_{j=1}^{r} h^l_j(X,\xi_i)N_j \\ &-\sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(A^*_{\xi_i}X)L_\alpha - \sum_{\alpha=r+1}^{r}\varepsilon_\alpha\psi_{\alpha i}(X)L_\alpha \qquad = 0 \end{aligned} \tag{5.2.41}$$

bulunur. (5.2.41) eşitliğinden (5.2.40) eşitliği çıkartılırsa

$$\begin{aligned} &-A^*_{\xi_i}X + \sum_{j=1}^{r} u_j(A^*_{\xi_i}X)U_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(A^*_{\xi_i}X)W_\alpha - \sum_{j=1}^{r}\tau_{ji}(X)\xi_j \\ &-\sum_{j=1}^{r} u_j(A^*_{\xi_i}X)N_j + \sum_{j=1}^{r} h^l_j(X,\xi_i)N_j - \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(A^*_{\xi_i}X)L_\alpha - \sum_{\alpha=r+1}^{r}\varepsilon_\alpha\psi_{\alpha i}(X)L_\alpha \quad = 0 \end{aligned} \tag{5.2.42}$$

olur ve (5.2.42) eşitliğinin teğet, lightlike transversal ve ekran transversal bileşenleri alınırsa

$$\begin{aligned} A^*_{\xi_i}X &= \sum_{j=1}^{r} u_j(A^*_{\xi_i}X)U_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(A^*_{\xi_i}X)W_\alpha - \sum_{j=1}^{r}\tau_{ji}(X)\xi_j, \\ h^l_j(X,\xi_i) &= h^l_i(X,V_j),\ \psi_{\alpha i}(X) = -h^l_i(X,W_\alpha) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\tau_{ji}(X) = 0$ bulunur. Ayrıca (5.2.34) eşitliği U_j ile çarpılırsa $h^l_i(X,U_j) = 0$ olur. Böylece (i) elde edilir. Benzer şekilde (ii) ve (iii) de elde edilebilir.

$\{V_i,U_i,W_\alpha\}$ vektör alanlarının hepsi M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. (5.2.36) eşitliğinden

$$A_{N_i}X = \sum_{j=1}^{r} u_j(A_{N_i}X)U_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(A_{N_i}X)W_\alpha$$

idi. (i) den $\tau_{ji}(X) = h^l_i(X,U_j) = 0$ idi. (5.2.27) eşitliğinden

$$h^l_i(X,U_j) = -h^*_j(X,V_i) = -g(A_{N_j}X,V_i) = u_i(A_{N_j}X) = 0$$

olur. Buradan $u_i(A_{N_j}X) = 0$ bulunur. Benzer şekilde (iii) den $\rho_{i\alpha}(X) = h^s_\alpha(X,U_i) = 0$ olup (5.2.27) eşitliğinden

$$h^s_\alpha(X,U_i) = -\varepsilon_\alpha h^*_i(X,W_\alpha) = -\varepsilon_\alpha g(A_{Ni}X,W_\alpha) = -w_\alpha(A_{Ni}X) = 0$$

olur. Buradan $w_\alpha(A_{Ni}X) = 0$ bulunur. Böylece $A_{Ni} = 0$ olur yani M tamamen geodezik olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.15 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman P ve V_i vektor alanı M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise $S(TM)$ $\tilde{M}$ de tamamen geodeziktir ve $\tau_{ji}(X) = \rho_{i\alpha}(X) = 0$ dır.

İspat: P ve V_i vektor alanı M üzerinde paralel olduğunu varsayalım. Bu durumda (5.2.20) eşitliğinde $Y = U_j$ alınırsa $A_{Ni}X = -\sum_{i=1}^{n} h_i^l(X,U_j)U_i - \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,U_j)W_\alpha$ olur. Teorem 5.2.12 ve Teorem 5.2.14 (i) den $\rho_{i\alpha}(X) = h_\alpha^s(X,U_i) = \tau_{ji}(X) = h_i^l(X,U_j) = 0$ idi. Buradan her $X \in \Gamma(TM)$ için $A_{Ni}X = 0$ yani $C = 0$ bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.16 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman M nin tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart her $X \in \Gamma(TM)$, $U_i \in \Gamma(D_2)$ ve $W_\alpha \in \Gamma(D_3)$ için

$$(\nabla_X P)Y = 0, \qquad (5.2.43)$$

$$(\nabla_X P)U_i = A_{N_i}X, \qquad (5.2.44)$$

$$(\nabla_X P)W_\alpha = A_{L_\alpha}X \qquad (5.2.45)$$

olmasıdır.

İspat: M nin tamamen geodezik olduğunu varsayalım. Her $Y \in \Gamma(D)$ ve her $i \in \{1,...,r\}$, $\alpha \in \{r+1,...,n\}$ için $u_i(Y) = w_\alpha(Y) = 0$ olur ve (5.2.20) eşitliğinde $Y \in \Gamma(D)$ alınırsa $(\nabla_X P)Y = 0$ bulunur. (5.2.20) eşitliğinde $Y = U_i$ alınırsa $(\nabla_X P)U_i = A_{N_i}X$ olur. Benzer şekilde (5.2.20) eşitliğinde Y yerine W_α yazılırsa $(\nabla_X P)W_\alpha = A_{L_\alpha}X$ elde edilir.

Tersine, (5.2.43), (5.2.44) ve (5.2.45) eşitliklerinin olduğunu varsayalım. $Y \in \Gamma(TM)$ için (5.2.6) ayrışımı kullanılırsa $Y = Y_d + \sum_{j=1}^{r} f_j U_j + \sum_{\beta=r+1}^{n} g_\beta W_\beta$ olacak biçimde $Y_d \in \Gamma(D)$, f_j ve g_β fonksiyonları vardır. Buradan $Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} h_i^l(X,Y) &= h_i^l(X, Y_d + \sum_{j=1}^{r} f_j U_j + \sum_{\beta=r+1}^{n} g_\beta W_\beta) \\ &= h_i^l(X,Y_d) + \sum_{j=1}^{r} f_j h_i^l(X,U_j) + \sum_{\beta=r+1}^{n} g_\beta h_i^l(X,W_\beta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_\alpha^s(X,Y) &= h_\alpha^s(X, Y_d + \sum_{j=1}^{r} f_j U_j + \sum_{\beta=r+1}^{n} g_\beta W_\beta) \\ &= h_\alpha^s(X,Y_d) + \sum_{j=1}^{r} f_j h_\alpha^s(X,U_j) + \sum_{\beta=r+1}^{n} g_\beta h_\alpha^s(X,W_\beta) \end{aligned}$$

yazılabilir. (5.2.20) eşitliğinde Y yerine Y_d alınırsa ve (5.2.43) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{r} h_i^l(X,Y_d)U_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,Y_d)W_\alpha = -\sum_{i=1}^{r} u_i(Y_d)A_{N_i}X - \sum_{\alpha=r+1}^{n} w_\alpha(Y_d)A_{L_\alpha}X$$

bulunur. Bu eşitliği, sırasıyla, V_i ve W_α ile iç çarpımı alınırsa $h_i^l(X,Y_d) = h_\alpha^s(X,Y_d) = 0$ bulunur. (5.2.20) eşitliğinde Y yerine U_i yazılırsa ve (5.2.44) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{j=1}^{r} h_j^l(X,U_i)U_j + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,U_i)W_\alpha = 0$$

bulunur. Bu eşitlik, sırasıyla, V_j ve W_α ile çarpılırsa $h_j^l(X,U_i) = h_\alpha^s(X,U_i) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde (5.2.20) eşitliğinde Y yerine W_β yazılırsa ve (5.2.45) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{r} h_i^l(X,W_\beta)U_i + \sum_{\alpha=r+1}^{n} h_\alpha^s(X,W_\beta)W_\alpha = 0$$

bu eşitlik, sırasıyla, V_i ve W_α ile çarpılırsa $h_i^l(X,W_\beta) = h_\beta^s(X,W_\beta) = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.17 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise, o zaman D ve $D^{\perp}$ integrallenebilirdir ve M, $M^{\sharp}\times M^{\flat}$ lokal çarpım yapısına sahiptir. Burada $M^{\sharp}$ ve $M^{\flat}$, sırasıyla, D ve $D^{\perp}$ nin lifidir.

İspat: P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre, sırasıyla, D ve $D^{\perp}$ nin paralel olması için gerek ve yeter koşul her $X\in\Gamma(D)$, $Y\in\Gamma(D_0)$ ve $Z\in\Gamma(D^{\perp})$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_X\xi_i,V_j) &= g(\nabla_X V_i,V_j)=g(\nabla_X Y,V_i)=0,\\ g(\nabla_X\xi_i,W_\alpha) &= g(\nabla_X V_i,W_\alpha)=g(\nabla_X Y,W_\alpha)=0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z U_i,N_j) &= g(\nabla_Z U_i,U_j)=g(\nabla_Z U_i,Y)=0,\\ g(\nabla_Z W_\alpha,N_i) &= g(\nabla_Z W_\alpha,U_i)=g(\nabla_X W_\alpha,Y)=0 \end{aligned}$$

olmasıdır. (2.3.5), (5.1.8), (5.1.21) eşitlikleri ve $\tilde{\nabla}$ nın metrik konneksiyon oluşu kullanılırsa $X\in\Gamma(D)$ ve $Y\in\Gamma(D_0)$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_X\xi_i,V_j) &= -h_i^l(X,V_j),\ g(\nabla_X\xi_i,W_\alpha)=-h_i^l(X,W_\alpha),\\ g(\nabla_X V_i,V_j) &= h_j^l(X,V_i)+h_j^l(X,\xi_i),\\ g(\nabla_X V_i,W_\alpha) &= -h_i^l(X,W_\alpha)-\psi_{\alpha i}(X), \qquad (5.2.46)\\ g(\nabla_X Y,V_i) &= h_i^l(X,\tilde{P}Y),\ g(\nabla_X Y,W_\alpha)=\varepsilon_\alpha h_\alpha^s(X,\tilde{P}Y) \end{aligned}$$

olur. (2.3.5), (5.1.8), (5.1.9), (5.1.11), (5.1.15) eşitlikleri ve $\tilde{\nabla}$ nın metrik konneksiyon oluşu kullanılırsa $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z U_i, N_j) &= h_j^*(Z,U_i),\; g(\nabla_Z U_i, Y) = -h_i^*(Z,\tilde{P}Y), \\ g(\nabla_Z U_i, U_j) &= h_j^*(Z,U_i) + \eta_i(A_{N_j}Z), \\ g(\nabla_Z W_\alpha, U_i) &= h_i^*(Z,W_\alpha) - \varepsilon_\alpha \rho_{i\alpha}(Z), \\ g(\nabla_Z W_\alpha, N_i) &= -\varepsilon_\alpha h_\alpha^s(Z,U_i),\; g(\nabla_Z W_\alpha, Y) = -h_\alpha^s(Z,\tilde{P}Y) \end{aligned} \tag{5.2.47}$$

bulunur.

(5.2.31) eşitliğinde, sırasıyla, $Y = V_j$ ve $Y = W_\alpha$ alınırsa her $X \in \Gamma(TM)$ için $h_i^l(X,V_j) = h_i^l(X,W_\alpha) = 0$ elde edilir. (5.2.31) eşitliğinde Y yerine ξ_j alınırsa $h_i^l(X,\xi_j) = 0$ bulunur. Sonuç 5.2.13 ten $\psi_{\alpha i}(X) = 0$ idi. D_0 invaryant olup $Y \in \Gamma(D_0)$ için $\tilde{P}Y \in \Gamma(D_0)$ olur. (5.2.31) ve (5.2.32) eşitliklerinde $Y \in \Gamma(D_0)$ yerine $\tilde{P}Y$ yazılırsa $h_i^l(X,\tilde{P}Y) = h_\alpha^s(X,\tilde{P}Y) = 0$ bulunur. Ayrıca Teorem 5.2.12 den $X \in \Gamma(TM)$ için $h_\alpha^s(X,U_i) = h_j^*(X,U_i) = \eta_i(A_{N_j}X) = \rho_{i\alpha}(X) = 0$ olur. (5.2.27) eşitliğinden $\varepsilon_\alpha h_i^*(Z,W_\alpha) = -h_\alpha^s(Z,U_i) = 0$ bulunur. (5.2.30) eşitliğinde X, Y, Z yerine, sırasıyla, $Z \in \Gamma(D^{\perp})$, U_i, $\tilde{P}Y \in \Gamma(D_0)$ yazılırsa ve $h_\alpha^s(Z,U_i) = 0$ oluşu kullanılırsa $h_i^*(Z,\tilde{P}Y) = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 5.2.18 $(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve $(M,g,S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin irrasyonel lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda her i için

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi_i) = 0 \tag{5.2.48}$$

dir (Jin ve Lee, 2015).

Teorem 5.2.19 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ altın uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin irrasyonel semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $c_p = c_q = 0$ dır.

İspat: $(M,g,S(TM))$ $\tilde{M}$ nin irrasyonel semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Önerme 5.2.18 den her i için

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi_i)=0$$

idi. Bu durumda (2.3.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi_i) &= (-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})\{\tilde{g}(\tilde{P}Y,Z)u_i(X)-\tilde{g}(\tilde{P}X,Z)u_i(Y)\} \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4})\{\tilde{g}(Y,Z)u_i(X) \\ &\quad -\tilde{g}(X,Z)u_i(Y)\}\end{aligned} \tag{5.2.49}$$

olur. (5.2.49) eşitliğinde, sırasıyla, $X=U_i$, $Y=\xi_i$, $Z=U_i$ ve $X=U_i$, $Y=V_i$, $Z=U_i$ yazılırsa

$$(-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})=0 \tag{5.2.50}$$

ve

$$(-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})+(-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4})=0 \tag{5.2.51}$$

elde edilir. Böylece (5.2.50) ve (5.2.51) eşitliklerinden $c_p=c_q=0$ bulunur. Buradan ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.2.20 $(\tilde{M}=M_p(c_p)\times M_q(c_q),\tilde{g},\tilde{P})$, $c_p,c_q\neq 0$ olmak üzere lokal altın çarpım uzay formunun irrasyonel semi-invaryant lightlike altmanifoldu yoktur.

Teorem 5.2.21 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman M tamamen geodeziktir.

İspat: $(M,g,S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin tamamen umbilik semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman (5.2.26) eşitliğinde her $X\in\Gamma(TM)$ için

$$h^s_\alpha(X,V_i)=-\varepsilon_\alpha h^l_i(X,W_\alpha)$$

olup M nin tamamen umbilik oluşu kullanılırsa

$$B_\alpha g(X,V_i) = -\varepsilon_\alpha A_i g(X,W_\alpha) \tag{5.2.52}$$

bulunur. (5.2.52) eşitliğinde Y yerine, sırasıyla, U_i ve W_α yazılırsa her i ve α için $A_i = B_\alpha = 0$ bulunur. Böylece $h_i^l = h_\alpha^s = 0$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.22 $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M tamamen umbilik ise $c_p = c_q = 0$ dir.

İspat: M nin tamamen umbilik olduğunu varsayalım. Her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için (5.1.27) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi_i) &= (\nabla_X h_i^l)(Y,Z) - (\nabla_Y h_i^l)(X,Z) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r} \{h_i^l(Y,Z)\tau_{ji}(X) - h_i^l(X,Z)\tau_{ji}(Y)\} \\
&\quad + \sum_{\alpha=r+1}^{n} \{h_\alpha^s(Y,Z)\psi_{\alpha i}(X) - h_\alpha^s(X,Z)\psi_{\alpha i}(Y)\},
\end{aligned}$$

idi. Böylece Teorem 5.2.21 den

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi_i) = 0 \tag{5.2.53}$$

olur. Ayrıca (5.2.49), (5.2.50), (5.2.51) ve (5.2.53) eşitliklerinden $c_p = c_q = 0$ bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

$\{E_1,\ldots,E_m,\xi_1,\ldots,\xi_r\}$, T_pM nin quasi-orthonormal çatısı olmak üzere M nin indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k g(R(E_k,X)Y,E_k) + \sum_{j=1}^{r} \tilde{g}(R(\xi_j,X)Y,N_j) \tag{5.2.54}$$

dir. Burada $\varepsilon_k = g(E_k, E_k) = \pm 1$, $\{E_1, ..., E_m\}$ $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bazı, $\{\xi_1, ..., \xi_r\}$ ve $\{N_1, ..., N_r\}$ sırasıyla $\Gamma(RadTM)$ ve $\Gamma(ltr(TM))$ nin ortonormal bazı ve her $i, j \in \{1, ..., r\}$ için $\bar{g}(\xi_i, N_j) = \delta_{ij}$ dir. Genelde bir lightlike altmanifoldu $R^{(0,2)}$ Ricci tensörü simetrik değildir. M lightlike altmanifoldunun indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ simetrik ise indirgenmiş Ricci tensör olarak adlandırılır ve Ric ile gösterilir.

$(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ altın uzay formu ve M, $\tilde{M}$ nin semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X,Y) &= (-\frac{(1-\phi)c_p - \phi c_q}{2\sqrt{5}})\{(m+r-2)\tilde{g}(X,Y) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} v_i(X)u_i(Y) + (iz(\tilde{P})-1)\tilde{g}(\tilde{P}X,Y) \\ &\quad +(-\frac{(1-\phi)c_p + \phi c_q}{4})\{(m+r-2)\tilde{g}(\tilde{P}X,Y) \\ &\quad + iz(\tilde{P})\bar{g}(X,Y) - \sum_{i=1}^{r}\eta_i(X)u_i(Y)\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r}(h_i^l(X,Y)h_i^*(e_k,e_k) - h_i^l(e_k,Y)h_i^*(X,e_k)) \qquad (5.2.55) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m}\sum_{\alpha=r+1}^{n}(h_\alpha^s(e_k,e_k)h_\alpha^s(X,Y) - h_\alpha^s(X,e_k)h_\alpha^s(e_k,Y)) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{r}(h_j^l(X,Y)\eta_i(A_{N_j}\xi_i) - h_j^l(\xi_i,Y))\eta_i(A_{N_j}X)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha=r+1}^{n}(h_\alpha^s(X,Y)\rho_{i\alpha}(\xi_i) - h_\alpha^s(\xi_i,Y)\rho_{i\alpha}(X)) \end{aligned}$$

olur ve (5.2.55) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
R^{(0,2)}(X,Y)-R^{(0,2)}(Y,X) = {} & \sum_{i=1}^{r}\{(-\frac{(1-\phi)c_p-\phi c_q}{2\sqrt{5}})(u_i(X)v_i(Y)-u_i(Y)v_i(X)) \\
& +(-\frac{(1-\phi)c_p+\phi c_q}{4})(u_i(X)\eta_i(Y)-u_i(Y)\eta_i(X)) \\
& +\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r}(h_i^l(e_k,X)h_i^*(Y,e_k)-h_i^l(e_k,Y)h_i^*(X,e_k)) \\
& +\sum_{i,j=1}^{r}(h_j^l(\xi_i,X)\eta_i(A_{N_j}Y)-h_j^l(\xi_i,Y)\eta_i(A_{N_j}X)) \\
& +\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha=r+1}^{n}(h_\alpha^s(\xi_i,X)\rho_{i\alpha}(Y) \qquad (5.2.56) \\
& -h_\alpha^s(\xi_i,Y)\rho_{i\alpha}(X)).
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece (5.2.56) eşitliğinden Teorem 5.2.23 elde edilir.

Teorem 5.2.23 $(\tilde{M}=M_p(c_p)\times M_q(c_q),\tilde{g},\tilde{P})$ altın uzay formu ve $(M,g,S(TM))$ de $\tilde{M}$ tamamen umbilik semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. O zaman indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ simetriktir.

İspat: Teorem 5.2.22 ve (5.2.56) eşitliğinden ispat açıktır.

$(\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riemann manifoldu ve $(M,g,S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin lightlike altmanifoldu olsun. Eğer her $X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $i\in\{1,...,r\}$ için

$$h_i^*(X,QY)=\varphi_i h_i^l(X,Y),\forall X,Y\in\Gamma(TM),i\in\{1,...,r\} \qquad (5.2.57)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı φ_i diferansiyellenebilir fonksiyonları varsa M ye ekran (screen) konformal denir.

Teorem 5.2.24 $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{P})$ altın semi-Riemann manifoldu ve $(M,g,S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin ekran konformal semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Eğer P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel ise $S(TM)$ $\tilde{M}$ de tamamen geodezikdir ve $\rho_{i\alpha}(X) = 0$ dır.

İspat: P, M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre paralel olsun. (5.2.20) eşitliğinde $Y = U_i$ alınırsa $A_{Ni}X = -\sum_{j=1}^{n} h^l_j(X,U_i)U_j - \sum_{\alpha=r+1}^{n} h^s_\alpha(X,U_i)W_\alpha$ bulunur. Teorem 5.2.12 den $h^s_\alpha(X,U_i) = 0$ idi. (5.2.31) eşitliğinde $Y = V_j$ alınırsa $h^l_i(X,V_j) = 0$ elde edilir. Buradan (5.2.27) ve (5.2.57) eşitlikleri kullanılırsa $0 = h^l_i(X,V_j) = \varphi h^*_i(X,V_j) = -\varphi h^l_j(X,U_i)$ olur. Böylece $A_{Ni} = 0$ bulunur ve ispat tamamlanır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde altın semi-Riemann manifoldların lightlike hiperyüzeyleri, half lightlike altmanifoldları ve altmanifoldları incelendi. İlk olarak altın semi-Riemann manifoldların invaryant, screen semi-invaryant ve radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeyler tanıtıldı. Altın semi-Riemann manifoldların radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeyinin olmadığı gösterildi. Özellikle screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyler çalışıldı ve screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey olacak şekilde iki örnek verildi. Burada oluşan distribüsyonların için bazı geometrik sonuçlar incelendi. Altın uzay formunun lightlike hiperyüzeyinin lokal simetrik olması için gerek ve yeter şart tamamen geodezik olması gerektiği gösterildi. M lightlike hiperyüzeyinin hangi şartlarda lokal çarpım yapısına sahip olduğu gösterildi. $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$, $c_p, c_q \neq 0$ olmak üzere lokal altın çarpım uzay formunun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olmadığı gösterildi. Lokal altın çarpım uzay formunun ekran konformal screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyinin Ricci tensörünün simetrik olduğu gösterildi.

Altın semi-Riemann manifoldunun invaryant, screen semi-invaryant ve radikal anti-invaryant half lightlike altmanifoldları tanıtıldı. Altın semi-Riemann manifoldların radikal anti-invaruant half lightlike altmanifoldlarının olmadığı gösterildi. Screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldları için bazı geometrik sonuçlar elde edildi. Ayrıca screen semi-invaryant half lightlike altmanifold olacak şekilde iki örnek oluşturuldu. Altın semi-Riemann manifoldunun tamamen umbilik screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldunun tamamen geodezik ve lokal çarpım yapısına sahip olduğu gösterildi. Lokal altın çarpım uzay formunun screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldunun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şartın τ nun kapalı olması gerektiği gösterildi. M, $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$ lokal altın çarpım uzay formunun screen semi-invaryant half lightlike altmanifoldu ise $c_p = -(\phi + 1)c_q$ olduğu gösterildi.

Altın semi-Riemann manifoldunun invaryant, semi-invaryant ve radikal anti-invariant lightlike altmanifoldları tanıtıldı. Altın semi-Riemann manifoldların radikal anti-invaryant lightlike altmanifoldlarının olmadığı gösterildi. Semi-invaryant lightlike altmanifoldları incelendi ve burada oluşan distribüsyonların integrallenebilme şartları incelendi. M altmanifoldunun hangi şartlarda lokal çarpım yapısına sahip olduğu gösterildi. Semi-invaryant lightlike altmanifold olacak şekilde iki örnek verildi. $(\tilde{M} = M_p(c_p) \times M_q(c_q), \tilde{g}, \tilde{P})$, $c_p, c_q \neq 0$ lokal altın çarpım uzay formunun irrasyonel semi-invaryant lightlike altmanifoldunun olmadığı gösterildi.

Altın semi-Riemann manifoldunun screen semi-invaryant lightlike altmanifoldları çalışılabilir. Burada oluşan distribüsyonların integrallenebilmesi için sonuçlar bulunabilir. Ricci tensörünün simetrik olması için şartlar bulunabilir. Ayrıca altın semi-Riemann manifoldunun screen transversal ve screen transversal anti-invariant lightlike altmanifoldları incelenebilir. Burada oluşan distribüsyonların paralel olması ve integrallenebilmesi için sonuçlar elde edilebilir. Ricci tensörünün simetrik olması için şartlar araştırılabilir. Altın semi-Riemann manifoldlar üzerinde farklı lightlike altmanifoldlar tanımlanıp çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Atindogbe C. and Duggal K. L., 2004. Conformal screen on lightlike hypersurfaces. Int. J. Pure Appl. Math., 11(4):421-442.

Atçeken, M., 2005. Submanifolds of Riemannian Product Manifolds. Turk J Math., 29(4):389-401

Atçeken, M. and Kılıç, E., 2007. Semi-Invariant Lightlike Submanifolds of a Semi-Riemannian Product Manifold. Kodai Math. J., 30(3):361-378.

Bahadır, O., 2015. Screen Semi-Invariant Half-Lightlike Submanifolds of a Semi-Riemannian Product Manifold. Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, 4(2):116-124.

Bejancu, A., 1978. CR-submanifolds of a Kaehler manifold. Proc. Amer. Math. Soc., 69(1):135-142.

Bejancu, A., and Papaghuic, N. (1981). Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold. An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat., 27:163-170.

Bejancu, A. and Duggal, K.L., 1991. Degenerate hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds. Bull. Inst. Politehnic Iasi, 37(41)(1-4):13–22.

Bejancu A., 1996. Null hypersurface in semi-Euclidean space, Saitama Math. J., 14:25-40.

Chen, B.Y., 1973. Geometry of Submanifolds, M. Dekker, Newyork, 305s.

Chen B.-Y. (2011). Pseudo-Riemannian geometry, $\delta-$invariants and applications. World Scientific Publishing, Hackensack, NJ.

Crasmareanu, M. and Hretcanu, C. E., 2008. Golden differential geometry. Chaos, Solitons & Fractals, 38(5):1229–1238.

Duggal, K. L. and Jin D. H., 1999. Half lightlike submanifolds of codimension 2, Math. J. Toyama Univ, 22:121–161.

Duggal K. L., Bejancu A., 1992. Lightlike submanifolds of codimension two. Math. J. Toyama Univ., 15:59-82.

Duggal, K. L. and Bejancu, A., 1996. Lightlike Submanifold of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 364.

Duggal, K. L. and Jin D. H., 2003. Totally umbilical lightlike submanifolds. Kodai Math. J. 26(1):49–68.

Duggal, K. L. and Jin D. H., 2007. Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds. World Scientific, 304s.

Duggal, K. L. and Jin D. H., 2010. A Classification of Einstein lightlike hypersurfaces of a Lorentzian space form, J. Geom. Phys., 60(12):1881-1889.

Duggal, K. L. and Şahin, B., 2004. Screen conformal half-lightlike submanifolds, Int.. J. Math. and Math. Sci., 68:3737–3753.

Duggal, K. L. and Şahin, B., 2005. Screen Cauchy-Riemann lightlike submanifolds, Acta Math. Hungar., 106(1-2), 137–165.

Duggal, K. L. and Şahin, B., 2006. Generalized Cauchy-Riemann lightlike submanifolds of Kaehler manifolds, Acta Math. Hungar., 112(1-2), 113-136.

Duggal, K. L. and Şahin, B., 2007. Lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds, Int.. J. Math. and Math. Sci., Article ID 57585, 2007:1-21.

Duggal, K.L. and Şahin, B., 2009. Generalized Cauchy-Rieman lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds, Acta Math. Hungar., 122(1-2), 45-58.

Duggal K. L. and Şahin B., 2010. Differential Geometry of Lightlike Submanifolds, Birkhäuser Verlag AG, Berlin, 475s.

Gezer A., Cengiz N., Salimov A., 2013. On integrability of Golden Riemannian structures, Turk J Math., 37(4):693-703.

Goldberg S.I. and Yano K., 1970. Polynomial structures on manifolds, Kodai Math. Sem. Rep., 22:199–218.

Güneş R., Şahin B., and Kılıç, E., 2003. On lightlike hypersurfaces of semi-Riemannian space form, Turk J Math., 27(2):283-297.

Hretcanu, C.E., 2007. Submanifolds in Riemannian manifold with golden structure, Workshop on Finsler Geometry and its Applications, Hungary.

Hretcanu, C.E. and Crasmareanu M., 2007. On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with Golden structure, An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.) 53(1):199–211.

Hretcanu, C.E. and Crasmareanu M., 2009. Applications of the golden ratio on Riemannian manifolds. Turk J Math., 33(2):179-191.

Jin D. H., 2010a. Screen conformal Einstein lightlike hypersurfaces of a Lorentzian space form, submitted in Commun. Korean Math. Soc., 25:225-234.

Jin D. H., 2010b. Screen conformal lightlike real hypersurfaces of an indefinite complex space form, Bull. Korean Math. Soc. 47(2):341-353.

Jin D. H., 2010c. Geometry of screen conformal real half lightlike submanifolds, Bull. Korean Math. Soc. 47(4), 701-714.

Jin D. H., 2011. Real Half-Lightlike Submanifolds of an Indefinite Kaehler Manifold, Commun. Korean Math. Soc. 26(4):635-647.

Jin D. H., 2014. Indefinite generalized Sasakian space form admitting a generic lightlike submanifold, Bull. Korean Math. Soc., 51(6):1711-1726.

Jin D. H. and Lee W. J., 2015. Generic lightlike submanifolds of an indefinite kaehler manifold, International Journal of Pure and Applied Mathematics., 101(4):543-560.

Heyrovska R., 2005. The Golden ratio ionic and atomic radii and bond lengths. Mol Phys. (103):877.82.

Kılıç, E. and Bahadır, O., 2012. Lightlike hypersurfaces of a semi-Riemannian product manifold and quarter-symmetric nonmetric connections, Int. J. Math. Math. Sci..

Kılıç, E. and Şahin, B., 2008. Radical Anti-Invariant Lightlike Submanifolds of a Semi-Riemannian Product Manifold. Turk J Math., 32: 429-449.

Kobayashi, M., 1981. CR-submanifolds of a Sasakian manifold. Tensor, 35:297-307.

Kupeli D. N., 1996. Singular Semi-Riemannian Geometry, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 366s, 1996.

Marek-Crnjac L., 2006. The Golden mean in the topology of four-manifolds in conformal field theory in the mathematical probability theory and in Cantorian spacetime. Chaos, Solitons& Fractals, 28(5):1113-1118.

Matsumoto, K., Shadid, M.H. and Mihai, I. 1994. Semi-invariant submanifolds of certain almost contact manifolds.Yamagata Univ. Nat. Sci., 13(3):183-192.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, London.

Özkan, M., 2014. Prolongations of golden structures to tangent bundles, Diff. Geom. Dyn. Syst., 16:227-238.

Perktaş, S. Y., Kılıç, E. and Acet, B. E., 2014. Lightlike Hypersurfaces Of a Para-Sasakian Space Form, Gulf Journal of Mathematics, 2(2),7-18.

(Önen) Poyraz N. and Yaşar E., Lightlike Hypersurfaces of A golden semi-Riemannian Manifold, Mediterr. J. Math.(2017), 14:204.

Şahin, B. and Akyol, M. A., 2014. Golden maps betwen Golden Riemannian manifolds and constancy of certain maps, Math. Commun., 19(2):333-342.

Yano K., 1963. On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$, Tensor, N.S. 14:99–109.

Yano, K. and Kon, M., 1984. Structure on manifolds, World Scientific Publishing Co.Ltd,.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlköğretim ve Lise öğrenimini Tekirdağ'ın Çerkezköy ilçesinde tamamladı. 2005 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında Balıkesir Üniversitesinde Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2011 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Daha sonra Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalına geçiş yaptı. 2013 yılında yüksek lisansını bitirip, aynı yıl Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında doktora çalışmasına başladı.