

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ**

**İKİ VE ÜÇ BOYUTLU FARKLI ROBOTİK SİSTEMLER ARASINDA  
KİNEMATİK DÖNÜŞÜM ANALİZLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Mustafa Sezer ÖZMEN**

**Bilişim Uygulamaları Anabilim Dalı**

**Coğrafi Bilgi Teknolojileri Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. H. Hakan DENLİ**

**EYLÜL 2018**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ**

**İKİ VE ÜÇ BOYUTLU FARKLI ROBOTİK SİSTEMLER ARASINDA  
KİNEMATİK DÖNÜŞÜM ANALİZLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Mustafa Sezer ÖZMEN  
(706121028)**

**Bilişim Uygulamaları Anabilim Dalı**

**Coğrafi Bilgi Teknolojileri Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. H. Hakan DENLİ**

**EYLÜL 2018**



İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 706121028 numaralı Yüksek Lisans **Mustafa Sezer ÖZMEN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**İKİ VE ÜÇ BOYUTLU FARKLI ROBOTİK SİSTEMLER ARASINDA KİNEMATİK DÖNÜŞÜM ANALİZLERİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :** **Prof. Dr. Hakan DENLİ** .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :** **Doç. Dr. Serdar EROL** .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Dr. Öğr. Üyesi H. Can Ünen** .....

Maltepe Üniversitesi

**Teslim Tarihi :** **03 Eylül 2018**

**Savunma Tarihi :** **07 Eylül 2018**





*Canım yeğenim Ali'ye,*





## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında üç boyutlu hareketi sağlanan bir robot tasarlanıp eklemleri arasında kinematik dönüşümler gerçekleştirilmiş ve bu robot için bir çalışma kapasitesi bulunmuştur.

Farklı Robotik Sistemler Arasında Dönüşümler konulu tez çalışmamda bana bilgi desteğini asla esirgemeyen ve yüksek lisans hayatım boyunca zor dönemlerimde bana destek olan değerli hocam Prof. Dr. H. Hakan Denli'ye, tezin tamamlanması süresince fikirleriyle destek olan tez danışmanlarım Doç. Dr. Serdar Erol ve Dr. Öğr. Üyesi H. Can Ünen'e tüm içtenliğimle teşekkür ederim.

Beni yüksek lisans yapmaya teşvik eden ve çocukluğumdan bugüne kadar tüm eğitim dönemlerimde bana her konuda destek olan babam Haluk İbrahim ÖZMEN'e, sevgisini hayatı boyunca hiçbir zaman eksik etmeyen annem Berrin ÖZMEN'e, bu tez süresi boyunca desteklerini esirgemeyen abim Salim ÖZMEN ve değerli eşi Jale ÖZMEN'e teşekkür ederim.

Mayıs 2018

Mustafa Sezer ÖZMEN  
Harita Mühendisi



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
KISALTMALAR .....	xi
SEMBOLLER .....	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET.....	xix
SUMMARY .....	xxi
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1 Tezin Amacı .....	1
1.2 Literatür Araştırması .....	1
<b>2. KOORDİNAT SİSTEMLERİ.....</b>	<b>3</b>
2.1 Düzlemde Koordinat Sistemleri .....	4
2.1.1 Düzlemde doğrusal koordinat sistemleri.....	4
2.1.2 Düzlemde eğri çizgili koordinat sistemleri .....	5
2.2 Uzayda Koordinat Sistemleri .....	6
2.2.1 Uzayda lineer koordinat sistemleri .....	6
2.2.2 Uzayda eğri çizgili koordinat sistemleri .....	7
<b>3. JEODEZİK KOORDİNAT SİSTEMLERİ .....</b>	<b>9</b>
3.1 Yersel Koordinat Sistemi .....	9
3.1.1 Üç boyutlu kartezyen koordinat sistemi.....	9
3.1.2 Elipsoidal koordinat sistemi.....	10
3.2 Koordinat Sistemleri Arasında Dönüşümler .....	12
3.2.1 Üç Boyutta Dönüşüm .....	13
3.2.1.1 Benzerlik dönüşümü .....	13
3.2.1.2 Afin Dönüşüm .....	16
<b>4. ROBOT KİNEMATİĞİ .....</b>	<b>19</b>
4.1 Endüstriyel Robotlar, Kullanım Alanları ve Amaçları.....	19
4.1.1 Robot Nedir? .....	19
4.1.2 Robotların Çeşitleri ve Kullanım Alanları .....	20
4.1.2.1 Endüstriyel robotlar.....	20
4.1.2.2 Mobil robotlar .....	21
4.1.2.3 Hizmet robotları .....	22
4.1.2.4 Genel amaçlı otonom robotları.....	22
4.1.2.5 İnsansı robotlar .....	22
4.2 İleri Yön Kinematığı .....	23
4.2.1 Dönme (rotasyon) matrisi .....	23
4.2.1.1 İki ve üç boyutta dönüşüm .....	26
4.2.2 Birleşik dönme matrisi .....	28
4.2.3 Homojen dönüşüm matrisi .....	29
4.2.4 Birleşik homojen dönüşüm matrisi .....	32
4.2.5 Eklem ve bağ parametreleri .....	34

4.2.6 Denavit-Hertanberg Yöntemi .....	37
4.2.7 Endüstriyel robotlarda kullanılan bilek düzenleşimleri .....	39
4.2.8 Kol matrisi.....	41
4.3 Ters Kinematik .....	42
4.3.1 Ters kinematik çözüm yöntemleri.....	45
4.3.1.1 Analitik çözüm yaklaşımı.....	45
4.3.1.2 Sayısal çözüm yöntemleri .....	46
4.4 İki Boyutlu Düzlemde Bir RR Robotunun Kinematığı .....	48
4.5 Bir RRP Robotunun Kinematığı ve Eklemleri Arasındaki Dönüşümler.....	56
<b>5. ÜÇ BOYUTLU DÜZLEMDE HAREKET EDEBİLEN BİR ROBOT TASARIMI VE EKLEMLERİ ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER İLE ÇALIŞMA ALANININ BELİRLENMESİ.....</b>	<b>65</b>
<b>6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>77</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>79</b>
<b>EKLER.....</b>	<b>81</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>83</b>



## **KISALTMALAR**

**D-H** : Denavit-Hertanberg

**RR** : Dönel-Dönel (Rotational-Rotational)

**RRR** : Dönel-Dönel-Dönel (Rotational-Rotational-Rotational)

**RRP** : Dönel-Dönel-Prizmatik (Rotational-Rotational-Prismatic)

**RPP** : Dönel-Prizmatik-Prizmatik (Rotational-Prismatic-Prismatic)

**PPP** : Prizmatik-Prizmatik-Prizmatik (Prismatic-Prismatic-Prismatic)

**PRR** : Prizmatik-Dönel-Dönel (Prismatic-Rotational-Rotational)

**M.Ö.** : Milattan Önce



## SEMBOLLER

<b>k</b>	: Ölçek
<b>R</b>	: Dönme Matrisi
<b>T</b>	: Temel homojen dönüşüm matrisi
<b>V</b>	: Eş potansiyelli yüzey
<b>W</b>	: Yer potansiyeli
<b>tx, ty, tz</b>	: Öteleme
<b><math>\varphi</math></b>	: Kutupsal açı
<b><math>\alpha</math></b>	: X ekseninde dönüklük
<b><math>\phi</math></b>	: Y ekseninde dönüklük
<b><math>\theta</math></b>	: Z ekseninde dönüklük
<b><math>\lambda</math></b>	: Boylam
<b><math>\varepsilon, \psi, \omega</math></b>	: Dönüklük açıları
<b><math>\Delta</math></b>	: Ölçek
<b><math>\eta</math></b>	: Perspektif dönüşümü
<b>p</b>	: Konum vektörü
<b><math>\sigma</math></b>	: Ölçek





## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 : Eklem ve bağ parametreleri.....	36
Çizelge 4.2 : Düzlemsel RR Robotu İçin D-H Parametreleri.....	49
Çizelge 4.3 : RRP robotunun D-H değişkenlerinin belirlenmesi. ....	57
Çizelge 5.1 : Bir RPP robotu için D-H değişkenleri.....	68





## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1 : Kontravariant Koordinatlar. ....	4
Şekil 2.2 : Kovariant Koordinatlar. ....	5
Şekil 2.3 : Eğri Koordinatlar.....	5
Şekil 2.4 : Kutupsal Koordinatlar. ....	6
Şekil 2.5 : Uzayda Lineer Koordinat Sistemleri.....	7
Şekil 3.1 : 3-B Kartezyen Koordinat Sistemi. ....	10
Şekil 3.2 : Elipsoidal Dik ve Eğri Koordinat Sistemleri.....	10
Şekil 3.3 : Eşpotansiyelli yüzeyler ve jeoid.....	11
Şekil 3.4 : Eşpotansiyel yüzeyler ve elipsoid yüzeyi.....	12
Şekil 3.5 : Üç boyutta benzerlik dönüşümü.....	14
Şekil 4.1 : Karmaşık yapıli manipülatörler ve robot elleri. ....	21
Şekil 4.2 : Tutucuları ile öne çıkar mobil robotlar.....	21
Şekil 4.3 : Hizmet robotları olan Roomba ve Trilobite.....	22
Şekil 4.4 : İnsansı robotlardan ASIMO.....	23
Şekil 4.5 : Koordinat Sistemi.....	24
Şekil 4.6 : X, Y ve Z eksenleri etrafındaki 3 temel dönüklük.....	25
Şekil 4.7 : Kartezyen koordinat sisteminde dönüşümler. ....	26
Şekil 4.8 : Y eksenli etrafında dönüşüm.....	27
Şekil 4.9 : Z eksenli etrafında dönüşüm.....	28
Şekil 4.10 : İki koordinat sistemi arasındaki ilişki. ....	29
Şekil 4.11 : Farklı eklemlere ait robotlar.....	34
Şekil 4.12 : Bir robot örneğinde eklem ve bağlar.....	35
Şekil 4.13 : Robotik sistemlerde eklem parametreleri.....	38
Şekil 4.14 : Koordinatların atanması. ....	39
Şekil 4.15 : Euler bileğinin düzenleşimi.....	40
Şekil 4.16 : Eklem kaçıklılıklı bileğinin düzenleşimi.....	40
Şekil 4.17 : Normal (n), kaydırma (s), yaklaşım (a) vektörleri. ....	42
Şekil 4.18 : İleri ve ters kinematik problemin şematik gösterimi.....	42
Şekil 4.19 : Matematiksel ifade ile fiziksel çözüm arasındaki ilişki. ....	43
Şekil 4.20 : PUMA-560 robotu için dört farklı çözüm.....	44
Şekil 4.21 : İki boyutlu düzlemde RR robotu.....	48
Şekil 4.22 : RR robotuna koordinat sistemlerinin atanması.....	49
Şekil 4.23 : RRP robotu ve koordinatların atanması.....	56
Şekil 5.1 : RPP Robotu.....	65
Şekil 5.2 : Başlangıç koordinatı ve D-H parametreleri bilinen robotun uç eleman koordinatını hesaplama.....	66
Şekil 5.3 : Başlangıç ve bitiş koordinatlarından robotun değışken parametrelerini hesaplama.....	67



## İKİ VE ÜÇ BOYUTLU FARKLI ROBOTİK SİSTEMLER ARASINDA KİNEMATİK DÖNÜŞÜM ANALİZLERİ

### ÖZET

Günümüzde teknoloji alanında en büyük gelişme kaydeden alanlardan birisi robotik sistemlerdir. Tarihi milattan öncesine kadar dayanan robotların günümüzde yapay zekaya sahip olmaya başladıklarını göz önüne alırsak, bu yapay zekaya katkı sağlayacak en önemli unsurlardan birisi de robotların hareketidir. Robotların hareketinin belirli bir konuma bağlı olması, bu konumun doğruluğu ve robot hareketlerinin istenen düzeyde, kesin çözümler sunması bir robot tasarımındaki en önemli gereksinimlerdendir.

Bu tezde öncelikle düzlemde ve uzayda koordinat sistemlerinden bahsedilmiş ve ardından bu tez çalışmasına altlık sağlayacak olan jeodezik koordinat sistemlerine ve koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm yöntemlerine yer verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ayrıca robotların tarihçesine kısaca değinilmiş olup farklı çeşitlerde robotların çalışma alanlarından ve amaçlarından bahsedilmiştir. Robotların hareketlerini incelemek amacıyla ileri ve geri kinematik yöntemlere değinilmiş ve bu kinematik analizlerinin yapılabilmesi için gerekli olan jeodezik dönüşüm matrislerinin oluşturulma aşaması anlatılmıştır. Dönüşüm matrisleri oluşturulurken kullanılan üç boyutlu kartezyen koordinat sistemine değinilmiştir.

Tez çalışmasının örnek uygulama kısımlarında ilk olarak iki boyutlu düzlemde hareketi gerçekleştirebilen bir robot düşünülmüştür. Bu robota ait başlangıç noktasının koordinatlarına, robotun eklem ve bağ parametrelerine değerler atanarak ileri ve ters kinematik dönüşümleri gerçekleştirilmiştir. Aynı şekilde başlangıç noktası belirli olan bir rotational-rotational-prismatic (RRP) yani iki dönel bir prizmatik eklem yapılı robot için ileri ve ters kinematik denklemler dönüşüm matrisleri yardımıyla çıkarılmış ve robot eklem-bağ parametrelerine değerler atanarak değişken parametreler de hesaplanmıştır. Son uygulamada ise yeni bir robot tasarlanmıştır. Tasarlanan robotun çizimi SketchUp yazılımı ile sağlanmıştır. Başlangıç koordinatları belirli olan ve bir düzlemde bir konuma sabitlendirilmiş şekilde yer alan bu robota bir dönel, iki prizmatik eklem yerleştirilip, bu eklemler ve robot uç işlevcisi arasında ileri ve ters kinematik analizler gerçekleştirilmiştir. Bu analizlerin yapılması için robot eklemleri arasında üç boyutlu kartezyen koordinatların dönüşümü gerçekleştirilmiştir. Robotun eklem parametreleri Denavit-Hertanberg yöntemine göre belirlenmiş ve ters kinematik analizinde analitik çözüm yöntemi uygulanmıştır. Yapılan ileri ve ters kinematik analizleri sonucunda robotun alabileceği minimum ve maksimum parametre değerleri de tespit edilmiş ve robot uç işlevcisinin varacağı koordinatlar bulunmuştur.



# **KINEMATIC TRANSFORMATION ANALYSIS BETWEEN TWO AND THREE DIMENSIONAL VARIOUS ROBOTIC SYSTEMS**

## **SUMMARY**

Recently, we've been witnessing that robotic systems has been improved in technology sites fabulously. We can see the history of robots date to before common era if we need to research. If we consider that robots now have artificial intelligence, one of the most important factors that contribute to this artificial intelligence is capability of the movement of robots. There are significant requirements in a robot design such motions of the robots depends on a specific position and correctness of their positions.

In this thesis, firstly coordinate systems on a plane and space are mentioned and after that geodetic coordinate systems and transformations between those coordinate systems which provide a base for the study of this thesis are explained. Three dimensional cartesian coordinate systems which are an example of terrestrial coordinate systems from geodesic coordinate systems and the transformations in three dimensions which these coordinate systems can perform between them can be named as the basis of this thesis work. Terrestrial coordinate systems are one-, two-, or three-dimensional coordinate systems that are difficult to identify due to reasons attributable to physical properties of the earth. The three-dimensional cartesian coordinate systems are coordinate systems consisting of three mono-parametric surfaces with a fixed center in space. In a three-dimensional cartesian coordinate system, the center of gravity is the center point (starting point) of this coordinate system, Z axis coincides with the rotation axis of the surface, the direction passing through the Greenwich meridian with the X axis within the equatorial plane, the Y axis on the equatorial plane and perpendicular to the X and Z axes which are assigned by right hand rule.

In this thesis study, the history of robots is briefly mentioned, and work areas and purposes of different kinds of robots are mentioned. In this thesis, the robot that is designed is considered as a kind of industrial robot. Industrial robots usually consist of an articulated (multi-link manipulator) and an end effect attached to a fixed surface. In addition to industrial robots in the thesis, mobile robots, service robots, general purpose autonomous robots and humanoid robots are briefly mentioned.

The forward and backward kinematic methods have been referred to in order to examine the movements of the robots. In robotic systems, movements of joints belonging to all arms and other parts of the robot are defined by robot kinematics. A robot comes from joints that can provide translational and rotational movements and links that connect these joints. The movement of a joint determines the position and orientation of the joint which follows it. In the robot kinematics section of this thesis, the Denavit-Hartenberg method which describes the relationships of robot joints and links and 4x4 homogeneous transformation matrices formed by Maxwell is mentioned. A systematic technique has been proposed by Denavit and Hertenberg for establishing the translation and translation relationship for each adjacent connection. This approach is also known as D-H. After coordinate systems which are connected links have been

assigned, the transformation between adjacent coordinate systems is represented by a  $[4 \times 4]$  homogeneous transformation matrix.

In the sample application part of the thesis study, firstly a robot which can move in two dimensional plane is considered. For a planar robot with two rotational (RR) joints, the forward kinematics are first solved to determine the position of the end-effector the robot, and then the variable D-H parameters of the robot are calculated by using the inverse kinematic method.

For a rotational-rotational-prismatic (RRP) robot with the same first example application, forward and inverse kinematic equations are derived by using transformation matrices and variable parameters are calculated by assigning values to robot joint-link parameters.

In the final application, a new robot is designed. The design of the robot is provided by SketchUp software. Designed to be able to move in all directions in a three-dimensional plane, this robot has three degrees of freedom. It has only one rotational joint and two prismatic joints. By adding two prismatic joints to the robot, the solution of the inverse kinematic problem is also facilitated. This also is the reason why the rotational joint is kept as single and not increased. The more the number of rotational joints is increased, the more physically the solution will be so difficult so a single rotational joint is given. The position of the starting point of this designed RPP robot is known. In this study, after the design of the robot, the parameter values that the robot can take to arrive at a certain position are found and then the position at which these parameters can be reached is determined. Forward and inverse kinematic analyzes were performed between these joints and end function of the robot. In order to perform these analyzes, three-dimensional cartesian coordinates were transformed between robot joints. Parameters of the joints of the robot were determined by being used Denavit-Hartenberg method and analytical solution method was applied in inverse kinematic analysis and analytical solution method was applied in inverse kinematic analysis. As a result of the analyzes of both direct and inverse kinematics, minimum and maximum parameter values belongs to the robot are determined. Correspondingly the coordinates are found for the end-effector.

The inverse kinematics problems of the robot have been solved by analytical solution and exact results have been produced. More than one using of prismatic joints also physically reduced the number of solutions.

The robot in this thesis study was transformed into two and three dimensions by considering that it would not be exposed to any problems after any movement. But for future studies, it is thought that the transformations can be done by affine transformation model. Depending on the time, if the robot is deemed to be subjected to deformation due to the exposure of a joint to any external influences, or if endurance is taken into account, depending on the robot design, since there will be a scale difference between the axes in the robot joints, it will be necessary to apply the affine transformation model. The transformation will be performed so that the scale difference before the transformation is preserved after the transformation.

The robot design in the thesis study corresponds more to the industrial robot class. It is thought that various fields can do certain tasks needed for human power. Since the last two joints are prismatic, any work can be done with a robot on a surface perpendicular to the end-effector of the robot. It is also anticipated that robot joints



and link lengths are adjusted to each other and that they can perform a task of lifting and placing a material if necessary works are done on the carrying capacity.

Once again, if we think about what kind of works can be done on the same robot design and how to develop the robot, a laser meter, a GPS device or such measurement tools can be added to any joint of the robot in order to facilitate convenience in construction and cartography, and the robot can be brought to the capacity to measure between certain points or to assist in making certain point markings.





## **1. GİRİŞ**

Bu bölümde hazırlanan tez çalışmasında gerçekleştirilen çalışmaların amacından ve bu tez oluştururken yapılan literatür araştırmasından bahsedilmiştir.

### **1.1 Tezin Amacı**

Bu tez çalışmasında, farklı robotik sistemler içerisinde jeodezik dönüşümler yapılarak robotların kinematik analizleri gerçekleştirilerek ve her bir robot için hareketleri sonrası varacağı konumların elde edilmesi amaçlanmıştır. Endüstriyel alanlarda kullanılması düşünülerek planlanan ve tasarlanan bir robotun hareketleri jeodezik dönüşümlere dayandırılarak matematiksel olarak modellenmiştir.

Öncelikle 2-boyutlu düzlemde yer alan ve iki döner ekleme sahip bir robotun kinematik analizleri, ardından üç serbestlik dereceli iki döner ve bir prizmatik ekleme sahip bir robot örneği üzerinden ileri ve ters kinematik problemler çözümü amaçlanmıştır. Kinematik dönüşümlerin iki ve üç boyutlu kartezyen koordinat sistemler arasında gerçekleştirilmesi amaçlanmıştır. Çalışmada yer alan bu iki örnekten sonra ise yeni bir robot tasarlanıp bu robot için minimum ve maksimum çalışma alanı kapasitesi oluşturmak planlanmıştır. Tasarlanan robot ise daha basit bir mekanizmaya sahip olan üç serbestlik dereceli tek döner ve iki prizmatik ekleme sahiptir. Tasarlanan bu robotun her üç boyutta da hareket imkanına sahip olması planlanıp robotun en küçük ve en büyük çalışma kapasitesini bulmak amacıyla jeodezik dönüşümler yardımıyla kinematik analizleri yapılmıştır.

### **1.2 Literatür Araştırması**

Tez çalışması kapsamında koordinat sistemleri konusu incelenmiş ve jeodezik koordinat sistemleri açıklanmıştır. Kinematik analizler esnasında yararlanılacak olan ve bu tezin temelini oluşturan iki ve üç boyutlu koordinat sistemleri arasında dönüşüm konusu araştırılmıştır.

Jeodezide yer alan koordinat sistemleri ve koordinat sistemleri arasındaki dönüşümler konusu araştırılırken Ali Kılıçoğlu'nun 1995 yılında yazmış olduğu “Jeodezide Dönüşümler” başlıklı yüksek lisans tezinden ve 1996'da Aydın Üstün'ün “Datum Dönüşümleri” başlıklı yüksek lisans tezinden yararlanılmıştır. Kinematik dönüşümlerin gerçekleştirilmesi için gerekli olan robotik sistemlere ait genel bilgiler ile ileri ve ters kinematik yöntemlerin hesaplanması konusunda Zafer Bingül ve Aydın Küçük'ün 2005 yılında çıkarmış oldukları “Robot Tekniği – I” adlı kitaptan yararlanılmış fakat bu kitap içerisinde yer alan gerek konu anlatımında gerekse de örneklerde koordinat sistemleri arasındaki dönüşümlerin jeodezik bir altyapıya sahip olmadığı ve dönüşüm matrislerinin jeodezik olarak hatalı oluşturulduğu tespit edilmiştir. Ayrıca robotik sistemlerde kinematik dönüşümler esnasından robotların eklem ve bağ parametrelerinin belirlenmesi hususunda Denavit-Hertanberg yöntemi araştırılmış ve çeşitli internet kaynaklarından (Url-1), (Url-2) ve “Robot Tekniği-1” adlı kitaptan yararlanılmıştır.

## 2. KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Jeodezide koordinat sistemlerini geometrik ve fiziksel olmak üzere iki parametre oluşturmaktadır. Bu bölümde koordinat sistemlerinin geometrik temelleri anlatılacak ve matematiksel modeller incelenecektir.

Üç boyutlu bir afin uzayında ( $A_3$ ) bir koordinat sistemi  $\Sigma$ , uzaydaki koordinat sisteminin merkez noktası olan  $O$  noktasını ve 3-B vektör uzayından  $V_3$ ,  $A_3$  uzayına ait üç lineer bağımsız vektörü ( $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$ ) içerir. Bu şekilde ( $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$ ),  $V_3$  vektör uzayına bir baz oluşturur.  $\Sigma$  koordinat sistemi  $\Sigma = (O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  ile gösterilir (Kılıçoğlu, 1995).

$A_3$  uzayı içerisinde yer alan bir  $P$  noktası,  $O$  başlangıç noktasından başlamak üzere 3 vektörün ( $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$ ) lineer kombinasyonları ile tek anlamlı olarak belirlenebilir.

$P$  noktasının gösterimi ise;

$$P = O + (\lambda_1 \underline{x} + \lambda_2 \underline{y} + \lambda_3 \underline{z}) \quad (2.1)$$

şeklindedir. Buradaki  $\lambda_i$  sayıları  $\Sigma$  koordinat sistemindeki  $P$  noktasının koordinatlarını temsil eder ve şu şekilde gösterilir;

$$P = P_\Sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_\Sigma \quad (2.2)$$

Eğer ( $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$ ) bir ortonormal baz oluşturursa,  $\Sigma$  koordinat sistemi bir Kartezyen koordinat sistemi oluşturur.

$O_1$  ve  $O_2$  başlangıç noktaları olmak üzere,  $\Sigma_1 = \{O_1, \underline{x}_1, \underline{y}_1, \underline{z}_1\}$  ve  $\Sigma_2 = \{O_2, \underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_2\}$  iki ayrı koordinat sistemi ise  $P$  noktasının her iki sistemdeki koordinatları;

$$\underline{P}_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.3)$$

$$\underline{P}_2 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \quad (2.4)$$

olmak üzere her iki sistemin birbirine dönüşüm formülü (2.5) ve (2.6)'daki gibi ifade edilir.

$$\underline{P}_2 = \underline{P}_1 \underline{A} + \underline{O}_1 \quad (2.5)$$

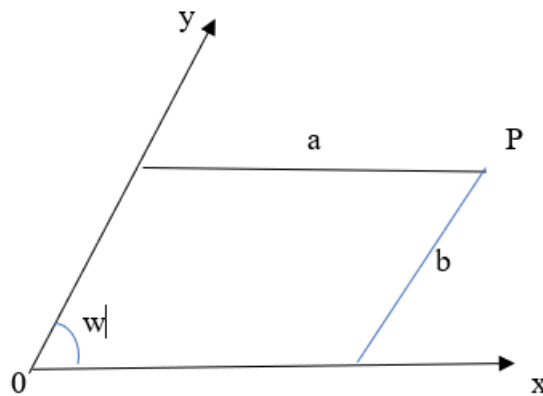
$$\underline{P}_2 = \underline{P}_1 \underline{B} + \underline{O}_2 \quad (2.6)$$

## 2.1 Düzlemde Koordinat Sistemleri

### 2.1.1 Düzlemde doğrusal koordinat sistemleri

Düzlem üzerindeki sabit bir O merkez (başlangıç) noktası ve bu noktada kesişen x ve y doğruları düzlem üzerindeki bir koordinat sistemini oluşturur. Bir koordinat sisteminin eksenlerini x ve y doğruları oluşturur ve bu doğrusal koordinat sistemi  $\Sigma = (O, x, y)$  şeklinde ifade edilir. Bu x ve y eksenleri, başlangıç noktası 0 olmak üzere + veya - değerler olmak üzere birim uzunluklarla tanımlıdır (Bronstein ve Semendyayev, 1979).

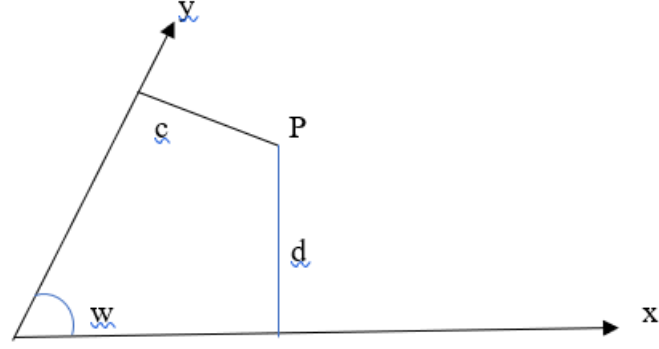
Bir P noktasından eksenlere çizilen paralellerin izdüşümlerinin koordinat eksenlerinde 0 noktasından başlamak üzere ayırdığı parçalara kontravariant yani paralel koordinatlar denir. İzdüşüm doğrusunun koordinat eksenlerini hangi tarafta kestiğine bağlı olarak koordinatların işaretleri belirlenir. P noktasına ait kontravariant koordinatlar Şekil 2.1'de P(a, b) şeklinde görülmektedir (Kılıçoğlu, 1995).



Şekil 2.1 : Kontravariant Koordinatlar.

### 2.1.2 Düzlemde eğri çizgili koordinat sistemleri

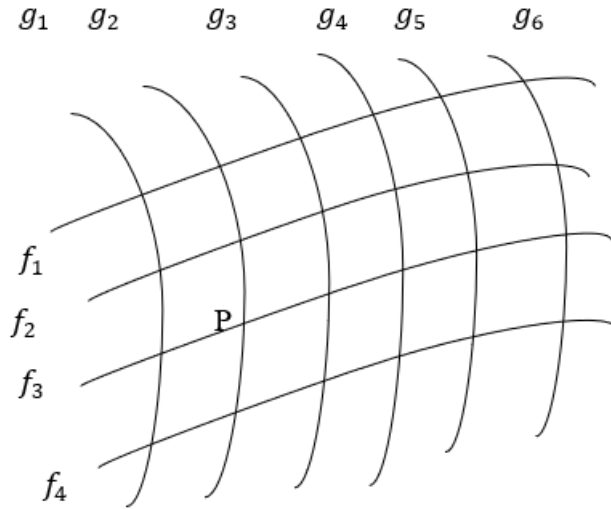
Düzlemde eğri çizgili koordinat sistemleri, lineer koordinat sistemlerinin daha da genelleştirilmiş halidir ve iki adet tek parametrelili eğri gruplarından oluşurlar. Düzlemdeki bir P noktasından bir doğrultuda yalnızca tek bir eğri geçer. Her iki eğri yalnızca bir noktada kesişir (Bronshtein and Semendyayev,1985).



Şekil 2.2 : Kovariant Koordinatlar.

P noktasından koordinat eksenlerine inilen ortogonal izdüşüm doğrusunun eksenleri kestiği nokta ile başlangıç noktası arasındaki parçaya kovariant koordinatlar denir. P noktasının kovariant koordinatları  $P(c, d)$ , Şekil 2.2’de gösterilmektedir (Kılıçoğlu, 1995).

Bir P noktasından geçen iki eğrinin iki parametresi P noktasının eğri koordinatlarını gösterir. P noktasının eğri koordinatları  $P(f_3, g_2)$  olarak Şekil 2.3’te gösterilmiştir.

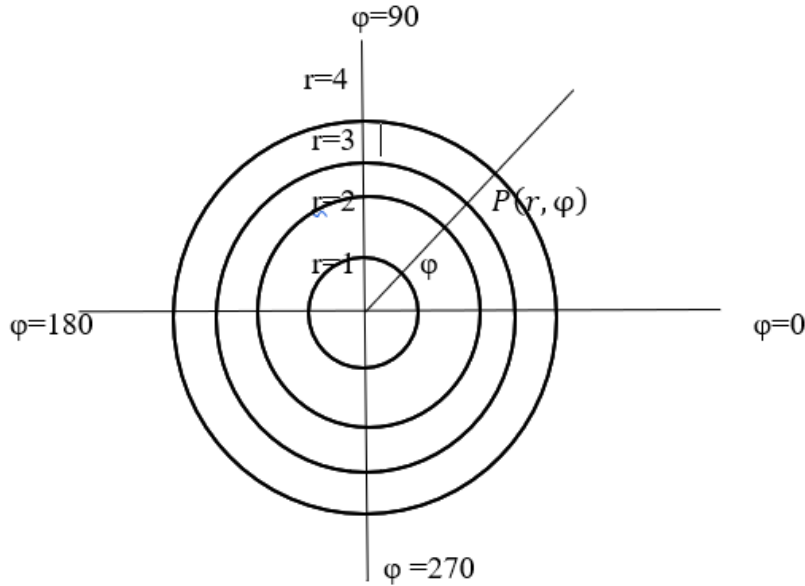


Şekil 2.3 : Eğri Koordinatlar.

Bir eğri koordinat sistemleri ayrıca bir çeşit kutupsal (polar) koordinat sistemidir. Kutupsal koordinat sistemi düzlemde sabit bir nokta 0 (başlangıç noktası, kutup), kutup etrafında merkezsiz çemberler ve bir tanesi kutupsal eksen olarak tanımlanan ( $\varphi=0$ ) ve merkezden başlayan ışıklardan oluşur. Kutupsal koordinat sistemlerinde kullanılan parametreler;

- $r$ = yarıçap, kutup noktasından olan uzaklıklar
- $\varphi$ = kutupsal açı, P noktasından geçen ışık ile kutupsal eksen arasındaki açıdır ve saat yelkovanı istikametinin tersi pozitif olacak şekilde ölçülür.

Kutupsal koordinat sistemi üzerindeki herhangi bir P noktası  $P(r, \varphi)$  olarak Şekil 2.4'teki gibi gösterilir (Kılıçoğlu, 1995).



Şekil 2.4 : Kutupsal Koordinatlar.

## 2.2 Uzayda Koordinat Sistemleri

### 2.2.1 Uzayda lineer koordinat sistemleri

Uzaydaki lineer bir koordinat sistemini, uzayda yer alan sabit bir O başlangıç noktası ve üç farklı düzlemden gelip başlangıç noktasında kesişen x, y, z – koordinat eksenleri oluşturur. Lineer bir koordinat sistemi  $\Sigma = \{0, x, y, z\}$  ile gösterilir. Buradaki koordinat eksenlerinin ikisi bir düzlem oluşturur. Bu düzlemler xy, yz veya xz düzlemleridir. Her üç eksenin pozitif uçları arasındaki açıların 'cosinüs'leri;

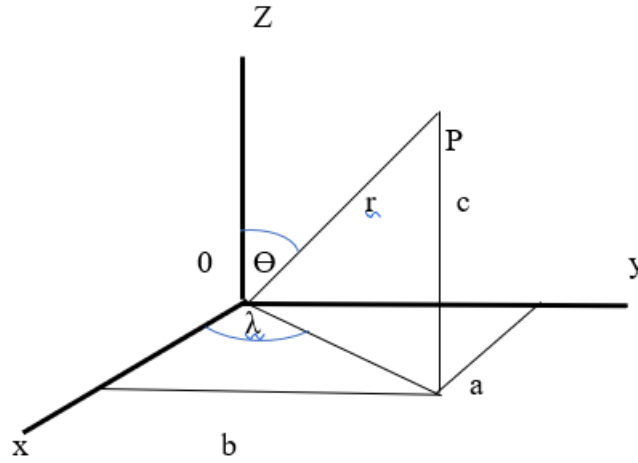


$$\cos(y, z) = w_1 \quad (3.7)$$

$$\cos(x, z) = w_2 \quad (3.8)$$

$$\cos(x, y) = w_3 \quad (3.9)$$

koordinat açıları olarak adlandırılır.  $w_1 = w_2 = w_3 = 90^\circ$  olması halinde, bu koordinat sistemine kartezyen yani dik koordinat sistemi denir. Bu üç açının  $90^\circ$ 'den farklı olması durumunda oluşacak koordinat sistemine oblik koordinat sistemi denir. Bir P noktasının  $\Sigma$  koordinat sistemine göre gösterimi  $P = P_\Sigma = (a, b, c)$  şeklindedir. Şekil 2.5'te uzaydaki bir lineer koordinat sistemi üzerinde yer alan P noktası gösterilmiştir (Kılıçoğlu, 1995).



Şekil 2.5 : Uzayda Lineer Koordinat Sistemleri.

### 2.2.2 Uzayda eğri çizgili koordinat sistemleri

Uzayda eğri çizgili koordinat sistemleri üç adet tek parametrelili yüzeylerden oluşur. Uzayda yer alan herhangi bir P noktasından her yüzey grubunun yalnızca tek bir yüzeyi geçer. Bu P noktasının eğri koordinatlarını oluşturur üç yüzeye ait parametre değerleri oluşturur. Küresel ve kutupsal koordinat sistemleri eğri koordinat sistemlerinin en önemli örnekleridir. Bu sistemler aynı zamanda düzlemde kutupsal koordinat sistemlerinden türetilmiştir. Kutupsal koordinat sistemini tanımlayıcı parametreler kürenin yarıçapı  $r$ , boylam açısı  $\lambda$  ve enlemi bütünleyici açı olan  $\theta$ 'dır. Uzaydaki bir P noktasının kutupsal koordinat sisteminde gösterilişi şekli  $P(r, \lambda, \theta)$ 'dir ve Şekil 2.5'teki gibidir. (Kılıçoğlu, 1995).



### **3. JEODEZİK KOORDİNAT SİSTEMLERİ**

Jeodezik koordinat sistemleri; astronomik ölçülerin tanımlandığı uzay koordinat sistemleri, jeodezik hesapların tanımlandığı yersel koordinat sistemleri ve uydu koordinat sistemleri olarak şeklinde üç kategoriye ayrılabilir.

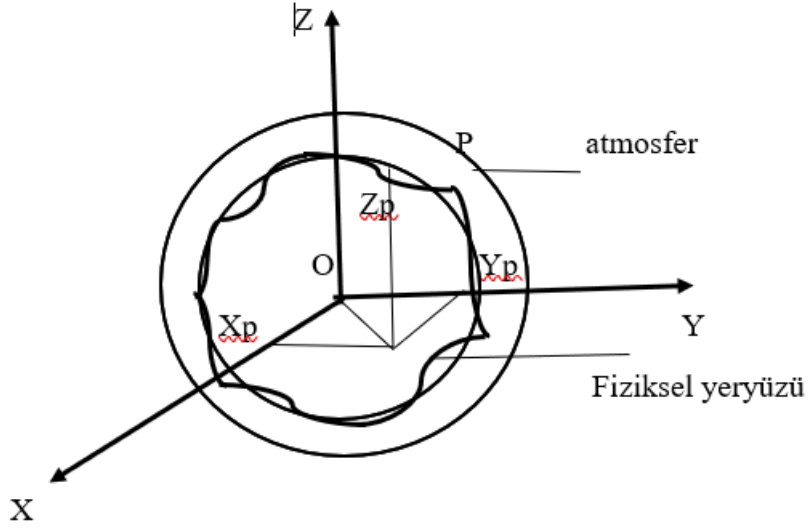
#### **3.1 Yersel Koordinat Sistemi**

Yersel koordinat sistemleri, yerin fiziksel özelliklerinden kaynaklanan nedenlerden ötürü tanımlanması güç olan bir, iki veya üç boyutlu koordinat sistemleridir. Yeryüzünün fiziksel özelliklerinin matematiksel ifade edilmesinin güç olmasından ötürü yeryüzünde yapılan jeodezik ölçülerle, geometrik ortamda yapılan hesaplamalar arasında kesin bağıntıların kurulmasını engellemektedir. Bu yüzden jeodezik ölçümlerin ve hesaplamaların yapıldığı fiziksel ortamda doğal koordinat sistemleri, hesaplamaların yapıldığı geometrik ortamda ise referans koordinat sistemleri tanımlanmaktadır (Kılıçoğlu, 1995).

Karşılaşılan bu zorluklar yeryüzüne fiziksel anlamda çok benzeyen ve matematiksel anlamda daha basit bir şekilde ifade edilen bir yüzeyle çözülmektedir. Yeryüzünün fiziksel özelliklerine bağlı olarak tanımlanan jeodin hesaplamalarda referans yüzey olarak alınması buna bir örnek teşkil eder. (Üstün, 1996).

##### **3.1.1 Üç boyutlu kartezyen koordinat sistemi**

Uzayda sabit bir merkezi olan ve üç adet tek parametrelili yüzeyden oluşan koordinat sistemleridir. Bu tip bir koordinat sisteminin üzerindeki tüm noktalarda türevinin alınabiliyor olması gerekmektedir. Ayrıca merkez noktası, eksenlerin doğrultuları ve bu eksenlerdeki birim uzunluk tanımlanmalıdır. Üç boyutlu bir kartezyen koordinat sisteminde O merkez noktası (başlangıç noktası) yerin ağırlık merkezi, Z eksenini yeryüzünün dönme eksenini ile çakışık, X eksenini ekvator düzlemi içerisinde olmak şartıyla Greenwich meridyeninden geçen doğrultu, Y eksenini ise ekvator düzlemi üzerinde ve X ile Z eksenlerine dik olarak sağ el kuralına uygun biçimde atanır. Örnek bir üç boyutlu kartezyen koordinat sistemi Şekil 3.1'deki gibidir. (Kılıçoğlu, 1995).

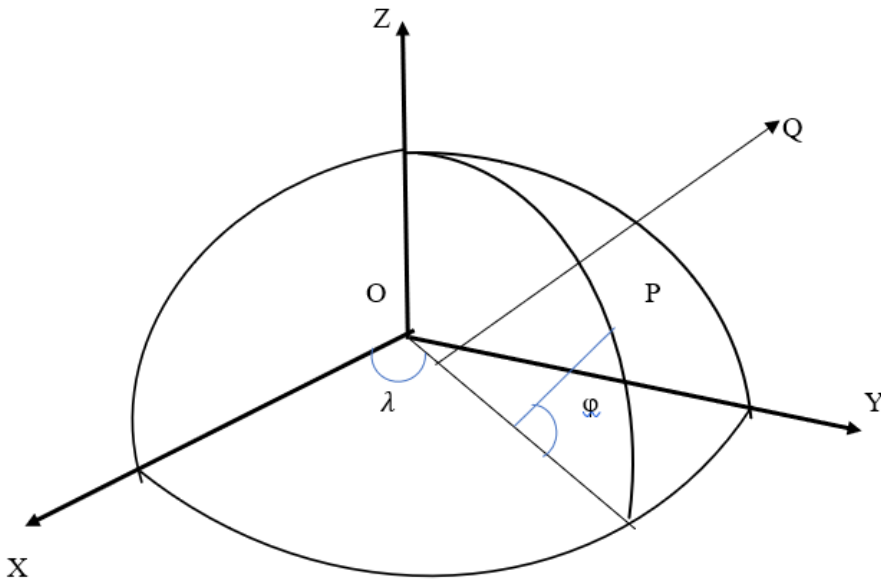


Şekil 3.1 : 3-B Kartezyen Koordinat Sistemi.

### 3.1.2 Elipsoidal koordinat sistemi

Bir elipsoidal koordinat sistemi, kartezyen koordinat sistemi başlangıç noktası ile çakışık ve büyük yarı eksenini XY düzleminde (ekvator düzlemi) bulunan bir dönel elipsoid ve bu elipsoide göre tanımlanan yüzeyler ile tanımlanabilir (Kılıçoğlu, 1995).

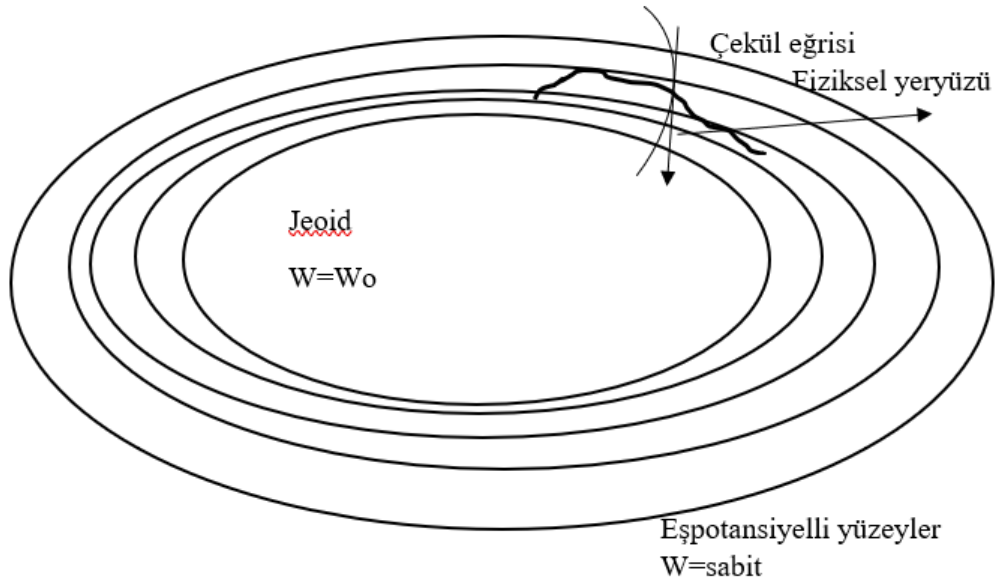
Herhangi bir P noktasından bir elipsoid normalini inildiğinde koordinat sisteminde yer alan aksenlere göre Şekil 3.2'deki gibi enlem ve boylam belirlenebilir.



Şekil 3.2 : Elipsoidal Dik ve Eğri Koordinat Sistemleri.

Eğer bir Q noktası elipsoid üzerinde değilse, bunun tanımlanabilmesi için ek bir parametreye daha ihtiyaç duyulur. Bu parametre yer çekiminin etkisinden kaynaklanan yerpotansiyelidir (Hotine, 1957).

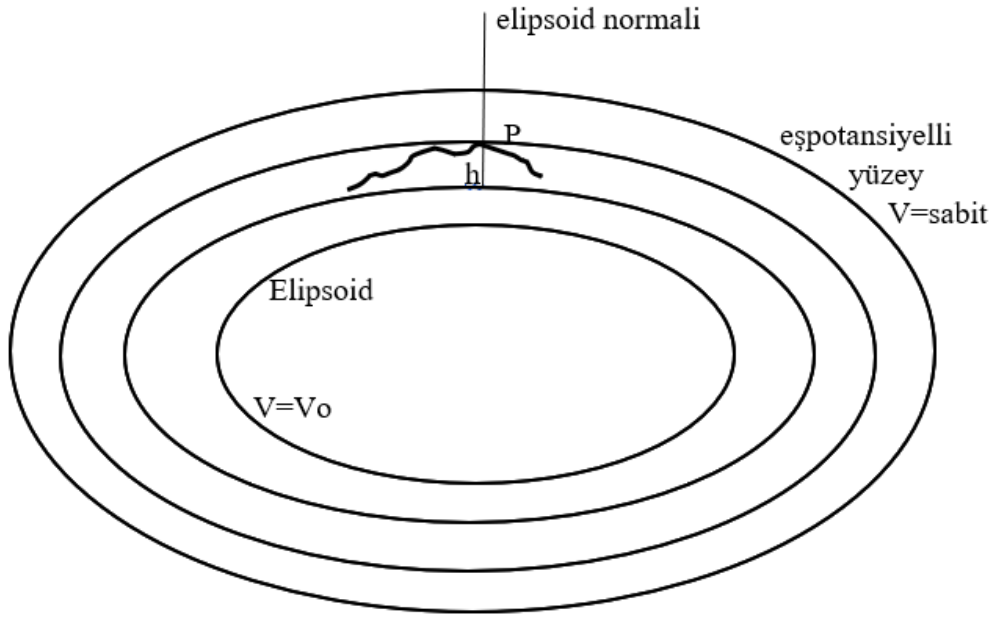
Q noktasından inilen normal bize zenit doğrultusunu gösterir. Zenit doğrultusu boyunca, yer potansiyeli W farklı değerler alır. Bu doğrultu boyunca bütün noktalardan bir yüzey geçmektedir. Bütün bu noktalardan geçen yüzeylerin her birinde yerpotansiyelinin aynı olmasından dolayı bu yüzeylere eşpotansiyel yüzeyler denir. Q noktasının üçüncü koordinatının belirlenmesi bu eşpotansiyel yüzeyin belirlenmesi ile olur. Fakat sadece yerpotansiyelinin belirlenmesi hassas doğrulukta istenilen jeodezik hesaplamalar için yeterli olmaz. Bunun için fiziksel ortamda yapılan jeodezik ölçmeler ile geometric sistemler arasında ilişkiler kurulmalıdır. Eşpotansiyelli yüzeyler ve jeoid, Şekil 3.3'te gösterilmiştir (Kılıçoğlu, 1995).



**Şekil 3.3 :** Eşpotansiyelli yüzeyler ve jeoid.

Uzaydaki bir Q noktasından geçen eşpotansiyel yüzey normali boyunca yüzeyler birbirine paraleldir ve bir eşpotansiyelli yüzeyin normali diğerlerine de diktir. Benzer şekilde, eğer elipsoid yüzeyi referans kabul edilirse, buradan Q noktasına kadar elipsoid normali boyunca ölçülen yükseklik elipsoid yükseliğidir (h) ve Q noktasının üçüncü koordinatı belirlenir. Elipsoid yüzeyini referans aldığımız takdirde Şekil 3.4'deki gibi bir sistemde jeodezik hesaplamalar gerçekleştirilebilir (Kılıçoğlu, 1995).

Eğer yer potansiyeli son koordinat olarak belirlenirse, referans olan eşpotansiyel yüzey ile Q noktasından geçen eşpotansiyel yüzey arasındaki fark bize son koordinatı verir. Eğer yükseklik farkı iki eşpotansiyel yüzey arasındaki çekül eğrisi boyunca ölçülüyorsa bu bize ortometrik yükseliği (H) verir. Q noktasına ait potansiyel farkı ve ortometrik yükseklik arasındaki ilişki seçilmiş olan yükseklik sistemi ile doğrudan ilişkilidir. Ortometrik yükseliğin tanımı için belirlenen referans yüzeye jeoid denmiş ve bu yüzey C.F. Gauss tarafından yeryüzünün matematiksel şekli olarak tanımlanmıştır (Heiskanen ve Moritz, 1967; Gürkan, 1984; Kılıçoğlu 1995).



Şekil 3.4 : Eşpotansiyel yüzeyler ve elipsoid yüzeyi.

### 3.2 Koordinat Sistemleri Arasında Dönüşümler

Koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm, herhangi bir koordinat sisteminin içerdiği tüm bilgilerin ve verilerin bir başka koordinat sistemine aktarılıp orada tanımlanmasıdır. Eğer iki sistemde de tanımlı ortak bir veri var ise bu iki koordinat sistemi arasında dönüşüm yapabilmek mümkündür. Bu verileri kullanarak koordinat sistemleri arasındaki ilişkiyi tanımlayacak olan bir model yardımıyla parametreler hesaplanır ve dönüşüm yapılabilir (Üstün, 1996).

Koordinat sistemleri arasında dönüşüm yaparken bir sistemdeki elemanların bazı özellikleri bozulur veya kaybolur, bazı özellikleri ise aynı şekilde diğer sisteme aktarılır. Eğer noktalar arasındaki açılar korunuyorsa fakat şeklin veya resmin aynı büyüklükte olacak şekilde aktarılma durumu söz konusu değilse bu tür dönüşümler benzerlik dönüşümleridir. Uzunluk ve alanla beraber başka özelliklerin de korunabildiği dönüşümler ise afin dönüşümü olarak adlandırılır (Kılıçoğlu, 1995; Üstün, 1996).

### **3.2.1 Üç Boyutta Dönüşüm**

Üç boyutta dönüşümlerin gerçekleşebilmesi için her iki datum arasındaki parametrelerin en doğru şekilde belirlenip, iki sistemdeki ortak noktalara ait verilerin bilinmeyen parametre sayısından daha fazla olmasına dikkat ederek dengeleme yapılır. Dönüşüm yapılırken kullanılan parametreler ölçek, dönüklük ve ötelemedir (Üstün, 1996).

Yükseklik, üç boyutlu dönüşümlerde sıkça rastlanan sorunlardandır. Uydu koordinat sistemi ve ülke koordinat sistemi arasında dönüşüm yapıldığı takdirde daha hassas bir jeoide ihtiyaç duyulur. Ülke ölçmelerinde yersel ölçümlerle elde edilen noktaların ortometrik yükseklikler, jeoid yüksekliği sayesinde elipsoidale sisteme dönüştürülebilmelidir (Üstün, 1996).

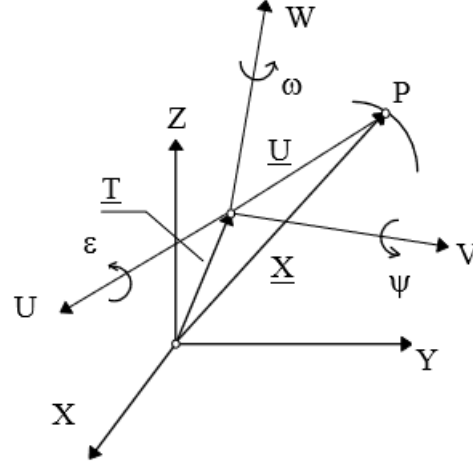
#### **3.2.1.1 Benzerlik dönüşümü**

Bu bölümde, üç boyutlu benzerlik dönüşümü yöntemlerinden benzerlik dönüşümü ve Bursa-Wolf modelinden bahsedilecektir.

#### **Bursa-Wolf Modeli**

Bursa-Wolf modeli iki dik koordinat sistemi arasında gerçekleştirilen bir benzerlik dönüşümü yöntemidir.

Şekil 3.5'te iki farklı dik koordinat sistemi arasındaki ilişki gösterilmektedir (Üstün,1996). Bu iki koordinat sistemi arasındaki ilişki üç öteleme, üç dönüklük ve bir ölçek faktörü ile tanımlanır.  $X_0$ ,  $Y_0$  ve  $Z_0$  öteleme,  $\varepsilon$ ,  $\psi$  ve  $\omega$  dönüklük,  $k$  ise ölçek faktörüdür.



Şekil 3.5 : Üç boyutta benzerlik dönüşümü

Şekilde 3.5'teki ilk koordinat sistemi  $\underline{X} = (X, Y, Z)^T$  ve ikinci koordinat sistemi ise  $\underline{U} = (U, V, W)^T$ 'dir. Bu iki sistem arasındaki dönüşümde  $\underline{X}$  ve  $\underline{U}$  konum vektörleridir ve ikisi arasındaki ilişki (3.1)'deki eşitlikte olduğu gibi gösterilir (Krakiwsky ve Thompson, 1974; Soler ve Hothem, 1989; Vanicek ve Krakiwsky, 1982; Ayhan ve Kılıçoğlu, 1993).

$$\underline{X} = \underline{T} + (1 + k)\underline{R}\underline{U} \quad (3.1)$$

Ardışık olarak gerçekleşen üç dönüklük sonrası  $\underline{R}(3 \times 3)$  dönüklük matrisi oluşur.

$$\underline{R} = \underline{R}_3(\omega)\underline{R}_2(\psi)\underline{R}_1(\varepsilon) \quad (3.2)$$

$$\underline{R}_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\underline{R}_2(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\underline{R}_3(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

olmak üzere;

$$R = \begin{bmatrix} \cos\omega \cos\psi - \sin\omega \sin\varepsilon \sin\psi & \sin\omega \cos\psi + \sin\omega \cos\varepsilon \sin\psi & -\cos\varepsilon \sin\psi \\ -\sin\omega \cos\varepsilon & \cos\omega \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ \cos\omega \sin\psi + \sin\omega \sin\varepsilon \cos\psi & \sin\omega \sin\psi - \cos\omega \sin\varepsilon \cos\psi & \cos\varepsilon \cos\psi \end{bmatrix} \quad (3.6)$$



elde edilir.

Buradaki parametreler en başta bilinmediğinden dolayı en uygun değerler en küçük kareler yardımıyla belirlenir. İki sistemde de bilinen ortak noktaların fazla olması durumunda dengeli dönüşüm yapılabilir. Matematiksel model ise (3.7)'deki gibi gösterilir (Üstün,1996).

$$F(\bar{L}, X) = F(L + v, X_0 + dx) = 0 \quad (3.7)$$

Denklem (3.7)'de yer alan  $\bar{L}$  dengelenmiş ölçüleri, X dengelenmiş bilinmeyenleri yani dönüşüm parametrelerini, L ortak nokta koordinatlarını, v koordinat düzeltmelerini,  $X_0$  bilinmeyenlerin yaklaşık değerlerini ve dx ise bilinmeyenlerin düzeltmelerini ifade eder.

(3.1) numaralı eşitlik daha açık bir şekilde yazılacak olursa;

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + (1 + k)\underline{R} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde olur.

$\varepsilon$ ,  $\psi$  ve  $\omega$  dönüklük açılarının küçük olduğunu varsayarsak,

$$\cos \varepsilon \cong \cos \psi \cong \cos \omega \cong 1 \quad (3.9)$$

$$\sin \varepsilon \cong \varepsilon, \sin \omega \cong \omega, \sin \psi \cong \psi, \sin \varepsilon \sin \psi \cong \sin \varepsilon \sin \omega \cong \sin \psi \sin \omega \cong 0$$

alınır ve  $\underline{R}$  matrisi;

$$\underline{R} = \underline{I} + \underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega & -\psi \\ -\omega & 0 & \varepsilon \\ \psi & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılır. (3.10) eşitliği (3.8)'de yerine konulursa;

$$\underline{T} + (1 + k)(\underline{I} + \underline{Q})\underline{U} - \underline{X} = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir ve denklem açılırsa;

$$\underline{T} + \underline{Q}\underline{U} + (1 + k)\underline{U} - \underline{X} = 0 \quad (3.12)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan matematiksel model,

$$\underline{A} \underline{v} + \underline{B} \underline{x} + \underline{w} = 0 \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$\underline{A} = \frac{\partial F}{\partial L}, \underline{B} = \frac{\partial F}{\partial X} \text{ ve } \underline{w} = F(L, X_0) \text{ dır.}$$

Bilinmeyenlerin yaklaşık değerleri 0 seçilirse, tek bir ortak nokta için;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_U \\ v_V \\ v_W \\ v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & U & 0 & -W & V \\ 0 & 1 & 0 & V & W & 0 & -U \\ 0 & 0 & 1 & W & -V & U & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \Delta \\ \varepsilon \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U - X \\ V - Y \\ W - Z \end{bmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

düzeltilme denklemi yazılır (Leick, 1990).

Koordinat sistemlerinin birbirlerini göre konumları iki farklı biçimde düşünülüp çözüm de ona göre yapılmalıdır. Diferansiyel olarak birbirine yakın olan iki sistem söz konusu iken yukarıdaki denklemin bir kez çözümü yeterlidir fakat kayda değer bir ayrılık var ise yukarıdaki denklemler ile yaklaşık değerler belirlenip (4.1)'de yer alan denklem fonksiyon olarak kabul edilir. Ardından bir önceki dengelemenin bilinmeyenleri yaklaşık değer kabul edilir ve iterasyonlu çözüm yoluna gidilir (Üstün, 1996).

### 3.2.1.2 Afin Dönüşüm

İki dik koordinat sistemi arasında dönüşüm için genelde kullanılan yöntem benzerlik dönüşümüdür. 3 öteleme, 3 dönüklük ve 1 ölçek faktörünün yani 7 parametrenin bulunduğu benzerlik dönüşümünde nokta koordinatları ve kenarlar değişebilir ama şekil hiçbir zaman bozulmaz. Yatay ve düşey ağların birleştirilmesi üç boyutlu jeodezik ağları meydana getirir ve bu jeodezik ağlarda yatay ve düşey ölçek arasında farklılık vardır. Bu sebeple benzerlik dönüşümü her koşulda gerçek durumu yansıtmayabilir (Kılıçoğlu, 1995).

Jeodezik ağlar arasındaki ölçek farkına ek olarak, yatay ağların bir triangulasyon ağı olması durumunda bu ağ sistematik olarak distorsiyonlara uğrar ve bu distorsiyonları hesap yaparken göz önünde bulundurmak gerekir (Wolfrum, 1992).

Yatay ve düşey ağırlardaki ölçek farklılıkları ve yatay ağırdaki distorsiyonlardan dolayı bütün bu faktörleri hesap içerisinde göz önünde bulunduran bir dönüşüm modeli tasarlanır ve bu modele afin dönüşüm modeli denir (Kılıçoğlu, 1995). Afin dönüşümde bilinmeyen parametreler 3 öteleme, 3 dönüklük ve 3 ölçek faktörüdür. Afin dönüşümün matematiksel modeli;

$$\underline{X} = \underline{T} + (\underline{I} + \Delta)\underline{R}U \quad (3.15)$$

şeklindedir.

Daha önceki modellerde ölçek matrisi skaler bir büyüklük iken afin dönüşümde köşegen bir matristir ve denklem (3.16)'deki gibi gösterilir (Üstün, 1996).

$$(\underline{I} + \Delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \Delta_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Dönüklük parametreleri  $\varepsilon$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  afin dönüşümde de geçerlidir ve (3.15) denklemi Bursa-Wolf modelinde verilen (3.10) ve (3.11)'e uygun şekilde yazılırsa,

$$\underline{X} = \underline{T} + \underline{U} + \underline{Q}\underline{U} + \underline{\Delta}\underline{U} \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \Delta_1 & \omega & -\psi \\ -\omega & 1 + \Delta_2 & \varepsilon \\ \psi & -\varepsilon & 1 + \Delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) denkleminde göre, bir nokta için bilinmeyen koşullu ölçüler dengelemesinin fonksiyonel modeli;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_U \\ v_V \\ v_W \\ v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & U & 0 & 0 & 0 & -W & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 & V & 0 & W & 0 & -U \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W & -V & U & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \varepsilon \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U - X \\ V - Y \\ W - Z \end{bmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

şeklinde olur. Bu modelde ötelemeler  $t_x, t_y, t_z$ , ölçekler  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  ve dönüklükler  $\varepsilon, \psi, \omega$  bilinmeyen parametrelerdir. U, V, W koordinatlarının hatasız olduğu kabul edildiğinde (3.19)'dan dolayı ölçüler dengelemesinin modeli elde edilir (Üstün, 1996).



## **4. ROBOT KİNEMATİĞİ**

Robotik sistemlerde robotun tüm kol ve diğer parçalarına ait eklemlerin yapacağı hareketler robot kinematığı ile tanımlanır. Bir robot öteleme ve dönme hareketlerini sağlayabilen eklemlerden ve bu eklemleri birbirine bağlayan bağlardan meydana gelmektedir. Bir eklemin hareketi kendisinden sonra gelen eklemin de konum ve yönelimini belirler. Robot kinematığı bölümünde endüstriyel robotlardan ve kullanım alanlarından, Maxwell'in oluşturduğu 4x4 homojen dönüşüm matrislerinden, robot eklemleri ve bağlarının ilişkilerini anlatan Denavit-Hartenberg yönteminden bahsedilmiştir (Tatar, 2015).

### **4.1 Endüstriyel Robotlar, Kullanım Alanları ve Amaçları**

#### **4.1.1 Robot Nedir?**

Robotlar, çeşitli programlanmış hareketlerle malzemeleri, parçaları, aletleri veya özel cihazları taşımak için tasarlanan çok işlevli makinelerdir. "Robot" kelimesi ilk olarak 1921'de Çek yazar Karel Capek tarafından yazılan bir tiyatro oyununda Çekoslovakça "robota" olarak kullanılmış olup "zorla çalıştırılan işçi" anlamına gelmektedir (Barutçuoğlu, 2001).

Bir robot yaratma fikri aslında M.Ö. 1000 yılına kadar uzanır. Zaman zaman efsanelerde ve romanlarda karşılaşılan robotlar yine aynı yıllarda insanlara hizmet etmesi amacıyla planlanıp, tasarlanmıştır.

M.Ö. 4. yüzyılda Yunan filozof Aristoteles, "Eğer her araç kendi işini kendisi görebilseydi, insan eline hiç ihtiyaç duymadan kendisi mekik dokuyabilse, kendisi lir çalabilseydi, yöneticilerin elemanları ihtiyacı kalmazdı." sözleriyle dünyadaki ilk otomasyon kavramını ortaya koymuştur (Barutçuoğlu, 2001).

Rus asıllı Amerikan yazar Isaac Asimov ise 1950 yılında yazdığı "Ben, Robot" adlı eserinde robotların asıl amacının insanlara hizmet etmek olduğunu öne sürerek robotlarla üç adet yasa bildirmiştir;

- Bir robot bir insana zarar veremez veya bir insanın zarar görürken buna seyirci kalamaz.
- Eğer bir robot ilk kuralla çalışmıyorsa, insanların emirlerine uymak zorundadır.
- Bir robot ilk iki kuralla çalışmadığı sürece kendi varlığını da korumalıdır.

Günümüzde ise robotların tanımı gereği üç temel özelliği bulunmaktadır;

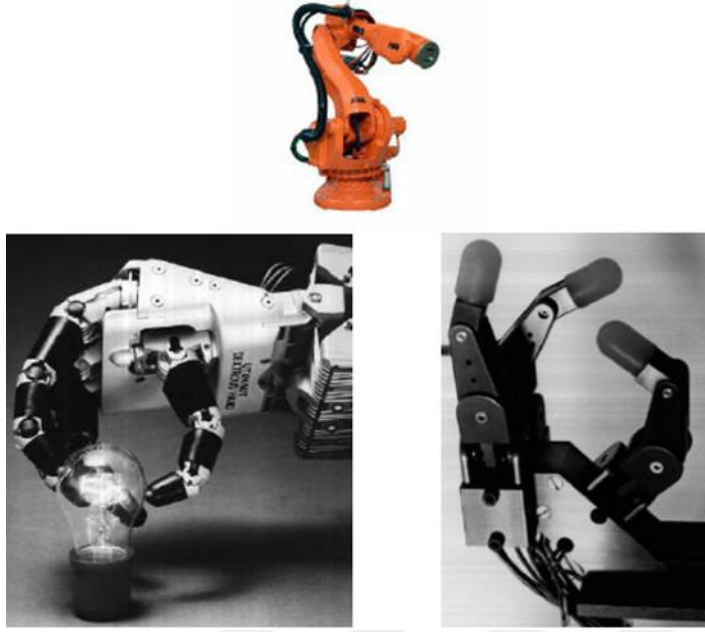
- İşlem Yapma Yetisi: Bir robot kendisi için programlanan bir işlemi yerine getirebilmelidir; aksi takdirde robot değil sadece bir madde olurlar.
- İşlemi Sonuçlandırma Yetisi: Bir robot bir işlemi bitirdikten sonra mutlaka işlemin sonucunu da belirlemelidir.
- Karar Verme Yetisi: Bir robot tamamladığı bir işlemin sonucuna göre veya çevresindeki parametrelere göre bir yargıya varabilmelidir (Ayyıldız, 2009).

Geçmişten günümüze kadar gelişen ve hala gelişmekte olan robotlar, yapay zeka teknolojisindeki atılımlarla beraber artık çevresindekileri algılayabilen ve tepki verebilen manipülatörler haline gelmişlerdir.

#### **4.1.2 Robotların Çeşitleri ve Kullanım Alanları**

##### **4.1.2.1 Endüstriyel robotlar**

Bu sistemler, kaynak yapmak veya bir fırça ile bir duvarı boyamak gibi insan için tekrar eden, yorucu olan görevleri kolaylaştırmak için endüstriyel robotların ortaya çıkarılmasına kadar ilerlemiştir. Endüstriyel robotlar genellikle bir eklemli koldan (çok bağlantılı manipülatör) ve sabit bir yüzeye tutturulan bir uç efektöründen oluşur. En yaygın uç efektör tiplerinden biri ise tutucu tertibatıdır. Şekil 4.1 'de tutucu tertibatlı uç efektöre sahip robot elleri gösterilmiştir.



Şekil 4.1 : Karmaşık yapılı manipulatörler ve robot elleri.

#### 4.1.2.2 Mobil robotlar

Mobil robotlar kendi çevrelerinde hareket etme kapasitesine sahip robotlardır ve kendilerini tek bir noktada fiziksel olarak sabit değildirler. Şekil 4.2’de mobil robotlar bunlara birer örnektir. Bugün yaygın olarak kullanılan bir mobil robot örneği, otomatik yönlendirmeli araçtır. Bir otomatik yönlendirmeli araç, herhangi bir yüzey üzerindeki işaretleri takip edebilen, gözleyen ve lazer kullanan bir mobil robottur. Mobil robotlar endüstri, askeri ve güvenlik alanlarında kullanılmaktadır. Hatta tüketici ürünleri olarak temizlik malzemeleri de mobil robotlara örnektir.



Şekil 4.2 : Tutucuları ile öne çıkan mobil robotlar

### 4.1.2.3 Hizmet robotları

En yaygın endüstriyel hizmet robotları, esas olarak malların üretimi ve dağıtımını için kullanılan robotik kollar ve manipülatörlerdir. Hizmet robotlarının literatürdeki tanımı diğerlerine nazaran çok iyi değildir. Bir sivil toplum örgütü olan Uluslararası Robotik Federasyonu hizmet robotlarını şu şekilde tanımlamıştır; “Bir hizmet robotu, üretim operasyonları hariç olmak üzere, insan ve ekipmanın refahı için faydalı hizmetleri gerçekleştiren yarı ya da tamamen otonom olarak çalışan bir robottur. 2002 yılında bir Amerikan şirketi olan iRobot ilk robotik süpürge olan Roomba’yı piyasaya sürmüştür. Avrupa’da bir vakum temizleme robotu olan ve şekil 4.3’te gösterilen Trilobite, Electrolux tarafından üretilmiştir.



Şekil 4.3 : Hizmet robotları olan Roomba ve Trilobite

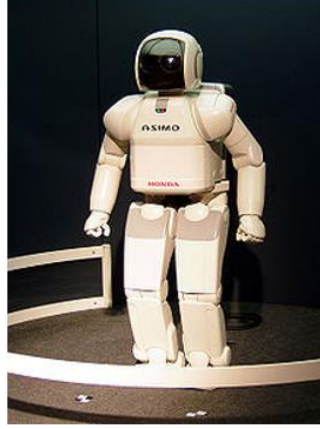
### 4.1.2.4 Genel amaçlı otonom robotları

Genel amaçlı otonom robotlar genellikle bilinen alanlarda bağımsız olarak gezinebilir, kendi yeniden şarj ihtiyaçlarını karşılayabilir, elektronik kapı ve asansörler ile arayüz kurabilir ve diğer temel görevleri yerine getirebilir. Bu robotlar bilgisayarlarda olduğu gibi kullanışlılıklarını artıran ağlar, yazılımlar ve aksesuarlar ile bağlantı kurabilirler. İnsanları veya nesnelere tanıyabilir, konuşabilir, arkadaşlık edebilir, çevresel kaliteyi izleyebilir, alarmlara yanıt verebilir, malzemeleri alabilir ve bir çok yararlı görevleri gerçekleştirebilirler. Bazı robotlar insanı taklit etmeye çalışırlar ve hatta görünüşte insanlara benzeyebilirler. Otonom robotlara örnek olarak çizgi işleyen robotları, sumo robotları ve örümcek kollu robotları örnek olarak verebiliriz.

### 4.1.2.5 İnsansı robotlar

İnsansı robotlar, yapay zeka algoritmaları yardımıyla insan gibi düşünüp hareket edebilen ve sistemi içerisinde yer alan yazılımlara dahi müdahale edip sürekli olarak öğrenebilen robotlardır. Şekil 4.4’te de görülen, Honda’nın 1996’da ürettiği ilk insansı robot 2000 yılında daha büyük bir proje haline getirilip ASIMO adı altında dünyaya sunulmuştur.





Şekil 4.4 : İnsansı robotlardan ASIMO

## 4.2 İleri Yön Kinematığı

Bir robot kolu kinematığı herhangi sabit bir koordinat sisteminde yer alan robot koluna ait geometrik hareketlerin analitik çalışmaları ile ilgilenir. Kinematik, ileri yön (düz) ve geri yön kinematik olmak üzere teorik ve uygulamalı olarak iki temel esas içermektedir.

Bir robot kolu birden fazla mekanik eklemler içermektedir. Üç boyutlu uzayda bir robot parçasının merkezinin konumunu ve yönünü belirlemek için robot eklemlerinin fonksiyonları belirlenmelidir. İki koordinat sistemi elemanları arasında ilişki kurmak için bir dönüştürme işlemi gereklidir. Her bir koordinat sistemi için konum ve yönelimi tanımlanabilir (Url-1).

Bu bölümde dönüştürme tekniklerinden rotasyon matris tekniğini ve homojen dönüştürme matrisleri tekniği incelenmiştir.

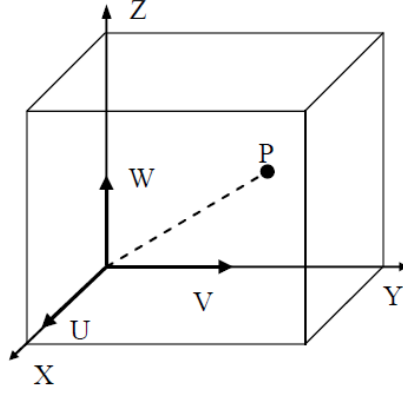
### 4.2.1 Dönme (rotasyon) matrisi

Sabit bir referansa bağlı koordinat sistemi açısından bir robota ait uç elemanın konumunu ve yönünü tanımlamak için, koordinat dönüşümleri hem dönme hem de çevirme işlemlerini içermelidir.

Şekil 5.1’de orijinleri aynı olan iki farklı koordinat sistemi gösterilmiştir. XYZ koordinat sistemi 3 boyutlu uzayda sabit olarak tanımlanmış bir referans koordinat sistemidir.  $P_{xyz}$  and  $P_{uvw}$  uzaydaki aynı P noktasını temsil etmektedir ve bu nokta iki koordinat sistemi için de şu şekilde tanımlanır (Url-1).

$$P_{xyz} = [P_x, P_y, P_z]^T \quad (4.1)$$

$$P_{uvw} = [P_u, P_v, P_w]^T \quad (4.2)$$



**Şekil 4.5 :** Koordinat Sistemi.

Şekildeki UVW koordinat sistemindeki  $P_{uvw}$  noktasının koordinatlarını XYZ koordinat sistemine göre dönüştürmek için bir R dönme matrisi gereklidir. (Şekil 4.5)

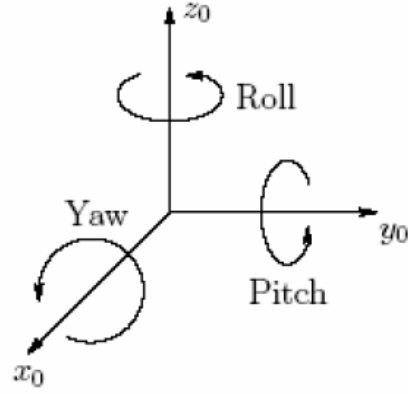
$$P_{xyz} = RP_{uvw} \quad (4.3)$$

Fiziksel olarak UVW koordinat sistemine göre dönüşüme uğrayan  $P_{uvw}$  noktası,  $P_{xyz}$  noktasının koordinatlarına göre şu şekilde belirtilir.

$$P_{uvw} = R^{-1}P_{xyz} \quad (4.4)$$

Buradaki asıl amaç XYZ koordinat sistemlerinin eksenleri boyunca hareket eden UVW koordinat sisteminin dönüşümünü tanımlayan dönme matrisini bulmaktır. Eğer UVW koordinat sistemi OX eksenine etrafında  $\alpha$  açısı kadar döndüğünde oluşacak yeni noktasının dönüşüm matrisi  $R_{x,\alpha}$  olur.

$$P_{xyz} = R_{x,\alpha}P_{uvw} \quad (4.5)$$



**Şekil 4.6 :** X, Y ve Z eksenleri etrafındaki 3 temel dönüklük.

Roll-Pitch-Yaw açı setinde dönme işlemi, hareket etmeyen sabit koordinat çerçevesine göre gerçekleştirildiğinden, bu yöntemde sabit açı sistemi veya Roll-Pitch-Yaw açı sistemi denir. Eğer bir insanın eli avuç içi aşağı bakmak üzere ileri yönde yere paralel tutulursa, ‘roll’ elin kendi eksenini etrafında döndürülmesi, ‘pitch’ elin aşağı yukarı hareket ettirilmesi, ‘yaw’ ise elin sağa sola hareket ettirilmesidir ve Şekil 4.6’da gösterilmiştir. (Bingül & Küçük, 2015).

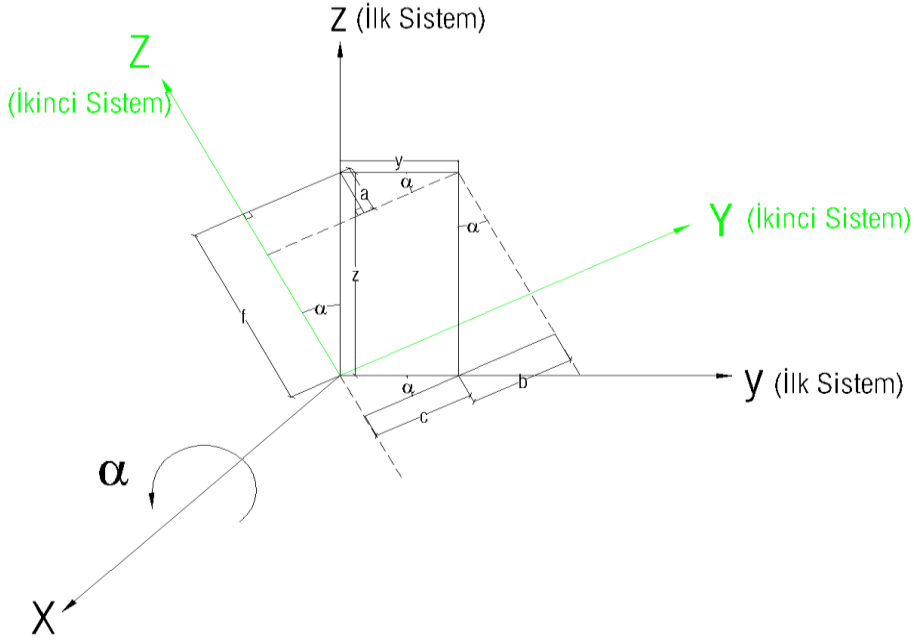
X eksenindeki  $\alpha$  açısı, Y eksenindeki  $\Phi$  açısı ve Z eksenindeki  $\theta$  açısı kadar dönüklük dönüşüm matrisi olarak şu şekilde ifade edilir.

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$R_{y,\Phi} = \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & -\sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

#### 4.2.1.1 İki ve üç boyutta dönüşüm



Şekil 4.7 : Kartezyen koordinat sisteminde dönüşümler.

Yukarıdaki Şekil 4.7’de verilen koordinat sisteminde x eksenini  $\alpha$  açısı kadar döndürüldükten sonra oluşan ikinci koordinat sistemi ile ilk sistem arasında ilişki kurulmak istenirse aşağıdaki denklemler geçerli olur.

$$\cos\alpha = \frac{f}{z} \rightarrow f = z \cos\alpha \quad (4.9)$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{y} \rightarrow a = y \sin\alpha \quad (4.10)$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{z} \rightarrow b = z \sin\alpha \quad (4.11)$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{y} \rightarrow c = y \cos\alpha \quad (4.12)$$

Şekilden ana eşitlikler;

$$z = f - a = z \cos\alpha - y \sin\alpha \quad (4.13)$$

$$y = b + c = z \sin\alpha + y \cos\alpha \quad (4.14)$$

Eğer iki boyutlu bir düzlem üzerinde z eksenini yerine x eksenini koyarsak;

$$X = x \cos\alpha - y \sin\alpha \quad (4.15)$$

$$Y = x \sin\alpha + y \cos\alpha \quad (4.16)$$

Matris ile gösterecek olursak;

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

veya

$$\begin{bmatrix} Z \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Eğer üç boyutlu bir sistem üzerinde dönüşüm yapılacak olursa, şekil üzerinden;

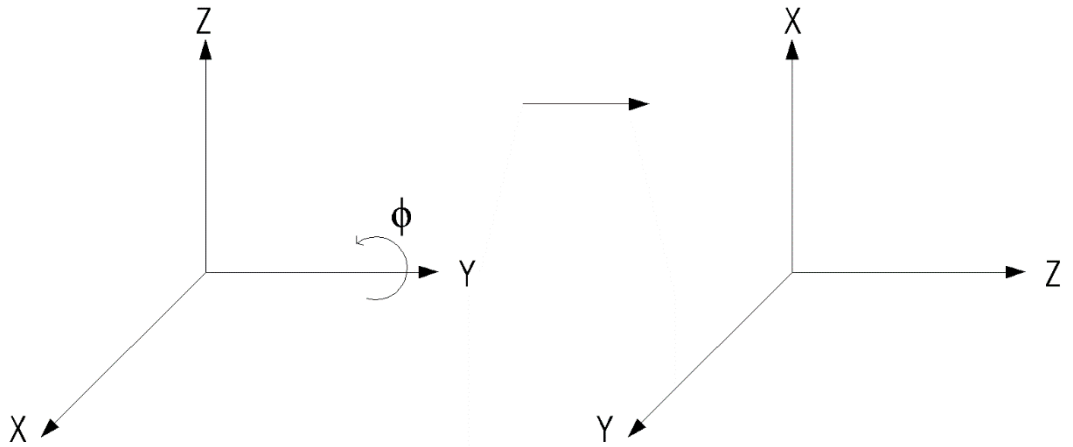
$$X = x \quad (4.19)$$

$$Y = y \cos\alpha + z \sin\alpha \quad (4.20)$$

$$Z = -y \sin\alpha + z \cos\alpha \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Ana eşitliklerde z yerine x, y eksenine yerine ise z eksenine konulursa;



**Şekil 4.8 :** Y eksenine etrafında dönüşüm.

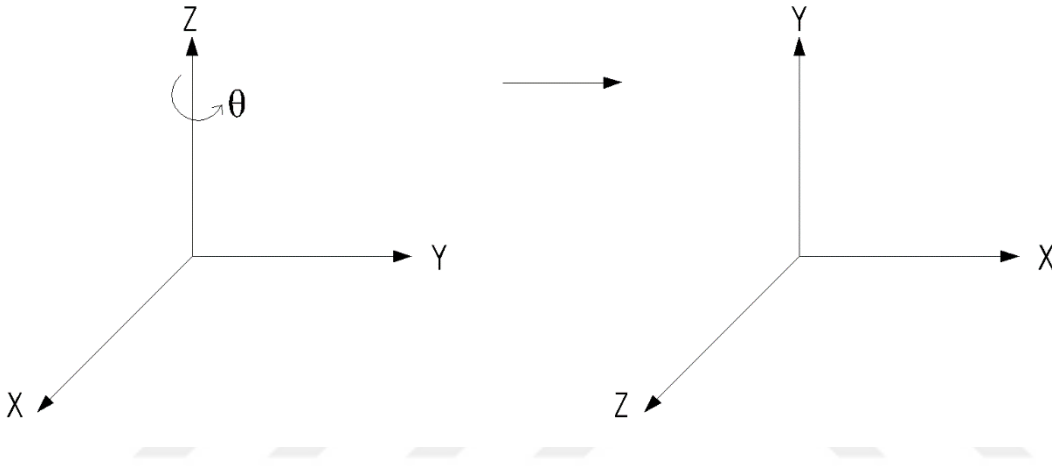
$$Z = z \cos\phi - y \sin\phi \rightarrow X = x \cos\phi - z \sin\phi \quad (4.23)$$

$$Y = y \cos\phi + z \sin\phi \rightarrow Z = x \sin\phi + z \cos\phi \quad (4.24)$$

$$Y = y \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Ana eşitliklerde z eksenini yerine y, y eksenini yerine ise x eksenini konulursa;



Şekil 4.9 : Z eksenini etrafında dönüşüm.

$$Y = y \cos\theta - x \sin\theta \quad (4.27)$$

$$X = y \sin\theta - x \cos\theta \quad (4.28)$$

$$Z = z \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

#### 4.2.2 Birleşik dönme matrisi

Robotun uç elemanı için rastgele bir yönelim yaratmak için birbiri ardına gelen ölçülebilir temel dönüşüm matrislerine ihtiyaç vardır. Yapılan dönüklükler referans koordinat sisteminin eksenleri etrafında gerçekleşmektedir.

Birleşik bir dönme matrisi oluşturmak için belirli kurallar gereklidir. Bu kurallar şu şekilde sıralanabilir;

- Her iki koordinat sistemi de rastgele ise dönme matrisi 3x3 boyutlu olmaktadır. Dönme matrisi  $R=I_3$  olarak başlatılır.
- Dönüşüme uğrayan koordinat sistemi referans koordinat sisteminin bir ana eksenini etrafında döndürülürse, bir önceki dönme matrisi uygun temel dönme matrisi ile çarpılır.
- Dönüşüme uğrayan koordinat sistemi kendi ana eksenini etrafında döndürülürse, uygun olan temel dönme matrisi ile bir önceki dönme matrisi çarpılır.

Yukarıdaki kurallar uygulanırsa OX eksenini etrafındaki  $\alpha$  açısı, OY eksenindeki  $\Phi$  açısı ve akabinde OZ eksenindeki  $\theta$  açısı kadar yapılan dönüşümler sonucu ortaya çıkacak birleşik dönme matrisi bulunabilir. Elde edilen birleşik dönme matrisi;

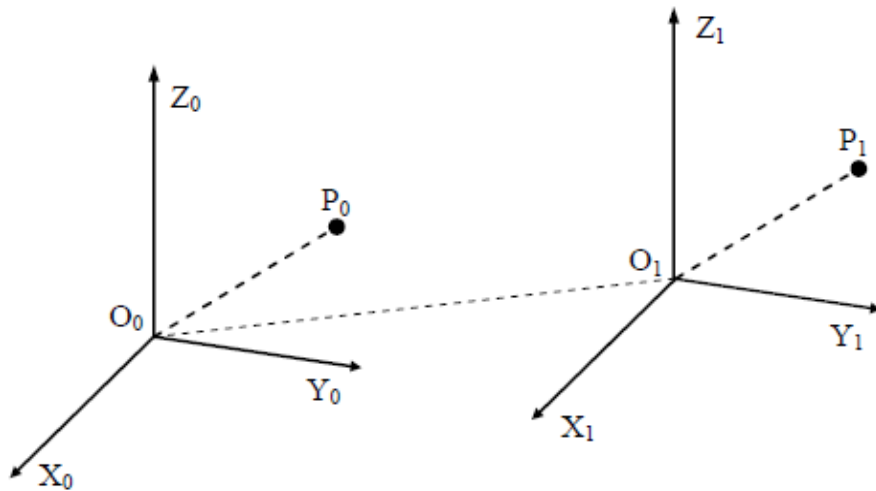
$$R = R_{z,\theta}R_{y,\Phi}R_{x,\alpha} \quad (4.31)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & -\sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\Phi \cos\theta & \sin\theta \cos\alpha + \sin\Phi \cos\theta \sin\alpha & \sin\alpha \sin\theta - \cos\alpha \sin\Phi \cos\theta \\ -\cos\Phi \sin\theta & \cos\theta \cos\alpha - \sin\alpha \sin\Phi \sin\theta & \sin\alpha \cos\theta + \cos\alpha \sin\Phi \sin\theta \\ \sin\Phi & -\sin\alpha \cos\Phi & \cos\alpha \cos\Phi \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

### 4.2.3 Homojen dönüşüm matrisi

İki koordinat sistemi arasında en genel ilişki Şekil 4.10'da gösterilmiştir ve bu en sade dönüşüm olarak tanımlanır.



Şekil 4.10 : İki koordinat sistemi arasındaki ilişki.

[3x3] boyutundaki bir A matrisi, dönüşümü tanımlamak için tamamen yeterli değildir. Robotik sistemlerde ayrıca ölçek faktörü de kullanıldığından 4 boyutlu homojen koordinatlar elde edilir. Bir homojen dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi göz önüne alınır (Url-1).

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ \eta_{1 \times 3} & \sigma_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$T = \begin{bmatrix} \text{Dönme Matrisi} & \text{Konum vektörü} \\ \text{Perspektif Dönüşümü} & \text{Ölçek} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Burada gösterilen 3x3 boyutundaki alt R matrisi dönme matrisidir. 3x1 boyutundaki ‘p’ alt matrisi konum vektörüdür ve ötelemeyi tanımlar. Sol alt köşede yer alan 1x3 boyutlu ‘η’ alt matrisi perspektif vektörüdür ve bilgisayar görüntüsü ile kamera kalibrasyonu için kullanılır. Bu matrisin elemanları, boş perspektif dönüşümünü belirtmek için sıfıra ayarlanır. T matrisinde sağ alt köşede yer alan σ değeri ise 0’dan farklı bir ölçek değeridir.

Üç boyutlu uzaydaki homojen koordinatları açısından tanımlanan bir P noktasının herhangi bir koordinatından çerçeve koordinatlarına ulaşmak için 3x3 boyutlu matristen 4x4 boyutlu homojen dönüşüm matrisine geçiş yapılır.

Yukarıda verilen (4.34) ve (4.35) eşitliklerindeki ‘T’ matrisi temel homojen dönüşüm matrisi olarak adlandırılır ve (4.6), (4.7), (4.8)’de verilen eşitliklerdeki dönme matrislerinden yola çıkılarak tanımlanmıştır.

$$T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$T_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$T_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$



Yukarıda verilen (4.36), (4.37) ve (4.38) eşitlikleri bize koordinat sisteminin x, y ve z eksenlerindeki  $\alpha$ ,  $\phi$  ve  $\theta$  açıları kadar döndürme işleminin gerçekleşmesi sonrası oluşan homojen dönüşüm matrislerini verir. Homojen dönüşüm matrisinde yer alan 3x1 boyutlu konum vektörü matrisi  $X_1Y_1Z_1$  koordinat sisteminin herhangi bir ekseninin kendisine paralel olan  $X_0Y_0Z_0$  koordinat sistemi eksenine ötelenmesiyle elde edilir. Bu şekilde her bir eksendeki ötelemeler için elde edilen üç temel homojen dönüşüm matrisi aşağıdaki gibidir.

$$T_{x,dx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$T_{y,dy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$T_{z,dz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Koordinat sistemindeki her üç eksen için de ötelemeler mevcut ise yukarıda verilen, her bir eksenin ötelenmesi için oluşturulan homojen dönüşüm matrislerinin sırasıyla çarpımı sonucunda bütün ötelemeler için tek bir homojen dönüşüm matrisi elde ederiz.

$$T_d = T_{x,dx}T_{y,dy}T_{z,dz}$$

$$T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

4x4 boyutlu bir homojen dönüşüm matrisi,  $X_1Y_1Z_1$  koordinat sistemine göre homojen koordinatlarda ifade edilen bir vektörü Şekil 4.10'daki gibi olan  $X_0Y_0Z_0$  koordinat sistemiyle eşleştirir.

$$P_0 = T P_1 \quad (4.43)$$

#### 4.2.4 Birleşik homojen dönüşüm matrisi

Homojen bir dönüşüm, sabit bir referans koordinat sistemine göre hareketli bir koordinat sisteminin hem dönüşünü hem de yer değişimini temsil eder. Dönme veya ötelemeler için oluşturulan dönüşüm matrisleri dizisi beraber çarpılırsa birleşik homojen dönüşüm matrisi elde edilir. Matris çarpım işlemleri, değişmeli işlemler olmadığından dönmelerin ve ötelemelerin gerçekleştirileceği sıralama önemlidir. Ayrıca, hareketli koordinat sistemi birim vektörleri etrafında dönebilir veya çevirebilir. Bu nedenle, farklı işlemlerin birleşik homojen dönüşüm matrisi üzerindeki etkileri aşağıdaki kurallarda özetlenmiştir (Url-1).

1. Başlangıçta her iki koordinat sistemi de rastlantısal ise, dönüşüm matrisi 4x4 boyutlu bir birim matristir. Bu nedenle  $T = I$  olarak başlatılır.
2. Dönmeler ve ötelemeler için ayrı ayrı homojen dönüşüm matrisleri tanımlanır.
3. Birleşik rotasyonlar ayrı temel homojen dönme matrisleri olarak tanımlanır.
4. Hareketli koordinat sistemi, sabit referans koordinatının bir birim vektörü etrafında döndürülüyor veya öteleniyorsa,  $T$  homojen dönüşüm matrisi ile uygun olan temel homojen dönme matrisi çarpılır.
5. Hareketli koordinat sistemi kendi koordinat sisteminden biri etrafında döndürülecek veya çevrilecekse,  $T$  homojen dönüşüm matrisi uygun temel homojen dönme matrisi ile sonradan çarpılır.

Dönme matrislerinden elde edilen birleşik homojen dönüşüm matrisleri, birim matris ile başlar ve OX eksenini etrafında  $\alpha$  açısı kadar döndürmeden sonra OY eksenini etrafında  $\Phi$  açısının dönüşünü takiben OZ eksenini etrafında  $\theta$  açısı kadar dönüş yapar ve aşağıdaki eşitlikler oluşur.

$$T_R = T_{Z,\theta} T_{Y,\Phi} T_{X,\alpha} \quad (4.44)$$

$$T_R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & -\sin\Phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Phi & 0 & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Üç boyutlu uzayda ötelemeler için oluşturulan homojen dönüşüm matrisi aşağıdaki eşitlikte olduğu gibidir.

$$T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Birleşik homojen dönüşüm matrisi, birleşik dönme matrisinin birleşik öteleme matrisinin çarpımından elde edilir.

$$T = T_d T_R \quad (4.47)$$

Homojen dönüşüm matrisi, aşağıdaki denklemde verilen dört alt matristen oluşmaktadır.

$$T = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

R matrisi 3x3'lük bir dönme matrisi, P ise 3x1'lik bir konum vektörü olsun. Homojen dönüşüm matrisinin geometrik yorumu, sabit bir referans koordinat sistemine göre bir mobil koordinat sisteminin yönünü ve konumunu temin eder. Robotik aygıt analizinde bu iki koordinat sistemi, bir robot kolunun ardışık iki bağlantısına atanabilir. Bu iki bağlantı sırasıyla  $i-1$  ve  $i$ 'dir. Bağlantı  $i-1$  koordinat sistemi sabit referans koordinattır ve bağlantı  $i$  koordinatı mobil koordinat sistemidir. Homojen dönüşüm matrisini kullanarak, sabit koordinat  $i-1$ 'e göre mobil koordinat  $i$ 'de bir  $P_i$  noktası belirleyebiliriz.

$$P_{i-1} = {}_{i-1}^i T P_i \quad (4.49)$$

${}_{i-1}^i T$ ,  $i$  ve  $i-1$  koordinatlarını içeren 4x4 boyutundaki bir homojen dönüşüm matrisidir.  $P_{i-1}$  bağlantıdaki  $i-1$  koordinatını tanımlayan 4x1 boyutlu pozisyon vektör matrisidir. Bazen sabit referans koordinat sistemindeki bir noktanın konumunu ve yönünü hareketli koordinat sistemi açısından ifade etmek isteriz.

$$P_i = ({}_{i-1}^i T)^{-1} P_{i-1} \quad (4.50)$$

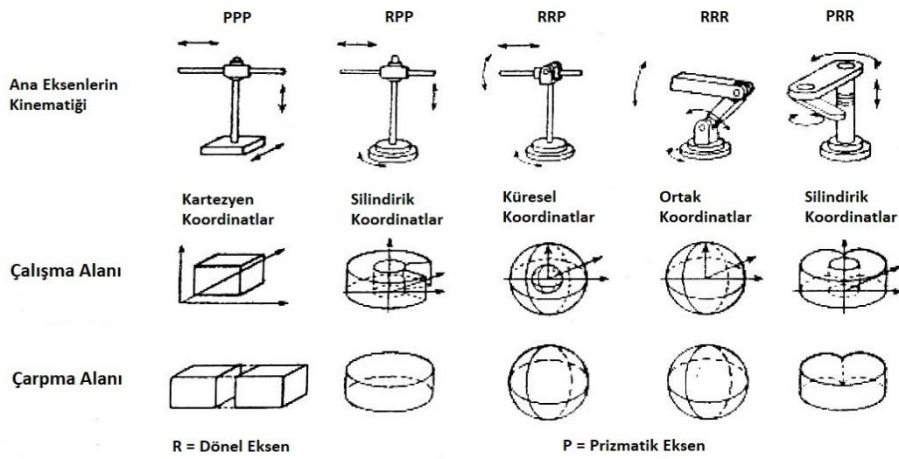
O halde, T homojen dönüşüm matrisinin inversini bulmamız gerekir. Bir alt matrisi olan dönme matrisi R'nin inversi kendisinin tranzpozisine eşittir. Fakat homojen dönüşüm matrisinin inversi kendisinin tranzpozisiyle eşdeğer değildir. Sabit referans koordinat sisteminin mobil koordinat sistemlerine göre konumu sadece

$T_{i-1}^i$ 'nin inversi belirlendikten sonra bulunabilir. Genel olarak, perspektif dönüşümü  $\eta=0$  ve ölçek faktörü  $\sigma=1$  ise  $T_{i-1}^i$ 'nin inversi (4.51)'deki gibidir.

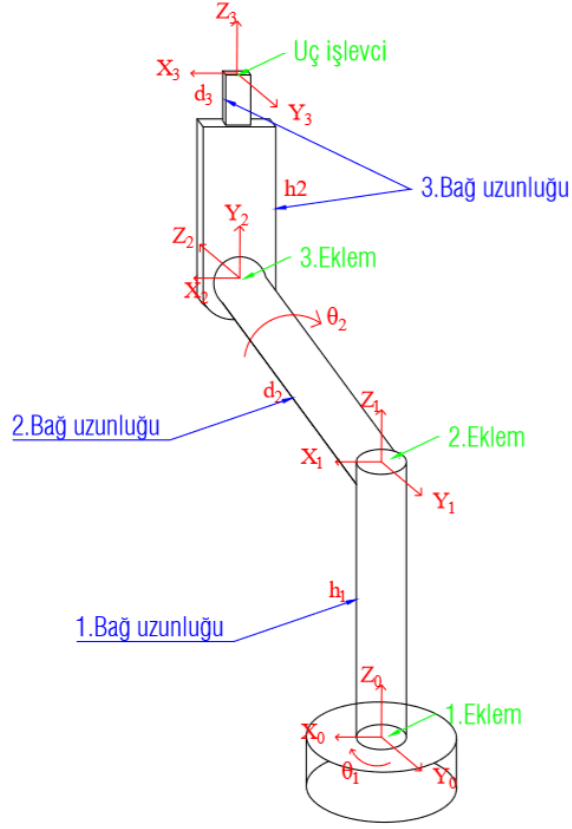
$$({}_{i-1}^i T)^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

#### 4.2.5 Eklem ve bağ parametreleri

Bir robot kolu, eklemleri birbirine bağlayan katı bir zincirdir. Her bir ortak bağlantı çifti bir serbestlik derecesi oluşturmaktadır. Bir n-eksenli robot kolunda n tane eklem-bağ çifti bulunmaktadır.  $\theta$  açılı bir bağlantı, bir referans koordinat çerçevesinin atandığı bir yere bağlanır ve geri kalan bağlantılar tek bir koordinat çerçevesine atanır. ve sonuncusu en uç-eleman ile atanır. Şekil 4.11'deki gibi dönele, prizmatik, silindirik, küresel, vidalı ve düzlemsel olarak sadece beş farklı eklem vardır (Nitchke, 2002). Bunlardan robotik manipülatörlerde yalnızca dönen ve prizmatik eklemler yaygın olarak görülmektedir. Şekil 4.12'de bir robot örneğinin eklem ve bağları gösterilmiştir. Örnek robotta ilk iki eklem dönel son eklem ise prizmatik eklemden oluşmaktadır. İki ardışık bağın görelî konumu ve yönü iki eklem parametresi tarafından belirlenebilir.



Şekil 4.11 : Farklı eklemlere ait robotlar.



Şekil 4.12 : Bir robot örneğinde eklem ve bağlar

$(x_i, y_i, z_i)$  koordinatlarına sahip bir eklem eksenini iki bağlantının birleşiminde kurulum. Eklem  $i$ ,  $(i-1)$  ile  $i$  arasındaki bağlantıyı kurar. Eklem  $i$  ile ilişkili olan parametreler,  $i$  ekleminin eksenine göre hizalanmış olan  $z_{i-1}$ 'e göre tanımlanır. Birleştirilen iki bağın göreceli konumu, eklem mesafesi olarak adlandırılan parametre  $d_i$  ile verilir. Eksen  $z_{i-1}$  boyunca yapılan dönüşümlerde  $x_{i-1}$  eksenini ile  $x_i$  eksenini paralel hale gelir. İkinci parametre olan  $\theta_i$  eklem açısı olarak adlandırılır. Eksen  $x_{i-1}$  ile  $x_i$  ile paralel konuma getirmek için ise  $z_{i-1}$  boyunca  $\theta_i$  açısı kadar bir dönme uygulanır. Her bir eklem için bu parametrelerden biri sabitlenir ve diğeri değişken olur. Çeşitli eklem parametreleri eklem cinsine göre değişir. Bir dönme eklemi için, eklem açısı  $\theta_i$  değişken olup, eklem mesafesi  $d_i$  sabittir.

Bir bağ diğer iki ekleme bağlıdır. Böylece bağın her iki ucunda da iki eksen oluşturulur. Ardışık eklemlerin eksenlerinin göreceli konumu ve yönü iki bağ parametresi tarafından belirlenebilir: bağ uzunluğu ve dönme açısı. Bağın yapısı bağlantı uzunluğu  $a_i$ , dönme açısı  $\alpha_i$ 'ye göre hesaplanır. Bağ uzunluğu  $a_i$ ,  $i$ . ve  $(i+1)$ .

eklemlerinin eksenleri arasındaki ortak mesafeyi vermektedir. Bu bağ uzunluğuna dik bir düzlem üzerindeki eklem eksenleri arasında kalan açı ise  $\alpha_i$ 'dir. Bu bağ parametreleri daima sabittir ve mekanik tasarımın bir parçası olarak belirtilmiştir. Böylece, bu dört parametre çiftler halinde gelir:  $a_i$  ve  $\alpha_i$  parametreleri bağ yapısını belirler,  $d_i$  ve  $\theta_i$  parametreleri ise eklem parametreleri olarak birbirini takip eden iki bağın görelî konumunu belirler.

Bir N-akslı robot kolu için, bir robotun konfigürasyonunu belirlemek için minimum sayıda set oluşturan  $4 \times N$  sayıda kinematik parametre vardır. Her eksen için bu parametrelerden üçü sabit ve mekanik tasarıma bağlıdır. Dördüncü parametre ise eklem değişkenidir. Değişkenli eklem ve bağ parametreleri, eklem türüne bağlıdır. Çizelge 4.1, farklı tipteki eklemlerin bulunduğu parametreleri göstermektedir. Eklem parametrelerinin aksine, iki bağ parametresi sabittir ve robotun mekanik tasarımı tarafından belirlenir. Endüstriyel robotlar için bağ dönme açısı genellikle  $\pi / 2$  radyanın katlarıdır (Url-1).

**Çizelge 4.1 : Eklem ve bağ parametreleri.**

Parametreler	Semboller	Dönel Eklem	Prizmatik Eklem
Eklem Açısı	$\theta_i$	Değişken	Sabit
Eklem Mesafesi	$d_i$	Sabit	Değişken
Bağ Uzunluğu	$a_i$	Sabit	Sabit
Bağ Dönme Açısı	$\alpha_i$	Sabit	Sabit

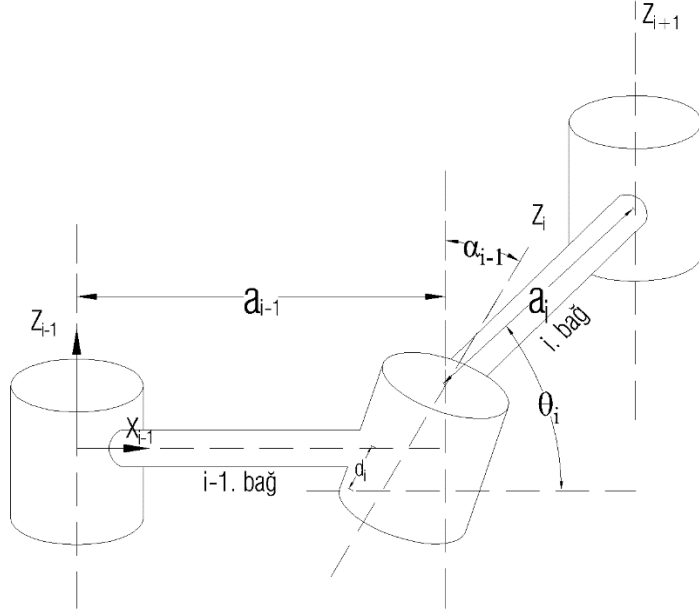
Genel olarak, bir robot manipülatörü çeşitli eklemler vasıtasıyla birbirine bağlanan bir dizi bağlantıdan oluşur. Eklemler, döner eklem veya prizmatik eklem gibi çok basit olabilir ya da daha karmaşık eklemler olabilir. Buna kinematik zincir denir. Şimdi sorun, bir kinematik zincirdeki tüm eklem değişkenlerinin kümülatif etkisini belirlemektir. Dahası, N sayıda bağı olan bir manipülatörün kinematik analizi son derece karmaşık olabilir ve analizin önemli ölçüde basitleştirilmesi için sistematik bir yaklaşım gereklidir. Aşağıdaki bölümde, Denavit-Hertanberg yöntemi ile bu yaklaşım açıklanmaktadır (Url-1).

#### 4.2.6 Denavit-Hertanberg Yöntemi

Her bitişik bağlantı için çevirme ve dönme ilişkisini kurmak için sistematik bir teknik Denavit ve Hertanberg tarafından önerilmiştir. Bu yaklaşım kısaca D-H olarak da bilinmektedir. Bağlara bağlı koordinat sistemleri atandıktan sonra, bitişik koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm bir  $[4 \times 4]$  homojen dönüşüm matrisi ile temsil edilir.

D-H yönteminde uygulanacak olan adımlar aşağıdaki gibi sıralanır (Url-1):

- Robotun tabanından başlanarak ve uç elemana kadar olan tüm bağlar ve eklemler  $i= 0,1,2,\dots,n$  şeklinde numaralandırılır. İlk eklem eksenini ile beraber  $Z_0$  doğrultusu boyunca bir  $(X_0, Y_0, Z_0)$  koordinatlı koordinat sistemi sağ el kuralına göre robot tabanında belirlenir.  $X_0$  ve  $Y_0$  koordinatları  $Z_0$  koordinatının normali olabilir.
- Her bir eklem için koordinat sistemleri oluşturulur.  $Z_{i-1}$  eksenini  $i$ 'nci eklemin hareket eksenini boyunca seçilir.  $X_i$  eksenini hem  $Z_{i-1}$  hem de  $Z_i$ 'ye ortonormal olarak seçilir.  $Z_i$  ve  $Z_{i-1}$  paralel ise  $X_i$ 'yi  $Z_{i-1}$ 'den uzaklaştırılır.  $Y_i$  eksenini, sağ el koordinat sisteminden seçilir.
- Dört geometrik nicelik olan  $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$  eklem parametreleri tanımlanır.  $X^{i-1}$ 'den  $X^i$  eksenine kadar  $Z^{i-1}$  etrafındaki  $\theta_i$  dönüklük açısı hesaplanır.  $(i-1)$ 'inci koordinat sisteminin merkezinden  $Z^{i-1}$  eksenini boyunca  $Z^{i-1}$  ve  $X^i$  eksenlerinin kesişimine kadar olan  $d_i$  mesafesi hesaplanır. Bir prizmatik eklem için  $d_i$  değişken olabilir, döner bir eklem için ise sabittir.  $Z^{i-1}$  eksenini ile  $X^i$  ekseninin kesişiminden  $X^i$  eksenini boyunca  $i$ 'nci koordinat sisteminin merkezine kadar olan  $a_i$  uzunluğu hesaplanır.  $Z^{i-1}$ 'den  $X^i$  eksenini etrafına doğru  $\alpha_i$  dönüklük açısı hesaplanır.



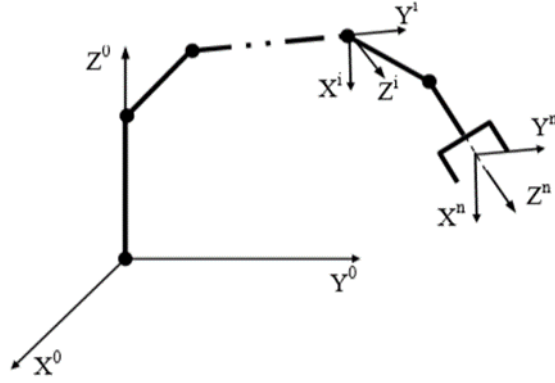
**Şekil 4.13 :** Robotik sistemlerde eklem parametreleri.

- Uç elemana ( $X^n, Y^n, Z^n$ ) koordinatlı bir N'inci koordinat sistemi atanır. Koordinat sistemi merkezi  $Z^n$  eksenini boyunca olacak şekilde veya tercihen aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi robotun ucunun merkezinde olduğu gibi kurulur.

Her bağlantı için D-H koordinat sistemi kurulduktan sonra,  $i$ 'inci koordinat ile  $(i-1)$ 'nci koordinat sistemine ilişkin homojen bir dönüşüm matrisi kolayca geliştirilebilir. Koordinat sistemindeki bir nokta, aşağıdaki dönüşümler yapılarak  $(1-i)$ 'nci koordinat sisteminde ifade edilebilir:

- $X^{i-1}$  eksenini  $X^i$  eksenine hizalamak için  $Z^{i-1}$  eksenini etrafında  $\theta_i$  açısı kadar döndürülür.
- $X_{i-1}$  ve  $X_i$  eksenlerini tesadüfi hale getirmek için  $Z_{i-1}$  eksenini boyunca  $d_i$  mesafesi kadar uzatılır.
- $X_i$  eksenini boyunca iki orijini ve  $X$  eksenini rastlantısal haline getirmek için  $a_i$  mesafesi kadar ötelenir.
- İki koordinat sistemini rastlantısal hale getirmek için  $X_i$  eksenini etrafında  $\alpha_i$  açısı kadar döndürülür.





**Şekil 4.14 :** Koordinatların atanması.

Bu dört operasyondan her biri, dört temel dönüşüm matrisinin bir ürünü olarak homojen bir dönüşüm matrisi  ${}^{i-1}_i T$  ile ifade edilebilir.  ${}^{i-1}_i T$ ,  $i$  ve  $i-1$  bitirış koordinat sistemi için D-H dönüşüm matrisi olarak bilinir.

$${}^{i-1}_i T = T_{R(x, \alpha_{i-1})} T_{T(x, a_i)} T_{R(z, \theta_i)} T_{d(z, d_i)} \quad (4.52)$$

$T =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & \sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

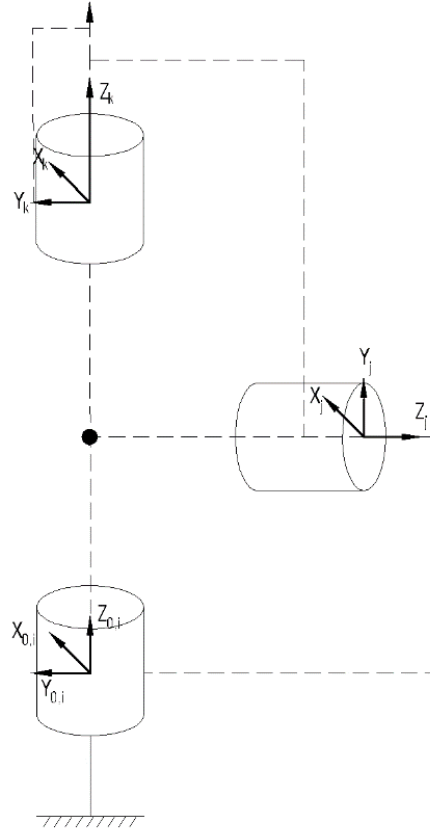
$${}^{i-1}_i T = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} \cos \theta_i & \sin \alpha_{i-1} & -d_i \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} \cos \theta_i & \cos \alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Transformasyon matrisi yardımıyla  $i-1$  sabit referans koordinat sistemine dayanarak bir  $P_i$  noktası belirleyebiliriz.

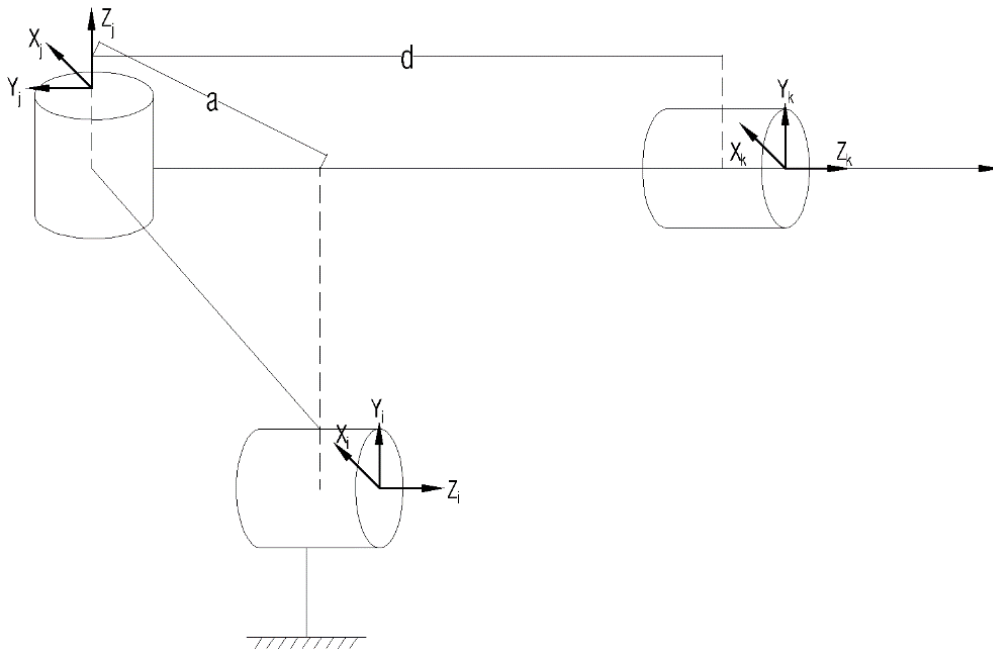
$$P_{i-1} = {}^{i-1}_i T P_i \quad (4.55)$$

#### 4.2.7 Endüstriyel robotlarda kullanılan bilek düzenleşimleri

Endüstriyel robotlarda Euler ve eklem kaçıklılıklı olmak üzere iki ayrı bilek düzenleşimi kullanılmaktadır. Euler bilekli düzenleşimde üç eksen, bir noktada kesişirken eklem kaçıklılıklı bilek düzenleşiminde eksenlerin kesişmeleri  $d$  eklem kayması ve  $a$  bağ uzunluğu konularak engellenir. Aşağıdaki şekillerde Euler bileğinin ve eklem kaçıklılıklı bileğin düzenleşimi gösterilmektedir.



Şekil 4.15 : Euler bileğinin düzenleşimi.



Şekil 4.16 : Eklem kaçıklıklı bileğinin düzenleşimi.

#### 4.2.8 Kol matrisi

Bir D-H dönüşümü matrisi elde edildiğinde, uç-eleman koordinatlarını ve takım ip ucundan başlayıp taban noktasında biten ardışık dönüşüm matrislerini çarparak robotun taban koordinatlarına dönüştüren bir birleşik dönüşüm matrisi elde edebiliriz. Bu birleşik homojen koordinat dönüşüm matrisi kol matrisi olarak adlandırılır. Homojen dönüşüm matrisinin oluşturulmasında dört adım vardır. İki ardışık koordinat çerçevesinde bu adımları gerçekleştirirken dönüşüm matrisini elde edebiliriz.

- (i-1) koordinat çerçevesi  $Z^{i-1}$  etrafında  $\theta_i$  açısı kadar döndürülür.
- (i-1) koordinat çerçevesi  $Z^{i-1}$  boyunca  $d_i$  kadar ötelenir.
- (i-1) koordinat çerçevesi  $X^{i-1}$  boyunca  $a_i$  kadar ötelenir.
- (i-1) koordinat çerçevesi  $X^{i-1}$  etrafında  $\alpha_i$  açısı kadar döndürülür.

Bir robot kolunun eklem ve bağlantıları 0 numaralı bağlantı olan sabit tabandan başlayarak robotun son uç elemanının bitimi (çerçeve) olan n'inci bağlantıya kadar dışa doğru numaralandırılmıştır. Koordinat çerçevelerini bir n eksenli robot kolunun bağlantılarına sistematik şekilde atamak için son bağlantı dikkate alınmalıdır. Aletin yönü dikdörtgen koordinatlar halinde, Şekil 5.13'te gösterildiği gibi normal, değişken (kayma) ve yaklaşım vektörlerine karşılık gelen bir rotasyon matrisi R ile ifade edilebilir. Yaklaşım vektörü (a), takım rulusu eksenine hizalıdır. Bir robot kolunun eklem ve bağlantıları 0 numaralı bağlantı olan sabit tabandan başlayarak robotun son uç elemanının bitimi olan n'inci bağlantıya kadar dışa doğru numaralandırılmıştır.

Koordinat çerçevelerini bir n eksenli robot kolunun bağlantılarına sistematik şekilde atamak için son bağlantı dikkate alınmalıdır. Aletin yönü dikdörtgen koordinatlar halinde, Şekil 5.13'te gösterildiği gibi normal, değişken (kayma) ve yaklaşım vektörlerine karşılık gelen bir rotasyon matrisi R ile ifade edilebilir. Yaklaşım vektörü (a), takım rulusu eksenine hizalıdır. Değişken vektör (s), araç yükseklik (açık-kapalı) eksenine hizalanır ve yaklaşım vektörüne dik olur. Normal vektör (n), araç sapmasıyla hizalıdır ve yaklaşım-değişken vektörleri tarafından tanımlanan düzleme diktir.

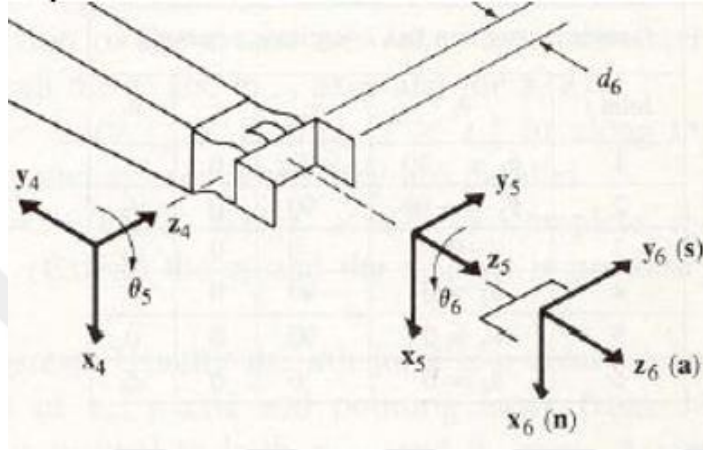
${}_{\text{çerçeve}}^{\text{taban}}T$ , n'nci bağlantıdaki çerçeve koordinatından 0 numaralı bağlantıdaki taban koordinatına bir dönüşümü temsil ediyorsa, homojen matris şu şekilde ifade edilmiştir:

$${}_{\text{çerçeve}}^{\text{taban}}T = {}_1^0T {}_2^1T {}_3^2T \dots {}_i^{i-1}T \quad (4.56)$$

(4.56) numaralı eşitlik oryantasyon matrisi, konum vektörü, perspektif ve ölçek faktörleri açısından şu şekilde gösterilir;

$${}_{\text{çerçeve}}^{\text{taban}}T = \begin{bmatrix} {}_{\text{çerçeve}}^{\text{taban}}R & {}_{\text{çerçeve}}^{\text{taban}}P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

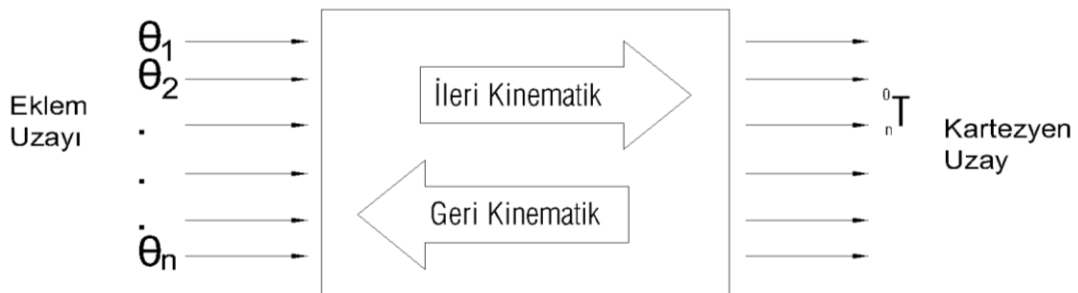
Eğer altı bağlantılı bir aygıtımız varsa o zaman  $T = {}^0_6T$  olur. Buradaki T matrisi çoğu zaman kol matrisi olarak adlandırılan robot kinematığında kullanılır.



Şekil 4.17 : Normal (n), kaydırma (s), yaklaşım (a) vektörleri.

### 4.3 Ters Kinematik

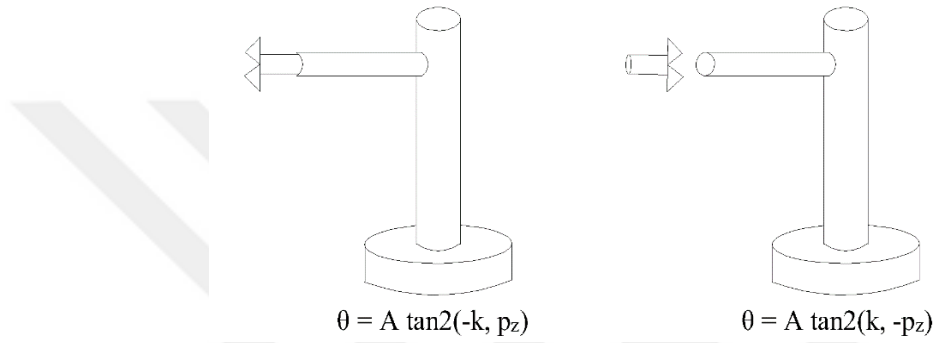
Robot uç elemanın ana çerçeveye göre konumu ve yönelimi verildiğinde manipülâtörün bu konuma ve yönelime gelebilmesi için gerekli eklem değışiklikleri ters kinematik ile bulunur. Yani robot uç elemanın konum ve yönelimini kartezyen koordinat sisteminden eklem koordinat sistemine dönüştürme işlemine ters kinematik denebilir.



Şekil 4.18 : İleri ve ters kinematik problemin şematik gösterimi.

Ters kinematik aşağıdaki nedenlerden dolayı çözülmesi oldukça zor olan problemler içerir. (Küçük ve Bingöl, 2015)

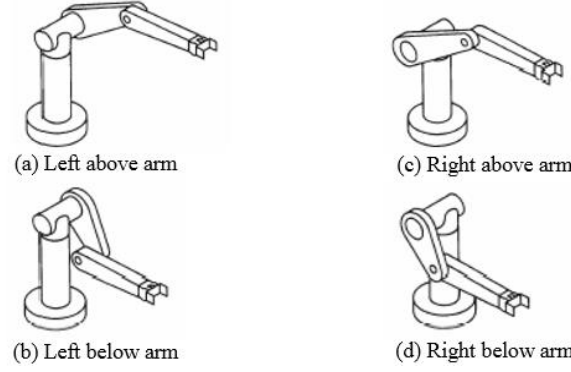
- Analitik olarak karmaşık, doğrusal olmayan denklemler içerir.
- Eklemlerin yapısına bağlıdır. Eğer robot prizmatik eklemlerden oluşuyorsa ters kinematik problemin çözümü daha kolay hale gelirken, robottaki döner eklem sayısı arttıkça problemin çözümü de giderek zorlaşmaktadır.
- Matematiksel çözüm her zaman fiziksel çözümü temsil etmez. Şekil 4.19'daki gibi  $\theta = A \tan 2(-k, p_z)$  ise matematiksel çözümle fiziksel çözüm örtüşürken tam tersine  $\theta = A \tan 2(k, -p_z)$  ise fiziksel olarak gerçekleşmeyecek bir çözüm üretmektedir.



**Şekil 4.19 :** Matematiksel ifade ile fiziksel çözüm arasındaki ilişki.

- Aynı uç işlevci düzenleşimi için birden fazla çözüm olabilir. Ters kinematik çözüm sayısı robotun serbestlik derecesinin yanında aynı zamanda eklem değişkenlerine de bağlıdır. Her bir eklemden  $a$  ve  $d$  parametrelerinin her ikisinin de bulunması çözüm sayısının artmasına neden olur. 6 serbestlik derecesine sahip olan robotta her bir eklem için en az bir  $a$  veya  $d$  değişkeni olduğundan ters kinematik çözüm sayısı  $2^6 = 64$ 'tür. Bu çözümlerin bazıları gerçek bazıları ise sanal olabilir.

Ters kinematik çözüm sayısına robotların eklem yapısının da önemli etkisi vardır. Prizmatik eklemler çözüm sayısının azalmasına, dönel eklemlerse artmasına neden olur. Ayrıca dönel eklemlerden oluşan robotlarda fiziksel çözüm sayısının fazla olması üç boyutlu uzayda bir noktaya pek çok farklı şekilde ulaşma imkanı sağlar. Şekil 4.20'de PUMA-560 robotunun aynı noktaya dört farklı şekilde ulaşabildiği görülmektedir (Url-2).



**Şekil 4.20 :** PUMA-560 robotu için dört farklı çözüm.

- Ters kinematik problem, verilen bir robot düzenleşimi için tamamen analitik olarak çözülebileceği gibi, analitik çözümün mümkün olmadığı durumlarda sayısal yöntemler kullanılarak da çözülebilir. Fakat tamamen kesin sonuç üreten analitik çözüme ait denklemler bilgisayar ortamında çok hızlı çalışırken, eklem açılarının iteratif olarak çözüldüğü sayısal çözüm ise bilgisayar ortamında analitik çözüme göre daha yavaş çalışır. Ayrıca sayısal olarak eklem açılarını bulmak için yazılan algoritmanın yapısı da önemlidir.

Sayısal çözümün bilgisayar ortamında analitik çözüme göre daha yavaş çalışmasından dolayı robot tasarımcıları genellikle analitik çözümün mümkün olduğu tasarımlar üzerinde durmaktadır. Günümüzde PUMA ve SCARA robotlarında olduğu gibi arka arkaya gelen üç eklem paralel ise 6 serbestlik derecesine sahip robotların ters kinematik çözümü analitik yöntemle elde edilir.

Endüstriyel robotlarda Euler ve eklem kaçıklıklı bilekli olmak üzere iki tip bilek kullanılmaktadır. Bu iki bileğin ters kinematik çözümleri incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara varılır (Küçük ve Bingül, 2015).

- Euler bileğinin üç eklemi de bir noktada kesiştiğinden, bu bileğin eklendiği endüstriyel robot manipülatörlerinin ters kinematiği tamamen analitik olarak çözülebilmektedir. Eklem kaçıklıklı bilekli endüstriyel robotların son üç ekleminde a ve d değişkenleri bulunduğundan, bu robot manipülatörlerinin bir kısmı tamamen analitik olarak çözülebilmektedir.
- Euler bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim birbirinden ayrı gerçekleştiğinden, bu robotlar için her zaman analitik çözüm vardır. Buna rağmen, eklem kaçıklıklı bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim iç içe olduğundan her zaman analitik

çözüm gerçekleşmeyebilir.

- Euler bilekli robotların ters kinematiğinde en fazla üç bilinmeyenli üç denklem olduğundan analitik olarak çözümlenirken, eklem kaçıklıklı bilekli robotların ters kinematiğinde ise üç denkleme karşılık üçten fazla bilinmeyen olduğundan analitik çözümleri oldukça güç veya yoktur. Bu açıdan robotların bir kısmının ters kinematiği sayısal olarak çözümlenir.

Euler bilekli robotlarda ilk üç eklem uç işlevcinin konumunu, son üç eklem ise yönelimini belirlerken, eklem kaçıklıklı bilekli robotlarda konumla yönelim iç içe gerçekleşmektedir. Bu açıdan Euler bilekli robotlarda, çalışma uzayında hemen hemen bütün noktalara ulaşırken, eklem kaçıklıklı robotlarda çalışma uzayı genişlemesine karşın bütün noktalara ulaşamaz.

### 4.3.1 Ters kinematik çözüm yöntemleri

#### 4.3.1.1 Analitik çözüm yaklaşımı

Craig tarafından tanımlanan altı serbestlik derecesine sahip bir robotun ileri yön kinematiği aşağıdaki gibi yazılır.

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (4.58)$$

${}^0T_6$  ileri yön kinematik matrisi, konum ve yönelim verilerini içeren matris elemanları cinsinden denklem (4.59)'deki gibi yazılıp denklem (4.60)'teki eşitlik sağlanır. Denklem (4.59)'deki matrisin ilk satırı uç işlevcinin normal vektörünü ( $n=[n_x \ n_y \ n_z]^T$ ), ikinci satırı kayma vektörünü ( $s = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ ) ve üçüncü kolonu ise yaklaşım vektörünü ( $a = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ ) temsil etmektedir (Bingül & Küçük, 2015).

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$[{}^0T_1]^{-1} {}^0T_6 = [{}^0T_1]^{-1} {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (4.60)$$

Denklemden  $[{}^0T_1]^{-1} {}^0T_1 = I$  olduğundan, denklem (4.60) aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$[{}^0T_1]^{-1} {}^0T_6 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (4.61)$$

Ters kinematik problem çözümü, denklem (4.61)'deki eşitliğin sağ ve sol tarafında karşılıklı yer alan matris elemanlarının birbirine eşitlenmesiyle gerçekleştirilir. Kullanılan diğer denklemler aşağıdaki gibidir.

$$[{}^0_1T \ {}^1_2T]^{-1} {}^0_6T = {}^2_3T \ {}^3_4T \ {}^4_5T \ {}^6_7T \quad (4.62)$$

$$[{}^0_1T \ {}^1_2T \ {}^2_3T]^{-1} {}^0_6T = {}^3_4T \ {}^4_5T \ {}^6_7T \quad (4.63)$$

$$[{}^0_1T \ {}^1_2T \ {}^2_3T \ {}^3_4T]^{-1} {}^0_6T = {}^4_5T \ {}^6_7T \quad (4.64)$$

$$[{}^0_1T \ {}^1_2T \ {}^2_3T \ {}^3_4T \ {}^4_5T]^{-1} {}^0_6T = {}^6_7T \quad (4.65)$$

Öte yandan ters kinematik çözüm gerçekleştirilirken aşağıda yer alan bazı trigonometrik eşitliklerden yararlanılır.

$$\cos \theta = a \text{ ise } \theta = \arctan\left(\pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right) \quad (4.66)$$

$$\sin \theta = a \text{ ise } \theta = \arctan\left(\pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right) \quad (4.67)$$

$$\cos \theta = a \text{ ve } \sin \theta = b \text{ ise } \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4.68)$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = 0 \text{ ise } \theta = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) \text{ veya } \theta = \arctan\left(\frac{b}{-a}\right) \quad (4.69)$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = 0 \text{ ise } \theta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c}\right) \quad (4.70)$$

#### 4.3.1.2 Sayısal çözüm yöntemleri

Gerçek zamanlı kontrol uygulamaları gerçekleştirilirken herhangi bir robota ait ters kinematik problemin kesin çözümü tercih edilir. Kesin çözüm problemin analitik olarak çözülmesiyle elde edilir. Genellikle analitik çözüm, birbirini takip eden üç eksen birleştiğinde veya paralel olduğunda gerçekleştirilebilir (Pieper and Roth, 1968)(Fu, Gonzalez and Lee, . Genellikle robotlar analitik çözümleri gerçekleştirecek şekilde tasarlanırlar ve bu da sadece Euler bileğinin kullanılmasıyla mümkündür. Fakat bazı durumlarda ise endüstriyel robotların belirli miktarda yük kaldırılması da istenir. Bu tarz robotlarda Euler bileğinin aksine üç eklem bir noktada kesişmediği, eklem kaçıklıklı bilek kullanılır. Eklem kaçıklıklı bilekli altı serbestlik derecesine sahip endüstriyel robotların bir kısmı analitik olarak çözülürken bir kısmı ise



çözülememektedir. Bunun sebebi ters kinematik problem iki veya üç bilinmeyen içeren doğrusal olmayan denklem sistemlerinden oluşur. Analitik olarak çözilemeyen bu denklem sistemleri bir takım iteratif yöntemler kullanılarak çözülür. Analitik olarak çözilemeyen robotların ters kinematik problemleri Pashkevich tarafından geliştirilen ve Jakobiyen matrisi gerektirmeyen tek boyutlu sayısal yöntemler sayesinde çözülür. Euler bilekli robotlarda bilek merkezinin konumu aşağıdaki denklem ile bulunur.

$$P_4 = P_6 - d_6 a_6 \quad (4.71)$$

Yukarıdaki denklemde verilen  $P_4$  ilk dört dönüşüm matrisinin çarpılmasıyla elde edilen matrisin 4. satırındır.  $P_6$  ana koordinat sistemine göre uç işlevcinin konumunu temsil eder ve  ${}^0T_6$  homojen dönüşüm matrisinin 4. satırındır. Aynı matrisin 3. Satırını ise  $a_6$  matrisine denk gelmektedir. Aynı denklemde verilen  $d_6$  ise bir D-H değişkenidir. Bu bileğin yerleştirildiği altı serbestlik derecesine sahip robotun ilk olarak ilk üç eklemi sonrasında ise son 3 eklemi analitik olarak kolaylıkla çözülür.

Aynı yaklaşım eklem kaçıklıklı uygulandığında, oldukça karmaşık bir bilek merkezi konum ifadesiyle karşılaşılır. Eklem kaçıklıklı bileğin düzenlenişine göre iki farklı ifadeyle karşılaşılır. Eğer  $d_5$  ve  $d_6$ , D-H değişkenleri olacak şekilde bir bilek tasarımı gerçekleştirilirse, bu robota ait bilek merkezinin konumu denklem (4.72)'daki gibi ifade edilir.

$$P_4 = P_6 - d_6 a_6 - d_5 a_4 \quad (4.72)$$

Yukarıda verilen denklemde  $a_4$ ,  ${}^0T_4$  matrisindeki 3. satırındır. Eğer  $l_4$  ve  $d_6$ , D-H değişkenleri olacak şekilde bir bilek tasarımı gerçekleştirilirse, bu robota ait bilek merkezinin konumu denklem (4.73)'deki gibi ifade edilir.

$$P_4 = P_6 \pm d_6 a_6 \pm l_4 n_4 \quad (4.73)$$

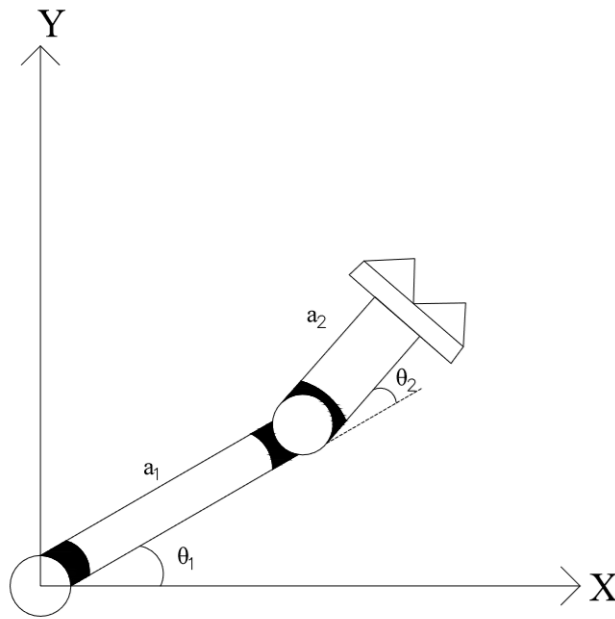
Denklem bahsi geçen  $n_4$ ,  ${}^0T_4$  matrisinin ilk satırındır. Eklem kaçıklıklı bilek düzenlenişinde, aşağıdaki şekildeki gibi  $l_4$  ve  $d_6$ , D-H değişkenlerini içeren bir yapı vardır. Denklem (4.73)'den yola çıkılarak iki veya üç açı birlikte iteratif olarak çözülür. Bu çözüm aşağıdaki denklemde olduğu gibi ifade edilir.

$$q_4 \rightarrow (q_1 \ q_2 \ q_3) \rightarrow (q_4 \ q_5 \ q_6) \quad (4.74)$$

Denklemdede,  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5, 6$ ) eklem değişkenlerini göstermektedir. İki veya üç eklem değişkeni sayısal olarak çözüldükten sonra geri kalan eklem değişkenleri analitik olarak çözülr.

#### 4.4 İki Boyutlu Düzlemde Bir RR Robotunun Kinematığı

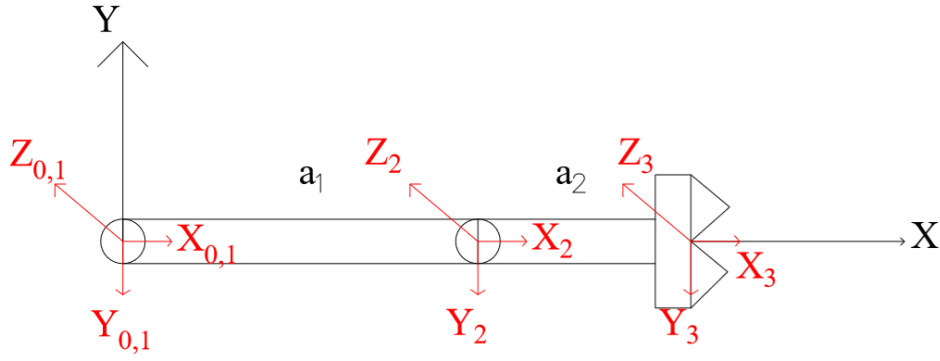
Bu bölümde iki dönel (RR) eklem yapısına sahip bir düzlemsel robotun önce ileri kinematığı çözülrerek robot uç elemanının varacağı konum belirlenmiş, ardından ise ters kinematik yöntem yardımıyla robotun değişken olan D-H parametreleri hesaplanmıştır.



Şekil 4.21 : İki boyutlu düzlemde RR robotu.

Şekil 4.21’de gösterilen iki dönel ekleme sahip robotun başlangıç noktası  $O(0,0)$ ’dır. İki uzva sahip bu robotun ilk uzvu 40 cm, robot uç elemana bağlanan diğer uzvu ise 20 cm’dir. Bu örnekte parametrelere değerler vererek denklemleri çözmemizin nedeni çözümlü ileri kinematikten daha zor olan ters kinematik problemin kesin fiziksel çözümlüne analitik yöntemlerle ulaşmaktır.

İlk iş olarak bu Şekil 4.22’deki gibi eklemlerdeki koordinat sistemleri tayin edilir.



**Şekil 4.22 :** RR robotuna koordinat sistemlerinin atanması.

Koordinat sistemlerinin atanmasından sonra D-H değişkenleri tablosu hazırlanarak Çizelge 4.2’de olduğu gibi parametreler tabloya işlenir. Robotumuz sadece iki boyutta hareket ettiğinden dolayı X eksenleri arasında kalan  $\alpha$  açıları tabloya 0 olarak girilir. Ayrıca yine aynı şekilde Z eksenleri arasında herhangi bir öteleme olmadığından d parametreleri 0 olacaktır.

**Çizelge 4.2 :** Düzlemsel RR Robotu İçin D-H Parametreleri.

<b>i</b>	<b><math>\alpha_{i-1}</math></b> (Z eksenini doğrultusunda X eksenleri arasında kalan açı)	<b><math>a_{i-1}</math></b> (X eksenini doğrultusunda Y-Z düzleminin ötelenmesi)	<b><math>d_i</math></b> (Z eksenini doğrultusunda X-Y düzleminin ötelenmesi)	<b><math>\theta_i</math></b> (X eksenini doğrultusunda Z eksenleri arasında kalan açı)	<b>Değişken</b>
1	0	0	0	$\theta_1 = 45^\circ$	$\theta_1$
2	0	$a_1 = 40$	0	$\theta_2 = 45^\circ$	$\theta_2$
3	0	$a_2 = 20$	0	0	0

X eksenleri arasındaki öteleme parametresi olan a için;

$i = 1$  için  $a_0 = 0$ ,  $i = 2$  için  $a_1 = 40$  ve  $i = 3$  için  $a_2 = 20$ ’dir. Ayrıca bu örneğimizde,  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  açılara  $45^\circ$  vererek robotu hareket ettirdiğimizi varsayıyoruz. D-H değişkenleri atanırken dikkat edilmesi gereken bir diğer konu da uç işlevcisinde herhangi bir döner eklem bulunmadığı için  $\theta$  açısını 0 olarak bırakmaktır. Bir sonraki adımda her eklem için dönüşüm matrisleri oluşturulur.

$${}^{i-1}T_i = T_{R(x, \alpha_{i-1})} T_{d(x, a_i)} T_{R(z, \theta_i)} T_{d(z, d_i)}$$

=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & \sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ -\sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} \cos\theta_i & \sin\alpha_{i-1} & d_i \sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} \cos\theta_i & \cos\alpha_{i-1} & d_i \cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her bir eklem için parametreler (4.74)'teki eşitlikte yerine konulursa;

i = 1 için,

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 0 \\ -\sin 45 \cos 0 & \cos 0 \cos 45 & \sin 0 & 0 * \sin 0 \\ \sin 45 \sin 0 & -\sin 0 \cos 45 & \cos 0 & 0 * \cos 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

i = 2 için,

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 40 \\ -\sin 45 \cos 0 & \cos 0 \cos 45 & \sin 0 & 0 * \sin 0 \\ \sin 45 \sin 0 & -\sin 0 \cos 45 & \cos 0 & 0 * \cos 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 & 40 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

i = 3 için,

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 0 & 20 \\ -\sin 0 \cos 0 & \cos 0 \cos 0 & \sin 0 & 0 * \sin 0 \\ \sin 0 \sin 0 & -\sin 0 \cos 0 & \cos 0 & 0 * \cos 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 0 & 20 \\ -\sin 0 \cos 0 & \cos 0 \cos 0 & \sin 0 & 0 * \sin 0 \\ \sin 0 \sin 0 & -\sin 0 \cos 0 & \cos 0 & 0 * \cos 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

rotasyon matrisleri oluşturulur.

İleri kinematik yöntemle uç elemanın en son varacağı noktanın konumunu elde etmek için;

$${}^0_3T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T$$

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 & 40 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 28.284 \\ -1 & 0 & 0 & -48.284 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Elde edilen matriste 9 adet dönme ve 3 adet konum elemanı bulunmaktadır. Matrisin 4. sütununda yer alan ilk üç eleman  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ 'yi temsil eder. Bulduğumuz matris içerisinde yer alan konum matrisinden yola çıkarak robot uç elemanının koordinatlarına üç boyuttaki dönüşüm formülümüzle şu şekilde ulaşabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28.284 \\ -48.284 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.284 \\ -48.284 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Konumu (4.80)'deki gibi elde edilen düzlemsel robot için ters kinematik işlemiyle değişken olan  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  hesaplanmak istenirse, öncelikle ileri kinematik denkleminin her iki tarafı (4.81)'de olduğu gibi, birinci eklem için geçerli olan rotasyon matrisiyle çarpılır.

$$[{}^0_1T]^{-1} {}^0_3T = [{}^0_1T]^{-1} {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T \quad (4.81)$$

$[{}^0_1T]^{-1} {}^0_1T = I$  olduğundan (4.81)'deki denklem (4.82)'daki hale gelecektir.

$$[{}^0_1T]^{-1} {}^0_3T = {}^1_2T {}^2_3T \quad (4.82)$$

${}^0_1T$  rotasyon matrisinin inversi aşağıda yer alan (4.83)'teki eşitlikte olduğu gibi hesaplanır.

$$[{}^0_1T]^{-1} = \begin{bmatrix} {}^0_1R^T & -{}^0_1R^T P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

İleri kinematik yöntem sırasında oluşturduğumuz  ${}^0_1R$  dönme matrisi  ${}^0_1T$  matrisinin içinde yer alan ilk iç satır ve sütundan oluşur ve (4.84)'teki gibidir.

$${}^0_1R = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 \cos 0 & \cos 0 \cos\theta_1 & \sin 0 \\ \sin\theta_1 \sin 0 & -\sin 0 \cos\theta_1 & \cos 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

${}^0_1R$  matrisinin transpozesi,

$${}^0_1R^T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

(4.85)'teki gibi olur.

Robota ait ilk eklem başlangıç koordinatları (0, 0) olduğundan,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 'dir.} \quad (4.86)$$

Denklem (4.83)'de yer alan matrisin ilk satır ikinci sütununda yer alan matrisler yerine konulursa aşağıdaki (4.87)'deki üç satır tek sütunluk matris elde edilir.

$$-{}^0_1R^T P_1 = - \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Denklem (4.83)'te tüm değerler yerine konulduğunda  ${}^0_1T$  matrisinin tersi aşağıdaki gibi olur.

$$[{}^0_1T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

${}^0_3T$  ileri kinematik matrisi, konum ve yönelim verilerini içeren matris elemanları cinsinden denklem (4.89)'daki gibi yazılmıştır. Bu matrisin ilk sütunu robot uç elemanının normal vektörünü ( $n=[n_x \ n_y \ n_z]^T$ ), ikinci sütunu kayma vektörünü ( $s=[s_x \ s_y \ s_z]^T$ ) ve üçüncü sütunu ise yaklaşım vektörünü ( $a=[a_x \ a_y \ a_z]^T$ ) temsil eder.

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Denklem (4.81)'deki matrisler yerlerine konursa;

$$\begin{aligned} [{}^0_1T]^{-1} {}^0_3T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \\ &= \begin{bmatrix} r_{11}\cos\theta_1 - r_{21}\sin\theta_1 & r_{12}\cos\theta_1 - r_{22}\sin\theta_1 & r_{13}\cos\theta_1 - r_{23}\sin\theta_1 & p_x\cos\theta_1 - p_y\sin\theta_1 \\ r_{11}\sin\theta_1 + r_{21}\cos\theta_1 & r_{12}\sin\theta_1 + r_{22}\cos\theta_1 & r_{13}\sin\theta_1 + r_{23}\cos\theta_1 & p_y\cos\theta_1 + p_x\sin\theta_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} {}^1_2T {}^2_3T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & a_1 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^1_2T {}^2_3T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & a_2\cos\theta_2 + a_1 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & -a_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Denklem (4.91) ve (4.90) birbirine eşitlendiğinde;

$$p_x\cos\theta_1 - p_y\sin\theta_1 = a_2\cos\theta_2 + a_1 \quad (4.92)$$

$$p_y\cos\theta_1 + p_x\sin\theta_1 = -a_2\sin\theta_2 \quad (4.93)$$

$$p_z = 0 \quad (4.94)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde elimizde olan parametreler  $p_x, p_y, a_1$  ve  $a_2$ 'dir. Aradıklarımız ise  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  parametreleridir. (4.92) ve (4.93) denklemlerinin her iki tarafının karesi alınır;

$$p_x^2 \cos^2 \theta_1 + p_y^2 \sin^2 \theta_1 - 2p_x p_y \cos \theta_1 \sin \theta_1 = a_2^2 \cos^2 \theta_2 + a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos \theta_2 \quad (4.95)$$

$$p_x^2 \sin^2 \theta_1 + p_y^2 \cos^2 \theta_1 + 2p_x p_y \cos \theta_1 \sin \theta_1 = a_2^2 \sin^2 \theta_2 \quad (4.96)$$

Denklem (4.95) ve (4.96) toplanırrsa;

$$p_x^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + p_y^2 = a_2^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos \theta_2$$

elde edilir.  $(\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) = 1$  olduğundan denklem son olarak (4.97)'deki hale gelir.

$$p_x^2 + p_y^2 = a_2^2 + a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos \theta_2 \quad (4.97)$$

Tüm değerler yerine konursa;

$$28.284^2 + (-48.284)^2 = 20^2 + 40^2 + (2 * 40 * 20 * \cos \theta_2)$$

$\cos \theta_2 = 45^0$  elde edilir.

Denklem (4.92)'deki değerler yerine konulursa;

$$28.284 \cos \theta_1 - (-48.284) \sin \theta_1 = 20 \cos 45 + 40$$

şekline gelir. Burada evrensel değişken değiştirme yöntemiyle  $\tan \frac{\theta_1}{2} = t$  olmak üzere  $\sin \theta_1 = \frac{2t}{1+t^2}$  ve  $\cos \theta_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  ifadeleri kullanılır.

$$28.284 \frac{1-t^2}{1+t^2} - (-48.284) \frac{2t}{1+t^2} = 20 \cos 45 + 40$$

$$28.284(1-t^2) + 96.568t = 54.142(1+t^2)$$

$$82.426t^2 - 96.568t + 25.858 = 0 \quad (4.98)$$

İkinci dereceden tek bilinmeyenli bir  $at^2 + bt + c = 0$  denkleminin çözümü aşağıda yer alan denklem (4.99)'daki gibidir.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.99)$$



Denklem (4.98) için (4.99)'deki formül uygulanırsa,

$$t = \frac{96.568 \pm \sqrt{96.568^2 - 4 * 82.426 * 25.858}}{2 * 82.426}$$

$$t_1 = \frac{96.568+28.282}{2*82.426} = 0.7573 \text{ ise } \tan \frac{\theta_1}{2} = 0.7573 \text{ olur ve buradan,}$$

$$\frac{\theta_1}{2} = \arctan 0.7573 \text{ ve } \theta_1 = 74.26^0 \text{ elde edilir.}$$

$$t_2 = \frac{96.568-28.282}{2*82.426} = 0.4142 \text{ yani } \tan \frac{\theta_1}{2} = 0.4142 \text{ olur ve buradan,}$$

$$\frac{\theta_1}{2} = \arctan 0.4142 \text{ ve } \theta_1 = 45^0 \text{ elde edilir.}$$

Aynı değerler denklem (4.93)'te yerine konulup  $\theta_1$  yalnız bırakılmak istenirse;

$$28.284 \sin \theta_1 - 48.284 \cos \theta_1 = -20 \cos 45$$

haline gelir. Burada yine evrensel değişken değiştirme yöntemiyle  $\tan \frac{\theta_1}{2} = t$  olmak üzere  $\sin \theta_1 = \frac{2t}{1+t^2}$  ve  $\cos \theta_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  ifadeleri kullanılır.

$$28.284 \frac{2t}{1+t^2} - 48.284 \frac{1-t^2}{1+t^2} = -20 \sin 45$$

$$62.426t^2 - 56.568t - 34.142 = 0 \quad (4.100)$$

Denklem (4.100) için (4.99)'daki formül uygulanırsa,

$$t = \frac{-56.568 \pm \sqrt{56.568^2 - 4 * 62.426 * (-34.142)}}{2 * 62.426}$$

$$t_3 = \frac{-56.568+108.284}{2*62.426} = 0.4142 \text{ ise } \tan \frac{\theta_1}{2} = 0.4142 \text{ olur ve buradan,}$$

$$\frac{\theta_1}{2} = \arctan 0.4142 \text{ ve } \theta_1 = 45^0 \text{ elde edilir.}$$

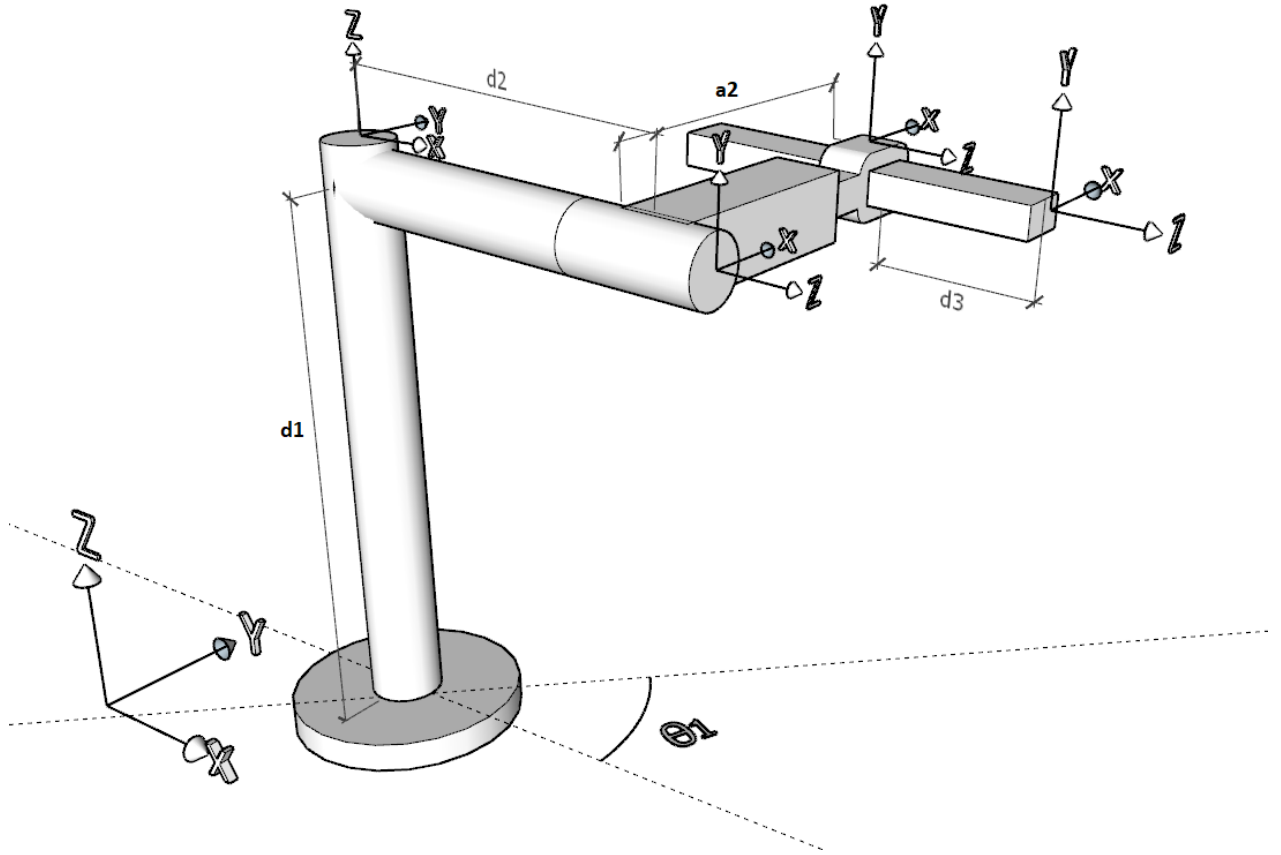
$$t_4 = \frac{-56.568-108.284}{2*62.426} = -1.3204 \text{ yani } \tan \frac{\theta_1}{2} = -1.3204 \text{ olur ve buradan,}$$

$$\frac{\theta_1}{2} = \arctan(-1.3204) \text{ ve } \theta_1 = -52.9^0 \text{ elde edilir.}$$

Böylece değişken parametrelerden  $\theta_1$  için üç farklı açı değeri bulunur.

#### 4.5 Bir RRP Robotunun Kinematığı ve Eklemleri Arasındaki Dönüşümler

Bu üç eklemlili bir RRP tipi endüstriyel robotun ileri ve ters kinematik yöntemleri oluşturulmuş ve robot eklemleri arasındaki koordinat dönüşümleri gerçekleştirilmiştir. Şekil 4.23'te gösterilen robot iki dönel ve bir prizmatik olmak üzere toplam üç değişken ekleme sahiptir.



Şekil 4.23 : RRP robotu ve koordinatların atanması.

Bu robotun kinematığının oluşturulması için öncelikle her bir ekleme koordinat sistemleri Şekil 4.23'teki gibi yerleştirilir. Ardından D-H değişkenleri Çizelge 4.3'teki gibi belirlenerek koordinatı atanan her eklem için dönüşüm matrisleri oluşturulur. Tabloda görüldüğü üzere robot hareket ettirildiğinde değişecek olan parametreler  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  ve  $d_3$  parametreleridir.

Bu örnekte ileri kinematik matrisi oluşturulmadan evvel robotun sabit parametreleri  $h_1 = 20$  cm,  $l_2 = 20$  cm ve  $d_2 = 15$  cm olarak belirlenmiştir. Robotun hareketi esnasında ilk eklem için geçerli olan  $\theta_1$  açısı  $45^\circ$ , bir sonraki dönel eklem için geçerli olan  $\theta_2$  açısı ise  $30^\circ$  döndürülmüştür. Son eklem ile uç eleman çerçevesi arasında kalan robot kolu ise  $d_3 = 10$  cm belirlendikten sonra ötelenmiştir. Bu örnekte parametrelere değerler vererek denklemleri çözmemizin nedeni çözümü ileri kinematikten daha zor olan ters kinematik problemin kesin fiziksel çözümüne analitik yöntemlerle ulaşmaktır.

**Çizelge 4.3 : RRP robotunun D-H değişkenlerinin belirlenmesi.**

<b>i</b>	<b><math>\alpha_{i-1}</math></b> (Z eksenini doğrultusunda X eksenleri arasında kalan açı)	<b><math>a_{i-1}</math></b> (X eksenini doğrultusunda Y-Z düzleminin ötelenmesi)	<b><math>d_i</math></b> (Z eksenini doğrultusunda X-Y düzleminin ötelenmesi)	<b><math>\theta_i</math></b> (X eksenini doğrultusunda Z eksenleri arasında kalan açı)	<b>Değişken</b>
<b>1</b>	0	0	$d_1 = 20$	$\theta_1 = 45^\circ$	$\theta_1$
<b>2</b>	$\alpha_1 = 90^\circ$	0	$d_2 = 15$	$\theta_2 = 30^\circ$	$\theta_2$
<b>3</b>	0	$a_2 = 20$	0	0	0
<b>4</b>	0	0	$d_3 = 10$	0	$d_3$

D-H değişkenleri tabloya işlenirken her bir eklem için koordinat sistemi Şekil 4.23'teki gibi atanır ve parametreler şu şekilde belirlenir;

- $i = 1$  için  $Z_0$  ve  $Z_1$  eksenleri arasında kalan açı  $\alpha_0 = 0^\circ$ 'dir.
- $i = 1$  için  $Z_0$  ve  $Z_1$  eksenleri arasında kalan sabit mesafe  $d_1 = 20$ 'dir.
- $i = 1$  için  $X_0$  ve  $X_1$  eksenleri arasında herhangi bir öteleme olmadığından  $a_0 = 0$ 'dir.
- $i = 1$  için  $\theta_1 = 45^\circ$ 'tir.
- $i = 2$  için  $Z_1$  ve  $Z_2$  eksenleri arasında kalan açı  $\alpha_1 = 90^\circ$ 'dir.
- $i = 2$  için  $Z_1$  ve  $Z_2$  eksenleri arasında kalan sabit mesafe  $d_2 = 15$ 'dir.
- $i = 2$  için  $X_1$  ve  $X_2$  eksenleri arasında herhangi bir öteleme olmadığından  $a_1 = 0$ 'dir.
- $i = 2$  için  $\theta_2 = 45^\circ$ 'tir.
- $i = 3$  için  $Z_2$  ve  $Z_3$  eksenleri arasında kalan açı  $\alpha_2 = 0^\circ$ 'dir.

- $i = 3$  için  $Z_2$  ve  $Z_3$  eksenleri arasında herhangi bir öteleme olmadığından  $d_3 = 0$ 'dır.
- $i = 3$  için  $X_2$  ve  $X_3$  eksenleri arasındaki öteleme olmadığından  $a_2 = 20$ 'dir.
- $i = 3$  için herhangi bir dönel eklem bulunmadığından  $\theta_3 = 0$  olur.
- $i = 4$  için  $Z_3$  ve  $Z_4$  eksenleri arasında kalan açı  $\alpha_3 = 0$ 'dır.
- $i = 4$  için  $Z_3$  ve  $Z_4$  eksenleri arasındaki kayan prizmatik robot kolundaki öteleme  $d_4 = 10$  cm olarak belirlenir.
- $i = 4$  için  $X_3$  ve  $X_4$  eksenleri arasındaki öteleme olmadığından  $a_3 = 0$  olur.
- $i = 4$  için herhangi bir dönel eklem bulunmadığından  $\theta_4 = 0$  olur.

Şekildeki robotun her bir eklemi için dönüşüm matrisi oluşturulurken aşağıdaki işlemler göz önüne alınır;

- İkinci eklemden X eksenini  $\alpha_i$  kadar döndürülür.
- Robot kolu dönel eklemden prizmatik eklemeye geçerken X ekseninde  $a_i$  kadar ötelenir.
- Z eksenini sabit tutularak robot kolu  $\theta$  açısı kadar döndürülür.
- Robot uç elemanına bağlanan kol Z ekseninde  $d_i$  mesafesi kadar kaydırılır.

Üç değişkenli parametrelili bu robotun eklemlerine ait dönüşüm matrisi, yukarıda belirlenen parametrelerin meydana getirdiği matrislerin çarpımı ile aşağıdaki (4.101) numaralı denklemde olduğu gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
{}^{i-1}T &= T_{R(x,\alpha_{i-1})}T_{d(x,a_i)}T_{R(z,\theta_i)}T_{d(z,d_i)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & \sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & -\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 & 0 \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{i-1}T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ -\sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} \cos\theta_i & \sin\alpha_{i-1} & d_i \sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} \cos\theta_i & \cos\alpha_{i-1} & d_i \cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.101)
\end{aligned}$$

Her bir eklem için bu dönüşüm matrisi uygulandığında oluşan matrislerin çarpımı bize robotun ileri kinematikini verir.

$${}^0_4T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T \quad (4.102)$$

Çizelge 4.3'te verilen parametre değerleri her bir eklem için geçerli olan rotasyon matrislerine uygulandığında aşağıda yer alan (4.102), (4.103), (4.104) ve (4.105)'teki rotasyon matrisleri elde edilir.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & a_0 \\ -\sin\theta_1 \cos\alpha_0 & \cos\alpha_0 \cos\theta_1 & \sin\alpha_0 & h_1 \sin\alpha_0 \\ \sin\theta_1 \sin\alpha_0 & -\sin\alpha_0 \cos\theta_1 & \cos\alpha_0 & h_1 \cos\alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 0 \\ -\sin 45 \cos 0 & \cos 0 \cos 45 & \sin 0 & 20 * \sin 0 \\ \sin 45 \sin 0 & -\sin 0 \cos 45 & \cos 0 & 20 * \cos 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 0 \\ -\sin 45 & \cos 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 & 0 \\ -\sin 30 \cos 90 & \cos 90 \cos 30 & \sin 90 & 15 * \sin 90 \\ \sin 30 \sin 90 & -\sin 90 \cos 30 & \cos 90 & 15 * \cos 90 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ \sin 30 & -\cos 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 0 & 20 \\ -\sin 0 \cos 0 & \cos 0 \cos 0 & \sin 0 & 0 * \sin 0 \\ \sin 0 \sin 0 & -\sin 0 \cos 0 & \cos 0 & 0 * \cos 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 0 & 0 \\ -\sin 0 \cos 0 & \cos 0 \cos 0 & \sin 0 & 10 * \sin 0 \\ \sin 0 \sin 0 & -\cos 0 \cos 0 & \cos 0 & 10 * \cos 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Tüm rotasyon matrisleri oluşturulduktan sonra ileri kinematik dönüşüm matrisini bulmak için (4.102)'deki denkleme geri dönersek,

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 0 \\ -\sin 45 & \cos 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ \sin 30 & -\cos 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.35 & 0.71 & 29.93 \\ -0.61 & -0.35 & 0.71 & 5.43 \\ 0.5 & -0.87 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

elde edilir.

Elde edilen matriste 9 adet dönme ve 3 adet konum elemanı bulunmaktadır. Matrisin 4. sütununda yer alan ilk üç eleman  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ 'yi temsil eder. Bulduğumuz matris içerisinde yer alan konum matrisinden yola çıkarak robot uç elemanının koordinatlarına üç boyuttaki dönüşüm formülümüzle yani denklem (4.79) ile şu şekilde ulaşabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29.93 \\ 5.43 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.93 \\ 5.43 \\ 30 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

İleri yön kinematiği oluşturulup konumu elde edilen aynı robotun uç işlevcisinin değişken eklem parametreleri olan  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  ve  $d_4$  istenirse analitik çözüm yöntemlerine başvurmak en doğru yol olur. Öncelikle ileri kinematik denkleminin her iki tarafı (4.81)'de olduğu gibi burada da birinci eklem için geçerli olan rotasyon matrisiyle çarpılır.

$$[{}^0_1T]^{-1} {}^0_4T = [{}^0_1T]^{-1} {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T$$

${}^0_1T^{-1}{}^0_1T$  denklemi birim matrisi verdiği için;

$${}^0_1T^{-1}{}^0_1T = {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T \quad (4.109)$$

denklemler elde edilir.

${}^0_1T$  dönüşüm matrisinin inversi  ${}^0_1T^{-1} = \begin{bmatrix} {}^0_1R^T & -{}^0_1R^T P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  denklemi ile bulunabilir.

İleri kinematik yöntem sırasında oluşturduğumuz  ${}^0_1R$  dönme matrisinin transpozesi

$${}^0_1R^T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } {}^0_1T \text{ dönüşüm matrisinin konum vektörü sıfır}$$

olduğundan,

$$-{}^0_1R^T P_1 = - \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Bu durumda,

$${}^0_1T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

olarak elde edilir.

${}^0_4T$  ileri kinematik matrisi, konum ve yönelim verileri ile bir matris haline getirilirse şu şekilde oluşur;

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^0_4T$  ileri kinematik matrisi, konum ve yönelim verilerini içeren matris elemanları cinsinden denklem (4.111)'deki gibi yazılabilir. Bu matrisin ilk sütunu robot uç elemanının normal vektörünü ( $n=[n_x \ n_y \ n_z]^T$ ), ikinci sütunu kayma vektörünü ( $s=[s_x \ s_y \ s_z]^T$ ) ve üçüncü sütunu ise yaklaşım vektörünü ( $a=[a_x \ a_y \ a_z]^T$ ) temsil eder.

Geri kinematik denkleminde dönecek olursak,  ${}^0_4T$  matrisinin  ${}^0_1T$  dönüşüm matrisinin inversi ile çarpımı bize aşağıdaki sonucu verir.

$$\begin{aligned}
 {}^0_1T^{-1} {}^0_4T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \\
 &= \begin{bmatrix} r_{11}\cos\theta_1 - \sin\theta_1 r_{21} & r_{12}\cos\theta_1 - \sin\theta_1 r_{22} & r_{13}\cos\theta_1 - r_{23}\sin\theta_1 & p_x\cos\theta_1 - p_y\sin\theta_1 \\ r_{11}\sin\theta_1 + \cos\theta_1 r_{21} & r_{12}\sin\theta_1 + \cos\theta_1 r_{22} & r_{13}\sin\theta_1 + r_{23}\cos\theta_1 & p_x\sin\theta_1 + p_y\cos\theta_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \quad (4.111)
 \end{aligned}$$

Geri kinematik için oluşturduğumuz denklemin sağ tarafında yer alan işlem için;

$$\begin{aligned}
 {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & d_3 a_2 \cos\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 + d_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & -a_2 \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \quad (4.112)
 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Eşitliğin her iki tarafında yer alan matrislerin çarpımları sonucu elde edilen iki matris birbirine eşitlenirse;

$$p_x \cos\theta_1 - p_y \sin\theta_1 = a_2 \cos\theta_2 \quad (4.113)$$

$$p_x \sin\theta_1 + p_y \cos\theta_1 = d_3 + d_2 \quad (4.114)$$

$$p_z - d_1 = a_2 \sin\theta_2 \quad (4.115)$$

eşitlikleri elde edilir.



Yukarıda elde edilen çok bilinmeyenli denklemleri çözmek için öncelikle elimizdeki bilinen verileri belirleriz.  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  konum verileri ile  $d_1$ ,  $a_2$ ,  $d_2$  parametreleri elimizdeki bilinen veriler,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  ve  $d_3$  ise aranan değişkenlerdir.

Denklem (4.115)'de sadece  $\theta_2$  bilinmeyen olduğundan  $\sin \theta_2$  yalnız bırakılır.

$$30 - 20 = -20\sin\theta_2$$

$$\sin\theta_2 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_2 = \arcsin\frac{1}{2} = 30^\circ \quad (4.116)$$

olarak bulunur.

$\theta_2$ 'nin bulunmasıyla beraber denklem (4.113)'te tek bilinmeyenli bir denklem haline gelir. Bu denklemi çözmek için evrensel değişken değiştirmesi uygulanır.

$\tan\frac{\theta_1}{2} = t$  olmak üzere  $\sin\theta_1 = \frac{2t}{1+t^2}$  ve  $\cos\theta_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  formülleri (4.113)'te yerine konulursa;

$$p_x \cos\theta_1 - p_y \sin\theta_1 = a_2 \cos\theta_2$$

$$9.925 \cos\theta_1 - 5.43 \sin\theta_1 = 20 \cos 30$$

$$29.925 \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) - 5.43 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) = 20 \cos 30$$

$$29.925 - 29.925t^2 - 10.86 = 17.3025 + 17.3025t^2$$

$$47.2455t^2 - 10.86t - 12.6045 = 0 \quad (4.117)$$

İkinci dereceden tek bilinmeyenli bir  $at^2 + bt + c = 0$  denkleminin çözümü aşağıda yer alan denklem (4.99)'daki gibidir.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-10.86 \pm \sqrt{10.86^2 - 4 \times 47.2455 \times (-12.6045)}}{2 \times 47.2455} = \frac{-10.86 \pm 49.999}{94.491}$$

$$t_1 = \frac{-10.86 + 49.9996}{94.491} = 0.4142 \text{ ise } \tan\frac{\theta_1}{2} = 0.4142 \text{ olur ve buradan,}$$

$\frac{\theta_1}{2} = \arctan 0.4142$  ve  $\theta_1 = 45^\circ$  elde edilir.

$t_2 = \frac{-10.86 - 49.9996}{94.491} = -0.644078$  yani  $\tan \frac{\theta_1}{2} = -0.644078$  olur ve buradan,

$\frac{\theta_1}{2} = \arctan(-0.644078)$  ve  $\theta_1 = -65.57^\circ$  elde edilir.

$\theta_1$  için iki farklı değer bulunması sonrası, her iki değer de denklem (4.114)'te yerine konulursa;

$$p_x \sin \theta_1 + p_y \cos \theta_1 = d_3 + d_2$$

$$\theta_1 = 45^\circ \text{ için, } 29.925 \sin 45 + 5.43 \cos 45 = d_3 + 15$$

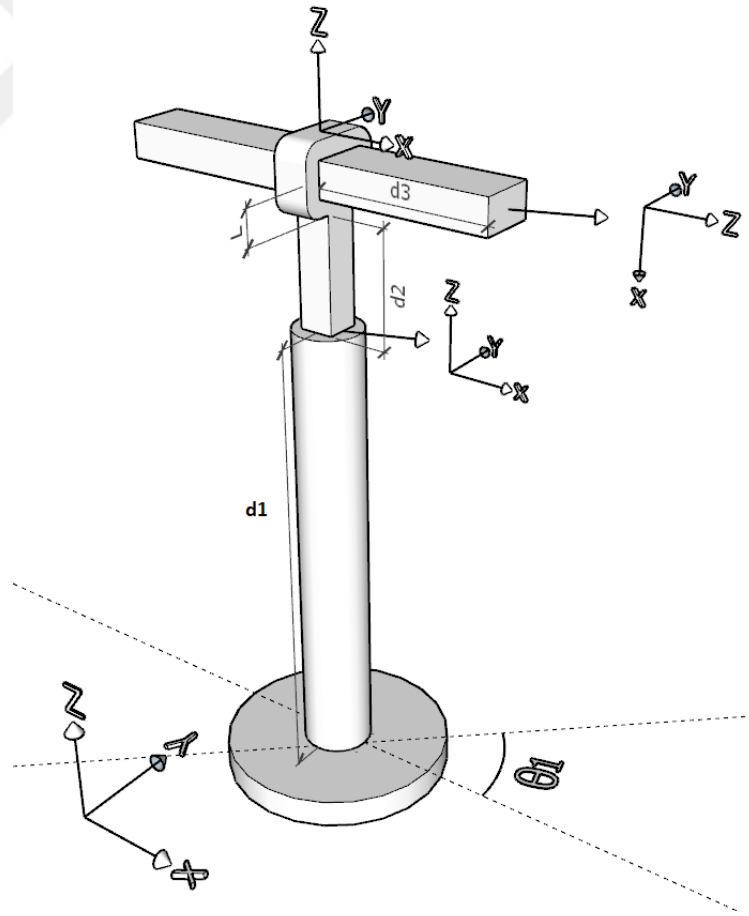
$$d_3 = 10 \text{ cm ve } \theta_1 = -65.57^\circ \text{ için,}$$

$$29.925 \sin(-65.57) + 5.43 \cos(-65.57) = d_3 + 15$$

Buradan  $d_3 = -39.997 \text{ cm}$  elde edilir.

## 5. ÜÇ BOYUTLU DÜZLEMDE HAREKET EDEBİLEN BİR ROBOT TASARIMI VE EKLEMLERİ ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER İLE ÇALIŞMA ALANININ BELİRLENMESİ

Bu tez çalışması kapsamında üç boyutlu bir düzlemde her yöne hareketi sağlanabilen üç serbestlik dereceli bir robot tasarlanmıştır. Tasarımı yapılan robotun hareketini gösteren bir animasyon, gif formatı şeklinde Ek A'da mevcuttur. Robot tasarlanırken bir dönel iki prizmatik kola sahip olması planlanmıştır. Robota iki prizmatik eklenerek ters kinematik probleminin çözümü de kolaylaştırılmıştır. Dönel eklemin tek tutulup artırılmamasının sebebi de bundandır. Dönel eklem sayısı ne kadar artırılırsa fiziksel olarak çözüm de bir o kadar güç olacağından tek dönel ekleme yer verilmiştir.



Şekil 5.1 : RPP Robotu.

Tasarlanan bu RPP robotunun başlangıç noktasının konumu  $O(0,0,0)$ 'dır ve Şekil 5.1'deki gibidir. Robotun ilk ayağı  $d_1$  yüksekliğinde ve sabittir. İlk ayak dönel bir yapıya sahiptir ve  $\theta$  açısı kadar döndürüldüğünde tüm mekanizmanın beraber dönmesi sağlanmıştır. Bu ayağa bağlı yükselip alçalabilen yani Z eksenine yönünde konumunu değiştirebilen bir kol eklenmiştir. Bu kolun ucuna bağlı sabit "L" yüksekliğinde bir parça tutturulmuş ve bu parça içerisinden geçirilen, iki yöne kayabilen mekanizmaya sahip bir prizmatik kol daha bulunmaktadır.

Bu çalışmada robotun tasarımından sonra robotun konumu belli olan bir noktaya varması için alabileceği parametre değerleri bulunmuş ve ardından bu parametrelerin alabileceği minimum değerler üzerinden erişebileceği konum belirlenmiştir. Bu robot tasarlanırken seçilen değişken parametreler  $\theta_1$ ,  $d_2$  ve  $d_3$ 'tür. Elimizdeki veriler ise robotun sabit değerleri  $d_1$  ve L yükseklikleri ile ulaşabileceği bir P noktasının konumu  $P(100, 100, 150)$ 'dir. Ayrıca bu robot için hesaplamaları kolaylaştırmak amacıyla ileri kinematik yöntemlerine yönelik iki makro Microsoft Excel ortamında oluşturulmuştur. İlk yapılan makroda robotun ilk nokta koordinatları ve D-H parametreleri bilindiği düşünülerek robot uç işlevcisinin gideceği nokta koordinatları hesaplanmıştır. Bu makroya ait bir görüntü Şekil 5.2'deki gibidir. Ardından yapılan makroda ise başlangıç ve bitiş noktaları bilinen bu robot için değişken D-H parametreleri hesaplanmıştır ve Şekil-5.3'teki gibi ekran görüntüsüne sahiptir. Oluşturulan bu makrolar Excel formatında Ek-A'da sunulmuştur.

D-H Değişkenleri					
i	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$	Değişken
1	0	0	20	45	$\theta_1$
2	0	0	15	0	$d_2$
3	90	0	10	0	$d_3$

Başlangıç Noktası		
X	Y	Z
P0	0	0

Bitiş Noktası		
X	Y	Z
P3	7.07	7.07

Bilinenler	
L	5
$d_1$	20
k	1
$\phi$	90

DEĞİŞKENLER	
$\theta_1$	45
$d_2$	15
$d_3$	10

PRFORMU

BAŞLANGIÇ NOKTASI VE D-H PARAMETRELERİ BİLİNER BİR RPP ROBOTUNUN UÇ İŞLEVCI KOORDİNATINI BULMA

İÇİLECEK DEĞERLER

D-H DEĞİŞKENLERİ

alfa1 0 a1 0 d1 20  $\theta_1$  45 L 5

alfa2 0 a2 0 d2 15  $\theta_2$  0 k 1

alfa3 90 a3 0 d3 10  $\theta_3$  0  $\phi$  90

ROBOT İLK NOKTA KOORDİNATLARI

P0,x 0 P0,y 0 P0,z 0

ROBOT UÇ İŞLEVCI KOORDİNATLARI

X 7.0710678118654

Y 7.0710678118654

Z 35

HESAPLA

ÇIK

**Şekil 5.2 :** Başlangıç koordinatı ve D-H parametreleri bilinen robotun uç eleman koordinatlarını hesaplama yazılımı.

Başlangıç Noktası			
	X	Y	Z
P0	0.00	0.00	0.00
Bitiş Noktası			
	X	Y	Z
P3	100.00	100.00	150.00

D-H Değişkenleri					
i	a <sub>i-1</sub>	a <sub>i-1</sub>	d <sub>i</sub>	θ <sub>i</sub>	Değişken
1	0	0	20	θ <sub>1</sub>	
2	0	0	0	d <sub>2</sub>	
3	90	0	0	d <sub>3</sub>	

Bilinmeyenler	
L	5
d <sub>1</sub>	20
k	1
φ	90

Bilinmeyenler	
θ <sub>1</sub>	45
d <sub>2</sub>	125.00
d <sub>3</sub>	141.42

UzerForm1

BAŞLANGIÇ VE BİTİŞ NOKTASI KOORDİNATLARI BİLİNE BİR RPP ROBOTUNUN DEĞİŞKEN PARAMETRELERİNİ BULMA

BAŞLANGIÇ NOKTASI KOORDİNATLARI	BİTİŞ NOKTASI KOORDİNATLARI	BİLİNE PARAMETRELER
P0,X <input type="text" value="0"/>	P3,X <input type="text" value="100"/>	L <input type="text" value="5"/>
P0,Y <input type="text" value="0"/>	P3,Y <input type="text" value="100"/>	k <input type="text" value="1"/>
P0,Z <input type="text" value="0"/>	P3,Z <input type="text" value="150"/>	φ <input type="text" value="90"/>

D-H DEĞİŞKENLERİ (BİLİNENLER)

d1 <input type="text" value="0"/>	a1 <input type="text" value="0"/>	d1 <input type="text" value="20"/>	θ2 <input type="text" value="0"/>
a2 <input type="text" value="0"/>	a2 <input type="text" value="0"/>	θ3 <input type="text" value="0"/>	
a3 <input type="text" value="90"/>	a3 <input type="text" value="0"/>		

DEĞİŞKEN PARAMETRELER (BİLİNMEYENLER)

θ1	<input type="text" value="45"/>
d2	<input type="text" value="125"/>
d3	<input type="text" value="141.4213"/>

**Şekil 5.3 :** Başlangıç ve bitiş koordinatlarından robotun değişken parametrelerini hesaplama yazılımı.

Öncelikle tasarlanan robot için her bir ekleme ve uç işlevci çerçevesine koordinat sistemleri Şekil 5.1'deki gibi atanır. Koordinatlar atanırken öncelikle Z eksenlerinin dönel eklemler için dönme ve prizmatik eklemler için ise kayma yönlerine göre atanmasına dikkat edilir. Ardından Z eksenlerine dik olarak X eksenleri atanır. İki eksenin her eklem için atanmasından sonra sağ el koordinat sistemi kuralına göre Y eksenleri atanır.

Koordinat sistemlerinin eklemlere yerleştirilmesi işleminden sonra D-H değişkenlerinin belirlenmesine geçilir.

- $i = 1$  için  $Z_0$  ve  $Z_1$  eksenleri arasında kalan açı  $\alpha_0 = 0^\circ$ 'dir.
- $i = 1$  için  $Z_0$  ve  $Z_1$  eksenleri arasında kalan sabit mesafe  $d_1 = 20$ 'dir.
- $i = 1$  için  $X_0$  ve  $X_1$  eksenleri arasında herhangi bir öteleme olmadığından  $a_0 = 0$  olur.
- $i = 1$  için değişken parametre  $\theta_1$ 'dir.
- $i = 2$  için  $Z_1$  ve  $Z_2$  eksenleri arasında kalan açı  $\alpha_1 = 0^\circ$ 'dir.
- $i = 2$  için  $Z_1$  ve  $Z_2$  eksenleri arasında kalan değişken mesafe  $L+d_2$ 'dir.
- $i = 2$  için  $X_1$  ve  $X_2$  eksenleri arasında herhangi bir öteleme olmadığından  $a_1 = 0$ 'dir.
- $i = 2$  için dönel bir eklem bulunmadığından  $\theta_2 = 0$  olur.
- $i = 3$  için  $Z_2$  ve  $Z_3$  eksenleri arasında kalan açı  $\alpha_2 = 90^\circ$ 'dir.

- $i = 3$  için  $X_2$  ve  $X_3$  eksenleri arasında herhangi bir öteleme olmadığından  $a_2 = 0$ 'dır.
- $i = 3$  için  $Z_2$  ve  $Z_3$  eksenleri arasında ötelemeden dolayı  $d_3$  değişken parametresi yer alır.
- $i = 3$  için herhangi bir dönel eklem bulunmadığından  $\theta_3 = 0$  olur.

**Çizelge 5.1 : Bir RPP robotu için D-H değişkenleri.**

<b>i</b>	<b><math>\alpha_{i-1}</math></b> (Z eksenini doğrultusunda X eksenleri arasında kalan açı)	<b><math>a_{i-1}</math></b> (X eksenini doğrultusunda Y-Z düzleminin ötelenmesi)	<b><math>d_i</math></b> (Z eksenini doğrultusunda X-Y düzleminin ötelenmesi)	<b><math>\theta_i</math></b> (X eksenini doğrultusunda Z eksenleri arasında kalan açı)	<b>Değişken</b>
<b>1</b>	0	0	$d_1 = 20$	$\theta_1$	$\theta_1$
<b>2</b>	0	0	$d_2 + L$	0	$d_2$
<b>3</b>	$90^\circ$	$d_3$	$d_3$	0	$d_3$

Şekildeki robotun her bir eklemi için dönüşüm matrisi oluşturulurken aşağıdaki işlemler göz önüne alınır;

- Robot uç işlevcinin çerçevesine geçilirken X eksenini  $\alpha_i$  kadar döndürülür.
- X eksenini sabit tutularak Z eksenini etrafında robot kolu  $\theta$  açısı kadar döndürülür.
- Robot uç elemanına ait kola geçilirken Z eksenini  $d_i$  mesafesi kadar kaydırılır.

Üç değişkenli parametrelili bu robotun eklemlerine ait dönüşüm matrisi, yukarıda belirlenen parametrelerin meydana getirdiği matrislerin çarpımı ile denklem (5.1)'de olduğu gibi elde edilir.

$${}^{i-1}T_i = T_{R(x, \alpha_{i-1})} T_{R(z, \theta_i)} T_{d(z, d_i)}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & \sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} \cos \theta_i & \sin \alpha_{i-1} & d_i \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} \cos \theta_i & \cos \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Her bir eklem için bu dönüşüm formülü uygulanırsa (5.2), (5.3) ve (5.4)'te verilen matrisler elde edilir.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1\cos\alpha_0 & \cos\alpha_0\cos\theta_1 & \sin\alpha_0 & d_1\sin\alpha_0 \\ \sin\theta_1\sin\alpha_0 & -\sin\alpha_0\cos\theta_1 & \cos\alpha_0 & d_1\cos\alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1\cos 0 & \cos 0\cos\theta_1 & \sin 0 & d_1\sin 0 \\ \sin\theta_1\sin 0 & -\sin 0\cos\theta_1 & \cos 0 & d_1\cos 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 0 & 0 \\ -\sin 0\cos 0 & \cos 0\cos 0 & \sin 0 & (d_2 + L) * \sin 0 \\ \sin 0\sin 0 & -\sin 0\cos 0 & \cos 0 & (d_2 + L) * \cos 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (d_2 + L) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 0 & 0 \\ -\sin 0\cos 90 & \cos 90\cos 0 & \sin 90 & d_3 * \sin 90 \\ \sin 0\sin 90 & -\sin 90\cos 0 & \cos 90 & d_3 * \cos 90 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Üç serbestlik derecesine sahip bu robotun ileri kinematikini hesaplamak için aşağıdaki (5.5) denklemi kullanılır ve sonuç (5.6)'daki gibi elde edilir.

$${}^0_3T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T \quad (5.5)$$

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (d_2 + L) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & d_3\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & d_3\cos\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 + L + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Elde edilen matrisin son sütununda yer alan ilk üç eleman konum vektörünü verir yani  $p_x, p_y, p_z$ 'yi temsil eder. Bulduğumuz matris içerisinde yer alan bu konum vektöründen yola çıkarak robot uç elemanının koordinatlarına üç boyuttaki dönüşüm formülümüzle yani denklem (4.26) ile ulaşabiliriz. Başlangıç koordinatlarımızı  $X_0 = 0, Y_0 = 0$  ve  $Z_0 = 0$  olduğundan;

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_3\sin\theta_1 \\ d_3\cos\theta_1 \\ d_2 + L + d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3\sin\theta_1 \\ d_3\cos\theta_1 \\ d_2 + L + d_1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

son P noktamızın koordinatları (5.7)'deki gibi elde edilir.

Ulaşmamız gereken P noktasının koordinatları  $P(100, 100, 150)$  olacağından;

$$d_2 + L + d_1 = 150$$

$$d_2 + 5 + 20 = 150$$

$$d_2 = 125 \text{ cm}$$

olarak elde edilir. Ayrıca P noktasının X ve Y koordinatlarını birbirine oranlarsak;

$$d_3\sin\theta_1 = 100$$

$$d_3\cos\theta_1 = 100$$

$$\frac{d_3\sin\theta_1}{d_3\cos\theta_1} = \frac{100}{100}$$



$\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = 1$  buradan  $\tan\theta_1 = 100$  bulunur.

Yani  $\theta_1 = 45^\circ$ 'dir.  $d_3 \sin 45 = 100$  ise,  $d_3 = 141.421$  cm bulunur.

Aynı robotun ters kinematik problemini çözmek için öncelikle ileri kinematik denkleminin her iki tarafı birinci eklem için geçerli olan rotasyon matrisinin tersi ile çarpılır.

$$[{}^0T]^{-1}{}^0T = [{}^0T]^{-1}{}^1T {}^2T {}^3T$$

$[{}^0T]^{-1}{}^0T$  denklemini birim matrisi verdiği için;

$$[{}^0T]^{-1}{}^0T = {}^1T {}^2T {}^3T \quad (5.8)$$

denklemini elde edilir.

${}^0T$  dönüşüm matrisinin inversi  $[{}^0T]^{-1} = \begin{bmatrix} {}^0R^T & -{}^0R^T P_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  denklemini ile bulunabilir.

İleri kinematik yöntem sırasında oluşturduğumuz  ${}^0R$  dönme matrisinin transpozesi

$${}^0R^T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } {}^0T \text{ dönüşüm matrisinin konum vektörü sıfır}$$

olduğundan,

$$-{}^0R^T P_1 = - \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Bu durumda,

$$[{}^0T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

olarak elde edilir.

${}^0T$  ileri kinematik matrisi, konum ve yönelim verileri ile bir matris haline getirilirse şu şekilde oluşur;

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

${}^0_3T$  ileri kinematik matrisi, konum ve yönelim verilerini içeren matris elemanları cinsinden denklem (5.10)'deki gibi yazılabilir. Bu matrisin ilk sütunu robot uç elemanının normal vektörünü ( $n=[n_x \ n_y \ n_z]^T$ ), ikinci sütunu kayma vektörünü ( $s = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ ) ve üçüncü sütunu ise yaklaşım vektörünü ( $a = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ ) belirtir.

Geri kinematik denkleminde dönecek olursak,  ${}^0_1T$  dönüşüm matrisinin inversi ile  ${}^0_4T$  matrisinin çarpımı bize (5.11)'deki sonucu verir.

$$\begin{aligned} [{}^0_1T]^{-1} {}^0_3T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11}\cos\theta_1 - \sin\theta_1 r_{21} & r_{12}\cos\theta_1 - \sin\theta_1 r_{22} & r_{13}\cos\theta_1 - r_{23}\sin\theta_1 & p_x\cos\theta_1 - p_y\sin\theta_1 \\ r_{11}\sin\theta_1 + \cos\theta_1 r_{21} & r_{12}\sin\theta_1 + \cos\theta_1 r_{22} & r_{13}\sin\theta_1 + r_{23}\cos\theta_1 & p_x\sin\theta_1 + p_y\cos\theta_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Geri kinematik için oluşturduğumuz (6.8)'deki denklemin sağ tarafını çözecek olursak;

$$\begin{aligned} {}^1_2T {}^2_3T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (d_2 + L) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^1_2T {}^2_3T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 + L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

(5.12) ve (5.11)'deki matrisler birbirine eşitlenirse;

$$p_x\cos\theta_1 - p_y\sin\theta_1 = 0 \quad (5.13)$$

$$p_x \sin \theta_1 + p_y \cos \theta_1 = d_3 \quad (5.14)$$

$$p_z - d_1 = d_2 + L \quad (5.15)$$

denklemleri elde edilir.

Elimizdeki veriler P noktasının koordinatları ve robotun sabit parçalarının yükseklikleri  $d_1$  ve  $L$ 'dir. Geri kinematik ile aranan parametreler ise  $d_2$ ,  $d_3$  ve  $\theta_1$ 'dir.

(5.13)'teki denklemde evrensel değişken değiştirmesi formülü uygulanırsa  $\tan \frac{\theta_1}{2} = t$  olmak üzere  $\sin \theta_1 = \frac{2t}{1+t^2}$  ve  $\cos \theta_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  olarak kabul edilir. Bu durumda;

$$p_x \cos \theta_1 - p_y \sin \theta_1 = 0$$

$$100 \cos \theta_1 - 100 \sin \theta_1 = 0$$

$$100 \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) - 100 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) = 0$$

$$100 \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) = 100 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

$$1 - t^2 = 2t$$

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \quad (5.16)$$

İkinci dereceden tek bilinmeyenli bir  $at^2 + bt + c = 0$  denkleminin çözümü denklem (5.17)'teki gibidir.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.17)$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$t_1 = -1 - \sqrt{2} = -2.4142$  ise  $\tan \frac{\theta_1}{2} = -2.4142$  olur ve buradan,

$\frac{\theta_1}{2} = \arctan(-2.4142)$  ve  $\theta_1 = 135^\circ$  elde edilir.

$t_2 = -1 + \sqrt{2} = 0.4142$  yani  $\tan \frac{\theta_1}{2} = 0.4142$  olur ve buradan,

$\frac{\theta_1}{2} = \arctan 0.4142$  ve  $\theta_1 = 45^\circ$  elde edilir.

Buradan denklem (5.14)'e geçilir ve  $\theta_1 = 45^\circ$  değeri yerine konulursa;

$$p_x \sin \theta_1 + p_y \cos \theta_1 = d_3$$

$$100 \sin 45 + 100 \cos 45 = d_3$$

$$d_3 = 141.421 \text{ cm}$$

Ayrıca  $\theta_1 = 135^\circ$  için;

$$100 \sin 135 + 100 \cos 135 = d_3$$

$d_3 = 0$  olur.

Son olarak denklem (5.15) için ise değerler yerine konulursa,

$$p_z - d_1 = d_2 + L$$

$$150 - 20 = d_2 + 5$$

$d_2 = 125 \text{ cm}$  elde edilir.

Bütün bulunan bu değişken parametre değerleri sonucu bizi P noktasına ulaşmak için robot kollarının alabileceği maksimum değerlere götürür.

Bu çalışma kapsamında P noktasının koordinatlarını minimumda tutmak için (5.6)'daki konum vektöründe X ve Y koordinatlarını 0'a, Z koordinatını ise robotumuzda Z eksen yönünde sabit parametre değerleri olacağından bu değerlerin toplamına eşitlememiz gerekir.

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & d_3 \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & d_3 \cos \theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 + L + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_3 \sin \theta_1 = 0$$

$$d_3 \cos \theta_1 = 0$$

olacağından iki denklemi birbirine oranlarsak,

$\tan\theta_1 = 0$  olur ve buradan  $\theta_1 = 0$  ve  $\theta_1 = 180^\circ$  olarak belirlenir. Eğer ileri kinematik problemimizin çözümünde olduğu gibi  $\theta_1 = 45^\circ$  olarak devam edilseydi;

$$d_3 \sin 45 = 0$$

$d_3 = 0$  değerini alırdı.

Robot için Z koordinatını minimumda tutmak istersek l ve  $h_1$  değerleri sabit olarak kalacağından;

$$d_2 + L + d_1 = L + d_1$$

$$d_2 + 5 + 20 = 5 + 20$$

$$d_2 + 25 = 25$$

$d_2 = 0$  değeri verilir.

Aynı şekilde ters kinematik yöntemden çıkardığımız denklemlere dönersek;

$$p_z - d_1 = d_2 + L$$

$d_2 = 0$  için;

$$p_z = 0 + 5 + 20$$

$p_z = 25$  olur.

Denklem (5.13) için;

$$p_x \cos\theta_1 - p_y \sin\theta_1 = 0$$

$$p_x \cos\theta_1 = p_y \sin\theta_1$$

$\tan\theta_1 = \frac{p_x}{p_y}$  elde edilir ve buradan  $\theta_1 = 0$  ve  $\theta_1 = 180$  için;

$\frac{p_x}{p_y} = 0$  olur ve  $P_x = 0$  olarak belirlenir.

Buradan denklem (5.14)'e geçilirse;

$$p_x \sin\theta_1 + p_y \cos\theta_1 = d_3$$

$\theta_1 = 0$  için;

$$0 \sin 0 + p_y \cos 0 = d_3$$

$p_y = d_3$  olarak elde edilir.

$\theta_1 = 180$  için;  $p_y \cos 180 = d_3$  olur ve  $p_y = -d_3$  olarak belirlenir.

Her iki durumda da  $d_3 = 0$  olduğu takdirde  $p_y = 0$  olur.

Sonuç olarak P noktasının koordinatları minimum olarak  $P(0, 0, L+d_1)$  yani  $P(0, 0, 25)$  olarak belirlenir.



## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada üç boyutlu düzlemde her yöne doğru hareket edebilen üç serbestlik dereceli bir robot tasarlanmıştır.

Robot tasarlanırken matematiksel hesapların kolaylaşması amacıyla robotun üç serbestlik derecesi almasına karar verilmiştir. Dönel eklem sayısı sadece bir tane tutularak bilinmeyen sayısının artması engellenmiştir. Robottaki prizmatik eklem sayısı ise dönel eklem sayısından fazla tutularak ters kinematik problemlerin çözümü basitleştirilmiştir.

Robot eklemlerine koordinat sistemleri atanırken kartezyen koordinat sistemleri kullanılmış ve dönüşüm yöntemi olarak üç boyutlu kartezyen koordinatların dönüşümü kullanılmıştır.

Robotun ileri kinematik problemlerinin çözümünde Denavit – Hertanberg yöntemine başvurulmuştur. Robotun sabit ve değişken parametreleri D-H yöntemine göre belirlenmiştir.

Robotun ters kinematik problemleri analitik çözüm yöntemiyle çözülmüş ve kesin sonuçlar üretilmiştir. Prizmatik eklemlerin birden fazla kullanılması ayrıca fiziksel olarak çözüm sayısını azaltmıştır.

Bu tez çalışmasındaki robotun herhangi bir hareketi sonrası hiçbir soruna maruz kalmayacağı düşünülerek iki ve üç boyutta dönüşümler gerçekleştirilmiştir. Fakat ileriki çalışmalarda dönüşümlerin afin dönüşüm modeli ile yapılabileceği düşünülmektedir. Zamana bağlı olarak robotun bir mafsalının herhangi bir dış etkene maruz kalmasından kaynaklı deformasyona uğradığı düşünülürse veya robot tasarımına bağlı olarak mukavemeti de göz önüne alınırsa; robota eklemlerinde yer alan eksenler arasında ölçek farkı çıkacağından afin dönüşüm modeline başvurmak gerekecektir. Dönüşümden önce olan ölçek farklılığı dönüşümden sonra da korunacak şekilde dönüşüm gerçekleştirilecektir.

Söz konusu tez çalışmasındaki robot tasarımı daha çok endüstriyel robot sınıfına uymaktadır. Çeşitli alanlarda insan gücüne ihtiyaç duyulan belli başlı işleri

yapabileceği düşünölmektedir. Son iki eklem yapısının prizmatik olmasından dolayı robot uç işlevcisine dik olan bir yüzey üzerinde robot ile herhangi bir çalışma yapılabilir. Ayrıca robot eklem ve bağ uzunlukları, birbirleriyle oranları ayarlandığı ve taşıma kapasitesi konusunda gerekli çalışmalar yapıldığı takdirde bir malzeme kaldırıp yerleştirme görevini yerine getirebileceği ön görölmektedir.

Yine aynı robot tasarımı üzerinde ne tür çalışmalar yapılabilceği ve robotun nasıl geliştirilebileceği düşünöldüğünde, inşaat ve haritacılık alanında da kolaylık sağlaması amacıyla robotun herhangi bir mafsalına bir lazer metre vb. eklenerek, robotun belirli noktalar arasında ölçüm yapabilecek veya belirli noktalara işaretleme yapma konusunda yardımcı olabilecek kapasiteye getirilebilir.





## KAYNAKLAR

- Ayyıldız, S.** (2009). *Kendi Robotunu Kendin Yap*, İstanbul: Altaş Yayınları.
- Barutçuoğlu, E.I.** (2001). *Robotların Tarihçesi*. (Lisans Tezi). Boğaziçi Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, İstanbul.
- Bingül, Z. & Küçük, S.** (2005). *Robot Tekniği-I*, İstanbul: Birsen Yayınevi.
- Bronshtein, I.N. & Semendyayev K.A.** (1979). *Handbook of Mathematics*, Berlin: Springer.
- Denavit, J., Hertenberg, R.S.,** (1955). A kinematic notation for Lower-pair mechanisms based on matrices, *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 22, 215-221.
- Fu, K. S. & Gonzalez, R.C. & Lee, C. S. G.,** (1987). *Robotics: Control Sensing Vision and Intelligence*, New York: McGraw-Hill.
- Heiskanen, W.A & Moritz, H.** (1967). *Physical Geodesy*, San Francisco: W.H. Freeman and Company.
- Heiskanen, W.A & Moritz, H.** (1967). *Physical Geodesy*, (O. Gürkan, Çev.) Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- Hotine, M.** (1957). *Mathematical Geodesy*, Washington DC: ESSA Monograph 2
- Kılıçoğlu, A.** (1995). *Jeodezide Dönüşümler*, (Yüksek Lisans Tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İstanbul.
- Krakiwsky, E.J., Thompson D.B.** (1974). Geodetic Position Computations, *ResearchGate*, Retrieved May 01, 2018, from [https://www.researchgate.net/publication/50244958\\_Geodetic\\_Position\\_Computations](https://www.researchgate.net/publication/50244958_Geodetic_Position_Computations)
- Leick, A.** (1990). *GPS Satellite Surveying*, New Jersey: A Wiley Interscience Publication John Wiley & Sons.
- Maxwell, E.A.** (1951). *General homogenous coordinates in space of three dimensions*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Nitschke, H.** (2002). *Zur Bestimmung Geometrischer Parameter von Industrierobotern* (Doctoral dissertation). Technical University of Munich, The Faculty of Civil Engineering and Surveying, Munich.
- Pieper, D.L.** (1968). *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control* (Doctoral dissertation). Stanford University, Computer Science Department, Stanford.
- Raghavan, M. & Roth, B.,** (1990). A General Solution For The Inverse Kinematics of All Series Chains. *Proc. 8<sup>th</sup> CISM-IFTOMM Symposium on Robots and Manipulators ROMANSY-90*, (pp. 21-28). Cracow, Poland.
- Seeber, G.** (1993). *Satellite Geodesy*, Berlin: Walter d Gruyter.

- Soler, T. & Hothem L.D.** (1989). Coordinate Systems Used in Geodesy: Basic Definitions and Concepts, *Journal of Surveying Engineering*, 114, 84-97.
- Tatar, A.B.** (2015). *Dört Ayaklı Bir Robotun Dinamik Analizi ve Kontrolü*, (Yüksek Lisans Tezi). Fırat Üniversitesi, Mekatronik Mühendisliği, Elazığ.
- Url-1** <<https://studylib.net/doc/9031281/chapt3-kinematic>>, erişim tarihi 01.05.2018.
- Url-2** <<https://studylib.net/doc/8513954/document>>, erişim tarihi 01.05.2018
- Üstün, A.** (1996). *Datum Dönüşümleri*, (Yüksek Lisans Tezi). Yıldız Teknik Üniversitesi, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği, İstanbul.
- Vanicek, P. & Krakiwsky, E.J.** (1986). *Geodesy, the concepts*, Amsterdam: Elsevier Science Publishing Company.
- Wolfrum, O.** (1992). Merging Terrestrial and Satellite Networks by A Ten Parameter Transformation Model, *Manuscripta Geodetica*, 17, 210-214.



## **EKLER**

**EK A:** Robot Animasyonu ve RPP Robotu için İleri Kinematik Hesaplayıcı CD'si





## **ÖZGEÇMİŞ**

**Ad-Soyad** : Mustafa Sezer ÖZMEN  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 15.12.1988, İstanbul  
**E-posta** : sezerozmen@gmail.com

### **ÖĞRENİM DURUMU:**

- **Lisans** : 2011, Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi,  
Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği