

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ**

**ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR GÖSTERİLİMİNDE  
YENİ BİR DESTEK İŞLEVİ BELİRLEYİŞ YÖNTEMİ**

**DOKTORA TEZİ**

**SÜHA TUNA**

**Hesaplama Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı**

**Hesaplama Bilim ve Mühendislik**

**MART 2017**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ**

**ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR GÖSTERİLİMİNDE  
YENİ BİR DESTEK İŞLEVİ BELİRLEYİŞ YÖNTEMİ**

**DOKTORA TEZİ**

**SÜHA TUNA  
(702102003)**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP**

**MART 2017**



İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702102003 numaralı Doktora Öğrencisi SÜHA TUNA, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR GÖSTERİLİMİNDE YENİ BİR DESTEK İŞLEVİ BELİRLEYİŞ YÖNTEMİ” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Prof. Dr. Metin DEMİRALP** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**        **Prof. Dr. Mevlüt TEYMUR** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Ali YAPAR** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Doç. Dr. Behçet Uğur TÖREYİN** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Doç. Dr. Tolga Esat ÖZKURT** .....  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

**Teslim Tarihi :**        **12 Aralık 2016**

**Savunma Tarihi :**     **30 Mart 2017**





*Eda'ya,*





## ÖNSÖZ

Bilimsel birikimi ve yönlendirmeleri ile sav çalışmalarımın her aşamasında beni destekleyen ve ülkemizde örneği pek bulunmayan Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu'nu (BBYT) kurup beni bu topluluğa katan değerli danışmanım Prof. Dr. Metin Demiralp'e çok teşekkür ederim. Bana güvenerek, bilimin sarp ama keyifli yolunda yürümeye başlamamı sağlayan hocam Prof. Dr. Baki Baykara'ya teşekkürlerimi sunarım. Her koşulda beni destekleyen ve en iyisini yapmam konusunda sürekli çaba veren çok değerli anne, baba ve kardeşime en içten teşekkürlerimi sunarım. Hayatımda olduğu için kendimi çok şanslı hissettiğim, güler yüzü ve desteğiyle sürekli yanımda olan ve bu savı adadığım sevgili eşim Eda'ya teşekkür ederim. Yüksek lisans ve doktora çalışmalarım boyunca, bilimsel paylaşımlarını esirgemeyen ve dostluklarını daima yanımda hissettiğim Yrd. Doç. Dr. Evrim Korkmaz Özyay ve Yrd. Doç. Dr. Burcu Tunga'ya ayrı ayrı çok teşekkür ederim. Bana, kariyer projesinde çalışma imkanı sunan Doç. Dr. Behçet Uğur Töreyn'e teşekkürü bir borç bilirim. Son olarak birlikte araştırma yapmaktan son derece keyif aldığım değerli BBYT üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Bu savın bir bölümü 114E200 numaralı "Uzaktan Algılama Amacıyla Edinilen Hiperspektral Görüntülerin Çevrimiçi Öğrenmeye Dayalı Sıkıştırılması" adlı proje kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu, TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Mart 2017

SÜHA TUNA



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ .....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
KISALTMALAR.....	xi
SEMBOLLER .....	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET .....	xix
SUMMARY .....	xxiii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1 Savın Amacı .....	4
1.2 Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim.....	4
1.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi .....	6
1.4 Tümlev Denklemler ve Hilbert-Schmidt Tümlev İşleçleri .....	11
1.4.1 Hilbert-Schmidt çekirdeği ve işleci .....	12
1.4.2 Hermit türü olmayan işleçler .....	14
1.5 Uzbilimcil Sendelenimsizlik Kuramı .....	17
<b>2. ALTKESİMCİL İŞLEV VE VERİ YAKLAŞTIRIMI .....</b>	<b>23</b>
2.1 Altkesimcil Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi .....	23
2.2 Ayrık Altkesimcil Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi ....	26
2.3 Sendelenimsizlik Düğümleri ve ÇYÇG'nde Kullanımı .....	32
2.4 Altkesimcil ÇYÇG ile Aşkınızgecil Görüntü Sıkıştırımı .....	36
<b>3. ÖZÜNE-EŞ TÜMLEV İŞLEÇLERİN ÖZDEĞER SORUNLARI İÇİN SAPTIRIM AÇILIMLARI .....</b>	<b>41</b>
3.1 Yöntem .....	42
3.1.1 Sıfıncı kerteden saptırım bileşenleri.....	47
3.1.2 Birinci kerteden saptırım bileşenleri .....	48
3.1.3 Belirtik saptırım özyineleyişi oluşturmumu .....	50
3.1.4 Saptırım işlevlerinin olağanlaştırımı .....	52
3.1.4.1 Dikgen saptırım olağanlaştırımı .....	53
3.2 Bir-Özdüzeyle Çekirdeklerle Doğrulaıış .....	56
3.3 Yakınsayış Çözümleyişi.....	58
3.4 Sayııcıl Uygulamalar .....	68
<b>4. İKİDEĞİŞKENLİ ÇYÇG'NDE DESTEK ENİYİLEYİMİ .....</b>	<b>75</b>
<b>5. UYGULAMALAR.....</b>	<b>83</b>
<b>6. SONUÇLAR.....</b>	<b>89</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>93</b>



## KISALTMALAR

<b>YBBG</b>	: Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim
<b>HDMR</b>	: High Dimensional Model Representation
<b>ÇYÇG</b>	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi
<b>EMPR</b>	: Enhanced Multivariance Products Representation
<b>YOD</b>	: Yönel Ortalamalı Destekler
<b>DAS</b>	: Directionally Averaged Supports
<b>BEBBYT</b>	: Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu
<b>G4SMC</b>	: Group for Science and Methods of Computing
<b>TİGO</b>	: Tepe İm Gürültü Oranı
<b>PSNR</b>	: Peak Signal-to-Noise Ratio
<b>öbb</b>	: Örnek başına bit
<b>bps</b>	: Bit per sample
<b>AHD</b>	: Ayrık Haar Dönüşümü
<b>DHT</b>	: Discrete Haar Transform



## SEMBOLLER

$\mathbf{x}$	: $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ sıralı $N$ -lisi (ing: $N$ -tuple)
$s_i$	: $i$ . destek işlevi
$\pi_i$	: $i$ . ÇYÇG yaklaşımı
$\sigma_i$	: $i$ . ÇYÇG nicelik ölçeni
$\hat{\mathcal{I}}$	: Hilbert-Schmidt Tümler İşleci
$\hat{x}$	: Görevi $x$ bağımsız değişkeni ile çarpmak olan işleç
$\mathbf{X}^{(n)}$	: $\hat{x}$ işlecinin $n \times n$ 'lik kesilmiş dizey gösterilimi
$\hat{f}$	: Görevi $f$ işlevi ile çarpmak olan işleç
$\mathbf{F}^{(n)}$	: $\hat{f}$ işlecinin $n \times n$ 'lik kesilmiş dizey gösterilimi
$\mathcal{H}$	: Hilbert uzayı
$\hat{P}_0$	: Değişmez işlevin bulunduğu uzaya izdüşüm işleci
$\hat{P}_0^\perp$	: $\hat{P}_0$ işlecinin tümleyeni
$\hat{I}$	: Birim işleç





## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
<b>Çizelge 2.1</b> : Sıfıncı kerteden yaklaştrıanlarla elde edilen bağıl yanılılar. ....	35
<b>Çizelge 2.2</b> : Birinci kerteden yaklaştrıanlarla elde edilen bağıl yanılılar. ....	35
<b>Çizelge 2.3</b> : Her bir sıfıncı kerteden altkesimcil yaklaştrım için elde edilen yanılılara ait ölçün sapma değerleri. ....	35
<b>Çizelge 2.4</b> : Her bir birinci kerteden altkesimcil yaklaştrım için elde edilen yanılılara ait ölçün sapma değerleri. ....	36
<b>Çizelge 2.5</b> : Değişik kertelerden ÇYÇG yaklaştrıanları için TİGO ve bbö değerleri. ....	39
<b>Çizelge 2.6</b> : $4 \times 4 \times 4$ biçiminde bölünmüş uzamda değişik kertelerden ÇYÇG yaklaştrıanları için TİGO ve bbö değerleri. ....	39
<b>Çizelge 2.7</b> : $8 \times 8 \times 8$ 'lik biçiminde bölünmüş uzamda değişik kertelerden ÇYÇG yaklaştrıanları için TİGO ve bbö değerleri. ....	39
<b>Çizelge 2.8</b> : ÇYÇG tabanlı yöntemler ile bilimcil yazında aşkınzgecil verilerin kayıplı sıkıştırımı için kullanılan yöntemlerin 0.1 bbö değeri için TİGO değerleri karşılaştırımı. ....	40
<b>Çizelge 3.1</b> : $K(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + \alpha$ çekirdekleri için $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ değerleri. ....	72
<b>Çizelge 3.2</b> : $K(x, \xi) = (\sin x + \sin \xi)^2 + \alpha$ çekirdekleri için $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}$ değerleri. ....	72
<b>Çizelge 3.3</b> : $[0, 1]^2$ dördülü üzerinde $K(x, \xi) = \tan x \sin 3\xi + \sin x \tan 3\xi$ çekirdeği için elde edilen kesin ve değişik kertelerden yaklaşık özdeğerler. ....	73
<b>Çizelge 5.1</b> : Değişik kesme kertelerinden destek işlevleri ve YOD kullanılarak $[0, 1]^2$ dördülü üzerinde bulunan $\sigma_0$ değerleri. ....	85
<b>Çizelge 5.2</b> : Değişik kesme kertelerinden destek işlevleri ve YOD kullanılarak $[0, 0.5]^2$ dördülü üzerinde bulunan $\sigma_0$ değerleri. ....	85



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

- Şekil 2.1** : Değişik bakış açılarından  $(x_1 + x_2)^4$  işlevinin çizimi (Al), sıfıncı kereden ÇYÇG yaklaşırını (Mavi) ve sıfıncı kereden altkesimcil ÇYÇG yaklaşırını (Yeşil)..... 25
- Şekil 2.2** : Değişik bakış açılarından  $\left(10 \sin \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) / \left(\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}\right)$  işlevinin çizimi (Al), sıfıncı kereden ÇYÇG yaklaşırını (Mavi) ve sıfıncı kereden altkesimcil ÇYÇG yaklaşırını (Yeşil)..... 26
- Şekil 2.3** :  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevinin  $[0, 1]^2$  uzayı üzerindeki değişik altuzaylardaki 1. kereden Ayrık Altkesimcil ÇYÇG yaklaşırını (Al) ve işlevin kesin değeri (Mavi)..... 30
- Şekil 2.4** :  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevinin  $[0, 1]^2$  uzayı üzerindeki 1. kereden Ayrık Altkesimcil ÇYÇG yaklaşırını..... 30
- Şekil 2.5** :  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevinin  $[0, 1]^2$  uzayı üzerindeki 1. kereden Ayrık Altkesimcil ÇYÇG yaklaşırını ile o düğümlerdeki gerçek değerlerin karşılaştırırını..... 31
- Şekil 2.6** :  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevinin  $[0, 1]^2$  uzayı üzerindeki 1. kereden Altkesimcil ÇYÇG yaklaşırını ile o düğümlerdeki gerçek değerlerin karşılaştırırını..... 31
- Şekil 3.1** :  $[0, \pi]^2$  dördülü üzerinde  $K(x, \xi) = \cos(x + \xi)$  çekirdeği için elde edilen kesin ve değişik keredelerden yaklaşık özişlevler..... 70
- Şekil 3.2** :  $[0, 1]^2$  dördülü üzerinde  $K(x, \xi) = \exp(x + \xi) + \exp(-x - \xi)$  çekirdeği için elde edilen kesin ve değişik keredelerden yaklaşık özişlevler..... 71
- Şekil 3.3** :  $[0, 1]^2$  dördülü üzerinde  $K(x, \xi) = \tan x \sin 3\xi + \sin x \tan 3\xi$  çekirdeği için elde edilen kesin ve değişik keredelerden yaklaşık özişlevler..... 74



## ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR GÖSTERİLİMİNDE YENİ BİR DESTEK İŞLEVİ BELİRLEYİŞ YÖNTEMİ

### ÖZET

Günümüzde yaşanan olaylar birden çok değişken ya da değiştirenin (ing: parameter) birbiri ile etkileşimi aracılığıyla ortaya çıkmaktadır. Bu olayların anlaşılması ve ayrıntılarının dile getirilmesi, geçmişte yaşanmış ya da gelecekte yaşanması olası andıran (benzer) olayların çözümleğinde (ing: analysis) çok önemli bir yer tutar. Andıran durum, bilimcil sorunlar için de geçerlidir. Sözgelimi, bir dizgenin (ing: system) evrimi (ing: evolution), bir ortamın sıcaklığının artımı ya da azalımı, insan damar ağı biçelendirimi (ing: modelling) ve kan akışındaki etkileşimler, tutumbilim (ing: economy) ve değişik ülke paraları arasındaki oranların anlık durumundaki dalgalanışlar gibi olguların tümünde birden çok kavramın birbirinden bağımlı ya da bağımsız olarak değişimi gündeme gelmektedir. Bu yüzden, göz önüne alınan sorunlarda çokdeğişkenliliğin anlaşılması olgusu oldukça önem kazanmaktadır. Bilimle uğraşan bireyler (ing: scientists), ele aldıkları sorunları gözlemleyerek veri (ing: data) toplarlar ve bu verileri etkin biçimde yansıtan çözümci (ing: analytic) biçeler (ing: models) oluşturmaya çalışırlar. Oluşturdukları biçelerin doğruluğunu andırımlar (ing: simulations) yardımıyla sınarlar. Tüm bu aşamalar, yoğun çokdeğişkenlilik içeren durumlarda oldukça karmaşıklaşır. Bu yüzden, elde edilen biçelerin ayrıştırılarak, kolay işlenebilir duruma getirilmeleri de en az biçeleme düzeyinde önem kazanmış olur. Söz konusu biçeler, uzbilim (ing: mathematics) dilinde çokdeğişkenli işlev (ing: multivariate function) olarak adlandırılır ve bu tür işlevlerin ayrıştırımı sorunu (ing: problem), yukarıda belirtilen nedenlerden ötürü, üzerinde düşünülmesi gereken oldukça önemli bir olgudur.

Az önce belirtilen amaç doğrultusunda, Prof. Dr. Metin Demiralp öncülüğündeki *Bilişim Enstitüsü Bilgisayar Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT)* üyelerince bir takım sayısal yöntem (ing: numerical methods) geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri, günümüzde türlü bilimcil ve ölçmenlik (ing: engineering) sorunları için oldukça etkin olarak kullanılan Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimidir (ÇYÇG). ÇYÇG, geçmişi 1990'lara dayanan ve Rus sayımcı (ing: statistician) Sobol'ca önesürülmüş sayıtım (ing: statistics) tabanlı bir yöntem olan Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim (YBBG) yönteminin bir özelsizleştirimidir (ing: generalization). ÇYÇG ile bir çokdeğişkenli işlevi kendisinden daha az sayıda değişken içeren işlevler türünden yazmak olanaklı olmaktadır. Bu da bilimcil yazında (ing: scientific literature) "ayrıştırım" sözcüğüyle belirtilen kavramdan başka bir şey değildir. Yukarıda sözü edilen "az sayıda değişken içeren işlevler" kavramı ile belirtilmek istenen ise, ÇYÇG bileşenleri ve tekdeğişkenli destek işlevleridir. Tekdeğişkenli destek işlevleri, ilgili ÇYÇG ayrıştırımının oluşturmunda yer alan önemli öğeler olmakla birlikte ÇYÇG'nin YBBG'ye göre daha esnek bir yöntem olarak düşünülebilmesine de olanak sağlar. Bir çokdeğişkenli işlevin ÇYÇG açılımının gerçekleştirilebilmesi

için, ilgili işlevin, üzerinde çalışılan çokboyutlu dikgen uzamın (ing: orthogonal geometry) üzerinde çözümcül (ing: analytic) olması gerekir. Bunun yanısıra, ilgili koşulu sağlayan çokdeğişkenli işlevlerin ÇYÇG açılımları (ayrıştırımları) sonlu sayıda terimin üstüste toplanımından oluşmaktadır. Elde edilen açılımın belli sayıda terimi alınıp, geriye kalanlar gözardı edildiğinde ilgili çözümcül çokdeğişkenli işleve bir yaklaştırım gerçekleştirilmiş olur. Bu yaklaştırımın etkinliğini etkileyen birçok neden olmakla birlikte, bunlardan en önemlisi, ÇYÇG yaklaştırımında kullanılan destek işlevleridir. Destek işlevlerinin uygun seçimiyle, göz önüne alınan çokdeğişkenli işleve etkin ÇYÇG yaklaştırımları üretmek olanaklıdır. Bu bağlamda, adı geçen destek işlevlerinin, en etkin ÇYÇG yaklaştırımını verecek şekilde eniyilenişi (ing: optimization) büyük önem taşır. Savda, bu olgu ele alınmış ve araştırmalar bağlamında, ÇYÇG'nde destek işlevi eniyileyişi için etkin bir yöntem elde edilmiştir. Bu yöntemin geliştirimi, aslında, sav araştırmalarının başlangıcında gözlemlenen bir olguya dayanmaktadır. Bu olgu, ÇYÇG ayrıştırımı için üzerinde çalışılan uzamın küçültümünün ÇYÇG yaklaştırımlarının niteliğine olumlu yönde katkı vermesi durumudur. Böylelikle, bir çokdeğişkenli işleve, üzerinde tanımlı olduğu çokboyutlu uzay üzerinde ÇYÇG yaklaştırımı yapmak yerine, bu uzayı aynı sayıda boyut içeren altuzaylara ayırıp ilgili işleve her bir altuzayda ÇYÇG yaklaştırımı uygulama yöntemi benimsenmiştir. Elde edilen yeni yöntem Altkesimcil (ing: piecewise) ÇYÇG denilmiş ve bu yöntem ile yapılan yaklaştırımların, ÇYÇG kullanılarak elde edilen yaklaştırımlara göre daha etkin olduğu sayısal uygulamalar ve aşkınizgecil görüntü (ing: hyperspectral imagery) verileri üzerinde gerçekleştirilen uygulamalar aracılığıyla gösterilmiştir. Altkesimcil ÇYÇG yardımıyla aşkınizgecil görüntüler için özgün bir kayıplı sıkıştırım (ing: lossy compression) uzişi (ing: algorithm) bilimsel yazına kazandırılmış ve umut verici tepe-im-gürültü oranı (ing: peak-signal-to-noise ratio) değerleri elde edilmiştir. Daha dar uzamlarda, etkinliğinin artırıldığı gösterilen ÇYÇG'nde kullanılan destek işlevlerinin eniyileyişi için saptırım (ing: perturbation) tabanlı bir yöntem geliştirimi olgusu öne çıkmıştır. Bunun nedeni, içerisinde küçük değerli değiştirgeler içeren sorunların, saptırım açılımları kuramı (ing: perturbation expansions theory) yardımıyla etkin biçimde çözülebilmeleri olgusudur. Destek işlevlerinin eniyileyişi sırasında eşleşik (ing: coupled) biçimde olan Fredholm türü tümlev (ing: integral) denklemler ile karşılaşmaktadır. Bu eşleşik denklemler, savda "Uzamcıl Ayrıştırım" adı verilen yöntem ile ayrışık (ing: uncoupled) ve her bir denklem, özüne-eş (ing: self-adjoint) ve tıkız (ing: compact) bir Hilbert-Schmidt tümlev işlecinin (ing: integral operator) izgecil sorunu (ing: spectral problem) olarak karşımıza çıkmıştır. Bu izgecil sorunların her birinin en baskın özdeğerine karşılık gelen özışlevlerin (ing: eigenfunction) ise, aslında, arandığı eniyilenmiş tekdeğişkenli destek işlevlerinden başka bir şey olmadıkları açıkça gösterilmiştir. Bu bağlamda, savda geliştirilen saptırım tabanlı yöntem, özüne-eş ve tıkız Hilbert-Schmidt tümlev işlevlerinin en baskın özdeşlerini (ing: eigenpairs) bulmak için geliştirilmiş bir yöntemdir. Bu yöntem aracılığıyla, ilgili tümlev işlecinin en baskın özdeğer ve eşleşik eden özışlevlerine birer sonsuz saptırım toplam dizisi (ing: series) karşılık getirilmiştir. Bu toplam diziler, saptırım değiştirgesinin üslülerini içeren sonsuz sayıda terimden oluşmaktadır. Bu terimlerin tümünü birden kullanmak olanaklı olmadığından, ilgili toplam dizide kesme yapılarak, özdeğer ve özışleve yaklaştırım yapımı olanaklı duruma gelmiş olur. Savın amacı doğrultusunda özışlev kavramı öne çıktığından, özışlev için geliştirilen toplam dizinin yakınsaklığı irdelenmiş ve ilgili toplam dizinin karmaşık uzayda boş olmayan bir teker (ing: disc) içerisinde yakınsadığı gösterilmiştir. Elde edilen kuramcıl (ing: theoretical) bulgular sayısal uygulamalar

aracılığıyla desteklenmiştir. Böylelikle, savda, özüne-eş ve tıkız Hilbert-Schmidt tümlev işlelerinin izgecil sorununun çözümü amacıyla saptırım tabanlı oldukça etkin ve özgün bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen saptırım tabanlı yöntem kullanılarak, bir çözümcül ikideğişkenli işlevin ÇYÇG açılım için destek işlevi üretimi olanaklı duruma gelmiştir. Elde edilen eniyilenmiş destek işlevleriyle, değişik türden ikideğişkenli işlevler için ÇYÇG yaklaştırmaları gerçekleştirilmiş ve bulunan sonuçlar eniyileyiş yapılmadan kullanılan destek işlevleri yardımıyla gerçekleştirilen ÇYÇG yaklaştırmalarıyla karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlara göre, ilgili toplamdizilerin yakınsaklık tekerleri içerisinde kalındıkça, eniyilenmiş desteklerin, diğer desteklere göre daha etkin ÇYÇG yaklaştırımı sağladıkları gözlemlenmiştir. Böylelikle savın amacı olan ÇYÇG'nin etkinliğinin arttırımı ve bu bağlamda ele alınan destek işlevi eniyileyişi olgusuna ulaşılmıştır.







# A NEW SUPPORT FUNCTION DETERMINATION METHOD IN ENHANCED MULTIVARIANCE PRODUCTS REPRESENTATION

## SUMMARY

The real problems which are encountered within the daily life events arise via the interaction of many variables or parameters. The explanation and the elaboration of these events scientifically play an important role in the analysis of the past and the future events. The same situation is valid, of course, for scientific and engineering problems. For instance, the evolution of a system, increment or decrement of heat level in a medium, the dynamics occurring in human blood flow reactions and the money trends in economics depend on many entities varying dependently to the some of the other ones or changing independently. Thus, the multivariate analysis becomes important in order to understand the considered issues. Scientists gather data by observing the problem they are dealing with and then, labor to construct novel analytical models representing the problem under consideration efficiently. Then, they verify their models via simulations. All these processes may be hard to tackle with according to the multivariance and the non-linearity level of the problem to be dealt with. To this end, the simplification of these analytical models via decomposition techniques becomes crucial at least as modelling for the relevant problem. Abovementioned models are named as multivariate functions in mathematical sense and the decomposition problem of these functions stands as an important problem which should be analyzed carefully.

In order to overcome the abovementioned problem, a set of numerical methods have been developed by *Group for Science and Methods of Computing (G4SMC)* located at İstanbul Technical University, Informatics Institute and being led by Prof. Dr. Metin Demiralp. One of these methods is Enhanced Multivariance Products Representation (EMPR). EMPR is a useful and easy-to-implement tool and utilized efficiently for the analysis of scientific and engineering problems of many varieties. EMPR stands as a generalization of a well-known statistics based method High Dimensional Model Representation (HDMR) whose development history goes to 1990s and conjectured by the Russian statistician Sobol. It is possible to represent an analytic multivariate function in terms of the functions having less independent variables. The entities which is desired to be expressed by the word “functions having less independent variables” are the EMPR components and univariate support functions. EMPR expansion of an analytic multivariate function is constructed with the help of these elements. In particular, the univariate support functions are important determining agents for the EMPR expansion under consideration, and enable flexibility to EMPR in comparison with HDMR. Thus, the choice of the univariate support function set stands as one of the important issues in an EMPR expansion. In order to be able to obtain an EMPR expansion of a multivariate function, the function under consideration should be analytic over the multidimensional orthogonal geometry where the relevant function defined on. This geometry constitutes a rectangular hyperprism and can

be constructed by the Cartesian products of each relevant closed interval where each independent variable of the analytic multivariable function lays on. This fact brings the orthogonality property to the mentioned geometry. On the other hand, the EMPR expansions (or decompositions) of the multivariate functions satisfying the abovementioned features consist of the summands of the finite number of terms accumulatively. By truncating the relevant expansion at a certain level while ignoring the rest of the terms yields an approximation to the analytic multivariate function under consideration. Although there are a few factors which affect the quality of this approximation, the structures of the univariate support functions are the most important ones, as mentioned before. By choosing appropriate support function set in EMPR process, it becomes possible to obtain efficient approximations for the relevant multivariate function. Thus, instead of utilizing any convenient support function set, it becomes rational to optimize these elements whose utilization in relevant EMPR expansion gives the most efficient EMPR approximation, to this end. This fact is aimed and tackled in present thesis, an original and efficient method has been developed in this sense. The development of this novel method actually depends on some facts which were observed at the beginning phase of the related research. According to the corresponding observations, the quality of EMPR approximation for an analytic multivariate function increases while the multidimensional orthogonal geometry to be worked on shrinks. Thus, instead of dealing with a multidimensional geometry where the relevant function is defined on, the fact of splitting this whole space into an amount of subspaces having same dimensionality properly arises. Then, the application of EMPR procedure to the function under consideration over each subspace becomes possible and the overall approximation quality for the corresponding multivariable function is increased. This approach is called Piecewise EMPR and it is showed that this method works better than plain EMPR in most cases via the numerical implementations.

The determination of EMPR components and old-styled (Directionally Averaged Supports) univariate support functions involves the evaluation of multiple integrals consecutively. If the analytic structure of the integrands of these integrals enable us to compute them analytically, the relevant evaluations may be executed without making any significant effort. Unfortunately, in general, it becomes convenient to proceed with the help of a quadrature method to calculate the corresponding integrals numerically, due to the complicative structures of the integrands in definite integrals. In present thesis, a method called Fluctuation Free Integration is utilized in this sense. In this novel quadrature method, the eigenvalues of the matrix representation of the algebraic operator is utilized as the node points while the first elements' squares of the corresponding eigenfunctions are assessed as the weight factors. With the help of the Fluctuation Free Integration, EMPR components and the univariate support functions are approximated efficiently and relevant EMPR expansion for the multivariate function under consideration is achieved without having any considerable difficulty.

According to the results obtained by using narrower multidimensional geometries, development of a perturbation based method has become prominent in order to optimize the univariate support functions. It is known from the scientific literature that, the problems involving small valued parameters can be approximately solved with the help of the perturbation analysis. These small valued parameters are called the perturbation parameters and some convenient infinite series involving the powers

of these perturbation parameters are aimed to be computed. Thus, the entities, which are desired to be determined, are represented using an appropriate infinite series. Through the optimization process for univariate support functions in EMPR, coupled Fredholm integral equations of first type are encountered. These integral equations are uncoupled using a method called Geometric Separation by the inspiration of well-known process Singular Value Decomposition. Thus, a pair of uncoupled equations involving self-adjoint and compact Hilbert-Schmidt integral operators are obtained. These equations clearly stand as the spectral problems of two similar Hilbert-Schmidt integral operators and dictate that the eigenfunctions accompanying the most dominant eigenvalues for each integral operator Hilbert-Schmidt integral operator is nothing but the optimized univariate support function. Concordantly, the perturbation based novel method developed in present thesis is a method to determine the most dominant eigenpair of a self-adjoint and compact Hilbert-Schmidt integral operator. Thus, by applying this new method, the most dominant eigenvalue and the accompanying eigenfunction (optimized support functions) can be represented as an infinite series involving the corresponding perturbation parameter. By truncating these series at certain levels, approximations for the relevant entities are acquired, since there is no possibility to work with infinitely many terms. Since the corresponding eigenfunctions of the relevant Hilbert-Schmidt integral operators according to the needs encountered and mentioned in present thesis, convergence issues for the infinite perturbation series representing the relevant eigenfunctions are analyzed. Thus, it is shown that the relevant perturbation series converge in a non-empty disc on one-dimensional complex plane. The theoretical observations are verified through the numerical implementations. The numerical results obtained in these implementations are presented via the figures and tables accordingly. Then, it is possible to indicate that, a genuine and efficient numerical method based on a perturbation scheme for determining the most dominant eigenpair of a self-adjoint and compact Hilbert-Schmidt integral operator is proposed and developed during the researchs within the present thesis study. Then, it becomes possible to produce a pair of optimized univariate support functions in order to be utilized in EMPR expansion of an analytic bivariate function. Numerical implemantations has been revealed to this end, and the results obtained by utilizing optimized supports are compared with the ones obtained with the help of the directionally averaged supports. According to the relevant results, the EMPR approximations using the optimized supports are more efficient than EMPR approximations obtained by using directionally averaged supports as long as the corresponding infinite perturbation series converge. Thus, the aim of the thesis, which is the empowering of the efficiency of EMPR approximations, and the support function optimization are achieved.



## 1. GİRİŞ

İşlev (ing: function) yaklaştırımı, uygulamacı uzbilimde (ing: applied mathematics) ve bilgisayar bilimi (ing: science of computing) ya da bilgisayarlı bilimler (ing: computational sciences) ile bilgisayarlı ölçmenlik (ing: computational engineering) alanlarında büyük önem taşıyan bir olgudur. Belli bir aralıkta sürekli değerler alan bir bağımsız değişkenin işlevi olan yapıların yaklaştırımına birkaç nedenle gereksinim duyulur. Bunları iyice vurgulayabilmek için bir işlevin yapısının nasıl verildiği üzerinde durmak gerekir. En kolay durumda bir işlev, bağımsız değişkenine bağımlılığı somut ve eşsiz bir kuralla verilerek gündeme getirilir. Bu durumda, işlevin sayısal değerinin, bağımsız değişkeninin aralığındaki belli bir konuma karşılık olarak belirlenimi açısından, yukarıda sözü edilen kuralın ne düzeyde yalın ya da karmaşık olduğu belirleyici konuma yerleşir. Yeterince yalınlık durumunda çözümçül (ing: analytic) belirlenim söz konusu olabilecek iken karmaşıklık durumunda uygun yaklaşımlara gereksinim duyulur.

Öte yandan, bu işlevin değerlerinin ilgili aralıktaki tüm konumlar için geçerli tek bir kuralla verilimi yerine salt seçilmiş sonlu sayıda konumda değeri verilerek betimlenmesi de sıkça karşılaşılan bir durumdur. Bu durumda, işlev ile ilgili bilgi eksikliği söz konusudur ve giderilmesi için işlevle ilgili, tanım bölgesi içindeki tüm konumlarda geçerli olan bir kural üretimi gerekmektedir. Bir takım ek öngörülerde bulunularak bu kuralın eşsizliğinin sağlanımına çalışılır. Ancak, böyle de olsa, sözü edilen eşsizlik başka yapılar için değişik öngörüler ile elde edilecektir. Bu olgu bilimsel yazında (ing: scientific literature) içdeğerbiçim (ing: interpolation) olarak bilinir ve bu odakta büyük bilgi birikimi bulunmaktadır.

İster kuralla, ister belli konumlarda değer çizelgesi olarak verilsin, bu verilişler dolaysız tanımlardır. Oysa, işlevin, verilen bir, sözgelimi cebirsel ya da sıradan türevli denklemi (ing: ordinary differential equation) sağlayacak biçimde saptanımından kural çıkarımı, başka ek güçlükleri gündeme getirir. Bu tür işlev verilimine dolaylı tanım adını vermek olanaklıdır.

Değeri belirlenecek işlevin bağımsız değişkeninin aldığı değerler kümesine onun tanımbölgesi (ing: domain) adı verilir. Bu bağlamda, tanımbölgesi gerçel eksen üzerinde bir aralık olan ve özü (kendisi) de gerçel değer alan işlevlere gerçel işlev denilebilir. Ancak, tüm gerçel işlevler karmaşık değer (ing: complex value) de alabilen işlevler soyocagında (ing: family) altyapılar olarak nitelendirilebilirler. Öte yandan, bağımsız değişkenin karmaşık düzlemdeki (ing: complex plane) bir erişimiyolundan (ing: path) ya da eğri olan işlevlerden de sözedilebilir. Bunlar karmaşık işlevler kapsamına girer.

Sürekli bir bağımsız değişkene değil de bir sırasayıya bağımlı işlevler de çok sık olarak karşılaşılan yapılardır. Bunlara dizi demek daha yeğlenen bir yaklaşımdır. Dizi öğelerini sıralamak için bir sırasayıdan (ing: index) yararlanmak olanaklıdır. Bu sırasayı, sonlu sayıda, ya da sayılabilir sonsuzlukta değer alabilir. Bu duruma göre de yakınsama çözümleyimleri (ing: analysis) gündeme gelebilir.

İster dolaylı isterse dolaysız tanımlı olsun, tek bağımsız değişkenli işlevlerin belirlenimi ya da yaklaştırımı oldukça güçlü olarak incelenilmiş konulardır. Her şeyin elde edildiği ve bulunacak birşey kalmadığı söylenemeyecek olsa da araştırmacıların kullanabileceği yığın denilebilecek ölçekte bilgi tabanı erişilebilir durumdadır. Oysa, birden çok sayıda bağımsız değişkene bağımlı işlevler de uygulamıda çok sık karşılaşılmakta ve yaklaşımları bir gereksinim olarak gündeme gelebilmektedir. Bu işlevlerde, tanımbölgeleri artık çizgisel olmaktan çıkıp yüzeysel (ing: planar) ya da aşkınyüzeysel (ing: hyperplanar) yapıya bürünür. Ayrık tanımbölgelilik de çokludizilere (ing: multi-way array) karşılık gelir. Dolaylı verilimde ise sıradan türevli denklemin yerini göre türevli denklem (ing: partial differential equation) alır.

Çokdeğişkenli işlevlerde de azımsanmayacak sayıda yöntem geliştirilmiş bulunmaktadır. Bunların bir kesimi, özellikle son yıllarda, Prof. Dr. Metin Demiralp'ın yönlendirim ve önderliğinde bilimsel çalışmalar gerçekleştiren “Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu'nda (BEBBYT)” gerçekleştirilmiş ve gerçekleştirilmektedir. Bunlarla ilgili bilgiler aşağıdaki altbölümlerde verilmektedir. Bu giriş bölümünde herhangi bir kaynağa gönderimde (ing: citation) bulunulmamakla birlikte, gönderimler aşağıdaki ilgili bölümlerde gündeme getirilmektedirler.

Bu bağlamda, savın birinci bölümünde savın amacı açıkça ortaya konulup, savın odağındaki uygulama konusu olan Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi-ÇYÇG (ing: Enhanced Multivariate Products Representation-EMPR) yöntemi ve bu yöntemin temellerini barındıran sayımcıl (ing: statistical) tabanlı Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi-YBBG (ing: High Dimensional Model Representation-HDMR) yöntemi ile ilgili bilgiler verilecektir. Aşağıdaki bölümlerde belirtileceği gibi ÇYÇG yöntemini YBBG yönteminden ayrı kılan ve onu birçok uygulamada daha etkin çalışan bir yöntem durumuna dönüştüren ÇYÇG'nde kullanılan destek işlevleridir. Bu sav çalışmasına kadar gerçekleştirilen tüm ÇYÇG araştırmalarında, dolaysızca (ing: directly) elde edilen ve Yönel Ortalamalı Destekler (ing: Directional Averaged Supports) diye adlandırılan destek işlevlerinin kullanımı söz konusudur. Savda, bu alışkanlık bırakılarak, yerine, destek işlevlerinin eniyileymi (ing: optimization) olgusu gündeme getirilip, uygulamalarda eniyilenmiş destek işlevlerinin kullanımı ereklenmiştir (ing: to be aimed). Destek işlevlerinin eniyileyişi sırasında açığa çıkan tümlev işleçlerin izgecil sorunları ile ilgili yeteri kadar bilgiye de, yine savın birinci bölümünde yer verilecektir. Bu bölüm uzbilimcil (ing: mathematical) sendelenemsizlik kuramından söz edilerek sonlandırılacaktır. İkinci bölümde, savın doğuşu ve ilerleyişi açısından oldukça büyük öneme sahip olan altkesimcil (ing: piecewise) işlev ve veri yaklaştırımı konularına eğilinilecektir. Bu bağlamda, sırasıyla, Altkesimcil ÇYÇG, Ayrık Altkesimcil ÇYÇG ile ön bilgileri birinci bölümde verilen sendelenimsizlik düğümlerinin ÇYÇG'nde kullanımını ilgilendiren anlatımlar verilecektir. Bu başlıklarla ilgili kuramcıl anlatımların yanısıra, ayrıntıları verilen bu yöntemlerin aşkınizgecil görüntülere (ing: hyperspectral images) uygulanımı gündeme getirilecek ve aşkınizgecil veri türü için yeni ve özgün bir kayıplı sıkıştırma uzişinin (ing: algorithm) geliştirimi konusunda bilgiler verilecektir. Elde edilen sonuçlar, bilimcil yazında aşkınizgecil görüntülerin kayıplı sıkıştırımında çokça kullanılan diğer yöntemler ile karşılaştırılacaktır. Üçüncü bölüm, savın çekirdek (öz) bölümü olarak nitelendirilebilir. Bu bölümde, yukarıda da belirtildiği gibi, ÇYÇG'nde destek işlevi eniyileyiminde karşılaşılan tümlev işleçlerin (ing: integral operators) izgecil (ing: spectral) büyüklüklerine etkin biçimde yaklaştırım yapabilmek amacıyla geliştirilen saptırım tabanlı özgün yöntem tüm ayrıntılarıyla aktarılacaktır. Geliştirilen yöntemin doğruluğu ve etkinliği, kuramcıl (ing: theoretical) ve sayımcıl (ing: numerical) uygulamalar ile desteklenecektir. Bunların yanısıra, geliştirilen sayımcıl yöntemin

yakınsaklık çözümleyimi (ing: convergence analysis) de yine bu bölümde özüne (kendine) yer bulacaktır. Bir sonraki bölüm olan dördüncü bölümde, üçüncü bölümde ayrıntıları verilen sayısal yöntemin ikideğişkenli ÇYÇG’ndeki destek işlevlerinin eniyileyme nasıl kullanılacağı olgusuna değinilirken beşinci bölümde ise verilen bir ikideğişkenli işlev için oluşturulan ÇYÇG yaklaşımlarının etkinliği sayısal uygulamalar ile gösterilecektir. Bir diğer deyişle, beşinci bölüm, savın “Uygulamalar” bölümü olacaktır. Sav, sonuçlar, tartışmalar ve ileride gerçekleştirilebilecek kuramcıl ve deneysel olguların tartışılması ile sonlandırılacaktır.

### 1.1 Savın Amacı

Bu savın temel amacı Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi yönteminin çokdeğişkenli işlev yaklaşımındaki etkinliğin artımını sağlamaktır. Bu bağlamda, ilgili yöntemde kullanılan destek işlevlerinin eniyileyme gündeme getirilmektedir. Eniyileme süreci sırasında, özüne-eş ve tıkmaz (ing: compact) bir Hilbert-Schmidt tümlev işlecinin izgecil sorunu ile karşılaşmaktadır. Savın amaçlarından biri de bu sorunun çözümü için özgün ve etkin bir sayısal (ing: numerical) yöntem geliştirmidir. Bu bağlamda, savda, hem tümlev işlemler için geliştirilen yöntemin, hem de ilgili yöntem kullanılarak elde edilen destek işlevlerinin kullanımıyla elde edilen çokdeğişkenli işlev yaklaşımlarının (ing: multivariable function approximation) etkinliği üzerinde durulacaktır.

### 1.2 Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim

Yüksek Boyutlu Biçe (ing: model) Gösterilimi (YBBG) [1–6],  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  olmak üzere verilen bir dikgen uzamda (ing: orthogonal geometry), çözümcül (ing: analytic) bir  $f(\mathbf{x})$  çokdeğişkenli işlevinin (ing: multivariate function) özünden (kendisinden) daha az sayıda bağımsız değişken içeren ve birbirlerine dikgen (ing: orthogonal) olan işlevlerin sonlu bir toplamı olarak yazımına aşağıdaki gibi olanak sağlar.

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + f_{12\dots N}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

Görüldüğü gibi (1.1) açılımı sonlu bir toplamdır ve sırasıyla, değişmez (ing: constant), tek değişkenli, iki değişkenli ve andıran biçimde sürdürülüşle  $N$  değişkenli



işlevlerin toplamı olarak yazılmıştır. Bu açılımın sağ yanında bir değişmez işlev ( $f_0$ ),  $N$  sayıda tek değişkenli işlev ( $f_1, f_2, \dots, f_N$ ),  $N(N-1)/2$  sayıda iki değişkenli işlev ( $f_{12}, f_{13}, \dots, f_{1N}, f_{23}, f_{24}, \dots, f_{2N}, \dots, f_{N,N-1}$ ) ve bu şekilde devam etmek üzere toplam  $2^N$  sayıda işlev bulunmaktadır. Bu işlevler, sırasıyla, yaklaştırım yapılmak istenen çokdeğişkenli işlevin YBBG açılımının değişmez bileşeni, tek değişkenli bileşenleri, iki değişkenli bileşenleri ve andıran biçimde  $N$  değişkenli bileşeni olarak adlandırılırlar. Yukarıda sözü edilen değişmez bileşen, ilgili işlevin, YBBG açılımının bulunuşunda kullanılan uzamdaki (ing: geometry) ortalama değerini yansıtmaktadır [1]. Her bir tek değişkenli bileşen ise, bağlı bulunduğu bağımsız değişkenin, işlevin çözümcül (ing: analytic) yapısına tek başına yaptığı katkıyı, iki değişkenli bileşenler de bağlı bulunduğu bağımsız değişkenlerin, yaklaştırmaya, birlikte yaptıkları katkıyı göstermektedir [1–6]. (1.1) gösteriliminin sağ yanındaki bileşenlerden istenilen çoklukta alınarak (diğer bir deyişle kesme yapılarak) çok değişkenli  $f(\mathbf{x})$  işlevine istenilen kertede (ing: order) yaklaştırmak söz konusudur. Örneğin, değişmez bileşenden sonraki tüm bileşenler gözardı edildiklerinde sıfıncı kerteden bir yaklaştırm elde edilmiş olur. Bu yaklaştırm, işlevin, tanımlı ve çözümcül olduğu ilgili  $[a, b]^N$  aşkınçokyüzlüsü (ing: hyperprism) üzerindeki ortalama değeridir. Sözü edilen aşkınçokyüzlü  $[a_i, b_i]$  olarak gösterilebilen  $N$  sayıda alt aralığın kartezyen çarpımı olarak tanımlanan  $N$  boyutlu bir dikdörtgencil aşkınçokyüzlüdür (ing: rectangular hyperprism). Eğer yaklaştırm yapılan çokdeğişkenli işlev değişmez bir işlev ise sıfıncı kerteden yaklaştırm kesin sonucu yani işlevin özünü verecektir. Andıran biçimde (1.1) eşitliğinin sağ yanındaki iki ve daha fazla değişken içeren bileşenler gözardı edildiklerinde birinci kerteden yaklaştırm, üç ve daha fazla değişken içeren bileşenler atıldıklarında ise ikinci mertebeden yaklaştırm elde edilmiş olur. Birçok uygulamada, birinci ve ikinci kerteden YBBG yaklaştırmaları gerçekleştirildiğinde odaktaki işlev için etkin sonuçların elde edildiği gözlemlenmiştir [3–5]. Bu olgu, YBBG'nin en önemli kazandırmalarından birisidir. Böylelikle, ilgili çokdeğişkenli işleve, özünden daha az sayıda değişken içeren daha yalın yapıdaki işlevler ile toplamcıl (ing: additive) yaklaştırmalar gerçekleştirimi olanaklı olmaktadır. Kuşkusuz bu yaklaştırmın niteliğini arttırmak, sorunu doğru bir biçimde algılayıp en uygun YBBG türünü seçmeye de bağlıdır. Savın asıl amacı YBBG ile ilintili olmadığından

ilgili YBBG türlerinden burada söz edilmeyecektir. Bu türler ile ilgili ayrıntılı bilgilere [7–10] kaynaklarından veya yazarın yüksek lisans savından [11] ulaşılabilir.

### 1.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi

Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi, ÇYÇG (ing: Enhanced Multivariance Product Representation, EMPR) çokdeğişkenli işlevleri ayrıştırmak için kullanılan ve yeni sayılabilecek bir yaklaşımlar yöntemidir [12–17]. Bu yöntem, atası olarak nitelendirilebilecek ve yine çokdeğişkenli işlevlere yaklaşımlar ve bu tür işlevleri biçeleme (ing: modelling) için kullanılan, bilimcil yazında da oldukça karşılaşılan ve birçok dergi yazısı, bildiri ile savlarda kullanılmış olan Yüksek Boyutlu Biçe Gösterim, YBBG (ing: High Dimensional Model Representation, HDMR)'in bir özelsizleştirimidir (ing: generalization). Her iki yöntem de “böl ve ele geçir (ing: divide and conquer)” düşüncesine dayanır ve üzerinde çalışılan çokdeğişkenli işlevin, kendisinden daha az sayıda bağımsız değişken içeren işlevler türünden yazımı olgusuna dayanır. Her iki yöntemde de, gösterim terimleri (bileşenler), dikgen uzam (ing: orthogonal geometry) üzerinde ve salt çarpımcıl (ing: purely multiplicative) yapıda olan çokdeğişkenli bir ağırlık işlevi (ing: weight function) altında çokkatlı tümlevler (ing: multiple integrals) yardımıyla elde edilirler. Şu ana kadar epeyce koşul (ing: parallel) olarak aktarılmaya çalışılan YBBG ve ÇYÇG, artık, bu aşamada çok önemli bir değişiklik ile birbirlerinden ayrılacaktır. Bu değişiklik, ÇYÇG'ndeki bileşenlerin elde ediliminde kullanılan destek işlevleridir (ing: support functions) [12–17]. Bu işlevler, üzerinde çalışılan çokdeğişkenli işlevin ÇYÇG bileşenlerinin elde ediliminde devreye girip, YBMG'ne göre daha az sayıda bileşen kullanarak ilgili çokdeğişkenli işleve etkin yaklaşımlar gerçekleştirimini sağlarlar. Kuşkusuz gerek uzamın, gerek ağırlık işlevinin, gerekse de destek işlevlerinin seçimi, üzerinde çalışılan bilimcil sorun veya veri kümesinin özelliklerine göre belirlenebilmekte ve ÇYÇG'nin etkinliğinin arttırımı gündeme getirilebilmektedir [18–22].

ÇYÇG, son yıllarda, bir çok bilimcil ve ölçmenlik (ing: engineering) sorunlarında kullanılmıştır. Bunlardan bazıları işlev yaklaşımlar [18], çokboyutlu veri biçelendirimi [19], dizey (ing: matrix) ve çokboyutlu dizi (ing: multi-way array) ayrıştırmayı [20], yüz ve görüntü tanıma [21], devingen görüntü çözümlemeyimi (ing: video analysis) [22] ve aşkınizgencil (ing: hyperspectral) görüntü sıkıştırım [23] sorunlarıdır.

Yukarıda belirtildiği gibi dördümlü tümlemlenebilen (ing: square integrable) ve dikgen bir uzamın içerisinde çözümcül olan bir  $N$  değişkenli  $f(\mathbf{x})$  işlevinin ÇYÇG açılımı aşağıdaki gibi verilir [12–16].

$$f(\mathbf{x}) = f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) + \dots + f_{1\dots N}(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

Görüldüğü gibi (1.2)'deki açılım tıpkı YBBG'nde olduğu gibi sonlu sayıda terim içerir ve bu sayının,  $N$  değişkenli bir işlev için  $2^N$  olduğu açıktır. (1.2) açılımının her bir terimi iki önemli öge içermektedir. Bunların ilki, sırasıyla  $f_0, f_i, f_{i_1 i_2}, \dots, f_{1\dots N}$ 'ler ile gösterilen bileşenler, ikincisi ise bileşenlerin hemen yanında çarpım durumunda bulunan ve  $s_j(x_j)$ 'ler ( $j = 1, \dots, N$ ) ile gösterilen tekdeğişkenli destek işlevleridir. Bu bileşenler ve destek işlevlerinin belirlenişinde, önceden belirlenmiş ağırlık işlevleri kullanılmaktadır. Bu amaçla kullanılacak ağırlık işlevi,

$$W(\mathbf{x}) = W_1(x_1)W_2(x_2) \cdots W_N(x_N) \quad (1.3)$$

biçiminde seçilebilir. (1.3) bağıntısından görülebileceği gibi çokdeğişkenli  $W(\mathbf{x})$  ağırlık işlevi, tekdeğişkenli  $W_i(x_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) işlevlerinin çarpımı olarak gündeme getirilmiştir. İlgilenilen ağırlık işlevinin yukarıda görüldüğü gibi salt çarpımcıl (ing: purely multiplicative) yapıda seçilişi, bileşen ve destek işlevlerinin elde edilişlerinde açığa çıkacak olan çok katlı tümlevlerin daha kolay belirlenişini sağlamaktadır. Gerek sayıtmcıl (ing: statistical) gereklilikler, gerekse de ilgili işlemlerde kolaylık sağlayışı açısından (1.3)'te görülen tekdeğişkenli ağırlık işlevi çarpanları ve yine tekdeğişkenli olan destek işlevleri ile ilgili aşağıda verilen öngörüler yapılabilir.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1, \quad \int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) s_i(x_i)^2 = 1, \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.4)$$

(1.2) açılımındaki destek işlevleri her ne kadar tek değişkenli olarak gözükseler de, değişik değişkenlilikte destek işlevleri seçmek de olasıdır. Önceki çalışmalarda destek işlevlerinin seçiminin önemi ve yaklaştırıma etkisi birçok kez dile getirilmiş, farklı seçimlerin farklı yaklaştırım niteliklerine neden olduğu görülmüştür [12]. Bu farklı seçimler ile birlikte, bilimcil yazında (ing: scientific literature) bulunan birçok ÇYÇG yazısında

$$s_j(x_j) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} dx_{j-1} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} dx_{j+1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N \left( \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N W_i(x_i) \right) f(x_1, \dots, x_N),$$

$$j = 1, 2, \dots, N \quad (1.5)$$

biçiminde seçilen destekler kullanılmıştır [12–22]. (1.5)’teki tanımlarda, her bir tekdeğişkenli destek işlevinin, üzerinde çalışılan çokdeğişkenli işlevin yapısının özünden yararlanılarak elde edilişi olgusu söz konusudur. Sonuç olarak, destek işlevlerinin belirlenişi, aslında ilgilenilen sorunun yapısına göre oldukça esnetilebilir bir durumdur. (1.5)’te verilen tanımla elde edilen destek işlevlerinin söz gelimi  $j$ . sırada olanının, aslında ilgilenilen çokdeğişkenli işlevin  $j$ . değişkeninin bulunduğu aralığın dışlanmış olduğu  $N - 1$  boyutlu kartezyen uzay üzerindeki ortalamasını yansıttığı açıkça görülmektedir. Bu durum, sanki, ilgili işlevin çalışılan uzam üzerinde ortalamasını bulurken  $j$ . yönün dışlanmış oluşu gibi yorumlanabilir. Bu yüzden, (1.5)’te açıkça verilen bağıntılar yardımıyla elde edilen destek işlevlerine *Yönel Ortalamalı Destekler-YOD* (ing: *Directionally Averaged Supports-DAS*) adı verilir [18–22]. ÇYÇG bileşenlerinin elde edilişlerine geçmeden önce, açık yapıları (1.5) bağıntıları ile verilen destek işlevlerinin (1.4)’te belirtilen ilgili öngörümüleri sağlamaları gerektiği olgusunu anımsatış yerinde olacaktır. Bu bağlamda, sözgelimi  $j$ . destek işlevi olan  $s_j(x_j)$ ’nin, ilgili ağırlık çarpanı olan  $W_j(x_j)$  kullanılarak  $[a_j, b_j]$  aralığı üzerinde olağanlaştırmayı (ing: normalization) gündeme getirilip bu işlemlerden sonra ilgili ÇYÇG yaklaşıtırmı olgusuna odaklanılmalıdır.

Çözümçül bir  $f(\mathbf{x})$  işlevi ve seçilen destek işlevi takımı için (1.2)’deki ÇYÇG açılımının bileşenlerinin eşsiz (ing: unique) olarak elde edilebilmesi oldukça önemlidir. Bu amaçla, ilgili bileşenler arasında bazı koşulların gündeme getirilişi önem kazanır. Bu koşullar,

$$\int_{a_{i_\ell}}^{b_{i_\ell}} dx_{i_\ell} W_{i_\ell}(x_{i_\ell}) s_{i_\ell}(x_{i_\ell}) f_{i_1, \dots, i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = 0, \quad x_{i_\ell} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \quad (1.6)$$

biçiminde verilen “tümlev altında sıfırlanış” (ing: vanishing under integration) koşullarıdır. (1.4) öngörümüleri ve (1.6) koşulları kullanılarak ÇYÇG’nin değişmez terimi (ing: constant term) olarak adlandırılan bileşen

$$\mathcal{I}_0 f(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.7)$$

biçiminde elde edilir [12–16]. Burada  $\mathcal{J}_0$  işleci, (ing: operator) ilgili çokdeğişkenli işlevin, ağırlık ve destek işlevleri altında tüm bağımsız değişkenlere göre artarda tümlevinin alınmasını sağlayan bir işleçtir. Bu işlecin görevi, aynı zamanda, ilgili işlevin ağırlıklar ve destekler altındaki görüntüsünün,  $N$  boyutlu işlev uzayının tüm yönlerindeki ortalamasını almak diye de nitelendirilebilir. Andıran biçimde  $i$ . yön dışında kalan diğer yönler üzerinde ortalama (tümlev) alan işleci

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i f(x_1, \dots, x_N) \equiv & \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \cdots \\ & \times \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (1.8)$$

biçiminde tanımlamak olasıdır [12–16]. Diğer ortalama alma işleçleri de andıran biçimde tanımlanabilirler. Böylelikle, (1.7) ve (1.8)'deki işleçler yardımıyla, (1.2) açılımının değişmez bileşeni ve tek değişkenli bileşenleri açık olarak sırasıyla

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.9)$$

ve

$$\begin{aligned} f_i(x_i) = & \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \cdots \\ & \times \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) - f_0 s_i(x_i) \end{aligned} \quad (1.10)$$

biçiminde elde edilirler. Açılımın iki veya daha fazla bağımsız değişken içeren terimleri de andıran yol izlenerek elde edilirler. Görüldüğü gibi (1.2) açılımının tüm terimlerini elde etmeye çalışmak, bilgisayar karmaşıklığı (ing: computational complexity) açısından oldukça olumsuz sonuçlar doğurmaktadır. Bu yüzden ilgili ÇYÇG açılımının tüm terimlerini bulmak yerine, baştan birkaç terimini bulup ilgilenilen çokdeğişkenli işleve yaklaştırım yapılması gündeme getirilmektedir. Bu olgu, diğer bir deyişle, ÇYÇG açılımında kesme (ing: truncation) yapılması olgusu ile birebir örtüşür. Bilimcil yazında, bu konu ile ilgili karşılaşılan en yüksek kesme kertesini (ing: truncation order) 2'dir [18–22]. Birçok çalışmada, salt değişmez terimin, yani (1.9)'de açık yapısı verilen terim ile tüm destek işlevlerinin çarpımı ile oluşan terimin, ilgili çokdeğişkenli işlevi ne kadar iyi betimlediği ve salt bu terimin kullanımıyla ilgili çokdeğişkenli işleve etkin yaklaşımlar yapılabilmesi için ne gibi olguların devreye

sokulması gerektiği konusu tartışılmıştır [12–16]. Yukarıda sözü edilen kesmelerden sıfırcı ve birinci kereden olanlar sırasıyla

$$\begin{aligned}
\pi_0(\mathbf{x}) &\equiv f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j), \\
\pi_1(\mathbf{x}) &\equiv \pi_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j), \\
\pi_2(\mathbf{x}) &\equiv \pi_1(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1.11}$$

biçiminde tanımlanırlar. (1.11)'daki bu tanımlar sırasıyla 0. ve 1. ve andıran biçimde yüksek kereden ÇYÇG kesme yaklaşıtları (ing: EMPR truncation approximants) olarak adlandırılırlar [12–16]. Andıran biçimde, üstüste toplama yapılarak, geri kalan kertelerdeki yaklaşıtların elde edilimi olanaklıdır. Oluşturulan bu yaklaşıtların, ilgili çokdeğişkenli işlevi ne derecede iyi yansıttığını belirleyebilmek amacıyla “nitelik ölçenleri” (ing: quality measurers) adı verilen büyüklükler ortaya atılmıştır. Bu ölçenler, bir iççarpım aracılığıyla elde edilen boy (ing: norm) tanımı yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilirler

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^N s_j \right\|^2, \\
\sigma_1 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j \right\|^2 + \sigma_0, \\
\sigma_2 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \left\| \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j \right\|^2 + \sigma_1, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1.12}$$

ve  $0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_N = 1$  olacak biçimde sıralı bir dizi oluştururlar. (1.12)'den anlaşılacağı gibi, aslında her bir nitelik ölçeni, ilgili yaklaşıtlımda alıkonulan bileşenlerin üzerinde çalışılan uzam üzerindeki boy dördüllerinin (ing: norm square), erekteki çokdeğişkenli işlevin ilgili uzam üzerindeki boy dördülüne bölümüyle elde edilir [12–16]. Kuşkusuz, her bir boy, yine ilgili çok boyutlu uzam üzerinde tanımlanan ağırlıklı bir iççarpım yardımıyla elde edilmektedir [12–16].

Giriş bölümünde, buraya dek, savın odağındaki ana yöntem olan ÇYÇG ile ilgili bilimcil yazında bulunan temel bilgilere değinilmiştir. Bu aşamadan sonra ÇYÇG'nin etkinliğinin arttırımı için, sav araştırmaları sırasında gerçekleştirilen çabalar doğrultusunda gerekli olan bilimcil yazındaki diğer bilgilere değinilecektir.

#### 1.4 Tümler Denklemler ve Hilbert-Schmidt Tümler İşleçleri

Bu altbölümde, tümler denklemler (ing: integral equations) ve Hilbert-Schmidt tümler işleçleri (ing: integral operators) ile ilgili bazı önemli bilgilere değinilecektir. İlgili bilgilerin savda kullanım gerekliliği, ÇYÇG'de kullanılan destek işlevlerinin eniyilenme sürecinde dolaysız olarak (ing: directly) açığa çıkmalarıdır. Bu doğrultuda, bu altbölümü, savın *Bilimcil Yazın Araştırımı* bölümünde vermek önemli bir gereklilik olmuştur.

Bilimcil yazından bilindiği gibi Fredholm tümler denklemleri Hilbert-Schmidt tümler işleci içeren sorunların çözümünde oldukça önemli bir yer tutar [24,25]. Bu bağlamda, bilimcil yazında *Birinci Tür Fredholm Tümler Denklemi* olarak adlandırılan denklem açık olarak aşağıdaki anlatımla verilmektedir [24,25]

$$\int_a^b d\xi K(x, \xi) f(\xi) = g(x) \quad (1.13)$$

Yukarıdaki anlatımda  $f$ , gerçel değerli ve bilinmeyen bir tekdeğişkenli işlevi simgelerken  $g$  ise, yine tekdeğişkenli ama bu kez bilinen bir işlev olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunların yanısıra, yine gerçel değerli olan ikideğişkenli  $K$  işlevi ise ilgili denklemin *çekirdeği* olarak adlandırılmaktadır [24,25].

*İkinci Tür Fredholm Tümler Denkleminin* açık yapısı ise aşağıdaki gibi verilebilir [24,25].

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b d\xi K(x, \xi) \phi(\xi) + \gamma(x) \quad (1.14)$$

Bu anlatımda ise  $\phi$ , şu an için belirlenmeyen ve çözümü istenen tekdeğişkenli bir işlevi belirtirken  $\gamma$  ve  $\lambda$  ise, sırasıyla, önceden verilmiş tekdeğişkenli bir işlev ve bir sayılı (ing: scalar) simgelemektedir. İkideğişkenli ve gerçel değerli  $K$  işlevi, tıpkı Birinci Tür Fredholm Tümler Denklemindekini andıran biçimde, yine, ilgili tümler denklemin çekirdeği olarak adlandırılır.

Yukarıda sözüedilen *gerçel değeri* kavramı, aslında, ille de sağlanması gereken bir özellik değildir. Her ne kadar bu özellik çözümleyimlerde (ing: analyses)

belirli kolaylıklar getirirse de, ilgili çözümleyimlerin tümü çok da büyük zorluklarla karşılaşılmadan karmaşık değerli çekirdekler ve işlevlere özelsizleştirilebilir (ing: generalization). Örneğin, gerçel değerli ikideğişkenli işlevlerdeki bakışım (ing: symmetry) kavramını yansıtan  $K(x, \xi) = K(\xi, x)$  eşitliği  $K$ 'nın karmaşık değerler alabildiği durumlarda  $K(x, \xi) = \overline{K(\xi, x)}$  eşitliği ile yansıtılır. Buradaki  $\overline{K(\xi, x)}$  anlatımı karmaşık eşlenik (ing: complex conjugate) kavramını belirtmekle birlikte, ileride gerçel değerli işlevler için sözü edilecek, iç çarpım, boy ve özüne eşlik (ing: self-adjointness) kavramları, bu karmaşık eşlenik tanımı kullanılarak kolaylıkla karmaşık değerli işlevler için de gündeme getirilebilmektedir [24–26]. Bu bağlamda, ÇYÇG ile yaklaştırım yapılmak istenen işlevler çözümçül ve gerçel değerli çokdeğişkenli işlevler olacağından, bu altbölüm ve savın bütününde gerçel değerli işlevler taban alınarak ilerlenecektir.

(1.13) eşitliğinde verilen Birinci Tür Fredholm Tümler Denklemine çözüm, ancak ilgili tümler işlecin evirtimi (ing: inversion) olanaklı olduğunda vardır ve bulunacak olan çözüm tek türlü belirli olacaktır [24, 25]. Bu olgu da, ilgili işlecin sıfır özdeğeri olmaması ile eşdeğerdir. Bunun yanısıra (1.14)'de sözü edilen İkinci Tür Fredholm Tümler Denklemine çözümünün var ve tek olması ise  $1/\lambda$  değerinin ilgili işlecin herhangi bir özdeğeri ile çakışmaması durumunda olanaklı olur [24, 25]. Eğer böyle bir çakışım varsa, verilen  $\gamma$  işlecinin çakışım sağlanan özdeğer ile ilintili öz işlev (ing: eigenfunction) dikgen (ing: orthogonal) olması durumunda çözümün varlığından sözedilebilir. Kuşkusuz, bu durumda elde edilebilecek çözüm tek olmayacaktır. Yukarıda sözüedilen bu iki durumun dışındaki durumlar için ise (1.14) denkleminin çözümü yoktur [24, 25].

#### 1.4.1 Hilbert-Schmidt çekirdeği ve işleci

Yukarıdaki altbölümde sözüedilen olgular, bizi, aşağıdaki tümler işleci tanımına götürür

$$\widehat{\mathcal{F}}\phi(x) \equiv \int_a^b d\xi K(x, \xi)\phi(\xi), \quad x, \xi \in [a, b], \quad \phi \in \mathcal{F} \quad (1.15)$$

(1.15)'te yapısı açıkça verilen  $\widehat{\mathcal{F}}$  bir tümler işleci,  $K(x, \xi)$  bu işlecin çekirdeğini,  $\phi(x)$  ise ilgili işlecin etkidiği işlevi, yani işleneni (ing: operand) simgelemektedir. Kuşkusuz, zorunluluk olmasa da, bu aşamada *bakışık çekirdek* durumuna odaklanılacaktır. Bu bağlamda, eğer,  $[a, b]$  aralığında dördümlü tümlenebilen (ing: square



integrable) işlevlerin bulunduğu uzay  $\mathcal{F}$  ile simgelenirse, (1.15) işlecinin  $\mathcal{F}$ 'den aldığı bir işlevi yine aynı uzaya götüren bir doğrucul (ing: linear) işleç olduğunu söylemek olanaklıdır. Bu işlecin çekirdeğinin bakışıklığı, ilgili tümlev işlece özüne eşlik olarak yansımaktadır. Çekirdeğin bu özelliğinden ötürü, ilgili işlecin izgesi (ing: spectrum) gerçel eksen üzerinde konuşlanır [26]. Bunun yanısıra, ister ayrık ister sürekli olsun, değişik özdeğerleri karşılık gelen değişik özişleçlerin tümü birbirlerine dikgen olurlar [26]. Bu özişlevlerin olağanlaştırımı (ing: normalization), ayrık izge durumunda, her birinin boyunun 1'e eşitlenişi ile sağlanabilir. Buna karşın, sürekli izge durumunda ise özişlevlerin aralarındaki iç çarpım tanımının, Dirac Delta işlevinin bu özişleçlerle ilintili özdeğerlerin çıkarılışında (ing: subtraction) aldığı değer olarak tanımlanımı olağanlaştırımı sağlayabilir. Bu olgu da Hermit türü (ing: Hermitian) işleçlerin izgecil kuramında varılan sonuçlardan biridir [26].

(1.15)'teki tümlev işlecin sayılabilir sonsuzluktaki dikgen ve birimboylu taban işlevleri yardımıyla üretilen dizey gösterilimi (ing: matrix representation) bakışıktır. Bununla birlikte, birim işlecin (ing: identical operator) aynı taban takımı altındaki dizey gösterilimi de birim dizeye (ing: identity matrix) karşılık gelir. Her iki dizey gösteriliminin de sayılabilir sonsuzlukta yataysıra ve düşeysıralardan oluştuğunu söylemek güç değildir. Bu özellikler, kuşkusuz, ilgili işlevin sürekli izgesi olmadığı durumlar için sağlanmaktadır [26].

Yukarıda verilen bilgilerin ışığında, (1.15) işlecinin dizey gösteriliminin uygun bir doğrucul yöney uzayından (ing: linear vector space) yine aynı uzaya bir dönüşüm olduğunu söylemek olanaklıdır. Bu dizeyin, ilgili işlecin çekirdeğinin yapısına bağlı olarak, sonlu ya da sonsuz sayıda sıfır olmayan yataysırası olabilir. Eğer (1.15)'teki işlecin bakışık çekirdeği aşağıdaki boy sınırlılığı koşulunu sağlarsa

$$\|K\|^2 \equiv \int_a^b dx \int_a^b d\xi K(x, \xi)^2 < \infty \quad (1.16)$$

bu işlece “Hilbert-Schmidt Tümlev İşleci” adı verilir [26–28]. (1.16)'te verilen sonluluk ve tanımından gelen doğruculluk (ing: linearity) özelliğinden Hilbert-Schmidt tümlev işleçleri tıkızdır (ing: compact) [26]. Bu olguların yanısıra yukarıdaki bağıntıda geçen ikideğişkenli  $K(x, \xi)$  çekirdeği

$$K(x, \xi) = \sum_{j=1}^n \kappa_j \chi_j(x) \chi_j(\xi) \quad (1.17)$$

$n$  sonsuza kadar büyüyecek bir artı değerli tamsayıyı simgelemek üzere yukarıdaki gibi ayrıştırılabilir. Eğer  $n$  değeri sonlu bir değer ise o zaman çekirdeğe *Pincherle-Goursat çekirdeği*, karşıt durumda ise *Hilbert-Schmidt çekirdeği* adı verilir [27, 28]. (1.17) bağıntısında bulunan  $\kappa$ 'lar özdeğeri simgelemekle birlikte Pincherle-Goursat çekirdekleri için salt sonlu sayıda  $\kappa$  değeri sıfır değildir. Bunun yanısıra, her ne kadar sayılabilir sonsuzlukta olsalar da, Hilbert-Schmidt çekirdeği için ilgili  $\kappa$ 'ların dördüllerinin toplamı sonlu kalır. (1.17) bağıntısındaki bir diğer bileşen olan  $\chi$ 'ler ise ilgili işlecin özişlevleridir. İster Pincherle-Goursat, ister Hilbert-Schmidt olsun, her iki çekirdeğin de  $[a, b]^2$  dördülünde (ing: square) tekilliğinin (ing: singularity) olmadığı görülmektedir. Bu aşamadan sonra, savın tümünde, tümlev işleci denildiğinde Hilbert-Schmidt tümlev işlevinden sözediliyor olunacaktır.

#### 1.4.2 Hermit türü olmayan işleçler

(1.15)'te açıkça verilen işlecin özüne-eş (ing: self-adjoint) yani Hermit türü olmayışı iki durum söz konusu olduğunda açığa çıkabilir. Bu durumların ilki, her ne kadar ilgili işlecin  $[a, b]$  aralığı üzerinde dördülü tümlevlenebilen işlevler uzayı olan  $\mathcal{F}$ 'den yine aynı uzaya bir dönüşüm gerçekleştirirse bile, çekirdeği olan  $K(x, \xi)$ 'nin bakışık olmaması yani  $K(x, \xi) \neq K(\xi, x)$  olması durumudur. Bu bağlamda, dile getirilen ilk durum için (1.15)'teki işleç

$$\widehat{\mathcal{F}}^\dagger \phi(x) \equiv \int_a^b d\xi K(\xi, x) \phi(\xi), \quad x, \xi \in [a, b] \quad (1.18)$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki eşitliği gözönüne alarak ve dizeyler kuramındaki tekil değer ayrıştırımından (ing: singular value decomposition) [29] esinlenerek aşağıdaki gib bir tür dolaylı özdeğer sorunu tanımlamak olanaklı olur.

$$\begin{aligned} \int_a^b d\xi K(x, \xi) \phi(\xi) &= \sigma \gamma(x), \\ \int_a^b dx K(x, \xi) \gamma(x) &= \sigma \phi(\xi), \\ x, \xi &\in [a, b] \end{aligned} \quad (1.19)$$

Yukarıdaki eşitliklerde  $\phi$  ve  $\gamma$  çözülmek istenen ve bilinmeyen tekdeğişkenli işlevleri,  $\sigma$  ise, yine bilinmeyen bir sayılı simgelemektedir. Her ne kadar yukarıdaki iki denklem eşleşik (ing: coupled) tümlev denklemler olsalar da, ilgili işleçler birbirlerinin üzerine sırasıyla etki ettirilerek ayrışık (ing: uncoupled) denklemler durumuna getirilebilirler.

Böylelikle birinci denklemde  $\gamma$ , ikinci denklemde de  $\phi$  elenmiş olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_a^b d\bar{\xi} K(x, \xi) K(x, \bar{\xi}) \phi(\bar{\xi}) &= \sigma^2 \phi(\xi), \\ \int_a^b d\xi \int_a^b d\bar{x} K(x, \xi) K(\bar{x}, \xi) \gamma(\bar{x}) &= \sigma^2 \gamma(x), \\ x, \xi &\in [a, b] \end{aligned} \quad (1.20)$$

biçimindeki ayrışık denklemlere ulaşılmış olur. Bu denklemler daha yalın olarak

$$\begin{aligned} \int_a^b d\xi K_1(x, \xi) \phi(\xi) &= \sigma^2 \phi(x), \\ \int_a^b dx K_2(x, \xi) \gamma(x) &= \sigma^2 \gamma(\xi), \\ x, \xi &\in [a, b] \end{aligned} \quad (1.21)$$

biçiminde yazılabilir. (1.21) denklemlerinde açığa çıkan yeni çekirdekler olan ikideğişkenli  $K_1$  ve  $K_2$  işlevleri ise aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$\begin{aligned} K_1(x, \xi) &\equiv \int_a^b d\bar{x} K(\bar{x}, x) K(\bar{x}, \xi), \\ K_2(x, \xi) &\equiv \int_a^b d\bar{\xi} K(x, \bar{\xi}) K(\bar{\xi}, \xi), \\ x, \xi &\in [a, b]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

(1.19), (1.20), (1.21) ve (1.22) bağıntılarında ortaya konan olgular, dördül ya da dikdörtgen dizeler için gerçekleştirilen tekil değer ayrıştırımıyla birebir örtüşmektedir. Bu yüzden, burada ele alınan düşünceye *Sürekli İşlevlerin Tekil Değer Ayrıştırımı* adını vermek yerinde olacaktır. (1.22) bağıntılarında açık yapıları verilen  $K_1$  ve  $K_2$  işlevlerinin bakışık oldukları açıktır. Bu çekirdeklerin boyları sonlu ise (1.21)'deki her iki denklem sınırlı Hilbert-Schmidt işlevlerinin özdeğer sorunu olarak nitelendirilebilir.

İkinci özüne eş olmayış durumunda ise ilgili işlecin tanım kümesi ile değer kümesinin uyuşmama olgusu söz konusudur. Bu durumda, ilgili tümlev işleç,  $\mathcal{F}$  ile simgelenen ve öğeleri belirli bir aralıkta dördülü tümlevlenebilir işlevler olan uzaydan alınan bir işlevi aynı özellikleri taşıyan ama değişik bir aralık üzerinde tanımlanan değişik bir  $\mathcal{G}$  işlev uzayına götürür. Ayrıca, bir tümlev işlecin tanım kümesi ile değer kümesinin farklı olması salt ilgili aralıkların değişik olmasından ötürü gerçekleşmez. İlgili işlecin çekirdeğinin tekillik gibi yapısal özellikleri nedeniyle de tümlev işlecin etki ettiği bir işlevi götürdüğü uzay o işlevin içinde bulunduğu uzaydan değişik olabilmektedir. Bu

durum, sanki değişik Kartezyen uzaylar arasında tanımlanmış bir dikdörtgen dizayle ilintilendirilebilir. Bilindiği gibi bu tür dizayler için doğrudan bir özdeğer sorunu tanımlamak olanaksızdır. Bunun yerine sözüedilen farklı uzaylar arasında geçişi sağlayan ilgili tümlev işleç ve onun eş (ing: adjoint) işleci üzerinden tanımlanmış bir tekil değer ayrıştırımı tanımlanabilir.

Yukarıda sözü edilen olguları ayrıntılandırabilmek için aşığıdaki işleç tanımları gözönüne alınsın

$$\widehat{\mathcal{F}}\phi(x) \equiv \int_{a_\xi}^{b_\xi} d\xi K(x, \xi)\phi(\xi), \quad x \in [a_x, b_x] \quad (1.23)$$

$$\widehat{\mathcal{J}}\gamma(\xi) \equiv \int_{a_x}^{b_x} dx K(x, \xi)\gamma(x), \quad \xi \in [a_\xi, b_\xi] \quad (1.24)$$

(1.23) ve (1.24) tanımlarında yer alan  $\phi(x)$  ve  $\gamma(\xi)$ , sırasıyla  $[a_x, b_x]$  ve  $[a_\xi, b_\xi]$  aralıkları üzerinde dördümlü tümlevlenebilen işlevler uzayı olan  $\mathcal{F}$  and  $\mathcal{G}$  doğrucul yöney uzaylarının öğeleridir. Yine yukarıdaki tanımlardan,  $\widehat{\mathcal{F}}$  ve  $\widehat{\mathcal{J}}$  işleçleri, sırasıyla  $\mathcal{F}$ 'den  $\mathcal{G}$ 'ye ve  $\mathcal{G}$ 'den  $\mathcal{F}$ 'ye dönüşüm yapan işleçlerdir. Bu tek boyutlu uzaylar, alt ve üst kıyıları (ing: lower and upper bounds) değişik olduğundan, bütünüyle değişik uzaylardır. Bunun yanısıra her iki uzay üzerinde iç çarpım ve ilgili iç çarpım yardımıyla oluşturulabilecek boy kavramı da ayrı ayrı tanımlanmalıdır. Bu olgular, her iki uzayın da birer ayrılabilir (ing: separable) Hilbert uzayı olduğunu söyler. Değişik Hilbert uzaylarında tanımlanan iç çarpımların değişikliğini betimlemek için  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{G}$  simgelerini altsimge (ing: subscript) olarak kullanan iç çarpım tanımları aşığıdaki gibi yapılabilir

$$(\phi_1, \phi_2)_{\mathcal{F}} \equiv \int_{a_x}^{b_x} dx \phi_1(x)\phi_2(x) \quad (1.25)$$

$$(\gamma_1, \gamma_2)_{\mathcal{G}} \equiv \int_{a_\xi}^{b_\xi} d\xi \gamma_1(\xi)\gamma_2(\xi) \quad (1.26)$$

(1.25) ve (1.26)'ten anlaşılabilceği gibi tanımlanan iç çarpımlarda ağırlık işlevi, kolaylık açısından, 1 değişmez işlevi olarak alınmıştır. Kuşkusuz, uygun olmak üzere bu seçim değişik türden işlevlerden yana da kullanılabilir. Öte yandan, (1.25) ve (1.26) iç çarpım tanımlarının sol yanlarında ayraçlar (ing: parantheses) içerisinde bulunan işlevlerin bağımsız değişkenleri açıkça belirtilmemiştir. Bunun nedeni, ilgili değişkenlerin ilgili iç çarpımların sonuçlarında asla gözükmeyecek oluşudur. Bu nedenle savda anlatımı yapılacak tüm iç çarpımlarda bu olguya özen gösterilecektir.

Yukarıda da belirtildiği gibi  $\widehat{\mathcal{I}}$  ve  $\widehat{\mathcal{J}}$  işleçleri, sırasıyla  $\mathcal{F}$ 'den  $\mathcal{G}$ 'ye ve  $\mathcal{G}$ 'den  $\mathcal{F}$ 'ye dönüşüm gerçekleştirmektedirler. Bu bağlamda (1.25) ve (1.26) tanımları kullanılarak aşağıdaki ilişkiyi elde etmek olanaklıdır.

$$\left(\gamma, \widehat{\mathcal{I}}\phi\right)_{\mathcal{F}} = \left(\widehat{\mathcal{J}}\gamma, \phi\right)_{\mathcal{G}} \quad (1.27)$$

Buradaki  $\phi$  ve  $\gamma$  işlevleri sırasıyla  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{G}$  uzaylarından alınan iki işleçtir.  $\widehat{\mathcal{I}}$  ve  $\widehat{\mathcal{J}}$  işleçleri (1.27) bağıntısındaki iç çarpımların aynı iç çarpımlar olmamasından ötürü birbirinin eşi olarak tanımlanamazlar. Buna karşın ilgili işleçlerin birbiriyle olan ilişkisi her zaman us'da (akılda) tutulması gereken bir olgudur.

Yukarıda sözü edilen olgular, aşağıdaki gibi bir tekil değer ayrıştırımı sorunu tanımına olanak sağlar.

$$\widehat{\mathcal{I}}\phi(x) = \sigma\gamma(\xi), \quad x \in [a_x, b_x], \quad \xi \in [a_\xi, b_\xi], \quad (1.28)$$

$$\widehat{\mathcal{J}}\gamma(\xi) = \sigma\phi(x), \quad x \in [a_x, b_x], \quad \xi \in [a_\xi, b_\xi], \quad (1.29)$$

İlgili işleçleri sırasıyla birbirleri üzerine etki ettirerek

$$\widehat{\mathcal{J}}\widehat{\mathcal{I}}\phi(x) = \sigma^2\phi(x), \quad x \in [a_x, b_x] \quad (1.30)$$

$$\widehat{\mathcal{I}}\widehat{\mathcal{J}}\gamma(\xi) = \sigma^2\gamma(\xi), \quad \xi \in [a_\xi, b_\xi]. \quad (1.31)$$

eşitliklerine varılabilmektedir. Böylece, yukarıda belirtilen, tıpkı Hermit türü olmama durumlarının birincisinde olduğu gibi, ikincisinde de bir tekil değer ayrıştırımı sorunu oluşturma ve buradan da iki ayrı özdeğer sorununa geçiş olanaklı duruma gelmiş olur.

## 1.5 Uzbilimsiz Sendelenimsizlik Kuramı

1.3 altbölümünde anlatıldığı gibi, verilen bir çokdeğişkenli işlevin ÇYÇG bileşenleri ile ÇYÇG yaklaşıtırmında kullanılacak destek işlevlerinin (YOD) elde ediliminde çok katlı tümlevler ile karşılaşmaktadır. Tümlevi alınacak işlevin ya da seçilen ağırlık işlevinin çözümcül yapısına bağlı olarak ilgili tümlevi belirlemek epeyce karmaşık olabilir. Bunun da ötesinde, ilgili tümlevi çözümcül olarak belirlemek, olanaksız bile olabilir. Bu tür durumlarda, uygun bir sayıcıl dördülleyim (ing: numerical quadrature) yönteminin kullanımı bilim bireyleri ya da ölçmenlerce yeğlenen olgudur. Bu amaç doğrultusunda bir çok dördülleyim yöntemi geliştirilmiş olup bu konuda bilimsel

yazında oldukça yoğun bilgi birikimi bulunmaktadır [30, 31]. Bu altbölümde, çok katlı tümlevlerin değerinin sayısal olarak bulunmasında kullanılan ve Prof. Dr. Metin Demiralp tarafından geliştirilmiş etkin bir yöntem olan ‘‘Sendelenimsiz Tümlevleyim’’ (ing: Fluctuation Free Integration) yöntemi [32, 33] ve ayrıntılarından söz edilecektir. Bu doğrultuda aşağıdaki kanıtsav ile başlamak yerinde olacaktır.

**Kanıtsav:**  $f$  işlevi  $\mathcal{H}$  Hilbert Uzayı içerisinde alınmak üzere tek değişkenli ve çözümcül (ing: analytic) bir işlev olsun. Görevi, işlenenini (ing: operand)  $f$  ile çarpmak olan  $\hat{f}$  işlecinin (ing: operator) dizey gösterilimi (ing: matrix representation), aynı uzay ve taban takımı yardımıyla oluşturulan ve görevi işlenenini bağımsız değişken  $x$  ile çarpmak olan  $\hat{x}$  işlecinin dizey gösteriliminin  $f$  altındaki görüntüsüne, sendelenim terimleri gözardı edildiğinde, eşit olur.

Sendelenim terimlerinin gözardı edildiği durumda, bir diğer deyişle sonsuz sayıda yatay ve düşey sıralar içeren dizey gösterilimlerinden, bu dizeylerin  $n$  boyutlu kesmelerini içeren dizeylere geçildiğinde ise yukarıdaki kanıtsavda sözü edilen eşitlik,

$$\mathbf{F}^{(n)} \approx f(\mathbf{X}^{(n)}) \quad (1.32)$$

biçimindeki yaklaşıklığa dönüşür [32, 33]. Bu yaklaşıklıktaki  $\mathbf{X}^{(n)}$  dizeyi görevi, işlerini bağımsız değişken ile çarpmak olan işlecini dizey gösterilimini betimler. Bu dizeyin öğeleri

$$\mathbf{X}^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{11}^{(n)} & \cdots & X_{1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}^{(n)} & \cdots & X_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad X_{jk}^{(n)} \equiv (u_j, \hat{x}u_k), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (1.33)$$

olarak bulunurlar [30, 31]. Andıran biçimde  $\mathbf{F}^{(n)}$  dizeyi de görevi, işlenenini  $f$  işlevi ile çarpmak olan işlecini dizey gösterilimini betimler ve bu dizeyin öğeleri de

$$\mathbf{F}^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} F_{11}^{(n)} & \cdots & F_{1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}^{(n)} & \cdots & F_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad F_{jk}^{(n)} \equiv (u_j, \hat{f}u_k), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (1.34)$$

olarak elde edilirler [30, 31]. (1.33) ve (1.34) bağıntılarındaki dizeylerin öğelerinin elde ediliminde karşımıza çıkan  $u_i$  işlevleri tekdeğişkenli işlevler olup birlikte dikgen ve birimboyulu (ing: orthonormalized) bir taban takımı (ing: basis set) oluştururlar. Bir diğer deyişle  $\delta_{jk}$  Kronecker Delta’sını simgelemek üzere

$$\mathcal{U} = \{u_i(x)\}_{i=1}^{\infty}, \quad (u_j, u_k) = \delta_{j,k} \quad (1.35)$$

yazmak olanaklıdır. Bu aşamadan sonra, yukarıda verilen Sendelenimsizlik Kanıtı yardımıyla, bir belirli tümleve (ing: definite integral) nasıl yaklaştırım yapılacağı olgusu üzerinde durulacaktır. Bu doğrultuda, yaklaştırım yapılmak istenen tümlev

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^1 dx f(x) \quad (1.36)$$

olarak ele alınsın. Bu tümlevde aralığın  $[0,1]$  olarak alınması, evrencil (ing: universalized) bir yaklaşım ereklenimindedir. Ayrıca  $\mathcal{H}$  uzayında tanımlanacak olan iç çarpımda ağırlık işlevi olarak

$$w(x) \equiv 1, \quad x \in [0,1] \quad (1.37)$$

değişmez işlevinin alındığı düşünülecektir. Bu önbilgiler verildikten sonra sonsuz boyutlu  $\mathcal{H}$  uzayını örten ve (1.33) ile (1.34) bağıntılarındaki dizelerin öğelerinin bulunmasında kullanılacak olan taban takımının oluşturmuna geçilebilir. Bu taban takımının öğeleri, bağımsız değişken olan  $x$ 'in eksi olmayan tamsayı üslülerinden oluşturulacaktır [30, 31]. Yani

$$\mathcal{V} \equiv \{x^{i-1}\}_{i=1}^{\infty} \quad (1.38)$$

denilebilir.  $1, x, x^2, x^3, \dots$  öğelerinin aralarında doğrucul bağımsız olduklarını görmek hiç te güç değildir. Kuşkusuz, belirleyişlerde, sonsuz boyutlu uzay ve sonsuz sayıda öğeden oluşan taban takımı yerine, aynı taban takımının sonlu sayıda öğesi (sözgelimi ilk  $n$  sayıda) alınarak elde edilen taban takımı ve sonlu boyutlu  $\mathcal{H}_n$  uzayı ile çalışılmalıdır. Böylelikle, evrencilliğin da sağlanabilmesi amacıyla bilimcil yazında “üslü taban takımı” olarak bilinen tabaan takımı

$$\mathcal{V}_n \equiv \{x^{i-1}\}_{i=1}^n \quad (1.39)$$

olarak alınmalıdır. Bu sonlu taban takımının öğeleri her ne kadar doğrucul bağımsız iseler de, birbirlerine dik ve birimboylu değildirlir. Dolayısıyla bu takım, sözü edilen bu özellikleri taşıyan yeni bir taban takımına dönüştürülmelidir. Bu amaçla, Gram-Schmidt Dikleştirim Yöntemi veya Cholesky Yöntemi [29] kullanılabilir. Her iki yöntem için de öncelikle  $\mathcal{V}_n$ 'in öğeleri arasında bir iççarpım tanımlanımı gereklidir. Eğer  $\mathcal{V}_n$ 'in  $i$ . öğesi  $v_i$  ile gösterilirse bu iççarpım

$$(v_i, v_j) \equiv \int_0^1 dx v_i(x) v_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1.40)$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu iççarpım yardımıyla da herhangi bir öğenin boyu (ing: norm)

$$\|v_i\| \equiv (v_i, v_i)^{\frac{1}{2}} \quad (1.41)$$

olarak tanımlanacaktır. Bu iç çarpım ve boy tanımı altında  $\mathcal{V}_n$  taban takımı dikleştirilirse aşağıda öğelerinin açık yapıları verilen yeni bir  $\mathcal{U}_n$  taban takımı elde edilir. Bu taban takımının öğeleri sırasıyla  $u_1(x), \dots, u_n(x)$  ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 \\ u_2(x) &= \sqrt{3}(2x - 1) \\ u_3(x) &= \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1) \\ u_4(x) &= \sqrt{7}(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1) \\ u_5(x) &= \sqrt{9}(70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1) \\ &\vdots \\ u_n(x) &= \sqrt{2n-1}P_{n-1}(2x-1) \end{aligned} \quad (1.42)$$

biçimindeki çokterimliler (ing: polynomials) elde edilmiş olur [32, 33]. Genel yapının daha kolay anlaşılabilmesi amacıyla  $u_5(x)$ 'teki katsayı için 3 yerine  $\sqrt{9}$  yazılmıştır. (1.42)'deki çokterimlilere başlarındaki  $\sqrt{2n-1}$  çarpanı olmaksızın bakıldığında, bilimsel yazında "Kaydırılmış Legendre Çokterimlileri" (Shifted Legendre Polynomials) [34] adı verilen çokterimlilerden başka birşey olmadıkları görülür. Bu çokterimliler,  $[-1, 1]$  aralığında dikgen (ing: orthogonal) olan Legendre Çokterimlilerinin, uygun bir birinci derece işlevcil (ing: affine) dönüşümle  $[0, 1]$  aralığına kaydırılarak ve bu aralıkta dik olmaları ereklenerek oluşturulmuş çokterimlilerdir. Böylelikle birbirine dik, birimboylu ve doğrucul bağımsız  $n$  sayıda öğeden oluşan  $\mathcal{U}_n$  taban takımı elde edilmiş olur. [32, 33]

Bu aşamada,  $u_1(x) = 1$  olgusu kullanılarak (1.36)'daki tümlevi aşağıdaki biçimde yazılabilir

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx f(x) = \int_0^1 dx u_1(x) f(x) u_1(x) = (u_1, \widehat{f}u_1) = \mathbf{e}_1^{(n)T} \mathbf{F}^{(n)} \mathbf{e}_1^{(n)} \quad (1.43)$$

Yukarıdaki bağıntıda  $\mathbf{F}^{(n)}$ ,  $\widehat{f}$  işlevinin önceden sözü edilen dizey gösterilimini,  $\mathbf{e}_1^{(n)}$  ise  $n$  boyutlu Kartezyen uzayda ilk öğesi 1, diğer tüm öğeleri 0 olan yöneyi (ing: vector) göstermektedir. Eğer kanıtsavda sözedilen ve açıkça(1.32)'de verilen sendelenimsizlik



yaklaşırımı kullanılırsa

$$\mathcal{J} \approx \mathbf{e}_1^{(n)T} f(\mathbf{X}^{(n)}) \mathbf{e}_1^{(n)} \quad (1.44)$$

yaklaşırımı elde edilir. Artık (1.36)'daki belirli tümleve bir yaklaşırım yapabilmek olanaklı olmuştur. Görüldüğü gibi (1.44) yaklaşırımının sağ yanı, dizey ve yöneyler içeren tıkız bir bağıntıdır. Bu bağıntı  $\mathbf{X}^{(n)}$  dizeyinin bazı özellikleri kullanılarak daha anlaşılır bir bağıntıya dönüştürülebilir. (1.33)'teki bağıntılardan  $\mathbf{X}^{(n)}$ 'nin bakışık (ing: symmetric) ve dördül (ing: square) yapısı olan bir dizey olduğu söylenebilir. Bu durumda  $\lambda_i$ 'ler bu dizeyin özdeğerleri,  $\xi_i$ 'ler ise ilgili özyöneyleleri olmak üzere

$$\mathbf{X}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \xi_i^T \quad (1.45)$$

biçiminde bir ayrıştırım yazılabilir. Bu ayrıştırıma,  $\mathbf{X}^{(n)}$  dizeyinin izgecil ayrıştırımı (ing: spectral decomposition) adı verilir [29]. Bu ayrıştırım (1.44)'ün sağ yanında yerine konulup, ara cebircil işlemler gerçekleştirilirse

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^{(n)T} f(\mathbf{X}^{(n)}) \mathbf{e}_1^{(n)} &= \mathbf{e}_1^{(n)T} f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \xi_i^T\right) \mathbf{e}_1^{(n)} = \mathbf{e}_1^{(n)T} \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \xi_i \xi_i^T \mathbf{e}_1^{(n)} \\ &= \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \left(\mathbf{e}_1^{(n)T} \xi_i\right)^2 \end{aligned} \quad (1.46)$$

elde edilir. Böylece (1.36)'daki tümleve

$$\int_0^1 dx f(x) \approx \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \left(\mathbf{e}_1^{(n)T} \xi_i\right)^2 \quad (1.47)$$

biçiminde verilen toplam ile yaklaşırım sağlanmış olur [33]. (1.47) aslında bize,  $\lambda_i$ 'lerin düğüm noktaları,  $\xi_i$ 'lerin ilk öğelerinin de ağırlıklar olarak düşünöldüğü bir dördülleyiş (ing: quadrature) bağıntısı vermektedir. Böylelikle, tümlevin içerisinde bulunan  $f(x)$  işlevinden bütünüyle bağımsız bir biçimde,  $\hat{x}$  işlecinin dizey gösteriliminin özdeğer ve özyöneyleleri kullanılarak  $f(x)$ 'in sonlu bir aralıktaki tümlevine yaklaşırım sağlanabilmektedir [33]. Bu olgu, sendelenimsizlik yaklaşırımının en önemli özelliklerinden biri olup, ilgili özikililerin bir kez belirlendikten sonra bir daha belirlemeye gerek kalmadan, yinelererek kullanılabileceğini söylemektedir. Bu da hesaplama süresinin kayda değer oranda kısalmasına neden olacaktır. Ayrıca bu yaklaşırımın niteliğinin  $n$  sayısı büyödükçe artacağı gerçeği de akıldan çıkarılmaması gereken başka bir olgudur. (1.47)'de tek değışkenli işlevler için verilen yaklaşırım bağıntısı çok değışkenli işlevler için de güçlük çekmeden özelsizleştirilebilir. Bu olguya bu altbölümde değil bir sonraki bölümde değınilenecektir.



## 2. ALTKESİMCİL İŞLEV VE VERİ YAKLAŞTIRIMI

Savın bu bölümünde, ÇYÇG'nin bir türü olan Altkesimcil ÇYÇG (ing: Piecewise EMPR) üzerinde durulacaktır. Savın öneri aşamasında, ÇYÇG'nin etkinliğinin arttırımı olgusu üzerinde çalışmalar sürdürülürken, üzerinde çalışılan dikgen uzamın küçültümünün ÇYÇG yaklaşımlarının etkinliğini arttırdığı gözlemlenmiştir [17]. Bu doğrultuda, üzerinde çalışılmak istenen ve eksenleri birbirine dik olan  $N$  boyutlu aşkınuzay (ing: hyperspace), yine  $N$  boyutlu ve eksenleri birbirine dik olmak üzere alt aşkınuzaylara bölünmüştür. Oluşturulan her bir alt aşkınuzay içerisinde işleve ÇYÇG yaklaşımını yapılmış ve bulunan nitelik ölçeni değerlerinin üst kıyı olan 1'e daha yakın olduğu görülmüştür. Bu gelişmeler ilerideki çalışmalar için oldukça çoşkulandırıcı olmuş ve savın ilerleme evrelerinde yola çıkış noktası olarak düşünülmesine neden olmuştur. Sözü edilen çalışmalarda elde edilen özgün yöntem ve ilgili sonuçlara, yazarın da eşyazar olduğu [17] kaynağından ulaşmak olanaklıdır. Bu bölümde yapılacak olan anlatımlar ilk olarak sürekli işlevlerin yaklaşımını için atılan adımları, daha sonra da veri kümelerinin yaklaşımını için gerekli yapıları içerecektir. Bunların yanısıra, izleyen altbölümde bir çözümcül işlevin ÇYÇG yaklaşımının elde ediliminde (1.5) altbölümünde ayrıntıları verilen sendelenimsiz tümlevleyim olgusunun kullanımı da aktarılacaktır.

### 2.1 Altkesimcil Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi

ÇYÇG tabanlı olan bu yeni yöntemdeki ana düşünce, üzerinde çalışılan uzamı iki ya da daha fazla sayıda altuzama (ing: subgeometry) bölüp, her bir altuzam için ilgili çokdeğişkenli işlevin ÇYÇG'ni gündeme getirmektir. Böylelikle ilgili işlev için elde edilecek çözümcül yaklaşım altkesimcil (ing: piecewise) yapıda olacaktır. Bu yöntem ile ilgili çokdeğişkenli işleve çok daha etkin yaklaşımlar yapabilmek olanaklıdır [17].

Bu bağlamda, erekteki çokdeğişkenli işleve altkesimcil ÇYÇG yaklaşımını yapabilmek için atılması gereken adımlar aşağıda sıralandırılmıştır:

- Kullanılacak olan altaralıkların sayısı belirlenmelidir. Eğer her bir  $x_i$ , ( $1 \leq i \leq N$ ) bağımsız değişkeni  $[a_i, b_i]$  kapalı aralığında tanımlıysa, her bir aralık altkesimlere bölünür.

$$x_i^{(1)} \in [c_i^{(1)}, c_i^{(2)}], \quad x_i^{(2)} \in [c_i^{(2)}, c_i^{(3)}], \quad \dots, \quad x_i^{(n_i)} \in [c_i^{(n_i)}, c_i^{(n_i+1)}],$$

$$c_i^{(1)} \equiv a_i, \quad c_i^{(n_i+1)} \equiv b_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.1)$$

(2.1)'den anlaşılacağı gibi, her bir altaralığı eş sayıda altkesime ayırmak zorunlu değildir. Sözgelimi,  $[a_1, b_1]$  aralığı  $n_1$  altkesime,  $[a_2, b_2]$  aralığı  $n_2$  altkesime ve andıran biçimde diğer tüm aralıklar uygun bir sayıda altkesime bölünebilirler.

- (2.1)'deki ilgili altkesimlerin birbirleriyle kartezyen çarpımları alınarak altuzamlar oluşturulmalıdır. Böylelikle elde edilecek altuzamların sayısı  $p = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N$  olacaktır.

$$\mathcal{D}^{(k)} \equiv x_1^{(j_1)} \times x_2^{(j_2)} \times \dots \times x_N^{(j_N)}, \quad 1 \leq k \leq p, \quad 1 \leq j_i \leq n_i, \quad n_i \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

- Her bir altkesim için elde edilecek olan ÇYÇG açılımında kullanılacak birimboylu destek işlevleri gündeme getirilir.
- Her bir altkesim için ÇYÇG bileşenleri elde edilir.
- Her bir altkesim için elde edilen ÇYÇG açılımının salt ilk terimleri, yani ilgili değişmez bileşen ile ilgili destek işlevlerinin çarpımıyla elde edilen terim alıkonarak sıfıncı kerten kesme yaklaşımları

$$\pi_0(x_1, \dots, x_N)^{(k)} = f_0^{(k)} \prod_{j=1}^N s_j(x_j), \quad 1 \leq k \leq p \quad (2.3)$$

biçiminde elde edilirler. Elde edilen tüm yaklaşımlar bir arada gündeme getirilmek istenirse

$$\pi_0(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} f_0^{(1)} \prod_{j=1}^N s_j(x_j), & x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathcal{D}^{(1)} \\ f_0^{(2)} \prod_{j=1}^N s_j(x_j), & x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathcal{D}^{(2)} \\ \vdots \\ f_0^{(p)} \prod_{j=1}^N s_j(x_j), & x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathcal{D}^{(p)} \end{cases} \quad (2.4)$$

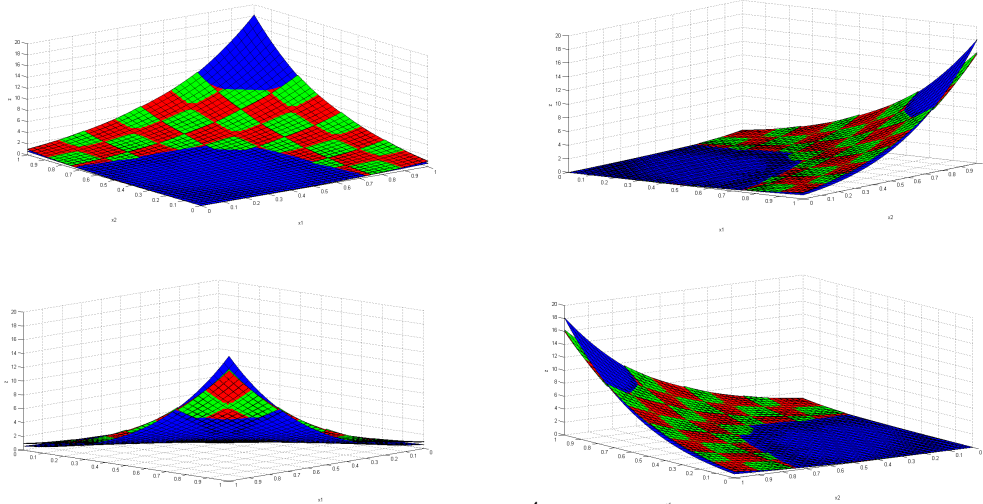
altkesimcil yapısı elde edilir.

- Her bir altkesim için (1.12)'de verilen ölçenler hesaplanır. Eğer ölçenlerin değerleri 1'e istenilen ölçüde yakın değilse birinci kereden kesme yaklaşımını

$$\pi_1(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} f_0^{(1)} \prod_{j=1}^N s_j(x_j) + \sum_{i=1}^N f_i^{(1)}(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j), & x_1, \dots, x_N \in \mathcal{D}^{(1)} \\ f_0^{(2)} \prod_{j=1}^N s_j(x_j) + \sum_{i=1}^N f_i^{(2)}(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j), & x_1, \dots, x_N \in \mathcal{D}^{(2)} \\ \vdots \\ f_0^{(p)} \prod_{j=1}^N s_j(x_j) + \sum_{i=1}^N f_i^{(p)}(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j), & x_1, \dots, x_N \in \mathcal{D}^{(p)} \end{cases} \quad (2.5)$$

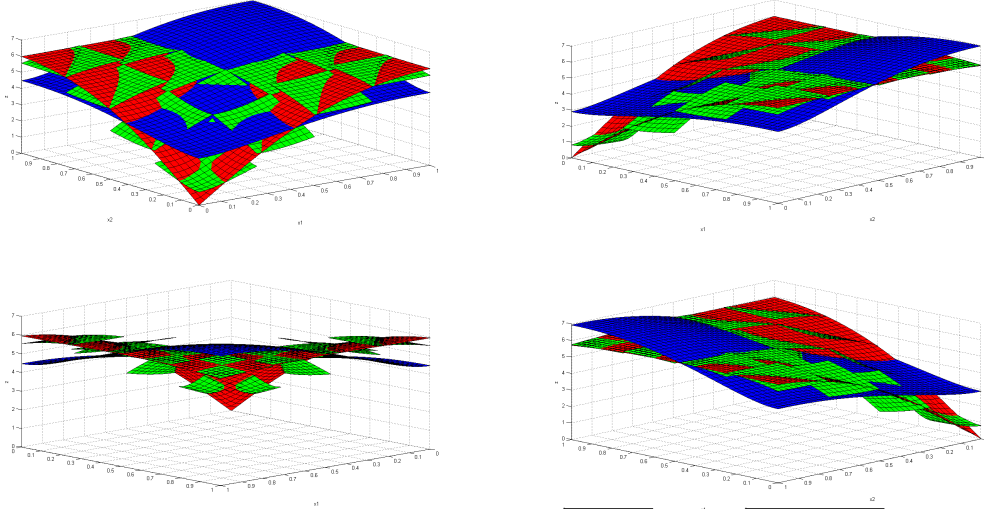
biçiminde elde edilirler.

Böylelikle altkesimcil ÇYÇG'nin yaklaşıma olan etkisi olumlu yönde artırılmış olur. ÇYÇG ve altkesimcil ÇYÇG'nin işlev yaklaşımdaki etkinliğinin gösterimi amacıyla iki sayısal örnek üzerinde durulacaktır. Elde edilen sonuçlar, karşılaştırım açısından çizimler yardımıyla verilecektir. Şekil 2.1 ve Şekil 2.2'de sırasıyla  $(x_1 + x_2)^4$  ve  $\left(10 \sin \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) / \left(\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}\right)$  iki değişkenli işlevlerinin çizimlerinin (al), sıfırıncı kereden ÇYÇG yaklaşımı (mavi) ve dört altkesim kullanılarak elde edilen, yine sıfırıncı kereden olan altkesimcil ÇYÇG yaklaşımını (yeşil) ile karşılaştırımı verilmektedir.



**Şekil 2.1** : Değişik bakış açılarından  $(x_1 + x_2)^4$  işlevinin çizimi (Al), sıfırıncı kereden ÇYÇG yaklaşımı (Mavi) ve sıfırıncı kereden altkesimcil ÇYÇG yaklaşımı (Yeşil).

Her iki çizimden de anlaşılabilceği gibi, sıfırıncı kereden ÇYÇG, odaktaki her iki işlev için de oldukça etkin yaklaşımlar vermektedir. Yaklaşım niteliğinin yeterli görülmediği durumlarda yüksek kereden altkesimcil ÇYÇG yaklaşımını yardımcıyla



**Şekil 2.2** : Değişik bakış açılarından  $\left(10 \sin \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) / \left(\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}\right)$  işlevinin çizimi (Al), sıfırncı kereden ÇYÇG yaklaşırını (Mavi) ve sıfırncı kereden altkesimcil ÇYÇG yaklaşırını (Yeşil).

yaklaşırım, ilgili çokdeğişkenli işlevin çok daha gürbüz bir biçimde yaklaşırımına olanak sağlamaktadır. Yaklaşırım niteliğinin artımı istenirse, altkesimlerin sayısını arttırmak da işe yarayan bir olgu olarak karşımıza çıkmaktadır.

## 2.2 Ayırık Altkesimcil Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi

Bu altbölümde, (2.1) altbölümünde sözü edilen Altkesimcil ÇYÇG yönteminin, ayırık veriler (ing: discrete data) üzerine nasıl uygulanacağı konusunda bilgiler verilecektir. Bu doğrultuda,  $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_N$ , üzerinde çalışılan uzayın her bir ekseninde, diğeri bir deyişle boyutunda, imgenlenmiş olan ayırık verilerin (noktaların) kümeleri olsun. Sözelimi  $\boldsymbol{x}_1$ , uzayın salt birinci boyutunda simgenlenmiş,  $\boldsymbol{x}_2$ , uzayın salt ikinci boyutunda simgenlenmiş ve andıran biçimde tüm  $\boldsymbol{x}_i$ 'ler, ilgili boyutun üzerinde simgenlenmiş noktaların kümelerini simgelesinler. Bu kümeler ve öğeleri uzbilimcil olarak,

$$\boldsymbol{x}_1 = \left\{x_{i_1}^{(1)}\right\}_{i_1=1}^{m_1}, \boldsymbol{x}_2 = \left\{x_{i_2}^{(2)}\right\}_{i_2=1}^{m_2}, \dots, \boldsymbol{x}_N = \left\{x_{i_N}^{(N)}\right\}_{i_N=1}^{m_N} \quad (2.6)$$

biçiminde anlatılabilirler. (2.6)'dan anlaşılabilirceği gibi, sırasayılandırılmırlarda (ing: indexing) karışıklık olmaması açısından her bir boyuta ait veriler, ilgili boyutun sırasayıısı ile eşleştirilmiş ve üstsırasayıı olarak da yine ilgili boyutun sırasayıısı ayraçlar (ing: parantheses) içerisinde kullanılmıştır. Böylelikle eldeki tüm  $\boldsymbol{x}_i$ 'lerin ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) kartezyen çarpımlarının  $N$  boyutlu bir örgü (ing: grid) oluşturduğunu

söylemek yanlış değildir.

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_1 \times \boldsymbol{\chi}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{\chi}_N \quad (2.7)$$

biçiminde anlatımı vardır. Bu durumda (2.7) bağıntısında altsırasaysız olan  $\boldsymbol{\chi}$  kümesi, verilen noktaları içeren  $N$  boyutlu bir örgüdür ve bu örgünün içerdiği öge sayısı  $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_N$ 'dir.

Eğer her bir  $\boldsymbol{\chi}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) kümesinden  $\mathbf{x}^{(i)} \subset \boldsymbol{\chi}_i$  olmak üzere değişik sayıda ögeler de içerebilecek biçimde altkümeler seçilirse

$$\mathbf{x}^{(1)} = \{x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}\}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \{x_1^{(2)}, \dots, x_{n_2}^{(2)}\}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(N)} = \{x_1^{(N)}, \dots, x_{n_N}^{(N)}\}$$

$$n_i \leq m_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

kümeleri elde edilir. Bu kümelerin de yukarıda olduğu gibi kartezyen çarpımları alınır

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} \times \mathbf{x}^{(2)} \times \cdots \times \mathbf{x}^{(N)} \quad (2.9)$$

olacak şekilde  $\mathbf{x}$  örgüsü elde edilir ve bu örgü  $\boldsymbol{\chi}$  örgüsünün bir altörgüsüdür (ing: subgrid). Ayırık altkesimcil ÇYÇG yöntemi, değişik sayıda öge içeren  $\mathbf{x}^{(i)}$  altkümelerinin kartezyen çarpımları yardımıyla oluşturulabilecek ayrı ayrı tüm  $\mathbf{x}$  altörgülerinin içerisinde kalan noktaların kullanımıyla değişik altyüzeyler bulunması temeline dayanmaktadır. Yöntemin anlatımı sırasında, sırasayılama (ing: indexing) karmaşıklaşma yol açmamak için, üzerinde çalışılan  $N$  boyutlu altörgü  $\mathbf{x}$  olarak alınacak ve bu altuzaydaki tüm noktalarda verilen işlev değerleri  $f_{i_1, i_2, \dots, i_N} = f(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_N}^{(N)})$  olarak gösterilecektir.

İlgilenilen altörgü üzerinde bulunan ve tüm boyutlarda bileşeni olan  $f_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  işlevinin Ayırık ÇYÇG açılımı

$$f_{i_1, i_2, \dots, i_N} = f^{(0)} \prod_{r=1}^N s_{i_r}^{(r)} + \sum_{j=1}^N f_{i_j}^{(j)} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^N s_{i_r}^{(r)} + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N f_{i_j, i_k}^{(j,k)} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j,k}}^N s_{i_r}^{(r)} + \cdots + f_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(i_1, i_2, \dots, i_N)} \quad (2.10)$$

biçimindedir. Kuşkusuz bu açılımın (1.2) açılımına koşut (ing: parallel) olması doğaldır. (2.10)'daki açılımın bileşenlerinin bulunumunda (1.2) açılımındaki tümlevler yerini sonlu toplamlara bırakmıştır. Bu olgunun yanısıra, ilgili bağımsız değişkenlere bağlı olan bileşenler ve destek işlevlerinin yerine, salt ilgili boyutar üzerinde toplamları alınan bileşenler ve destek yöneyleri (ing: support vectors) açığa çıkmaktadır. Bu

açılımda gözüken destek yöneyleri

$$s_{i_j}^{(j)} = \frac{\sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{j-1}=1}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=1}^{n_{j+1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} f_{i_1, i_2, \dots, i_N}}{\left[ \sum_{i_j=1}^{n_j} \left[ \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{j-1}=1}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=1}^{n_{j+1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} f_{i_1, i_2, \dots, i_N} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.11)$$

biçiminde boyu 1 olan yöneyler olarak elde edilirler. Güçlük çekmeden görülebileceği gibi (2.11)'de açık yapıları verilen destek yöneyleri (1.5) bağıntıları aracılığıyla verilen destek işlevleri tanımıyla birebir örtüşmektedir. Bu da, ilgili destek yöneylerinin, yine yönel ortalamalı destekler (YOD) olarak seçildiğini söyler. (2.10) açılımının bileşenleri olan  $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(N)}, f^{(1,2)}, \dots$  adlı  $2^N$  bileşeni eşsiz olarak bulabilmek için ÇYÇG'nde olduğu gibi bazı koşullara gereksinim duyulmaktadır. Bu koşullardan ilki

$$\sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j}^{(j)} s_{i_j}^{(j)} f_{k_1, k_2, \dots, k_r} = 0; \quad i_j \in \{k_1, k_2, \dots, k_r\} \quad (2.12)$$

biçimindedir ve bu koşula “toplam altında sıfırlanım koşulu” adı verilir. Ayrıca bu koşul, (2.10) açılımındaki tüm bileşenlerin birbirlerine dikgen olduğunu söyler. Bu koşulun yanısıra, bileşenlerin daha yalın elde edimi için

$$\sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j}^{(j)} = 1; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.13)$$

ve

$$\sum_{i_j=1}^{n_j} w_{i_j}^{(j)} \left[ s_{i_j}^{(j)} \right]^2 = 1; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.14)$$

koşullarına gereksinim duyulmaktadır. Bu koşullar, sırasıyla, her bir boyut için tanımlanan ağırlık yöneyinin ögelerinin toplamının 1 olması ve yine her bir boyuttaki destek yöneylerinin ilgili boyuttaki ağırlık yöneyi altındaki toplamının 1 olması gerektiğini söyler. Bu bağlamda, (2.10) açılımının değişmez bileşeni, (2.12), (2.13) ve (2.14) koşulları kullanılarak

$$f^{(0)} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} \left[ \prod_{r=1}^N w_{i_r}^{(r)} s_{i_r}^{(r)} \right] f_{i_1, i_2, \dots, i_N} \quad (2.15)$$

olarak edilir.  $f^{(0)}$ 'ın bulunumunda, işlevin altörgü üzerindeki noktalarda aldığı değerlerin tümünün, ilgili boyutlardaki ağırlık ve destek yöneylerinin ögeleri ile çarpımlarının toplamını söz konusu olmaktadır. Bir boyutu dışlayarak altörgü



içerisindeki geri kalan tüm noktalara yukarıda anlatılan işlemler uygulanırsa

$$f_{i_j}^{(j)} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{j-1}=1}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=1}^{n_{j+1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} \left[ \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^N w_{i_r}^{(r)} s_{i_r}^{(r)} \right] f_{i_1, i_2, \dots, i_N} - f^{(0)} s_{i_j}^{(j)} \quad (2.16)$$

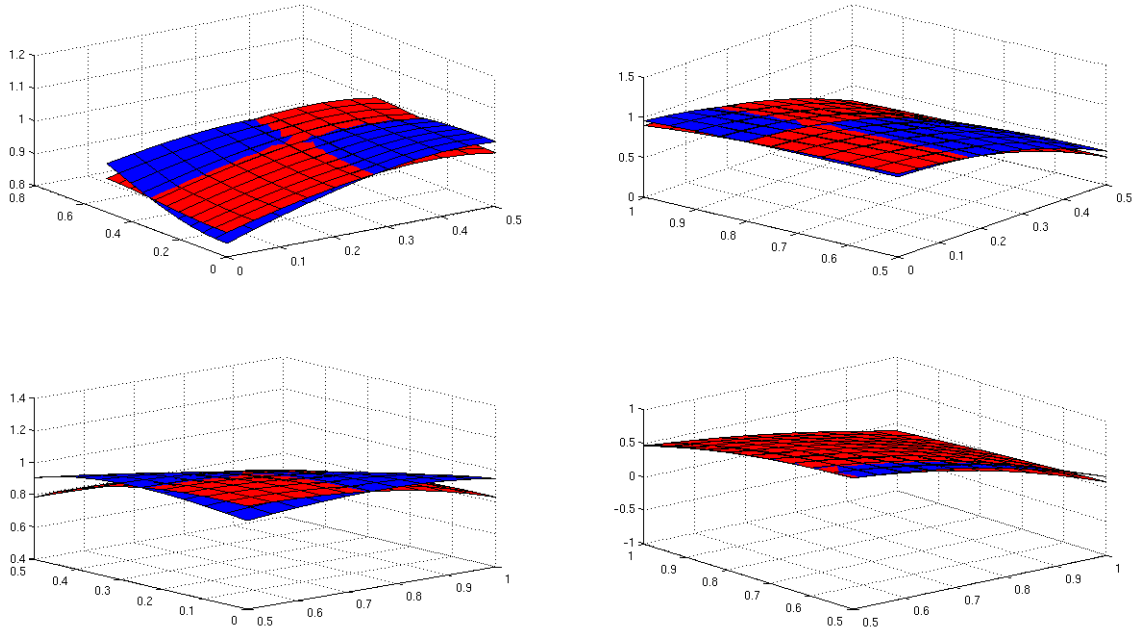
biçimindeki tek altsırasayıya bağlı bileşenler elde edilirler. Andıran biçimde iki altsırasayı içeren bileşenler

$$f_{i_j, i_k}^{(j, k)} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{j-1}=1}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=1}^{n_{j+1}} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{n_{k-1}} \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{k+1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} \left[ \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j, k}}^N w_{i_r}^{(r)} s_{i_r}^{(r)} \right] f_{i_1, i_2, \dots, i_N} - f^{(0)} s_{i_j}^{(j)} s_{i_k}^{(k)} - f_{i_j}^k s_{i_k}^{(k)} - f_{i_k}^{(k)} s_{i_j}^{(j)} \quad (2.17)$$

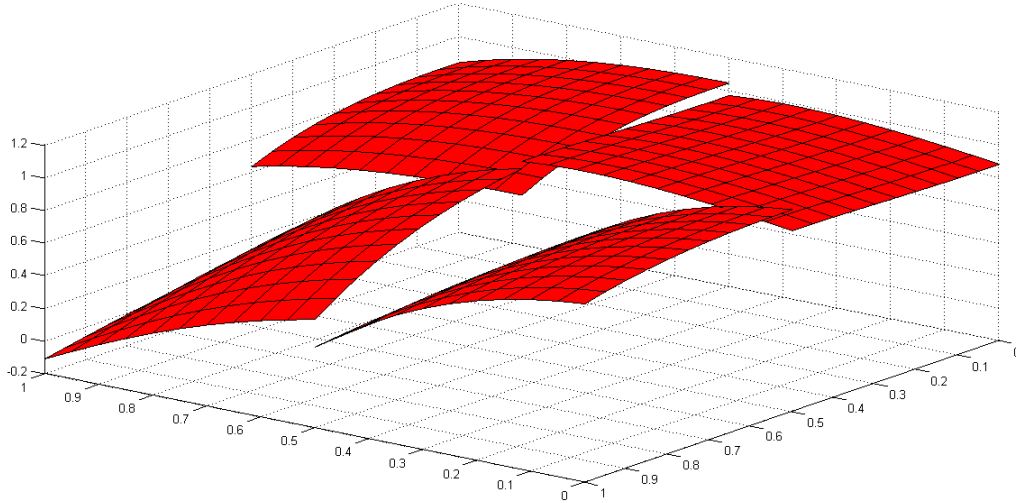
olarak elde edilirler. Üç ve daha fazla altsırasayı barındıran bileşenler de andıran yöntemle elde edilebilirler.

Önceki bölümde, ayrık veriler yardımıyla değil de ilgilenilen işlevin çözümcül yapısı kullanılarak elde edilen yaklaştırım sonuçları çizimler aracılığıyla verilmişti. Bu aşamada, kuşkusuz, işlevin çözümcül yapısı yerine, işlevin belirli düğüm noktalarında aldığı değerler yardımıyla yapılan altkesimcil ÇYÇG yaklaştırımı gündeme getirilecektir. Bu doğrultuda ilgilenilen işlev olarak iki bağımsız değişken içeren  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevi göz önüne alınacaktır. Bu işlevin doğruculluktan oldukça uzak bir yapı sergilemesi nedeniyle seçildiğinin belirtiminde yarar görülmekle birlikte yaklaştırmadaki altuzaylar sırasıyla  $[0, 0.5] \times [0, 0.5]$ ,  $[0.5, 1] \times [0, 0.5]$ ,  $[0, 0.5] \times [0.5, 1]$  ve  $[0.5, 1] \times [0.5, 1]$  altuzayları olarak alınmışlardır. Her bir altuzayın her iki eksen üzerindeki düğüm noktaları arasındaki adım uzaklığı  $h = 0.25$  olarak seçilmiştir. Bu seçim, her bir altuzayın tek bir eksen üzerinde 3 düğüm noktası ile çalışıldığı anlamına gelmektedir. Kartezyen çarpım yardımıyla, her bir altuzayın içerisinde kullanılmış olan toplam düğüm sayısının 9 olduğunu görmek güç değildir. Bu bilgilerin yanısıra, üzerinde çalışılan  $f$  işlevinin 1. kereden ayrık altkesimcil ÇYÇG yaklaştıranının belirlendiğini anımsatmakta da yarar vardır. Şekil 2.3'te ilgili işlevin yaklaştırmı çizimi ile özünün çiziminin 4 altaralığın her biri için karşılaştırmı görülmektedir. Bu altgörüntülerden anlaşılacağı gibi Ayrık Altkesimcil ÇYÇG yaklaştırmı, ilgili işlevi yansıtmada azımsanmayacak ölçüde başarılıdır.

Şekil 2.4'te ise aynı işlev kullanılarak değişik altaralıklar için elde edilen yaklaştırmalar tek bir çerçeve içerisinde gösterilmektedir. Şekil 2.5'te  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevinin 1. kerededen Ayrık Altkesimcil ÇYÇG yaklaştırmı ile ilgili işlevin

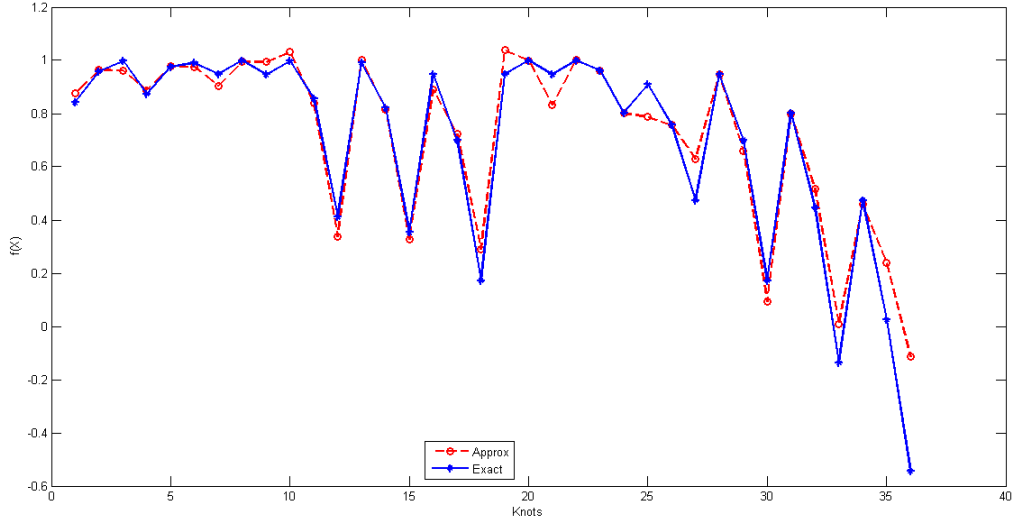


**Şekil 2.3 :**  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevinin  $[0, 1]^2$  uzayı üzerindeki değişik altuzaylardaki 1. kereden Ayrık Altkesimcil ÇYÇG yaklaşımı (Al) ve işlevin kesin değeri (Mavi).

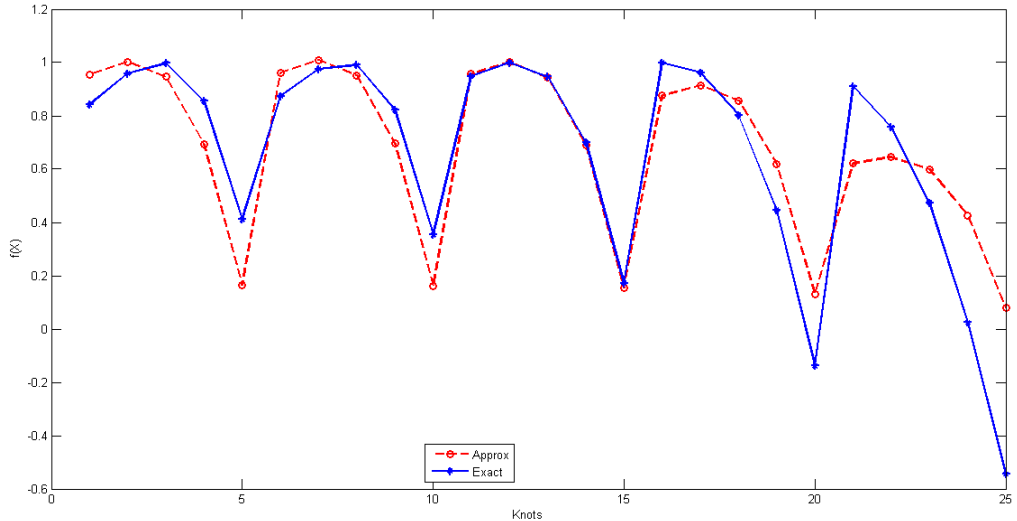


**Şekil 2.4 :**  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevinin  $[0, 1]^2$  uzayı üzerindeki 1. kereden Ayrık Altkesimcil ÇYÇG yaklaşımı.

oluşturulan 4 sayıda  $3 \times 3$ 'lük örgünün düğümlerinde aldığı değerlerin karşılaştırımı söz konusudur. Bu nedenle, Şekil 2.5'teki al kesik çizgiler, aslında Şekil 2.4'te gösterilen al yaklaşım yüzeylerinin, ilgili düğüm noktaları taban alınarak tek boyutta gösterimi olarak nitelendirilebilir. Bu gösterimler, boyut sayısının ikiden çok olduğu durumlarda, yaklaşım niteliğinin görülebilmesi açısından oldukça önemlidir.



**Şekil 2.5 :**  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevinin  $[0, 1]^2$  uzayı üzerindeki 1. kereden Ayrık Altkesimcil ÇYÇG yaklaşımını ile o düğümlerdeki gerçek değerlerin karşılaştırımı.



**Şekil 2.6 :**  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + e^{x_2})$  işlevinin  $[0, 1]^2$  uzayı üzerindeki 1. kereden Altkesimcil ÇYÇG yaklaşımını ile o düğümlerdeki gerçek değerlerin karşılaştırımı.

Şekil 2.6'da ise yine aynı işlev için, aynı özellikler ile elde edilen, fakat *altkesimcil olmayan* yaklaşım değerlerinin ve gerçek değerlerin karşılaştırımı söz konusudur. Her bir boyutta  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $h = 0.25$  adım aralığına göre düzgün dizilmiş 5 düğüm noktası olduğundan elde olan düğüm sayısı toplamda 25 olmaktadır. Şekil 5 ve Şekil 6'daki değerlere bakıldığında, ayrık yapı içeren yaklaşımdan elde edilen değerlerin, çoğu düğüm noktasında işlevin gerçek değerlerini daha iyi yansıttığı

görülmektedir. Bu olgu, savın, hazırlanımı ve ilerleyişi konusunda önde gelen çoşkulandırıcı öğelerden biridir.

### 2.3 Sendelenimsizlik Dügümleri ve ÇYÇG'nde Kullanımı

Savın giriş bölümünde, sendelenimsizlik kanıtsavının, bir belirli tümlevin sayıçıl yaklaşıtırmında nasıl kullanılacağı üzerinde durulmuştu. İlgili kanıtsavın kullanımıyla elde edilen (1.47) yaklaşıtırm bağıntısındaki  $\lambda_i$ 'lerin aslında bir düğüm noktası olarak düşünölebileceğı, bununla birlikte, her bir  $\lambda_i$  özdeğerine karşılık gelen  $\xi_i$  özyöneylelerinin ilk öğelerinin dördöllerinin (ing: squares) de ağırlık katsayıları olarak kullanılışı olgusu aktarılmıştı. Bu durumda, (1.33) bağıntısında verilen  $\hat{x}$  işlecinin dizey gösteriliminin özdeğerleri olan  $\lambda_i$ 'lere aslında  $[0, 1]$  aralığı üzerinde verilmiş düğömler gözüyle bakmak hiç de yanlış bir olgu olmamaktadır. Bundan sonra bu değerlere *sendelenimsizlik düğömleri* denilecektir. 1.5 altbölümünde tekdeğişkenli tümlevlerin yaklaşıtırmı için yapılan anlatım kolaylıkla çokdeğişkenli duruma aktarılabilmektedir [17]. Bu doğrultuda, salt  $\hat{x}$  işleci değil de, görevleri sırasıyla işlenenlerini  $x_1, x_2, \dots, x_N$  bağımsız değışkenleri ile çarpmak olan  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N$  işleçleri gündeme getirilmelidir. Bu işleçlerin dizey gösterimleri ise sırasıyla  $\mathbf{X}_1^{(n_1)}, \mathbf{X}_2^{(n_2)}, \dots, \mathbf{X}_N^{(n_N)}$  ile gösterilmek üzere  $n_1, n_2, \dots, n_N$  boyutlu dördöl dizeyler olmaktadır. Kuşkusuz her bir dizeyin boyutunun eşit seçimi de olanaklıdır. Bu da  $N$  sayıda dizey gösterilimi yerine tek bir dizey gösteriliminin kullanımına olanak sağlar. Eğer ilgili dizeylerin tümünün boyutu  $n$  olarak düşünölürse yapılacak izgecil çözümler (ing: spectral analysis) sonucu 1.5 altbölümünde de aktarıldığı gibi  $n$  sayıda düğüm,  $n$  sayıda da ağırlık katsayısı elde edilecektir. İlgili düğüm ve ağırlık katsayıları bulunup bellekte saklandıktan sonra istenildiğı kez kullanılabilir olgusuna daha önce de değinilmiştir. Bu bağlamda, ÇYÇG bileşenleri ve destek işlevleri sözü edilen izgecil büyüklükler ile kolaylıkla belirlenebilir duruma gelirler [17]. Söz gelimi elde edilmek istenen ÇYÇG bileşeni değışmez terim,  $f_0$ , olsun. Bu bileşenin, (1.9)'de verilen ve ağırlık işlevinin değışmez işlev olan 1 işlevi olarak alındığı durum için karşılığı

$$f_0 = \int_0^1 dx_1 s_1(x_1) \cdots \int_0^1 dx_N s_N(x_N) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.18)$$

bağıntısı ile verilir. (2.18) bağıntısındaki çokkatlı tümlev sendelenimsizlik düğömleri kullanılarak, sırasıyla, teker teker yaklaşıtırmaya çalışılacaktır. Bu amaçla (1.47)

bağıntısındaki yaklaştırım salt son tümleve uygulanırsa

$$f_0 \approx \int_0^1 dx_1 s_1(x_1) \cdots \int_0^1 dx_{N-1} s_{N-1}(x_{N-1}) \mathbf{e}_1^{(n)T} \sum_{k_N=1}^n \left[ f(x_1, \dots, x_{N-1}, \lambda_N^{(k_N)}) \times s_N(\lambda_N^{(k_N)}) \boldsymbol{\xi}_{k_N}^{(n)} \boldsymbol{\xi}_{k_N}^{(n)T} \right] \mathbf{e}_1^{(n)} \quad (2.19)$$

yaklaştırımı elde edilir. Burada birim yöney ile ilgili özyöneylemin iççarpımları dışarıya alınarak

$$f_0 \approx \sum_{k=1}^n \left( \mathbf{e}_1^{(n)T} \boldsymbol{\xi}_{k_N}^{(n)} \right)^2 \int_0^1 dx_1 s_1(x_1) \cdots \int_0^1 dx_{N-1} s_{N-1}(x_{N-1}) \times f(x_1, \dots, x_{N-1}, \lambda_N^{(k_N)}) s_N(\lambda_N^{(k_N)}) \quad (2.20)$$

biçiminde daha tıkHz bir anlatım elde edilebilir. Bu işlem kalan  $(N-1)$  sayıda tümleve art arda uygulandığında

$$f_0 \approx \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_N=1}^n \left[ \prod_{i=1}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n)T} \boldsymbol{\xi}_{k_i}^{(n)} \right)^2 \right] f(\lambda_1^{(k_1)}, \dots, \lambda_N^{(k_N)}) \prod_{i=1}^N s_i(\lambda_i^{(k_i)}) \quad (2.21)$$

yaklaştırımı elde edilir. Böylelikle, ilgili çok değışkenli işlevin ÇYÇG açılımının değışmez terimi, sendelenimsizlik düğümleri kullanılarak elde edilmiş olur [17]. Andıran bir yol izlenerek tekdeğışkenli bileşenler de  $i_1 = 1, \dots, N$  olmak üzere

$$f_{i_1}(x_{i_1}) \approx \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_{i_1-1}=1}^n \sum_{k_{i_1+1}=1}^n \cdots \sum_{k_N=1}^n \left[ \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i_1}}^N \left( \mathbf{e}_1^{(n)T} \boldsymbol{\xi}_{k_m}^{(n)} \right)^2 \right] \times f(\lambda_1^{(k_1)}, \dots, \lambda_{i_1-1}^{(k_{i_1-1})}, x_{i_1}, \lambda_{i_1+1}^{(k_{i_1+1})}, \dots, \lambda_N^{(k_N)}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i_1}}^N s_m(\lambda_m^{(k_m)}) - f_0 s_{i_1}(\lambda_{i_1}^{(k_{i_1})}) \quad (2.22)$$

yaklaştırımıyla elde edilirler [17]. İki veya daha fazla değışken içeren bileşenler de aynı yaklaşım izlenerek sendelenimsizlik düğümleri yardımıyla elde edilebilirler.

Altbölümün geri kalanında, yöntemin etkinliğinin sınanımı gerçekleştirilecektir. Bu doğrultuda, ilk aşamada yedi çözümcül çokdeğışkenli işlev için yapılan uygulamalarda elde edilen sonuçlar çizelgeler aracılığıyla verileceklerdir. İlgili çizelgelerin tümü [17] çalışmasından alınmıştır. Sözü edilen çokdeğışkenli işlevlerden ilki salt toplamcıl (ing: purely additive) yapıda olan bir işlevdir. İkinci işlev ise özünde toplamcılığı ve çarpımcılığı birlikte bulunduran bir işlev olup tekdüze artan (ing: monotonously

increasing) yapıdadır. Üçüncü işlev, ikinci işlev ile andıran yapıda olup 7. dereceden terimleri içermektedir. İkinci işlev için söylenen olguların tümü bu işlev için de geçerlidir. Yalnız, üçüncü işlev, ikinci işleve göre daha keskin biçimde yükselmektedir. Bir diğer deyişle üçüncü çokdeğişkenli işlevin eğriliği (ing: curvature) üçüncü işlevinkine göre daha fazladır. Dördüncü işlev, birinci işleve evrik olarak salt çarpımcıl (ing: purely multiplicative) yapıda seçilmiştir. Amaç yöntemin çarpımcıl yapılarda çok daha iyi çalıştığını vurgulamaktır. Çokterimli (ing: polynomial) yapıların yanısıra, yöntemin değişik türlerdeki işlevlerin yaklaşıtırmındaki etkinliğinin araştırımı için  $f_5$ ,  $f_6$  ve  $f_7$  işlevleri sırasıyla trigonometrik, üstel ve orancıl (ing: rational) işlevler olarak seçilmiştir. Sözü edilen tüm işlevler 5 boyutlu işlev uzayından seçilmiş olup, uygulamaların tümünün yapıldığı  $[0,1]^5$  uzamında ve dolayısıyla tüm ilgili altaralıklarda sürekli olan işlevlerdir. Ayrıca bu işlevlerin tümü dördülü tümlemlenebilen (ing: square integrable) yapıdadır. Özellikleri verilen bu işlevlerin çözümcül yapıları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, \dots, x_5) &= \sum_{i=1}^5 x_i, & f_2(x_1, \dots, x_5) &= \left( \sum_{i=1}^5 x_i \right)^5, \\
f_3(x_1, \dots, x_5) &= \left( \sum_{i=1}^5 x_i \right)^7, & f_4(x_1, \dots, x_5) &= \prod_{i=1}^5 x_i, \\
f_5(x_1, \dots, x_5) &= \cos \left( \pi \sum_{i=1}^5 x_i \right), & f_6(x_1, \dots, x_5) &= \sum_{i=1}^5 e^{ix_i}, \\
f_7(x_1, \dots, x_5) &= \frac{x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2}{1 + 9x_3^2 + 16x_4^2 + 25x_5^2}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Çizelge 2.1’de her bir aralığın değişik sayıdaki altaralıklara bölüntülendirim (ing: partitioning) yapılarak elde edilen sıfırcı kereden ÇYÇG yaklaşıtıranlarına ait bağıl yanılğı (ing: relative error) değerleri verilmektedir. Bunlar ile birlikte ilk düşey sırada altkesimcil olmayan (1.3 altbölümünde verilen) ÇYÇG ile elde edilen bağıl yanılğı değerleri bulunmaktadır. Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2’de verilen bu değerler ilgili çokdeğişkenli işlev ile o işlev için gerçekleştirilen yaklaşıtırmın arasındaki değışimin boyunun (ing: norm) ilgili işlevin boyuna oranı olarak belirlenmişlerdir. Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2’deki değerlerden altaralık sayısının arttırımı ile yaklaşıtırm niteliğinin artımının sağlandığı gözükmektedir. Bu olgunun yanısıra, bağıl yanılğı değerlerin elde ediliminde kullanılan sendelenimsizlik düğüm sayısının da 3 olduğunu belirtmekte

**Çizelge 2.1** : Sıfıncı kereden yaklaştıranlarla elde edilen bağıl yanılığlar.

	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_0}$	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_0}^{(2)}$	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_0}^{(4)}$	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_0}^{(8)}$	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_0}^{(12)}$
$f_1$	0.04106	0.02286	0.01206	0.00619	0.00416
$f_2$	0.11932	0.07064	0.03844	0.02003	0.01353
$f_3$	0.13088	0.08046	0.04459	0.02343	0.01587
$f_4$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$f_5$	0.97170	0.82935	0.42842	0.21182	0.14078
$f_6$	0.14180	0.04587	0.01229	0.00312	0.00008
$f_7$	0.47297	0.23707	0.11423	0.05581	0.01561

**Çizelge 2.2** : Birinci kereden yaklaştıranlarla elde edilen bağıl yanılığlar.

	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_1}$	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_1}^{(2)}$	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_1}^{(4)}$	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_1}^{(8)}$	$\mathcal{N}_{\mathcal{E}_1}^{(12)}$
$f_1$	0.03898	0.02181	0.01154	0.00593	0.00399
$f_2$	0.06880	0.04408	0.02504	0.01332	0.00906
$f_3$	0.06301	0.04356	0.02581	0.01401	0.00959
$f_4$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$f_5$	0.97170	0.51205	0.27443	0.13601	0.09042
$f_6$	0.01139	0.00293	0.00074	0.00018	0.00008
$f_7$	0.28065	0.10424	0.04468	0.02119	0.01387

yarar görülmektedir. Ayrıca, Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2 incelendiğinde, sıfıncı keredeki yaklaşımdan, birinci keredeki yaklaşıma geçildiğinde belirlenen bağıl yanılığların azaldığı görülmektedir. Bu da altaralık ve dolayısıyla altuzam sayısının artımının ÇYÇG'nin etkinliğini arttıran bir olgu olduğunu açıkça göstermektedir. Bu nitelik artımı çokterimli yapısındaki işlevlerde çok da göze çarpmamakla birlikte, geri kalan işlevlerde oldukça hatırı sayılır düzeyde iyileştirmeye neden olmuştur.

Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2'deki değerler tüm altaralıklarda belirlenen bağıl yanılığların ortalaması olan değerlerdir. Her bir altaralık için değişik bir ÇYÇG yaklaşımı olduğundan her bir altaralık için değişik bağıl yanılığ değerleri elde edilmektedir.

**Çizelge 2.3** : Her bir sıfıncı kereden altkesimcil yaklaşıma için elde edilen yanılığlara ait ölçün sapma değerleri.

	#2	#4	#8	#12
$f_1$	0.02573	0.01940	0.01417	0.01170
$f_2$	0.06885	0.05445	0.04072	0.03387
$f_3$	0.07130	0.05844	0.04445	0.03717
$f_4$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$f_5$	0.00000	0.27707	0.25509	0.22322
$f_6$	0.01040	0.00312	0.00078	0.00001
$f_7$	0.28476	0.19483	0.13530	0.03674

**Çizelge 2.4** : Her bir birinci kereden altkesimcil yaklaştırım için elde edilen yanılığalara ait ölçün sapma değeri.

	#2	#4	#8	#12
$f_1$	0.02428	0.01836	0.01343	0.01110
$f_2$	0.03497	0.02988	0.02323	0.01957
$f_3$	0.02750	0.02600	0.02119	0.01812
$f_4$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$f_5$	0.00000	0.10680	0.12455	0.11422
$f_6$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$f_7$	0.09567	0.05470	0.03791	0.03110

Kuşkusuz bu yaklaştırımlardan bazıları diğerlerine göre daha iyi veya evrik olarak daha kötü yaklaştırımlara yol açabilmektedir. Bu yüzden her bir altkesimcil yaklaştırımın yaklaştırım niteliğinin diğerlerine oranla ne düzeyde olduğunun araştırımına gerek duyulmaktadır. Bu doğrultuda, Çizelge 2.3 ve Çizelge 2.4'te sırasıyla sıfırncı ve birinci kereden altkesimcil yaklaştırımlar için elde edilen bağıl yanılığ değeri ölçün sapmaları (ing: standart deviations) verilmiştir. Çizelgelerdeki değeri, tüm işlevlerde, ilgili altaralık sayısı için tüm altaralıklarda elde edilen bağıl yanılığ değeri ölçün sapmalarının oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu da, yöntemin tutarlılığının sınanması açısından önemli bir olgudur. Bu altbölümdeki çizelgeler aracılığıyla verilen değeri aracılığıyla varılan sonuç, yönel ortalamalı destekler kullanılarak uygulanan altkesimcil ÇYÇG'nin işlev yaklaştırımında oldukça etkili olmaktadır. Bunun yanı sıra, altkesimcil ÇYÇG'nde karşılaşılan tümlevler sendelenimsiz tümlevleyim yardımıyla yaklaşık olarak elde edilmişlerdir. Salt 3 düğüm noktası ve ağırlık katsayısı kullanımıyla oldukça etkin yaklaştırımlar elde edilmiştir. Bu da sendelenimsiz tümlevleyimin de tümlev yaklaştırımında ne kadar etkin bir yöntem olduğunu gözler önüne sermektedir.

#### **2.4 Altkesimcil ÇYÇG ile Aşkınizgecil Görüntü Sıkıştırım**

Aşkınizgecil duyargalar (ing: hyperspectral sensors) nesnelere yansıyan ya da soğurulan enerjiyi (ing: energy) elektromanyetik izgenin, genişlikleri yaklaşık 10nm ya da daha az olan çok sayıda küçük bandı üzerinden algılamaktadır. Bu tür veriler duyarganın görüş alanındaki nesnelere ilişkin oldukça yüksek oranda bilgi içermektedir. Bu verilerin içerdiği bilgiler aracılığıyla, gereç sınıflandırımı (ing: material classification), erek (ing: target) ve olağandışılık (ing: anomaly) belirlenmesi,



gıda denetimi ve hasat kestirimi gibi eylemler gerçekleştirilebilmektedir [23, 35]. Yukarıda sözü edilen ve andıran uygulamaları içeren eylemlerin etkinliği açısından, elde edilmiş aşkınizgecil görüntünün sıkıştırımı büyük önem kazanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda geliştirilen, gerek kayıplı (ing: lossy) gerekse de kayıpsız (ing: loseless) olmak üzere bir çok sıkıştırma yöntemi bilimsel yazında yer almaktadır. Bu yöntemlerden kayıpsız olanlara örnek olarak İngilizce adlarıyla Bayesian Compressive Sensing (BCS) [36], Compressive-Projection Principle Component Analysis (CPPCA) [37], Specialized Interior-Point (SIP) gösterilimi [38], Basis Pursuit (BP) [39] ve Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO) [40] gibi yöntemler gösterilebilir.

Aşkınizgecil veri kümeleri iki konumcul, bir de izgecil olmak üzere toplam üç boyut içermektedir. Bu nedenle ilgili veri kümeleri “aşkınizgecil küp” diye de adlandırılmaktadır [35]. Bu veriler yüksek boyutlu olduklarından, ÇYÇG ya da Altkesimcil ÇYÇG yardımıyla çözümleyiş ve irdelenişleri olanaklıdır. Bu irdeleneş bağlamında, aşkınizgecil görüntüler için ÇYÇG tabanlı, özgün ve etkin bir kayıplı sıkıştırım uzişi (ing: lossy compression algorithm) elde edilmiştir. Gerçekleştirilen sıkıştırımlar sonucu elde edilen yaklaşımların nitelikleri, bilimsel yazında Tepe İm-Gürültü Oranı, TİGO (ing: Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR) olarak bilinen ve üzerinde çalışılan görüntü verisine yapılan yaklaşımların ne düzeyde etkin olduğunun kararlaştırışında kullanılan ölçüm değerleri yardımıyla gösterilecektir. Bilimsel yazından da bilindiği gibi yüksek TİGO değeri, görüntü verileri için, yüksek nitelikli yaklaşım anlamına gelmektedir. Veri sıkıştırım eylemlerinde, yüksek TİGO değerinin elde edilişi ile birlikte, ilgili değere az sayıda veri kullanarak ulaşmak da oldukça önemlidir. Bir diğer deyişle etkin sıkıştırım, olabildiğince az sayıda veri kullanarak oldukça yüksek TİGO değerinin elde edilişini gerektirmektedir. Bu bağlamda, elde edilen kayıplı sıkıştırımın ne kadar az veri ile sağlandığı örnek-başına-bit, öbb (ing: bit-per-sample, bps) değeri ile ölçülmektedir.

Aşkınizgecil görüntüler ve sıkıştırım ile ilgili verilen temel bilgilerden sonra, ÇYÇG ve türleri yardımıyla gerçekleştirilen aşkınizgecil veri sıkıştırım sonuçları üzerinde durulacaktır. İlgili uygulamalar için kullanılmış olan aşkınizgecil veri kümeleri NASA'nın ücretsiz olarak sağladığı AVIRIS tasarısının (ing: project) sanaldoku yöresinden (ing: web site) [41] elde edilmiştir. Böylelikle üç değişik bölgenin

aşkınizgecil görüntülerinin ele alınışı olanaklı olmuştur. Bu bölgeler, bir diğer deyişle veriler, sırasıyla Lunar Lake, Low Altitude ve Jasper Ridge bölgeleridir. Ele alınan ham verideki her bir değer 16 bit ile anlatılmıştır. Bu da ilgili veri kümelerinin her birinin 16 bit'lik veri kümeleri olduğunu anlatmaktadır. Bunun yanısıra her bir veri kümesi  $512 \times 512 \times 224$  boyutlu olacak şekilde kesilmiş ve uygulamalar bu  $512 \times 512 \times 224$ 'lik kesilmiş aşkınizgecil veriler ile gerçekleştirilmiştir.

Bu olguların yanısıra, ÇYÇG yaklaşımlarının etkinliğinin artırımı amacıyla bilimcil yazında Ayrık Haar Dönönüşümü, AHD (ing: Discrete Haar Transform, DHT) [42] olarak adlandırılan ve üzerinde çalışılan verinin ilintisizleştirimini (ing: decorrelation) sağlayıp uygulaması oldukça kolay olan bir yöntem gündeme getirilmiştir. AHD yardımıyla üzerinde çalışılan aşkınizgecil küp, eş boyutlu iki adet alt küpe bölünmüştür. Böylelikle  $512 \times 512 \times 112$  sayıda veri içeren iki alt küp elde edilmiştir. Elde edilen küplerden biri ilintilendirilmiş (ing: correlated) verilerden oluşurken diğeri ise ilintisizleştirilmiş verilerden oluşmaktadır. İlintili verilerin bulunduğu veri küpü ÇYÇG ve Altkesimcil ÇYÇG ile yaklaştırılıp, diğeri veri küpüne ise JPEG-2000 [43] adlı kayıpsız sıkıştırma uzişi (ing: lossless compression algorithm) uygulanmıştır. ÇYÇG tabanlı yöntem ile sıkıştırılmış veri ile JPEG-2000 yardımıyla kayıpsız olarak sıkıştırılan veri Evrik AHD (ing: inverse DHT) yardımıyla yeniden bir araya getirilmiş ve ele alınan  $512 \times 512 \times 224$  boyutlu ham veri ile aynı boyutta bir yaklaştırma elde edilmiştir. Yukarıda sözü edilen, gerek ÇYÇG gerekse de AHD için yapılan işlemlerin tümü tekli duyarlılık biçiminde (ing: single precision format) gerçekleştirilmiştir. Bu da elde edilen yeni verideki değerlerin her birinin 32 bit ile tanımlandığı anlamına gelir. Bu bit değeri yardımıyla sıkıştırma sonucu elde edilen verinin bbö değeri bulunmuştur. Bu doğrultuda değişik kertelerden ÇYÇG yaklaştırımı kullanılarak gerçekleştirilen kayıplı sıkıştırma uygulamaları sonucu elde edilen TİGO ve ayrıçlar arasında gösterilen bbö değerleri Çizelge 2.5'de verilmiştir. Çizelge 2.5'de görülebileceği gibi elde edilen sonuçlar "Haar'lı" ve "Haar'sız" olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Andıran durum Çizelge 2.6 ve Çizelge 2.7 için de geçerlidir. Çizelge 2.5'te elde edilen veriler ÇYÇG kullanılarak elde edilmekle birlikte Çizelge 2.6 ve Çizelge 2.7'de sunulan TİGO ve bbö değerleri sırasıyla  $4 \times 4 \times 4$  ve  $8 \times 8 \times 8$  biçiminde bölünmüş uzamlarda gerçekleştirilen Altkesimcil ÇYÇG sonucu elde edilen değerlerdir.

**Çizelge 2.5** : Değişik kertelerden ÇYÇG yaklaşımları için TİGO ve bbö değerleri.

	Haar'lı (ÇYÇG + JPEG-2000)			Haar'sız (salt ÇYÇG)		
	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$
Lunar Lake	70.23 (0.00032)	70.50 (0.00036)	76.79 (0.01319)	42.18 (0.00004)	42.27 (0.00008)	54.46 (0.01682)
Low Altitude	69.84 (0.00358)	69.86 (0.00362)	73.39 (0.01646)	47.06 (0.00004)	47.29 (0.00008)	51.30 (0.01682)
Jasper Ridge	73.88 (0.00198)	73.99 (0.00202)	75.72 (0.01485)	49.59 (0.00004)	49.68 (0.00008)	53.21 (0.01682)

**Çizelge 2.6** :  $4 \times 4 \times 4$  biçiminde bölünmüş uzamda değişik kertelerden ÇYÇG yaklaşımları için TİGO ve bbö değerleri.

	Haar'lı (ÇYÇG + JPEG-2000)			Haar'sız (salt ÇYÇG)		
	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$
Lunar Lake	71.07 (0.00090)	74.19 (0.00152)	81.69 (0.05286)	47.95 (0.00068)	48.01 (0.00136)	64.70 (0.06832)
Low Altitude	71.00 (0.00416)	71.52 (0.00478)	77.10 (0.05612)	49.24 (0.00068)	49.35 (0.00136)	56.64 (0.06832)
Jasper Ridge	74.15 (0.00256)	74.92 (0.00186)	78.60 (0.05452)	50.75 (0.00068)	50.81 (0.00136)	57.48 (0.06832)

**Çizelge 2.7** :  $8 \times 8 \times 8$ 'lik biçiminde bölünmüş uzamda değişik kertelerden ÇYÇG yaklaşımları için TİGO ve bbö değerleri.

	Haar'lı (ÇYÇG + JPEG-2000)			Haar'sız (salt ÇYÇG)		
	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_0$	$\pi_1$	$\pi_2$
Lunar Lake	72.55 (0.00277)	75.64 (0.00525)	83.34 (0.10793)	50.57 (0.00273)	50.62 (0.00545)	71.68 (0.13938)
Low Altitude	69.41 (0.00604)	72.22 (0.00851)	79.10 (0.11119)	50.78 (0.00273)	50.88 (0.00545)	60.66 (0.13938)
Jasper Ridge	73.53 (0.00443)	76.00 (0.00691)	82.13 (0.10959)	51.95 (0.00273)	52.01 (0.00545)	61.81 (0.13938)

Çizelge 2.5, Çizelge 2.6 ve Çizelge 2.7'nin tümünden gözlemlenen olgulardan ilki, ilgili ÇYÇG yaklaşımının kertesini arttırıldıkça ilgili TİGO değerinin ve buna koşut olarak da ilgili bbö değerinin artışıdır. İkinci olarak da AHD ve JPEG-2000 destekli ÇYÇG tabanlı sıkıştırma sonucu elde edilen TİGO değerleri salt ÇYÇG kullanılarak gerçekleştirilen yaklaşım için elde edilen TİGO değerlerinden daha yüksektir. Buna karşın Çizelge 2.7'de elde salt ÇYÇG için elde edilen bbö değerlerinin AHD ve JPEG-2000 destekli ÇYÇG ile edilen bbö değerlerine göre daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu da Altkesimci ÇYÇG'nin TİGO değerlerini yükseltişine karşın bbö değerlerini de yükseltişine anlamına gelmektedir.

Çizelge 2.5, Çizelge 2.6 ve Çizelge 2.7'de savda önerilen sıkıştırma yöntemlerinin etkinlikleri birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Bu aşamadan sonra, önerilen yöntemlerin

bilimcil yazında yer alan diğer yöntemler ile karşılaştırmı üzerinde durulacaktır. Bu doğrultuda, bu altbölümün başında sözü edilen yöntemler kullanılarak üzerinde çalışılan üç aşkınızgecil görüntü verisi için elde edilen TİGO değerleri, savda önerilen ÇYÇG tabanlı yöntemler ile edilen TİGO değerleri ile karşılaştırılmış ve elde edilen sonuçlar Çizelge 2.8’de verilmiştir. Çizelge 2.8’de elde edilen tüm TİGO değerlerinin tümü 0.1 bbö değeri için elde edilmiş olup yukarıda sözü edilen yöntemler yardımıyla elde edilen TİGO değerleri [35] çalışmasından alınmıştır. Böylelikle sözü edilen kayıplı sıkıştırım yöntemleri ile ÇYÇG tabanlı yöntemlerin karşılaştırmı gerçekleştirilmiştir.

**Çizelge 2.8 :** ÇYÇG tabanlı yöntemler ile bilimcil yazında aşkınızgecil verilerin kayıplı sıkıştırımı için kullanılan yöntemlerin 0.1 bbö değeri için TİGO değerleri karşılaştırmı.

YÖNTEM	AŞKINIZGECİL VERİ		
	Jasper Ridge	Low Altitude	Lunar Lake
BCS PL-3DBS + 3DWPT	56.78	54.70	61.34
BCS PL-2DBS + 2D DDWT	50.60	47.97	54.62
BCS SPL-2DBS + 2D DDWT	50.30	48.02	54.05
CPPCA	30.20	47.47	48.43
SIP	58.06	58.34	58.86
gOMP	59.40	59.79	58.37
BP	59.41	59.96	59.55
LASSO	59.30	59.59	59.54
A-ÇYÇG (8 × 8 × 8) + AHD	<b>82.13</b>	<b>79.10</b>	<b>83.34</b>
A-ÇYÇG (8 × 8 × 8)	<b>61.81</b>	<b>60.66</b>	<b>71.68</b>

Çizelge 2.8’de verilere bakılarak 0.1 bbö değeri için ÇYÇG tabanlı yöntemler ile daha etkin sıkıştırımlar gerçekleştirildiği açıkça görölmektedir. Bununla birlikte AHD ve JPEG-2000 destekli Altkesimcil ÇYÇG’nin Çizelge 2.8’de yer alan diğer yöntemlere göre oldukça iyi nitelikli sonuçlar verdiği açıktır.

### 3. ÖZÜNE-EŞ TÜMLEV İŞLEÇLERİN ÖZDEĞER SORUNLARI İÇİN SAPTIRIM AÇILIMLARI

Bir önceki bölümde, ÇYÇG tabanlı yöntemlerin tümünde destek işlevi olarak Yönel Ortalamalı Desteklerin (YOD) kullanıldığı aktarılmıştı. Yapılan uygulamalarda da bu olguya özen gösterilmiş, şekil ve çizelgeler aracılığıyla verilen sonuçların tümü, ilgili ÇYÇG yaklaşımlarında YOD gündeme getirilerek elde edilmişti. İkinci bölümde verilen uygulamalardan elde edilen sonuçlara göre YOD kullanılarak üretilen ÇYÇG'nin, çözümcül çokdeğişkenli işlev yaklaşımında oldukça etkin bir yöntem olduğu görülmektedir. Buna karşın, YOD'lerin herhangi bir ÇYÇG yaklaşımında kullanılacak eniyi (ing: optimal) destek işlevi takımı olduğunu söylemek olanaksızdır. Bu yüzden de “Verilen bir çokdeğişkenli işleve en etkin ÇYÇG yaklaşımını gerçekleştirebilmek için ilgili tekdeğişkenli destek işlevleri nasıl seçilmelidir?” sorusunu sormak bilimcil bakış açısı bağlamında bir kaçınılmazlık olmuştur. Yine 2.3 altbölümünde verilen uygulamalar doğrultusunda, ÇYÇG'nde kullanılan çokboyutlu uzayın aynı boyuttaki altuzaylara bölüntülendirmesi sonucu her bir altuzay üzerinde bağımsızca yapılan ÇYÇG yaklaşımlarının daha etkin sonuçlar verdiği görülmektedir. Buradan da, ilgili çözümcül çokdeğişkenli işlev için üzerinde çalışılan uzamın oylumunun (ing: volume) küçültümünün yaklaşım niteliğine oldukça olumlu katkı yaptığı sonucuna varılabilir. Bu bağlamda us'a “Acaba üzerinde çalışılan ÇYÇG'nin uzamı yapılabildiği kadar küçültülürse ilgili yaklaşımın niteliği nasıl etkilenir?” sorusu gelmektedir. Bu soru sav araştırmalarında geliştirilen özgün yöntemin çıkış noktası olmuştur. Bu doğrultuda, ilgili destek işlevlerinin *Sıfır-aralık-ereyinde* (ing: zero-interval-limit) belirlenimi kararı verilmiştir [44]. Bu karara göre, oylumu sıfıra çok yakın olan uzaylarda çalışılacağından, sıfıra oldukça yakın olarak seçilen bir değiştirge (ing: parameter) kullanımı gündeme gelecektir. Bu bağlamda, sıfıra oldukça yakın değerli değiştirgelerin kullanıldığı saptırım çözümleyişi (ing: perturbation analysis) tabanlı bir yöntem geliştirimi gerekmektedir. Bu bölüm, savın çekirdek bölümü olup ÇYÇG'nde kullanılan tekdeğişkenli destek işlevlerinin elde ediliminde açığa çıkan tümlev işlecin özdeğer sorununun çözümü için geliştirilen,

bütünüyle özgün, saptırım tabanlı sayıclı yöntemin ayrıntılarını içermektedir. Bununla birlikte, elde edilen saptırım toplam dizisinin (ing: perturbation series) yakınsaklığı da yine bu bölümde incelenmiştir. Bölüm, geliştirilen yöntemin etkinliğinin gösterimi açısından ilgili uygulamalar ile bitirilecektir.

### 3.1 Yöntem

Savın giriş bölümünde bulunan (1.15) bağıntısında bir tümlev işlecin yapısı açık olarak belirtilmiştir. Bu bağıntıda  $\hat{\mathcal{F}}$  ilgilenilen tümlev işleci, ikideğişkenli  $K(x, \xi)$  işlevi ise işlecin çekirdeğini simgelemektedir. Bu aşamada  $K(x, \xi)$ 'nin bakışık (ing: symmetric) olduğu varsayılacaktır. Bu nedenle ilgili tümlev işleç özüne-eş (ing: self-adjoint) bir işleç olarak nitelendirilebilir. Aynı zamanda bu işlecin (1.16) koşulunu da sağladığı varsayılacaktır. Bu da ilgili işlecin bir Hilbert-Schmidt tümlev işleci olmasını sağlar [24, 25]. Bilimcil yazından bilindiği gibi Hilbert-Schmidt tümlev işleçleri tıkız (ing: compact) işlevlerdir [26]. Bu varsayımlar altında  $\hat{\mathcal{F}}$  işlecinin özdeğer sorunu (ing: eigenvalue problem)

$$\hat{\mathcal{F}}\phi(x) = \varphi\phi(x) \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır. 3.1 bağıntısında gözükten  $\varphi$ , ilgili Hilbert-Schmidt tümlev işlecinin özdeğerini,  $\phi(x)$  ise o özdeğere karşılık gelen özışlevi göstermektedir. Az önce sözü edilen özüne-eşlik durumundan,  $\hat{\mathcal{F}}$  işlecinin tüm özdeğerlerinin gerçel olduğunu ve değişik özdeğerlerle ilişkilenen özışlevlerin de işlecin tümlevleyiş aralığı olan  $[a, b]$  kapalı aralığı üzerinde birbirlerine dikgen olduklarını söylemek olanaklıdır [24, 25, 45].

Bu bölümde, yukarıda da belirtildiği gibi (3.1) bağıntısında açıkça verilen özdeğer sorununun bilinmeyenleri olan  $\varphi$  ve  $\phi$ 'lerin elde edilimi için geliştirilen saptırım açılımı tabanlı, yeni ve özgün bir yaklaşımlı yönteminin kuramcıl altyapısı ve ayrıntıları verilecektir.

Bu bağlamda, bakışık bir çekirdek içeren (1.15) işleci gözönüne alınsın. Bilindiği gibi bu işlecin tanım kümesi  $a$  ve  $b$  değıştirgelerine (ing: parameters) bağımlıdır. Bu aşamada, aralıktan bağımsız evrencilleştirilmiş (ing: universalized) bir yöntem geliştirmek istendiğinden, ilgili işlecin tanım aralığının evrencil bir aralığa taşınmasında yarar olacaktır. Üzerinde çalışılmak istenen evrencil aralık  $[-1, 1]$  olarak

düşünülürse, bu iş için aşağıdaki birinci derece işlevcil dönüşümler kullanılabilir.

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y, \quad y = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a} \quad (3.2a)$$

$$\xi = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\eta, \quad \eta = \frac{2}{b-a}\xi - \frac{a+b}{b-a} \quad (3.2b)$$

Bu dönüşümler yardımıyla (1.15) işleci, artık evrencil bir aralık olan  $[-1, 1]$  aralığı üzerinde tanımlanmış olur ve yeni oluşturulan tümlev işlecin açık yapısı aşağıdaki gibi verilir.

$$\widehat{\mathcal{F}}f(y) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta K(x_{mp} + d_{hin}y, x_{mp} + d_{hin}\eta) f(\eta) \quad (3.3)$$

Bu aşamada, bu an için kısayol gösterilimi olarak nitelendirilebilecek, ama ileride, geliştirilen yöntem için çok daha önemli oldukları aktarılacak olan  $x_{mp}$  ve  $d_{hin}$  tanımları ise açık olarak

$$x_{mp} \equiv \frac{a+b}{2}, \quad d_{hin} \equiv \frac{b-a}{2}. \quad (3.4)$$

biçiminde verilebilir. (3.3)'te görüldüğü gibi işlecin uzamcıl değişkenlere olan bağımlılığı, tümlevleyiş aralığından alınıp, bütünüyle çekirdeğin yapısına aktarılmıştır. Böylelikle ilgili işlecin  $a$  ve  $b$  bağımlılıkları yok edilip, bunların yerine evrencil olan  $x_{mp}$  ve  $d_{hin}$  değiştirgelerine bağımlılık gündeme getirilmiştir. Adlarından da anlaşılacağı gibi  $x_{mp}$  ilgili aralığın orta noktasını (ing: midpoint) simgelerken,  $d_{hin}$  ise bu aralığın yarı uzunluğunu (ing: half interval length) göstermektedir. Bu değiştirgelerin aldığı değerler,  $[a, b]$  aralığı sıkıştırıldığında, diğer bir deyişle aralık uzunluğu sıfıra götürüldüğünde, geliştirilmeye çalışılan saptırım tabanlı yöntem bağlamında çok büyük önem kazanacaktır [44, 46, 47]. Söz konusu bu olgulara birazdan değinilecektir.

Bu aşamada özüne-eş ve evrencilleştirilmiş bir Hilbert-Schmidt tümlev işlecinin özikiilerinin (ing: eigenpairs) sıfır aralık ereyinde (ing: zero interval limit) saptırım açılımları üzerinde durulacaktır.

Yukarıda da belirtildiği gibi, açık yapısı (3.3)'te verilen işlecin çekirdeğinin yapısında iki önemli değiştirge bulunmaktadır. Bunların ilki, verilen tümlevleyiş aralığının orta noktası olan  $x_{mp}$ , ikinci ise yine bu aralığın yarı uzunluğu olan  $d_{hin}$ 'dir. İkinci değiştirge olan  $d_{hin}$ 'in, özellikle ilgili  $[a, b]$  aralığı sıfıra doğru sıkıştırıldıkça, üzerinde çalışılan özdeğer sorununun çözümünün bulunumunda önemli bir yeri vardır. Bunun yanısıra  $x_{mp}$  ise az önce sözü edilen kolaylaştırımda açığa çıkacak olan  $K(x_{mp}, x_{mp})$

büyükliğünün değerine doğrudan etki etmektedir. Yapılan çözümlemlerden,  $K(x_{mp}, x_{mp})$  değerinin sıfır olması ya da sıfıra yakın değerler alması olgusunun, bazı durumlarda yakınsaklık üzerinde olumsuz etki oluşturacağı sonucuna varılmıştır. Bu bulgulara bir sonraki altbölümde değinilecektir. Bu bölümdeki çalışmalar  $K(x_{mp}, x_{mp})$  değerinin sıfır olmaması öngörümü altında gerçekleştirilecektir. Bunun yanısıra, saptırım kuramındaki uyaşimlardan (ing: conventions) ötürü, sıfır değerine yakın bir değer olarak düşünülecek olan aralık yarı uzunluğu saptırım değıştirgesi olarak nitelendirilecek ve artık  $\varepsilon$  ile simgelenecektir [48–50].

$$\varepsilon \equiv \frac{b-a}{2} = d_{hin} \quad (3.5)$$

Böylece (3.3)'teki  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin  $\varepsilon$  bağımlılığı gözönünde bulundurularak açık biçimde

$$\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon)f(y) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta K(x_{mp} + \varepsilon y, x_{mp} + \varepsilon \eta) f(\eta) \quad (3.6)$$

anlatımı elde edilir. Bu işlecini özdeğeri ve ilintili özişlecini saptırım değıştirgesine olan bağımlılıkları da sırasıyla  $\varphi(\varepsilon)$  ve  $\phi(y, \varepsilon)$  olarak gösterilirse, çözülmeye çalışılacak olan özdeğer sorunu

$$\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon)\phi(y, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\phi(y, \varepsilon). \quad (3.7)$$

biçiminde yazılabilir [46]. Bu işleç özdeğer sorununda,  $\phi(x, \varepsilon)$ ,  $[-1, 1]$  aralığı üzerinde dördülü tümlemlenebilen (ing: square integrable) bir işlev olarak öngörülmektedir. Bunun yanısıra, ilgili tümlev işlecini  $y$  ve  $\eta$ 'ya olan bağımlılığı, her ne kadar çekirdeğini bağımlılığı bulunsa da, açık olarak gösterilmemektedir. Bunun nedeni de çekirdeğini bağımsız değışkenleri olan  $y$  ve  $\eta$ 'nin ilgili tümlev işleç olan  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecini etkimesi sonucu elde edilen yapıyı doğrudan etkileyen bir durumunun söz konusu olmamasıdır. Bu nedenden ötürü, bu değışkenler, yalnızca, etkin ve etki sonucu açığa çıkan işlevlerin bağımsız değışkenleri olarak nitelendirilirler. Bu da ilgili değışkenlerin sessiz (ing: dummy) değışkenler olarak görülebileceği olgusunu destekler.

Diğeri yandan, çekirdeğini ve dolayısıyla da tümlev işlecini yapısında bulunan  $\varepsilon$ 'un, bu kavramların çözümcül yapılarında önemli bir yeri vardır. Öyle ki, etkin işlev  $\varepsilon$ 'a bağımlı olmasa bile ilgili işlecini bu işleve etkimesi sonucu  $\varepsilon$ 'a bağımlı bir anlatım elde edilecektir. Bu yüzden (3.7)'deki eşitliğini sol yanında bulunan işlecini  $\varepsilon$ 'a bağımlılığını açıkça göstermek yararlı olacaktır.



Bu savda Hilbert-Schmidt tümlev işleçlerine odaklanıldığından,  $\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon)$  işlecinin izgesinin sonsuz öğeden oluştuğunu göz önüne almak gerekir [26, 45]. İlgili sonsuz izgenin içerisinde sonsuz katlılıklı özdeğer pek karşılaşılan bir durum değildir. Bunun yanısıra, işleç bir Pincherle-Goursat çekirdeği içeriyorsa bu işlecin izgesi sonlu sayıda sıfır olmayan özdeğeri ile birlikte sonsuz katlılıklı sıfır özdeğeri içerir [24, 25].

(3.7)'deki özdeğer sorununun bir an için çözüldüğü ve özdeğerler ile özişlevlerin sırasıyla  $\varphi^{(0)}(\varepsilon)$ ,  $\varphi^{(1)}(\varepsilon), \varphi^{(2)}(\varepsilon), \dots$  ve  $\phi^{(0)}(y, \varepsilon), \phi^{(1)}(y, \varepsilon), \phi^{(2)}(y, \varepsilon), \dots$  olacak biçimde gösterildiği düşünölsün. Eğer bu sıralayış, özdeğerlerin imsiz değerlerine göre azalan biçimde yapılacak olursa  $\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon)$  işlecinin çekirdeğinin izgecil ayrıştırımı aşğıdaki gibi verilir [46].

$$K(y, \eta, \varepsilon) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(\varepsilon) \phi^{(j)}(y, \varepsilon) \phi^{(j)}(\eta, \varepsilon). \quad (3.8)$$

Böylelikle, bu ayrıştırmadaki ilk toplamcıl bileşen, özişlevlerin tümü birimboylu olduklarında, en baskın bileşen olarak değerlendirilebilir. Kuşkusuz en büyük özdeğerin varlığı ancak ve ancak ilgili çekirdek sınırlı oldukça güvence altına alınabilir. Bu savda Hilbert-Schmidt işleçleri ile çalışıldığından bu nedenli bir varlık sorunu yaşanmayacaktır. Bununla birlikte, savda önerilen yöntem, salt en baskın özdeğer ile ona eşlik eden özişlevin yani, sırasıyla  $\varphi^{(0)}(\varepsilon)$  ve  $\phi^{(0)}(y, \varepsilon)$ 'un bulunumu için geliştirmiş olup diğer özdeğer ve özişlevlerin bulunumu için de önerilere değinilecektir.

$\varphi^{(0)}(\varepsilon)$  ve  $\phi^{(0)}(y, \varepsilon)$ 'un belirleniş için kullanılacak saptırım kuramı, kolaylık açısından, (3.7) sorunundaki  $\varepsilon$ 'a bağı büyüklüklerin çözümcül (ing: analytic) oluşu öngörüsünü yanında getirmektedir. Bu durumda  $\varepsilon$ 'a bağı olan ikideğişkenli çekirdek

$$K(x_{mp} + \varepsilon y, x_{mp} + \varepsilon \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(y, \eta) \varepsilon^j \quad (3.9)$$

biçiminde bir toplamdiziye (ing: series) açılabilir. Görüldüğü gibi bu toplamdizinin birleştirim bileşenleri  $y$  ve  $\eta$ 'ya bağı çözümcül ikideğişkenli işlevleri simgelemektedir. İlgili ikideğişkenli bileşenler ise Taylor toplamdizileri [51] bağlamında

$$K_j(y, \eta) = \sum_{k=0}^j y^k \eta^{j-k} K_{k,j-k}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.10)$$

açık yapısıyla verilirler. Bu ikideğişkenli bileşenlerin içerisinde bulunan  $K_{k,j-k}$  katsayıları ise

$$K_{k,j-k} \equiv \frac{1}{k!(j-k)!} \left\{ \frac{\partial^j K}{\partial x^k \partial \xi^{j-k}}(x, \xi) \right\}_{x=x_{mp}, \xi=x_{mp}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, j. \quad (3.11)$$

olarak elde edilirler. Böylelikle (3.9) bağıntısındaki çekirdeğin saptırım açılımı katsayıları, aslında,  $(x_{mp}, x_{mp})$  noktasında belirlenen ikideğişkenli Taylor açılım katsayılarından başka olgular değildir.

Yukarıdaki çözümlerişre göre  $K_j(y, \eta)$ 'lar, bağımsız değişkenlerinin tanımlı olduğu aralıkta dördülu tümlemlenebilen ve önceden bilinen (verilen) birer çokçokterimliler (ing: multinomials) olarak ortaya çıkarlar. Bu da,

$$\widehat{\mathcal{F}}_j f(y) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta K_j(y, \eta) f(\eta), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

olmak üzere

$$\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_j \varepsilon^j \quad (3.13)$$

yazımına olanak sağlar.

Burada  $f(y)$ ,  $\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon)$  işlecinin tanım kümesinde bulunan herhangi bir işlev olabilir. Bu durumda  $f(y)$  de  $[-1, 1]$  aralığında dördülu tümlemlenebilir bir işlev olmak zorundadır.

$\varepsilon$ 'un üslüleri türünden bir saptırım açılımı elde edilmek istendiğinden, (3.7) sorunundaki özikililerin bu değiştirgeye göre çözümcül oldukları varsayılarak aşığıdaki açılımları yazmak olanaklıdır.

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon^j \quad (3.14)$$

$$\phi(y, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(y) \varepsilon^j \quad (3.15)$$

öyle ki, sırasıyla, ilgili açılımların katsayıları olan sayıl  $\varphi_j$ 'ler ve tekdeğişkenli işlevler olan  $\phi_j(y)$ 'ler henüz bilinmeyen ve saptırım değiştirgesi  $\varepsilon$ 'a bağımlı olmayan büyüklüklerdir.

Bu aşamada, (3.13), (3.14) ve (3.15) açılımlarının (3.7) sorununda kullanımı sonucu elde edilen eşitliğin her iki yanında da  $\varepsilon$ 'un üslüleri türünden toplam diziler açığa çıkar. Bu toplam diziler yakınsaklık aralıklarında seçilen tüm  $\varepsilon$ 'lar için aynı değeri

üretmelidir. Bu yüzden, ilgili eşitliğin her iki yanındaki eş  $\varepsilon$  üslülerinin katsayıları birbirine eşitlendiğinde

$$\sum_{k=0}^j \widehat{\mathcal{F}}_k \phi_{j-k}(y) = \sum_{k=0}^j \varphi_k \phi_{j-k}(y), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

bağıntıları elde edilir. (3.16)'daki bağıntıların saptırım açılımı katsayıları arasında bir örtük özyineleyiş (ing: implicit recursion) oluşturduğunu görmek hiç de güç değildir. Bu aşamadan sonraki amaç, elde edilen örtük özyineleyişi belirtik (ing: explicit) yapıya çevirip bilinmeyen bileşenleri, sıfıncı sırasayıldan başlayarak, elde etmek olacaktır.

### 3.1.1 Sıfıncı kerteden saptırım bileşenleri

Sıfıncı kerteden saptırım bileşenleri  $\varphi_0$  ve  $\phi_0(y)$ 'dir. Bu bileşenleri elde etmek için (3.15) örtük özyineleyişinde  $j = 0$  alınır

$$\widehat{\mathcal{F}}_0 \phi_0(y) = \varphi_0 \phi_0(y), \quad (3.17)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik başka bir tümlev işleç olan  $\widehat{\mathcal{F}}_0$  işlecinin izgecil sorunudur ve çözülebilirliği kuşkusuz çekirdeğinin yapısına bağlıdır.  $\widehat{\mathcal{F}}_0$  işlecinin açık yapısı aşağıdaki gibi verilebilir

$$\widehat{\mathcal{F}}_0 f(y) \equiv \frac{K_{0,0}}{2} \int_{-1}^1 d\eta f(\eta) = \frac{K_{0,0}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 d\eta \frac{1}{\sqrt{2}} f(\eta) \equiv K_{0,0} \widehat{P}_0 f(y) \quad (3.18)$$

Yukarıdaki gösterim, üzerinde çalışılan izgecil sorundaki saptırimsız işleç olan  $\widehat{\mathcal{F}}_0$ 'ın,  $\widehat{P}_0$  ile gösterilecek ve dizey gösteriliminin özdüzeyi (ing: rank) 1 olan bir izdüşüm işleciyle (ing: projection operator) orantılı olduğunu söyler. Bu ilişki,  $\widehat{\mathcal{F}}_0$  işlecinin salt tek bir özdeğerinin sıfırdan değişik, geri kalan diğer tüm özdeğerlerinin ise 0 olduğu yargısına varılmasını sağlar. Eğer sözü edilen bu sıfırdan değişik özdeğere odaklanılırsa, saptırım sonucu elde edilecek asıl özdeğerin,  $\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon)$  işlecinin en büyük özdeğeri olması için iyi bir aday olacağından söz edilebilir. Burada “aday” sözcüğünün kullanılmasındaki neden  $\varepsilon$  değerinin sıfırdan uzaklaştığı, yani büyüdüğü, durumlarda  $\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon)$  işlecinin özdeğerlerinin sıralamasının değişebilirliği olabilir. Eğer bu sıralamanın değişmediği  $\varepsilon$  değerleri göz önüne alınırsa, bu durumda, salt en büyük özdeğer ve ona eşlik eden özışlevin bulunumuna odaklanılmış olur. Bilindiği gibi bir çok bilimcil ve ölçmenlik uygulamasında, izgenin en önemli bileşeni en büyük özdeğer

ve ilişkili özişlevidir (ya da özyöne) [29,52]. Bunun ötesinde, savda asıl odaklanılmak istenen olgu da sözü edilen bu en baskın bileşenin saptanış durumudur.

(3.18) bağıntısından kolaylıkla görülebileceği gibi, ilgili saptırımsız işlecin en büyük özdeğeri  $K_{0,0}$  olmakla birlikte eşlik eden  $[-1, 1]$  olağanlaştırılmış özişlev ise bir değişmez işlev olan  $1/\sqrt{2}$  işlevidir. Bu özişlev  $g_0(y)$  ile gösterilirse

$$\varphi_0 = K_{0,0}, \quad \phi_0(y) = c_0 g_0(y), \quad y \in [-1, 1] \quad (3.19)$$

ikilisi elde edilir. Buradaki  $c_0$  bir isteğe bağlı (ing: arbitrary) değişmezi belirtmektedir.

(3.18) bağıntısından, her bir sıfır özdeğere eşlik eden her bir özişlevin birim değişmez işleve (ing: unit constant function) dikgen olması gerektiği yargısına varılır. Bunun nedeni de özüne-eş işleçlerin değişik özdeğerlerle ilişkilendirilen değişik özişleçlerin birbirlerine dikgen olması gerektiği olgusudur [26]. Bu olgu, sıfır özdeğer ile ilişkilendirilen özişlevlerin tümünün  $[-1, 1]$  aralığı üzerindeki tümlevinin sıfır olmasını gerektirir. Bilimcil yazından da bilindiği gibi bu tür işlevlerin bulunduğu uzay Legendre çokterimlileri tarafından örtülmektedir [34].

Bu aşamada, elimizde tek bir sıfır olmayan özdeğer ile sayılabilir sonsuzlukta 0 özdeğeri bulunmaktadır. Yukarıda sözü edilen olgulardan ötürü, incelediğimiz sıfır olmayan özdeğer ve ilgili özişlev için bulunan değerler ile sürdürülecektir.

### 3.1.2 Birinci kereden saptırım bileşenleri

Sıfıncı kereden saptırım bileşenlerinin elde ediliminden sonra birinci kerte saptırım bileşenlerini bulmak için (3.16) örtük özyineleyişinde  $j = 1$  alınarak

$$\widehat{\mathcal{F}}_0 \phi_1(y) + \widehat{\mathcal{F}}_1 \phi_0(y) = \varphi_1 \phi_0(y) + \varphi_0 \phi_1(y) \quad (3.20)$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitlik, önceden bulunan sıfıncı kerte saptırım bileşenlerinden yararlanılıp düzenlenerek

$$K_{0,0} [\widehat{I} - \widehat{P}_0] \phi_1(y) \equiv K_{0,0} \widehat{P}_0^\perp \phi_1(y) = [\widehat{\mathcal{F}}_1 - \varphi_1 \widehat{I}] \phi_0(y) \quad (3.21)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. (3.21) bağıntısındaki  $\widehat{I}$ , üzerinde çalışılan  $\mathcal{F}$  işlev uzayının birim işlecini,  $\widehat{P}_0^\perp$  ise yukarıda tanımlanan  $\widehat{P}_0$  işlecinin tümleyen izdüşüm işlecini (ing: complementary projection operator) simgelemektedir. Eğer,  $\mathcal{F}_0$ ,  $\mathcal{F}'$ 'nin  $g_0$  tarafından örtülen altuzayını simgelerse, tek boyutlu bir uzay olarak

nitelendirilebilir ve bu da  $\mathcal{F}_0$ 'ın  $\mathcal{F}$ 'nin bir eksenini olduğu anlamına gelir. Öte yandan,  $\mathcal{F}_0$  altuzayının dikgen tümleyeni (ing: orthogonal complement) olan  $\mathcal{F}_0^\perp$  altuzayı ise  $\mathcal{F}$ 'nin  $\mathcal{F}_0$  eksenine dikgen olan ve sayılabilir sonsuzlukta yön içeren altuzayı simgelemektedir.  $\hat{P}_0$  ve  $\hat{P}_0^\perp$  işlemleri ise sırasıyla  $\mathcal{F}_0$  ve  $\mathcal{F}_0^\perp$  uzaylarına izdüştüren işlemlerdir.  $\hat{P}_0^\perp$  işleminin Hermit türü oluşundan ötürü (3.21)'in sol yanının  $g_0(y)$  ile iç çarpımı sıfır değeri verecektir. Aynı eşitliğin sağ yanının  $g_0(y)$  ile iç çarpımından da aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(g_0, \hat{\mathcal{F}}_1 g_0\right) c_0 - \varphi_1 c_0 = 0 \quad (3.22)$$

Buradan da

$$\varphi_1 = \left(g_0, \hat{\mathcal{F}}_1 g_0\right) \quad (3.23)$$

sonucuna varılır. Bu nedenle  $\varphi_1$  bileşeni,  $\hat{\mathcal{F}}_1$  işleminin, bir önceki aşamada bulunan sıfır olmayan özdeğere eşlik eden özdeşlemin altındaki beklenen değeri (ing: expected value) olduğu görülür. (3.23) eşitliği daha açık olarak yazılırsa

$$\varphi_1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 d\eta (K_{1,0}y + K_{0,1}\eta) = 0. \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu bulgu yardımıyla daha da ilerleyerek

$$\hat{\mathcal{F}}_1 \phi_0(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta (K_{1,0}y + K_{0,1}\eta) \phi_0(y) = \frac{K_{1,0}}{\sqrt{2}} c_0 y \quad (3.25)$$

elde edilir ve bu sonucun (3.21) eşitliğinde kullanımıyla

$$K_{0,0} \phi_1(y) - \frac{K_{0,0}}{2} \int_{-1}^1 d\eta \phi_1(\eta) = \frac{K_{1,0}}{\sqrt{2}} c_0 y \quad (3.26)$$

olduğu bulunur. (3.26) eşitliğindeki tümlemin isteğe bağlı bir değişmez olduğu olgusu kullanılarak

$$\phi_1(y) = \frac{K_{1,0}}{\sqrt{2}K_{0,0}} c_0 y + c_1 \quad (3.27)$$

sonucuna ulaşılır. Burada  $c_1, c_0$  gibi bir değişmez sayı olmakla birlikte, değeri, ileride dile getirilecek olağanlaştırım süreci bağlamında belirlenecektir.

Böylelikle sıfırinci ve birinci kereden saptırım terimleri elde edilmiş olur. Açık yapıları bulunan bu terimlerin değerleri şu an için bilinmeyen isteğe bağlı belirsiz değişmezler içerdiği olgusu unutulmamalıdır. Bu değişmezlerin değerleri, yukarıda da belirtildiği gibi, olağanlaştırım süreci sırasında bulunacaktır.

### 3.1.3 Belirtik saptırım özyineleyişi oluşturmumu

Sıfıncı ve birinci kereden saptırım terimleri açık olarak bulunduktan sonra özelsiz (ing: general) bir  $j$  değeri için  $j$ . saptırım terimlerinin elde edilimine başlanabilir. Bu doğrultuda (3.16)'daki örtük özyineleyiş aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$K_{0,0}\widehat{P}_0^\perp\phi_j(y) = \sum_{k=0}^{j-1} \left[ \widehat{\mathcal{I}}_{k+1} - \varphi_{k+1}\widehat{I} \right] \phi_{j-k-1}(y), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

Yukarıdaki bağıntıda ilgili toplam simgesi içinde bulunan terimler toplamın altkısı üstkısından büyük olduğu  $j$  değerleri için sıfır olarak düşünülmektedir.  $\widehat{\mathcal{I}}(\varepsilon)$  işleci, çekirdeğinin bakışımından ötürü Hermit türü yani özüne-eştir. Bu da, tüm  $\widehat{\mathcal{I}}_j$ 'ler ve dolayısıyla da  $\widehat{P}_0$  ile  $\widehat{P}_0^\perp$  işlecinin özüne-eş oluşunu sağlar.  $\widehat{P}_0^\perp$  işlecinin özüne-eş oluşundan

$$\left( g_0, \widehat{P}_0^\perp \phi_j \right) \equiv \left( \widehat{P}_0^\perp g_0, \phi_j \right) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

ilişkisi yazılabilir. Yukarıdaki ilişkinin elde ediliminde  $g_0(y)$  işlevinin  $\mathcal{F}_0^\perp$  uzayına dikgenliğinden de yararlanılmıştır.

(3.28) eşitliğinin her iki yanının  $g_0$  ile iç çarpımı alınıp (3.29)'daki ilişki kullanılırsa

$$\left( g_0, \sum_{k=0}^{j-1} \left[ \varphi_{k+1}\widehat{I} - \widehat{\mathcal{I}}_{k+1} \right] \phi_{j-k-1} \right) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

elde edilir. Uygun cebircil işlemlerle, buradan,

$$c_0\varphi_j = \left( g_0, \widehat{\mathcal{I}}_j\phi_0 + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{I}}_{k+1} - \varphi_{k+1}\widehat{I} \right] \phi_{j-k-1} \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

eşitliğine varılır [46]. Daha önceden belirtildiği gibi, iç çarpımın içinde bulunan özileşlevlerin bağımsız değişkeni olan  $y$ , sessiz değişken olduğundan (3.29), (3.30) ve (3.31) bağıntılarında açık olarak yazılmamıştır.

(3.31) eşitliği, kolaylıkla görülebileceği gibi  $\varphi_j$  bileşenini özünden önceki yineleyişlerde bulunmuş olan  $\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}$ , ve,  $\phi_0, \dots, \phi_{j-1}$  bileşenlerine bağlamaktadır. Böylelikle özelsiz olarak  $j$ . adımdaki özdeğer saptırım katsayısı olan  $\varphi_j$  katsayısı için belirtik (ing: explicit) bir özyineleyiş bağıntısı elde edilmiş olur.

Aynı olguyu  $\phi_j(y)$  saptırım bileşenleri için de gerçekleştirebilmek için (3.28) eşitliği aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$K_{0,0}\widehat{P}_0^\perp\phi_j(y) = \widehat{\mathcal{I}}_j\phi_0(y) - \varphi_j\phi_0(y) + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{I}}_{k+1} - \varphi_{k+1}\widehat{I} \right] \phi_{j-k-1}(y), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

(3.31)'deki bağıntının her iki yanını  $g_0(y)$  ile çarpılıp özdeşliği 1 olan  $\widehat{P}_0$  işlecini açık tanımını gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\varphi_j \phi_0(y) &= g_0(y) \left( g_0, \widehat{\mathcal{J}}_j \phi_0 + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} - \varphi_{k+1} \widehat{I} \right] \phi_{j-k-1} \right) \\ &= \widehat{P}_0 \left\{ \widehat{\mathcal{J}}_j \phi_0(y) + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} - \varphi_{k+1} \widehat{I} \right] \phi_{j-k-1}(y) \right\}, \\ & \quad j = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (3.33)$$

elde edilir. Bu da (3.32)'nin aşağıdaki gibi yazımına olanak sağlar.

$$\widehat{P}_0^\perp \left\{ \phi_j(y) - \frac{1}{K_{0,0}} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_j \phi_0(y) + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} - \varphi_{k+1} \widehat{I} \right] \phi_{j-k-1}(y) \right] \right\} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Yukarıdaki eşitlik, sol yanında bulunan  $\widehat{P}_0^\perp$  işlecini etkilediği yapının  $g_0$ 'a dikgen olduğunu anlatır. Bu bilgi göz önünde bulundurularak (3.34) eşitliğinden

$$\phi_j(y) = c_j g_0(y) + \frac{1}{K_{0,0}} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_j \phi_0(y) + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} - \varphi_{k+1} \widehat{I} \right] \phi_{j-k-1}(y) \right], \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

özyineleyişini kolaylıkla elde etmek olanaklı olur. İlgili bağıntıda  $g_0(y)$  yerine önceden belirlenen değeri olan  $1/\sqrt{2}$  yerleştirilirse

$$\phi_j(y) = \frac{c_j}{\sqrt{2}} + \frac{1}{K_{0,0}} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_j \phi_0(y) + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} - \varphi_{k+1} \widehat{I} \right] \phi_{j-k-1}(y) \right], \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

bağıntısı elde edilir [46]. Yukarıda dile getirildiği gibi (3.36) eşitliğinin sağ yanındaki sonlu toplam  $j, 0$  ya da  $1$  değerlerini aldığı anda kaybolmaktadır. Bunun yanı sıra, sağ yanda bulunan saptırım değişkenlerinin altsırasayıları her zaman  $j$ 'den küçük kalmaktadır. Buradan, (3.36) bağıntısının (3.31) bağıntısındaki gibi bir belirtik özyineleyiş yapısı olduğu açıkça görülmektedir. Böylelikle, erekteki Hilbert-Schmidt tümlev işlecini, gerek en baskın özdeğeri olan  $\varphi$ , gerekse de eşlik eden özışlev olan  $\phi_j(y)$ 'nin tüm saptırım bileşenlerinin doğrudan elde edilimini sağlayan belirtik özyineli ilişkiler oluşturulmuş olur. Bu aşamadan sonra ilgili bileşenlerin yapısında bulunan ve değerleri belirsiz kalan  $c_j$  sayıllarının bulunmasına odaklanılacaktır. Bu amaçla ilgili saptırım işlevlerinin olağanlaştırmı (ing: normalization) gündeme getirilecektir.

### 3.1.4 Saptırım işlevlerinin olağanlaştırımı

Yukarıdaki çözümleyişlerde, saptırım denklemlerinin çözümü sırasında belirlenen her bir  $\phi_j(y)$  bileşenin içinde bir isteğe bağlı değişmezin açığa çıktığı ve bu isteğe bağlılığın belirsizlikler doğuracağı görülmektedir. Bu da, elde edilmek istenen saptırım açılımında sayılabilir sonsuzlukta isteğe bağlı değişmez ile karşılaşılacağı anlamına gelmektedir. Eşsiz (ing: unique) bir saptırım çözümü elde edebilmek için sözü edilen değişmezlerin açık bir kurala dayandırılarak bulunumu gerekmektedir. Burada, sözü edilen ama bu ana dek gündeme getirilmeyen olağanlaştırım (ing: normalization) olgusu gündeme getirilmelidir. Doğrucul işleçlerin izgecil kuramına göre özişlevlerin tümünün birimboyluluğu istenildiğinden,  $\phi(y, \varepsilon)$  işlevi de, ilgili toplamdizinin yakınsaklık aralığında bulunan  $\varepsilon$  değerleri için birimboylu olmalıdır. Bu olgu da aşağıdaki eşitliğin yazılmasına neden olur.

$$\|\phi(\varepsilon)\|^2 \equiv (\phi(\varepsilon), \phi(\varepsilon)) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^j (\phi_k, \phi_{j-k}) \right] \varepsilon^j = 1 \quad (3.37)$$

Bu eşitlikten,  $\delta$  simgesi Kronecker delta işlevini göstermek üzere

$$\sum_{k=0}^j (\phi_k, \phi_{j-k}) = \delta_{j,0}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

eşitliklerinin yazımı olanaklı olur. Böylelikle sıfırcı kereden (saptırımsız) bileşenin elde ediliminde açığa çıkacak olan dördül kökün (ing: square root) artılışı seçilerek ilerlenip (eşsizlik için) (3.38) eşitliklerinin tümü sağlatılırsa, üzerinde çalışılan özişlev için tek türlü belirli bir saptırım açılımı elde edilir.

Yukarıda ayrıntıları verilen ve (3.38)'deki iç çarpım eşitlikleriyle biten çözümleyiş, eşsizliği sağlamanın en akılcı yolu olarak değerlendirilebilir [46]. Buna karşın, bu olgu, kesme yapılarak elde edilen saptırım toplamdizilerinin yaklaştırım olarak kullanımı durumunda geçerliliğini korumayabilir. Bunun nedeni de yapılan kesmelerin iki tür yanılğı yığılımına neden olabilişidir. Bunlardan ilki,  $\phi(y, \varepsilon)$ 'un saptırım toplamdizisinin belirli bir kereden kesimiyle karşılaşılabilir kesme yanılğısı (ing: truncation error), ikincisi ise yine yapılan kesme ile elde edilen yaklaşık toplamdizinin boyunun 1'den uzaklaşması sonucu elde edilen yanılğıdır. Bunların dışında (3.38)'deki iç çarpım eşitliklerinin tümünün çözümü biraz karmaşık olmaktadır. Bu yüzden olağanlaştırım için (3.38) eşitliklerini kullanmak yerine,  $\phi(y, \varepsilon)$ 'un bileşenlerinin her birinde açığa çıkan isteğe bağlı değişmezlerin uygun olarak seçimleri işleri



kolaylaştırabilecek bir olgu olarak ele alınabilir. İlgili değişmez seçimleri, kuşkusuz  $\phi(y, \varepsilon)$  işlevinin birimboyluluğunu sağlamayacaktır. Bu yüzden elde edilen  $\phi(y, \varepsilon)$  işlevinin  $[-1, 1]$  üzerinde ve birim ağırlık altında *yeniden olağanlaştırımı* gündeme getirilmelidir [46]. Böylelikle kesme yaklaşımlarını elde etme ve elde edilen yaklaşımların toplam dizisinin olağanlaştırımı olguları birbirinden ayrılmış olur. Bu da olağanlaştırım olgusundaki karmaşıklığı azaltmaktadır.

### 3.1.4.1 Dikgen saptırım olağanlaştırımı

Bir önceki altbölümde sözü edilen *yeniden olağanlaştırım* olgusu, sırasıyla aşağıdaki adımlar atılarak uygulanabilir:

Öncelikle  $c_0$  değişmezi  $\phi_0(y)$  bileşeni birimboylu olacak şekilde 1 olarak atanır. Sonra da  $j \neq 0$  olacak şekilde tüm  $\phi_j(y)$  işlevlerinin  $\phi_0(y)$  işlevine dikgen olması sağlanacak biçimde  $c_j$  değişmezleri bulunur. Bu elde edilimlerle (3.31) ve (3.36) ilişkileri aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\phi_j^{(\perp)} = \left( g_0, \hat{\mathcal{F}}_j \phi_0^{(\perp)} + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \hat{\mathcal{F}}_{k+1} - \phi_{k+1}^{(\perp)} \hat{I} \right] \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

$$\phi_j^{(\perp)}(y) = \frac{1}{K_{0,0}} \hat{P}_0^\perp \left[ \hat{\mathcal{F}}_j \phi_0^{(\perp)}(y) - \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \hat{\mathcal{F}}_{k+1} - \phi_{k+1}^{(\perp)} \hat{I} \right] \phi_{j-k-1}^{(\perp)}(y) \right], \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

Yukarıdaki yeniden yazımlarda gözüken  $(\perp)$  üstsimgesi, ilgili bileşenlerdeki  $c_j$  değişmezlerinin, yukarıda anlatılan dikgenlik olgusu yardımıyla bulunduğunu anlatmaktadır. Bu olgu,  $\phi_j(y)$  bileşenlerinin arasında evrencil bir ilişki ortaya konulmasını sağlamakla birlikte, olağanlaştırımı sağlamanın en kolay yolu olarak da düşünülebilir. Bu yüzden de (3.39) ve (3.40) bağıntıları kullanılarak elde edilen saptırım bileşenlerine *evrencil saptırım bileşenleri* adı verilecektir.

Bu aşamada (3.39) ve (3.40) özyineli ilişkilerinde  $j$  değeri için sırasıyla 0 ve 1 değeri alınarak ilk iki özdeğer ve ilgili özışlev bileşeni elde edilir. Dikgenlik olgusu kullanılarak  $c_0$  ve  $c_1$  değişmezleri sırasıyla 1 ve  $-\left(g_0, \hat{\mathcal{F}}_1 g_0\right) / K_{0,0} = 0$  olacak şekilde seçilirler. Bu seçimler (3.19) ve (3.27) eşitlikleriyle de örtüşür durumdadır. Görüldüğü gibi, bu olgular üzerine dayandırılarak yapılan saptırım çözümleyişi  $K_{0,0}$  değeri sıfır olmadığında geçerliliğini korur. Bunun da ötesinde  $K_{0,0}$ 'ın sıfır olmadığı durumlarda bile yakınsama sağlanamayabilir. Bu aşamada saptırım değıştirgesi olan  $\varepsilon$ 'un aldığı

değer önem kazanır. Önerilen saptırım tabanlı yöntemin yakınsaklık çözümleyişi 3.3 altbölümünde verilecektir.

Böylelikle (3.39) ve (3.40) bağıntılarının evrencil saptırım bileşenlerinin eşsiz olarak belirlenişinde yeterli olduğu gösterilmiştir. Bu doğrultuda, ilgili bileşenlerin bulunması için simgecil (ing: symbolic) düzeyde bir betik (ing: script) yazımı gündeme getirilmiştir. Bu bağlamda öncelikle MuPAD [53] kullanarak hem özdeğer, hem de ilgili özişlev için ilk beş saptırım bileşeni bulunmuştur. Benzer uygulama, tümüyle bağımsız olarak MATLAB [54] yardımıyla, yine simgecil betikleyleş aracılığıyla gerçekleştirilmiş ve bulguların birebir örtüştüğü gözlemlenmiştir. Bu bağlamda, elde edilen saptırım bileşenlerinin,  $j = 4$  durumunu da içermekle birlikte, ilk beşi aşağıdaki gibi elde edilmişlerdir.

$$\varphi_0^{(0,\perp)} = K_{0,0}, \quad \phi_0^{(0,\perp)}(y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.41)$$

$$\varphi_1^{(0,\perp)} = 0, \quad \phi_1^{(0,\perp)}(y) = \frac{\sqrt{2}K_{1,0}}{2K_{0,0}}y \quad (3.42)$$

$$\varphi_2^{(0,\perp)} = \frac{K_{0,2}}{3} + \frac{K_{2,0}}{3} + \frac{K_{0,1}K_{1,0}}{3K_{0,0}}, \quad \phi_2^{(0,\perp)}(y) = \frac{\sqrt{2}K_{2,0}}{2K_{0,0}}y^2 - \frac{\sqrt{2}K_{2,0}}{6K_{0,0}} \quad (3.43)$$

$$\varphi_3^{(0,\perp)} = 0,$$

$$\phi_3^{(0,\perp)}(y) = \frac{\sqrt{2}K_{3,0}}{2K_{0,0}}y^3 - \frac{\sqrt{2}}{6} \left( \frac{K_{0,1}K_{1,0}^2}{K_{0,0}^3} - \frac{K_{1,2}}{K_{0,0}} + \frac{K_{0,2}K_{1,0}}{K_{0,0}^2} - \frac{K_{1,0}K_{1,1}}{K_{0,0}^2} + \frac{K_{1,0}K_{2,0}}{K_{0,0}^2} \right) y \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \varphi_4^{(0,\perp)} = & \frac{K_{0,4}}{5} + \frac{K_{2,2}}{9} + \frac{K_{4,0}}{5} - \frac{K_{0,1}^2K_{1,0}^2}{9K_{0,0}^3} + \frac{K_{0,1}K_{1,2}}{9K_{0,0}} + \frac{K_{0,3}K_{1,0}}{5K_{0,0}} \\ & + \frac{4K_{0,2}K_{2,0}}{45K_{0,0}} + \frac{K_{0,1}K_{3,0}}{5K_{0,0}} + \frac{K_{1,0}K_{2,1}}{9K_{0,0}} - \frac{K_{0,1}K_{0,2}K_{1,0}}{9K_{0,0}^2} \\ & + \frac{K_{0,1}K_{1,1}K_{1,0}}{9K_{0,0}^2} - \frac{K_{0,1}K_{2,0}K_{1,0}}{9K_{0,0}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4^{(0,\perp)}(y) = & \frac{\sqrt{2}K_{4,0}}{2K_{0,0}}y^4 + \frac{\sqrt{2}}{6} \left( \frac{K_{2,2}}{K_{0,0}} - \frac{K_{2,0}^2}{K_{0,0}^2} - \frac{K_{0,2}K_{2,0}}{K_{0,0}^2} + \frac{K_{1,0}K_{2,1}}{K_{0,0}^2} \right. \\ & \left. - \frac{K_{0,1}K_{1,0}K_{2,0}}{K_{0,0}^3} \right) y^2 + \frac{\sqrt{2}}{18} \left( \frac{K_{2,0}^2}{K_{0,0}^2} - \frac{K_{2,2}}{K_{0,0}} - \frac{9K_{4,0}}{5K_{0,0}} + \frac{K_{0,2}K_{2,0}}{K_{0,0}^2} \right. \\ & \left. - \frac{K_{1,0}K_{2,1}}{K_{0,0}^2} + \frac{K_{0,1}K_{1,0}K_{2,0}}{K_{0,0}^3} \right) \quad (3.45) \end{aligned}$$

Yukarıdaki bileşenlerde kullanılan ve bu aşamaya dek kullanılmayan 0 üstsirasayısı (3.8) eşitliğinde sıfıncı sırada gibi düşünülen en baskın özdeğer ile ilgili özişlev için belirlenen saptırım bileşenlerinin varlığını betimlemektedir. Bunun yanısıra, her ne kadar, özişlevin olağanlaştırmı özdeğerin değerinde bir değişiklik yaratmıyorsa da en baskın özdeğer için elde edilen bileşenler olan  $\varphi_j$ 'lerde de  $\perp$  üstsimgesi kullanılmaktadır. Böylelikle dikgenlik tabanlı olağanlaştırmı vurgusu bir kez daha yapılmış olur.

Açık yapıları yukarıdaki eşitlikler ile verilen saptırım bileşenlerinden de ayırında varılacağı gibi, saptırım kertesı yükseldikçe, bileşenlerin cebircil yapılarındaki karmaşıklık artmaktadır. Bunun yanısıra  $\phi_j(y)$  işlevlerinin  $j$ 'nin tek değerleri için tek, çift değerleri için de çift işlevler olduğu açıkça görülmektedir. Bu özellik, (3.40) özyineli ilişkisi kullanılarak kolaylıkla kanıtlanabilir. Bununla birlikte, saptırım işlevleri, salt ilgili çekirdeğin katsayılarına değil, o katsayıların  $K_{0,0}$ 'a oranlarına bağımlıdır. Aynı durum özdeğer bileşenleri için de geçerlidir. Bu olguların tümü yakınsaklık çözümleyişi için oldukça önemlidir ve önceden verilen özyineli ilişkiler aracılığıyla kanıtlanabilirler.

Bu altbölümü sonlandırmadan önce yeniden vurgulamak istenilen nokta yeniden olağanlaştırmı olgusudur. Özişlevlerin odakta olduğu birçok uygulamada üzerinde çalışılan işlecin özişlevlerinin boylarının 1 olması istenir [26, 29]. Bu yüzden de kesme yapılarak kullanılan özişlev saptırım toplamdizisinin, doğrudan kullanımı uyumsuzluklar yaratır. Bu uyumsuzluklar, ancak, yeniden olağanlaştırmı ile giderilebilir. Bu bağlamda aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\varphi^{(0)}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^{(0)} \varepsilon^j = \varphi^{(0,\perp)}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^{(0,\perp)} \varepsilon^j \quad (3.46)$$

$$\phi^{(0)}(y, \varepsilon) = \left( \phi^{(0,\perp)}(\varepsilon), \phi^{(0,\perp)}(\varepsilon) \right)^{-\frac{1}{2}} \phi^{(0,\perp)}(y, \varepsilon) \quad (3.47)$$

Yukarıdan anlaşılabilceği gibi  $\varphi^{(0)}(\varepsilon)$ 'ın saptırım katsayıları  $\varphi^{(0,\perp)}(\varepsilon)$  katsayıları ile aynıdır. Buna karşın  $\phi^{(0)}(y, \varepsilon)$ 'ın saptırım bileşenlerini elde etmek çok daha zordur. Bu olgu aşağıdaki gibi gerçekleştirilebilir.

- (3.47)'nin her iki yanını dördüllendir ve gerektiğinde Cauchy çarpımı kullanılarak her iki yan da  $\varepsilon$ 'un üslüleri olarak yazılabilir.

- Elde edilen eşitliğin sağ yanı iki üslü toplamızının oranını içermektedir. Bu yüzden birinci aşamada elde edilen eşitliğin iki yanı da sağ yanın paydasıyla çarpılır.
- İkinci aşamada elde edilen eşitliğin her iki yanında, yeniden Cauchy çarpımı kullanılarak tek bir toplamızı oluşturacak biçimde düzenleyişler yapılır.
- Sağ yan ve sol yan için elde edilen toplamızilerin eş  $\varepsilon$  üslerinin katsayıları karşılıklı olarak eşitlenip  $\phi^{(0)}(y, \varepsilon)$ 'nin bileşenleri olan  $\phi_j^{(0, \pm)}(y)$  işlevleri elde edilir.

### 3.2 Bir-Özdüzeyle Çekirdeklerle Doğrulaş

Bu altbölümde, geliştirilen yöntem doğrultusunda elde edilen bulguların doğruluğunu denetlemek için özel yapıda bir çekirdek içeren tümlev işlevi gözönüne alınacaktır. Bu özel yapılı çekirdek, her biri iki ayrı bağımsız değişkene bağımlı iki tekdeğişkenli işlevin çarpımına eşit olarak seçilecektir. Bundan ötürü ilgili çekirdeğe bir özdüzeyle (ing: one-ranked) çekirdek denilebilir [55]. Bu özellikleri içeren çekirdek

$$K(x, \xi) \equiv \kappa(x) \kappa(\xi), \quad x, \xi \in [a, b] \quad (3.48)$$

biçiminde yazılabilir.  $\kappa$  işlevi az önce sözü edilen tekdeğişkenli işlevi simgelemektedir. Bakışımın sağlanabilmesi için (3.48)'deki çekirdeği oluşturan tekdeğişkenli işlevler aynı seçilmiştir. Bu işlev olan  $\kappa$  aşağıdaki sonluluk özelliğini sağlamaktadır.

$$\|\kappa\| \equiv \left( \int_a^b dx \kappa(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (3.49)$$

Böylelikle (3.48) bağıntısında verilen çekirdek, bir-özdüzeyle ve bakışık bir Hilbert-Schmidt tümlev işlevinin çekirdeği olarak nitelendirilebilir. Çekirdeği (3.48) aracılığıyla verilen Hilbert-Schmidt tümlev işlevinin özelsiz bir  $[a, b]$  kapalı aralığı üzerinde tanımlanan özdeğer sorunu

$$\frac{\kappa(x)}{b-a} \int_a^b d\xi \kappa(\xi) \phi(\xi) = \varphi \phi(x) \quad (3.50)$$

olarak verilir. Buradan özişlevin  $\kappa$  ile orantılı ya da  $\kappa$ 'ya dikgen olduğu kolaylıkla görülebilir. Dikgenlik durumunda, ilgili işlevin sayılabilir sonsuzlukta sıfır özdeğeri varken, sıfır olmayan özdeğer durumu ise bu özdeğer ile ilintili olan özişlevin  $\kappa$  ile

orantılı olduğu duruma karşılık gelir. Sıfır olmayan özdeğer ve karşılık getirilecek olan özişlev için çözüm yapıldığında

$$\varphi = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b d\xi \kappa(\xi)^2, \quad \phi(x) = \frac{(b-a)^{\frac{1}{2}} \kappa(x)}{\left(\int_a^b d\xi \kappa(\xi)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\kappa(x)}{\sqrt{\varphi}}. \quad (3.51)$$

sonuçları elde edilir. Bulunan özdeğer ve özişlev (3.2a) ve (3.2b) bağıntılarında tanımlanan afin dönüşümler yardımıyla ve (3.4)'deki tanımlar kullanılarak

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta \kappa(x_{mp} + \varepsilon\eta)^2, \\ \phi(x, \varepsilon) &= \frac{\sqrt{2} \kappa(x_{mp} + \varepsilon y)}{\left(\int_{-1}^1 d\xi \kappa(x_{mp} + \varepsilon\eta)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\kappa(x_{mp} + \varepsilon y)}{\sqrt{\varphi(\varepsilon)}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

yapısına getirilebilirler. Dikgen saptırım bileşenleri ile ilerlemek istenildiğinden

$$\begin{aligned} \varphi^{(\perp)}(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta \kappa(x_{mp} + \varepsilon\eta)^2, \\ \phi^{(\perp)}(y, \varepsilon) &= \frac{\sqrt{2} \kappa(x_{mp} + \varepsilon y)}{\int_{-1}^1 d\eta \kappa(x_{mp} + \varepsilon\eta)} \end{aligned} \quad (3.53)$$

bağıntılarına kolaylıkla geçiş yapılabilir. (3.53) eşitliklerinden  $\varphi^{(\perp)}$  ve  $\phi^{(\perp)}$  büyüklüklerinin ancak  $\kappa$ 'nın  $\varepsilon$  üsleri türünden toplamdiziye açılabilirdiğinde bir toplamdizi gibi yazılabileceği anlaşılmaktadır. Böylelikle  $\kappa$  için elde edilen toplamdizinin yakınsak olduğu  $\varepsilon$  değerleri için

$$\kappa(x_{mp} + \varepsilon y) = \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j \varepsilon^j y^j, \quad \kappa_j \equiv \frac{\kappa^{(j)}(x_{mp})}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.54)$$

yazılabilir ve bu bağıntılar yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left( \sum_{k=0}^{2j} \kappa_k \kappa_{2j-k} \right) \varepsilon^{2j}, \\ \phi^{(\perp)}(y, \varepsilon) &= \frac{\sqrt{2}}{2\kappa_0} \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j \varepsilon^j y^j \end{aligned} \quad (3.55)$$

sonuçları elde edilir. İlgili çekirdeğin katsayıları arasında, tüm  $j$  ve  $k$  eksi olmayan tamsayı değerleri için,  $K_{j,k} = \kappa_j \kappa_k$  eşitliklerini yazmak olanaklıdır. Bu bağlamda, (3.55) bağıntılarıyla elde edilecek olan katsayıların (3.41), (3.42), (3.43), (3.44) ve (3.45) eşitliklerindeki anlatımlarla birebir örtüştüğü görülmektedir [46].

Yukarıdaki bağıntılardan anlaşılacağı gibi, üzerinde çalışılan bir-özdeğerli işlecin özikilileri için geliştirilen saptırım toplamdizisinin yakınsaklığı,  $\kappa$ 'nın, aralık

evrencilleştirimiyle açığa çıkan  $\varepsilon$ 'a göre davranışına bağlıdır. Bilindiği gibi  $\kappa$ 'nın  $\varepsilon$  türünden üslü toplam dizisinin doğrucul birleştirim katsayıları Taylor toplam dizisi katsayılarıdır. Buradan da ilgili toplam dizinin bir Taylor toplam dizisi olduğu yargısına varılır. Dolayısıyla bu toplam dizisi,  $\varepsilon$ 'un bulunduğu karmaşık uzayda bulunan ve yarıçapı açılım noktası ile en yakın teklik noktasının arasındaki uzaklık olan bir açık teker (ing: open disk) içerisinde yakınsar [30, 31, 51]. Tümlev aralığı bu tekerin içerisinde kaldığı sürece, saptırım toplam dizisi boyu 1'den büyük olan tüm  $\varepsilon$  değerleri için yakınsar. Bununla birlikte, ilgili teker, tümlev aralığının tümünü içermiyorsa,  $\varepsilon$  ilgili tümlevleyiş aralığının küçültümü için 1'den küçük olacak biçimde bir değer almalıdır. Böylelikle, ilgili tümlevleyiş aralığı, üzerinde çalışılan tekerin içerisinde kalan bir doğru parçası durumuna getirilmiş olur. Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgiler, bir sonraki altbölüm olan yakınsama çözümleyişinde verilecektir.

Bu bölümü sonlandırmadan, bir-özdüzeyle işlecin sıfırdan değişik özdeğeri ile ilintili özışleci için elde edilen saptırım bileşenlerinin dördüncü kerteğe kadar olanları, karşılaştırım yapabilmek açısından, açıkça verilecektir [46]. Bu bileşenler

$$\varphi_0 = \kappa_0^2, \quad \phi_0^{(\perp)}(y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.56)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \phi_1^{(\perp)}(y) = \frac{\sqrt{2}\kappa_1}{2\kappa_0}y \quad (3.57)$$

$$\varphi_2 = \frac{\kappa_1^2}{3} + \frac{2\kappa_0\kappa_2}{3}, \quad \phi_2^{(\perp)}(y) = \frac{\sqrt{2}\kappa_2}{2\kappa_0} - \frac{\sqrt{2}\kappa_2}{6\kappa_0} \quad (3.58)$$

$$\varphi_3 = 0, \quad \phi_3^{(\perp)}(y) = \frac{\sqrt{2}\kappa_3}{2\kappa_0}y^3 - \frac{\sqrt{2}\kappa_1\kappa_2}{6\kappa_0^2}y \quad (3.59)$$

$$\varphi_4 = \frac{\kappa_2^2}{5} + \frac{2\kappa_0\kappa_4}{5} + \frac{2\kappa_1\kappa_3}{5},$$

$$\phi_4^{(\perp)}(y) = \frac{\sqrt{2}\kappa_4}{2\kappa_0}y^4 - \frac{\sqrt{2}\kappa_2^2}{6\kappa_0^2}y^2 + \frac{\sqrt{2}\kappa_2^2}{18\kappa_0^2} - \frac{\sqrt{2}\kappa_4}{18\kappa_0} \quad (3.60)$$

olarak belirlenmekle birlikte, incelendiklerinde (3.41), (3.42), (3.43), (3.44) ve (3.45) eşitliklerinde verilen bağıntılar ile birebir örtüşüm sağlandığı açıktır.

### 3.3 Yakınsayış Çözümleyişi

Bu altbölümde, 3.1 altbölümünde ayrıntıları verilen saptırım tabanlı özgün yöntem ile elde edilen saptırım toplam dizilerinin yakınsaklığı üzerinde durulacaktır [47]. Bu bağlamda, gerek özdeğer, gerekse de özışlev için oluşturulan  $\varepsilon$  üslü toplam dizilerinin

yakınsaklık tekerlerinin (ing: convergence disks) boş olmadıkları gösterilecektir. Bu da, bir diğer deyişle, ilgili toplam dizilerin yakınsaklık yarıçaplarının sıfırdan büyük olduğunun gösterimi anlamına gelmektedir.

Bu amaçla, üzerinde çalışılan tümlev işlecin çekirdeğinin, bir an için aşağıdaki gibi ayrıştırılabildiğini düşünelim.

$$K(x, \xi) \equiv \sum_{j,k=1}^{\infty} \kappa_{j,k} \chi_j(x) \chi_k(\xi) \quad (3.61)$$

Yukarıdaki ayrıştırım her ne kadar bir izgecil ayrıştırımı andırırsa da, burada,  $\kappa$  sayılları ve  $\chi$  işlevleri sırasıyla özdeğer ve eşlik eden öz işlevleri göstermemektedir. Yani, bu ayrıştırım bir izgecil ayrıştırım değildir. Öte yandan, işlemlerin ve çözümleyişin kolaylığı açısından  $\chi$  işlevlerinin birbirleri arasında dikgen ve birimboylu olduklarını varsayalım. Bu varsayımlar altında, (3.61) ayrıştırımında gözükten sayıllar

$$\kappa_{j,k} \equiv \int_a^b dx \int_a^b d\xi \chi_j(x) \chi_k(\xi) K(x, \xi), \quad j, k = 1, 2, \dots \quad (3.62)$$

biçiminde eşsiz olarak belirlenebilirler. Bunun yanısıra  $K(x, \xi)$  bir Hilbert-Schmidt çekirdeği olduğundan ve yine  $\chi$  işlevlerinin karşılıklı dikgenliğinden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir

$$\int_a^b dx \int_a^b d\xi K(x, \xi)^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} \kappa_{j,k}^2 < \infty \quad (3.63)$$

Buradan da  $\kappa$  sayılları için ilgili üst kıyılar

$$|\kappa_{j,k}| < \left( \int_a^b dx \int_a^b d\xi K(x, \xi)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad j, k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.64)$$

eşitsizlikleriyle verilir. Bu aşamadan hemen sonra  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin boyunu (ing: operator norm) belirlemek için girişimlerde bulunulacaktır. Bu amaçla, ilk olarak, aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}^2 f(x) &\equiv \int_a^b d\xi \int_a^b d\bar{\xi} K(x, \bar{\xi}) K(\bar{\xi}, \xi) f(\xi) = \\ &= \int_a^b d\xi \sum_{j,k=1}^{\infty} \kappa_{j,k}^2 \chi_j(x) \chi_k(\xi) f(\xi), \quad x \in [a, b]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Buradan,  $f$ ,  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin tanım kümesinde yer alan herhangi bir işlevi simgelemek üzere,  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin özüne eşliği (ing: self-adjointness) kullanılarak

$$\left( \widehat{\mathcal{F}} f, \widehat{\mathcal{F}} f \right) \equiv \left( f, \widehat{\mathcal{F}}^2 f \right) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \kappa_{j,k}^2 \int_a^b dx f(x) \chi_j(x) \int_a^b dx f(\xi) \chi_j(\xi) \quad (3.66)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu bulgulardan hemen sonra, iç çarpımlar için verilen Cauchy-Schwarz eşitsizliği [26] ve yine  $\chi$  işlevlerinin karşılıklı dikgenlik ve birimboyluluklarından

$$\left| \int_a^b dx f(x) \chi_j(x) \right| \leq \left( \int_a^b dx f(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\| \quad (3.67)$$

eşitsizliğini yazmak olanaklıdır. Buradaki  $\|\cdot\|$  gösterimi verilen bir  $f$  işlevinin  $L_2$ -boyunu betimlemektedir.

(3.67) eşitsizliğinin (3.66)'da kullanımı aşağıdaki eşitsizliğe geçmemize olanak verir.

$$(f, \widehat{\mathcal{F}}^2 f) < \sum_{j,k=1}^{\infty} \kappa_{j,k}^2 \|f\|^2 < \|f\|^2 \int_a^b dx \int_a^b d\xi K(x, \xi)^2 \quad (3.68)$$

Burada  $f$  işlevinin  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin tanım kümesinde bulunuşunu göz önüne alarak bu işleç için bir boy üst kıyası

$$\|\widehat{\mathcal{F}}\| < \left( \int_a^b dx \int_a^b d\xi K(x, \xi)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.69)$$

biçiminde verilebilir. Bu ana dek elde edilen olgular  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin (3.13)'de verilen  $\varepsilon$  bağımlılığı ile birleştirilirse

$$\|\widehat{\mathcal{F}}\| < \sum_{j=0}^{\infty} \|\widehat{\mathcal{F}}_j\| |\varepsilon|^j \quad (3.70)$$

eşitsizliğine geçilir. (3.69) ve (3.70)'te kullanılan  $\|\cdot\|$  yazımı verilen bir işlecini boyunu belirtmekle birlikte açık tanımını aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\|\widehat{\mathcal{F}}\| \equiv \sup_{f \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{F}})} \frac{\|\widehat{\mathcal{F}} f\|}{\|f\|} \quad (3.71)$$

Yukarıdaki tanımda kullanılan  $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{F}})$  yazımı  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecini tanım kümesini belirtmektedir. (3.10) ve (3.12) bağıntılarından anımsanabileceği gibi (3.70) eşitsizliğinin sağ yanında bulunan boy büyüklükleri  $K$  çekirdeğinin  $(x, \xi) = (x_{mp}, x_{mp})$  noktasındaki göre türevlerinin (ing: partial derivatives) boy sınırlarıyla ilintilidir. İlgili göre türevlerin sınırlarını bulabilmek adına  $\chi_j(x)$  işlevi için aşağıda verilen Cauchy türev bağıntısını [56] göz önüne almak gerekir.

$$\chi_j^{(n)}(z_x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C(x_{mp}, r_j)} d\xi \frac{\chi_j(\xi)}{(\xi - z_x)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.72)$$



Burada  $C(x_{mp}, r_j)$  ile saat yönünün evriği yöndeki çembencil çevirge (ing: circular contour) simgelenmektedir [56]. Bu çevirgenin özeği (ing: center) karmaşık düzlemde  $z_x = x_{mp} + i \cdot 0$  noktasında olup yarıçapı ise  $r_j$  ile belirtilmiştir. Her ne kadar, burada, saat yönünün evriği yönde tanımlanmış çembencil bir çevirge alındıysa da,  $[a, b]$  aralığını içine alan ve içerisinde çekirdeğin herhangi bir tekillik noktasını barındırmayan bir kapalı eğri de çevirge olarak seçilebilir.

(3.72) bağıntısı  $z_x = x_{mp}$  alınıp  $\zeta = x_{mp} + r \exp(\theta)$  dönüşümü yardımıyla aşağıdaki gibi yalınlaştırılabilir.

$$\chi_j^{(n)}(x_{mp}) = \frac{n!}{2\pi r_j^n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} \chi_j(x_{mp} + r_j e^{i\theta}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.73)$$

Yukarıdaki yalın anlatımda, tümlevler için üçgen eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuca varılır.

$$\left| \chi_j^{(n)}(x_{mp}) \right| \leq \frac{n!}{r_j^n} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \chi_j(x_{mp} + r_j e^{i\theta}) \right| \equiv \frac{n!}{r_j^n} B_\chi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.74)$$

(3.74) bağıntısından,  $B_\chi$  büyüklüğünün  $x_{mp}$  ve  $r_j$  değerlerine bağımlılığı açıkça görülmektedir. Bu büyüklüğün,  $\chi_j$ 'lerin tekilliklerini barındırmayan ve çembencil olmayan özel çevirgelerin içerisinde  $r_j$  değerleri sınırsız büyüdükçe sıfırlanışı beklenmektedir. Bu tür özel çevirgelerin seçimi ilgili çözümleyişleri zorlaştıracığından, çözümleyişler çembencil çevirgeler ile sürdürüleceklerdir. Bu yüzden, ilgileneceğimiz durumda  $r_j$  değeri sonsuza gittiğinde  $B_\chi$  sınırsız büyüyecektir. Bu olgu, boş olmayan bir yakınsaklık tekeri elde edilmesinin amaçlanışından ötürü, sorun oluşturmayacaktır.

Bu aşamadan sonraki iş, yukarıda yapılan çözümleyişleri ikideğışkenli çekirdeğe taşımak olacaktır. Bu amaçla, ilk olarak, sıfırdan değışik en küçük bir  $r_j$ 'nin var olduğu varsayılp bu değıer  $r$  ile gösterilecektir. Bu bağlamda aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$K^{(n_1, n_2)}(x, \xi) = \frac{n_1!}{2\pi i} \oint_C d\zeta_1 \frac{n_2!}{2\pi i} \oint_C d\zeta_2 \frac{\sum_{j,k=1}^{\infty} \kappa_{j,k} \chi_j(\zeta_1) \chi_k(\zeta_2)}{(\zeta_1 - z_x)(\zeta_2 - z_\xi)}, \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (3.75)$$

Yukarıdaki bağıntıda  $C$  yine saat yönünün evriği yönde alınmış çembencil bir çevirgedir ve özeği, yine,  $x_{mp} + i \cdot 0$  noktasındadır. Bu çevirge, yukarıdaki tek karmaşık değışken için dile getirilmiş olguların ötesinde  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  eksenleri tarafından örtölmüş iki boyutlu karmaşık düzlem üzerinde alınmış bir çevirgedir. Bunların yanısıra,  $x$  ve  $\xi$

sırasıyla  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$  karmaşık düzlemlerinin gerçel eksenleri üzerinde bulunan  $[a, b]$  aralığı içerisindeki noktaları simgelemektedir. Bunun da ötesinde  $z_x$  ve  $z_\xi$  kolaylık ve anlaşılabilirlik açısından, sırasıyla  $x + i \cdot 0$  and  $\xi + i \cdot 0$  olarak alınmıştır.  $n_1$  ve  $n_2$  ise sırasıyla  $x$  ve  $\xi$ 'ye göre türevlerin kertesini belirtmektedir.

Öte yandan, Cauchy türev bağıntısının, üzerinde çalışılan ikideğişkenli çekirdek için kuramcıl olarak yeniden düzenlenimi ile

$$K^{(n_1, n_2)}(x, \xi) = \frac{n_1!}{2\pi i} \oint_C d\zeta_1 \frac{n_2!}{2\pi i} \oint_C d\zeta_2 \frac{K(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_x)(\zeta_2 - z_\xi)}, \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (3.76)$$

bağıntısı elde edilir [47]. Bu bağıntının (3.75) bağıntısı ile karşılaştırımından

$$K^{(n_1, n_2)}(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \kappa_{j,k} \chi_j(\zeta_1)^{(n_1)} \chi_k(\zeta_2)^{(n_2)} \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (3.77)$$

eşitliğine varılır. Bu eşitlik (3.75) eşitliğinin salt  $(x, \xi)$  gerçel değerleri için değil de içlerinde buldukları karmaşık düzlemlerin içerisinde tekillik bulunmamak koşuluyla  $(\zeta_1, \zeta_2)$  karmaşık değişkenleri için de sağlandığını gösterir.

Buradan sonra (3.76)'yı kullanarak çekirdeğin göre türevleri için kıyı belirlemek güç olmayacaktır. Eğer yukarıda anlatılan yol izlenirse

$$\begin{aligned} \left| K^{(n_1, n_2)}(x_{mp}, x_{mp}) \right| &< \frac{n_1! n_2!}{r^{n_1+n_2}} \max_{(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi]^2} \left| K(x_{mp} + re^{i\theta_1}, x_{mp} + re^{i\theta_2}) \right| \\ &\equiv \frac{n_1! n_2!}{r^{n_1+n_2}} B_K, \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.78)$$

elde edilir. Tez bir bakışla  $B_K$ 'nin  $x_{mp}$  ve  $r$ 'ye bağımlılığı görülmektedir. (3.11)'deki tanım gözönüne alınır, (3.78) eşitliği bizi amaçladığımız sonuca ulaştırır.

$$\left| K_{k, j-k} \right| < \frac{B_K}{r^j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad k = 0, 1, 2, \dots, j \quad (3.79)$$

Böylelikle göre türevler için  $x_{mp}$  ve  $r$ 'ye bağlı bir üst kıyı elde edilmiş olur.

Tüm bunların ötesinde, aşağıda verilen işleç tanımı, ileride yapılacak olan çözümleyişleri kolaylaştırmaktadır. Bu doğrultuda  $f$ , yeni tanımlanan işlecin tanım kümesindeki herhangi bir işlev olmak üzere

$$\widehat{\mathcal{O}}_{k, j-k} f(y) \equiv \frac{y^k}{2} \int_{-1}^1 d\eta \eta^{j-k} f(\eta), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad k = 0, 1, 2, \dots, j \quad (3.80)$$

biçiminde yeni bir işleç gündeme getirilecektir. Bu yeni tanım ve (3.12) tanımı yardımıyla aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklıdır.

$$\widehat{\mathcal{J}}_j = \sum_{k=0}^j K_{k,j-k} \widehat{\mathcal{O}}_{k,j-k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.81)$$

Yukarıdaki bu tanımdan aşağıdaki eşitliğe ulaşılabilir

$$\left\| \widehat{\mathcal{J}}_j \right\| \leq \sum_{k=0}^j |K_{k,j-k}| \quad (3.82)$$

Yukarıdaki eşitsizliğin yazımındaki en önemli neden aşağıdaki çözümleyiştir.

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{O}}_{k,j-k} \right\| &= \left( \sup_{f \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{J}})} \left\{ \frac{1}{\|f\|^2} \left( \widehat{\mathcal{O}}_{k,j-k} f, \widehat{\mathcal{O}}_{k,j-k} f \right) \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \sup_{f \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{J}})} \left\{ \frac{1}{\|f\|^2} \frac{1}{(2k+1)} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta \eta^{j-k} f(\eta) \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{(2k+1)(2j-2k+1)}} < 1, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.83)$$

(3.83) bir kez daha (3.79) ile bir araya getirilip (3.82)'de kullanılırsa

$$\left\| \widehat{\mathcal{J}}_j \right\| < \frac{(j+1)B_K}{r^j}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3.84)$$

eşitsizlikleri elde edilir ve buradan da (3.70)'in kullanımıyla

$$\left\| \widehat{\mathcal{J}}(\varepsilon) \right\| < \frac{B_K}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2} \quad (3.85)$$

sonucuna ulaşılır.

Bu çözümleyişlerden sonra, artık, (3.39) bağıntısına geri dönüp aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left| \varphi_j^{(\perp)} \right| &< \left\| \widehat{\mathcal{J}}_j \phi_0^{(\perp)} + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} - \varphi_{k+1}^{(\perp)} \widehat{I} \right] \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right\| \\ &< \left\| \widehat{\mathcal{J}}_j \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} - \varphi_{k+1}^{(\perp)} \widehat{I} \right] \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right\| \\ &< \frac{(j+1)}{r^j} B_K + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \left\| \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} \right\| + \left| \varphi_{k+1}^{(\perp)} \right| \left\| \widehat{I} \right\| \right] \left\| \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right\| \\ &< \frac{(j+1)}{r^j} B_K + B_K \sum_{k=0}^{j-2} \frac{(k+2)}{r^{k+1}} \left\| \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right\| + \sum_{k=0}^{j-2} \left| \varphi_{k+1}^{(\perp)} \right| \left\| \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right\|, \\ & \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.86)$$

Bu eşitsizlik, ara işlemler sonucunda aşağıda verilen eşitsizliği ortaya çıkarır

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \varphi_j^{(\perp)} \right| |\varepsilon|^j &< \frac{B_K}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2} + B_K \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2} - 1 \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \phi_j^{(\perp)} \right\| |\varepsilon|^j - 1 \right) \\ &+ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left| \varphi_j^{(\perp)} \right| |\varepsilon|^j - |K_{0,0}| \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \phi_j^{\perp} \right\| |\varepsilon|^j - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ayrıca (3.40)'teki tanıma da geri döndüğünde

$$\begin{aligned} \left\| \phi_j^{(\perp)} \right\| &< \frac{1}{|K_{0,0}|} \left\| \widehat{P}_0^{\perp} \right\| \left\| \left[ \widehat{\mathcal{J}}_j \phi_0^{(\perp)} - \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} - \phi_{k+1}^{(\perp)} \widehat{I} \right] \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right] \right\| \\ &< \frac{1}{|K_{0,0}|} \left\| \widehat{\mathcal{J}}_j \right\| + \frac{1}{|K_{0,0}|} \sum_{k=0}^{j-2} \left\| \widehat{\mathcal{J}}_{k+1} \right\| \left\| \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right\| \\ &+ \frac{1}{|K_{0,0}|} \sum_{k=0}^{j-2} \left| \varphi_{k+1}^{(\perp)} \right| \left\| \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right\| \\ &< \frac{B_K}{|K_{0,0}|} \frac{j+1}{r^j} + \frac{B_K}{|K_{0,0}|} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{k+2}{r^{k+1}} \left\| \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right\| \\ &+ \frac{1}{|K_{0,0}|} \sum_{k=0}^{j-2} \left| \varphi_{k+1}^{(\perp)} \right| \left\| \phi_{j-k-1}^{(\perp)} \right\| \\ &j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.88)$$

çözümleyişleri yapılabilir ve bu bulgular bizi aşağıdaki eşitsizliğe ulaştırır [47].

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \phi_j^{(\perp)} \right\| |\varepsilon|^j &< \frac{1}{|K_{0,0}|} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left| \varphi_j^{(\perp)} \right| |\varepsilon|^j - |K_{0,0}| \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \phi_j^{(\perp)} \right\| |\varepsilon|^j - 1 \right) \\ &+ \frac{B_K}{|K_{0,0}|} \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2} - 1 \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \phi_j^{(\perp)} \right\| |\varepsilon|^j - 1 \right) \\ &+ \frac{B_K}{|K_{0,0}|} \frac{1}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.89)$$

Bu aşamada, yapılanları daha yalın ve anlaşılabilir kılmak için bazı yeni tanımlayışlar yapmak akılcı olacaktır. Bu amaçla

$$\mathcal{M}_{\varphi}^{(sm)} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \left| \varphi_j^{(\perp)} \right| |\varepsilon|^j - |K_{0,0}| \quad (3.90)$$

ve

$$\mathcal{M}_{\phi}^{(sm)} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \phi_j^{(\perp)} \right\| |\varepsilon|^j - 1 \quad (3.91)$$

tanımları gündeme getirilecektir. (3.90) ve (3.91) tanımları sırasıyla  $\phi^{(\perp)}$  ve  $\phi^{(\perp)}$  için saptırımcıl boy büyütkelerini (ing: majorant) simgelemekte olup bu olgu ( $sm$ ) üstsırasayısı ile belirtilmektedir. Bu yeni tanımlar yardımıyla (3.87) eşitsizliği aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir

$$\mathcal{M}_\phi^{(sm)} < \left[ 1 - \mathcal{M}_\phi^{(sm)} \right]^{-1} \times \left[ \frac{B_K}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2} - |K_{0,0}| + B_K \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2} - 1 \right) \mathcal{M}_\phi^{(sm)} \right]. \quad (3.92)$$

Andıran biçimde (3.89) eşitsizliği de

$$\mathcal{M}_\phi^{(sm)} < \frac{1}{|K_{0,0}|} \mathcal{M}_\phi^{(sm)} \mathcal{M}_\phi^{(sm)} + \frac{B_K}{|K_{0,0}|} \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2} - 1 \right) \mathcal{M}_\phi^{(sm)} + \frac{B_K}{|K_{0,0}|} \frac{1}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2} - 1 \quad (3.93)$$

biçiminde yeni bir anlatıma kavuşturulabilir. Artık (3.90) ve (3.91) büyütkelerinin yakınsaklık yarıçapları  $\mathcal{M}_\phi^{(sm)}$  değerinin yakınsak olmasından öte 1'den küçük bir değer alması bağlamında elde edilmelidir. Bu doğrultuda (3.92) ve (3.93) eşitsizlikleri bir araya getirilip ara işlemler gerçekleştirildiğinde

$$\mathcal{M}_\phi^{(sm)2} + \mu_1 \left( \frac{|\varepsilon|}{r} \right) \mathcal{M}_\phi^{(sm)} + \mu_0 \left( \frac{|\varepsilon|}{r} \right) > 0 \quad (3.94)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikte salt yalınlaştırım için kullanılan yeni işlev tanımları da

$$\mu_1 \left( \frac{|\varepsilon|}{r} \right) \equiv \Theta \left( \frac{|\varepsilon|}{r} \right) - 1, \quad \mu_0 \left( \frac{|\varepsilon|}{r} \right) \equiv \Theta \left( \frac{|\varepsilon|}{r} \right) + \frac{B_K}{|K_{0,0}|} - 1, \quad (3.95)$$

$$\Theta \left( \frac{|\varepsilon|}{r} \right) \equiv \frac{B_K}{|K_{0,0}|} \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2} - 1 \right).$$

biçimindedir. (3.94) bağıntısının sol yanında bulunan ve  $\mathcal{M}_\phi^{(sm)}$  türünden ikinci dereceden olan çokteriminin kökleri küçükten büyüğe doğru sırasıyla  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  olarak adlandırılırsa, bu kökler  $\Delta(|\varepsilon|/r)$  ilgili ayırımı (ing: discriminant) simgelenmek üzere

$$\rho_1 \equiv -\frac{1}{2}\mu_1 \left( \frac{|\varepsilon|}{r} \right) - \sqrt{\Delta(|\varepsilon|/r)}, \quad \rho_2 \equiv -\frac{1}{2}\mu_1 \left( \frac{|\varepsilon|}{r} \right) + \sqrt{\Delta(|\varepsilon|/r)} \quad (3.96)$$

biçiminde elde edilirler. Bilindiği gibi  $\Delta(|\varepsilon|/r)$  büyüklüğünün değeri 0'dan küçük olduğunda ilgili köklerin karmaşıklığı söz konusu olmaktadır. Bunun yanısıra eksi olmayan ayıran değeri de iki gerçel kökün varlığını belirtmektedir. İki gerçel kökün bulunduğu durumda (3.94)'ün sol yanındaki çokterimli,  $\mathcal{M}_\phi^{(sm)}$  değeri  $\rho_1$ 'den küçük ya da  $\rho_2$ 'den büyük değerler alındığında artı değerler alacaktır.

(3.94)'ün sol yanındaki ikinci dereceden çokterimlinin ayırımı olan  $\Delta(|\varepsilon|/r)$  büyüklüğünün belirtik anlatımı aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{|\varepsilon|}{r}\right) &\equiv \frac{1}{4}\mu_1\left(\frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2 - \mu_0\left(\frac{|\varepsilon|}{r}\right) = \frac{1}{4}\left(\Theta\left(\frac{|\varepsilon|}{r}\right)^2 - 6\Theta\left(\frac{|\varepsilon|}{r}\right) + 1\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\Theta\left(\frac{|\varepsilon|}{r}\right) - 3 + 2\sqrt{2}\right)\left(\Theta\left(\frac{|\varepsilon|}{r}\right) - 3 - 2\sqrt{2}\right)\end{aligned}\quad (3.97)$$

ve bu anlatım, ayırının  $\Theta(|\varepsilon|/r)$  büyüklüğünün  $3 - 2\sqrt{2}$  ile  $3 + 2\sqrt{2}$  değerleri arasında eksi kaldığını söyler. Öte yandan,  $\varepsilon$  sıfır olduğunda  $\Theta(|\varepsilon|/r)$  büyüklüğünün de sıfır olacağı açıktır. Bununla birlikte ayıran değeri  $\varepsilon$ 'un  $\Theta(|\varepsilon|/r)$  değerini  $3 - 2\sqrt{2}$  yapan özel bir değerine kadar artar ve tam bu özel değerde sıfırlanır. Bu sıfırlanıştan hemen sonra da eksi değerler almaya başlar. Saptırım kuramı bağlamında, karmaşık düzlem üzerinde başlangıç noktasını içeren bir  $\varepsilon$  komşuluğu bulmak isteyeşimizden,  $\Theta(|\varepsilon|/r)$ 'nin, 0 ile  $3 - 2\sqrt{2}$  arasında (sıfırı da içeren) değerler aldığı  $|\varepsilon|/r$  değerlerine odaklanım gerekmektedir. Bu bağlamda

$$0 \leq \Theta\left(\frac{|\varepsilon|}{r}\right) < 3 - 2\sqrt{2}\quad (3.98)$$

eşitsizliği yazılabilir ve bu eşitsizlik  $\varepsilon$  saptırım değıştirgesi için aşağıdaki kuyunun konulmasına olanak sağlar

$$|\varepsilon| < \left(1 - \frac{\sqrt{B_K}}{\sqrt{B_K + (3 - 2\sqrt{2})|K_{0,0}|}}\right)r.\quad (3.99)$$

Yukarıdaki bağıntıda,  $\phi^{(\perp)}$  için verilen saptırım toplam dizisinin yakınsaklık yarıçapı görölmektedir. Bu olgu, aynı zamanda, onayı olanaklı bir durumdur. Bu doğrultuda üzerinde çalışılan ayıran daha da açık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\Delta\left(\frac{|\varepsilon|}{r}\right) = \frac{C}{\left(1 - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)^4} \sum_{j=1}^4 \left(\vartheta_j - \frac{|\varepsilon|}{r}\right)\quad (3.100)$$

öyle ki  $C$  katsayısı

$$C \equiv \frac{B_K^2 + 6|K_{0,0}| + |K_{0,0}|^2}{4K_{0,0}^2} \quad (3.101)$$

ve  $\vartheta$  büyüklüklerinin, küçükten büyüğe

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &\equiv 1 - \frac{\sqrt{B_K}}{\sqrt{B_K + (3 - 2\sqrt{2})|K_{0,0}|}}, & \vartheta_2 &\equiv 1 - \frac{\sqrt{B_K}}{\sqrt{B_K + (3 + 2\sqrt{2})|K_{0,0}|}} \\ \vartheta_3 &\equiv 1 + \frac{\sqrt{B_K}}{\sqrt{B_K + (3 + 2\sqrt{2})|K_{0,0}|}}, & \vartheta_4 &\equiv 1 + \frac{\sqrt{B_K}}{\sqrt{B_K + (3 - 2\sqrt{2})|K_{0,0}|}} \end{aligned} \quad (3.102)$$

biçimindek anlatımları vardır. (3.100), (3.101) ve (3.102) eşitliklerinden anlaşılabilir gibi  $|\varepsilon|/r$ 'nin bir işlevi olarak görülebilen ayıran  $|\varepsilon|/r = 1$  noktasında dört katlı ucaya (ing: pole) sahiptir. Bunun yanısıra, ilgili ayıranın,  $\vartheta$  değerlerinin  $|\varepsilon|/r$  değerine eşit olduğu noktalar üzerinde, dört dallanım noktasının (ing: branch points) var olduğu görülmektedir. Buradan, karmaşık düzlemde başlangıç noktasından başladığı anda ilk tekillığe  $\vartheta_1$  noktasında ulaşıldığı görülmektedir. Bu olgu da, bize, ayıranın Maclaurin toplam dizisinin yakınsaklık tekerinin özeği sıfır, yarıçapı ise  $\vartheta_1$  olan teker olduğunu söyler. Diğer bir deyişle, (3.100) eşitliğinde yapısı daha da açık olarak verilen ayıranın yakınsaklık yarıçapı, (3.99)'da verilen ile birebir örtüşmektedir. Bunların yanısıra  $\Theta(|\varepsilon|/r)$  büyüklüğünün de artı değerler aldığı ve aynı yakınsaklık hızıyla  $\rho_1(|\varepsilon|/r)$  değerine yakınsadığı kolaylıkla görülebilmektedir. Böylece  $|\varepsilon|/r$ 'ye bağlı  $\rho_1$  kökü  $\mathcal{M}_\phi^{(sm)}$  için bir üst kıyı olmuş olur. Bu da  $\mathcal{M}_\phi^{(sm)}$  büyütkesinin (3.99) ile verilen bölgede yakınsadığının göstergesidir.

$\mathcal{M}_\phi^{(sm)}$ 'nin verilen bölgede yakınsayışı,  $\mathcal{M}_\phi^{(sm)}$ 'nin de aynı bölgede yakınsayışı anlamına gelmemektedir. Buna karşın, (3.95) ve (3.96)'nın ilk eşitliklerinden de görülebileceği gibi  $\rho_1$ 'in yakınsaklık yarıçapı (3.99)'da verilen bölgenin içerisinde 1'den küçük kalmaktadır. Bu da yakınsaklık çözümleyişini istenilen sonuca ulaştırmış olur. Bu olgu da özişlev için oluşturulan saptırım toplam dizisinin en azından (3.99)'da belirlenen  $\varepsilon$  değerleri için yakınsadığı anlamına gelir [47].

Öte yandan,  $K_{0,0}$ 'ın sıfıra yaklaştığı ya da  $B_K$  değerinin sonsuza doğru büyüdüğü durumlarda yukarıda elde edilen yakınsaklık yarıçapının sıfıra doğru ilerlediğini söylemek gerekir.

Son olarak (3.99)'da belirtilen sonucun karamsar önkoşulları doğruğusunda gerçektirildiğini belirtmek önemlidir. Bu yüzden, ilgili varsayımlarda kötümserlik azaltılarak daha esnek sonuçların elde edileceği olgusu us'da tutulması gereken önemli bir olgudur.

### 3.4 Sayıcıl Uygulamalar

Bir önceki altbölümde, geliştirilmiş olan saptırım tabanlı yöntemin yakınsaklık çözümlenışinde önemli olan iki açıkıcıl öğeden söz edilmişti. Bunların ilki, saptırım değıştirgesi olan ve üzerinde çalışılan kapalı aralığın uzunluğunun yarı değıeri olarak da nitelenen  $\varepsilon$  değıştirgesi, diğeri ise odakta bulunan tümlev işlecini bakışık çekirdeğı olan  $K(x, \xi)$  ikideğışkenli işlevinin, çift katlı tümlev uzamı olan dördülün tam orta noktası olan  $(x_{mp}, x_{mp})$  noktasında aldığı değıeri olan  $K_{0,0}$  büyüklüğüdür.

Bu altbölümde, 3.3 altbölümünde elde edilen bilgilerin doğruğulayışı, sayıcıl uygulamaları aracılığıyla gerçektirilecektir. Bu doğruğultuda, savda geliştirilen saptırım tabanlı özgün yöntem, tıkız ve özüne eş Hilbert-Schmidt tümlev işlecilerine uygulanacak, ve imsiz değıerce en büyük özdeğere karşılık gelen özdeşleme etkin yaklaşımlar gerçektirime çalışılacaktır. Bu amaçla, üzerinde çalışılan sorunu bir kez daha anımsatım yerinde olacaktır. Bu bağlamda ilgili izgecil sorun aşağıdaki gibi

$$\widehat{\mathcal{F}}\phi(x) = \varphi\phi(x) \quad (3.103)$$

biçiminde tanımlanan ve  $\widehat{\mathcal{F}}$  ile bir tıkız Hilbert-Schmidt tümlev işlecini betimlendiğı özdeğer sorundur. Buradaki  $\widehat{\mathcal{F}}$  işleci açık olarak

$$\widehat{\mathcal{F}}g(x) \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b d\xi K(x, \xi)g(\xi) \quad (3.104)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. (3.104) bağıntısındaki  $K(x, \xi)$  işlevi bakışık bir çekirdek olmakla birlikte  $g$  işlevi ise öğeleri, çözümcül ve dördülü tümlevlenebilir işlevlerden oluşan bir Hilbert uzayının içerisinde kalan herhangi bir işlevdir. Yukarıda verilen iki bağıntıdan anlaşılabilir gibi (3.103) eşitliğı yapısı açık olarak (3.104)'te verilen işlecini özdeğer sorundur. Burada  $\varphi$  ile özdeğer,  $\phi(x)$  ile de eşlik eden özdeşleme simgelenmektedir.

3.1 altbölümde, (3.14) ve (3.15) toplamdzilerinden  $n$  sayıda terim olarak (kesme yaparak) imsiz değıerce en büyük özdeğer ve ona eşlik eden özdeşleme etkin



yaklaşımlar yapılabileceğinden söz edilmişti. Yaklaşım için alınacak terimlerin yapısında olan katsayılar da özdeğer ve ilintili özişlev için sırasıyla (3.39) ve (3.40) özyineli ilişkileri ile elde edilebiliyordu. Bu bağlamda,  $n$  eksi olmayan bir tamsayı olmak ve kesme kertesini olarak düşünölmek üzere ilgili izgecil büyüklöklere savda geliştirilen özgün yöntem kullanılarak yapılan  $n$ . kereden yaklaşımlar

$$\varphi^{(n)} = \sum_{j=0}^n \varphi_j \varepsilon^j \quad (3.105)$$

$$\phi^{(n)}(y) = \sum_{j=0}^n \varphi_j(y) \varepsilon^j \quad (3.106)$$

biçiminde olurlar.

Bu aşamadan sonra, değişik çekirdek yapıları içeren beş Hilbert-Schmidt tümlev işleci için sayıcl uygulamalar yapılacaktır. Yapılan uygulamalardan elde edilen sonuçların sunumları için çizelge ve çizimler kullanılacaktır. Yapılan tüm uygulamalar, MATLAB'in simgeci aygıt kutusu (ing: symbolic toolbox) [54] ile gerçekleştirilmekle birlikte, sayıcl belirleyiş gerektiren durumlarda 30 basamaklı aritmetik kullanılmıştır. Buna karşın, çizelge ve çizimlerin oluşturumunda 10 basamaklı sonuçlar göz önüne alınmıştır. Her bir uygulamada, ilgili işlecin imsiz değerce en büyük özdeğeri ve özişlevi yaklaştırdıktan sonra, ilgili özişlev, (3.2a) ve (3.2b) bağıntılarında verilen dönüşümlerin evrikleri kullanılarak asıl bağımsız değişkeni olan  $x$ 'in bulunduğu uzaya geri dönüştürölmüştür [47].

Bu altbölümdeki ilk uygulamada  $[0, \pi]^2$  dördölü üzerinde tanımlı ve çekirdeği  $K(x, \xi) = \cos(x + \xi)$  biçiminde bakışık bir çekirdek olan Hilbert-Schmidt tümlev işleci ile uğraşılacaktır. Bu durumda, ilgili işlecin özdeğer sorunu açık olarak aşağıdaki gibi olur

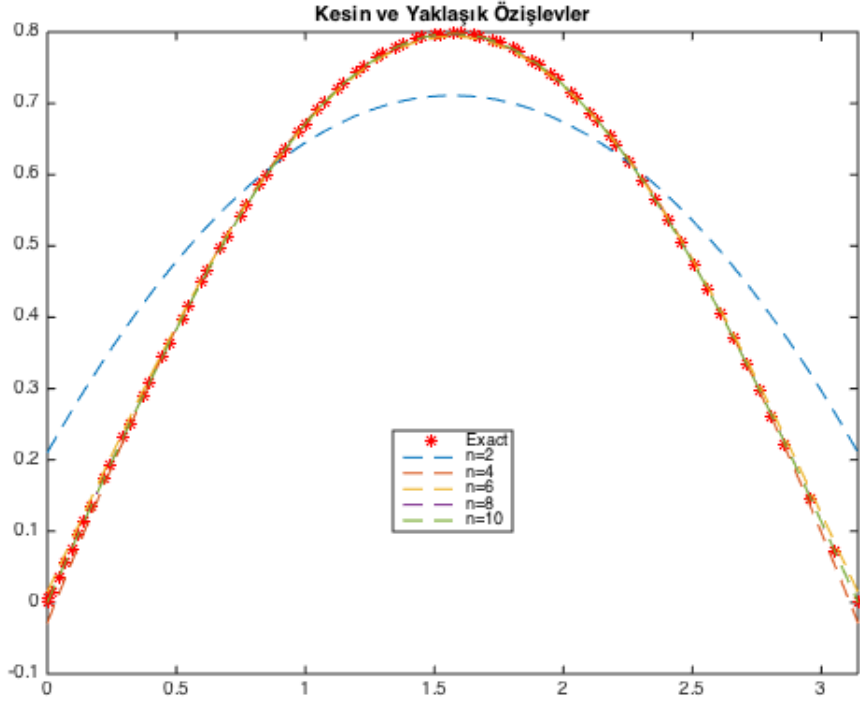
$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\xi \cos(x + \xi) \phi(\xi) = \varphi \phi(x), \quad 0 \leq x, \xi \leq \pi \quad (3.107)$$

(3.107)'de verilen sorun için çözümcöl olarak elde edilen en büyük özdeğer ve  $[0, \pi]$  aralığı üzerinde birimboylulaştırılmış eşlik eden özişlev ise

$$\varphi = -\frac{1}{2}, \quad \phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \quad (3.108)$$

dir.

şekil 3.1'deki al yıldızlar (ing: red asterisks) ile çizilmiş eğri (3.108)'deki  $\phi(x)$  işlevini betimlemektedir. Kesikli çizgiler kullanılarak çizilen değişik boyalı eğriler ise değişik



**Şekil 3.1 :**  $[0, \pi]^2$  dördülü üzerinde  $K(x, \xi) = \cos(x + \xi)$  çekirdeği için elde edilen kesin ve değişik kertelerden yaklaşık özişlevler.

$n$  kesme değerleri için elde edilen özişlev yaklaşımlarını göstermektedirler. İlgili çizimden kolaylıkla anlaşılacağı gibi, kesme kertesini olan  $n$  sayısı büyütüldükçe yaklaşımları belirten eğriler, çözümlül olarak elde edilen özişlev eğrisine gittikçe yaklaşmaktadır. Bu da, savda geliştirilen yöntemin (3.107) sorunu için iyi çalıştığını göstermektedir.

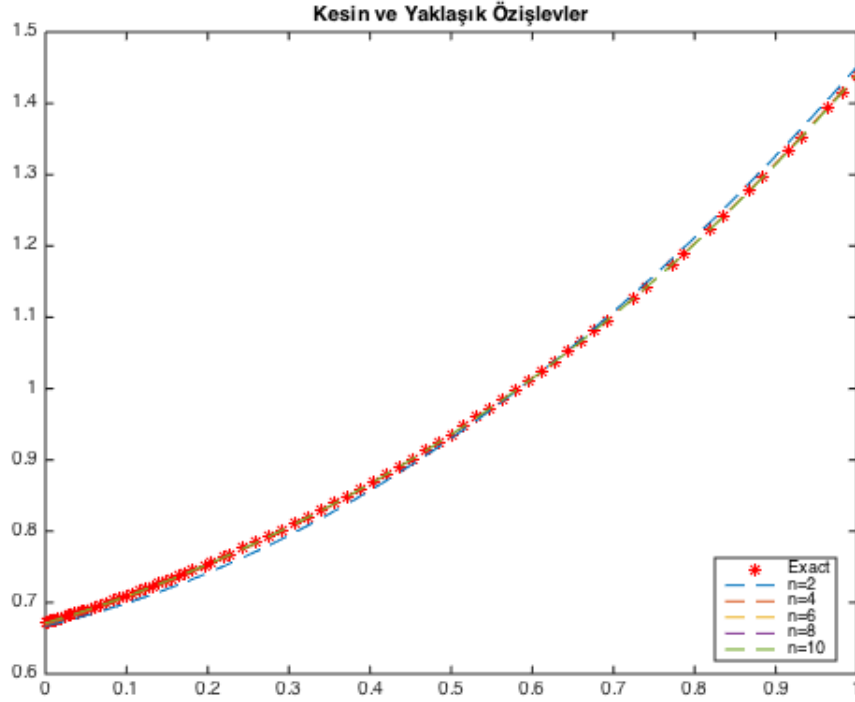
Geliştirilen sayısal yöntemin iyi çalıştığını gösterebilmek amacıyla başka bir örneğe geçelim. Bu amaçla aşağıdaki özdeğer sorununu ele alalım.

$$\int_0^1 d\xi (\exp(x + \xi) + \exp(-x - \xi)) \phi(\xi) = \varphi \phi(x), \quad 0 \leq x, \xi \leq 1 \quad (3.109)$$

Görüldüğü gibi (3.109)'teki sorun çekirdeği  $K(x, \xi) = \exp(x + \xi) + \exp(-x - \xi)$  olan özüne-eş bir tümlev işlecin özdeğer sorunudur. Bu sorunun kesin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\varphi = 3.518549337, \quad \phi(x) = 0.5071530526 e^x + 0.1643283852 e^{-x} \quad (3.110)$$

(3.110)'daki çözümde  $\varphi$ 'nin imsisiz değerce en büyük özdeğer,  $\phi(x)$ 'in ise bu özdeğere karşılık gelen özişlev olduğunu anımsatmak yerinde olacaktır. Bu anımsatımın yanısıra, ilgili özişlevin tümlevleyiş aralığı olan  $[0, 1]$  kapalı aralığı üzerinde birimboylulaştırılmış olduğu da us'tan çıkarılmaması gereken diğer bir olgudur.



**Şekil 3.2 :**  $[0, 1]^2$  dördülü üzerinde  $K(x, \xi) = \exp(x + \xi) + \exp(-x - \xi)$  çekirdeği için elde edilen kesin ve değişik kertelerden yaklaşık özişlevler.

Şekil 3.2'ye bakıldığında elde edilen bulgular, Şekil 3.1 yardımıyla elde edilenler ile örtüşmektedir. Diğer deyişle (3.109)'daki izgecil sorunun, ilgili özişlevi için savda geliştirilen yöntem yardımıyla yapılan yaklaşıtlar gerçek çözüme epeyce yakın olarak elde edilmişlerdir. Aynı zamanda kesme kertesinin arttırımı da yaklaşım niteliğinin artımına neden olmuştur. Bu da üzerinde çalışılan işlecin ilgili özişlevi için oluşturulan saptırım toplamdizisinin yakınsak olduğunu gösteren bir olgudur. Bunların yanısıra, kesme kertesini olan  $n$  değeri yalnızca 2 alındığında bile, elde edilen mavi yaklaşım eğrisi, kesin çözüme betimleyen al yıldızlı eğriye oldukça yakın olmaktadır. Bu da geliştirilen yöntemin, bu uygulama için, kesin çözüme hızlıca yakınsayabildiğini gösteren önemli bir sonuçtur.

Birinci ve ikinci sayıcl uygulamalarda elde edilen bulgular çizimler aracılığıyla gösterilmişti. Üçüncü ve dördüncü uygulamalarda ise elde edilen sonuçlar, yanılığ değerleri içeren çizelgeler aracılığıyla verileceklerdir. Sözü edilen yanılığ değerleri aşağıdaki gibi tanımlanan bir boy üzerinden oluşturulacaktır

$$\mathcal{E}_{\hat{\mathcal{F}}}^{(n)} \equiv \left\| \hat{\mathcal{F}}\phi^{(n)}(x) - \phi^{(n)}\phi^{(n)}(x) \right\| \quad (3.111)$$

(3.111)'den anlaşılacağı gibi, yukarıda verilen boy tanımı, üzerinde çalışılan tümlev işlecin özdeğer ve özışlevi için elde edilen  $n$ . kereden yaklaşırtırımın, çözümcül olarak elde edilmiş olan özdeğer ve özışleve ne kadar yakın olduğunu ölçen bir işlevimsidir (ing: functional).

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'de sırasıyla  $K(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + \alpha$  ve  $K(x, \xi) = (\sin x + \sin \xi)^2 + \alpha$  çekirdeklerini içeren Hilbert-Schmidt tümlev işleçleri için yapılmış uygulamalar görülmektedir. İlgili işleçlerin tümlevleyiş aralıkları  $[0, 1]$  olup oluşturulan yaklaşırtırımların kesme kerteleri 2'den 10'a kadar değişmektedir. Bunların yanısıra, her iki çekirdekte bulunan  $\alpha$  değeri 0, 1, 2 ve 3 değerlerini almaktadır.  $\alpha$  değerinin devreye alınıp arttırılmasındaki amaç  $K_{0,0}$  değerinin büyüklüğünün yakınsaklık hızına olan etkisinin gözlemlemek istemidir. Bu doğrultuda

**Çizelge 3.1 :**  $K(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + \alpha$  çekirdekleri için  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}$  değerleri.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 2$	0.3058541158	0.06552555495	0.03479261899	0.02348675897
$n = 3$	0.2957202050	0.01949684969	0.00908724508	0.00598567099
$n = 4$	0.2723142203	0.01091183805	0.00285846446	0.00124514938
$n = 5$	0.2185699508	0.00333991771	0.00074754979	0.00031684830
$n = 6$	0.2920357970	0.00202654015	0.00024148581	0.00006372537
$n = 7$	0.4039191668	0.00064208394	0.00006336569	0.00001619920
$n = 8$	0.3609702488	0.00041222958	0.00002103647	0.00000311996
$n = 9$	0.3229678191	0.00013416121	0.00000553887	0.00000079219
$n = 10$	0.4678002361	0.00008970415	0.00000188951	0.00000014367

**Çizelge 3.2 :**  $K(x, \xi) = (\sin x + \sin \xi)^2 + \alpha$  çekirdekleri için  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}$  değerleri.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 2$	0.1087618118	0.1310673464	0.1559638405	0.1777504152
$n = 3$	0.0161670763	0.0224812873	0.0383257043	0.0509865374
$n = 4$	0.0215991194	0.0127150173	0.0114682415	0.0114681111
$n = 5$	0.0199473315	0.0117589433	0.0084962798	0.0066523890
$n = 6$	0.0095557825	0.0047351387	0.0028909439	0.0020697334
$n = 7$	0.0067032300	0.0036004859	0.0024738915	0.0019006398
$n = 8$	0.0031470657	0.0013495405	0.0008534698	0.0006195582
$n = 9$	0.0019268517	0.0007688360	0.0004642808	0.0003363384
$n = 10$	0.0010379693	0.0003142169	0.0001615295	0.0001093335

oluşturulan Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'de, yakınsamanın sağlanabildiği  $\alpha$  değerleri için yaklaşırtırım kertesini arttırıldıkça ilgili  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}$  değerlerinin sıfıra doğru yakınsadığı görülmektedir. Bu da, ilgili işleçler için de, tıpkı birinci ve ikinci uygulamalarda

olduğu gibi, yakınsamanın sağlandığının bir göstergesidir. Bununla birlikte, Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2’de üzerinde durulan çekirdeklerde  $\alpha$  değerinin arttırımı, ilgili  $K_{0,0}$  değerlerini arttırmakta ve  $K_{0,0}$  değerlerinin büyümesi de yakınsaklık hızına olumlu yönde etki etmektedir. Bunun nedeni de 3.3 altbölümündeki yakınsaklık çözümlerinde değinilen  $|\varepsilon|/r$  değerindeki küçülmektir. Diğer taraftan, Çizelge 3.1’in ilk düşeyserasında ilgili çekirdekte  $\alpha = 0$  alındığında elde edilen  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}$  bulunmaktadır. Özenli bir bakışla, bu çekirdek için  $n$  değerinin arttırımı,  $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{(n)}$  değerlerinin küçülmesine değil de, evriği bir durum olarak, büyümesine yol açtığı gözlemlenmektedir. Bunun nedeni ilgili  $K_{0,0}$  değerinin yeterince büyük olamaması ve bu nedenle de  $|\varepsilon|/r$  değerinin yakınsaklık için yeterli küçük değere erişememesidir. Bu altbölümdeki son uygulama olarak, çekirdeği aşağıdaki gibi alınan Hilbert-Schmidt tümlev işlecini gözönüne alacağız.

$$K(x, \xi) = \tan x \sin 3\xi + \sin x \tan 3\xi \quad (3.112)$$

İlgili işlecin imsiz değerce en büyük özdeğeri ve eşlik eden özışlevin  $[0, 1]$  aralığı üzerinde birimboylulaştırılmışı ise

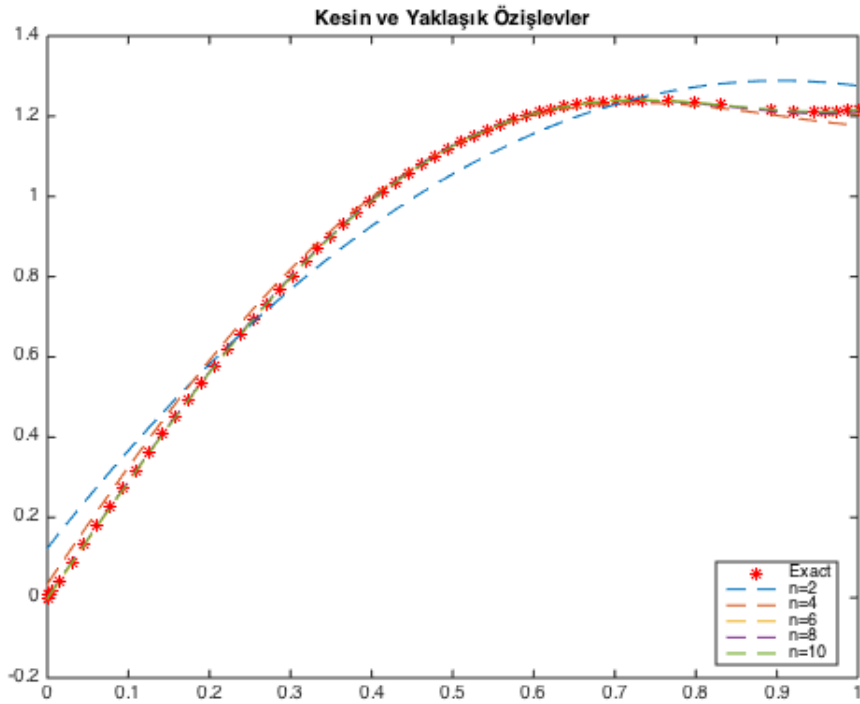
$$\varphi = 0.9497875425, \quad \phi(x) = 0.714188768 \tan x + 0.7371069732 \sin 3x \quad (3.113)$$

biçimindedir. Şekil 3.3’te görüldüğü gibi  $n$  değeri arttıkça kesme yapılan saptırım toplam dizisi yardımıyla elde edilen yaklaşımları betimleyen kesik çizgili eğriler, (3.113)’te verilen  $\phi(x)$  kesin çözümüne giderek yaklaşmaktadır. Bu yaklaşım her ne kadar  $n = 2$  değeri için çok iyi gibi gözükme de,  $n = 4$  ve özellikle de  $n = 6$  ve sonrası terimler için oldukça etkin durumdadır. Özışlev için elde edilen bu bulguların yanısıra, andıran durum. ilgili özdeğer için de söz konusudur. İlgili işlecin imsiz değerce en

**Çizelge 3.3 :**  $[0, 1]^2$  dördülü üzerinde  $K(x, \xi) = \tan x \sin 3\xi + \sin x \tan 3\xi$  çekirdeği için elde edilen kesin ve değişik kertelerden yaklaşık özdeğerler.

$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$
0.9513520311	0.9302160811	0.9514482660	0.9493304718	0.9501805816
$n = 12$	$n = 14$	$n = 16$	$n = 18$	$n = 20$
0.9497234628	0.9498129438	0.9497692427	0.9497916164	0.9497855518

büyük özdeğeri için elde edilen sonuçlar Çizelge 3.3 aracılığıyla sunulmuştur. Çizelge 3.3’teki değerlerden anlaşılacağı gibi,  $n$  yaklaşım kertesini arttırıldıkça özdeğerin



**Şekil 3.3 :**  $[0, 1]^2$  dördülü üzerinde  $K(x, \xi) = \tan x \sin 3\xi + \sin x \tan 3\xi$  çekirdeği için elde edilen kesin ve değişik kertelerden yaklaşık özişlevler.

(3.113)'te çözümcül olarak bulunmuş kesin değerine yaklaştığı açıktır. Bu da, (3.112) sorunu için elde edilen özişlev saptırım toplam dizisinin yanısıra özdeğer saptırım toplam dizisinin de ilgili kesin sonuca yakınsadığı anlamına gelmektedir.

#### 4. İKİDEĞİŞKENLİ ÇYÇG'NDE DESTEK ENİYİLEYİMİ

Savın birinci ve ikinci bölümlerinde de belirtildiği gibi, kullanılan destek işlevlerinin yapısının, yapılan ÇYÇG yaklaşımının etkinliğinde çok önemli bir yeri vardır. Bunun yanısıra, eğer yaklaşım yapılacak olan işlevin çözümcül yapısı baskın olarak çarpımcıl ise yönel ortalamalı destekler (YOD), ilgili yaklaşımda oldukça iyi iş görmektedirler. Kuşkusuz, kullanılacak desteklerin ilgili aralık üzerinde sıfırlanmaması gerektiği de ÇYÇG yaklaşımlarında unutulmaması gereken bir olgudur. Her ne kadar bu sav çalışmasına dek ÇYÇG'ndeki destek işlevleri YOD olarak seçilmişlerse de, bu seçimin bir ÇYÇG yaklaşımında kullanılacak en etkin destekler olduğunu söylemek olanaksızdır. Bunun yanısıra, üzerinde çalışılan çokdeğişkenli işlev ve uzama bağlı olarak, bu desteklerin sıfırlanımı ve ilgili ÇYÇG yaklaşımında kullanılmaması da olası bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenlerden ötürü, savın yazılış amaçlarından biri olan “Acaba uygun tüm işlevler ve uzamlar için çalışan eniyilenmiş bir destek işlevi takımı bulunabilir mi?” sorusu akla gelmektedir. Daha önceden belirtildiği gibi, savda, eniyilenmiş destek işlevlerinin elde edilimi amacıyla yeni, özgün ve etkin bir yöntem geliştirilmesi ereklenmiştir. Bu eniyileme sürecinin daha anlaşılabilir olması açısından, yapılan çözümleyişler, çokdeğişkenliliğin en yalın durumu olan ikideğişkenlilik durumu için gerçekleştirilecektir. Böylelikle ikideğişkenli durum için elde edilen bulgular, çokdeğişkenli durum için bir temel olarak ele alınabilecek ve çokdeğişkenliliğin getireceği güçlükler daha kolay irdelenebilecektir. Bu doğrultuda, iki değişkenli çözümcül bir  $f(x_1, x_2)$  işlevinin ÇYÇG açılımı aşağıdaki gibi yazılabilir

$$f(x_1, x_2) = f_0 s_1(x_1) s_2(x_2) + f_1(x_1) s_2(x_2) + f_2(x_2) s_1(x_1) + f_{1,2}(x_1, x_2) \quad (4.1)$$

Öyle ki,

$$x_1 \in [a_1, b_1], \quad x_2 \in [a_2, b_2]. \quad (4.2)$$

dir.

ÇYÇG bileşenlerinin elde edilimi için, 1. bölümde aktarılan ve (1.4)'teki eşitlikleri sağlayan herhangi bir uygun ağırlık işlevi seçimi yapılabilirse de, bu aşamada, ilgili

ağırlık işlevi değişmez işlev olarak seçilecektir. Bu seçimin nedeni, bu savdaki asıl amacın destek işlevi eniyileyişi oluşudur. Bu yüzden, yapılacak olan çözümleyişlerde, bir de ağırlık işlevinin getireceği yükten kaçınmak akılcı olacaktır. Bu bağlamda, seçilen ağırlık işlevi

$$W(x_1, x_2) = W_1(x_1)W_2(x_2) = \frac{1}{(b_1 - a_1)} \frac{1}{(b_2 - a_2)}. \quad (4.3)$$

biçiminde olacaktır. (4.3)'te verilen ağırlık işlevi ve henüz belirli olmayan destek işlevlerinin yardımıyla, özelsiz durumu (1.9)'te verilen sıfırcı ÇYÇG bileşeni aşağıdaki gibi elde edilir

$$f_0 = \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 s_1(x_1) s_2(x_2) f(x_1, x_2). \quad (4.4)$$

Öte yandan, (1.4)'te verilen birimboyluluk özelliği üzerinde çalışılacak olan destek işlevleri üzerinde önemli bir kısıt oluşturacağından, bu destek işlevlerinin şu an için birimboylu olmadıkları düşünülerek ilerlenilecektir.

Kullanılan destek işlevlerinin birimboylu olmadıkları gerçeği ile ilerlenerek ve (4.3)'teki değişmez işlev tanımı kullanılarak, özelsiz durumu açık olarak (1.12)'de verilen sıfırcı nitelik ölçennin ikideğişkenli durumu

$$\sigma_0 \equiv \frac{\left( \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) s_1(x_1) s_2(x_2) \right)^2}{\left( \int_{a_1}^{b_1} dx_1 s_1(x_1)^2 \right) \left( \int_{a_2}^{b_2} dx_2 s_2(x_2)^2 \right) \left( \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2)^2 \right)} \quad (4.5)$$

biçiminde elde edilir. Birinci bölümde belirtildiği gibi tüm nitelik ölçenlerinin değeri 0 ve 1 arasında değişmelidir. Bunun yanısıra, herhangi bir ölçenin değerinin üst kısı olan 1'e yakın oluşu, gerçekleştirilen ÇYÇG yaklaşımının ne kadar etkin olduğunun bir göstergesidir. Yaklaşım yapılırken elde edilecek en yalın ve işlenimi kolay yapı, tümüyle çarpımcıl olan ve  $f_0 s_1(x_1) s_2(x_2)$  biçiminde tanımlanan sıfırcı kereden ÇYÇG yaklaşımını olduğundan, üzerinde çalışılması gereken nitelik ölçeni sıfırcı nitelik ölçeni olan  $\sigma_0$ 'dır. Burada, "üzerinde çalışılmak istenen" anlatımıyla aktarılmak istenen olgu  $\sigma_0$  değerinin, üst kısı olan 1 değerine olabildiğince yaklaşımının sağlanmasıdır. Bu da,  $\sigma_0$  büyüklüğünün enbüyüklenimi (ing: maximization) anlamına gelmektedir. (4.5) tanımında görüldüğü gibi  $\sigma_0$ , aslında,  $s_1(x_1)$  ve  $s_2(x_2)$  işlevlerine bağımlı bir işlevimsidir (ing: functional). Bu yüzden, eniyileyiş (ing: optimization) gerçekleştirmek için,  $\sigma_0$ 'ın sırasıyla  $s_1$  ve  $s_2$ 'ye göre işlevcil türevi (ing: functional



derivative) [57] alınıp 0'a eşitlenimi sırasıyla aşağıdaki eşitlikleri verir

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_2 - a_2} \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) s_2(x_2) &= \lambda_1 s_1(x_1) \\ \frac{1}{b_1 - a_1} \int_{a_1}^{b_1} dx_1 f(x_1, x_2) s_1(x_1) &= \lambda_2 s_2(x_2)\end{aligned}\quad (4.6)$$

öyle ki  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$ 'nin açık yapıları aşağıdaki gibi olur

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\equiv \frac{\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) s_1(x_1) s_2(x_2)}{(b_2 - a_2) \int_{a_1}^{b_1} dx_1 s_1(x_1)^2} \\ \lambda_2 &\equiv \frac{\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) s_1(x_1) s_2(x_2)}{(b_1 - a_1) \int_{a_2}^{b_2} dx_2 s_2(x_2)^2}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Eniyilemiş sonucu açığa çıkan (4.6) denklemleri bir *birinci tür Fredholm tümlev denklemi* ikilisidir. Bu yüzden de, eniyilemiş için, bir Fredholm tümlev denklemi dizgesi (ing: system) çözülmelidir. Öte yandan, (4.6)'da verilen iki denklem, birbirini andıran, çözümcül ve boyca sonlu olan çekirdekler barındıran tıkHz tümlev işleçler içermektedir. Bu tür işleçler bilimcil yazında Hilbert-Schmidt tümlev işleci [24, 25] olarak bilinen yapılardır. Ek olarak (4.6)'da görülen her bir tümlev işleç bir destek işlevine etkimekte ve ilgili görüntü ise diğer destek işlevi ile orantılı olmaktadır. Bu olgu, (4.6)'da elde edilen denklemlerin, doğrucul cebirde (ing: linear) çok önemli yeri olan tekil değer ayrıştırımı (ing: singular value decomposition) [29] denklemleri ile ilintili olduğunu gösterir. Bu amaçla (4.6)'da görülen her bir işleç sırasıyla birbiri üzerine etkiyip,  $s_1(x_1)$  ve  $s_2(x_2)$  işlevleri yalınlaştırılırsa aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_1 - a_1} \frac{1}{b_2 - a_2} \int_{a_1}^{b_1} d\xi_1 \left( \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) f(\xi_1, x_2) \right) s_1(\xi_1) &= \lambda s_1(x_1) \\ \frac{1}{b_2 - a_2} \frac{1}{b_1 - a_1} \int_{a_2}^{b_2} d\xi_2 \left( \int_{a_1}^{b_1} dx_1 f(x_1, x_2) f(x_1, \xi_2) \right) s_2(\xi_2) &= \lambda s_2(x_2)\end{aligned}\quad (4.8)$$

Burada  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$  olmakla birlikte aşağıdaki gibi çekirdek tanımları yapılırsa

$$\begin{aligned}K_1(x_1, \xi_1) &\equiv \frac{1}{b_2 - a_2} \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) f(\xi_1, x_2), & x_1, \xi_1 &\in [a_1, b_1] \\ K_2(x_2, \xi_2) &\equiv \frac{1}{b_1 - a_1} \int_{a_1}^{b_1} dx_1 f(x_1, x_2) f(x_1, \xi_2), & x_2, \xi_2 &\in [a_2, b_2]\end{aligned}\quad (4.9)$$

(4.6) denklem takımı oldukça yalın olarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_1 - a_1} \int_{a_1}^{b_1} d\xi_1 K_1(x_1, \xi_1) s_1(\xi_1) &= \lambda s_1(x_1), \quad x_1, \xi_1 \in [a_1, b_1] \\ \frac{1}{b_2 - a_2} \int_{a_2}^{b_2} d\xi_2 K_2(x_2, \xi_2) s_2(\xi_2) &= \lambda s_2(x_2), \quad x_2, \xi_2 \in [a_2, b_2] \end{aligned} \quad (4.10)$$

biçiminde yazılabilir. (4.10)'dan kolaylıkla görülebileceği gibi açık yapıları (4.9)'da verilen  $K_1$  ve  $K_2$  işlevleri bakışıktır. Dolayısıyla ilgili tümlev işleçler özüne-eş işleçlerdir. Ayrıca, doğrucul cebirden de anımsayışla, (4.10)'da açığa çıkan  $\lambda$  büyüklüğü ilgili özüne-eş doğrucul işleçlerin tekil değeri olarak düşünülebilir [29]. Bunlara ek olarak, (4.10)'da verilen her bir denklem, aynı sırasayı ile simgelenen ve aynı küme üzerinde tanımlanan  $(x_1, \xi_1)$  ve  $(x_2, \xi_2)$  bağımsız değişken ikililerini içermektedir. Böylelikle  $x_1$  ve  $x_2$  bağımsız değişkenlerinin içerisinde bulunduğu uzamlar birbirlerinden ayrılmış olur. Bu bağlamda, eşleşik (ing: coupled) bir denklem takımı ile uğraşmak yerine, her bir tümlev denklemi ötekisinden bağımsız biçimde çözmek olanaklı duruma gelmiş olur. Böylelikle (4.10) bağıntısındaki eşitliklerin sırasayılarını kaldırmak uygun olacaktır. Bu işlem yapılırsa

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b d\xi K(x, \xi) s(\xi) = \lambda s(x); \quad x, \xi \in [a, b] \quad (4.11)$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle üzerinde çalışılan iki boyutlu dikgen uzam birbirinden ayrılmış olup, sanki tek bir denklem varmışçasına iş görülebilmesi olanaklı duruma gelmiş olur. Bu kolaylığı sağlayan yönteme “Uzamcıl Ayrıştırım” (ing: Geometric Separation) adı verilebilir. Bu durumda, ikideğişkenli ÇYÇG açılımında eniyilenmiş destek işlevlerini saptamak için (4.11) denklemi her bir özüne-eş çekirdek için, birbirlerinden bağımsız olarak, çözümlenmelidir. Daha açık anlatımla, (4.11) denkleminde, çekirdek olarak (4.9)'daki ilk tanım olan  $K_1(x, \xi)$  seçilerek eniyilenmiş  $s_1(x_1)$ , andıran biçimde  $K_2(x_\xi)$  seçilerek de eniyilenmiş  $s_2(x_2)$  destek işlevi elde edilir.

Öte yandan, (4.11) denklemi tıkız bir Hilbert-Schmidt tümlev işlecinin özdeğer sorununu betimlemektedir. Bu durumda,  $\lambda$  sayılı özdeğeri,  $s(x)$  ise, bu özdeğere karşılık gelen özişlevi simgeler. Böylece üzerinde çalışılan destek eniyilemiş sorunu, aslında tıkız bir Hilbert-Schmidt tümlev işlecinin özdeğer sorununa dönüşmüş olur. Tümlev işleçlerin izgecil sorunları bilimcil yazında üzerinde oldukça bilgi birikimi bulunan çalışma konularındandır. Bu zamana dek, üzerinde çalışılan işlecini ya da çekirdeğin yapısına göre bir çok çözümcül ve sayıcıl yöntem geliştirilmiştir [58]. Bu

aşamada, (4.11) bağıntısında verilen izgecil sorunun çözümü için sav bağlamında geliştirilen ve ayrıntıları savın 3. bölümünde aktarılan saptırım tabanlı yöntem kullanılacaktır. 3.4 altbölümünde verilen uygulamalardan da anlaşılacağı gibi, destek eniyileyişinde kullanılacak saptırım tabanlı yöntem, en baskın özdeğer ve ilgili özdeşle etkin yaklaşımlar yapılmasına olanak sağlamaktadır. (4.11) sorunu 3. bölümde üzerinde durulan izgecil sorun ile birebir örtüştüğünden ve ilgili sorunun en baskın özdeğeri, bir şekilde, en büyük  $\sigma_0$  değerine karşılık geldiğinden savda geliştirilen saptırım tabanlı yöntem, destek işlevi eniyileyimi konusunda oldukça yararlı ve etkin bir yöntem olacaktır. 3. bölümde aktarılan bulgular ışığında, üzerinde çalışılan izgecil soruna özelsiz bir kapalı aralık için sayısal yöntem (ing: numerical method) geliştirmek istendiğinden, üzerinde çalışılan kapalı aralık öncelikle evrencil bir aralığa dönüştürülmelidir. Bu bağlamda,

$$x \equiv \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y, \quad \xi \equiv \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\eta. \quad (4.12)$$

dönüşümleri kullanılarak tümlevleyiş aralığı olan  $[a, b]$ ,  $[-1, 1]$  kapalı aralığına dönüştürülmüş olur. Yukarıdaki dönüşümlerin (4.11) sorunda kullanımıyla

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta K(x_{mp} + \varepsilon y, x_{mp} + \varepsilon \eta) s(x_{mp} + \varepsilon \eta) = \lambda s(x_{mp} + \varepsilon y) \quad (4.13)$$

bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda ortaya çıkan  $x_{mp}$  ve  $\varepsilon$  değiştirgeleri, 3. bölümde aktarıldığı gibi

$$x_{mp} \equiv \frac{a+b}{2}, \quad \varepsilon \equiv \frac{b-a}{2}. \quad (4.14)$$

biçiminde tanımlanır. Her ne kadar savın 3. bölümünde belirtildiyse de, (4.14)'te verilen  $x_{mp}$ 'nin üzerinde çalışılan aralığın orta noktasını,  $\varepsilon$ 'un ise ilgili uzamın yarı aralık uzunluğunu betimlediğini anımsatım yerinde bir olgu olacaktır. Bilindiğı gibi bu büyüklüklerin aldığı değerler, kullanılacak olan saptırım tabanlı yöntemin yakınsayışında oldukça önemli bir yer tutmaktadır.

(4.14)'te verilen tanımlar yardımıyla, (4.13)'te verilen evrencilleştirilmiş izgecil sorun, her bir büyüklüğün  $\varepsilon$  bağımlılığı da göz önünde bulundurularak, daha yalın biçimde aşağıdaki gibi yazılır

$$\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon) s(y, \varepsilon) = \lambda(\varepsilon) s(y, \varepsilon) \quad (4.15)$$

Yukarıdaki sorunda bilinmeyen olan  $s(y, \varepsilon)$  ve  $\lambda(\varepsilon)$  büyüklüklerini savda geliştirilen saptırım tabanlı yöntemi kullanarak çözebilmek amacıyla, ilgili tüm büyüklüklerin

sıfır komşuluğunda  $\varepsilon$ 'un eksi olmayan tamsayı üsleri türünden toplamdiziye açılabilirdikleri öngörümü yapılmalıdır. Bu öngörümle, aşağıdaki toplam dizileri yazmak olanaklı olur

$$\widehat{\mathcal{F}}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_j \varepsilon^j, \quad s(y, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j(y) \varepsilon^j, \quad \lambda(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \varepsilon^j. \quad (4.16)$$

Yukarıdaki toplam dizilerin yapısında bulunan  $\widehat{\mathcal{F}}_j$  işleçleri bilinen işleçler olmak üzere  $s_j(y)$  işlevleri ve  $\lambda_j$  katsayıları şu an için bilinmeyen büyüklüklerdir. Bu büyüklüklerden  $j$ . sırasayılı olanları, 3. bölümde en baskın özdeğer ve eşlik eden özışlev için sırasıyla bulunan (3.31) ve (3.36) belirtik özyineli ilişkileri yardımıyla

$$\lambda_j = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \widehat{\mathcal{F}}_j s_0 + \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{F}}_{k+1} - \lambda_{k+1} \widehat{T} \right] s_{j-k-1} \right), \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.17)$$

$$s_j(y) = \frac{c_j}{\sqrt{2}} + \frac{1}{K_{0,0}} \left[ \widehat{\mathcal{F}}_j s_0(y) - \sum_{k=0}^{j-2} \left[ \widehat{\mathcal{F}}_{k+1} - \lambda_{k+1} \widehat{T} \right] s_{j-k-1}(y) \right], \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.18)$$

biçiminde elde edebilirler. (4.17) ve (4.18)'de gözüken  $\widehat{T}$  işleci  $[-1, 1]$  aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve dördülü tümlemlenebilen işlevlerin bulunduğu Hilbert uzayındaki birim işleci simgelemektedir. Bunun yanısıra, aynı bağıntıların sağ yanlarında bulunan toplamaların  $j = 0$  ve  $j = 1$  değerleri için sıfırlandıkları öngörümü, 3. bölümde de olduğu gibi, sürmektedir. Ayrıca, (4.18)'de bulunan  $c_j$  belirsiz katsayıları, yine 3. bölümde aktarılan dikgenleştirim olguları bağlamında elde edilirler. Böylelikle, (4.9)'daki her iki çekirdekten, sırasıyla yola çıkılıp istenen sayıda  $s_j(y)$  işlevi elde edilerek, ÇYÇG yaklaşımında kullanılacak olan her iki destek işlevine de istenen kertede yaklaşım yapmak olanaklı duruma gelmiş olur. Bu yöntemle belirlenecek olan destek işlevlerinin ÇYÇG yaklaşımındaki etkinliği, savın 5. bölümü olan "Uygulamalar" bölümünde sayısal uygulamalar aracılığıyla gösterilecektir.

"Uygulamalar" bölümüne geçmeden önce, ikiden çok değişken içeren işlevler için gerçekleştirilen ÇYÇG yaklaşımlarında ortaya çıkacak destek eniyileyişi olgusuna değinmek yerinde olacaktır. Bu aşamada, yalınlık oluşu bakımından üçdeğişkenli durum göz önüne alınacaktır. Bu durum için elde edilecek eşleşik (ing: coupled)

tümlev denklemler aşağıdaki gibi elde edilirler

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)} \int_{a_2}^{b_2} dx_2 s_2(x_2) \int_{a_3}^{b_3} dx_3 s_3(x_3) f(x_1, x_2, x_3) &= \lambda_1 s_1(x_1) \\
\frac{1}{(b_1 - a_1)(b_3 - a_3)} \int_{a_1}^{b_1} dx_1 s_1(x_1) \int_{a_3}^{b_3} dx_3 s_3(x_3) f(x_1, x_2, x_3) &= \lambda_2 s_2(x_2) \\
\frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \int_{a_1}^{b_1} dx_1 s_1(x_1) \int_{a_2}^{b_2} dx_2 s_2(x_2) f(x_1, x_2, x_3) &= \lambda_3 s_3(x_3)
\end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19) denklemlerinden anlaşılacağı gibi, üç değişken için elde edilen eşleşik denklemlerin, iki değişkenli durumda uzamcıl ayrıştırım yardımıyla yapıldığı gibi ayrışıklaştırımı olanaksızdır. Buradan, çokdeğişkenliliğin düzeyi arttıkça, destek işlevi eniyilemiş olgusunun güçleştiği sonucuna varılabilir. Oldukça güç görülen bu sorunun üstesinden gelebilmek için (4.16)'da öngörümü yapılan toplam diziler yerine, çokdeğişkenliliğin sorun olduğu durumlarda kullanılan ve oldukça yararlı olan Kronecker üslü toplam dizileriyle [59] iş görmek akılcı olacaktır. Böylelikle, savda tüm ayrıntıları verilen saptırım çözümleyişleri Kronecker üslü toplam dizileri kullanılarak yeniden yapılmalıdır.



## 5. UYGULAMALAR

ÇYÇG uygulamalarında geçmeden önce, savın tümünde aktarılan sayıcıl uygulamalar ile ilgili bir kaç olguya değinmek yerinde olacaktır. Bilindiği gibi, savda, birkaç özgün yöntemden söz edilmiştir. Bunların ilk ikisi, 2. bölümde ayrıntıları verilen altkesimcil ÇYÇG ve sendelenimsizlik düğümlerinin altkesimcil ÇYÇG’nde kullanımı olgusudur. Her iki yöntemin etkinliğini gösteren sayıcıl uygulamalar, şu an içerisinde olunan “Uygulamalar” bölümüne bırakılmamış, deyim yerindeyse, sıcağı sıcağına, ilgili kuramcıl bilgilerin hemen peşisıra verilmiştir. Andıran durum, tümlev işleçlerin izgecıl büyüklükleri için geliştirilen saptırım tabanlı yaklaştırım yönteminin aktarıldığı 3. bölüm için de söz konusudur. Bu bağlamda, sırasıyla, elde ediliş ayrıntıları ve yakınsaklık çözümleyimi 3. bölümde verilen ilgili yöntem için gerçekleştirilen uygulamalar, ilgili kuramcıl anlatımlardan hemen sonra, yine 3. bölümde verilmiştir. Böylelikle, savda geliştirilen kuramcıl yapılar ile ilgili uygulamaları arasındaki ilintiler olabildiğince etkin düzeyde yansıtılmaya çalışılmıştır. Tüm bu olgular, savın kuramcıl dolgunluğunun yanında, sayıcıl uygulamalar açısından da oldukça kapsamlı olduğunun göstergesidir.

Bu bölümde, sav bağlamında geliştirilen saptırım tabanlı destek eniyileyiş yöntemi yardımıyla elde edilen destek işlevlerinin, verilen çözümçül bir ikideğışkenli işlevin ÇYÇG yaklaştırımında kullanılması sonucu elde edilen yaklaştırımların sayıcıl etkinliği (ing: numerical efficiency) araştırılacaktır. Bu bağlamda, değışik çözümçül yapılar içeren ikideğışkenli sınavış (ing: benchmarking) işlevleri kullanılacaktır. Ayrıca, her bir işlev için YOD kullanılarak da ÇYÇG yaklaştırımı gerçekleştirilecek ve elde edilen sonuçlar eniyilenmiş destek işlevleri ile bulunan sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Çizelgeler aracılığıyla verilecek olan değıerler, sıfırncı kereden yaklaştırımların niceliğini ölçen ve tanımını açık olarak (1.12) bağıntısında verilen sıfırncı kereden nicelik ölçeni  $\sigma_0$  değıerleri olacaktır.

Yukarıda sözü edilen ve sınavış için kullanılacak olan işlevler aşığıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= \cos(2x_1 + 3x_2), & f_2(x_1, x_2) &= e^{x_1} + \sin(\pi x_2), \\
f_3(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 + 50x_1x_2 + x_1 - 8, & f_4(x_1, x_2) &= (x_1 + x_2)^3, \\
f_5(x_1, x_2) &= x_1x_2, & f_6(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2, \\
f_7(x_1, x_2) &= 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, & f_8(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9(x_1, x_2) &= (4 - 2.1x_1^2 + x_1^4/3)x_1^2 + x_1x_2 + (4x_2^2 - 4)x_2^2, \\
f_{10}(x_1, x_2) &= (x_1^2 + x_2^2)/4000 - \cos(x_1/\sqrt{1}) - \cos(x_2/\sqrt{2}), \\
f_{11}(x_1, x_2) &= 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10\cos(2\pi x_1) - 10\cos(2\pi x_2), \\
f_{12}(x_1, x_2) &= 100(x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Üstte verilen işlevlerin tümü tanımlı oldukları uzamın içerisinde çözümcül (ing: analytic) işlevlerdir. Bu işlevlerin ilk ikisi, ÇYÇG'nin trigonometrik yapılar içeren işlevlerdeki etkinliğini gözlemleyebilmek amacıyla yapay (ing: synthetic) olarak seçilmiş işlevler olmakla birlikte, ilki salt devirli (ing: periodic) yapıdadır. Üçüncü işlev de çokçokterimli (ing: multinomial) yapısında, yeterince düzgün (ing: smooth) olacak biçimde seçilmiş, yine bir yapay işlevdir. Bu işlevlerin dışında kalan tüm işlevler [\*] yazısından seçilmiş olup, her biri işlevcil yapısına göre değişik türden enküçük ve enbüyük (ing: extrema) yapıları içermektedir. Sözü edilen bu işlevler, yeni ve özgün sayıtmcıl (ing: statistical) ya da sayıclı (ing: numerical) yöntem geliştiren bilim bireylerince, geliştirdikleri yöntemlerin sınanışı amacıyla kullandıkları sınavış işlevleridir.

Üzerinde durulan destek işlevi elde edilimi yöntemi (4.5)'te açık yapısı verilen  $\sigma_0$  değerinin enbüyükleniş (ing: maximization) temeline dayandığından, her bir sınavış işlevi için elde edilen  $\sigma_0$  ölçen değeri çizelgeler aracılığıyla verilecektir. Bununla birlikte, eniyilenmiş işlevler kullanılarak elde edilmiş ÇYÇG yaklaşımlarının etkinliği, aynı işlev için, YOD kullanılarak gerçekleştirilmiş ÇYÇG yaklaşımını sonucu bulunan  $\sigma_0$  değeriyle karşılaştırılacaktır. Bu yüzden, YOD bağlamında elde edilmiş  $\sigma_0$  değerlerine, ilgili çizelgelerin son düşey sıralarında yer verilecektir. Böylelikle eniyilenmiş desteklerin, YOD ile elde edilen desteklere göre sayıclı etkinliğinin karşılaştırımı olanaklı olacaktır.

Çizelgeleri incelemeye başlamadan önce, savda geliştirilen saptırım tabanlı yöntemi ile elde edilen desteklerin, aslında, ilgili eniyilenmiş destek işlevine yapılan bir yaklaşım olduğu us'tan çıkarılmamalıdır. Bunun nedeni, açılım bileşenleri



**Çizelge 5.1 :** Değişik kesme kertelerinden destek işlevleri ve YOD kullanılarak  $[0, 1]^2$  dördülü üzerinde bulunan  $\sigma_0$  değerleri.

	$n = 3$	$n = 6$	$n = 9$	$n = 12$	$n = 15$	YOD
$f_1$	0.839169	0.839170	0.856249	0.856345	0.856408	0.788058
$f_2$	0.999610	0.999668	0.999668	0.999668	0.999668	0.999648
$f_3$	0.973185	0.973874	0.976670	0.976578	0.976718	0.931223
$f_4$	0.992613	0.997873	0.997923	0.997938	0.997944	0.996449
$f_5$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
$f_6$	0.988992	0.989497	0.989523	0.989523	0.989523	0.986013
$f_7$	0.792262	0.478976	0.493153	0.777990	0.449870	0.855626
$f_8$	0.983691	0.985684	0.985740	0.985740	0.985740	0.980016
$f_9$	0.838636	0.430300	0.889284	0.422011	0.842855	0.945019
$f_{10}$	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
$f_{11}$	0.988408	0.984045	0.993721	0.995579	0.995586	0.994675
$f_{12}$	0.646481	0.577438	0.738229	0.753105	0.750782	0.763608

**Çizelge 5.2 :** Değişik kesme kertelerinden destek işlevleri ve YOD kullanılarak  $[0, 0.5]^2$  dördülü üzerinde bulunan  $\sigma_0$  değerleri.

	$n = 3$	$n = 6$	$n = 9$	$n = 12$	$n = 15$	YOD
$f_1$	0.916766	0.915381	0.916646	0.917039	0.917026	0.807999
$f_2$	0.999889	0.999889	0.999889	0.999889	0.999889	0.999885
$f_3$	0.950513	0.950513	0.950513	0.950513	0.950513	0.936954
$f_4$	0.992613	0.997873	0.997923	0.997938	0.997944	0.996449
$f_5$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
$f_6$	0.988992	0.989497	0.989523	0.989523	0.989523	0.986013
$f_7$	0.150934	0.420096	0.591950	0.504954	0.564571	0.994375
$f_8$	0.986075	0.989525	0.990807	0.991010	0.991021	0.986938
$f_9$	0.723616	0.849178	0.790911	0.752130	0.756527	0.425623
$f_{10}$	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
$f_{11}$	0.994745	0.994897	0.994906	0.994906	0.994906	0.993768
$f_{12}$	0.726472	0.806022	0.811378	0.813024	0.814559	0.813956

açık olarak (4.18)'de verilen sonlu sayıda terim içeren saptırım toplam dizisi ile uğraşılmasıdır. Bilindiği gibi (4.16)'da verilen saptırım toplam dizileri sonsuz toplam dizilerdir. Bu yüzden ilgili toplam diziyeye belli bir kertede kesme yaparak yaklaştırım gerçekleştirilmesi gerekir. Verilen çizelgelerde bulunan  $n$  değeri, ilgili kesme kertesini simgelemektedir. Bu bağlamda, ilgili özişlev saptırım toplam dizisine  $n$ . kerteneden kesme yapmak,  $\varepsilon$ 'un en fazla  $n$ . üslüsünü içeren terimi alıyoyup geriye kalan tüm terimleri dışlamak anlamına gelmektedir.

Çizelge 5.1'den kolaylıkla anlaşılacağı gibi YOD kullanılarak elde edilen ÇYÇG yaklaşımları için elde edilen  $\sigma_0$  değeri, neredeyse tüm sınav işlevleri için ilgili üst sınır olan 1 değerine yakındır. Bu olgu, eniyilenmiş destek işlevinin kullanılmaması durumunda bile sıfıncı kerteneden ÇYÇG yaklaşımlarının ilgili işlevleri yaklaştırmada oldukça etkin olduğunu göstermektedir. Öte yandan, Çizelge 5.1'den çıkarılacak bir diğer sonuç ise, eniyilenmiş destek işlevleri kullanılarak gerçekleştirilen ÇYÇG yaklaşımları bağlamında elde edilen sıfıncı kerteneden nicelik ölçeni  $\sigma_0$  değerlerinin, neredeyse tüm sınav işlevleri için YOD ile elde edilen değerlerden daha büyük oluşudur. Üstelik bu iyi sonuçlar, yine birçok işlev için,  $n = 3$  ve  $n = 6$  gibi küçük kesme kertelerinde elde edilmiştir. Bu da, saptırım tabanlı yöntem ile elde edilen destek işlevlerinin, birtakım işlevler için, az sayıda terim alındığında bile YOD işlevlerine üstünlük sağladığı olgusunu gözler önüne sermektedir. Bu aşamada değinilmesi gereken bir diğer olgu ise üzerinde çalışılan uzamdır. Çizelge 5.1'de verilen  $\sigma_0$  değerleri,  $[0, 1]^2$  dördülü üzerinde gerçekleştirilmiş ÇYÇG yaklaşımları bağlamında elde edilmiştir. Bu da, her bir sınav işlevinin bağımsız değişkenlerinin  $[0, 1]$  aralığı üzerinde değerler aldığı anlamına gelir. Bilindiği üzere, savda önerilen destek işlevi eniyileyişi yöntemi sıfır-aralık-ereyinde gerçekleştirilen saptırım açılımları ilkesine dayanmaktadır. Bir diğer deyişle, geliştirilen saptırım tabanlı yöntemin, salt dar (ing: narrow) aralıklarda iş görüşü beklenmektedir. Buna karşın, ilgili yöntem ile belirlenen eniyilenmiş destekler ile gerçekleştirilen ÇYÇG yaklaşımları, çok da dar sayılmayacak olan  $[0, 1]$  aralığı üzerinde de etkin olmuştur. Bu da, savda geliştirilen yöntemin, uygulamacılar olarak etkinliğini gösteren olgulardan biridir.

Çizelge 5.1'de üzerinde düşünülmesi gereken bir diğer durum ise  $f_7$ ,  $f_9$  and  $f_{12}$  sınav işlevleri için elde edilen  $\sigma_0$  değerlerinin YOD kullanılarak elde edilen ilgili

$\sigma_0$  değerlerini geçemeyişidir. Özenli bir bakışla,  $f_7$  ve  $f_9$  işlevleri için bir yakınsayış sorunu olduğu görülmektedir.  $f_{12}$  için ise bir yakınsayış sorunu görülmemekle birlikte, kesme kertesinin arttırımı ilgili işlev için daha etkin sonuçların elde edilimini sağlayacaktır.

$f_7$  ve  $f_9$ 'daki yakınsayış, sorunu savın 3. bölümündeki yakınsaklık çözümleyişlerinde belirtildiği gibi,  $\varepsilon/K(x_{mp}, x_{mp})$  oranının (4.9)'da tanımları verilen çekirdeklerin en az biri için yeterince küçük değer alamayışı durumundan kaynaklanmaktadır. Bu sorunun üstesinden, daha dar bir uzamda çalışılarak gelinilebilir. Böylelikle ilgili  $\varepsilon$  değeri ve dolayısıyla da yukarıda sözü edilen oran küçültülmüş olur. Kuşkusuz ilgili uzam değışiminden ötürü  $K(x_{mp}, x_{mp})$  değeri de küçülebilir. Bu yüzden, uzam daraltımı konusunda özenli davranmak gerekmektedir. Bu aşamada, uzam daraltımının etkinliğini sınavabilmek amacıyla Çizelge 5.1'de verilen değerler  $[0, 0.5]^2$  dördülü üzerinde gerçekleştirilmiş ve elde edilen  $\sigma_0$  değerleri Çizelge 5.2'de verilmiştir. Çizelge 5.2'deki sonuçlardan varılan ilk sonuç, tüm sınavış işlevleri için yakınsayış sorununun olmayışdır. Bu da, uzam daraltımının ilgili işlevler için işe yarar bir olgu olduğunun göstergesidir. Diğer yandan  $f_7$  işlevi için eniyilenmiş destekler yardımıyla elde edilen sıfırncı kereden ÇYÇG yaklaştırımının nicelik ölçeni olan  $\sigma_0$ , aynı koşullar altında YOD kullanılarak elde edilen  $\sigma_0$  değerinin gerisinde kalmıştır. Bu olumsuz durum ilgili saptırım toplamdizilerinde daha çok sayıda terim alınarak giderilebilir.



## 6. SONUÇLAR

Savın son bölümü olarak düzenlenen bu bölümde, savda geliştirilen özgün yöntemlerin kuramcıl ve uygulamacı özellikleri doğrultusunda elde edilen bulgulara yer verilecektir. Bunun yanısıra, sav bağlamındaki araştırmalarla belli bir noktaya getirilen bilgi ve deneyimlerin daha da olgunlaştırılıp daha etkin duruma getirmesi konusunda da geleceğe dönük tasarımlardan dem vurulacaktır.

Bilindiği gibi savın amacı Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösteriliminin etkinliğinin arttırımıdır. Bu amaçla, ilgili yöntemin etkinliğinde oldukça önemli yeri olan tekdeğişkenli destek işlevlerinin eniyileyişine odaklanılmıştır. İlgili destek işlevlerinin eniyileyişi sürecinde, içerisinde Hilbert-Schmidt tümlev işleçlerini barındıran Fredholm türü eşleşik tümlev denklemler açığa çıkmış, ilgili denklemler de uzamcıl ayrıştırım adı verilen olgu yardımıyla ayrışık duruma indirgenmiştir. Ayrışık duruma dönüştürülen denklemlerin her biri çekirdeği bakışık olan, özüne-eş ve tıkız bir Hilbert-Schmidt tümlev işlecinin izgecil sorunu olarak elde edilmiş ve eniyilenmiş destek işlevleri de, açığa çıkan tümlev işleçlerin en baskın özdeğerine karşılık gelen özışlev olarak belirlenmiştir. Böylelikle, eniyilenmiş destek işlevi bulunumunun, aslında, bakışık, özüne-eş ve dolayısıyla da tıkız olan bir Hilbert-Schmidt tümlev işlecinin özdeğer sorunu ile ilintili olduğu gösterilmiştir.

Yukarıda sözü edilen izgecil sorunun çözümü için özelsiz (ing: genel) bir sayıcıl çözüm yöntemi geliştirmek istenmiştir. Daha önceki deneyimlerden elde edilen bulgulara dayanarak, ÇYÇG’nde uzam daraltımına bağlı aralık küçültümünün, işlev yaklaştırımında ÇYÇG’nin etkinliği arttırıldığı saptanmıştır. Tüm bu olguların ayrıntıları savın 2. bölümünde altkesimcil ÇYÇG bağlamında aktarılmış ve peşisıra verilen sayıcıl uygulamalarla da desteklenmiştir. Bunun yanısıra, sendelenimsiz tümlevleme yardımıyla gerçekleştirilen altkesimcil ÇYÇG’nin de etkinliği, yine bu bölümde aktarılan bulgular ve uygulamalar ile gösterilmiştir. Bunlarla birlikte Altkesimcil ÇYÇG yardımıyla aşkınizgecil görüntüler için özgün bir kayıplı sıkıştırım uzişi geliştirilmiş ve bilimcil yazında bulunan yöntemlere göre çok daha etkin

yaklaşımlar elde edilmiştir. **Bu olgu savın bilimcil yazına kazandırdığı önemli olgulardan biridir.**

ÇYÇG’nde aralık küçültümünün etkinliği gösterildiğinden, ilgili izgecil sorunu çözebilmek için sıfır-aralık-ereyinde (zero-interval-limit) çözüm gerçekleştirimine karar verilmiştir. Bu nedenden ötürü, içeriğinde çok küçük değişimler barındıran sorunların çözümü konusunda etkinliği bilinen saptırım açılımı tabanlı bir yöntem geliştirimi öngörülmüştür. Bu bağlamda eniyelenmiş destek işlevi ile ilintili olan özişlev için bir yaklaşım yöntemi geliştirilmiştir. Bu yaklaşım, ilgili özişlev için oluşturulan saptırım toplamdizisinde belli sayıda terimin alınmasıyla elde edilmektedir. Bu bağlamda, ilgili özişleve, bir kesme yaklaşımı yapmak olanaklı olmuştur. Bu aşamadaki en önemli getirilerden biri, kesme yapılan toplamdizi terimlerinin özyineli bir ilişki yardımıyla belirtik (ing: explicit) olarak belirlenebilmesidir. Bu da ilgili saptırım bileşenlerinin dolaysız olarak, kolaylıkla belirlenimine olanak sağlamaktadır. Bunun yanısıra, bilindiği gibi, eski yöntem olarak da belirtimi olanaklı olan, yönel ortalamalı desteklerin elde ediliminde çok katlı tümlevlerin devrede olması söz konusudur. Üzerinde çalışılan işlevin çözümcül yapısı bağlamında bu tümlevlerin alımında sorunlar yaşanabilmektedir. Sorun yaşanmasa bile ilgili destek işlevlerinin sıfırlanımı ve ilgili ÇYÇG yaklaşımının yapılamaması karşılaşılan diğer bir olumsuz durumdur. Her ne kadar, az önce sözü edilen özyineli ilişkilerin içerisinde tümlev işleçler bulunsa da, bu işleçler çokterimli (ing: polynomial) yapılara etkimektedir. Bu yüzden, yeni yöntem bağlamında açığa çıkan tümlevlerin çözümcül olarak alınmaları oldukça kolaydır. **Bu olgu savda geliştirilen yöntemin olumlu getirilerinden biridir.**

Bununla birlikte, en baskın özdeğere eşlik eden özişlev için geliştirilen saptırım toplamdizisinin,, karmaşık düzlemde boş olmayan ve yarıçapı sıfırdan büyük bir teker içerisinde yakınsadığı gösterilmiştir. Bu da, 3. bölümde söz edilen,  $\varepsilon$  ve  $K_{0,0}$  uygun biçimde alınmaları durumunda, elde edilecek saptırım toplamdizisinin eniyelenmiş destek işlevine yakınsayışını güvence altına alır. Saptırım tabanlı yöntemin ÇYÇG’nde kullanımından önce, yöntemin tek başına etkinliğinin gösterimi açısından salt tümlev işleçlerin izgecil sorunlarının çözümü bağlamında uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Bu uygulamalarda, kesme kertesinin  $n = 2$  ya da  $n = 4$  gibi küçük sayılar alındığı durumlarda bile, kesme yapılan toplamdizinin, erekteki özişleve

yakınsayışı gösterilmiştir. Böylelikle, bir Hilbert-Schmidt tümlev işlecinin en baskın özdeğerine eşlik eden özişleve, savda geliştirilen özgün yöntem kullanılarak etkin yaklaşımlar gerçekleştirimi olanaklı olmuştur. **Bu olgu, savın bilimsel yazına verdiği en önemli katkılardan biridir.**

Savda geliştirilen saptırım tabanlı yöntem kullanılarak elde edilen tekdeğişkenli destek işlevleri, ikideğişkenli işlevlerin ÇYÇG yaklaşımında kullanılmış ve YOD olarak kısaltımlı adlandırılan eski destek işlevlerinin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşımlardan daha etkin sonuçlar elde edilmiştir. Böylelikle, verilen çözümcül bir ikideğişkenli işlev için, etkin biçimde, yaklaşık bir salt çarpımcıl ayrıştırım (ing: factorization) elde edilmiş olur. Bilindiği gibi salt çarpımcıl ayrıştırımlar, işlenimi ve çözümleyişi en kolay olan yapıların başında gelmektedir. Bu bağlamda, verilen bir çözümcül ikideğişkenli işlev için, işlevcil yapısı ne kadar karmaşık olursa olsun, işlenmesi kolay, etkin bir yaklaşık yapı bulunması olanaklı duruma gelmiş olur. **Bu olgu da, savın bilimsel yazına verdiği bir diğer önemli katkıdır.**

Uygulamalar bölümündeki çizelgelerden görülebileceği gibi, ÇYÇG'nde, eniyilenmiş işlevler, bazı durumlarda YOD'e göre iyi sonuçlar vermemektedir. Bu olgu iki durumla açıklanabilir: (i) Kullanılan  $\varepsilon$  değerinin, yaklaşım yapılan işlev için elde edilen  $K_1(x_{mp}, x_{mp})$  ya da  $K_2(x_{mp}, x_{mp})$  değerine oranının ilgili toplamdizinin yakınsaklığı için yeterli küçüklükte olmaması; (ii) Erekteki destek işlevi için kullanılan toplamdizide yeterince çok terimin alınmaması. (i)'deki olumsuz durum, üzerinde çalışılan uzamın daraltımıyla giderilebilir. Bununla birlikte, buna bağlı olarak  $K_1(x_{mp}, x_{mp})$  ile  $K_2(x_{mp}, x_{mp})$  değerleri de küçülebilir ve yukarıda sözü edilen oran değişmeyebilir. Bu yüzden, kullanılacak olan araiğin seçimine özen göstermek gerekmektedir. (ii)'deki olumsuz durumda ise daha çok sayıda terim almak sonuçları iyileştirecektir. Bununla birlikte, daha çok terim, daha çok bilgisayarım (ing: comuputation) ve daha fazla süre anlamına da gelmektedir. Her ne kadar, terimlerin elde edilimindeki tümlevler, yukarıda belirtildiği gibi, çözümcül olarak kolaylıkla alınabiliyor olsa da, çok sayıda terim alımı, bilgisayarım karmaşıklığını (ing: computational complexity) arttıracaktır.

Bu savda, ikideğişkenli işlevler için gerçekleştirilen ÇYÇG açılımında kullanılan destek işlevlerinin eniyileyişi üzerinde durulmuştur. İkideğişkenli durum, çokdeğişkenliliğin en yalın durumu olarak nitelendirilebilir. Bu savda elde edilen

bulgular yardımıyla ÇYÇG'nde destek eniyileyimi sürecinin ayrıntıları özümsemiş olup, ilgili çözümleyişin 3 veya daha fazla sayıda bağımsız değişken içeren işlevlerin ÇYÇG yaklaştırımında kullanımı için gereken adımların atılması konusunda önemli bir bilgi tabanı elde edilmiştir. Bu yüzden, sav sonrası araştırmalar bağlamında, ilgili destek işlevi eniyileyim yönteminin çokdeğişkenli durumlara uyarlanımı ve ayrık veri kümeleri için de kullanımının olanaklı duruma getirmesi konularında çalışmalar sürdürülecektir.





## KAYNAKLAR

- [1] **Sobol, I.M.** (1993). Sensitivity estimates for non linear mathematical models, *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, 1(4), 407–414.
- [2] **Li, G., Rosenthal, C. ve Rabitz, H.** (2001). High Dimensional Model Representations, *J. Phys. Chem. A*, 105(33), 7765–7777.
- [3] **Chowdhury, R. ve Rao, B.N.** (2009). Hybrid High Dimensional Model Representation for reliability analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(5-8), 753–765.
- [4] **Li, G. ve Rabitz, H.** (2012). General formulation of HDMR component functions with independent and correlated variables, *Journal of Mathematical Chemistry*, 50(1), 99–130.
- [5] **Li, E., Wang, H. ve Li, G.** (2015). High dimensional model representation (HDMR) coupled intelligent sampling strategy for nonlinear problems, *Computer Physics Communications*, 183(9), 1947–1955.
- [6] **Li, G., Artamonov, M., Rabitz, H., Wang, S.W., Georgopoulos, P.G. ve Demiralp, M.** (2003). High dimensional model representations generated from low order terms lp-RS-HDMR, *J. Computational Chemistry*, 25(5), 647–656.
- [7] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2004). A Factorized High Dimensional Model Representation on the Partitioned Random Discrete Data, *Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, 1(1), 231–241.
- [8] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2006). Hybrid high dimensional model representation (HHDMR) on the partitioned data, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 185(1), 107 – 132.
- [9] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2009). Bound analysis in univariately truncated Generalized High Dimensional Model Representation for random-data partitioning: Interval GHDMR, *Applied Numerical Mathematics*, 59(6), 1431–1448.
- [10] **Yaman, İ. ve Demiralp, M.** (2009). A new rational approximation technique based on transformational high dimensional model representation, *Numerical Algorithms*, 52(3).
- [11] **Tuna, S.** (2007), Melez yüksek boyutlu model gösterilim yönteminde çok değişkenli integrallerin sendelenimsizlik yaklaşıtrımı ile hesaplanması.

- [12] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2010). The influence of the support functions on the quality of enhanced multivariate product representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, 48(3), 827–840.
- [13] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2013). A novel method for multivariate data modelling: Piecewise Generalized EMPR, *Journal of Mathematical Chemistry*, 51(10), 2654–2667.
- [14] **Tunga, M.A.** (2015). A new approach for multivariate data modelling in orthogonal geometry, *International Journal of Computer Mathematics*, 92(9), 2011–2021.
- [15] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2011). Generalized Enhanced Multivariate Product Representation for Data Partitioning: Constancy Level, cilt1389, AIP Conference Proceedings, Halkidiki, Greece, s.1152–1155.
- [16] **Korkmaz Özey, E. ve Demiralp, M.** (2014). Reductive enhanced multivariate product representation for multi-way arrays, *Journal of Mathematical Chemistry*, 52(10), 2546–2558.
- [17] **Tuna, S. ve Tunga, B.** (2013). A novel piecewise multivariate function approximation method via universal matrix representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, 51(7), 1784–1801.
- [18] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2015). Arrowheading enhanced multivariate products representation for a Kernel (AEMPRK) in a bivariate Taylor series expansion, *Proceedings of the International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2015 (ICCMSE-2015)*, cilt1702, ICCMSE'15, AIP Conference Proceedings, Athens, Greece, s.170004–170007.
- [19] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2011). Generalized Enhanced Multivariate Product Representation for Data Partitioning: Constancy Level, *AIP Conference Proceedings*, 1389(1), 1152–1155.
- [20] **Özdemir, G. ve Demiralp, M.** (2015). Arrowheaded enhanced multivariate products representation for matrices (AEMPRM): Specifically focusing on infinite matrices and converting arrowheadedness to tridiagonality, *Proceedings of the International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2015 (ICCMSE-2015)*, cilt1702, ICCMSE'15, AIP Conference Proceedings, Athens, Greece, s.170004.
- [21] **Korkmaz Özey, E. ve Demiralp, M.** (2015). Combined small scale enhanced multivariate product representation (CSSEMPR) for image reconstruction, *Proceedings of the International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2015 (ICCMSE-2015)*, cilt1702, ICCMSE'15, AIP Conference Proceedings, Athens, Greece, s.170003.
- [22] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2015). Formulation of tridiagonal format enhanced multivariate products representation (TFEMPR), *Proceedings of the International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2015 (ICCMSE-2015)*, cilt1702, ICCMSE'15, AIP Conference Proceedings, Athens, Greece, s.170004–170005.

- [23] **Sukhanov, A., Tuna, S. ve Töreyn, B.U.** (2016). Lossy compression of hyperspectral images by using Enhanced Multivariate Products Representation (EMPR) method, *2016 24th Signal Processing and Communication Application Conference (SIU)*, s.1925–1928.
- [24] **Porter, D. ve Stirling, D.S.** (1990). *Integral Equations: A Practical Treatment from Spectral Theory to Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [25] **Tricomi, F.G.** (1957). *Integral Equations*, Interscience Publishers, New York.
- [26] **Debnath, L. ve Mikusiński, P.** (2005). *Introduction to Hilbert spaces with Applications*.
- [27] **Buchukuri, T., Chkadua, O. ve Natroshvili, D.** (2009). Mixed Boundary Value Problems of Thermopiezoelectricity for Solids with Interior Cracks, *Integral Equations and Operator Theory*, 64(4), 495–537.
- [28] **Cancés, E. ve Mennucci, B.** (1998). New applications of integral equations methods for solvation continuum models: ionic solutions and liquid crystals, *Journal of Mathematical Chemistry*, 23(3), 309–326.
- [29] **Trefethen, L.N. ve Bau, D.** (1997). *Numerical Linear Algebra*, SIAM Press, Philadelphia, arXiv:1011.1669v3.
- [30] **Temam, R.** (1973). *Numerical Analysis*, D. Reidel Publishing Company, Boston.
- [31] **Atkinson, K. ve Han, W.** (2001). *Theoretical Numerical Analysis*, cilt 39, Springer–Verlag, New York, 3 sürüm, arXiv:1011.1669v3.
- [32] **Demiralp, M.** (2009). No fluctuation approximation in any desired precision for univariate function matrix representations, *Journal of Mathematical Chemistry*, 47(1), 99.
- [33] **Baykara, N.A., Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2011). The fluctuationlessness approach to the numerical integration of functions with a single variable by integrating Taylor expansion with explicit remainder term, *Journal of Mathematical Chemistry*, 49(2), 393–406.
- [34] **Abramovitz, M. ve Stegun, I.A.** (1965). *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York.
- [35] **Ülkü, İ. ve Töreyn, B.U.** (2015). Sparse representations for online-learning-based hyperspectral image compression, *Applied Optics*, 54(29), 8625–8631.
- [36] **Ji, S., Xue, Y. ve Carin, L.** (2008). Bayesian compressive sensing, *IEEE Trans. Signal Process.*, cilt1702, s.2346–2356.
- [37] **Fowler, J.E.** (2009). Compressive-Projection Principal Component Analysis, *IEEE Trans. Image Processing*, cilt 18, s.2230–2242.
- [38] **Kim, S.J., Koh, K., Lustig, M., Boyd, S. ve Gorinevsky, D.** (2007). An interior-point method for large-scale  $l_1$ -regularized least squares, *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, cilt 1, s.606–617.

- [39] **Chen, S.S., Donoho, D.L. ve Saunders, M.A.** (1998). Atomic decomposition by basis pursuit, *SIAM J. Sci. Comput.*, cilt 20, s.33–61.
- [40] **Tibshirani, R.** (1994). Regression Shrinkage and Selection Via the Lasso, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58, 267–288.
- [41] Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer, <http://aviris.jpl.nasa.gov>.
- [42] **Haar, A.** (1910). Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Mathematische Annalen*, 69(3), 331–371.
- [43] **Salomon, D.** (2007). *Data Compression: The Complete Reference*, Springer–Verlag, Londra, 4 sürüm.
- [44] **Tuna, S. ve Demiralp, M.** (2015). Bivariate enhanced multivariate products representation (EMPR) at zero volume limit via geometric separation, *AIP Conference Proceedings*, cilt1702.
- [45] **Rao, R.V. ve Sukavanam, N.** (1985). On the eigenvalues and eigenfunctions of some integral operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 109(2), 463–471.
- [46] **Demiralp, M. ve Tuna, S.** (2016). Zero Interval Limit Perturbation Expansion for the Spectral Entities of Hilbert-Schmidt Operators Combined with Most Dominant Spectral Component Extraction: Formulation and Certain Technicalities, *Journal of Mathematical Chemistry (inceleyişte)*.
- [47] **Tuna, S. ve Demiralp, M.** (2016). Zero Interval Limit Perturbation Expansion for the Spectral Entities of Hilbert-Schmidt Operators Combined with Most Dominant Spectral Component Extraction: Convergence and Confirmative Implementations, *Journal of Mathematical Chemistry (inceleyişte)*.
- [48] **Hinch, E.J.** (1991). *Perturbation Methods*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [49] **Kato, T.** (1995). *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, New York, 2 sürüm.
- [50] **Holmes, M.H.** (1995). *Introduction to Perturbation Methods*, Springer–Verlag, New York.
- [51] **Burden, R.L. ve Faires, J.D.** (2010). *Numerical Analysis*, Brookes/Cole, Canada.
- [52] **Jolliffe, I.T.** (2002). *Principal Component Analysis*, Springer–Verlag, New York.
- [53] **Majewski, M.** (2005). *Getting Started with MuPAD*, Springer-Verlag, Hollanda.
- [54] **Quarteroni, A. ve Saleri, F.** (2006). *Scientific Computing with MATLAB and Octave*, Springer, Hollanda, 2 sürüm.
- [55] **Kong, X. ve Jiang, Y.** (2013). Structured multi-way arrays and their applications, *Frontiers of Mathematics in China*, 8(2), 345–369.

- [56] **Ahlfors, L.** (1966). *Complex Analysis*, McGraw-Hill, ABD, 2 sürüm.
- [57] **Brunt, B.** (2004). *The Calculus of Variations*, Springer, New York.
- [58] **Atkinson, K.E.** (1997). *The numerical solution of integral equations of the second kind*, Cambridge University Press, New York.
- [59] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2014). Probabilistic evolution approach to the expectation value dynamics of quantum mechanical operators, part I: integral representation of Kronecker power series and multivariate Hausdorff moment problems, *Journal of Mathematical Chemistry*, 52(8), 2161–2182.





## ÖZGEÇMİŞ



**Ad Soyad:** Süha TUNA

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Bakırköy - 1985

**E-Posta:** suhatuna@gmail.com

**Lisans:** İstanbul Kültür Üniversitesi, Matematik - Bilgisayar Bölümü

**Y. Lisans:** Marmara Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Anabilimdalı

### TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- Demiralp, M., **Tuna, S.**, “Zero Interval Limit Perturbation Expansion for the Spectral Entities of Hilbert-Schmidt Operators Combined with Most Dominant Spectral Component Extraction: Formulation and Certain Technicalities”, *J. Math. Chem.*, **2017**, DOI: 10.1007/s10910-017-0739-7
- **Tuna, S.**, Demiralp, M., “Zero Interval Limit Perturbation Expansion for the Spectral Entities of Hilbert-Schmidt Operators Combined with Most Dominant Spectral Component Extraction: Convergence and Confirmative Implementations”, *J. Math. Chem.*, **2017**, DOI: 10.1007/s10910-017-0740-1
- **Tuna, S.**, Demiralp, M. “On Autonomy Imposition in Zero Interval Limit Perturbation Expansion for the Spectral Entities of Hilbert-Schmidt Integral Operators”, *Mathematics*, **2017**, DOI: 10.3390/math5010002
- **Tuna, S.**, Sukhanov, A., Töreyn, B. U., “Lossy Compression of Hyperspectral Images by Using Enhanced Multivariate Products Representation (EMPR) Method”, in Turkish, *24th. IEEE Congress on Signal Processing and Communication Applications, SIU'16*, **2016**, DOI: 10.1109/SIU.2016.7496142
- **Tuna, S.**, Demiralp, M. “Bivariate enhanced multivariate products representation (EMPR) at zero volume limit via geometric separation”, *AIP Conference Proceedings, ICCMSE'15*, **2016**, DOI: 10.1063/1.4938944
- **Tuna, S.**, Tunga, B., “A Novel Piecewise Multivariate Function Approximation Method via Universal Matrix Representation”, *J. Math. Chem.*, **2013**, DOI:10.1007/s10910-013-0179-y