

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**KATLIDİZEYLERİN ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ
ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL GÖSTERİLİM YOLUYLA AYRIŞTIRIMI:
KAVRAMCIL TABAN VE UYGULAYIŞLAR**

DOKTORA TEZİ

Zeynep GÜNDOĞAR

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

TEMMUZ 2018

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**KATLIDİZEYLERİN ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ
ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL GÖSTERİLİM YOLUYLA AYRIŞTIRIMI:
KAVRAMCIL TABAN VE UYGULAYIŞLAR**

DOKTORA TEZİ

**Zeynep GÜNDOĞAR
(702122003)**

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

TEMMUZ 2018

İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702122003 numaralı Doktora Öğrencisi Zeynep GÜNDOĞAR, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "KATLIDİZEYLERİN ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL GÖSTERİLİM YOLUYLA AYRIŞTIRIMI: KAVRAMCIL TABAN VE UYGULAYIŞLAR" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Metin DEMİRALP**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Metin DEMİRALP**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. F. Aylin SUNGUR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Müjgan TEZ
Marmara Üniversitesi

Doç. Dr. M. Alper TUNGA
Bahçeşehir Üniversitesi

Doç. Dr. B. Uğur TÖREYİN
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **31 Mayıs 2018**
Savunma Tarihi : **31 Temmuz 2018**





Yol Arkadaşlarım,



ÖNSÖZ

Öncelikle doktora eğitimim boyunca bilgi, birikim ve deneyimlerini benimle paylaşan, bilim insanı olma yolunda ilerlerken yol gösterimleri ile her zaman ufuk açan ve desteğini hiç esirgemeyen, değerli danışman hocam Prof. Dr. Metin Demiralp'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora ilerleme sürecinde savım ile ilgili yönlendirmelerini ve desteklerini esirgemeyen doktora sav izleme kurulundaki değerli hocalarım Prof. Dr. Müjgan Tez ve Prof. Dr. F. Aylin Sungur'a, tez çalışmam sırasında yöntemimi farklı bir uygulama alanında uygulamam için yol gösteren, farklı bir bakış açısı ile bilimsel katkı sağlayan Doç. Dr. B. Uğur Töreyn'e, lisans eğitimimin başından bu yana bilim yolunda ilk adımımı atmamı sağlayan ve desteğini esirgemeyen yüksek lisans tez danışmanım Prof. Dr. N.A. Baykara'ya teşekkürlerimi sunarım.

Sav süreci boyunca her gereksinimim olduğunda yanımda olan ve desteklerini benden esirgemeyen, gerek ders alma sürecinde gerekse sav yazma süresi boyunca tüm zorlukların üstesinden birlikte geldiğimiz, çalışmama fikirleri ile değer katan yol arkadaşlarım Ayla Okan ve Derya Bodur'a, deneyimleri ve yönlendirmeleri ile sav çalışmama değer katan, yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Süha Tuna ve Yrd. Doç. Dr. Evrim Korkmaz Özay'a sonsuz teşekkür ederim.

Üyesi olduğum İTÜ Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu'ndaki tüm çalışma arkadaşlarıma, bu güzel araştırma ortamı için teşekkür ederim.

Son olarak maddi ve manevi desteklerini benden esirgemedikleri ve bana bu yolda inandıkları için canım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

2018

Zeynep GÜNDOĞAR
Doktora Öğrencisi



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
2. ÇALIŞMANIN KURAMCIL VE UZBİLİMCİL ALTYAPISI.....	7
2.1 Çokyönlü Diziler	7
2.2 Yüksek Boyutlu Tekil Değer Ayırıştırımı.....	8
2.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG)	9
3. ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL YÖNEY GÖSTERİLİMİ (ÇYÇÜYG)	17
3.1 Kronecker Çarpımı	17
3.2 Dizey Katsızlaştırımı	18
3.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Yöney Gösterilimi	19
3.4 ÇYÇÜYG Uygulamaları	22
4. ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÖBEKÇİL ÜÇKÖŞEGENCİL DİZEY GÖSTERİLİMİ (ÇYÇÖÜDG)	27
4.1 İkideğişkenli Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösteriliminde Destek Dizeyi Kullanımı	27
4.2 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Öbekçil Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÖÜDG)	34
4.3 ÇYÇÖÜDG Uygulamaları	39
5. KATLIDİZEY VE KATLIYÖNEYLER	45
5.1 Katlıdizeler ve Katlıyöneyleler.....	45
5.1.1 Katlıdizeler (Folded matrices).....	45
5.1.2 Katlıyöneyleler (Folded vectors).....	46
5.1.3 Katlıdizelerde ve katlıyöneylelerde devriklik	47
5.1.4 Katlıdizelerin çarpımı	47
5.1.5 Katlıdizelerde iç çarpım, boy ve iz	48
5.1.6 Katlıdizelerde dış çarpım	49
6. ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL KATLIDİZEY GÖSTERİLİMİ (ÇYÇÜKG)	51

6.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegenli Katlıdizey Gösterilimi (ÇYÇÜKG).....	51
6.2 ÇYÇÜKG Uzişi.....	57
7. ÇYÇÜKG UYGULAMALARI	59
7.1 Uygulamalara Giriş	60
7.2 Yapay Veri Üzerinde Değişik Destek Kullanımı İnceleyişleri	61
7.3 Değişik Tür Ayrıştırımlarının İncelenmesi.....	66
7.4 Canlandırım Verilerinde ÇYÇÜKG Uygulamaları	70
7.4.1 Bozboyalı canlandırım verilerinde ÇYÇÜKG	71
7.4.2 Boyalı canlandırım verilerinde ÇYÇÜKG	72
7.5 Aşkınizgecil (Hiperspektral) Verilerde ÇYÇÜKG	76
7.6 4-Boyutlu Verilerde ÇYÇÜKG Uygulamaları	82
7.7 Bilimsel Yazındaki Diğer Yöntemlerle Karşılaştırım.....	84
7.8 ÇYÇÜKG Yönteminin Sıkıştırma Oranı.....	86
7.9 ÇYÇÜKG Yönteminin Bilgisayım Karmaşıklığı	87
8. SONUÇLAR.....	89
KAYNAKLAR.....	93
EKLER	103
EK A.1 Boyalı Canlandırım Verileri	105
ÖZGEÇMİŞ	109

KISALTMALAR

TDA	: Tekil Değer Ayrıştırımı
YBBG	: Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi
ÇYÇG	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi
ÇYÇÜYG	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Yöney Gösterilimi
ÇYÇÜDG	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi
ÇYÇÖÜDG	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Öbekçil Üçköşegencil Dizey Gösterilimi
ÇYÇÜKG	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Katlıdizey Gösterilimi
OEÖD	: Olağanlaştırılmış Eş Ögeli Destek
OYOD	: Olağanlaştırılmış Yönlü Ortalamalı Destek
BDAOEÖD	: Birinci Dereceden Ağırlıklı Olağanlaştırılmış Eş Ögeli Destek
BDAOYOD	: Birinci Dereceden Ağırlıklı Olağanlaştırılmış Yönlü Ortalamalı Destek
ADKB	: Aşamalı Dördül Köşegence Baskınlık
BDKB	: Birikimli Dördül Köşegence Baskınlık
SVD	: Singular Value Decomposition
CANDECOMP	: Canonical Decomposition
PARAFAC	: Parallel Factor Analysis
CP	: CANDECOMP/ PARAFAC
TMEMPR	: Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation
TVEMPR	: Tridiagonal Vector Enhanced Multivariate Products Representation
BTMEMPR	: Block Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation
TFEMPR	: Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariate Products Representation
NEES	: Normalized Equal Element Support
NDAS	: Normalized Directional Averaged Support
SSDD	: Stepwise Square Diagonal Dominancy
CSDD	: Cumulative Square Diagonal Dominancy
MSE	: Mean Squared Error
PSNR	: Peak Signal to Noise Ratio



ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1 : x yöneyinin X_1 katlılaştırımı durumunda değişik destekler için elde edilen α_1 sonuçları	25
Çizelge 3.2 : y yöneyi için değişik destek ve katlılaştırım durumlarında elde edilen α_1 sonuçları	25
Çizelge 4.1 : (4.70) dizeyi için ÇYÇÖÜDG nitelik ölçen sonuçları	43
Çizelge 4.2 : (4.73) dizeyi için ÇYÇÖÜDG nitelik ölçen sonuçları.....	44
Çizelge 4.3 : (4.75) dizeyi için ÇYÇÖÜDG nitelik ölçen sonuçları.....	44
Çizelge 7.1 : OEÖD tabanlı ÇYÇÜKG için α , β , γ , σ , ADKB ve BDKB değerleri	64
Çizelge 7.2 : OYOD tabanlı ÇYÇÜKG için α , β , γ , σ , ADKB ve BDKB değerleri	65
Çizelge 7.3 : BDAOEÖD tabanlı ÇYÇÜKG için α , β , γ , σ , ADKB ve BDKB değerleri	65
Çizelge 7.4 : BDAOYOD tabanlı ÇYÇÜDG için α , β , γ , σ , ADKB ve BDKB değerleri	65
Çizelge 7.5 : Farklı desteklere ilişkin ADKB değerleri	65
Çizelge 7.6 : Farklı desteklere ilişkin BDKB değerleri	66
Çizelge 7.7 : (7.20) için değişik özyineleme adımlarında ÇYÇÜKG nitelik sonuçları	67
Çizelge 7.8 : Tür Ayrıştırımı inceleyişlerindeki canlandırmalara ilişkin PSNR değerleri	70
Çizelge 7.9 : Boz boyalı “xylophone.mp4”, değişik destek katlıyöneylelerinde ÇYÇÜKG nitelik ölçenleri	72
Çizelge 7.10 : Boyalı “xylophone.mp4” verisi, değişik destek katlıyöneylelerinde ÇYÇÜKG nitelik ölçenleri	74
Çizelge 7.11 : Boyalı “flowers.mp4”, değişik destek katlıyöneylelerinde ÇYÇÜKG nitelik ölçenleri	75
Çizelge 7.12 : Bozboyalı canlandırım verileri için elde edilen PSNR sonuçları	75
Çizelge 7.13 : AVIRIS aşkınızgecil verilerinin özellikleri [99]	77
Çizelge 7.14 : ÇYÇÜKG yönteminin ve bilimsel yazındaki çeşitli kayıplı sıkıştırma yöntemlerinin aşkınızgecil veriler üzerindeki başarımları [97, 98, 113].	78
Çizelge 7.15 : Lunar Gölü aşkınızgecil verisi için ÇYÇÜKG sonuçları	80
Çizelge 7.16 : Jasper Akarsuyu aşkınızgecil verisi için ÇYÇÜKG sonuçları.	81
Çizelge 7.17 : Düşük yükselti aşkınızgecil verisi için ÇYÇÜKG sonuçları.....	81
Çizelge 7.18 : 4 yönlü yapay veri için ÇYÇÜKG sonuçları	83
Çizelge 7.19 : Yeniden boyutlandırılmış iklim verisinin ÇYÇÜKG nitelik ölçenleri.....	84

Çizelge 7.20 : Değişik yöntemler için çeşitli veri kümelerinde bağıl yanlış sonuçları.....	85
Çizelge 7.21 : "xylophone.mp4" için değişik özdüzeylerde bağıl yanlış sonuçları	85
Çizelge 7.22 : Değişik yöntemler uygulayışı altında çeşitli veri kümeleri için bilgisayarım süreleri.....	86



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 7.1	: “Beach.mp4”, 18. çerçeve için ÇYÇÜKG sonuçları.....	68
Şekil 7.2	: “ScubaDiving.mp4”, 18. çerçeve için ÇYÇÜKG sonuçları.....	68
Şekil 7.3	: “juggle.mp4”, 18. çerçeve için ÇYÇÜKG sonuçları.....	69
Şekil 7.4	: “MountainBike.mp4”, 18. çerçeve için ÇYÇÜKG sonuçları.....	69
Şekil 7.5	: Bozboyalı “xylophone.mp4”, 5 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	71
Şekil 7.6	: Bozboyalı “xylophone.mp4”, 10 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	71
Şekil 7.7	: Bozboyalı “xylophone.mp4”, 20 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	72
Şekil 7.8	: Bozboyalı “xylophone.mp4”, 30 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	72
Şekil 7.9	: Boyalı “xylophone.mp4”, 5 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	73
Şekil 7.10	: Boyalı “xylophone.mp4”, 10 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	73
Şekil 7.11	: Boyalı “xylophone.mp4”, 20 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	73
Şekil 7.12	: Boyalı “xylophone.mp4”, 30 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	73
Şekil 7.13	: Boyalı “flowers.mp4”, 5 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	74
Şekil 7.14	: Boyalı “flowers.mp4”, 10 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	75
Şekil 7.15	: Boyalı “flowers.mp4”, 20 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	75
Şekil 7.16	: Boyalı “flowers.mp4”, 30 özyineleme adımı, 18. çerçeve.	75
Şekil 7.17	: İzgecil görüntüleme.	76
Şekil 7.18	: Aşkınizgecil veri dikgençokyüzlüsü ve izgecil im.	76
Şekil 7.19	: Lunar Gölü aşkınizgecil verisi, 256x256 pixelindeki izgecil im.	80
Şekil 7.20	: Jasper Akarsuyu aşkınizgecil verisi, 256x256 pixelindeki izgecil im.	81
Şekil 7.21	: Düşük yükselti aşkınizgecil verisi, 256x256 pixelindeki izgecil im.	82
Şekil 7.22	: Farklı tür ayrıştırımlarında Jasper Nehri için PSNR sonuçları.....	82
Şekil 7.23	: İklim verisi, 100 özyineleme adımı, ÇYÇÜKG sonucu.....	84
Şekil 7.24	: Yeniden boyutlandırılmış iklim verisi, 50 özyineleme adımı, ÇYÇÜKG sonucu.	84



KATLIDİZEYLERİN ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL GÖSTERİLİM YOLUYLA AYRIŞTIRIMI: KAVRAMCIL TABAN VE UYGULAYIŞLAR

ÖZET

Bilimsel araştırmalardaki sorunların yapısında bulunan çok değişkenlilik ve çok boyutluluk nedeniyle bilimsel yazında sorunların çoğu uzbilimcil olarak çokyönlü dizi ile gösterilir. Günümüzde veri bilimi çok yaygın olarak çalışılan bir konu olup, özellikle bu alanda çokyönlü dizi ile çok sık karşılaşmaktayız. Verilerin anlamlandırılması, sınıflandırılması ve uzbilimcil olarak modellenmesi vb. sorunlar, dizelerde olduğu gibi çokyönlü dizilerde de ayrıştırım ve çarpanlarına ayırma konularını ilgi odağı haline getirmiştir.

Bilimsel yazında A_{i_1, i_2, \dots, i_m} simgeleyişi ile verilen çokyönlü diziler, öğeleri, birden çok sayıda da olabilen, altsırasayılarla tanımlanan, öğeler topluluğu olarak bilinir. Her bir altsırasayı ayrı bir yön tanımlar ve bu yönlerin birbirine dik doğrularla betimlendiği düşünülür. Bu bağlamda, sıradan doğrucul cebirin yöneyleri (vektörleri) “bir yönlü”, dizeleri (matrisleri) ise “iki yönlü” dizilere karşılık gelir. Dizelerde dönüşüm niteliği de vardır ve yataysıralar dizeyin tanım uzayında bir takım doğrultulara izdüşüm gerçekleştiren öğelerdir. Bunların her birinin tanımladığı izdüşüm bileşeni dizeyin düşey sırasalarının nasıl doğrucul birleştirim oluşturacağını eşsiz biçimde belirler. Bu doğrucul birleştirim ise dönüşüm sonrası, dizeyin değer uzayında, bir doğrultu tanımlar. Bu durumda, dizey öğelerinin birinci altsırasayısı değer uzayındaki doğrultu ile ilintilendirilebilirken, ikinci altsırasayı tanım uzayından dönüşümü sağlayan öğe olarak düşünülebilir.

Bilimsel yazında çok yeni olarak geliştirilen katlıdizy kavramı ise doğrucul cebirin dizy özelliklerinin çokyönlü dizilere aktarılmasını sağlamak ve her yöndeki ayrıştırımın hesaplama maliyetini azaltmak amacıyla geliştirilmiştir. $A_{i_1, i_2, \dots, i_m; j_1, j_2, \dots, j_n}$ olarak tanımlanan bir katlıdizy, sıradan doğrucul cebirdeki dizeyin kavramcıl genişletimi olarak düşünülebilir. Böyle bir dizeyin öğelerindeki altsırasayılardan bir kesimi bir çokyönlü diziler tanım uzayıyla ilintilendirilirken; kalan kesimi çokyönlü diziler değer uzayıyla ilintilendirilir.

Bu savda geliştirilen yöntemin temelinde, dizy ayrıştırım yöntemi olarak Çok-değişkenliliği Yükseltimliş Çarpımlar Üçköşegencil Dizy Gösterilimi (ÇYÇÜDG) bulunmaktadır. Bu yöntem, çekirdeğinde Tekil Değer Ayrıştırımından (TDA) değişik olarak üçköşegencil bir dizy bulunduran, sağ ve sol dizy düşey sırasalarında ise dikgen sağ ve sol destek yöneylerinin bulunduğu TDA benzeri bir yontemdir. Bu yöntem, amaç dizeyine Çokdeğişkenliliği Yükseltimliş Çarpımlar Gösteriliminin (ÇYÇG) özyinelemeli olarak uygulanması sonucu elde edilir. Bu nedenle özyinelemeli bir ayrıştırım yöntemidir. ÇYÇG uygulayışının her adımında üç tane dış çarpım elde edilir. Üçköşegencilik, bu dış çarpımların katkılarını anlatan katsayılardan elde edilir. Temelde bulunan bu yöntemler, istatistiksel kökenli yöntemlerdir.

Bu savda, Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG) temel alınarak, böl-yönet usbilimi ile çalışan, katlıdizey kavramını odağa alan Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Katlıdizey Gösterilimi (ÇYÇÜKG) yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntem çokyönlü diziler için yeni ve özgün bir ayrıştırım yöntemi olup, katlıdizey yapısı nedeniyle ikili ayrıştırımdır (ing: binary decomposition). Özyinelemeli (ing: recursive) bir yöntem olan ÇYÇÜKG, ikili ayrıştırım yapısı sayesinde bilimsel yazındaki çoğu yöntemin evriğine her yöndeki ayrıştırımın zorluğundan kaçınmaktadır. Katlıdizey kullanımı destek yöneyleri kullanımı yerine destek katlıyöney kullanımını gerektirmektedir. Bu nedenle elde edilen ayrıştırım çekirdeğinde katlıyöney dış çarpımlarından gelen katkıyı belirten katsayılar yer almaktadır.

Bilimsel yazındaki çoğu ayrıştırım yöntemi (TDA, Tucker, NTF gibi), yanılıgı enküçükleme usbilimine dayalı çarpan bulan yineleyişli yöntemlerdir. Bu enküçükleme işlemi gerçekleştirilirken Alternating Least Squares (ALS) yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntem yapısında dizey evriği alma işlemi bulundurmaktadır. ÇYÇÜKG bu yöntemlerden değişik olarak istatistiksel tabanlı dizey evriği alma işlemi içermeyen, özyinelemeli bir yöntemdir.

Yöntemin doğası gereği, iki tür esneklik ortaya çıkmaktadır. Birincisi başlangıç destek katlıyöneylerinin seçimi, ikincisi ise ikili ayrıştırım yapısının seçimi ile ilgilidir. ÇYÇÜKG yönteminde başlangıç destek katlıyöneyleri özelsizde asıl veriden ortalama ile üretilmektedir. Bu biçimdeki seçimler yöntemin etkinliğini artırmaktadır. Bu savda bu esneklikler bağlamında uygulamalar gerçekleştirilmiş olup, gözlem sonuçları verilmiştir.

Ayrıca bu savda, destek yöneyleri kullanılarak geliştirilmiş olan ÇYÇÜDG yönteminde dizey destekleri kullanımı gündeme getirilmiş ve elde edilen bu yeni yöntem Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Öbekçil Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÖÜDG) olarak genelleştirilmiştir. Desteklerin dizey olarak ele alınması çekirdek dizeyinde öbekçil üçköşegencil yapıları ortaya çıkarmıştır. Ayrıca destek yöneylerinin birbirine dikliği yerine dizeycil dikgenlik kavramı gündeme getirilmiştir. Elde edilen bu yeni yöntem ile ilgili sınavlar gerçekleştirilmiş ve sonuçlar paylaşılmıştır. Bu yöntemin yanısıra, ÇYÇÜDG yöntemi temel alınarak yöneyler için de yeni bir ayrıştırım geliştirilmiştir. ÇYÇG'nin özyineli olarak yöneye uygulanması ile elde edilen bu yeni ayrıştırım, Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Yöney Gösterilimi (ÇYÇÜYG) olarak adlandırılmıştır. Bu yöney ayrıştırımında ikili Kronecker çarpımlarından yararlanılmış ve bu amaçla, katlılaştırım ve katsızlaştırım eylemlerinden yararlanılmıştır. Geliştirilen bu yeni ayrıştırım için de sayısal sonuçlar verilmiştir.

Bu savda kavramcıl tabanın yanısıra, ÇYÇÜKG yönteminin bir çok farklı alanda işlerliğini göstermek amacı ile uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Özellikle sav bağlamında canlandırım verilerinin işlenmesinde ve yeniden yapılandırımında (ing: video processing), aşkın izgecil verilerin sıkıştırılmasında (ing: hyperspectral data compression) ve uzbilimcil yaklaşıtımda uygulamalar verilmiştir. Veri sıkıştırma sorunları için, yöntemin sıkıştırma oranı belirlenmiş olup genel bir bağıntı elde edilmiştir. Ayrıca yöntemin geçerliliğini göstermek amacı ile, bilimsel yazında yaygın olarak kullanılan Tucker ve CP yöntemleri, ÇYÇÜKG ile karşılaştırılmış olup, bu karşılaştırmalar için, çeşitli gerçek kimya verileri ele alınmıştır.

Bu sav çalışması kapsamında özgün ayrıştırım yöntemleri geliştirilmiş olup, etki ettirilen veriye veya soruna bağlı olarak etkinlikleri olabildiğince arıntılı olarak verilmeye çabalanmıştır. Bu savda geliştirilen yöntemlerin uygulama alanları geniş olup sav sonrasında da farklı alanlarda kullanımı irdelenecektir.





TRIDIAGONAL FOLMAT ENHANCED MULTIVARIANCE PRODUCTS REPRESENTATION: CONCEPTUAL BACKGROUND AND APPLICATIONS

SUMMARY

Multivariate, multidimensionality and multiway concepts have been at the one of attraction foci since many scientific modellings need to deal with these issues. Decomposition and factorization of multiway arrays (tensors) are pretty much concerned by many scientists and engineers nowadays. In many scientific areas such as signal processing, chemometry, neuroscience, data mining, etc., problems are ended up with data and these data generally mathematically defines matrices or multiway/multidimensional arrays (tensors).

General component of a multiway array such as $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ is symbolized as A_{i_1, i_2, \dots, i_n} in the literature. Each subscript of A_{i_1, i_2, \dots, i_n} defines a way (i.e direction) and these ways are mutually orthogonal. Within this framework the ordinary linear algebraic entities, vectors and matrices can be considered one way and two way arrays, respectively. Due to the difficulty of decomposing multiway arrays having more than two ways on each direction separately, adapting the properties of ordinary matrix algebra to the multiway arrays is important. In order to overcome this difficulty Demiralp proposed new algebraic concepts defined as “folded matrix (Folmat)” and “folded vectors (Folvec)”.

Folmat which is a folded form of an ordinary algebraic matrix is shown as $A_{i_1, i_2, \dots, i_m; j_1, j_2, \dots, j_n}$. In ordinary linear algebra a matrix can be given by its general term in the form like $a_{i,j}$ where i and j are “row locator” and “column locator” respectively. Analogously, the m -tuple (i) and the n -tuple (j) can be considered the row and column locators of the folmat. Semicolon separates indices of multiway array into two groups. Left side indices are correlated to somehow row space and the right-side indices are somehow correlated with the column space. Folded vectors (folvecs) are special form of the folmats. If we specifically choose $n = 0$ in the above definitions then we obtain no grid for columns. In other words, the folmat under consideration becomes an entity which has just a single folded column. We call these entities “folvec”s within an analogy to the matrix-vector discrimination in ordinary linear algebra.

The most important property of a folmat is its construction style enabling the analogy between multiway arrays and matrices for the matrix properties in ordinary linear algebra. Within this framework we use folmats and folvecs to get rid of very high computational complexity of each-way-separation-style decomposition of multiway arrays. Semicolon in the folmat notation enables binary decomposition by separating indices into two groups.

In this thesis we formed a new decomposition method for multiway arrays which is called “Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariate Products Representation (TFEMPR)”. TFEMPR method can be considered as higher order analogue of matrix decomposition since it focuses on folmats and folvecs which are in fact high order

(way) arrays counterparts of ordinary linear algebraic matrices and vectors. Unlike the decomposition methods in the literature, TFEMPR is a statistics-rooted method. It has been developed for decomposing multidimensional arrays with the philosophy behind Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR).

TMEMPR method decomposes a matrix having finitely or infinitely many rows and columns to a sum of outer products whose coefficients can be gathered into a core matrix which is tridiagonal. Tridiagonality is provided by applying Enhanced Multivariate Products Representation (EMPR) recursively to a matrix. EMPR works with the philosophy of representing a multiway array in terms of less variate arrays by using support vectors such that EMPR representation of a matrix is given via sum of four terms; constant, univariate terms (terms through column and row) and bivariate term. EMPR produces four additive terms representations for such entities and the additive truncation approximations may not be considered sufficiently efficient numerical agents. This has been urged Demiralp and his group to produce more-than-four-terms representations based on EMPR on multiway arrays. This could have been accomplished by generating a set of left and right support functions (or vectors) and then to build a Singular Value Decomposition (SVD) like formula. The birth of Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR) has been settled on this idea.

Many decomposition schemes standing in the scientific literature, like Tucker, SVD, NMF, are based on the philosophy of expressing a matrix as the product of certain factors or sum of certain products in such a way that the decomposition components reveal many important features of the matrix. To deal with practically meaningful objects in many problems of this category input matrix is composed of nonnegative elements and the basic goal is to get matrix factors of nonnegative elements. Hence this type of decompositions are called “Nonnegative Matrix Factorization”. The matrix factor of the binary product is generally evaluated by minimizing the Frobenius norm of the error matrix. The “Alternating Least Squares Method (ALS) is generally used in this optimisation procedure. A matrix inversion procedure which has an evaluating cost increasing with the growth of the data dimension is needed in these evaluations. These are iterative methods even for the columnwise and rowwise evaluation of left and right factors of the binary product. There is almost no possibility of noniterative recursions. In contrast to these methods, TFEMPR components can be evaluated recursively starting from the lowest multivariate in ascending multivariate direction without any iterations and the truncation approximants can be efficiently used. On the other hand TFEMPR components need not be (in fact can not be due to orthogonality) composed of all nonnegated elements. At least some of which may contain opposite signed elements. This is a flexibility and together with the recursive nature tremendously decreases the computational complexity. The price is paid by a need to take more TFEMPR additive terms to get a prescribed precision in some cases even though many circumstances allow us to use low level truncations. The support components are very good elements to control the truncation qualities.

Structure of TFEMPR method has two flexibilities. One of them is decomposition type. The employment of binary decomposition in other words format brings the question of how to choose left and right grids. This is called as “decomposition type” in this thesis. There are options for type as much as binary combination of directions (ways). So the more direction the more choice you have to examine. Implementations have

been done on this issue. According to the implementations presented here, the results indicate that the nature of problem impresses the choice of type. Digital video is a good instance for this issue due to the choice of i, j, k which decomposes frames and frame locations. The other flexibility is the choice of support folvecs at the beginning step of recursion. We have used four different supports in this thesis, but these are not optimized supports. But we know that kernel matrix factor's diagonal dominance in TFEMPR can be controlled via appropriate definitions of the support entities. The use of the target folmat, its transpose, its multiplicatively symmetrized counterparts as scaling matrix factors facilitates the obtention of higher diagonal dominance as our implementations imply.

In this thesis, also a new Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation (TMEMPR) which uses not Cartesian vectors but matrices as the support entities is designed and named as Block Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation (BTMEMPR). What we obtain after the construction of the representation has been a singular value decomposition like structure where the core matrix becomes a block tridiagonal matrix in contrast to the diagonal and tridiagonal matrix structures of the Singular Value Decomposition (SVD) of matrices and Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation (TMEMPR) respectively. We have used support matrices in the construction and not directly orthogonality of the constructed support matrices but block orthogonality which means the mutual orthonormality of the columns of produced support matrices. Certain confirmative implementations are given for novel method.

A new decomposition method for vectors, whose construction is based on Kronecker product with a relation to the philosophy of TMEMPR has been proposed within the context of this thesis. This method, which is called Tridiagonal Vector Enhanced Multivariance Products Representation (TVEMPR), works with the logic of decomposing the target vector as summation of binary Kronecker products. Due to the method in the background, TVEMPR has a recursive structure and uses the folding and unfolding concepts.

All decomposition methods in this thesis (TVEMPR, BTMEMPR, TFEMPR) are developed inventively. Performance of the methods change depending on the nature of the problem, data type and correlation between the input data. To this end, besides the methodology, applications in different areas are taken into consideration in the thesis.

The proposed method, TFEMPR, has widespread application area, such as signal, image and video processing. It is a natural candidate as a data compression method. TFEMPR is applied on colored and grayscale video data to confirm the efficiency in reconstruction and video processing problems. Video data implementations bring out a new study for further development of TFEMPR. This study has arisen from the very nature of 8-bit quantized video data. Because TFEMPR is not a restricted method on target array, overflow values are observed during the implementations. To tackle with this problem modular arithmetic can be used. By this way overflows can be squeezed into the interval $[0, 255]$.

It is well known that hyperspectral imaging features an important issue in remote sensing and applications. Requirement to collect high volumes of hyperspectral data in remote sensing algorithms poses a compression problem. To this end, many techniques or algorithms have been developed and continues to be improved in scientific literature. In this thesis, also we propose TFEMPR as a lossy compression method by

applying TFEMPR on hyperspectral images. Compression performance of TFEMPR is compared with state-of-the-art methods such as Compressive-Projection Principal Component Analysis (CPPCA), Matching Pursuit (MP) and Block Compressed Sensing (BCS) algorithms etc. via average peak signal-to-noise ratio. Experiments with AVIRIS dataset indicate a superior reconstructed image quality for the proposed technique in comparison to state-of-the-art hyperspectral data compression methods.

In order to verify the feasibility of TFEMPR on more than-three-ways arrays, not only 3-way arrays are taken into consideration but also 4-way arrays are taken. TFEMPR is applied on 4-way real climate data and artificial data.

In addition to these, comparative analysis of TFEMPR and state-of-the-art decomposition methods, Tucker and CP, is given in the thesis. Methods are applied on chemical datasets. The results in terms of relative errors are given and computation times of the each method are analysed.



1. GİRİŞ

Bilimsel araştırmaların birçoğunda, sorunların yapısı gereği, çokdeğişkenlilik ve çokyönlülük kavramları her zaman ilgi odağı olmuştur. Çok öğeli biçim (ing: polyadic form) tanımlaması ile ortaya çıkarılan çokyönlü dizi kavramı, çokyönlü dizi ayrıştırımı ve çarpanlarına ayırış (ing:tensor decomposition and factorization) ilk defa 1927 yılında Hitchcock tarafından ortaya çıkarılmıştır. Hitchcock bir çokyönlü dizinin, özdüzeyi bir olan çokyönlü dizilerin sonlu toplamı olarak yazılabileceğini ileri sürmüştür [1, 2, 28]. 1944 yılında beyinbilimi (ing:neuroscience) ile ilgili sorunlarla ilgilenen Cattell, yaptığı çalışmalarda çokyönlü dizi kavramını kullanmış ve geliştirmiştir [3, 28]. 1966 yılında adını yöntemi ortaya koyan kişiden alan Tucker ayrıştırımı, Tucker [4, 5, 28] tarafından geliştirilmiştir. 1970 yılında çokyönlü dizi ayrıştırımı için bu yaklaşımlar ve yöntemler Carroll ve Chang'ın [6, 7, 28] öngördüğü Yasacıl (ing:canonical) Ayrıştırım (CANDECOMP) ve bağımsız olarak Harshman'ın [8–10, 28] geliştirdiği CANDECOMP yöntemi ile eşdeğer yöntem olan Koşut Çarpan Çözümleyişi (PARAFAC) ile daha çok ilgi çekmeye başlamıştır. Möck, PARAFAC'ı beyin görüntülenişi ile ilgili sorunlarla ilgilenirken, bu yöntemi yeniden ele alıp, gündeme getirmiştir [11, 28]. Bu buluşlar çokyönlü dizi ayrıştırımı yanısıra bu ayrıştırımın tekliği ve bileşen sayısının nasıl seçilmesi gerektiği ile ilgili bazı salıkverimler (tavsiyeler) içermekteydi. Bu çalışmalar Harshman [8, 28], Kruskal [12, 13, 28], Carroll ve Chang'ın [6, 7, 28] öngördüğü çalışmalar çerçevesinde tutarlı kalıyordu.

Bu çalışmaların çoğu önceleri psikometrik çalışmalarda kullanılıyordu. Çokyönlü dizi ayrıştırımı 1981-1998 yılları arasında Appellof, Davidson ve Bro tarafından kemometride de kullanılmaya başlamıştır [14, 15, 28]. Çokyönlü dizi ayrıştırımı yöntemleri çok eskiden öngörölüşlerine karşın, son yıllarda araştırmacıların daha çok ilgi alanına girmeye başlamıştır. Özellikle bu konu üzerinde, Comon [16, 17], Kolda [18–20], Lathauwer [21–27], Cichocki [28] ve daha birçok kişi çalışmaya başlamıştır [29, 30]. Bu konu bilim dünyasında matematikte, sinyal işlemede, veri işlemede,

beyinbilimde, kemometri, psikometri, görüntü analizi ve graf analizi vb gibi birçok alanda kullanılmış ve araştırmalara yol açmıştır.

Bilimsel yazında yaygın olarak kullanılan ayrıştırımlar olan CANDECOMP/PARAFAC (CP yöntemi olarak da bilinir) ve Tucker ayrıştırımı temel bileşen çözümleyişini [32] veya yüksek kereden tekil değer ayrıştırımını [21, 22] ele alan yöntemlerdir. CP ayrıştırımı, bir çokyönlü dizinin özdüzeyi bir olan çokyönlü diziler toplamı türünden yazılmasına dayalı bir yöntem olup [18, 28], $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ 3-yönlü dizisi için ögecil düzeyde (ing: elementwise) aşağıdaki gibi verilir.

$$x_{ijk} \approx \sum_{r=1}^R a_{ir} b_{jr} c_{kr} \quad i = 1 \cdots I, \quad j = 1 \cdots J, \quad k = 1 \cdots K \quad (1.1)$$

Yüksek kereden temel bileşen çözümleyişi olarak bilinen Tucker ayrıştırımı, bir çokyönlü diziyi her yönde dizey çarpanı olan çekirdek çokyönlü dizilere arıştıran bir yöntemdir [18, 28]. Özelsiz yapısı ögecil düzeyde bir $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ 3-yönlü dizisi için aşağıdaki gibi verilir.

$$x_{ijk} \approx \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \sum_{r=1}^R g_{pqr} a_{ip} b_{jq} c_{kr} \quad i = 1 \cdots I, \quad j = 1 \cdots J, \quad k = 1 \cdots K \quad (1.2)$$

Bir diğer yaygın kullanılan yöntem, problemin yapısı gereği girdi verisi çoğunlukla eksi olmayan verilerin ayrıştırımını ele alan NMF (Nonnegative Matrix Decomposition) ve NTF (Nonnegative Tensor Decomposition) yöntemleridir [28]. Bu yöntemlerde amaç, sorunun yapısına bağlı olarak çarpanlara ek özellikler getirilebilen, çarpanların da eksi olmadığı verilerden oluşan ayrıştırım elde etmektir. Bu ayrıştırımların genel yapısı,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{E}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{ADX} + \mathbf{E} \quad (1.3)$$

biçimindedir. Bu tür ayrıştırım yöntemlerinde özelsizde çarpanlar, hata (\mathbf{E}) enküçüklemesi (ing:minimization) yoluyla elde edilmektedir. Bu minimizasyon işleminde ise en küçük kareler yöntemi olan ve yapısında dizey evriği (ing: inverse) işlemi bulunduran Alternating Least squares (ALS) kullanılmaktadır [18, 28].

Son yıllarda çokyönlü dizi ayrıştırımı ile ilgili Demiralp ve topluluğunca da yeni yöntemler geliştirilmektedir. Bu yöntemlerin temelinde Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi (YBBG, ing:High Dimensional Model Representation (HDMR)) olarak bilimsel yazında bilinen bir ayrıştırım kullanılmıştır. YBBG, ilk olarak 1957 yılında

Kolmogorov'un sürekli bir çok değişkenli bir işlevin tek değişkenli işlevlerin toplamı biçiminde yazılabileceği görüşü ile, 1993 yılında Sobol tarafından ortaya çıkarılan istatistik kökenli bir ayrıştırım yöntemidir [33, 34]. Rabitz ve Demiralp tarafından geliştirilen bu yöntem [35–39], önceleri çokdeğişkenli işlevler için kullanılırken, bu yöntemin çokyönlü diziler için de kullanılabileceği ortaya çıkarılmış ve bir çok uygulama alanında yer bulmuştur [40–48].

$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ N -yönlü dizisi için, YBBG ayrıştırımı

$$\mathcal{X}_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \mathcal{X}^{(0)} + \sum_{j_1=1}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}}^{(j_1)} + \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 < j_2}}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}, i_{j_2}}^{(j_1, j_2)} + \dots + \mathcal{X}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(j_1, j_2, \dots, j_N)},$$

$$i_j = 1, 2, \dots, n_j \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

şeklinindedir. YBBG yönteminin etkinliğini güçlendirmek amacıyla Demiralp ve topluluğunca YBBG açılımında destek kullanımı gündeme getirilerek, Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG, ing: Enhanced Multivariate Products Representation (EMPR)) [49–59] yöntemi geliştirilmiştir. ÇYÇG, YBBG uygulanacak işlev yapısının, yöntemin işlerliğine olumsuz etkilerini ortadan kaldırmak ve daha az terimle etkin bir biçimde çalışabilmek amacıyla ortaya konulmuştur.

Çokyönlü bir dizi için ÇYÇG açılımı aşağıdaki gibi verilir [50, 57].

$$\mathcal{X}_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \mathcal{X}^{(0)} \prod_{j=1}^N s_{i_j}^{(j)} + \sum_{j_1=1}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}}^{(j_1)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1}}^N s_{i_j}^{(j)} + \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 < j_2}}^N \mathcal{X}_{i_{j_1}, i_{j_2}}^{(j_1, j_2)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1, j_2}}^N s_{i_j}^{(j)}$$

$$+ \dots + \mathcal{X}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(j_1, j_2, \dots, j_N)}, \quad i_j = 1, 2, \dots, n_j \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.5)$$

Daha sonraları çokyönlü diziler ile ilgili indirgeyicil çalışmalar gerçekleştirilmiş ve canlandırmalar üzerinde uygulamalar yapılmıştır [58–60]. Ayrıca Demiralp ve topluluğunca çok yakın zamanda yeni bir yöntem olan Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG, ing: Tridiagonal Matrix EMPR) geliştirilmiştir [61–70]. Bu yöntem, dizeyin ÇYÇG açılımındaki ikili terimine ardışık olarak ÇYÇG uygulanması ile elde edilen, 3 çarpanlı TDA benzeri bir ayrıştırımdır. ÇYÇÜDG ayrıştırımı,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{\ell-1} \beta_i \mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_{i+1}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad \ell < m \quad (1.6)$$

olarak verilir. Bu çarpanlarına ayrış yöntemi, çekirdeğinde TDA yönteminden değişik olarak üçköşegencil bir dizey bulundurur ve TDA yöntemindeki yineleyişli yapıdan değişik olarak da özyinelemeli bir yöntemdir.

Bu savda amaç, katlıdizeler kullanarak Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilim (ÇYÇG) yöntemini çokyönlü diziler için yalnızca dizey cebri üzerinden gerçekleştirip, özelsiz bir kuram oluşturmaktır. Bir başka deyişle, ÇYÇÜDG'yi çokyönlü diziler için elde etmektir. Ayrıştırım yapıldığı zaman katlıdizeyi, 2 çarpanlı (ing: binary product) yapıların toplamı olarak yazmak amaçlanmıştır. Bu konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalar (CP, TDA vb.) her bir yönü bir çarpan olarak düşünüp her yönde ayrıştırımı dile getirmişlerdir. Bu savda ayrıştırılan çarpanların da çokyönlü diziler olduğu, ikili ayrıştırım yapısı gündeme getirilmiştir. Bu biçimdeki yaklaşımın nedeni ise cebirde kullanılan örgü kavramını daha kolay irdelenebilen yapılar durumuna dönüştüreceğini düşünmemiz yani dizey cebri özelliklerinin çokyönlü dizilere aktarılmasıdır.

Bu bağlamda savın 2. bölümünde geliştirilen yönteme taban olan kavramlar ve yöntemlere yer verilmiştir. Öncelikle geliştirilen yöntem çokyönlü dizilerin ayrıştırımı için öne sürüldüğünden, öncelikle çokyönlü dizi kavramı tanıtılmış ve özelliklerine yer verilmiştir. Yöntem olarak çalışmanın alt yapısında yer alan ÇYÇG tabanlı ÇYÇÜDG'nin ortaya çıkarılışı burada ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Dizeler için geliştirilen ÇYÇÜDG yöntemi temel alınarak, yöneyler için ikili Kronecker çarpımların toplamı olarak yazılabilen yeni bir ayrıştırım yöntemi geliştirilmiştir. Bu ayrıştırım, Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Yöney Gösterilimi olarak adlandırılmıştır. Savın 3. bölümünde bu yöney ayrıştırım yöntemine ilişkin taban ve uygulamalara yer verilmiştir. Savın 4. bölümünde, destek yöneyleri kullanılarak geliştirilmiş olan ÇYÇÜDG yönteminde dizey destekleri kullanımı gündeme getirilmiş ve bu yeni yöntem Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Öbekçil Üçköşegencil Dizey Gösterilimi olarak özelsizleştirilmiştir. Desteklerin dizey olarak ele alınması çekirdek dizeyinde öbekçil üçköşegencil yapıları ortaya çıkarmıştır. Ayrıca destek yöneylerinin birbirine dikliği yerine dizeycil dikgenlik kavramı gündeme getirilmiştir. Elde edilen bu yeni yöntem ile ilgili sınavlar gerçekleştirilmiş ve sonuçlar ilgili bölümde altbölüm olarak paylaşılmıştır. 5. Bölümde ise çokyönlü dizilere yeni bir bakış açısı getiren, doğrucul cebirin dizey özelliklerinin çokyönlü dizilere aktarılmasını sağlamak ve her yöndeki ayrıştırımın hesaplama ederini azaltmak amacıyla çok yeni olarak geliştirilen katlıdizey (ing: folded matrix) ve katlıyöney (ing: folded vectors) kavramları ayrıntılı bir biçimde

gündeme getirilmiştir. 6. Bölümde ise katlıdizey kullanımı ile çokyönlü dizi ayrıştırımına değişik bir bakış açısı getiren yöntemimiz Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegenil Katlıdizey Gösterilimi (ÇYÇÜKG) ele alınmıştır. Kavramcıl kuram ve uziş (ing:algorithm) ayrıntılı bir biçimde bu bölümde verilmiştir.

ÇYÇÜKG yöntemine ilişkin uygulamalar 7. bölümde incelenmiş olup, bir çok alanda uygulanabilirliği gösterilmiştir. Yöntem gerçek canlandırım (video) verileri, aşkınızgecil (hiperspektral) veriler ve iklim verileri üzerinde sınanmıştır. Ayrıca yöntemin yitimli bir sıkıştırma yöntemi olarak ele alınabileceği gösterilmiştir. Tüm bunların yanısıra bilimsel yazında yer alan Tucker ve CP ayrıştırımları ile karşılaştırmalı inceleyişleri gerçekleştirilmiştir. Ayrıca yönteme ilişkin esnekliklerin uygulamacı inceleyişlerine de yer verilmiştir. Savda üretilen tüm yöntemlere ve uygulamalara ilişkin değerlendirmeler ve geliştirilen yöntemin uygulama alanları 8. bölüm olan sonuç kesiminde özetlenmiştir.



2. ÇALIŞMANIN KURAMCIL VE UZBİLİMCİL ALTYAPISI

2.1 Çokyönlü Diziler

Bilimsel yazında gerey/tansör (ing:tensor, aslında, sürekli ortam işley bilim (ing:Continuum Mechanics) inceleyişde kullanılan ve doğabilirimcil gösterilim nitelikleri olan uzbilimcil büyüklüktür. Yazar ve danışmanı bu kavramın çok özelsiz çoklu dizi simgeleyişinde kullanımını doğru bulmamaktadır. Nedeni de gereylerin sürekli ortam mekaniğine özgü bir kesim kısıtlayıcı dönüşüm özellikleri taşıyışıdır.) olarak da bilinen çokyönlü diziler, öğeleri birden çok sayıda da olabilen altsırasayılarla tanımlanan, öğeler topluluğu olarak bilinir [18, 28, 78, 79]. Her bir altsırasayı ayrı bir yön tanımlar ve bu yönlerin birbirine dik doğrularla betimlendiği düşünülür. Bu bağlamda, sıradan cebirin yöneyleri (ing: vector) “bir yönlü”, dizeyleri (ing: matrix) ise “iki yönlü” dizilere karşılık gelir.

Bir N-yönlü dizinin genel terimi, $I_1, I_2, \dots, I_N \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ ile ve bu dizinin öğeleri ise $i_n \in 1, 2, \dots, I_N$ ve $1 \leq n \leq N$ olmak üzere $x_{i_1 i_2 \dots i_N}$ ile gösterilir [18, 28].

Cokyönlü diziler için **boy (ing: norm)** tanımı tüm öğelerinin dördülleri toplamının dördülkökü olarak verilir [18, 28]. $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ olmak üzere, boy

$$\|\mathcal{X}\| = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1 i_2 \dots i_N}^2} \quad (2.1)$$

olarak, $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ aynı boyutlu iki çokyönlü dizi olmak üzere, iç çarpım tüm yönler üzerinde toplam olarak, aşağıdaki gibi tanımlanır [18, 28].

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1 i_2 \dots i_N} y_{i_1 i_2 \dots i_N} \quad (2.2)$$

Bu iç çarpım tanımı

$$(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \|\mathcal{X}\|^2 \quad (2.3)$$

yazmamıza olanak verir.

Eğer bir çokyönlü dizinin her yöndeki altsırasayısı eş ise bu çokyönlü diziyeye **aşknkü-bik (ing: hypercubic) çokyönlü dizi** denir [18]. Kübik bir çok yönlü dizinin öğeleri

altsıra sayılarının yerdeğiştirimleri altında eş kalıyorsa bu diziye **yetkin bakışık (ing: supersymmetric)** okyönlü dizidenir [18]. Örneğin,

$$x_{ijk} = x_{ikj} = x_{jik} = x_{jki} = x_{kij} = x_{kji} \quad \forall i, j, k = 1, \dots, I \quad (2.4)$$

$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I \times I \times I}$ üç yönlü dizisi bu türden bir yapı gösterir

N-yönlü bir çokyönlü dizi $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ olsun. Eğer \mathcal{X} okyönlü dizisi, "o" dışçarpım simgesi olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \mathbf{a}^{(1)} \circ \mathbf{a}^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathcal{X}_{i_1 i_2 \dots i_N} &= \mathbf{a}_{i_1}^{(1)} \mathbf{a}_{i_2}^{(2)} \dots \mathbf{a}_{i_N}^{(N)} \quad 1 < i_n < I_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

yapısında N sayıda yöneyin dış çarpımı olarak yazılabiliyorsa \mathcal{X} okyönlü dizisine **özdüzeyi 1 olan çokyönlü dizi** denir [18].

2.2 Yüksek Boyutlu Tekil Değer Ayrıştırımı

okyönlü dizilerin bilimsel yazında bir çok uygulamada kullanılmakta oluşuna karşın doğrucul cebirin tüm özellikleri yeterli ve uygun bir biçimde çokyönlü dizilerde kullanılamaz. Bu nedenle çokyönlü diziler ile ilgili araştırmalar bilimsel yazında çok geniş yer bulmuştur. Tekil Değer Ayrıştırımı (TDA) da bu araştırım konularından biri olup çokyönlü diziler için bilimsel yazında Lathauwer [21–23] tarafından ele alınmıştır. Lathauwer tarafından çokyönlü diziler için TDA özelsizleştirilmiş olup TDA ile ilgili kanıtsavlar aşağıdaki gibi verilmiştir:

Kanıtsav 1: (Dizeylerde TDA) $I_1 \times I_2$ türünden \mathbf{F} dizeyi,

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}^{(1)} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^{(2)H} = \mathbf{S} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{V}^{(2)*} = \mathbf{S} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \quad (2.6)$$

yapısında ayrıştırılabilir [21]. Burada,

1. $\mathbf{U}^{(1)} = \left(\mathbf{U}_1^{(1)} \mathbf{U}_2^{(1)} \dots \mathbf{U}_{I_1}^{(1)} \right)$ dizeyi $I_1 \times I_1$ türünde birimcil (ing: unitary) dizey
2. $\mathbf{U}^{(2)} = \left(\mathbf{U}_1^{(2)} \mathbf{U}_2^{(2)} \dots \mathbf{U}_{I_2}^{(2)} \right) (= \mathbf{V}^{(2)*})$ dizeyi $I_2 \times I_2$ boyutlu birimcil dizey
3. \mathbf{S} dizeyi ise $I_1 \times I_2$ türünde dizey olmak üzere

i) \mathbf{S} dizeyi $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min(I_1, I_2)})$ yapısında sözdeköşegencil bir dizeydir.

ii) $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_{\min(I_1, I_2)} \leq 0$ biçiminde sıralıdır.

σ_i 'ler \mathbf{F} dizeyinin tekil değerleri ve $\mathbf{U}_i^{(1)}$ ve $\mathbf{U}_i^{(2)}$ yöneyleri de bu tekil değerlere karşılık gelen sırasıyla sol ve sağ tekil yöneyleridir.

Kanıtısav 2: (Çokboyutlu TDA) $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$ çokyönlü \mathbf{A} dizisi aşağıdaki gibi ayrıştırılır [21]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)} \quad (2.7)$$

Burada,

1. $\mathbf{U}^{(n)} = \left(\mathbf{U}_1^{(n)} \mathbf{U}_2^{(n)} \dots \mathbf{U}_{I_n}^{(n)} \right)$ dizeyi $I_n \times I_n$ türünde birimcil dizey
2. \mathcal{S} , $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$ çokyönlü dizisinin $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$ ile simgelenen altçokyönlü dizileri n . sırasayı α ile değişmezlenerek elde edilir ve aşağıdaki özellikleri vardır:
 - i) Diklik: \mathcal{S} çokyönlü dizisinin $\mathcal{S}_{i_n=\alpha}$, $\mathcal{S}_{i_n=\beta}$ altçokyönlü dizileri $\alpha \neq \beta$ olmak üzere her n , α ve β için birbirine diktir

$$\langle \mathcal{S}_{i_n=\alpha}, \mathcal{S}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad (2.8)$$

ii) Altçokyönlü dizilerin boyları sıralıdır.

$$\|\mathcal{S}_{i_n=1}\| \leq \|\mathcal{S}_{i_n=2}\| \leq \dots \leq \|\mathcal{S}_{i_n=I_n}\| \leq 0 \quad (2.9)$$

Burada σ_i^n 'ler $\|\mathcal{S}_{i_n=i}\|$ Frobenius boyunu göstermek üzere n . yöndeki \mathbf{A} çokyönlü dizisinin tekil değeri ve $\mathbf{U}_i^{(n)}$ de n yönündeki i . tekil yöneydir.

2.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG)

Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG), Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilimi (YBBG) yönteminin ayrık veriler üzerindeki etkisini görmek amacıyla görüntü çözümleyiş alanında yapılan uygulamalar sonucu ortaya çıkmış bir yöntemdir. Bu çalışmalarda bir görüntü iki sırasayılı dizi olarak ele alınıp, bu diziler üzerine YBBG uygulanmıştır. Ancak uygulamalar YBBG yönteminin bir görüntü çözümleyiş üzerinde olumlu sonuç vermediğini ortaya çıkarmıştır. Bunun nedeni, dört bileşen içeren bir görüntünün YBBG açılımında; değişmez ile bir değişkenli

işlev bileşenlerinin yeterince önemli bilgiler içermeyişi olarak belirtilmiştir. Diğer bir deyişle, asıl bilginin son terimde kalışı nedeniyle sıfırcı ve birinci kereden yaklaşımlar sonucunda görüntü elde edilememiştir. Çözüm olarak, Demiralp ve topluluğu, bilgiyi ilk bileşenlere olabildiğince kaydırmak amacı ile, destek yöneyleri kullanarak terimlerin birbirlerine göre baskınlıklarını yeniden düzenlenmiştir [49–59]. Bu kesimde savın uzbilimcil altyapısını oluşturan yöntem olan Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegenlik Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG, ing: Tridiagonal Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR)) ayrıntılı bir biçimde, çıkış noktası olan ÇYÇG yönteminden başlanarak ele alınmıştır [61–67].

Bu bağlamda bir çok değişkenli $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevi için ÇYÇG açılımı:

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_N) &= f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) \\
&+ \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) + \dots \\
&+ f_{1 \dots N}(x_1, \dots, x_N)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

yapısındadır. Burada destek işlevlerini kullanarak çokdeğişkenliliği sıfır olan değişmez terimin çokdeğişkenliliğini N 'ye , çokdeğişkenliliği bir olan birli terimleri benzer usbilimle birli terimdeki işlevin bağımsız değişkenine ait destek işlevi dışında diğer tüm bağımsız değişkenlere ait destek işlevleri ile çarparak çok değişkenliliğini N 'ye yükseltmektedir. Benzer usbilim tüm terimler için kullanılarak tüm terimlerde N . düzeyde çokdeğişkenlilik elde edilmiştir. Bu yapıdan dolayı Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar kavramı kullanılmıştır. Burada ÇYÇG yönteminin ayrık veriler üzerindeki gösterilimi üzerinde durulacaktır [50, 57].

İki sırasayılı bir dizinin, diğer bir deyişle $m \times n$ türünde sıradan bir \mathbf{A} dizeyinin YBBG açılımı aşağıdaki gibi verilir.

$$\mathbf{A} = a_0 \mathbf{I} + \mathbf{a}_1 \mathbf{1}_n^T + \mathbf{1}_m \mathbf{a}_2^T + \mathbf{A}_{1,2} \tag{2.11}$$

Burada a_0 değişmez bileşen olup sayıdır; bir dizeyin genel terimi $a_{i,j}$ olarak ele alındığında \mathbf{a}_1 i . yöndeki bileşen olup $m \times 1$ ögeli yöney, \mathbf{a}_2 j . yöndeki bileşen olup $n \times 1$ ögeli yöney ve $\mathbf{A}_{1,2}$ ise her iki yöndeki katkıdan gelen bileşen olup $m \times n$ türünde bir dizeydir. Ayrıca $\mathbf{1}_n$ ve $\mathbf{1}_m$ sırasıyla ögerleri birlerden oluşan $n \times 1$ ögeli ve $m \times 1$ ögeli yöneylerdir. Burada beklenti, bir görüntü dizeyinin birinci kereden YBBG

yaklaştırımı sonucunda görüntünün elde edilmesidir. Ancak görüntünün asıl bilgisinin ikili terimlerde kalması nedeniyle görüntü elde edilememesi sonucu destek yöneyi kullanımı gündeme getirilmiştir. Bu nedenden dolayı işlevler üzerinde çalışırken kullanılan destek işlevleri, ayrıık yapılarda destek yöneyi olarak ele alınıp ÇYÇG ayrıştırımı uygulanmaktadır. ÇYÇG yöntemi iki sırasayılı bir dizi için

$$\mathbf{A} = a_0 \mathbf{u} \mathbf{v}^T + \mathbf{a}_1 \mathbf{v}^T + \mathbf{u} \mathbf{a}_2^T + \mathbf{A}_{1,2}$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^\ell, \quad \mathbf{v}, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^m, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{A}, \mathbf{A}_{1,2} \in \mathbb{R}^{\ell \times m} \quad (2.12)$$

olarak verilir. Bu yapı üç dış çarpım ve bir artık dizeyin toplamından oluşan bir ayrıştırım olup \mathbf{u} ve \mathbf{v} destek yöneyleridir. Bu açılımda \mathbf{A} dizeyinin, \mathbf{u} ve \mathbf{v} yöneylerinin verildiği düşünülerek $a_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve $\mathbf{A}_{1,2}$ bileşenleri bulunmaktadır. Bileşenlerin belirlenimi için bazı koşulları verilmiştir. Sobol'un çalışmalarında kullandığı gibi, ağırlık değişmez olarak öngörölmüştür [34]. Destek yöneylerinin boyunun 1 olma koşulu yöneylerin bulunduğu kartezyen uzay göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1 \quad \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1 \quad (2.13)$$

Burada \mathbf{u} birinci ℓ boyutlu Kartezyen uzayda ve \mathbf{v} m boyutlu kartezyen uzayda tanımlı yöneylerdir. Bileşenlerin eşsiz biçimde belirlenebilmesi için verilen sıfırlanım koşulları şu biçimdedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 &= 0 \\ \mathbf{v}^T \mathbf{a}_2 &= 0 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{A}_{1,2} &= \mathbf{0}_m^T \\ \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{v} &= \mathbf{0}_\ell \end{aligned} \quad (2.14)$$

(2.12) denklemini sol yandan \mathbf{u}^T ve sağ yandan \mathbf{v} ile çarpılarak,

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = a_0 + \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2^T \mathbf{v} + \mathbf{u}^T \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{v} \quad (2.15)$$

elde edilir. Burada sıfırlanım koşulları nedeniyle eşitliğin sağ yanındaki a_0 dışındaki tüm terimler sıfırlanmakta ve a_0 terimi aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$a_0 = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (2.16)$$

Burada değişmez terim a_0 dördöl bir işlev yapısındadır.

\mathbf{a}_1 terimini elde etmek amacıyla (2.12) denklemini sağdan \mathbf{v} ile çarpılır.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = a_0\mathbf{u} + \mathbf{a}_1 \quad (2.17)$$

\mathbf{a}_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v} - a_0\mathbf{u} \quad (2.18)$$

\mathbf{a}_2 'yi elde etmek için (2.12), soldan \mathbf{u}^T ile çarpılır.

$$\mathbf{u}^T\mathbf{A} = a_0\mathbf{v}^T + \mathbf{a}_2^T \quad (2.19)$$

Buradan \mathbf{a}_2

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{A}^T\mathbf{u} - a_0\mathbf{v} \quad (2.20)$$

olarak belirlenir. (2.12) açılımında belirlenen tüm terimler asıl dizeyden çıkarılırsa,

$$\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A} - a_0\mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{a}_1\mathbf{v}^T - \mathbf{u}\mathbf{a}_2^T \quad (2.21)$$

$\mathbf{A}_{1,2}$ için yukarıdaki eşitlik elde edilir. (2.12) eşitliğinde daha tıkHz bir yapı için a_0 yerine (2.16)'daki eşiti yazılırsa, \mathbf{a}_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{A}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.22)$$

\mathbf{a}_1 'in yapısı incelendiğinde $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ biçiminde boyu bir olan bir dış çarpım gözlemlenir. Bu dış çarpım bir izdüşüm dizeyidir. Bu izdüşüm dizeyi \mathbf{u} 'nin örttüğü eksene izdüşürür. $(\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)$ ise \mathbf{u} 'nun tümleyeni olan dikgen bölgeye yani \mathbf{u} yöneyine dik olan yöneylerin oluşturduğu uzaya izdüşürür. Bu inceleyişler altında \mathbf{a}_1 terimi \mathbf{u} destek yöneyini, \mathbf{A} dizeyinin \mathbf{v} yöneyi üzerindeki etkisinden çıkarılarak elde edildiği söylenebilir. Bu işlemler ℓ boyutlu Kartezyen uzay üzerinde gerçekleşir.

Andıran işlemler \mathbf{a}_2 için de yapılacak olursa sonuç,

$$\mathbf{a}_2 = (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{A}^T\mathbf{u} \quad (2.23)$$

olarak elde edilir. \mathbf{a}_1 terimindeki andıran usbilim burada da söz konusudur. \mathbf{a}_2 terimi de \mathbf{v} destek yöneyinin \mathbf{A}^T dizeyinin \mathbf{u} yöneyi üzerindeki etkisinden çıkarılarak elde edilir. İkili terim $\mathbf{A}_{1,2}$ ise aşağıdaki gibi belirlenmektedir.

$$\mathbf{A}_{1,2} = (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{A}(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \quad (2.24)$$

Bu yapı, \mathbf{v} yöneyinin $\mathbf{A}_{1,2}$ 'nin sağ sıfır uzayında olduğunu, \mathbf{u} yöneyinin ise sol sıfır uzayında olduğunu göstermektedir. Bunun doğruluğu $\mathbf{A}_{1,2}$ dizeyi ile \mathbf{v} yöneyi çarpıldığında, \mathbf{u} yöneyi de $\mathbf{A}_{1,2}$ 'nin devriği ile çarpıldığında görülür. Bu ise, destek yöneylerinin \mathbf{A} 'dan üretilen $\mathbf{A}_{1,2}$ 'nin sıfır uzayına yeni üyeler olarak girdiğini göstermektedir. Bu durum $\mathbf{A}_{1,2}$ 'nin artık \mathbf{u} ve \mathbf{v} yöneyinin bulunmadığı uzaylar arasında dönüşüm yaptığı sonucunu ortaya çıkarır ki bu da özdüzeyin bir düştüğünü göstermektedir. Özdüzey düştüğü için ÇYÇG ayrıştırımındaki terim sayısı da düşmektedir. ÇYÇG'deki bu yeni yöntem, Tekil Değer Ayrıştırımındaki gibi yalnızca asal köşegen üzerinde ayrıştırım yerine bir dizey için üçköşegencil ayrıştırım yapmaktadır.

Özyineli yapının elde edilebilmesi için yeni destek işlevleri tanımlama durumu sözkonusudur. Burada \mathbf{u} ve \mathbf{v} destek yöneylerini, \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_1 ve \mathbf{a}_2 'yi ürettikleri için üreteç olarak düşünülebilir. Yeni destek yöneylerini tanımlamak amacı ile \mathbf{a}_1 ve \mathbf{a}_2 'nin boyları ele alınmaktadır.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}_1\| &\equiv (\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1)^{1/2} = (\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}\mathbf{u}^T) \mathbf{A} \mathbf{v})^{1/2} \\ \|\mathbf{a}_2\| &\equiv (\mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2)^{1/2} = (\mathbf{u}^T \mathbf{A} (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \mathbf{A}^T \mathbf{u})^{1/2}\end{aligned}\tag{2.25}$$

Bu boy tanımları ile yeni destek işlevleri baştaki destek yöneylerine dik olarak seçilmekte ve

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{v}_2 &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{a}_2\|} \mathbf{a}_2\end{aligned}\tag{2.26}$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımlamalarla ÇYÇG ayrıştırımı

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \beta_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1^T + \gamma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2^T + \mathbf{A}_{1,2}\tag{2.27}$$

olarak verilmektedir. Bu ayrıştırım birim boylu yöneyler üzerinde oluşturulan dışçarpımların doğrusal birleşimi ve bir dizeyin toplamı olarak karşımıza çıkmaktadır.

Burada \mathbf{u}_1 ve \mathbf{u}_2 yöneyleri ve \mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 yöneyleri aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_2 \equiv \frac{(\mathbf{I}_l - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T) \mathbf{A} \mathbf{v}_1}{[\mathbf{v}_1^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_l - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T) \mathbf{A} \mathbf{v}_1]^{1/2}}\tag{2.28}$$

$$\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 \equiv \frac{(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \mathbf{A}^T \mathbf{u}_1}{[\mathbf{u}_1^T \mathbf{A} (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \mathbf{A}^T \mathbf{u}_1]^{1/2}}\tag{2.29}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)}$ ve $\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A}^{(1)}$, (2.12) denkleminde yazılırsa,

$$\mathbf{A}^{(0)} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \beta_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1^T + \gamma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2^T + \mathbf{A}^{(1)} \quad (2.30)$$

elde edilmektedir. ÇYÇG ayrıştırımı $\mathbf{A}^{(1)}$ düzeyine yeniden uygulandığında aşağıdaki yapı karşımıza çıkmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T) \mathbf{A} (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \\ \mathbf{A}^{(1)} &= \alpha_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \beta_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_2^T + \gamma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3^T + \mathbf{A}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Burada katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \alpha_2 &\equiv \mathbf{u}_2^T \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{v}_2 \\ \beta_2 &\equiv \|(\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T) \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{v}_2\| \\ \gamma_2 &\equiv \|(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \mathbf{A}^{(1)T} \mathbf{u}_2\| \end{aligned} \quad (2.32)$$

Bir önceki denklemin terimlerinden üretilen destek yöneyleri ise benzer düşünceyle aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 &\equiv \frac{1}{\beta_2} (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T) \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 &\equiv \frac{1}{\gamma_2} (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \mathbf{A}^{(1)T} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{A}^{(2)} &= (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T) \mathbf{A}^{(1)} (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \\ &= (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T - \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T) \mathbf{A} (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Bu özyineleyiş j . adım için yazılıp, özyineli yapı elde edilmektedir.

$$\mathbf{A}^{(j)} = \alpha_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{v}_{j+1}^T + \beta_{j+1} \mathbf{u}_{j+2} \mathbf{v}_{j+1}^T + \gamma_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{v}_{j+2}^T + \mathbf{A}^{(j+1)} \quad (2.34)$$

Denklemden katsayılar, destek yöneyleri ve artık terim sırasıyla,

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1} &\equiv \mathbf{u}_{j+1}^T \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{v}_{j+1} \\ \beta_{j+1} &\equiv \|(\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{u}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{v}_{j+1}\| \\ \gamma_{j+1} &\equiv \|(\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_{j+1} \mathbf{v}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)T} \mathbf{u}_{j+1}\| \\ \mathbf{u}_{j+2} &\equiv \frac{1}{\beta_{j+1}} (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{u}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{v}_{j+1} \\ \mathbf{v}_{j+2} &\equiv \frac{1}{\gamma_{j+1}} (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_{j+1} \mathbf{v}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)T} \mathbf{u}_{j+1} \\ \mathbf{A}^{(j+1)} &= (\mathbf{I}_\ell - \mathbf{u}_{j+1} \mathbf{u}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)} (\mathbf{I}_m - \mathbf{v}_{j+1} \mathbf{v}_{j+1}^T) \\ &= (\mathbf{I}_\ell - \sum_{k=1}^{j+1} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) \mathbf{A} (\mathbf{I}_m - \sum_{k=1}^{j+1} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \end{aligned} \quad (2.35)$$

şeklindedir. Yukarıda denklem ifadelerinde de yer alan aşağıdaki özdeşlikler birim dizeyin izdüşüm dizelerine ayrıştırımını simgelemektedir.

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I}_\ell - \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right) &= \mathbf{0}_{\ell \times \ell} \\ \left(\mathbf{I}_m - \sum_{k=1}^m \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \right) &= \mathbf{0}_{m \times m} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Bu yöntemdeki amaç, özyineleyiş ile her adımda önceki destek yöneylerine dik destek yöneyleri bumak ve her adımda artık terim olan $\mathbf{A}_{1,2}$ dizeyinin özdüzeyini bir düşürmeye çalışarak, $\mathbf{A}_{1,2}$ terimini sıfırlamaktır. Belli bir özyineleyiş aşamasında bu sıfırlanış gerçekleşmektedir ve özyineleme adımları sonlanmaktadır. Bu biçimde en son özyineli yapıda salt dışçarpımlardan oluşan bir yapı elde edilmektedir. Bu özyineli ayrıştırım sonucunda TDA'daki yazıma benzer tıkız bir yapı ortaya çıkmaktadır. Bu yapı,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{\ell-1} \beta_i \mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_{i+1}^T \\ &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad \ell < m \end{aligned} \quad (2.37)$$

biçimindedir. Burada \mathbf{U} dizeyi düşey sıraları birbirine dik \mathbf{u} yöneylerinden oluşan ve \mathbf{V} dizeyi ise düşey sıraları birbirine dik \mathbf{v} yöneylerinden oluşan dikgen dizelerdir. $\mathbf{\Sigma}$ ise Tekil Değer Ayrıştırımından değişik olarak üçköşegencil bir yapı içermektedir. Bu dizeyin yapısına bakıldığında asal köşegen üzerinde α_i , bir alt köşegende β_i ve bir üst köşegende γ_i katsayılarından oluşmaktadır. Bu katsayılar dış çarpımlardan gelen katkıyı belirleyen sayıllardır.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \gamma_3 & 0 & \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_4 & \gamma_4 & \\ & & & \ddots & & \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Yöntemin yapısında sözü edilen sıfırlanış, özyineleme adım sayısı ile ilgili olup, bu sıfırlanış dizeyin enküçük boyutu kadar özyineleme adımında gerçekleşmektedir. (2.37) gösteriliminde belirtildiği üzere $\ell < m$ iken en fazla ℓ adımda artık terim sıfırlanmaktadır. ℓ ve m 'ye göre $\mathbf{\Sigma}$ 'nin yapısı ortaya çıkmaktadır.



3. ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL YÖNEY GÖSTERİLİMİ (ÇYÇÜYG)

Bu bölümde, dizeler için geliştirilmiş bulunan Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizely Gösterilim (ÇYÇÜDG), ya da İngilizce adıyla Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEPR) yöntemi temel alınarak [61–67], yöneyler için yeni bir ayrıştırım yöntemi geliştirilmektedir. Geliştirilen bu yeni yöntem Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Yöney Gösterilimi (ÇYÇÜYG, ing: Tridiagonal Vector Enhanced Multivariate Products Representation (TVEMPR)) olarak adlandırılmaktadır [107]. Bu yöney ayrıştırımında ikili Kronecker çarpımlarından yararlanılmakta ve bu amaçla, katlılaştırım ve katsızlaştırım eylemlerinden yararlanılabildiği gibi yöneyden yöney üreten özel dönüşümlerden yararlanılabildiği de bu bölümde gösterilmektedir.

Bu bölümde, ÇYÇÜYG yöntemi geliştirilirken temelde Kronecker çarpımları ve dizely katlılaştırım katsızlaştırım eylemleri kullanılacağı için kısaca değinilmektedir.

3.1 Kronecker Çarpımı

ÇYÇÜYG yöntemi, Kronecker çarpım tabanlı olarak geliştirilmiş olup burada, bilimsel yazında yer alan Kronecker çarpım tanımı ve özellikleri kısaca anımsatılacaktır.

Sırasıyla $m \times n$ ve $p \times q$ türünde \mathbf{A} ve \mathbf{B} dizelylerinin Kronecker çarpımı, \otimes Kronecker çarpım sembolünü göstermek üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B}. \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Burada, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ Kronecker çarpımı $(mp) \times (nq)$ türünde bir dizely üretir. Benzer biçimde $m \times 1$ ve $n \times 1$ türünde \mathbf{a} ve \mathbf{b} yöneylerinin Kronecker çarpımı,

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = [a_i\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_1\mathbf{b} \\ a_2\mathbf{b} \\ \vdots \\ a_m\mathbf{b}. \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

biçiminde verilir ve $mn \times 1$ türünde yöney üretir.

Bu savda kullanılan Kronecker çarpımına ilişkin bazı özellikler aşağıdaki gibi verilebilir.

i) $\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_{mn}$,

ii) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$ (Dağılma özelliği),

iii) α sayıl olmak üzere, $\alpha(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (\alpha\mathbf{B})$,

iv) Her $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]^T$ ve $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T$ için, $\mathbf{ab}^T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^T = \mathbf{b}^T \otimes \mathbf{a}$,

v) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$.

Bu savda, Kronecker çarpımı ile ilgili bu kadar bilgi ile yetineceğiz. Daha ayrıntılı bilgiye bilimsel yazından erişilebilir [71–74].

3.2 Dizey Katsızlaştırımı

Bir dizeyin “Katsızlaştırımı” onun öğelerinin doğrucul bir biçimde yeniden sıralanışıdır. Katsızlaştırım sonrasında dizeyin hangi öğesinin nerede konum alacağı, bütünüyle, katsızlaştırımın nasıl tanımlandığına bağlıdır ve bu eylem sonucunda bir yöney oluşur. Bu yöneyden, katsızlaştırım öncesi dizeye dönüşü gerçekleştiren eyleme de “Katlılaştırım” denebilir [18, 28, 47]. Burada, katsızlaştırım eylemini gerçekleştiren işleci, İngilizcedeki “Unfolding” sözcüğünü çağrıştırmak amacıyla, \mathcal{U} ile simgeleyeceğiz. Bu bağlamda, katlılaştırım eylemini gerçekleştiren işleci de, İngilizcedeki “Folding” sözcüğünü çağrıştırmak amacıyla, \mathcal{F} ile simgeleyeceğiz. Ancak, gerek katsızlaştırım ve gerekse katlılaştırım eylemleri eşsiz olmadıklarından değişik türlerini birbirinden ayırdedecek önlemler de almak gerekebilmektedir. Yine de burada, bir dizeyin soldan sağa düşey sıralarını yukarıdan aşağıya dizerek yöney oluşturmumu evrencil katsızlaştırım olarak nitelendirilecektir. Bu diziş eyleminin evriği de evrencil katlılaştırım olarak nitelendirilecektir. Burada, değişik bir belirtme gidilmedikçe bu evrencil eylemler anlatılmak istenecektir.

Yukarıda anlatılanlar bağlamında bir \mathbf{A} dizeyinden bir \mathbf{a} yöneyinin üretilişi ve onun evrik eylemi, yani, \mathbf{a} yöneyinden \mathbf{A} dizeyinin üretilişi, uzbilim dilinde, aşağıdaki

eşitliklerle betimleyebiliriz.

$$\mathbf{a} = \mathcal{U}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{A} = \mathcal{F}(\mathbf{a}) \quad (3.3)$$

İnceleyişlerimizde, öncelikle dışçarpımların katsızlaştırımına odaklanımda yarar bulunmaktadır. Bu yolda önce, \mathbf{u} ve \mathbf{v} , sırasıyla, m ve n ögeli yöneyler olmak üzere, $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ dışçarpımına odaklanacağız. Bunun için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T) &= [u_1v_1 \dots u_mv_1 \ u_1v_2 \dots u_mv_2 \dots u_1v_n \dots u_mv_n]^T \\ &= [v_1\mathbf{u}^T \dots v_n\mathbf{u}^T]^T = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bu bölümün başında, \mathbf{F} işleciyle \mathbf{U} işlecinin birbirlerinin evriği olduğunu belirtmiştik.

Bu nedenle, (3)'ten aşağıdaki eşitliğe geçilebilir.

$$\mathcal{F}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{u}\mathbf{v}^T \quad (3.5)$$

3.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Yöney Gösterilimi

Bu bölümde, Kronecker çarpım tabanlı yeni bir yöney ayrıştırımı olarak bu sav çalışmaları sırasında geliştirilen Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Yöney Gösterilimi (ÇYÇÜYG) yöntemi odağa alınmaktadır [107]. Bu yöntem, Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG) yönteminin ortaya çıkmasındaki esas düşünce baz alınarak, yöneye özyinelemeli olarak Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) uygulanması sonucu elde edilmiştir. Yöneye özyinelemeli olarak ÇYÇG uygulayışı sonucunda, ÇYÇÜDG yöntemindeki dış çarpımların toplamı şeklinde elde edilen gösterilim yerine, Kronecker çarpımların toplamı şeklinde yazılabilen bir ayrıştırım elde edilmektedir.

ÇYÇÜYG yöntemini oluşturmak için, bir dizeyin ÇYÇÜDG açılımını burada yeniden ele alalım:

$$\mathbf{A} = a_0\mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{a}_1\mathbf{v}^T + \mathbf{u}\mathbf{a}_2^T + \mathbf{A}_{1,2} \quad (3.6)$$

Bu açılımın her iki yanına katsızlaştırım işleci \mathcal{U} uygulanırsa, (3.6) eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{U}(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{u} + \mathcal{U}(\mathbf{A}_{1,2}) \quad (3.7)$$

Burada, (3.7) eşitliğinde yer alan asıl dizey ve artık dizey katsızlaştırımları için

$$\mathbf{a} \equiv \mathcal{U}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{a}_{1,2} \equiv \mathcal{U}(\mathbf{A}_{1,2}) \quad (3.8)$$

tanımları kullanılırsa,

$$\mathbf{a} = a_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{u} + \mathbf{a}_{1,2} \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilir. Bu, Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegenil Yöney Gösterilimi (ÇYÇÜYG)'nin bir ara aşamasının uzbilimcil anlatımıdır. Burada \mathbf{a} odaktaki yöneyi simgelemekte olup a_0 , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , ve de $\mathbf{a}_{1,2}$ ile odaktaki yöneyin, sırasıyla, değişmez, sol ve sağ yöneyler, ve de kalan yöney ÇYÇÜYG bileşenlerini simgelemektedir. Bu eşitlikte, \mathbf{u} ile \mathbf{v} , sırasıyla, m ve n öğeli ve birimboylu destek yöneylerini simgelemektedir. Destek yöneyleri, bu konuda bilimsel yazındaki araştırmalarda ortaya konan biçimi ile kullanılmıştır [Burcu, Süha]. Bu destekler ile ilgili bağıntılandırılmalar uygulama kesiminde verilecektir.

(3.9) ile verilen eşitliğin sağ yanındaki bilinmeyen bileşenlerin belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla (3.9)'nin her iki yanı soldan $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ 'nin devriği ile çarpılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^T \mathbf{a} = a_0 + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^T (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a}_1) + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^T (\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^T \mathbf{a}_{1,2} \quad (3.10)$$

Kronecker çarpımının dağılma özelliği ve destek yöneylerinin birimboyluluk koşulundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^T (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a}_1) = \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1, \quad (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^T (\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{v}^T \mathbf{a}_2 \quad (3.11)$$

(3.9)'den salt a_0 'ın eşsiz olarak belirlenimini sağlamak amacıyla, aşağıdaki diklik koşulluklarının öngörümülmesi gerekir.

$$\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 = 0, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{a}_2 = 0, \quad (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^T \mathbf{a}_{1,2} = 0 \quad (3.12)$$

Bu koşullar aynı zamanda sıfırlanım koşullarıdır. Bunların geçerli oluşu durumunda (3.10) eşitliğinden a_0 , aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a_0 = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^T \mathbf{a} \quad (3.13)$$

(3.9) eşitliği soldan $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T$ ile çarpılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) \mathbf{a} &= a_0 (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a}_1) \\ &+ (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) (\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) \mathbf{a}_{1,2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Bu arasonucu yalınlaştırmak için aşağıdaki eşitlikleri kullanmak yeterlidir.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) &= (\mathbf{I}_n \mathbf{v}) \otimes (\mathbf{u}^T \mathbf{u}) = \mathbf{v} \\
(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a}_1) &= (\mathbf{I}_n \mathbf{v}) \otimes (\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1) = 0 \\
(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) (\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{u}) &= (\mathbf{I}_n \mathbf{a}_2) \otimes (\mathbf{u}^T \mathbf{u}) = \mathbf{a}_2
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Bunların kullanımıyla (3.14), aşağıdaki yapıya büründürülebilir.

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) \mathbf{a} = a_0 \mathbf{v} + \mathbf{a}_2 + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) \mathbf{a}_{1,2}. \tag{3.16}$$

Burada, \mathbf{a}_2 'nin eşsiz olarak belirlenebilmesi için sağ yandaki en son anlatımın orada bulunmaması yeterlidir. Bu nedenle, herhangi bir beklenmedik olumsuzluk yaratılmamak koşulu altında, aşağıdaki öngörümüne gidilebilir.

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) \mathbf{a}_{1,2} = 0 \tag{3.17}$$

Bu öngörüm altında (3.16),

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{u}^T) \mathbf{a} = a_0 \mathbf{v} + \mathbf{a}_2 \tag{3.18}$$

olarak elde edilir. Benzer biçimde \mathbf{a}_1 bileşenini belirleyebilmek amacı ile (3.9) eşitliğinin her iki yanını sağdan $(\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{I}_m)$ ile çarpılıp, andıran işlemler uygulanır. Burada öngörülen sıfırlanım koşulu,

$$(\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{a}_{1,2} = 0 \tag{3.19}$$

biçimindedir ve bu öngörüm altında \mathbf{a}_1

$$(\mathbf{v}^T \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{a} = a_0 \mathbf{u} + \mathbf{a}_1 \tag{3.20}$$

biçiminde elde edilir. Böylece, a_0 , \mathbf{a}_1 , ve de, \mathbf{a}_2 bileşenlerinin eşsiz olarak belirlenmesi için gerekli denklemler oluşturulmuş olur. Bu denklemlerin çözümlerinin (3.9)'de kullanımıyla $\mathbf{a}_{1,2}$ bileşeni de eşsiz olarak belirlenebilir. Artık yöney olarak da adlandırılan $\mathbf{a}_{1,2}$, (3.9) açılımında ayrıştırım odağındaki asıl yöneyden sağ yanda bulunan ilk üç teriminin toplamının çıkarılması ile elde edilir. Böylece, tüm ÇYÇÜYG bileşenleri belirlenmiş olur.

Bu kesime kadar verilenler, bir yöneyin ÇYÇG açılımının Kronecker çarpımları aracılığıyla nasıl oluşturulduğunu göstermektedir. Bu kesimden sonra, ÇYÇÜYG

yönteminin oluşumuna ilişkin işlemler verilecektir. Bu amaçla ÇYÇÜDG yöntemindeki aynı düşünce ile artık yöneye özyinelemeli olarak ÇYÇG uygulanacaktır. Bu özyineleme işlemi için her adımda yeni destek yöneylerinin belirlenmesi gerekmektedir. Yeni destek yöneyleri sol ve sağ yöneylerden aşağıdaki gibi üretilmektedir.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &\equiv \|\mathbf{a}_1\|^{-1} \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{v} &\equiv \|\mathbf{a}_2\|^{-1} \mathbf{a}_2\end{aligned}\quad (3.21)$$

Bu biçimde belirlenen yeni destekler birbirine diktir.

Özyineleme adımı yöneyin katlılaştırılmış yapısı gözönünde bulundurularak belirlenmektedir. Bu özyineleme adımları aşağıdaki biçimde verilen bir ayrıştırım yapısı üretmektedir.

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{n_\beta} \beta_i \mathbf{u}_{i+1} \otimes \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=1}^{n_\gamma} \gamma_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_{i+1}^T \quad (3.22)$$

Burada α_i , β_i ve γ_i sayıları her özyineleme adımında elde edilen a_0 , $\|\mathbf{a}_1\|$ ve $\|\mathbf{a}_2\|$ olmak üzere, elde edilen Kronecker çarpımlarından gelen katkıyı ifade etmektedir.

Odaktaki yöneyin katlılaştırılmış yapısı $m \times n$ türünde olmak üzere toplamlardaki üst sınırlar aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$\begin{aligned}n_\alpha &\equiv \min\{m, n\} \\ n_\beta &\equiv \begin{cases} n_\alpha & m < n \\ n_\alpha - 1 & m \geq n \end{cases} & n_\gamma &\equiv \begin{cases} n_\alpha & m > n \\ n_\alpha - 1 & m \leq n \end{cases}\end{aligned}\quad (3.23)$$

3.4 ÇYÇÜYG Uygulamaları

Bu alt kesimde ÇYÇÜYG yöntemini doğrulayıcı sayısal uygulamalara yer verilmiştir. Uygulamalara başlamadan önce uygulamalar ile ilgili bazı önemli noktaları aşağıdaki gibi sırasayılabiliriz:

- Yöntemin uygulanabilirliği için odaktaki yöneyin boyutunun $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $m, n > 1$ olmak üzere $mn \times 1$ türünde olması gerekmektedir. Başka bir deyişle, yöneyin boyutu iki tamsayının çarpımı şeklinde olmalıdır.
- Katsızlaştırım, yapısı nedeniyle tek türlü değildir. Bu nedenle ÇYÇÜYG de tek türlü değildir. Örneğin 6×1 türünde bir yöney, 3×2 veya 2×3 türünde katlılaştırılabilir. Bu değişik durumlar için değişik ÇYÇÜYG elde edilir.

- Yöntemdeki öteki önemli nokta ise başlangıç desteklerinin nasıl seçildiğidir. ÇYÇÜYG uygulamalarında başlangıç destek yöneylerinin iki değişik biçimi kullanılmıştır. Bunlardan ilki en yalın durum olarak bilinir ve aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\mathbf{u} \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{1}_m, \quad \mathbf{v} \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_n \quad (3.24)$$

Burada destek yöneyleri, $\mathbf{1}_m$ ve $\mathbf{1}_n$ sırasıyla m ve n öğeli olup, öğeleri 1 olan birim boylu yöneylerdir. Bu tip destekler Olağanlaştırılmış Eş Ögeli Destekler (OEÖD) olarak adlandırılmaktadır. Diğer destek biçimi ise, odaktaki yöneyin özünden üretilen destek yöneyi olup Olağanlaştırılmış Yönlü Ortalamalı Destek (OYOD) olarak adlandırılır ve aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\equiv \left\| (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_n^T) \mathbf{a} \right\|^{-1} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{1}_n^T) \mathbf{a}, \\ \mathbf{v} &\equiv \left\| (\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{a} \right\|^{-1} (\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sırası ile m ve n öğeli bu destekler odaktaki yöneyden üretilebilmesi nedeniyle “Özüne Uyumlu” olarak tanımlanır.

- ÇYÇÜYG özyinelemeli bir yöntem olup yöney boyutu sonlu olduğu sürece özyineleme sayısı da sonludur. En büyük özyineleme sayısı, katlılaştırılmış dizeyin ($\mathcal{F}(a)$) boyutunun en küçük olanı kadardır. $\mathcal{F}(a)$, $m \times n$ türünde bir dizey olmak üzere özyineleme sayısı en çok $\min(m, n)$ kadardır.

İlk uygulamalara olarak, aşağıdaki gibi 6×1 türünde bir yöney ele alalım.

$$\mathbf{x} = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]^T \quad (3.26)$$

Bu yöneye ilişkin katlılaştırılmış dizeyler 3×2 ve 2×3 türünde 2 değişik biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{X}_1 = \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Her iki durum için de özyineleme sayısı en çok 2’dir. \mathbf{X}_1 durumunda başlangıç destek yöneyleri aşağıdaki gibi 3×1 ve 2×1 olup, OEÖD olarak seçilmiştir. Her adımda elde edilen destekler aşağıda \mathbf{U} ve \mathbf{V} ’nin düşey sıraları olarak verilmiştir.

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.7071 & -0.6061 \\ 0.5774 & -0.0000 & -0.5152 \\ 0.5774 & 0.7071 & -0.6061 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

andıran biçimde \mathbf{X}_2 durumu ele alındığında, \mathbf{U} dizeyinin yerine \mathbf{V} , \mathbf{V} 'nin yerine ise \mathbf{U} dizeyinin elde edildiği durum ortaya çıkmaktadır.

İkinci uygulama olarak, 12×1 türünde bir yöney ele alalım.

$$\mathbf{y} = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]^T \quad (3.30)$$

Bu durumda katlılaştırım ile ilgili olarak karşımıza 4 değişik durum çıkmaktadır.

Bunlar sırasıyla 4×3 , 3×4 , 6×2 ve 2×6 türünde dizeylerden oluşmaktadır.

$$\mathbf{Y}_1 = \mathcal{F}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Burada yalnızca 4×3 ve 6×2 türündeki durumlar için sonuçlar verilecektir. Bunun nedeni diğer durumlarda destek yöneylerinin yer değiştiriminden dolayı andıran sonuçların elde edilmesidir.

4×3 türünde katlılaştırılmış dizey \mathbf{Y}_1 , aşağıdaki gibi verilir. Bu dizey için özyleneleme sayısı ençok 3 olup, destek yöneyleri aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\mathbf{U}_1 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4] = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.6708 & -0.2236 & -0.0217 \\ 0.5000 & -0.2236 & 0.6708 & 0.4050 \\ 0.5000 & 0.2236 & -0.6708 & 0.1370 \\ 0.5000 & 0.6708 & 0.2236 & -0.9037 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.7071 & -0.5721 \\ 0.5774 & -0.0000 & -0.5876 \\ 0.5774 & 0.7071 & -0.5721 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

6×2 türündeki \mathbf{Y}_2 dizeyi ise,

$$\mathbf{Y}_2 = \mathcal{F}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \\ 4 & 10 \\ 5 & 11 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

olarak verilir. Destek yöneyleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{U}_2 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 0.4082 & -0.5976 & -0.3775 \\ 0.4082 & -0.3586 & -0.4452 \\ 0.4082 & -0.1195 & -0.4400 \\ 0.4082 & 0.1195 & -0.3619 \\ 0.4082 & 0.3586 & -0.3931 \\ 0.4082 & 0.5976 & -0.4244 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{V}_2 = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Bu bölümde ayrıca değişik destekler altında ÇYÇÜYG, bir yöneye uygulandığında elde edilen ilk katkının (α_1 'in) baskınlığı ile ilgili de çözümlemler yapılmıştır. Bu amaçla, ilk uygulama olarak ele aldığımız \mathbf{x} yöneyinin \mathbf{X}_1 katlılaştırımı durumuna, OYOD ve OEÖD kullanılarak ÇYÇÜYG uygulanmış ve elde edilen α_1 değerleri Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1 : \mathbf{x} yöneyinin \mathbf{X}_1 katlılaştırımı durumunda değişik destekler için elde edilen α_1 sonuçları

$\mathbf{u} \rightarrow 3 \times 1 \quad \mathbf{v} \rightarrow 2 \times 1$		
	OEÖD	OYOD
α_1	8.5732	9.5011

İkinci uygulama yöneyi \mathbf{y} içinde andıran inceleyiş gerçekleştirilmiş olup farklı katlılaştırım durumlarında elde edilen α_1 değerleri Çizelge 3.2 ile verilmiştir. Elde edilen sonuçlar OYOD türünde destek ile elde edilen α_1 değerlerinin daha baskın olduğunu göstermektedir.

Çizelge 3.2 : \mathbf{y} yöneyi için değişik destek ve katlılaştırım durumlarında elde edilen α_1 sonuçları

Durumlar	OEÖD		OYOD	
	$\mathbf{u} \rightarrow 4 \times 1$ $\mathbf{v} \rightarrow 3 \times 1$	$\mathbf{u} \rightarrow 6 \times 1$ $\mathbf{v} \rightarrow 2 \times 1$	$\mathbf{u} \rightarrow 4 \times 1$ $\mathbf{v} \rightarrow 3 \times 1$	$\mathbf{u} \rightarrow 6 \times 1$ $\mathbf{v} \rightarrow 2 \times 1$
α_1	22.5167	22.5167	25.4212	25.4789

Bu sayısal sonuçlar incelendiğinde ÇYÇÜYG yönteminin, ÇYÇÜDG yöntemindeki özellikleri ve esneklikleri taşıdığı görülmektedir. Bunun nedeni ise katlılaştırım kavramının kullanımınıdır. Benzer biçimde Olağanlaştırılmış Yönlü Ortalamalı Destek (OYOD) seçiminin, çekirdek dizeyinin köşegence baskınlığını arttırdığı (α_1 değerlerinin daha büyük olduğu) gözlenmektedir. Bu beklenen sonuç olup destek seçimlerinin ayrıntılı inceleyişi Bölüm 7.2'de verilmiştir.



4. ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÖBEKÇİL ÜÇKÖŞEGENCİL DİZEY GÖSTERİLİMİ (ÇYÇÖÜDG)

4.1 İkideğişkenli Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösteriliminde Destek Dizeyi Kullanımı

Bu bölüme, Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Öbek Üçköşegencil Dizey Gösterilimine (ÇYÇÖÜDG) alt yapı oluşturması nedeniyle bir dizeyin iki destek yöneyi kullanılarak elde edilen iki değişkenli Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimine anımsatma yaparak başlayacağız. $m_1 \times m_2$ türünde bir \mathbf{A} dizeyinin ögecil düzeyde ÇYÇG açılımı aşağıdaki gibi verilir [55–57]:

$$A_{i_1, i_2} = a_0 u_{i_1} v_{i_2} + a_{i_1}^{(1)} v_{i_2} + u_{i_1} a_{i_2}^{(2)} + A_{i_1, i_2}^{(1,2)},$$
$$i_1 = 1, 2, \dots, m_1; \quad i_2 = 1, 2, \dots, m_2. \quad (4.1)$$

Burada A_{i_1, i_2} , i_1 . yatay sıra ile i_2 . düşey sıranın arakesitinde yer alan ögeyi göstermektedir. Eşitliğin sağ yanı ise iki değişkenli ÇYÇG'nin terimleri olarak adlandırılan 4 toplamcıl terimden oluşmaktadır. Bu terimlerin her birinin çokdeğişkenliliği 2. dereceye yükseltmiştir. Çokdeğişkenliliğin 2. dereceye yükselmesini, sol (\mathbf{u}) ve sağ (\mathbf{v}) destek yöneylerinin kullanımı sağlamaktadır. İlk terimde yer alan olan a_0 , ÇYÇG açılımının değişmez bileşeni olarak adlandırılır. \mathbf{a}_1 ve \mathbf{a}_2 tek değişkenli bileşenler olarak adlandırılır ve sırasıyla yataysıra ve düşey sıra yönündeki bileşenlere karşılık gelmektedir. $\mathbf{A}^{(1,2)}$ ise iki değişkenli ÇYÇG bileşeni olup $m_1 \times m_2$ türündedir. Aynı zamanda artık terim (ing:remainder term) olarak da adlandırılmaktadır.

Ögecil düzeydeki (4.1) gösteriliminin dizeycil gösterilimi,

$$\mathbf{A} = a_0 \mathbf{u} \mathbf{v}^T + \mathbf{a}_1 \mathbf{v}^T + \mathbf{u} \mathbf{a}_2^T + \mathbf{A}_{1,2} \quad (4.2)$$

olarak verilir.

Bu gösterilimlerde \mathbf{A} dizeyinin ve destek yöneylerinin bilindiği varsayılmaktadır. a_0 , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 ve $\mathbf{A}_{1,2}$ bileşenleri ise bilinmemektedir. (4.2) eşitliği bu bilinmeyenler için

yalnızca bir dizey denklemdir. Bu dizey denkleminde bileşenler aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v}, \\
\mathbf{a}_1 &= (\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \mathbf{A} \mathbf{v}, \\
\mathbf{a}_2 &= (\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \\
\mathbf{A}_{1,2} &= (\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \mathbf{A} (\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{v} \mathbf{v}^T)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Bu eşitliklerin elde edilişi ile ilgili ayrıntılı bilgi Bölüm 2.3’de yer almaktadır. Burada \mathbf{I}_{m_1} ve \mathbf{I}_{m_2} sırasıyla $m_1 \times m_1$ ve $m_2 \times m_2$ boyutlu birim dizelerdir. (4.3)’de 4. satır ile verilen artık terim eşitliği yöntem için can alıcı noktayı oluşturmaktadır. Bu eşitlik, artık terimin özdüzeyinin 1 azaldığını göstermektedir. Destek yöneyleri \mathbf{u} ve \mathbf{v} sırasıyla artık terimin sol ve sağ sıfır uzayına girmektedir. Bu durum destek yöneylerinin amaç dizeyi \mathbf{A} ’nın sol ve sağ sıfır uzayında yer almadığı sürece sağlanır. Bu durumun ortaya çıkması oldukça seyrek karşılaşılan bir durumdur. Bu nedenle, artık terim yeni uygulanacak olan ÇYÇG için amaç dizeyi olarak ele alınabilir ancak aynı destek yöneyleri kullanılamaz. Bunun için önceki destek yöneylerine dik olacak şekilde yeni destek yöneyleri belirlenir ve bu biçimde işlem sürdürülebilir. Bu düşünce, üçköşegencil ayrıştırımların temelini oluşturmaktadır. Destekler arasındaki dikliği sağlamak amacı ile yeni destek yöneyleri ÇYÇG bileşenlerinin orantılısı olarak seçilmektedir. Desteklerin seçimi ile ilgili ayrıntılar bir sonraki bölümde verilecektir.

Bu noktaya kadar bilimsel yazında yer alan destek yöneyi tabanlı ikideğişkenli ÇYÇG yöntemini burada tekrar anımsamak için anlatım yapıldı. Bu noktadan sonra ise yeni geliştirilecek olan yönteme taban oluşturması için destek dizeyi tabanlı ÇYÇG açılımı verilecektir. $m_1 \times m_2$ türündeki bir \mathbf{A} dizeyi için destek yöneyleri yerine destek dizeyi kullanılarak elde edilen açılım aşağıdaki gibi yazılır [108]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{A}_0 \mathbf{V}^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{V}^T + \mathbf{U} \mathbf{A}_2^T + \mathbf{A}_{1,2} \tag{4.4}$$

Bu açılımda sağ yanda yer alan \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 ve $\mathbf{A}_{1,2}$ sırasıyla $m_1 \times n_1$, $m_2 \times n_2$, $n_1 \times n_2$, $m_1 \times n_2$, $m_2 \times n_1$ ve $m_1 \times m_2$ türünde dizelerdir. Bu açılımdaki yenilik \mathbf{U} ve \mathbf{V} dizelerinin sırasıyla sol ve sağ destek dizeyi olmalarıdır. Bileşenlerin belirlenebilmesi için tanımlanan özelliklerin andıranları burada dizencil düzeyde yeniden tanımlanabilir. Destek dizeyleri üzerindeki birimboyluluk özelliği aşağıdaki

gibi verilir.

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_{n_1}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{n_2} \quad (4.5)$$

Burada \mathbf{I}_{n_1} ve \mathbf{I}_{n_2} , sırasıyla n_1 ve n_2 boyutlu Kartezyen uzaydaki birim dizeylerdir.

Dizeycil destek tabanlı ÇYÇG bileşenlerinin eşsiz biçimde belirlenimi için dizeycil düzeyde aşağıdaki sıfırlanım koşulları tanımlanır.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{A}_1 &= \mathbf{0}_{n_1 \times n_2}, & \mathbf{V}^T \mathbf{A}_2 &= \mathbf{0}_{n_2 \times n_1}, \\ \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{1,2} &= \mathbf{0}_{n_1 \times m_2}, & \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{V} &= \mathbf{0}_{m_1 \times n_2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Bu koşullar altında (4.4)'da verilen bileşenler belirlenebilir. \mathbf{A}_0 'ı belirleyebilmek için andıran usbilim ile \mathbf{U}^T ve \mathbf{V} ile sırasıyla soldan ve sağdan çarpılırsa,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{A}_0 \mathbf{V}^T \mathbf{V} + \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{A}_2^T \mathbf{V} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{V}^T \mathbf{V} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{V} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.5) ile verilen birimboyluluk koşulları ile,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{V} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_1 + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{V} \quad (4.8)$$

yalınlaştırılır ve (4.6) ile verilen sıfırlanım koşulları ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (4.9)$$

\mathbf{A}_1 bileşenini belirleyebilmek amacıyla (4.4), sağdan \mathbf{V} destek dizeyi ile çarpılırsa,

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{U} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{U} \mathbf{A}_2^T \mathbf{V} + \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{V} \quad (4.10)$$

ve bu yeni eşitlikte sıfırlanım koşulları kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{U} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \quad (4.11)$$

\mathbf{A}_0 eşitliği (4.11) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \mathbf{V} - \mathbf{U} \mathbf{A}_0 = \mathbf{A} \mathbf{V} - \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (4.12)$$

\mathbf{A}_1 bileşenini belirleyen eşitlik aşağıdaki gibi verilir.

$$\mathbf{A}_1 = (\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{U} \mathbf{U}^T) \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (4.13)$$

\mathbf{A}_1 'in elde edilışinden değişik olarak (4.4) denklemi soldan \mathbf{U}^T ile çarpılırsa \mathbf{A}_2

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \mathbf{V}^T + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{V}^T + \mathbf{A}_2^T + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_{1,2} \quad (4.14)$$

olarak elde edilir.

Andıran düzenlemeler yapılarak, ilgili eşitliklerden yararlanılırsa,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}^T \mathbf{U} - \mathbf{V} \mathbf{A}_0^T = \mathbf{A}^T \mathbf{U} - \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{A}^T \mathbf{U} \quad (4.15)$$

\mathbf{A}_2 şu biçimde elde edilir:

$$\mathbf{A}_2 = (\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{V} \mathbf{V}^T) \mathbf{A}^T \mathbf{U}. \quad (4.16)$$

Bu noktada \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 ve \mathbf{A}_2 cebircil olarak belirlenebilir durumdadır. Dolayısıyla $\mathbf{A}_{1,2}$, (4.4) açılımındaki tek bilinmeyen olup, tüm bilinen bileşenler bu açılımda yerine konulup, amaç düzeyinden bilinenler çıkarılarak elde edilir.

$$\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A} - \mathbf{U} \mathbf{A}_0 \mathbf{V}^T - \mathbf{A}_1 \mathbf{V}^T - \mathbf{U} \mathbf{A}_2^T \quad (4.17)$$

Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılarak artık terim elde edilir. Destek düzey tabanlı ikideğişkenli ÇYÇG bileşenleri aşağıdaki eşitlikler ile belirlenir.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V}, \\ \mathbf{A}_1 &= (\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{U} \mathbf{U}^T) \mathbf{A} \mathbf{V}, \\ \mathbf{A}_2 &= (\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{V} \mathbf{V}^T) \mathbf{A}^T \mathbf{U}, \\ \mathbf{A}_{1,2} &= (\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{U} \mathbf{U}^T) \mathbf{A} (\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{V} \mathbf{V}^T) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Bu ana kadar ÇYÇG bileşenlerinin belirlenimi ile ilgilenildi. Bu noktadan sonra ise ilerleyen adımlardaki çözümler için destek düzeylerinin boyu (norm) ve ilgili özellikleri hakkında daha ayrıntılı bir inceleme gerçekleştireceğiz. $m_1 \times n_1$ türündeki \mathbf{U} destek düzeyi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_{n_1}] \quad (4.19)$$

burada \mathbf{u}_i yöneyleri destek düzeyinin düşey sıra yöneyleri olup, m_1 ögeli birim boylu Kartezyen yöneylerdir. Dolayısıyla, destek düzeyinin devriği ile kendisinin çarpımı

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n_1}) \equiv \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{I}_{n_1} \quad (4.20)$$

olarak yazılabilir. Burada \mathbf{G} , \mathbf{u}_i yöney kümesinin oluşturduğu Gram dizeyidir [75]. n_1 boyutlu Kartezyen uzayda gram dizeyi ile birim dizeyin birbirine özdeşliği, \mathbf{u}_i yöneylerinin n_1 elemanlı birim boylu ve dikgen Kartezyen yöney

kümesi oluşturduğunu göstermektedir. Bu nedenle destek dizeyini oluşturan düşey sıra yöneyleri birim boylu ve birbirine diktir. Bu, aynı zamanda destek dizeyinin öz düzeyinin n_1 olmasını güvence altına alır. Bütün bunların yanısıra (4.20) eşitliği yalnızca n_1 'in m_1 'den küçük ve eşit olduğu durumlarda sağlanır. Bu durum gerçekleşmezse, (4.20) eşitliğinin sağ yanında ilgili birim dizey elde edilemez. Bunun yerine asal köşegen üzerinde birlerin yanısıra sıfırları olan bir birim dizey elde edilir. Bu bağlamda destek dizeyleri bu çalışmada, düşey sıra sayıları yatay sıra sayılarından küçük olacak biçimde ele alınacaktır. (4.20) eşitliği "Birim Öbekçil Boy (ing: Unit Block Norm)" özelliği olarak adlandırılabilir. Bu durumda tüm destek dizeyleri birim öbekçil boy özelliğini sağlamalıdır. Bu özelliği olan destek dizeyleri yatay dikdörtgencil dizey olamazlar yalnızca dördül dizey veya düşey dikdörtgencil dizey olabilirler.

Öbekçil boy, yeni bir kavram olup, dördül veya düşey dikdörtgencil dizeyin düşey sıralarının karşılıklı iç çarpımlarından oluşan Gram dizeyi olarak tanımlanır [108]. Aynı Kartezyen uzayı örten iki dördül dizey veya düşey dikdörtgencil dizeyin öbekçil iç çarpımı aşağıdaki gibi verilir.

$$\mathbf{U}^T \bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \bar{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1^T \bar{\mathbf{u}}_{n_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{n_1}^T \bar{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{n_1}^T \bar{\mathbf{u}}_{n_2} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

\mathbf{U} ve $\bar{\mathbf{U}}$ sırasıyla n_1 ve n_2 düşey sıra sayılı dizeyler olup, \mathbf{u}_i ve $\bar{\mathbf{u}}_j$ sırasıyla \mathbf{U} ve $\bar{\mathbf{U}}$ dizeyinin düşey sıralarıdır. Eğer (4.21) ile verilen iç çarpım $n_1 \times n_2$ türünde sıfır dizeyi üretiyor ise, \mathbf{U} ve $\bar{\mathbf{U}}$, Öbekçil Dikgen (ing: Block Orthogonal) dizeylerdir. Bu dizeyler aynı zamanda birim öbekçil boy özelliğini de sağlıyorsa bu dizeylere aralarında Öbekçil Birimboylu Dikgen (ing: Block Orthonormal) denir. Bu öbekçil iç çarpım bildiğimiz yöneyler arasındaki iç çarpımın ötesinde bir yapıdır. Çünkü öbekçil iç çarpıma giren dizeyler aynı türden olmak zorunda değildir. Bununla birlikte değişik düşey sıra sayılı dikdörtgencil dizeyler olabilen iç çarpıma giren dizeyler ancak aynı Kartezyen uzaya eşleşmelidir.

Şimdi dördül veya dikdörtgencil bir dizeyin nasıl birim öbekçil boy formuna getirileceğine bakalım. Bunun için $m \geq n$ olmak üzere $m \times n$ türünde bir \mathbf{U} dizeyi ele alalım ($m \leq n$ durumunda \mathbf{U} yerine \mathbf{U}^T ele alınabilir). İç çarpım,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{G}(\mathbf{U}) \quad (4.22)$$

olarak yazılır. $\mathbf{G}(\mathbf{U})$, \mathbf{U} dizeyinin düşey sıralarının Gram dizeyidir. Gram dizeyi \mathbf{U} 'nun özdüzeyi n ve düşey sıraları birim boylu ve aralarında dikgen olmadığı sürece \mathbf{I}_n 'e özdeş değildir. \mathbf{U} 'nun özdüzeyinin n olması yani tam özdüzeyli dizey olması işlemleri kolaylaştırmaktadır. Ancak burada destek dizeyinin tam özdüzey olması için bir kısıtlama yapılmayacaktır. Destek dizeyi \mathbf{U} 'nun özdüzeyi r ise, düşey sıraları doğrusal bağımlı ve bu nedenle $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ 'nun özdüzeyi de r 'dir. Bunun ötesinde Gram dizeyi yarı artı tanımlı olur. Gram dizeyi aynı zamanda bakışık bir dizey olduğu için özdeğerleri gerçel ve r tanesi sıfırdan farklıdır (Katlılık durumu da gözönünde bulundurulur). Özdeğerleri ve karşılık gelen birim boylu özyöneylemleri sırasıyla $\lambda_j^{(G)}$ ve \mathbf{g}_j olarak gösterirsek, özdeğerler ve özyöneylemler türünden Gram dizeyi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \sum_{j=1}^r \lambda_j^{(G)} \mathbf{g}_j \mathbf{g}_j^T \quad (4.23)$$

$r = n$ olmadığı sürece evirtilemez. \mathbf{g}_j 'ler birim boylu dikgendir, Gram dizeyi bakışık ve yarı artı tanımlıdır. Yani sıfır olmayan tüm özdeğerler artı tanımlıdır.

(4.22) eşitliğinden, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{g}_\ell = \mathbf{g}_k^T \mathbf{G}(\mathbf{U}) \mathbf{g}_\ell = \lambda_k^{(G)} \delta_{k,\ell} = \lambda_\ell^{(G)} \delta_{k,\ell}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, r \quad (4.24)$$

Burada $\delta_{k,\ell}$ bilimsel yazımdan bildiğimiz k, ℓ 'ye eşit olduğunda 1 değerini alan, diğer durumlarda 0 olan Kronecker simgesidir. Bu eşitlik aracılığıyla,

$$\mathbf{Y}_k \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(G)}}} \mathbf{U} \mathbf{g}_k, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (4.25)$$

(4.25) eşitliği yazılabilir. \mathbf{Y}_k $m \times 1$ türünde bir yöneydir. Ayrıca \mathbf{Y}_k 'lar düşey sıraları oluşturacak şekilde \mathbf{Y} dizeyi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{Y} \equiv [\mathbf{Y}_1 \ \dots \ \mathbf{Y}_r] = \mathbf{U} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(G)}}} \mathbf{g}_1 \ \dots \ \frac{1}{\sqrt{\lambda_r^{(G)}}} \mathbf{g}_r \right] = \mathbf{U} \mathbf{\Gamma}_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{G}(\mathbf{U})) \quad (4.26)$$

Bu eşitlikten,

$$\mathbf{\Gamma}_V(\mathbf{G}(\mathbf{U})) \equiv \left[\lambda_1^{(G)V} \mathbf{g}_1 \ \dots \ \lambda_r^{(G)V} \mathbf{g}_r \right] \quad (4.27)$$

yukarıdaki özelsiz yapı yazılabilir. Bu eşitlik ile, amaç dizeyi ve Gram dizeyine bağımlılık gösterilmiş olmaktadır.

$\Gamma_v(\mathbf{G}(\mathbf{U}))$ dizeleri burada yapılacak incelemeler için oldukça önemlidir. Gram dizeleri ile bağıntılı olan bu dizeler için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}\Gamma_v(\mathbf{G}(\mathbf{U}))\Gamma_{1-v}(\mathbf{G}(\mathbf{U}))^T &= \Gamma_{1-v}(\mathbf{G}(\mathbf{U}))\Gamma_v(\mathbf{G}(\mathbf{U}))^T \\ &= \Gamma_{\frac{1}{2}}(\mathbf{G}(\mathbf{U}))\Gamma_{\frac{1}{2}}(\mathbf{G}(\mathbf{U}))^T \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{U})\end{aligned}\quad (4.28)$$

Eşitliğin sağ yanı gram dizeyinin "İkili Bakışık Çarpımcı Ayrıştırımı" olarak adlandırılabilir. Burada çarpanların üçköşegenlik olma gerekliliği olmamasına karşın, ayrıştırım Cholesky Ayrıştırımını anımsatmaktadır.

Bu ayrıştırım için aynı zamanda aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\Gamma_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{G}(\mathbf{U}))\Gamma_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{G}(\mathbf{U}))^T = \mathbf{G}(\mathbf{U})^{-1,(res)} \quad (4.29)$$

Burada (*res*) ile verilen üst simge evrik alma işleminin \mathbf{g}_j yöneyleri ile örtülen alt uzay üzerinde sınırlandırıldığını göstermektedir.

$\Gamma_v(\mathbf{G}(\mathbf{U}))$, $n \times r$ türünde bir dizey, bu nedenle düşey dikdörtgenlik bir dizeydir. Bu dizeyin sol evriği eşsiz olup, aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$\begin{aligned}\Gamma_v(\mathbf{G}(\mathbf{U}))^{-1} &= \Gamma_{-v}(\mathbf{G}(\mathbf{U}))^T, \\ \Gamma_{-v}(\mathbf{G}(\mathbf{U}))^T \Gamma_v(\mathbf{G}(\mathbf{U})) &= \mathbf{I}_r\end{aligned}\quad (4.30)$$

(4.26) eşitliğini tüm bu inceleyişler altında,

$$\mathbf{U} = \mathbf{Y}\Gamma_{\frac{1}{2}}(\mathbf{G}(\mathbf{U}))^T \quad (4.31)$$

yazabiliriz.

Bu bölümü sonlandırmadan önce (4.18) ile verilen artık terim eşitliğini yeniden anımsayalım. Bu eşitliğin sağ yan anlatımında, amaç dizeyinin sağında ve solunda sırasıyla n_1 ve n_2 boyutlu sıfır uzayı olan dizey çarpanları bulunmaktadır. Bu, $\mathbf{A}_{1,2}$ dizeyinin sol ve sağ sıfır uzayının sırasıyla n_1 ve n_2 olarak artacağını göstermektedir. Bu ilgili ÇYÇG artık teriminin özdüzeyinde ani düşüş oluşacağını göstermektedir. Bu nedenle ÇYÇÜDG'de destek yöneyi yerine destek dizeyi kullanımı, artık dizeyin daha tez sıfırlanışını sağlar.

4.2 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Öbekçil Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÖÜDG)

Bir önceki bölümde, daha önceki çalışmalardan değişik olarak dizey tabanlı iki değişkenli ÇYÇG açılımı geliştirildi, bileşenlerinin nasıl belirleneceği ve destek dizeyleri ile ilgili ayrıntılı inceleyişe yer verildi. Bu bölümde ise dizey tabanlı iki değişkenli ÇYÇG açılımı temel alınarak Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Öbekçil Üçköşegencil Dizey Gösterilim yöntemi yapılandırılacaktır [108]. Bu amaçla (4.4) ile verilen dizey tabanlı iki değişkenli ÇYÇG açılımını yeniden ele alalım.

$$\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{U}_1 \mathbf{A}_0 \mathbf{V}_1^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{V}_1^T + \mathbf{U}_1 \mathbf{A}_2^T + \mathbf{A}^{(1)} \quad (4.32)$$

Burada (4.4) ile verilen açılım alt ve üst sırasayılar kullanılarak yeniden yazılmıştır. Altsırasayı 1 olan destek dizeyleri \mathbf{U}_1 ve \mathbf{V}_1 başlangıç destek dizeyleridir. $\mathbf{A}^{(0)}$ ve $\mathbf{A}^{(1)}$ sırasıyla ÇYÇG'deki amaç dizeyi ve artık terim olmak üzere ilerleyen incelemelerde özyineleme sayısı ile ilintili olacak olması nedeniyle üstsırasayılar ile verilmiştir. $\mathbf{A}^{(0)}$ başlangıç amaç dizeyi \mathbf{A}' 'yi artık terim olan $\mathbf{A}^{(1)}$ ise bir sonraki adımda uygulanacak ÇYÇG için başlangıç amaç dizeyini simgelemektedir.

Bu bağıntıda \mathbf{A}_0 , ÇYÇÜDG açılımındaki sayıl olan α_1 sabit teriminin dizeycil karşılığıdır. ÇYÇÜDG açılımının genişletimi olarak yeni geliştirilen bu yöntemde dizeycil yapıların ortaya çıkması gerçekleşmesi beklenen bir durumdur. \mathbf{A}_0 dizeycil yapısı için aşağıdaki yeni gösterim biçimi kullanımı yeğlenmiştir.

$$\mathbf{A}_0 \equiv \boldsymbol{\alpha}_1 \quad (4.33)$$

Burada $\boldsymbol{\alpha}_1$, ÇYÇÜDG yöntemindeki sayıl α_1 yapısının evriğine $n_1 \times n_2$ türünde bir dizeyi göstermektedir. Aslında α_1 , $\boldsymbol{\alpha}_1$ 'in çok özel durumudur. $n_1 = n_2 = 1$ durumunda $\boldsymbol{\alpha}_1$, 1×1 türünde bir dizey olup sayıla karşılık gelmektedir. Bu da ÇYÇÖÜDG'deki öbek yapısının ilk belirtkesidir.

Şimdi andıran biçimde tek değişkenli bileşenler olan \mathbf{A}_1 ve \mathbf{A}_2 'yi belirlememiz gerekmektedir. Önceki bölümden \mathbf{A}_1 ve \mathbf{A}_2 bileşenlerinin sırasıyla \mathbf{U}_1 ve \mathbf{V}_1 desteklerine öbekçil dik olarak belirlenmesi gerektiği bilinmektedir. $(\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T)$ ve $(\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1^T)$ öbekçil izdüşüm dizeyleri kullanılarak, bu dikgenlikler dizey yapılarına da yansıtılabilir. İzdüşüm dizeyleri sırasıyla n_1 ($n_1 \leq m_1$) ve n_2 ($n_2 \leq m_2$) özdüzeyli dizeyler olup tam özdüzeyli dizeyler değildirler. \mathbf{A}_1 ve \mathbf{A}_2 sırasıyla n_2 ve n_1 özdüzeyli

(tam özdeşli), düşey dikdörtgencil dizeylerdir. Önceki bölümdeki destek dizeyleri inceleyişleri \mathbf{A}_1 ve \mathbf{A}_2 'nin aşağıdaki gibi yazılabilmesine olanak sağlar.

$$\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{U}_2 \mathbf{\Gamma}_{\frac{1}{2}} (\mathbf{G}(\mathbf{A}_1))^T, \quad \mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{V}_2 \mathbf{\Gamma}_{\frac{1}{2}} (\mathbf{G}(\mathbf{A}_2))^T \quad (4.34)$$

Buradan yeni destek dizeyleri,

$$\mathbf{U}_2 \equiv \mathbf{A}_1 \mathbf{\Gamma}_{-\frac{1}{2}} (\mathbf{G}(\mathbf{A}_1)), \quad \mathbf{V}_2 \equiv \mathbf{A}_2 \mathbf{\Gamma}_{-\frac{1}{2}} (\mathbf{G}(\mathbf{A}_2)) \quad (4.35)$$

olarak elde edilir. \mathbf{U}_2 ve \mathbf{V}_2 dizeyleri, sırasıyla $m_1 \times n_1$ ve $m_2 \times n_2$ türünde olan \mathbf{U}_1 ve \mathbf{V}_1 'nin aksine $m_1 \times n_2$ ve $m_2 \times n_1$ türündedirler.

Buradan β_1 dizeyi

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{V}_1^T = \mathbf{U}_2 \beta_1 \mathbf{V}_1^T, \quad \beta_1 \equiv \mathbf{\Gamma}_{\frac{1}{2}} (\mathbf{G}(\mathbf{A}_1))^T \quad (4.36)$$

olarak elde edilir. β_1 gösterilimi, ÇYÇÜDG'deki sayısal β_1 yapısından esinlenerek kullanılmış olup andıran usbilimle katsayı dizeyini göstermektedir ve $n_2 \times n_2$ türündedir. Benzer durum aşağıda verildiği gibi γ için de geçerlidir.

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{A}_2^T = \mathbf{U}_1 \gamma_1 \mathbf{V}_2^T, \quad \gamma_1 \equiv \mathbf{\Gamma}_{\frac{1}{2}} (\mathbf{G}(\mathbf{A}_2)) \quad (4.37)$$

γ , $n_1 \times n_1$ türünde dördül bir dizeydir. α_1 , β_1 ve γ 'nin dizeycil yapıları öbek üçköşegencil yapının ilk belirtileridir. Bu katsayı dizeylerini kullanarak ÇYÇÖÜDG için ilk adım olan (4.32)'yi aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(0)} &= \mathbf{U}_1 \alpha_1 \mathbf{V}_1^T + \mathbf{U}_2 \beta_1 \mathbf{V}_1^T + \mathbf{U}_1 \gamma_1 \mathbf{V}_2^T + \mathbf{A}^{(1)} \\ &= [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$\mathbf{A}^{(1)}$ burada artık terimdir ancak bir sonraki adımda amaç dizeyi olacaktır. Bunun nedeni artık terime özyinelemeli olarak dizey tabanlı iki değişkenli ÇYÇG uygulayarak sıfırlanmasını sağlamaktır. Artık terime uygulanacak ÇYÇG için başlangıç destek dizeyleri \mathbf{U}_2 ve \mathbf{V}_2 olacaktır. Burada boyut tutarlılığını sağlayabilmek adına her özyineleme adımında n_1 ve n_2 değişimini unutmamak gerekir. Bu bağlamda artık terim

$\mathbf{A}^{(1)}$ 'in dizey tabanlı iki değişkenli ÇYÇG'si,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(1)} &= \mathbf{U}_2 \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{V}_2^T + \mathbf{U}_3 \boldsymbol{\beta}_2 \mathbf{V}_2^T + \mathbf{U}_2 \boldsymbol{\gamma}_2 \mathbf{V}_3^T + \mathbf{A}^{(2)} \\ &= [\mathbf{U}_2 \ \mathbf{U}_3] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2^T \\ \mathbf{V}_3^T \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{(2)}\end{aligned}\quad (4.39)$$

olarak elde edilir. Burada $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ ve $\boldsymbol{\gamma}_2$ sırasıyla $n_2 \times n_1$, $n_1 \times n_1$ ve $n_2 \times n_2$ türündedir.

2. adım olan bu adımda elde edilen bileşenler şu biçimdedir:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_2 &= \mathbf{U}_2 \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{V}_2^T, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\Gamma}_{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{G} \left((\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^T) \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{V}_2 \right) \right)^T, \\ \boldsymbol{\gamma}_2 &= \boldsymbol{\Gamma}_{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{G} \left((\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^T) \mathbf{A}^{(1)T} \mathbf{U}_2 \right) \right), \\ \mathbf{U}_3 &= (\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^T) \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{V}_2 \boldsymbol{\beta}_2^{-1}, \\ \mathbf{V}_3 &= (\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^T) \mathbf{A}^{(1)T} \mathbf{U}_2 \boldsymbol{\gamma}_2^{-1T},\end{aligned}\quad (4.40)$$

Elde ettiğimiz 2. özyinelemeli denklem 1. özyinelemeli denklemin bileşenleri ile ilintilidir. Bu nedenle bu özyinelemeli yapıyı daha özelsiz yapıda verebiliriz. 1. ve 2. özyineleme adımlarından j . özyinelemeli denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(j)} &= \mathbf{U}_{j+1} \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T + \mathbf{U}_{j+2} \boldsymbol{\beta}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T + \mathbf{U}_{j+1} \boldsymbol{\gamma}_{j+1} \mathbf{V}_{j+2}^T + \mathbf{A}^{(j+1)} \\ &= [\mathbf{U}_{j+1} \ \mathbf{U}_{j+2}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{j+1} & \boldsymbol{\gamma}_{j+1} \\ \boldsymbol{\beta}_{j+1} & \mathbf{0}_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{j+1}^T \\ \mathbf{V}_{j+2}^T \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{(j+1)}\end{aligned}\quad (4.41)$$

η , j 'nin tek ve çift olma durumuna göre sırasıyla $n_2 \times n_1$ ve $n_1 \times n_2$ olan dizey boyutunu göstermektedir.

Bileşenler ise,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{j+1} &= \mathbf{U}_{j+1} \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{V}_{j+1}^T, \\ \boldsymbol{\beta}_{j+1} &= \boldsymbol{\Gamma}_{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{G} \left((\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{U}_{j+1} \mathbf{U}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{V}_{j+1} \right) \right)^T, \\ \boldsymbol{\gamma}_{j+1} &= \boldsymbol{\Gamma}_{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{G} \left((\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{V}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)T} \mathbf{U}_{j+1} \right) \right), \\ \mathbf{U}_{j+2} &= (\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{U}_{j+1} \mathbf{U}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{V}_{j+1} \boldsymbol{\beta}_{j+1}^{-1}, \\ \mathbf{V}_{j+2} &= (\mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{V}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T) \mathbf{A}^{(j)T} \mathbf{U}_{j+1} \boldsymbol{\gamma}_{j+1}^{-1T}\end{aligned}\quad (4.42)$$

ile verilebilmektedir. (4.41) denklemini dizeyin türüne göre her $j > 0$ değeri için geçerlidir. Bu durum amaç dizeyi sonsuz olmadığı sürece geçerlidir. j 'nin alabileceği

değerleri daha iyi anlayabilmek adına "tam eşleşme" durumu olarak adlandıracağımız özel durumdan söz edeceğiz. Tam eşleşme durumu, amaç dizeyinin yatay ve düşey sırasayılarının n_1 ve n_2 ile orantılı olduğu durum olarak tanımlanır. $m_1 \times m_2$ türünde bir düzey için tam eşleşme durumunun sağlanması için aşağıdaki eşitliklerin sağlanması gerekir.

$$m_1 = \bar{m}_1 n_1, \quad m_2 = \bar{m}_2 n_2. \quad (4.43)$$

Tam eşleşmede, 3 değişik durum ortaya çıkarmaktadır.

- (i) Öbekçil Dördül Amaç Dizeyi: $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$ ise eş sayıda düşey ve yatay öbek içerir.
- (ii) Yatay Öbekçil Dikdörtgencil Amaç Dizeyi: $\bar{m}_1 < \bar{m}_2$ durumu olup düşey öbek sayısı yatay öbek sayısından fazladır.
- (iii) Düşey Öbekçil Dikdörtgencil Amaç Dizeyi: $\bar{m}_1 > \bar{m}_2$ durumu olup, düşey öbek sayısı yatay öbek sayısından azdır.

Yukarıdaki üç durumda da öbek yapısı $n_1 \times n_2$ türündedir. Bu öbekler $n_1 = n_2$ ise dördül, $n_1 < n_2$ ise yatay dikdörtgencil ve $n_1 > n_2$ ise düşey dikdörtgencil yapıdadır.

$\bar{m}_1 = \bar{m}_2 \equiv \bar{m}$, Tam Eşleşmenin Öbekçil Dördül durumu olup bu durumda j , 0 ile $\bar{m} - 1$ içerilmek üzere bu aralıkta değerler alır. Bu durumda \mathbf{U}_1 'den $\mathbf{U}_{\bar{m}}$ 'ye ve \mathbf{V}_1 'den $\mathbf{V}_{\bar{m}}$ 'ye \bar{m} tane destek dizeyi üretir. Ayrıca $\bar{m} - 1$ tane $\boldsymbol{\beta}$ ve $\bar{m} - 1$ tane $\boldsymbol{\gamma}$ katsayı dizeyi üretir.

Yatay ve düşey öbekçil dikdörtgencil tam eşleşme durumlarında ise $\bar{m}_1 \neq \bar{m}_2$ ve $\bar{m} \equiv \min(\bar{m}_1, \bar{m}_2)$ 'dir. Bu durumlarda $\bar{m}_2 > \bar{m}_1$ ise $\boldsymbol{\gamma}_{\bar{m}}$, $\bar{m}_2 < \bar{m}_1$ ise $\boldsymbol{\beta}_{\bar{m}}$ çekirdek dizeyine bileşen olarak eklenir.

Bu inceleyişler altında tam eşleşme durumu için aşağıdaki bağıntılandırım yazılabilir.

$$\mathbf{A} = \sum_{j=0}^{\bar{m}} \mathbf{U}_{j+1} \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T + \sum_{j=0}^{J_{\beta}} \mathbf{U}_{j+2} \boldsymbol{\beta}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T + \sum_{j=0}^{J_{\gamma}} \mathbf{U}_{j+1} \boldsymbol{\gamma}_{j+1} \mathbf{V}_{j+2}^T \quad (4.44)$$

Burada toplam dizilerinin üst sınırları aşağıdaki gibi belirlenir.

$$J_{\beta} \equiv \begin{cases} \bar{m}_1 - 1 & \text{for } \bar{m}_2 \geq \bar{m}_1 \\ \bar{m}_1 & \text{for } \bar{m}_1 > \bar{m}_2 \end{cases} \quad J_{\gamma} \equiv \begin{cases} \bar{m}_1 - 1 & \text{for } \bar{m}_1 \geq \bar{m}_2 \\ \bar{m}_1 & \text{for } \bar{m}_2 > \bar{m}_1 \end{cases} \quad (4.45)$$

Benzer inceleyişler tam eşleşme olmayan durumlar için de yapılabilir. $m_1 \times m_2$ türünde bir amaç dizeyi bu tür durumlar için n_1 ve n_2 türünden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m_1 = \bar{m}_{1,1}(n_1 + n_2) + \bar{m}_{1,2}n_1 + r_1, \quad m_2 = \bar{m}_{2,1}(n_2 + n_1) + \bar{m}_{2,2}n_2 + r_2 \quad (4.46)$$

Burada r_1 ve r_2 , n_1 ve n_2 sayılarının her ikisine de tam bölünemeyeni (kalanı) göstermektedir. Tek sayılı özyineleme adımlarında artık terimin sol ve sağ sıfır uzaylarında sırası ile n_1 ve n_2 boyutlu artış sözkonusu iken çift sayılı özyineleme adımlarında n_2 ve n_1 boyutlu artış sözkonusudur. Yatay ve düşey dikdörtgencil düzey durumları için sırasıyla sol ve sağ sıfır uzaylarında artışı sürdürmek olanaklıdır. Ancak r_1 ve r_2 'nin sırasıyla n_1 ve n_2 'den küçük kaldığı adıma kadar özyineleme sürdürülebilir. Bu nedenle bu tür durumlarda artık terim sıfırlanması sözkonusu olmayıp son adımda artık düzey n_1 ve n_2 'den daha küçük özdüzeğe sahiptir. Buna bağlı olarak tam eşleşme durumu gerçekleşmediği için asıl düzey tam olarak anlatılamaz, yaklaşık olarak belirlenir.

Yaklaşım niteliğini ölçmek amacı ile bu çalışmada düzeylerin Frobenius boy tanımı kullanılmıştır. Frobenius boy tanımı bir düzeyin devriği ile kendisinin çarpımının izi olarak tanımlanır. Yaklaşım niteliği ölçeni tanımlayabilmek amacı ile öncelikle kesme yaklaşımını tanımlayacak olursa,

$$\mathbf{T}_k = \sum_{j=0}^k \left(\mathbf{U}_{j+1} \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T + \mathbf{U}_{j+2} \boldsymbol{\beta}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T + \mathbf{U}_{j+1} \boldsymbol{\gamma}_{j+1} \mathbf{V}_{j+2}^T \right). \quad (4.47)$$

k . kesme yaklaşımını yukarıdaki gibi belirlenir. Buradan boy belirleyebilmek amacı ile,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k &= \sum_{j_1=0}^k \left(\mathbf{U}_{j_1+1} \boldsymbol{\alpha}_{j_1+1} \mathbf{V}_{j_1+1}^T + \mathbf{U}_{j_1+2} \boldsymbol{\beta}_{j_1+1} \mathbf{V}_{j_1+1}^T + \mathbf{U}_{j_1+1} \boldsymbol{\gamma}_{j_1+1} \mathbf{V}_{j_1+2}^T \right)^T \\ &\quad \times \sum_{j_2=0}^k \left(\mathbf{U}_{j_2+1} \boldsymbol{\alpha}_{j_2+1} \mathbf{V}_{j_2+1}^T + \mathbf{U}_{j_2+2} \boldsymbol{\beta}_{j_2+1} \mathbf{V}_{j_2+1}^T + \mathbf{U}_{j_2+1} \boldsymbol{\gamma}_{j_2+1} \mathbf{V}_{j_2+2}^T \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

yazılabilir. Burada sağ yanda 9 tane toplam bulunmakta ve bu toplamdaki toplananların yapısı $\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$ türünde olup \mathbf{U} ve \mathbf{V} 'ler sırası ile sol ve sağ destek düzeylerini içermektedir. $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ ve $\boldsymbol{\gamma}$ 'lardan oluşan $\boldsymbol{\Sigma}$ ise çekirdek düzeydir.

$(\bar{\mathbf{U}}\boldsymbol{\Sigma}_1\bar{\mathbf{V}})^T \times (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}_2\mathbf{V})$ çarpımının, \mathbf{U} düzeyi $\bar{\mathbf{U}}$ 'ye öbekçil dik olduğu sürece sıfırlandığı açıktır. Bu (4.48)'nin aşağıdaki gibi yalın bir biçimde yazılmasına olanak sağlar.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k &= \sum_{j=0}^k \mathbf{V}_{j+1} \boldsymbol{\alpha}_{j+1}^T \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T + \sum_{j=0}^k \mathbf{V}_{j+1} \boldsymbol{\beta}_{j+1}^T \boldsymbol{\beta}_{j+1} \mathbf{V}_{j+1}^T \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \mathbf{V}_{j+2} \boldsymbol{\gamma}_{j+1}^T \boldsymbol{\gamma}_{j+1} \mathbf{V}_{j+2}^T \end{aligned} \quad (4.49)$$

Buradan Frobenius boy dördül,

$$\|\mathbf{T}_k\|_{Fr}^2 \equiv Tr(\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k) = \sum_{j=0}^k \left(\|\boldsymbol{\alpha}_{j+1}\|_{Fr}^2 + \|\boldsymbol{\beta}_{j+1}\|_{Fr}^2 + \|\boldsymbol{\gamma}_{j+1}\|_{Fr}^2 \right) \quad (4.50)$$

olarak belirlenir. Bu inceleyişler yaklaştırım niteliği ölçenini aşağıdaki gibi tanımlamamızı sağlar.

$$q_k \equiv \frac{\|\mathbf{T}_k\|^2}{\|\mathbf{A}\|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.51)$$

q_k 'lar, k arttıkça üst sınırı 1 olan artan bir sayı dizisi oluşturur. Tam eşleşme olmayan durumlarda artık terim kaldığı için üst sınır olan 1'e ulaşamaz. Artık terimin sıfırlandığı durumlarda 1 değerine erişilir.

4.3 ÇYÇÖÜDG Uygulamaları

Bu bölümde, tam eşleşme ÇYÇÖÜDG yönteminin omurgasını oluşturduğu için ÇYÇÖÜDG'nin tam eşleşme durumuna dayalı uygulamalar ile ilgileneceğiz.

Yöntemi sınamak ve doğruluğunu göstermek adına küçük boyutta dizeler ile çalışacağız. Bu nedenle öncelikle 2×2 türünde bir dizeyle ele alarak ÇYÇÖÜDG uygulayacağız. Burada 2×2 türünde dize için destek dizelerinin seçimi için 4 değişik durum söz konusudur. Bunlar sırasıyla,

- (i) 2×1 türünde sol ve sağ destek yöneyler
- (ii) 2×2 türünde sol destek dizeyi, 2×1 türünde sağ destek yöneyi
- (iii) 2×1 türünde sol destek yöneyi, 2×2 türünde sağ destek dizeyi
- (iv) 2×2 türünde sol ve sağ destek dizeleri

(i) durumu ÇYÇÖÜDG yönteminin özüdür ve en yalın durumdur. Bu durum için sol ve sağ destek yöneylerini $\mathbf{u}_1^{(i)}$ ve $\mathbf{v}_1^{(i)}$ olarak gösterirsek, 2×2 türünde dizeyin iki değişkenli ÇYÇG açılımı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{A} = \alpha_1^{(i)} \mathbf{u}_1^{(i)} \mathbf{v}_1^{(i)T} + \mathbf{a}_1^{(i)} \mathbf{v}_1^{(i)T} + \mathbf{u}_1^{(i)} \mathbf{a}_2^{(i)} + \mathbf{A}_{1,2}^{(i)} \quad (4.52)$$

Burada üst sırasayı olan (i), yukarıda saydığımız durumlardan ilkinini betimlemektedir. ÇYÇĞ bileşenleri daha önceki inceleyişlerden bildiğimiz gibi

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{(i)} &= \mathbf{u}_1^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{v}_1^{(i)}, \\
\mathbf{a}_1^{(i)} &= \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{u}_1^{(i)} \mathbf{u}_1^{(i)T} \right) \mathbf{A} \mathbf{v}_1^{(i)}, \\
\mathbf{a}_2^{(i)} &= \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{v}_1^{(i)} \mathbf{v}_1^{(i)T} \right) \mathbf{A}^T \mathbf{u}_1^{(i)}, \\
\mathbf{A}_{1,2}^{(i)} &= \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{u}_1^{(i)} \mathbf{u}_1^{(i)T} \right) \mathbf{A} \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{v}_1^{(i)} \mathbf{v}_1^{(i)T} \right)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

biçimindedir. Aynı zamanda \mathbf{a}_1 ve \mathbf{a}_2 bileşenlerinin sırasıyla $\mathbf{u}_1^{(i)}$ ve $\mathbf{v}_1^{(i)}$ 'e dik olarak belirlenmekteydi. Bu temelde,

$$\mathbf{a}_1^{(i)} \equiv \beta_1^{(i)} \mathbf{u}_2^{(i)}, \quad \mathbf{a}_2^{(i)} \equiv \gamma_1^{(i)} \mathbf{v}_2^{(i)} \tag{4.54}$$

eşitlikleri yazılabilir ve burada β_1 ve γ_1 aşağıdaki gibi verilir.

$$\beta_1^{(i)} \equiv \left\| \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{u}_1^{(i)} \mathbf{u}_1^{(i)T} \right) \mathbf{A} \mathbf{v}_1^{(i)} \right\|, \quad \gamma_1^{(i)} \equiv \left\| \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{v}_1^{(i)} \mathbf{v}_1^{(i)T} \right) \mathbf{A}^T \mathbf{u}_1^{(i)} \right\| \tag{4.55}$$

Bilimsel yazımdan doğrucul yöney uzaylarının birim boylu dikgen taban takımı oluşturan yöneylerinin, o uzaydaki birim düzeyin özyöneylelerine denk olduğu bilinir. Bu bilgi ile aşağıdaki izgecil gösterimler yazılabilir.

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{u}_1^{(i)} \mathbf{u}_1^{(i)T} + \mathbf{u}_2^{(i)} \mathbf{u}_2^{(i)T}, \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{v}_1^{(i)} \mathbf{v}_1^{(i)T} + \mathbf{v}_2^{(i)} \mathbf{v}_2^{(i)T} \tag{4.56}$$

Bu destek yöneyleri türünden artık terim,

$$\mathbf{A}_{1,2}^{(i)} = \alpha_2^{(i)} \mathbf{u}_2^{(i)} \mathbf{v}_2^{(i)T}, \quad \alpha_2^{(i)} \equiv \mathbf{u}_2^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{v}_2^{(i)}. \tag{4.57}$$

Tüm bu bağıntılandırmalar \mathbf{A} dizeyinin aşağıdaki gibi yazılmasına olanak sağlar.

$$\mathbf{A} = \alpha_1^{(i)} \mathbf{u}_1^{(i)} \mathbf{v}_1^{(i)T} + \beta_1^{(i)} \mathbf{u}_2^{(i)} \mathbf{v}_1^{(i)T} + \gamma_1^{(i)} \mathbf{u}_1^{(i)} \mathbf{v}_2^{(i)T} + \alpha_2^{(i)} \mathbf{u}_2^{(i)} \mathbf{v}_2^{(i)T} \tag{4.58}$$

Daha tıkız bir gösterim ile (çarpanlara ayrılmış yapısı)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{(i)} \boldsymbol{\Sigma}_{(i)} \mathbf{V}^{(i)} \tag{4.59}$$

olarak verilir. Burada

$$\mathbf{U}^{(i)} \equiv \left[\mathbf{u}_1^{(i)} \quad \mathbf{u}_2^{(i)} \right]^T, \quad \mathbf{V}^{(i)} \equiv \left[\mathbf{v}_1^{(i)} \quad \mathbf{v}_2^{(i)} \right]^T, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{(i)} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} & \gamma_1^{(i)} \\ \beta_1^{(i)} & \alpha_2^{(i)} \end{bmatrix}. \tag{4.60}$$

(4.58) ve (4.59) 2×2 türündeki dizeyin ÇYÇÖÜDG açılımının tümü olup aslında destek yöneyleri kullanıldığı için ÇYÇÜDG'nin özüne karşılık gelmektedir. $\mathbf{u}_1^{(i)}$ ve $\mathbf{v}_1^{(i)}$, \mathbf{A} dizeyinin sol ve sağ tekil yöneyleri olarak alındığında, $\mathbf{\Sigma}$ çekirdek dizeyinin köşegencil dizey olacağı anlaşılmaktadır. $\mathbf{u}_2^{(i)}$ and $\mathbf{v}_2^{(i)}$, de \mathbf{A} dizeyinin diğer sol ve sağ tekil yöneyleridir. Tüm bunlar Tekil Değer Ayrıştırımının ÇYÇÜDG yöntemindeki çekirdek dizeyinin kısıtlanmış biçimi olduğunu göstermektedir.

Şimdi (ii) ile verilen sol ve sağ desteklerin sırasıyla 2×2 ve 2×1 türünde olduğu durumu ele alalım. Bu durum için ÇYÇG açılımı

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1^{(ii)} \mathbf{A}_0^{(ii)} \mathbf{v}_1^{(ii)T} + \mathbf{A}_1^{(ii)} \mathbf{v}_1^{(ii)T} + \mathbf{U}_1^{(ii)} \mathbf{A}_2^{(ii)T} + \mathbf{A}_{1,2}^{(ii)} \quad (4.61)$$

olarak verilir. (ii) üst indisi ÇYÇÖÜDG için durumu göstermektedir. Bu açılım için sıfırlanım koşulları,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1^{(ii)T} \mathbf{A}_1^{(ii)} &= \mathbf{0}_{2 \times 1}, & \mathbf{v}_1^{(ii)T} \mathbf{A}_2^{(ii)} &= \mathbf{0}_{1 \times 2}, \\ \mathbf{U}_1^{(ii)T} \mathbf{A}_{1,2}^{(ii)} &= \mathbf{0}_{2 \times 2}, & \mathbf{v}_1^{(ii)T} \mathbf{A}_{1,2}^{(ii)} &= \mathbf{0}_{2 \times 2}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

olarak verilir. Birinci ve üçüncü koşullar, sol destek dizeyinin özdüzeyi 2 olduğu için $\mathbf{A}_1^{(ii)}$ ve $\mathbf{A}_{1,2}^{(ii)}$ 'nin öxdeş olarak sıfır olduğu anlamına gelir. Bu koşullar altında bileşenler,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^{(ii)} &= \mathbf{U}_1^{(ii)T} \mathbf{A} \mathbf{v}_1^{(ii)}, & \mathbf{A}_1^{(ii)} &= \mathbf{0}_{2 \times 1}, \\ \mathbf{A}_2^{(ii)} &= \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{v}_1^{(ii)} \mathbf{v}_1^{(ii)T} \right) \mathbf{A}^T \mathbf{U}_1^{(ii)}, & \mathbf{A}_{1,2}^{(ii)} &= \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{aligned} \quad (4.63)$$

eşitlikleri ile verilir. $\mathbf{U}_1^{(ii)}$ 'in öbekçil birimboyluluk özelliği kullanılarak yazılır. Aşağıdaki izgecil gösterim aracılığıyla

$$\mathbf{I}_2 - \mathbf{v}_1^{(ii)} \mathbf{v}_1^{(ii)T} = \mathbf{v}_2^{(ii)} \mathbf{v}_2^{(ii)T} \quad (4.64)$$

$\mathbf{A}_2^{(ii)}$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{A}_2^{(ii)} = \mathbf{v}_2^{(ii)} \mathbf{v}_2^{(ii)T} \mathbf{A}^T \mathbf{U}_1^{(ii)} \quad (4.65)$$

Aşağıdaki tanımlamalar ile,

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{(ii)} \equiv \mathbf{A}_0^{(ii)}, \quad \mathbf{A}_2^{(ii)} = \mathbf{v}_2^{(ii)} \boldsymbol{\gamma}_1^{(ii)T}, \quad \boldsymbol{\gamma}_1 \equiv \mathbf{U}_1^{(ii)T} \mathbf{A} \mathbf{v}_2^{(ii)} \quad (4.66)$$

\mathbf{A} dizeyinin ÇYÇÖÜDG açılımı,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1^{(ii)} \boldsymbol{\alpha}_1^{(ii)} \mathbf{v}_1^{(ii)T} + \mathbf{U}_1^{(ii)} \boldsymbol{\gamma}_1^{(ii)} \mathbf{v}_2^{(ii)T} = \mathbf{U}_1^{(ii)} \mathbf{\Sigma}^{(ii)} \mathbf{V}_1^{(ii)T} \quad (4.67)$$

olarak verilir. Burada $\mathbf{V}_1^{(ii)}$ destek dizeyi 2×2 türünde olup düşey sıraları sırasıyla $\mathbf{v}_1^{(ii)}$ ve $\mathbf{v}_2^{(ii)}$, dir. Ayrıca $\Sigma_{(ii)}$ 'nin birinci düşey sırasını $\alpha_1^{(ii)}$, ikinci düşey sırasını ise $\gamma_1^{(ii)}$ oluşturmaktadır.

(iii) durumu ise (ii) durumunu andıran yapıda olup sağ ve sol yanın desteklerinin yer değiştirilmesiyle elde edilecek durumdur. (ii) yapısından yola çıkarak (iii) için ÇYÇÖÜDG açılımı aşağıdaki gibi verilir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1^{(iii)} \alpha_1^{(iii)} \mathbf{V}_1^{(iii)T} + \mathbf{u}_2^{(iii)} \beta_1^{(iii)T} \mathbf{V}_1^{(2)T} = \mathbf{U}_1^{(iii)} \Sigma_{(iii)} \mathbf{V}_1^{(iii)T} \quad (4.68)$$

Burada $\alpha_1^{(iii)}$ ve $\beta_1^{(iii)}$, 1×2 türündedir. Çekirdek dizey $\Sigma_{(iii)}$ 'ün sırasıyla $\alpha_1^{(iii)}$ ve $\beta_1^{(iii)}$ yataysıralarını oluşturmaktadır.

(iv) durumu ise en yalın durum olup aşağıdaki gibi verilir:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1^{(iv)} \alpha_1^{(iv)} \mathbf{V}_1^{(iv)T} \quad (4.69)$$

Burada $\alpha_1^{(iv)}$, $\mathbf{U}_1^{(iv)}$ ve $\mathbf{V}_1^{(iv)}$, 2×2 türünde dizelerdir.

Buraya kadar ÇYÇÖÜDG yönteminin yapısını daha iyi irdeleyebilmek adına 2×2 türünde bir dizey için tüm durumların açık yapısını incelemiş olduk. Şimdi bu durumlar ile ilgili yöntemi doğrulayan uygulamalar vereceğiz. Bu amaçla öncelikle öz dizeyi 2 olan aşağıdaki 2×2 türündeki dizeyi ele alalım.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Burada ÇYÇÖÜDG yönteminin yukarıda belirtilen (iv) durum için açık yapısı verilmiştir. Bu durum için daha önceki yaptığımız incelemişlerden \mathbf{A} 'yı tam olarak anlatabilmek için α dizeyini belirlememiz yeterli olacaktır. \mathbf{A} dizeyi için elde edilen ÇYÇÖÜDG açık olarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \alpha \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 0.3939 & 0.9191 \\ 0.9191 & -0.3939 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.4627 & 0.1457 \\ 0.0728 & -0.3642 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5547 & 0.8321 \\ 0.8321 & -0.5547 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Burada \mathbf{U} ve \mathbf{V} destek dizeyleri olup öbekçil birimboylu dikgen dizelerdir.

Aynı dizey için TDA açılımı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} -0.4046 & -0.9145 \\ -0.9145 & 0.4046 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.4650 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.3660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5760 & -0.8174 \\ 0.8174 & -0.5760 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

ÇYÇÖÜDG ile TDA sonucu karşılaştırıldığında TDA yönteminin köşegencilik nedeni ile daha üstün olduğu açıkça görülmektedir. Ancak burada unutulmaması gereken nokta ise, ÇYÇÖÜD yönteminin tek adımda ilk özdeğeri bulduğu ve dizey evrik alma işlemi gerçekleştirmemesi ve boyut arttıkça yöntemin getirisinin ortaya çıktığı gerçeğidir.

Tam eşleşmenin diğer durumları için açık anlatımlar burada verilmemiş olup tüm durumları bir arada inceleyebilmek adına nitelik ölçenleri aracılığı ile tüm durumlar için sonuçlar Çizelge 4.1 ile verilmiştir. Çizelgede nitelik ölçenleri α , β ve γ türünden verilmiştir. İki destek yöneyi kullanılan (i) durumu için sonuçlar 1. düşey sırada verilmiştir. Daha öncede belirttiğimiz gibi bu durum ÇYÇÜDG yönteminin özüdür. (4.58) ile açık yapısı verilen eşitlikten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ve γ_1 sayıllarının tümü belirlendiğinde dizey tam olarak gösterilir. Ancak her bir sayıl ile elde edilen yaklaşırtırımın niteliğini göstermek amacıyla Çizelge 4.1’de tümü verilmiştir. $q_{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2)}$ değerinin 1 olması tam gösterilim nedeniyle beklenen durumdur.

(ii) durumunda (4.67)’de elde edildiği gibi yalnızca α ve γ belirlemek gerekli iken, (iii) durumunda α, β belirlemek gerekmektedir. (iv) durumu için ise yukarıda açık yapısı verildiği üzere yalnızca α belirlemek yeterlidir. Burada nitelik ölçeni ile ilgili olarak,

Çizelge 4.1 : (4.70) dizeyi için ÇYÇÖÜDG nitelik ölçen sonuçları

Durumlar	$\mathbf{U} \rightarrow 2 \times 1$	$\mathbf{U} \rightarrow 2 \times 2$	$\mathbf{U} \rightarrow 2 \times 1$	$\mathbf{U} \rightarrow 2 \times 2$
Nitelik Ölçenleri	$\mathbf{V} \rightarrow 2 \times 1$	$\mathbf{V} \rightarrow 2 \times 1$	$\mathbf{V} \rightarrow 2 \times 2$	$\mathbf{V} \rightarrow 2 \times 2$
$q_{(\alpha_1)}$	0.9947	0.9949	0.9954	1.0000
$q_{(\alpha_1, \beta_1)}$	0.9949	-	1.0000	-
$q_{(\alpha_1, \gamma_1)}$	0.9954	1.0000	-	-
$q_{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}$	0.9956	-	-	-
$q_{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2)}$	1.0000	-	-	-

$q_{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}$ değerinin (4.51) ile verilen tanım gereği q_0 ’e eşit olduğunu vurgulamak gerekmektedir. Çizelge 4.1’de nitelik ölçenini bu biçimde yazmamızın nedeni dizey boyutunun düşük olması nedeniyle ayrıntılı inceleme yapılmasıdır.

Boyutu biraz daha arttırıp, 4×4 türünde tam özüzeyli aşağıdaki dizeyi ele alalım.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 23 & 14 & 15 & 26 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Bu dizey için yalnızca (iv) durumu ile ilgileneceğiz. (4.73) ile verilen dizeye 4×2 türünde \mathbf{U} ve \mathbf{V} destek dizeyleri olarak ÇYÇÖÜDG uygularsak, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ve α_2 belirlememiz gerekmektedir. Burada bir diğer önemli nokta ise 2 öz yineleme adımı uygulama gerekliliğinden dolayı başlangıç destek dizyelerine öbekçil dik yeni dizyeler belirlenmiştir. ÇYÇÖÜDG tıkız gösterilimi aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Çizelge 4.2'de (4.73) dizeyi için yaklaştırım niteliği ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 4.2 : (4.73) dizeyi için ÇYÇÖÜDG nitelik ölçen sonuçları

$q(\alpha_1)$	$q(\alpha_1, \beta_1)$	$q(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$	$q(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2)$
0.9962	0.9972	0.9979	1.0000

Bir diğer uygulama için, aşağıda verilen 6×6 türünde öz düzeyi 6 olan dizey ele alalım.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 23 & 14 & 15 & 26 & 27 \\ 7 & 14 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 25 & 26 & 27 & 29 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Başlangıç destek dizyeleri 4×2 türünde seçilmiştir. Bu durumda dizeyi tam olarak temsil edebilmek için 3 öyineleme adımı gereklidir. Son öyineleme adımında sadece α belirlenmektedir. (4.75) için tıkız gösterilim,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2 \ \mathbf{U}_3] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \mathbf{0} \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \mathbf{0} & \beta_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \\ \mathbf{V}_3^T \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

şeklinde ve sonuçlar Çizelge 4.3 ile verilmiştir. Bu çizelgede yaklaştırım niteliği öz yineleme sayısına göre verilmiş olup ayrıntılandırılmamıştır.

Çizelge 4.3 : (4.75) dizeyi için ÇYÇÖÜDG nitelik ölçen sonuçları

q_0	q_1	q_2
0.99521	0.99991	1.0000

5. KATLIDİZEY VE KATLIYÖNEYLER

5.1 Katlıdizeler ve Katlıyöneyleler

Çokyönlü diziler, öğeleri, birden çok sayıda da olabilen, altsırasayılarla tanımlanan, öğeler topluluğu olarak bilinir. Her bir altsırasayı ayrı bir yön tanımlar ve bu yönlerin birbirine dik doğrularla betimlendiği düşünülür. Bu bağlamda, sıradan doğrucul cebirin yöneyleleri (vektörleri) “bir yönlü”, dizeyleri (matrisleri) ise “iki yönlü” dizilere karşılık gelir. Dizelerde dönüşüm niteliği de vardır ve yataysıralar dizeyin tanım uzayında bir takım doğrultulara izdüşüm gerçekleştiren öğelerdir. Bunların her birinin tanımladığı izdüşüm bileşeni dizeyin düşey sıralarının nasıl doğrucul birleştirim oluşturacağını eşsiz biçimde belirler. Bu doğrucul birleştirim ise dönüşüm sonrası, dizeyin değer uzayında, bir doğrultu tanımlar. Bu durumda, dizey öğelerinin birinci altsırasayısı değer uzayındaki doğrultu ile ilintilendirilebilirken, ikinci altsırasayı tanım uzayından dönüşümü sağlayan öğe olarak düşünülebilir.

Katlıdizey, sıradan doğrucul cebirdeki dizeyin kavramcıl genişletimidir. Böyle bir dizeyin öğelerindeki altsırasayılardan bir kesimi bir çokyönlü diziler tanım uzayıyla ilintilendirilirken; kalan kesimi çokyönlü diziler değer uzayıyla ilintilendirilir. Bu tanım, Demiralp ve BEBBYT topluluğunca gündeme getirilmiş ve kullanıma açılmıştır [67, 76, 77, 108–112].

Savın bu bölümünde katlıdizey ve katlıyöneylelerin kavramcıl yapısı açık bir biçimde verilecektir.

5.1.1 Katlıdizeler (Folded matrices)

Katlıdizey aslında düşey sıraları ve yatay sıraları katlanmış bir dizey olarak tanımlanabilir ve katlıdizey aşağıdaki gibi verilir:

$$\mathbf{A}_{G_L:G_R} \equiv \left[A_{(i):(j)} \right]_{\forall(i) \in G_L \downarrow}^{\forall(j) \in G_R \rightarrow}, \quad L \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad R \equiv J_1 \times \cdots \times J_n, \quad (5.1)$$

Burada, (i) ve (j) aşağıdaki sıralı çokluları göstermektedir.

$$(i) \equiv (i_1, \dots, i_m), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (j) \equiv (j_1, \dots, j_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

Burada, sıralı çoklulardaki i_k , ve j_ℓ altsırasayılar olup, sırasıyla 1'den I_k 'ya ve 1'den J_ℓ 'ye kadar tamsayı değerler almaktadır. I_k ve J_ℓ 'ler her bir yönde kaç tane öge (düğüm) olduğunu göstermektedir.

Yukarıda (i) ve (j) ile verilen örgüleri G_L ve G_R olarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$G_L \equiv \mathbb{Z}_{I_1}^+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_{I_m}^+ \quad (5.3)$$

$$G_R \equiv \mathbb{Z}_{J_1}^+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_{J_n}^+ \quad (5.4)$$

Burada, $I > 0$ tamsayısı \mathbb{Z}_I^+ sonlu kümesi üzerinde değerler almaktadır. Andıran biçimde $J > 0$ tamsayısı \mathbb{Z}_J^+ sonlu kümesi üzerinde değerler almaktadır. Bu örgüleri, kümelerin ortak özellik yöntemi ile gösterimini kullanarak aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$G_L \equiv \left\{ (i_1, \dots, i_m) \mid i_p \in \mathbb{Z}_{I_p}^+, p \in \mathbb{Z}_m^+ \right\} \quad (5.5)$$

$$G_R \equiv \left\{ (j_1, \dots, j_n) \mid j_p \in \mathbb{Z}_{J_p}^+, p \in \mathbb{Z}_n^+ \right\}. \quad (5.6)$$

G_L ve G_R sırasıyla m ve n ögeli kümelerdir. Burada m ve n aynı zamanda G_L ve G_R 'nin bulunduğu Kartezyen uzayın boyutunu da göstermektedir. Aynı zamanda bu sayılar doğrusal cebirdeki dizelerin düşey ve yatay sıra yönündeki katlayış düzeylerini de göstermektedir. Dizey özelliklerinden yararlanmak amacıyla gösterim olarak yukarıda verilen G_L ve G_R tanımlamalarını kullanmayı yeğliyoruz.

5.1.2 Katlıyöneyle (Folded vectors)

Sıradan doğrucul cebirde yöneyin, dizelerin düşey sıra ögesi olduğu düşüncesi ile katlıyöney tanımı yapılacak olursa, bir katlıyöney katlıdizeyde $n = 0$ olduğu durum olarak verilebilir. Katlıyöneylelerin genel yapısı $a_{(i)}$; olarak verilir. Burada (i), G_t örgüsüne aittir ve $t \equiv I_1 \times \cdots \times I_m$ dir. Daha önce de sözünü ettiğimiz gibi kısa gösterim olarak \mathbf{a}_{G_t} ; $t \equiv I_1 \times \cdots \times I_m$ kullanacağız. Burada m örgü boyutunu nitelendirmekte olup, özel olarak $m = 1$ alındığında doğrucul cebirin yöneylerini verir. Bu bağlamda katlıyöney tanımı,

$$\mathbf{a}_{G_t}; = [a_{(i)};]_{\forall (i) \in G_t \downarrow}, \quad t \equiv I_1 \times \cdots \times I_m \quad (5.7)$$

olarak verilir. Burada m katlıyöneylein katlılık düzeyidir.

5.1.3 Katlıdizelerde ve katlıyöneyleerde devriklik

Yukarda verilen tanımlamalar altında bir katlıyöneyle devriği aşığıdaki gibi verilir.

$$\mathbf{a}_{G_t}^T \equiv \mathbf{a}_{;G_t}, \quad t \equiv I_1 \times \cdots \times I_m \quad (5.8)$$

$$\mathbf{a}_{G_t}^T \equiv [a_{;(i)}]_{\forall(i) \in G_t \rightarrow}, \quad t \equiv I_1 \times \cdots \times I_m \quad (5.9)$$

Katlıdizeyle devriği ise,

$$\mathbf{A}_{G_{t_1};G_{t_2}}^T \equiv \mathbf{A}_{G_{t_2};G_{t_1}}, \quad t_1 \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad t_2 \equiv J_1 \times \cdots \times J_n \quad (5.10)$$

$$\mathbf{A}_{G_{t_1};G_{t_2}}^T \equiv [A_{(j);(i)}]_{\forall(j) \in G_{t_2} \downarrow}^{\forall(i) \in G_{t_1} \rightarrow}, \quad t_1 \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad t_2 \equiv J_1 \times \cdots \times J_n \quad (5.11)$$

olarak verilir. Sıradan cebirdeki dizelerin devrik tanımı burada da andıran yapıda özünü göstermektedir. Devriği alınan bir katlıdizeyle sağ ve sol örgülerinin yer değıştirdiği görünmektedir.

5.1.4 Katlıdizelerin çarpımı

Katlıdizelerin en önemli özelliği, yapıları nedeniyle dizey cebri özelliklerini çok yönlü dizilere aktararak çok yönlü diziler ile dizeler arasında andırım kurmasıdır. Bu andırım çok yönlü dizilerin ikili altsırasayı topluluğuna ayrılması ile kurulmaktadır. Bu ikili ayrıştırım özelliğine dayanarak iki katlıdizeyle çarpımı aşığıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{C}_{G_L^{(m)};G_R^{(n)}} = \mathbf{A}_{G_L^{(m)};G_M^{(p)}} \mathbf{B}_{G_M^{(p)};G_R^{(n)}} \\ L \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad R \equiv J_1 \times \cdots \times J_n, \quad M \equiv K_1 \times \cdots \times K_p \quad (5.12)$$

Bu çarpımın açık yapısı,

$$C_{(i);(j)} = \sum_{(k) \in G_M} A_{(i);(k)} B_{(k);(j)}, \quad (i) \in G_L, \quad (j) \in G_R \quad (5.13)$$

ile verilir. Burada dizey cebirinde olduğu gibi çarpımın gerçekleştirilebilmesi için 1. çarpanın sağ örgüsü ile 2. çarpanın sol örgüsünün örtüşmesi gerektiği görünmektedir.

Katlıdizelerin çarpım tanımından yola çıkarak bir katlıdizeyle ile katlıyöneyle çarpımını da gündeme getirmek olanaklıdır. Bu bağlamda katlıdizeyle ve katlıyöneyle çarpımı aşığıdaki gibi verilir.

$$\mathbf{c}_{G_L}; = \mathbf{A}_{G_L;G_R} \mathbf{b}_{G_R};, \quad L \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad R \equiv J_1 \times \cdots \times J_n \quad (5.14)$$

$$c_{(i)} = \sum_{(j) \in G_R} A_{(i);(j)} b_{(j)}, \quad (i) \in G_L \quad (5.15)$$

5.1.5 Katlıdizelerde iç çarpım, boy ve iz

İki katlıdizey arasında iç çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\mathbf{A}_{G_L;G_R}, \mathbf{B}_{G_L;G_R}) = \sum_{\substack{(i) \in G_L \\ (j) \in G_R}} A_{(i);(j)} B_{(i);(j)}, \quad L \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad R \equiv J_1 \times \cdots \times J_n \quad (5.16)$$

Burada iç çarpımın gerçekleştirilebilmesi için iç çarpıma giren katlıdizelerin aynı türden olması gerekmektedir.

İç çarpım aracılığıyla boy tanımı dizey cebirinde olduğu gibi katlıdizelerde de özünü göstermektedir. Bu bağlamda bir katlıdizeyin boyu,

$$\|\mathbf{A}_{G_L;G_R}\| \equiv (\mathbf{A}_{G_L;G_R}, \mathbf{A}_{G_L;G_R})^{\frac{1}{2}}, \quad L \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad R \equiv J_1 \times \cdots \times J_n \quad (5.17)$$

olarak verilir. İz tanımı ise şu biçimdedir:

$$Tr(\mathbf{A}_{G_L;G_L}) = \sum_{(i) \in G_L} A_{(i);(i)}, \quad L \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad R \equiv J_1 \times \cdots \times J_n \quad (5.18)$$

Burada sağ ve sol örgülerin aynı olduğu durum için tanım verilmiştir. Sağ ve sol örgülerin değişik olduğu durumlarda da iz tanımı yapmak olanaklıdır. İç çarpım tanımı iz tanımı aracılığıyla da tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{G_L;G_R}, \mathbf{B}_{G_L;G_R}) &\equiv Tr(\mathbf{A}_{G_L;G_R}^T \mathbf{B}_{G_L;G_R}) \\ &\equiv Tr(\mathbf{B}_{G_L;G_R}^T \mathbf{A}_{G_L;G_R}) \end{aligned}$$

$$L \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad R \equiv J_1 \times \cdots \times J_n \quad (5.19)$$

Bu tanım aracılığıyla boy dördül tanımı da aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{G_L^{(m)};G_R^{(n)}}\|^2 &\equiv Tr\left(\mathbf{A}_{G_L^{(m)};G_R^{(n)}}^T \mathbf{A}_{G_L^{(m)};G_R^{(n)}}\right) \\ &\equiv Tr\left(\mathbf{A}_{G_L^{(m)};G_R^{(n)}} \mathbf{A}_{G_L^{(m)};G_R^{(n)}}^T\right) \end{aligned}$$

$$L \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad R \equiv J_1 \times \cdots \times J_n \quad (5.20)$$

5.1.6 Katlıdizelerde dış çarpım

İki katlıyöney arasında \bullet simgesi kullanılarak dış çarpım tanımı gündeme getirilebilir. İki katlıyöneyin dış çarpımı,

$$\mathbf{C}_{G_{t_1};G_{t_2}} = \mathbf{a}_{G_{t_1}}; \bullet \mathbf{b}_{G_{t_2}}, \quad t_1 \equiv I_1 \times \cdots \times I_m, \quad t_2 \equiv J_1 \times \cdots \times J_n \quad (5.21)$$

$$C_{(i);(j)} = a_{(i)}; b_{(j)}, \quad (i) \in G_{t_1}, \quad (j) \in G_{t_2} \quad (5.22)$$

olarak verilir.

İç çarpım işlemi iki katlıdizeyden bir sayıl üretmek yön sayısını düşürürken, dış çarpım işlemi yön sayısını arttırmaktadır. İki katlıyöneyin dış çarpımı yukarıda da görüldüğü gibi bir katlıdizeyi üretmektedir. Dış çarpım iki katlıyöney veya bir katlıyöney ile katlıdizeyi arasında da andıran yolla tanımlanabilir. Burada yalnızca bu tanımlamaları vermekle yetineceğiz. Dizey cebirindeki andıran tüm özellikler katlıdizelere aktarılabilir.



6. ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL KATLIDİZEY GÖSTERİLİMİ (ÇYÇÜKG)

6.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Katlıdizey Gösterilimi (ÇYÇÜKG)

Bu savda katlıdizey kullanım amacımızın sıradan dizey cebirinin özelliklerinden yararlanmak ve ikili ayrıştırım yapısını gündeme getirmek olduğunu önceden de belirtmiştik. Bu amaçla bu bölümde katlıdizeyler için geliştirdiğimiz ayrıştırım yöntemi olan ÇYÇÜKG'den sözedeceğiz [108–112].

Katlıdizey kavramını burada yeniden gündeme getirelim ve öncelikle bir katlıdizeyin özelsiz (genel) ögesinin $A_{i_1, i_2, \dots, i_m; j_1, j_2, \dots, j_n}$ olarak verildiğini anımsayalım. Burada noktalı virgül ile ayrılan altsırasayı toplulukları katlıdizeyin, sırasıyla, yatay ve düşey altsırasayılarını içermekte olup her bir toplulukta, virgüller ile birbirlerinden ayrılan altsırasayılar, yatayda ya da düşeydeki yönleri betimlemektedir. Her bir altsırasayıların tanım bölgesi öbür altsırasayılardan bağımsız olarak öngörülmektedir. Bunun anlamı, altsırasayı çoklularının (ing: tuple) dikdörtgencil bir aşkınçokyüzlü (ing: hyperprism) içinde ve çevre yüzeylerinde yerleşik düğüm konumlarına (ing: nodal points) karşılık geldiğidir. Katlıdizey simgeleyişi ise, biçem olarak, $\mathbf{A}^{(m,n)}$ yapısında olup sıradan ayıraçlar arasındaki üstsırasayılar, sırasıyla, yataydaki ve düşeydeki, yön sayısını simgelemektedirler. Başka bir deyişle, m ve n , sırasıyla, yatay ve düşeydeki katlılaştırım düzeylerini simgelemektedirler.

Burada, dizey gösteriliminin kolaylığı nedeniyle, katlıdizeyleri örgüler (ing: grid) ile simgeleyeceğiz. $A_{i_1, i_2, \dots, i_m; j_1, j_2, \dots, j_n}$ ögesini örgü üzerinde altsırasayılarla betimlenen konumda yerleşik olarak düşünecek olursak, $\mathbf{A}_{G_L; G_R}$ simgeleyişini de kullanabiliriz. Bu simgeleyişte, altsimgeli G ile bir dikdörtgencil aşkınçokyüzlü anlatılmak istenmektedir. Böyle bir örgünün eşsiz olarak verilebilişi için her yöndeki konum sayısı soldan sağa çarpan olarak kullanılıp aralara \times simgesinin yerleştirimi ile eşsiz olarak simgelenişi olanaklıdır. Sözelimi, $2 \times 3 \times 6$ ile simgelenen bir örgü üç

boyutludur ve birinci, ikinci, ve de, üçüncü doğrultularda, sırasıyla, 2, 3, 6 konum bulunmaktadır. Eşsizlik için yön sıralanımının da eşsiz oluşu gerekir. Bu amaçla altsırasayıların soldan sağa dizilişinin yönlerde de soldan sağa eş dizilimin var olacağı anlamına geleceğini belirtmekte yarar bulunmaktadır. Özelsizde (genelde) i simgesini yatay yönlere, j simgesiniyse düşey yönlere karşılık gelen altsırasayıları göstermek için kullanacağız. Bu bağlamda, $i_k, k.$ yatay yöndeki konumu betimleyen altsırasayıyı gösterirken; $j_\ell, \ell.$ düşey yöndeki konumu betimleyen altsırasayıyı gösterecektir.

Bu çerçevede, i_1, \dots, i_m singeler topluluğu, m boyutlu bir örgüde, bir çoklu olarak bir düğüm noktası gösterecektir. İnceleyişlerimizde, i_k altsırasayısının 1'den başlayıp I_k sonlu tamsayısına dek birer artarak dizilen tamsayılardan değer alacağı öngörülecektir. Bu ise, $k.$ yatay yönde I_k sayıda düğüm konumu olduğu anlamına gelecektir. Andıran durum j_ℓ için de geçerli kalacak ama I_k yerine J_ℓ kullanılacaktır. Bu durumda, $G_L \equiv I_1 \times \dots \times I_m$ ve $G_R \equiv J_1 \times \dots \times J_n$ örgü tanımları da yapılabilecektir.

Bu biçimde yazım ile, katlıdizeyin dönüşümcül niteliğini de yansıtabiliriz. Burada, G_R ile simgelenen n boyutlu sağ örgü, katlıdizeyin tanım uzayında konuşlandırılma, G_L ile simgelenen m boyutlu sol örgü ise dönüşümün yansıtıldığı değer uzayında konuşlandırılma karşılık gelecektir. Bu tanımlayışlar altında $\mathbf{A}_{G_L;G_R}$ katlıdizeyinin ÇYÇĞ açılımını düşünecek olursak aşağıdaki gibi bir ayrıştırım elde ederiz [108–112].

$$\mathbf{A}_{G_L;G_R} = a_0 \mathbf{U}_{G_L}; \mathbf{V}_{G_R}^T + \mathbf{a}_{G_L}^{(1)}; \mathbf{V}_{G_R}^T + \mathbf{U}_{G_L}; \mathbf{a}_{G_R}^{(2)T} + \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)} \quad (6.1)$$

Burada dizey ayrıştırımında iki yön için kullandığımız destek yöneyleri yerine, artık, yatayda ve düşeyde destek katlıyöneyle devreye girmektedir. Bu destek katlıyöneylelerinin ÇYÇĞ koşullarını sağlayış gerekir. Bu amaçla, destek katlıyöneyleleri üzerinde birimboyluluk koşulu aşağıdaki gibi verilmelidir.

$$\mathbf{U}_{G_L}^T; \mathbf{U}_{G_L} = \sum_{\{i\} \in G_L} u_{\{i\}}^2 = 1 \quad (6.2)$$

$$\mathbf{V}_{G_R}^T; \mathbf{V}_{G_R} = \sum_{\{i\} \in G_R} v_{\{i\}}^2 = 1 \quad (6.3)$$

Katlıdizeylerin ÇYÇĞ ayrıştırımındaki bileşenlerini belirleyebilmek amacı için sıfırlanış koşulları burada da verilmiştir. Bu sıfırlanış koşulları iki türdür. Sayıl düzeyde sıfırlanış koşulları:

$$\mathbf{U}_{G_L}^T; \mathbf{a}_{G_L}^{(1)} = 0 \quad (6.4)$$

$$\mathbf{a}_{G_R}^{(2)T}; \mathbf{V}_{G_R} = 0 \quad (6.5)$$

olarak verilir. Buradan $\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$; katlıyöneynin \mathbf{U}_{G_L} ; katlıyöneynine dikgen olduğunu ve $\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}$; katlıyöneynin de \mathbf{V}_{G_R} ; katlıyöneynine dikgen olduğu ve sırasıyla G_L ve G_R örgüleri üzerinde tanımlandığını söyleyebiliriz.

Katlıdizeyin örgü düzeyinde sıfırlanım koşulları:

$$\mathbf{U}_{G_L}^T \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)} = \mathbf{0}_{;G_R} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)} \mathbf{V}_{G_R} = \mathbf{0}_{G_L}; \quad (6.7)$$

olarak verilir. Birimboyluluk ve sıfırlanış koşulları altında a_0 değişmez bileşenini belirlemek için (6.1) denklemini sağdan \mathbf{V}_{G_R} ; ile, soldan $\mathbf{U}_{G_L}^T$; ile çarparsak,

$$\mathbf{U}_{G_L}^T \mathbf{A}_{G_L;G_R} \mathbf{V}_{G_R} = a_0 + \mathbf{U}_{G_L}^T \mathbf{a}_{G_L}^{(1)} + \mathbf{a}_{G_R}^{(2)T} \mathbf{V}_{G_R} + \mathbf{U}_{G_L}^T \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)} \mathbf{V}_{G_R}; \quad (6.8)$$

elde edilir. Bu denklemin sağ yanındaki a_0 dışındaki tüm bileşenler, sıfırlanış koşulları nedeniyle, düşer. Bu durumda a_0 için

$$a_0 = \mathbf{U}_{G_L}^T \mathbf{A}_{G_L;G_R} \mathbf{V}_{G_R}; \quad (6.9)$$

eşitliği elde edilir.

$\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$ bileşenini elde etmek için ise (6.1) eşitliğini sağdan \mathbf{V}_{G_R} ; ile çarparsak,

$$\mathbf{A}_{G_L;G_R} \mathbf{V}_{G_R} = a_0 \mathbf{U}_{G_L} + \mathbf{a}_{G_L}^{(1)}; \quad (6.10)$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$ bileşenini yalnız bırakırsak,

$$\mathbf{a}_{G_L}^{(1)} = \mathbf{A}_{G_L;G_R} \mathbf{V}_{G_R} - a_0 \mathbf{U}_{G_L}; \quad (6.11)$$

eşitliği üretilir. Bu eşitlikte a_0 için yukarıda elde edilen anlatım yazıldığında $\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$ bileşeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{a}_{G_L}^{(1)} = (\mathbf{I}_{G_L;G_L} - \mathbf{U}_{G_L} \mathbf{U}_{G_L}^T) \mathbf{A}_{G_L;G_R} \mathbf{V}_{G_R}; \quad (6.12)$$

$\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$, 'nin yapısına baktığımızda, $\mathbf{U}_{G_L} \mathbf{U}_{G_L}^T$; biçiminde, boyu bir olan bir dış çarpım gözlemlenir. Bu dış çarpım bir izdüşüm katlıdizeyidir. Bu izdüşüm katlıdizeyi \mathbf{U}_{G_L} ; 'nin örttüğü eksene izdüşürür. $(\mathbf{I}_{G_L;G_L} - \mathbf{U}_{G_L} \mathbf{U}_{G_L}^T)$ ise \mathbf{U}_{G_L} ; 'nin tümleyenini olan dikgen bölgeye yani \mathbf{U}_{G_L} ; katlıyöneynine dik olan katlıyöneylemlerin oluşturduğu uzaya izdüşürür. Bu inceleyişler altında $\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$; terimi \mathbf{U}_{G_L} ; destek katlıyöneynin a_0 katını, $\mathbf{A}_{G_L;G_R}$ katlıdizeynin \mathbf{V}_{G_R} ; katlıyöneyi üzerindeki etkisinden çıkararak elde ederiz.

Andıran usbilimle (mantıkla), $\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}$ terimini elde etmek için (6.1) eşitliğini soldan $\mathbf{U}_{G_L}^T$ ile çarptığımızda,

$$\mathbf{U}_{G_L}^T \mathbf{A}_{G_L;G_R} = a_0 \mathbf{V}_{G_R}^T + \mathbf{a}_{G_R}^{(2)T} \quad (6.13)$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}$ 'yi yalnız bırakırsak,

$$\mathbf{a}_{G_R}^{(2)} = \mathbf{A}_{G_L;G_R}^T \mathbf{U}_{G_L} - a_0 \mathbf{V}_{G_R} \quad (6.14)$$

eşitliği ortaya çıkar. Andıran biçimde, eşitliği daha tıkız bir yapıda yazabilmek için yukarıdaki eşitlikte a_0 bileşeninin yukarıda belirlenen değeri onun yerine yerleştirilirse,

$$\mathbf{a}_{G_R}^{(2)} = (\mathbf{I}_{G_R;G_R} - \mathbf{V}_{G_R} \mathbf{V}_{G_R}^T) \mathbf{A}_{G_L;G_R}^T \mathbf{U}_{G_L} \quad (6.15)$$

elde edilir.

Burada, yukarıda, $\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$ için verilen yorumlar, andıran biçimde, $\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}$ için düşünüldüğünde; $\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}$ bileşenini belirlerken \mathbf{V}_{G_R} destek katlıyöneynin a_0 katını $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^T$ altında \mathbf{U}_{G_L} katlıyöneynin görüntüsünden çıkarılarak belirlendiğini gözlemliyoruz. $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)}$ bileşeni ise,

$$\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)} = \mathbf{A}_{G_L;G_R} - a_0 \mathbf{U}_{G_L} \mathbf{V}_{G_R}^T - \mathbf{a}_{G_L}^{(1)} \mathbf{V}_{G_R}^T - \mathbf{U}_{G_L} \mathbf{a}_{G_R}^{(2)T} \quad (6.16)$$

biçiminde elde edilir. Bu yapı daha tıkız olarak,

$$\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)} = (\mathbf{I}_{G_L;G_L} - \mathbf{U}_{G_L} \mathbf{U}_{G_L}^T) \mathbf{A}_{G_L;G_R} (\mathbf{I}_{G_R;G_R} - \mathbf{V}_{G_R} \mathbf{V}_{G_R}^T) \quad (6.17)$$

ile verilir. Bu eşitlik incelendiğinde, $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)}$ 'nin, destek katlıyöneylelerini sıfır uzayına alacak biçimde, belirlendiği görülür. Önceden de sözünü ettiğimiz gibi, kalan bileşen olan $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)}$ 'deki bilginin çıkarımı amacıyla her adımda elde edilen kalan terime yeniden ÇYÇG uygulayarak bir ayrıştırım yapısı ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)}$ yapısından, erek katlıdizemimizin özdüzeyinin her adımda bir düştüğü çıkarımını yapabilmekteyiz.

Özyineli yapıyı elde edebilmek amacıyla burada yeni destek işlevleri tanımlama durumu sözkonusu olup, yeni \mathbf{U}_{G_L} ve \mathbf{V}_{G_R} destek katlıyöneylelerini $\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$ ve $\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}$ üzerinden üreteceğiz. Bu yüzden, $\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$ ve $\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}$ katlıyöneylelerini destek katlıyöneyle üreteçleri olarak düşünebiliriz.

Başlangıç adımı için destek katlıyöneyleleri bizce yöntemle verilmektedir. Bu destek katlıyöneylelerini

$$\mathbf{U}_{G_L}^{(1)} = \mathbf{U}_{G_L} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{V}_{G_R}^{(1)} = \mathbf{V}_{G_R}; \quad (6.19)$$

olarak düşünebiliriz. Bu destek katlıyöneylelerine dikgen olacak biçimde yeni destek katlıyöneyleleri, $\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$ ve $\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}$, 'nin boyları yardımı ile aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\mathbf{U}_{G_L}^{(2)} = \frac{1}{\|\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}\|} \mathbf{a}_{G_L}^{(1)} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{V}_{G_R}^{(2)} = \frac{1}{\|\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}\|} \mathbf{a}_{G_R}^{(2)} \quad (6.21)$$

Yazım kolaylığı açısından, $\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}$ ve $\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}$, 'nin boylarını aşağıdaki gibi yeniden adlandırabiliriz.

$$\beta^{(1)} = \|\mathbf{a}_{G_L}^{(1)}\| \quad (6.22)$$

$$\gamma^{(1)} = \|\mathbf{a}_{G_R}^{(2)}\| \quad (6.23)$$

Yukarıdakilere ek olarak

$$\alpha^{(1)} \equiv a_0, \quad \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(0)} \equiv \mathbf{A}_{G_L;G_R}, \quad \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1)} \equiv \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)} \quad (6.24)$$

tanımlayışları da gündeme getirilirse

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(0)} &= \alpha^{(1)} \mathbf{U}_{G_L}^{(1)} \mathbf{V}_{G_R}^{(1)T} + \beta^{(1)} \mathbf{U}_{G_L}^{(2)} \mathbf{V}_{G_R}^{(1)T} \\ &+ \gamma^{(1)} \mathbf{U}_{G_L}^{(1)} \mathbf{V}_{G_R}^{(2)T} + \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1)} \end{aligned} \quad (6.25)$$

ilişkisi yazılabilir. Burada erek katlıdizeyle kalan katlıdizeyin türdeşliği simgecil olarak vurgulanmakta, salt üstsirasayıda değişiklikle ayırddediş sağlanmaktadır.

(25)'in $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(0)}$ yerine $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1)}$ için $\mathbf{U}_{G_L}^{(2)}$ ve $\mathbf{V}_{G_R}^{(2)}$ destek katlıyöneyleleri türünden eşdeğeri yazılmak istenirse (25)'te üstsirasayıları, yeni büyüklükler yukarıdaki inceleyişlerle tutarlı kalmak koşuluyla, bir yükseltmek yeterlidir. Bu durumda yeni üstsirasayılı büyüklükler doğacak ve bu kez de $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1)}$ yerine $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(2)}$ için $\mathbf{U}_{G_L}^{(3)}$ ve $\mathbf{V}_{G_R}^{(2)}$ destek katlıyöneyleleri türünden eşdeğer gündeme getirilecektir. Bu biçimde, ilerleyerek $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(j)}$ için özyineli yapı aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(j)} &= \alpha^{(j+1)} \mathbf{U}_{G_L}^{(j+1)} \mathbf{V}_{G_R}^{(j+1)T} + \beta^{(j+1)} \mathbf{U}_{G_L}^{(j+2)} \mathbf{V}_{G_R}^{(j+1)T} \\ &+ \gamma^{(j+1)} \mathbf{U}_{G_L}^{(j+1)} \mathbf{V}_{G_R}^{(j+2)T} + \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(j+1)} \end{aligned} \quad (6.26)$$

bu özyineleyişteki büyüklükler,

$$\begin{aligned}
\alpha^{(j+1)} &\equiv \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+1)T} \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(j)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+1)} \\
\beta^{(j+1)} &\equiv \left\| \left(\mathbf{I}_{G_L;G_L} - \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+1)} \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+1)T} \right) \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(j)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+1)} \right\| \\
\gamma^{(j+1)} &\equiv \left\| \left(\mathbf{I}_{G_R;G_R} - \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+1)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+1)T} \right) \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(j)T} \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+1)} \right\| \\
\mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+2)} &\equiv \frac{1}{\beta^{(j+1)}} \left(\mathbf{I}_{G_L;G_L} - \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+1)} \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+1)T} \right) \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(j)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+1)} \\
\mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+2)} &\equiv \frac{1}{\gamma^{(j+1)}} \left(\mathbf{I}_{G_R;G_R} - \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+1)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+1)T} \right) \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(j)T} \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+1)} \quad (6.27)
\end{aligned}$$

tanımlayışlarıyla verilir.

Burada amaç, özyineleyiş ile her adımda önceki destek katlıyöneylelerine dikgen destek katlıyöneyleleri bularak her adımda özdüzeyi bir düşürmeye çalışmak ve kalan bileşen olan yeni $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)}$ (yani $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(j+1)}$) bileşenini sıfırlamaktır. Bu biçimde, en son özyineli yapıda salt dışçarpımlardan oluşan bir yapı elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{G_L;G_R} &= \sum_{\{i\} \in G_L} \alpha_i \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+1)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+1)T} + \sum_{\{i\} \in G_L} \beta_i \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+2)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+1)T} \\
&+ \sum_{\{i\} \in G_L} \gamma_i \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(j+1)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(j+2)T} \\
&= \bar{\mathbf{U}}_{G_L;G_L} \boldsymbol{\Sigma}_{G_L;G_R} \bar{\mathbf{V}}_{G_R;G_R}^T, \quad (6.28)
\end{aligned}$$

$m = |G_L|$ ve $n = |G_R|$ sırasıyla sol ve sağ örgüler üzerindeki konum (öğ) sayısı olmak üzere, çarpanların açık yapısı aşağıdaki gibi verilir.

$$\bar{\mathbf{U}}_{G_L;G_L} \equiv \left[\mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(m)} \right] \quad (6.29)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{G_R;G_R} \equiv \left[\mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(n)} \right] \quad (6.30)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{m;n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \gamma_{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \beta_{m-1} & \alpha_m & \gamma_m & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Üstü çizgili U ve V büyüklükleri, destek katlıyöneyleleri üzerinde oluşturulan döndürüm katlıdizeylerinin yatayda katsızlaştırımına karşılık gelmektedir. Böylesine yarı katsız-

laştırmalı bir gösterilim kullanımının nedeni son bağıntıdaki üçköşegenlik dikdörtgen düzey kullanımına olanak sağlayabilmek içindir.

6.2 ÇYÇÜKG Uzişi

Bu bölümde ÇYÇÜKG yöntemine ait uzişi (ing: algorithm) verilmiştir.

Algorithm 1 ÇYÇÜKG Uzişi

1 *Ayrıştırıma girecek çokyönlü dizi $\mathbf{A}_{i_1 i_2 \dots i_n}$ belirlenir.*

2 *Başlangıç adımları*

2.1 *Sol (G_L) ve sağ (G_R) örgüler belirlenir. (Tür ayrıştırımı)*

2.2 *Amaç katlıdizeyi $\mathbf{A}_{G_L;G_R}$, $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(0)}$ olarak, yani başlangıç amaç katlıdizeyi olarak atanır.*

2.3 *Başlangıç destek katlıyöneyleleri \mathbf{u}_{G_L} ; ve \mathbf{v}_{G_R} ; tür ayrıştırımına göre amaç katlıdizeyinden üretilir ve bu destek katlıyöneyleleri $\mathbf{u}_{G_L}^{(1)}$ ve $\mathbf{v}_{G_R}^{(1)}$ olarak atanır.*

3 *for $i = 1$: özyineleme sayısı*

3.1 *Dış çarpımlardan gelen katkıları belirleyen α , β ve γ sayıları belirlenir*

3.2 *Yaklaşım nitelik ölçeni σ_ℓ belirlenir.*

3.3 *$\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)}$ belirlenir.*

3.4 *$\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)}$ sıfır ise döngüden çıkılır, değilse $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(1,2)}$ bir sonraki döngü için amaç katlıdizeyi $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{(i)}$ olarak atanır.*

3.5 *Başlangıç destek katlıyöneylelerine dik, bir sonraki döngü için $\mathbf{u}_{G_L}^{(i+1)}$ ve $\mathbf{v}_{G_R}^{(i+1)}$ destek katlıyöneyleleri belirlenir ve atama yapılır*

4 *İstenilen özyineleme adımda yaklaşım katlıdizeyi elde edilebilir.*



7. ÇYÇÜKG UYGULAMALARI

Bu bölümde çokyönlü dizi ayrıştırımı için geliştirdiğimiz Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Katlıdizely Gösterilimi yöntemine ilişkin geniş çaplı uygulamalara yer verilmiştir [108–113]. Bu uygulamaların temelde yöntemin doğasından gelen esneklikler (destek seçimi ve tür ayrıştırımı) ile ilgili inceleyişler ve yöntemin uygulama alanlarını gösteren gerçek veri kümeleri üzerinde inceleyişler olmak üzere 2 kesimden oluştuğu söylenebilir.

Yöntem sınavıışlarını gerçekleştirebilmek için MATLAB R2015a (2,7 GHz Intel Core i5 işlemcili bilgisayarda) ve R2016a (3,4 GHz Intel Core i7-2600 işlemcili bilgisayarda) sürümleri kullanılarak betik yazılmıştır. Bu betiklerde 32 basamak duyarlılıkta belirleyişler gerçekleştirilmiştir.

Uygulamalarda, yöntemin etkinliğini belirleyebilmek amaçlı bazı ölçenler kullanılmıştır. Bu ölçenlere ilişkin bilgilendirimler giriş kesiminde verilmiştir. Yöntemin esnekliklerinden biri olan değişik destek kullanımı ile ilgili inceleyişler 6.2 bölümünde, bir diğer esneklik olan tür ayrıştırımı durumları ise 6.3 bölümünde incelenmiştir. Yöntemin uygulama alanlarından biri olan canlandırım verilerine uygulayışlar gerçekleştirilmiş olup bu gerçek veri kümeleri ile ilgili ayrıntılı inceleyişlere 6.4 kesiminde yer verilmiştir. 6.5 bölümü ise bir diğer gerçek veri kümesi olan aşkınızgecil veriler üzerinde yöntemin uygulayışlarını içermektedir. Bu kesime kadar ÇYÇÜKG yöntemi, 3-boyutlu veriler üzerinde sınanmış olup daha yüksek verilerde de etkinliğini görmek/göstermek amacı ile 6.6 kesiminde 4-boyutlu veriler üzerinde uygulayışlar gerçekleştirilmiştir. Veri boyutu arttıkça, verinin çok yer kaplaması günümüzde çözülmesi gereken bir sorun olarak ortaya çıkmış olup veri sıkıştırma yöntemleri arayışına neden olmuştur. Yöntemimizin, yapısı nedeniyle bu tür sorunlarda bir çözüm olarak sunulabileceğini göstermek amacı ile 6.7 bölümünde yöntemin sıkıştırma oranı üzerinde durulmuştur. Ayrıca yöntemi diğer yöntemlerle

karşılaştırabilmek ve yöntemi bütünüyle ortaya koymak amacı ile 6.8 bölümünde bilgisayarım (hesaplama) karmaşıklığı verilerek uygulamalar sonlandırılmıştır.

7.1 Uygulamalara Giriş

Bütün uzbilimcil yöntemlerde olduğu gibi ÇYÇÜKG yönteminin de işlerliğini ve etkinliğini ölçmemiz gerekmektedir. Bu ölçüm ÇYÇÜKG yöntemi için iki yolla yapılabilmektedir. Bu ölçenlerden ilki yöntemin yapısından türeyen **Yaklaşım Niteliği** olarak adlandırdığımız σ ölçenidir. σ 'nın nasıl belirlendiğini gösterebilmek amacı ile ÇYÇÜKG eşitliğini yeniden ele alalım.

$$\mathbf{A}_{G_L;G_R} = \sum_{\ell=1}^{n_\alpha} \alpha_\ell \mathbf{U}_{G_L;^{(\ell)}} \mathbf{V}_{G_R;^{(\ell)}}^T + \sum_{\ell=1}^{n_\beta} \beta_\ell \mathbf{U}_{G_L;^{(\ell+1)}} \mathbf{V}_{G_R;^{(\ell)}}^T + \sum_{\ell=1}^{n_\gamma} \gamma_\ell \mathbf{U}_{G_L;^{(\ell)}} \mathbf{V}_{G_R;^{(\ell+1)}}^T \quad (7.1)$$

Bu eşitliğin her iki yanının, katlıyöneylemlerin diklik ve birim boyluluk koşulları gözetilerek Frobenius boy dördülünü alırsak,

$$\|\mathbf{A}_{G_L;G_R}\|^2 = \sum_{\ell=N+1}^{n_\alpha} \alpha_\ell^2 + \sum_{\ell=N+1}^{n_\beta} \beta_\ell^2 + \sum_{\ell=N+1}^{n_\gamma} \gamma_\ell^2 \quad (7.2)$$

elde edilir. Bu eşitlik bize yaklaşım niteliğinin dışçarpımlardan gelen katkıları gösteren α, β ve γ katsayıları ile belirlendiğini göstermektedir. (7.2) eşitliğin her iki yanını $\|\mathbf{A}\|^2$ 'ye bölersek,

$$1 = \frac{\sum_{\ell=N+1}^{n_\alpha} \alpha_\ell^2 + \sum_{\ell=N+1}^{n_\beta} \beta_\ell^2 + \sum_{\ell=N+1}^{n_\gamma} \gamma_\ell^2}{\|\mathbf{A}_{G_L;G_R}\|^2} \quad (7.3)$$

yazılabilir. Bu eşitlik bize en büyük özyineleme sayısında yaklaşım niteliğinin 1 olacağını göstermektedir. En büyük özyineleme sayısı, katlıdizeyin sol ve sağ örgü boylarından en küçüğüne eşittir. Herhangi bir k . özyineleme adım için ise yaklaşım niteliği,

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}{\|\mathbf{A}\|^2} \quad (7.4)$$

olarak verilir. Buradan σ_k değerlerinin azalmayan bir dizi oluşturduğunu söyleyebiliriz.

Bu savda kullanılan bir diğer yaklaşım ölçeni ise bilimsel yazında görüntü ve sinyal işleme alanında sıkça kullanılan **Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)**'dir [80]. PSNR tanımı, yanılığ dördülleri toplamının ortalaması olan MSE (mean squared error) aracılığıyla verilmektedir.

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{R^2}{MSE} \right) \quad (7.5)$$

Burada R , görüntü ve sinyal işleme sorunlarında bir görüntünün en büyük olası piksel değerini göstermektedir. Yani bir piksel 8 bit değerinde ise $R = 2^8 - 1 = 255$ olarak belirlenmektedir.

PSNR ölçenini yöntemimiz açısından herhangi bir veri türü için yeniden tanımlamak istersek aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$PSNR \equiv 10 \log_{10} \left(\frac{\max_{(G_L, G_R)} (\chi_{i,j;k}^2)}{MSE} \right),$$

$$MSE \equiv \frac{1}{\mu \nu} \|\mathbf{A}_{G_L;G_R} - \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{TFEMPR}\|^2 \quad (7.6)$$

Burada μ ve ν sırasıyla G_L ve G_R örgülerindeki öge sayılarını, $\mathbf{A}_{G_L;G_R}$ ve $\mathbf{A}_{G_L;G_R}^{TFEMPR}$ ise sırasıyla asıl katlıdizeyi ve yaklaştran katlıdizeyi göstermektedir.

$\mu < \nu$ varsayımı altında N özyineleme adımında kesme yapılmış ÇYÇÜKG yaklaştranı için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{G_L;G_R} - \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{TFEMPR} &= \sum_{\ell=N+1}^{n_\alpha} \alpha_\ell \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(\ell)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(\ell)T} + \sum_{\ell=N+1}^{n_\beta} \beta_\ell \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(\ell+1)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(\ell)T} \\ &+ \sum_{\ell=N+1}^{n_\gamma} \gamma_\ell \mathbf{U}_{G_L;G_R}^{(\ell)} \mathbf{V}_{G_R;G_R}^{(\ell+1)T} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Bu eşitlik bize amaç katlıdizeyi ile yaklaştran arasındaki farkın, belirlenmemiş α, β ve γ katsayılarından gelecek katlılar kadar olduğunu gösterir. Bu ise, bu farkın boy dördülünün aşağıdaki gibi belirlenebileceğini gösterir.

$$\|\mathbf{A}_{G_L;G_R} - \mathbf{A}_{G_L;G_R}^{TFEMPR}\|^2 = \sum_{\ell=N+1}^{n_\alpha} \alpha_\ell^2 + \sum_{\ell=N+1}^{n_\beta} \beta_\ell^2 + \sum_{\ell=N+1}^{n_\gamma} \gamma_\ell^2 \quad (7.8)$$

Bu inceleyişler altında MSE bağıntısı

$$MSE = \frac{1}{mn} \left(\sum_{\ell=N+1}^{n_\alpha} \alpha_\ell^2 + \sum_{\ell=N+1}^{n_\beta} \beta_\ell^2 + \sum_{\ell=N+1}^{n_\gamma} \gamma_\ell^2 \right). \quad (7.9)$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu eşitlik ise N arttıkça MSE değerinin sifıra yaklaştığını göstermektedir.

7.2 Yapay Veri Üzerinde Değişik Destek Kullanımı İnceleyişleri

Bu alt bölümde ÇYÇÜKG yönteminin esnekliklerinden biri olan başlangıç destek katlıyöneylelerinin nasıl belirleneceği sorusu ile ilgilenilmiştir. Bu amaçla değişik

destek katlıyöneyi seçimi gündeme getirilmiştir.YBBG tabanlı yöntemlerde destek kullanımı ilk kez Demiralp ve topluluğunca ortaya konmuş olup, ayrıştırım yapılacak öğenin yapısına göre aynı usbilimle üretilmiş tanımlamalar verilmiştir[ref]. Bu tanımlamalardan ilki sürekli işlevlerin ayrıştırımı ve yaklaştırımı sorunlarında kullanılmış olup, destek işlevi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$s_i(x) = \frac{\mathcal{I}_i f(x_1, \dots, x_N)}{\|\mathcal{I}_i f(x_1, \dots, x_N)\|} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i &= \int_{a_1}^{b_1} W_1(x_1) dx_1 \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} W_{i-1}(x_{i-1}) dx_{i-1} \\ &\times \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} W_{i+1}(x_{i+1}) dx_{i+1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} W_N(x_N) dx_N \end{aligned} \quad (7.11)$$

Bu destek işlevi eşitliği incelendiğinde, yaklaştırım yapılacak işlev üzerinde, o yön dışında ortalama alınıp, olağanlaştırılması (normalize edilmesi) ile belirlendiği görülmektedir. Bu tanım ayırık yapılarda,

$$s_{i_j}^{(j)} = \frac{\sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{j-1}=1}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=1}^{n_{j+1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} \mathcal{X}_{i_1 i_2 \cdots i_n}}{\left\| \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{j-1}=1}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=1}^{n_{j+1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{n_N} \mathcal{X}_{i_1 i_2 \cdots i_n} \right\|^2} \quad (7.12)$$

olarak ortaya çıkmaktadır. Tanımdan yola çıkarak destek katlıyöneyle andıran düşünce ile, hangi yön/yönlerde açılım gerçekleşecek ise o yön/yönler dışlanarak kalan yön/yönler üzerinde ortalama alınacak biçimde aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$\mathbf{U}_{G_L} = \frac{\sum_{G_R} \mathbf{X}_{G_L; G_R}}{\|\|G_R\|\|} \quad (7.13)$$

$$\mathbf{V}_{G_R} = \frac{\sum_{G_L} \mathbf{X}_{G_L; G_R}}{\|\|G_L\|\|} \quad (7.14)$$

Destek katlıyöneyle, birimboyluluk koşulunu sağlamaları için, boylarına bölünerek birimboylulaştırılır.

Bu düşünce ile ortaya çıkarılan destekler **Olağanlaştırılmış Yönlü Ortalamalı Destek (ing: Normalized Directional Average Support(NDAS))** olarak tanımlanır. Bundan sonraki anlatımlarda yazım kolaylığı açısından kısaca **OYOD** olarak adlandırılacaktır.

Bir diğer özelsiz destek kullanımı ise tüm öğelerinin eş olarak belirlendiği durum olup, **Olağanlaştırılmış Eş Öğeli Destek(ing: Normalized Equal Element Support(NEES))** adlandırılır ve kısaca **OEÖD** olarak yazılacaktır.

OYOD ve OEÖD kavramını daha iyi görmek amacı ile aşağıdaki $\mathbf{X}_{3 \times 3 \times 3}$ 3-yönlü dizisini ele alalım:

$$\mathbf{X}(:, :, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}(:, :, 2) = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}(:, :, 3) = \begin{bmatrix} 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

Burada, OEÖD

$$\mathbf{U}_{GL} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_{GR} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

ve OYOD

$$\mathbf{U}_{GL} = \frac{1}{\sqrt{1824}} \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_{GR} = \frac{1}{\sqrt{750}} \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 23 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

olarak elde edilir.

OEÖD ve OYOD desteklerinin etkinliği, sol ve sağ destek katlıyöneylelerine ağırlıklar etki ettirilerek artırılabilir. Bu ağırlıklar sol ve sağ destek katlıyöneyleleri için aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\mathbf{W}_L = \mathbf{A}_{GL;GR} \mathbf{A}_{GL;GR}^T \quad \mathbf{W}_R = \mathbf{A}_{GL;GR}^T \mathbf{A}_{GL;GR} \quad (7.18)$$

Bu ağırlıklar altında yeni destek katlıyöneyleleri aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{GL} &\leftarrow \mathbf{W}_L \mathbf{U}_{GL}; \\ \mathbf{V}_{GR} &\leftarrow \mathbf{W}_R \mathbf{V}_{GR}; \end{aligned} \quad (7.19)$$

Yukarıdaki yeni destek tanımından, ağırlıkların OEÖD üzerine etki ettirilmesi sonucu elde edilen yeni destekler **Birinci Dereceden Ağırlıklı Olağanlaştırılmış Eş Ögeli Destek (BDAOEÖD)**, ağırlıkların OYOD üzerine etki ettirilmesi sonucunda elde edilen yeni destekler ise **Birinci Dereceden Ağırlıklı Olağanlaştırılmış Yönlü Ortalamalı Destek (BDAOYOD)** olarak tanımlanır. Burada dereceyi belirleyen ise, \mathbf{W}^k 'dir. Bu çalışmada sadece $k = 1$ durumu için inceleyişler yapılmıştır. Bunun nedeni ise daha yüksek dereceden ağırlıklandırılmaların, özellikle amaç katlıdizeyinin boyutu çok büyükse, işlem ederini arttırmasıdır.

Burada yukarıda tanımlanan 4 değişik destek katlıyöneylelerinin etkinliğini göstermek amacı ile $[0, 1]$ aralığında $3 \times 4 \times 5$ türünde seçkisiz (ing: random) olarak üretilen 3-yönlü veri ele alınarak ÇYÇÜDG uygulanmıştır. Bu veri için G_L ve G_R örgüleri

sırasıyla 3×4 ve 5 türündedir. Bu tür ayrıştırımına göre uygulamalarda elde edilen çekirdek dizeyi boyutu 12×5 olup yatay dikdörtgencil bir dizeydir. Bu durumda sonuçlarda köşegen üzerinde 5 tane α , 5 tane β ve 4 tane γ değeri bulunması gerekmektedir. Bu gereklilik, sonuç çizelgelerinde görülmektedir. Son adımda belirlenen β oldukça küçük bir sayı olarak elde edilmektedir.

Sonuç çizelgeleri, özyineleme adım sayısına (ing: recursion step number) bağlı olarak α , β , γ değerlerini, yaklaştırım niteliğini (σ), Aşamalı Dördül Köşegence Baskınlık (ADKB, ing: Stepwise Square Diagonal Dominancy (SSDD)) ve Birikimli Dördül Köşegence Baskınlık (BDKB, ing: Cumulative Square Diagonal Dominancy (CSDD)) değerlerine göre düzenlenmiştir. Burada Aşamalı Dördül Köşegence Baskınlık her adımda α dördüllerinin α , β ve γ dördülleri toplamına oranı şeklinde, Birikimli Kesimci Dördül Köşegence Baskınlık ise birikimli olarak geline adımı kadar α dördülleri toplamının α , β ve γ dördülleri toplamına oranı olarak belirlenir.

Yukarıdaki inceleyişler bağlamında başlangıç destek katlıyöneyinin OEÖD olarak seçilip ÇYÇÜKG uygulanması ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki Çizelge 7.1 ile verilmiştir. Her bir yatay sıra o özyineleme adımına karşılık gelen çekirdek dizeydeki α , β ve γ değerlerinin yanısıra σ , ADKB ve BDKB değerlerini içermektedir. Özyineleme sayısını göstermek amacı ile çizelgelerde kısaca ÖS kullanılmıştır.

Çizelge 7.1 : OEÖD tabanlı ÇYÇÜKG için α , β , γ , σ , ADKB ve BDKB değerleri

ÖS	α	β	γ	σ_{OED}	ADKB	BDKB
1	4.2352	0.9808	0.6122	0.8203	0.9306	0.9306
2	-0.0582	0.7036	0.3431	0.8465	0.0055	0,9019
3	-0.3219	0.6274	0.2685	0.8707	0.1820	0,8819
4	0.1761	1.4541	0.2762	0.9653	0.0140	0,7969
5	0.4591	0.7773	—	1.0000	0.2594	0,7782

Andıran düşünce ile, sırasıyla OYOD, BDAOEÖD, BDAOYOD kullanılarak elde edilen ÇYÇÜKG sonuçları, Çizelge 7.2, 7.3 ve 7.4 ile verilmiştir.

Çizelge 7.5 ile destek türlerine göre ilgili özyineleme adımındaki α baskınlıklarını yani ilgili yataysıradaki köşegence baskınlıkları göstermektedir.

Çizelge 7.6 ise desteklerin, BDKB değerlerine göre yani tüm yapı üzerindeki köşegence baskınlığı göstermektedir. Bu durumda çizelgenin son yatay sırasındaki

Çizelge 7.2 : OYOD tabanlı ÇYÇÜKG için α , β , γ , σ , ADKB ve BDKB değerleri

ÖS	α	β	γ	σ_{OYOD}	ADKB	BDKB
1	4.3860	0.1044	0.0894	0.8194	0.9990	0.9990
2	-0.7070	0.5807	0.4987	0.8657	0.4604	0,9702
3	-0.3850	0.7544	0.2587	0.8991	0.1890	0,9412
4	0.4051	1.7828	0.2619	0.9999	0.0693	0,8533
5	0.0341	3.59E-14	—	1.0000	1.0000	0,8433

Çizelge 7.3 : BDAOEÖD tabanlı ÇYÇÜKG için α , β , γ , σ , ADKB ve BDKB değerleri

ÖS	α	β	γ	σ_{BDAOED}	ADKB	BDKB
1	4.3878	0.0187	0.0206	0.8194	0.99995	0.99995
2	-0.8310	0.5595	0.4427	0.8705	0.5756	0,9750
3	-0.9021	0.2923	0.9856	0.9501	0.4350	0,9298
4	0.2195	0.7802	0.7124	0.9996	0.0413	0,8857
5	-0.0914	1.42E-13	—	1.0000	1.00000	0,8858

Çizelge 7.4 : BDAOYOD tabanlı ÇYÇÜDG için α , β , γ , σ , ADKB ve BDKB değerleri

ÖS	α	β	γ	$\sigma_{BDAOYOD}$	ADKB	BDKB
1	4.3879	0.0047	0.0040	0.8194	0.9999	0.99999
2	-0.8200	0.4878	0.8080	0.8859	0.4301	0,9572
3	1.2469	0.5317	0.2008	0.9658	0.8280	0,9465
4	-0.1207	0.6809	0.5689	0.9999	0.0181	0,9148
5	0.0144	4.24E-13	—	1.0000	1.0000	0,9148

Çizelge 7.5 : Farklı desteklere ilişkin ADKB değerleri

ÖS	OEÖD	OYOD	BDAOEÖD	BDAOYOD
1	0.9306	0.9990	0.99995	0.99999
2	0.0055	0.4604	0.5756	0.4301
3	0.1820	0.1890	0.4350	0.8280
4	0.0140	0.0693	0.0413	0.0181
5	0.2594	1.0000	1.0000	1.0000

değerler sistemin köşegence baskınlığını göstermekte olup, çekirdek dizeyin genel köşegence baskınlığına karşılık gelmektedir.

Yukarıdaki çizelgelerden, β ve γ değerleri baskılandıkça yani sifıra yaklaştıkça köşegence baskınlık artar. Bütünüyle sıfırlandığında ise üçköşegencilik yerini

Çizelge 7.6 : Farklı desteklere ilişkin BDKB değerleri

ÖS	OEÖD	OYOD	BDAOEÖD	BDAOYOD
1	0.9306	0.9990	0.99995	0.99999
2	0.9019	0.9702	0.9750	0.9572
3	0.8819	0.9412	0.9298	0.9465
4	0.7969	0.8533	0.8857	0.9148
5	0.7782	0.8533	0.8858	0.9148

köşegencilliğe bırakır ve Tekil değer Ayırıştırımı elde edilir. Bunun nedeni ise β ve γ değerlerinin destek katlıyöneyleleri ile denetlenebilirlişidir. Bu olgu, çizelgelerde gözlemlenmektedir. Ayrıca OEÖD seçiminin en güçsüz, BDAOYOD seçiminin ise en güçlü sonuçlar ürettiği görülmektedir. BDAOYOD'un en iyi seçim olmasının nedeni ise amaç düzeyinden yönlü ortalama alınarak üretilen desteklere yine amaç düzeyinden üretilen ağırlıkların etki ettirilmesidir. Burada bu etki dereceye bağlı olarak arttırılabilir. Yani birinci dereceden ağırlıklandırım yerine daha yüksek dereceden ağırlıklandırmalar kullanılabilir ve köşegence baskınlık çok hızlı bir biçimde arttırılabilir. Burada yalnızca birinci dereceden ağırlıklandırım kullanılmıştır. Bu ağırlıklandırımın derecesi arttırılabilir ancak bu artış işlem ederini de birlikte getirmektedir.

7.3 Değişik Tür Ayırıştırımlarının İncelenmesi

Bölüm 5'de ayrıntılı olarak verilen katlıdizelyapısındaki ikili ayırıştırımın amacı düzey cebirinden faydalanmak ve bu yapısı aracılığıyla düzey cebri özelliklerini çokyönlü dizilere aktarabilmektir. Çokyönlü dizilerde ikili ayırıştırım, bu ikili ayırıştırımın nasıl seçilmesi gerektiği sorusunu gündeme getirmektedir ki biz bu durumu tür ayırıştırımı olarak adlandırmaktayız. Bu bölümdeki uygulamalarda değişik tür seçimleri altında nasıl sonuçlar elde edildiği irdelenecektir.

Tür ayırıştırımı durumunu daha iyi kavrayabilmek için \mathbf{X}_{ijk} 3-yönlü dizisini ele alalım. Bu 3-yönlü dizi için değişik tür ayırıştırımları $\mathbf{X}_{ij;k}$, $\mathbf{X}_{i;jk}$, $\mathbf{X}_{ik;j}$ biçiminde ve 3 durum sözkonusudur. Bu 3 durum bilimsel yazında yer alan sırasıyla ön (ing: frontal), yatay (ing: horizontal) ve yanal (ing: lateral) tür ayırıştırımlarına karşılık gelmektedir [18]. Başka bir deyişle $ij;k$ çerçevelerin 3 boyutlu küp üzerinde k yönünde sıralanışını, $i;jk$, i yönünde sıralanışını, $ik;j$ ise j yönünde sıralanışını göstermektedir. Bu üç

durumun ÇYÇÜKG yöntemi üzerindeki işlemlerin nasıl değiştiğini görebilmek adına aşağıda bazı uygulamalara yer verilmiştir. Bu uygulamalarda sonuçlar OEÖD türünde destek katlıyöneyleri kullanılarak elde edilmiştir.

$5 \times 5 \times 5$ türünde salınımlı bir işlevle öğeleri belirlenen aşağıdaki gibi bir 3-yönlü yapay veri ele alalım.

$$\mathbf{X}_{ijk} = \sin(100i)^3 \cos(20(j+k))^3$$

$$i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (7.20)$$

Bu biçimde tanımlanan 3-yönlüdüzi için tür ayrıştırımına ve özyineleme adımına bağlı nitelik ölçenleri değerleri Çizelge 7.7 ile verilmiştir. Çizelge incelendiğinde

Çizelge 7.7 : (7.20) için değişik özyineleme adımlarında ÇYÇÜKG nitelik sonuçları

Tür Ayrıştırımı	Yaklaşım Niteliği				
	1	2	3	4	5
$\mathbf{X}_{i,j,k}$	0.01825	0.6000	0.8842	0.9956	1.0000
$\mathbf{X}_{i,jk}$	0.3812	1.0597	1.0597	1.0597	1.0597
$\mathbf{X}_{ik;j}$	0.01821	0.6000	0.8842	0.9956	1.0000

$\mathbf{X}_{ik;j}$ ayrıştırımı ilk özyineleme adımı dışında $\mathbf{X}_{i,j,k}$ ayrıştırımı ile benzer etkinliği gösterdiği görülmektedir. Ancak $\mathbf{X}_{i,jk}$ değerlerinin ilk adımdan sonra hata verdiği gözlemlenmiştir.

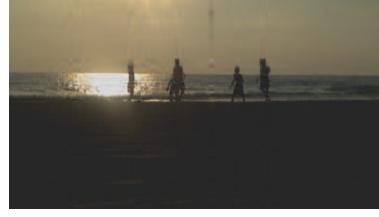
Yukarıda verilen uygulamadan tür ayrıştırımı için kesin bir yargıya varılamamaktadır. Ancak bununla birlikte işlevin salınımlı yapısının etkisinin ne olduğu tartışılabilir. Buradaki ilişkiyi açıklayabilmek adına tür ayrıştırımı ile ilgili ÇYÇÜKG uygulamaları gerçek veri kümesi olan canlandırım verileri üzerinde incelenmiştir. Bunun nedeni ise canlandırım verilerinde devinim yönü ile tür ayrıştırımı arasında bir ilinti olup olmadığının irdelenmek istenmesidir. Bu inceleyişler bağlamında <https://pixabay.com/en/videos> bulunağında bulunan değişik yönlerde devinim içeren canlandırım verileri ele alınmıştır [100]. Bu canlandırım verilerinin çerçeve boyutları 360×640 olup çerçeve sayıları farklılık göstermektedir. Uygulamalarda çerçeve sayısı 36 olarak alınarak $360 \times 640 \times 36$ türünde veriler ile ilgilenilmiştir. Tür ayrıştırımları seçeneklerinde elde edilen yaklaşımlar için 18. çerçeve temel alınarak görsel karşılaştırmalar yapılmıştır.

Birincisi, Şekil 7.1 ile verilen kumsalda voleybol oynayanların ve voleybol topunun değişik yönlerdeki devinimini içeren “Beach.mp4”adlı canlandırım verisidir. Şekil

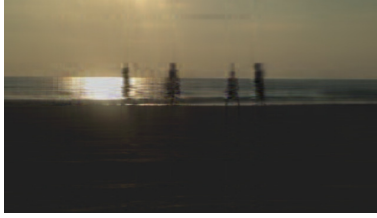
7.1 ile verilen çerçeveler incelendiğinde $ij;k$ ayrıştırmanın daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.



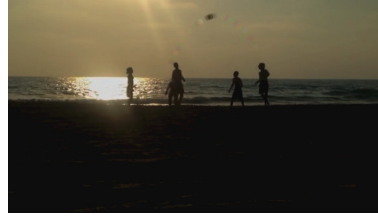
(a) Asıl çerçeve



(b) $ij;k$



(c) $ik;j$



(d) $ij;k$

Şekil 7.1 : “Beach.mp4”, 18. çerçeve için ÇYÇÜKG sonuçları.

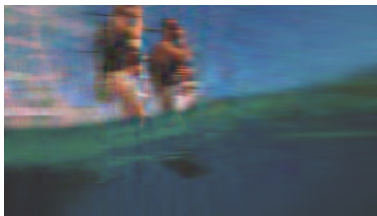
Uygulama olarak ele alınan bir diğer veri ise “ScubaDiving.mp4” canlandırım verisidir. Dalış hareketi yönünden bağımsız olarak $ij;k$ tür ayrıştırımı için en iyi sonuç elde edilmiştir. Şekil 7.2’de da bu sonuç açıkça görülmektedir.



(a) Asıl çerçeve



(b) $ij;k$



(c) $ik;j$

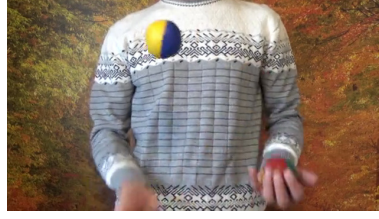


(d) $ij;k$

Şekil 7.2 : “ScubaDiving.mp4”, 18. çerçeve için ÇYÇÜKG sonuçları.

“juggle.mp4” canlandırım verisi, 3 top sektiren bir kişinin ve topun devinimini içermektedir. Burada topun sağa-sola, aşağı-yukarı devinimleri yer almaktadır.

Değişik tür ayrıştırımları altında ÇYÇÜKG yöntemi bu veriye uygulandığında yine $ij;k$ seçimi en iyi sonucu vermiştir.



(a) Asıl çerçeve



(b) $i;kj$



(c) $ik;j$



(d) $ij;k$

Şekil 7.3 : “juggle.mp4”, 18. çerçeve için ÇYÇÜKG sonuçları.

Son olarak “MountainBike.mp4” ile adlandırılmış canlandırım verisi ele alınmıştır. Bu veri dağ bisikleti sürüşü yapan birinin kasketindeki kamera ile elde edilmiş görüntülerdir. Devinin yönü k yönündedir. Burada ise $i;kj$ ayrıştırımının en iyi verdiği gözlemlenmiştir.



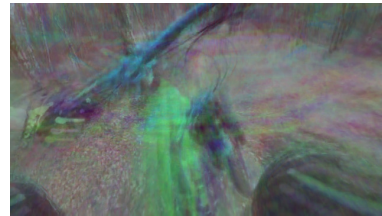
(a) Asıl çerçeve



(b) $i;kj$



(c) $ik;j$



(d) $ij;k$

Şekil 7.4 : “MountainBike.mp4”, 18. çerçeve için ÇYÇÜKG sonuçları

Tüm bu canlandırım verilerine değişik tür ayrıştırım seçimleri altında ÇYÇÜKG uygulanması sonucu elde edilen PSNR değerleri, Çizelge 7.8 ile verilmiştir. Çizelgedeki PSNR değerleri de Şekillerde verilen sonuçları doğrulamaktadır.

Çizelge 7.8 : Tür Ayrıştırımı incelemeişlerindeki canlandırmalara ilişkin PSNR değerleri

Canlandırım	i;kj	ij;k	ik;j
ScubaDiving.mp4	18.2565	22.1139	16.5501
MountainBike.mp4	21.8049	20.9378	21.6128
Beach.mp4	18.5032	27.4174	20.1312
Juggling.mp4	20.7324	27.1027	21.2541

Tür ayrıştırımları sonuçları incelendiğinde, devinimsiz kamera ile elde edilen verilerde $ij;k$ ayrıştırımının her zaman daha iyi sonuç vermekte olduğu, devinimli kamera ile elde edilen verilerde ise kamera devinimi yönünde ayrıştırımın daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir. Ancak bu konu ayrıntılı bir görüntü işleme problemi olduğu için bu savda bu düzeyde inceleme ile yetinilmiştir.

7.4 Canlandırım Verilerinde ÇYÇÜKG Uygulamaları

Bü bölümde ÇYÇÜKG yöntemi, gerçek veri kümesi olan canlandırmalar üzerine uygulanacak ve sonuçlar irdelenecektir. Uygulamaya geçmeden önce canlandırmalardan kısaca sözedelim:

Canlandırım, bir dizi resmin arka arkaya yerleştirilerek hareket ettirilmesinden oluşmaktadır. Buradan bir canlandırımın en yalın tanımı olarak 3 yönlü diziden oluştuğunu, ilk iki yönünün çerçeve boyutlarını 3. yönünün ise çerçeve sayısını gösterdiğini söyleyebiliriz. Örneğin $60 \times 80 \times 36$ boyutlu bir canlandırım için 60×80 çerçeve boyutunu vermekte, 36 ise kaç tane çerçeveden oluştuğunu belirtmektedir. Burada görüntü verileri görüntü türüne bağlı olarak elde edilmektedir Boz boyalı görüntülerde veri 60×80 , boyalı görüntülerde ise $60 \times 80 \times 3$ türündedir. *uint8* türündeki bu veriler $[0, 255]$ arasında değer almaktadır.

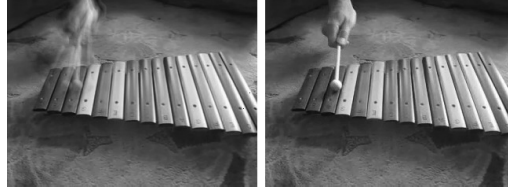
Canlandırım verilerinde daha çok değişken eklenerek yön sayısı artırılabilir. Örneğin ses, parlaklık, doygunluk değişkenleri vs. gibi. Bu savda, canlandırım verisi yalnızca 3 yönlü olarak ele alınmış olup, uygulamalar boz (ing: grayscale) ve boyalı (ing:

rgb) veriler olarak 2 alt başlıkta verilmiştir. Uygulamalarda yönlü ortalamalardan elde edilen destek katlıyöneyleri kullanılmıştır.

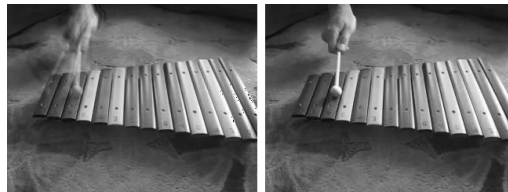
7.4.1 Bozboyalı canlandırım verilerinde ÇYÇÜKG

Bu uygulamada $240 \times 320 \times 36$ türünde boz verilerden oluşan canlandırım verisine ÇYÇÜKG uygulanmıştır. Burada boz veriler $[0,1]$ arasında değerler almaktadır. Canlandırım olarak Matlab'in kendi içinde yer alan 'xylophone.mp4' ele alınmıştır. Bu canlandırım ksilofon çalma esnasındaki tokmak devinimini içermektedir. Bu uygulamada değişik özyineleme sayılarındaki 18. çerçeve için elde edilen görüntüler kıyaslanmıştır. Soldaki görüntüler ÇYÇÜKG ile elde edilmiş yaklaşımları sağdaki ise asıl görüntüyü göstermektedir. Destek katlıyöneyi olarak yönlü ortalama alınarak belirlenen destek kullanılmıştır.

Şekil 7.5, Şekil 7.6, Şekil 7.7 ve Şekil 7.8 sırasıyla 5, 10, 20 ve 30 özyineleme adımında elde edilmiş sonuçları göstermektedir. Şekillerden çıkarılan en açık sonucun özyineleme sayısı arttıkça tokmak deviniminin netleştiğidir. Bir öteki nokta ise arka plan (devinimsiz nesne saptayışı) ÇYÇÜKG ile düşük özyineleme adımlarında bile iyi sonuçlar vermektedir.

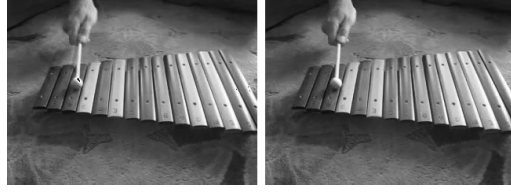


Şekil 7.5 : Bozboyalı “xylophone.mp4”, 5 özyineleme adımı, 18. çerçeve.

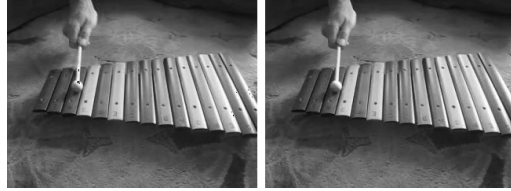


Şekil 7.6 : Bozboyalı “xylophone.mp4”, 10 özyineleme adımı, 18. çerçeve.

Bu uygulama için yönlü ortalamalı ve eş ögeli destek yöneyleri karşılaştırımı da yapılmış olup bu değişik iki destek katlıyöneylerinden yönlü ortalamalı destek



Şekil 7.7 : Bozboyalı “xylophone.mp4”, 20 özyineleme adımı, 18. çerçeve.



Şekil 7.8 : Bozboyalı “xylophone.mp4”, 30 özyineleme adımı, 18. çerçeve.

kathiyöneylerinin daha etkin sonuç verdiği gözlemlenmiştir. Bu sonuçlar, Çizelge 7.9 ile verilmiştir.

Çizelge 7.9 : Boz boyalı “xylophone.mp4”, değişik destek katlıyöneylerinde ÇYÇÜKG nitelik ölçenleri

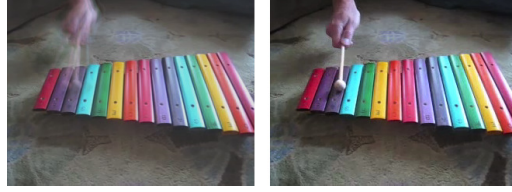
ÖS	$\sigma_{OEÖD}$	σ_{OYOD}
5	0.9943	0.9949
10	0.9968	0.9972
20	0.9989	0.9990
30	0.9997	0.9998
36	1.0000	1.0000

7.4.2 Boyalı canlandırım verilerinde ÇYÇÜKG

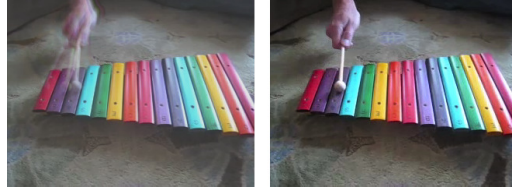
Bu uygulamada $240 \times 320 \times 3 \times 36$ türünde boyalı (RGB) verilerden oluşan canlandırım verisine ÇYÇÜKG uygulanmıştır. Burada boyalı veriye ÇYÇG uygulanırken veriler boyada birleştirimsiz olarak alınmış olup, al değeri için $240 \times 320 \times 36$, yeşil değeri için $240 \times 320 \times 36$ ve mavi renk için $240 \times 320 \times 36$ boyutlarında veriler elde edilmiştir. Bu al, yeşil ve mavi 3 yönlü dizilerine ÇYÇG uygulandıktan sonra birleştirilip yaklaşırtım için canlandırım elde edilmiştir. Canlandırım olarak Matlab'in kendi içinde yer alan ‘xylophone.mp4’le alınmıştır. Bu canlandırım ksilofon çalma esnasındaki tokmak devinimini içermektedir. Bu uygulamada değişik özyineleme sayılarındaki 18. çerçeve için elde edilen görüntüler karşılaştırılmıştır. Soldaki görüntüler ÇYÇÜKG ile elde edilmiş yaklaşırtımları sağdaki ise asıl çerçeveyi

göstermektedir. Matlab’da 32 basamakta sonuçlar elde edilmiş olup destek katlıyöneyi olarak da yönlü ortalamalardan elde edilen destekler kullanılmıştır. Her boya için ilgili 3 yönlüdüzi üzerinde ortalama alınarak destek oluşturulmuştur.

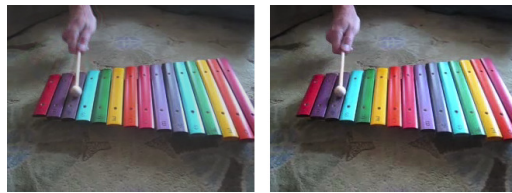
Şekil 7.9, Şekil 7.10, Şekil 7.11 ve Şekil 7.12 sırasıyla 5, 10, 20 ve 30 özyineleme adımında elde edilmiş sonuçları göstermektedir. Şekillerden çıkarılan en açık sonucun özyineleme sayısı arttıkça tokmak deviniminin netleştiğidir. Bir öteki nokta ise arka plan (devinimsiz nesne saptayışı) ÇYÇÜKG ile düşük özyineleme adımlarında bile iyi sonuçlar vermektedir.



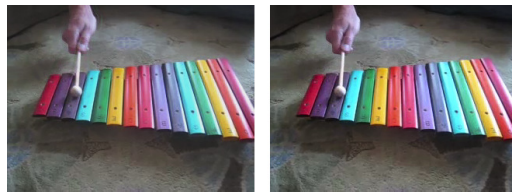
Şekil 7.9 : Boyalı “xylophone.mp4”, 5 özyineleme adımı, 18. çerçeve.



Şekil 7.10 : Boyalı “xylophone.mp4”, 10 özyineleme adımı, 18. çerçeve.



Şekil 7.11 : Boyalı “xylophone.mp4”, 20 özyineleme adımı, 18. çerçeve.



Şekil 7.12 : Boyalı “xylophone.mp4”, 30 özyineleme adımı, 18. çerçeve.

Çizelge 7.10’da, değişik destek katlıyöneyleyleri kullanımına ilişkin sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar incelendiğinde yönlü ortalamalı destek katlıyöneyleyi kullanımının eş ögeli destek kullanımından daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

Çizelge 7.10 : Boyalı “xylophone.mp4”verisi, değişik destek katlıyöneyleylerinde ÇYÇÜKG nitelik ölçenleri

ÖS	$\sigma_{OEÖD}$	σ_{OYOD}
5	0.993374	0.993934
10	0.996397	0.996855
15	0.998182	0.998295
20	0.998830	0.998915
25	0.999388	0.999407
30	0.999689	0.999760
36	1.000000	1.000000

ÇYÇÜKG uygulanacak bir başka canlandırım verisi¹ ise $180 \times 320 \times 3 \times 36$ türündedir ve yağmur altındaki çiçeklerin devinimini içermektedir. Bu verinin gerçek boyutu $360 \times 640 \times 3 \times 141$ türündedir. Ancak çok büyük verilerle uğraşmaktan kaçınmak için canlandırım yeniden boyutlandırılmıştır. Çerçeve sayısı 36 olarak alınmıştır. Canlandırım, yağmur ve çiçeklerin yağmur altındaki hareketinden oluşmaktadır. Burada ÇYÇÜKG her bir renk verisine ayrı ayrı uygulanmıştır. Boyada ayrışik ÇYÇÜKG kullanılmış olup elde edilen yaklaştıranlar yeniden birleştirilerek canlandırım verisi elde edilmiştir.

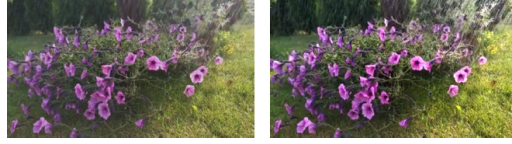
Şekil 7.13,Şekil 7.14, Şekil 7.15 ve Şekil 7.16 sırasıyla 5, 10, 20 ve 30 özyineleme adımlarındaki yönlü ortalama ile elde edilmiş ÇYÇÜKG sonuçlarını göstermektedir. Sonuçlar yukarıda olduğu gibi 18. çerçeve üzerinden verilmiş olup sağ yandaki resim asıl, sol taraftaki ise ÇYÇÜKG ile elde edilmiş yaklaştıranı göstermektedir.



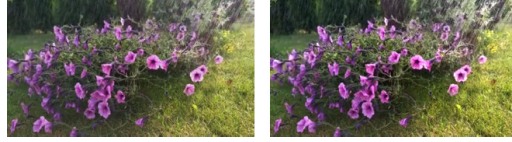
Şekil 7.13 : Boyalı “flowers.mp4”, 5 özyineleme adımı, 18. çerçeve.

Değişik desteklerin kullanımı bu uygulama içinde gündeme getirilmiş olup, Çizelge 7.11’de yaklaştıran ölçenleri değişik özyineleme adımları için verilmiştir.

¹<https://pixabay.com/en/videos/flowers-rain-summer-wet-garden-1806> bulunışında yer almaktadır.



Şekil 7.14 : Boyalı “flowers.mp4”, 10 özyineleme adımı, 18. çerçeve.



Şekil 7.15 : Boyalı “flowers.mp4”, 20 özyineleme adımı, 18. çerçeve.



Şekil 7.16 : Boyalı “flowers.mp4”, 30 özyineleme adımı, 18. çerçeve.

Çizelge 7.11 : Boyalı “flowers.mp4”, değişik destek katlıyöneylemelerinde ÇYÇÜKG nitelik ölçenleri

ÖS	$\sigma_{OEÖD}$	σ_{OYOD}
5	0.991222	0.991388
10	0.994074	0.994403
15	0.995895	0.995939
20	0.996977	0.997033
25	0.998074	0.999407
30	0.998975	0.999046
36	1.00000	1.000000

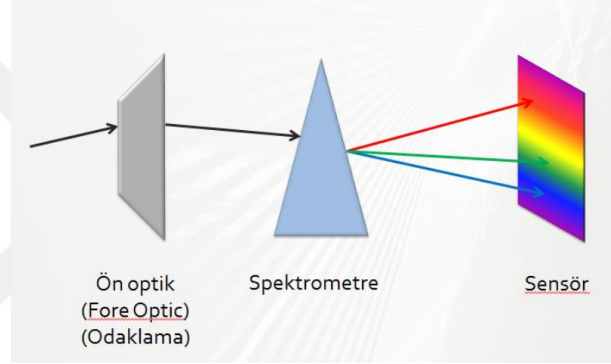
Ayrıca bozboyalı canlandırım verileri için PSNR ölçümleri Çizelge 7.12 ile verilmiştir.

Çizelge 7.12 : Bozboyalı canlandırım verileri için elde edilen PSNR sonuçları

ÖS	xylophone.mp4	flower.mp4
1	24.0376	27.3354
5	30.2559	29.6608
10	32.9384	31.2763
15	35.4426	32.5605
20	37.5787	33.9711
25	40.2378	35.7240
30	43.8265	39.0909

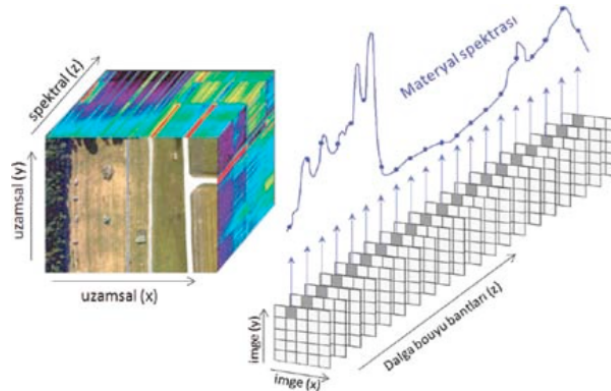
7.5 Aşkınizgecil (Hiperspektral) Verilerde ÇYÇÜKG

Aşkınizgecil (Hiperspektral) görüntü algılayıcıları standart görüntü algılayıcılarının evriğine elektromanyetik izgeden (spektrumdan) ardışık ve dar dalga boyu aralıklarında ($0.1 \mu\text{m}$ aralıklarla) yüzlerce bilgi toplayarak bu bilgiyi işlemektedir. Burada aşkınizgecilliği bant sayısından çok bantların ne kadar dar olduğudur. Bu nedenle her görüntü için yüksek spektral çözünürlük elde edilmektedir. Aşkınizgecil veriler elde edilirken görüntüleme Şekil 7.17'da verildiği gibi 3 adımda yapılmaktadır. Ön optik ışının odaklanmasını sağlar. Spektrometre ise gelen ışının izgecil (spektral) ekseninde izgesine ayrılarak duyarga (sensör) üzerinde değişik gözlemlere düşmesini sağlar. Böylece duyarga üzerinde okuma yapılarak aşkınizgecil veriye ulaşılmaktadır [81,82,113].



Şekil 7.17 : İzgecil görüntüleme.

Aşkınizgecil bir veri dendiğinde Şekil 7.18 ile gösterilen 3 boyutlu bir veriden söz edilmekte olup bu iki boyutun ilk ikisi uzamsal yapıyı, üçüncü boyut ise izgecil bilgiyi göstermektedir. Uzamsal konum (x,y) pikselin konumunu göstermekte olup o pikseldeki tek boyutlu veri ise izgecil im yada izgecil onayimi (imzayı) oluşturmaktadır [83].



Şekil 7.18 : Aşkınizgecil veri dikgençökyüzlüsü ve izgecil im.

Aşkınizgecil (Hiperspektral) görüntü, uzaktan algılamada önemli bir araştırma konusudur. Birçok uygulama alanda kullanılmaktadır. Örneğin arkeolojik alan saptayışında, hava kirlilik ölçümlerinde, uyduruk ilaç saptayışında, geri dönüşüm ayrıştırımında, petrol keşfinde, askeri hedef ve kamuflej saptayışında ve daha bir çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bunun nedeni ise nesnelere veya malzemelerin daha önceden belirlenmiş izgecil onayimleri aracılığıyla kolayca saptanabilmesidir ve bu nedenle uygulama alanları geniştir [83–85].

Aşkınizgecil (Hiperspektral) veriler çok sık ve çok dar bant genişliğinde elde edildiğinden çok geniş verilerdir. Bu sorun sıkıştırma sorununu beraberinde getirmektedir [85]. Bu bölümde hiperspektral veri üzerine yöntemimiz ÇYÇÜKG'yi uygulayıp sıkıştırma yapılacaktır. Bu bağlamda ÇYÇÜKG 3 farklı aşkınizgecil veri üzerine etki ettirilecektir. Bu veriler AVIRIS duyargası ile elde edilmiş NASA verileridir². Bu veriler ayarlanmış (ing: calibrated) veriler olup, bu verilere ilişkin özellikler Çizelge 7.13 ile verilmiştir.

Çizelge 7.13 : AVIRIS aşkınizgecil verilerinin özellikleri [99]

Ad (H)	Örnek Sayısı	Çizgi Sayısı	Bant Sayısı	Bit	Uçuş Numarası	Yıl
Jasper Akarsuyu	614	2587	224	16	f970403t01p02_r03	1997
Düşük Yükselti	614	1432	224	16	f970623t01p02_r07	1997
Lunar Gölü	614	3689	224	16	f960705t01p02_r05	1996

Bu çalışmada çok yüksek boyutlu veri ile çalışmamak ve daha önce yapılmış çalışmalar ile karşılaştırabilmek amacı ile veriler $512 \times 512 \times 224$ olarak kırılmıştır. Ayrıca destek yöneyleri olarak OYOD kullanılmış olup sonuçlar bu destek kullanımı altında verilmiştir.

Aşkınizgecil verilerde ÇYÇÜKG yönteminin etkinliğini göstermek amacı ile bps (bit per sample)'ye göre elde edilen PSNR sonuçları verilmiştir. ÇYÇÜKG yöntemi bağlamında bps özyineleme sayısına bağlı bir işlev olarak aşağıdaki gibi verilir.

$$bps(\ddot{O}S) = \frac{[(I \times J + K) \times (\ddot{O}S + 1) + 3\ddot{O}S] \times 64}{I \times J \times K \times 16} \quad (7.21)$$

Örneğin 1 özyineleme adımı için bps değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$bps(1) = \frac{[(512 \times 512 + 224) \times 2 + 3] \times 64}{512 \times 512 \times 224 \times 16} \approx 0.035. \quad (7.22)$$

²http://aviris.jpl.nasa.gov/data/free_data.html bulunağında yer almaktadır.

Çizelge 7.14 : ÇYÇÜKG yönteminin ve bilimsel yazındaki çeşitli kayıplı sıkıştırma yöntemlerinin aşkınizgencil veriler üzerindeki başarımları [97,98,113].

BPS	YÖNTEM	AŞKINIZGECİL GÖRÜNTÜLER (H)		
		Jasper Akarsuyu	Düşük Yükselti	Lunar Gölü
0.1	BCS PL-3DBS + 3DWPT	56.78	54.70	61.34
	BCS PL-2DBS + 2D DDWT	50.60	47.97	54.62
	BCS SPL-2DBS + 2D DDWT	50.30	48.02	54.05
	CPPCA	30.20	47.47	48.43
	SIP	58.06	58.34	58.86
	gOMP	59.40	59.79	58.37
	BP	59.41	59.96	59.55
	LASSO	59.30	59.59	59.54
	TFEMPR (ÖS=5)	71.62	72.41	75.52
	0.3	BCS PL-3DBS + 3DWPT	64.21	61.74
BCS PL-2DBS + 2D DDWT		54.18	51.67	59.39
BCS SPL-2DBS + 2D DDWT		53.67	51.46	58.18
CPPCA		71.31	60.98	72.19
SIP		66.74	66.18	70.71
gOMP		70.01	70.28	73.84
BP		69.23	70.16	73.85
LASSO		70.67	68.85	73.34
TFEMPR (ÖS=16)		81.77	80.33	82.21
0.5		BCS PL-3DBS + 3DWPT	69.95	67.08
	BCS PL-2DBS + 2D DDWT	57.11	54.45	63.06
	BCS SPL-2DBS + 2D DDWT	56.45	54.40	61.35
	CPPCA	76.40	70.01	76.82
	SIP	71.34	71.20	72.39
	gOMP	71.14	72.68	74.92
	BP	71.71	73.24	76.55
	LASSO	73.17	73.52	75.20
	TFEMPR (ÖS=27)	84.19	82.44	83.35

ÖS: Özyineleme Sayısı

Burada 1 özyineleme için bps değerinin çok küçük olduğunu görebiliriz. Bilimsel yazında verilen yöntemler ile karşılaştırabilmek amacı ile bps değerini yükseltmemiz gerekmektedir. Bu da özyineleme sayısının artırılması gerektiğini anlatmaktadır. $\text{ÖS} > 5$ olacak biçimde sonuçlar Çizelge 7.14’de paylaşılmıştır.

Bilimsel yazında yer alan diğer yöntemlerden değişik olarak veriden bağımsız bir ayrıştırma yöntemi olan ÇYÇÜKG yöntemi, öteki yöntemler gibi kayıplı sıkıştırma yöntemi olarak kullanılabilir ve bilimsel yazında yaygın olarak kullanılan sıkıştırma yöntemleri ile karşılaştırabilir. Bu nedenle burada Çizelge 7.14’de verilen yöntemlerden kısaca söz etmemiz gerekir.

Bilindiği gibi aşkınizgecil veriler doğası gereği yüksek ilintili (korelasyonlu) verilerdir. Verilerin ilintisizleştirilmesi Temel Bileşen Analizi (TBA, ing: Principal Component Analysis (PCA)) ile elde edilebilir ancak bilgisayarım karmaşıklığı çok yüksektir [86, 87]. Bu da bilgisayarım ederini arttırmaktadır. Bu bilgisayarım sıkıntısı ile başedebilmek için, bilimsel yazında bilgisayarım yükünü şifre çözücüye (ing: decoder part) kaydırarak alternatif geriçatma (ing: reconstruction) stratejisi olarak ingilizce adıyla, Compressive-Projection PCA yöntemi geliştirilmiş olup [88, 89], yöntem AVIRIS verilerine uygulanmıştır. Daha önceden elde edilmiş bu sonuçlar Çizelge 7.14 ile verilmiştir [97, 98].

Çizelgede sonuçları verilen diğer yöntemler ise, seyrek kodlamaya(ing: sparse-coding) ve sözlük öğrenme (ing: dictionary learning) algoritmasına dayalı veriye özel (ing: data specific) sıkıştırma yöntemleridir [90–94].

Seyrek gösterilimler; ingilizce adı ile Greedy Pursuit algoritmaları [92, 95] ve ℓ_p norm düzenleme tabanlı (ing: ℓ_p norm regularization based) algoritmalar olarak 2 gruba ayrılabilir [96, 97]. Matching Pursuit algoritmaları Greedy Pursuit Algoritmalarının öncüsüdür. Bu algoritma ℓ_0 normuna göre enküçükleme (ing: minimization) yapmayı amaçlar. Sözlük öğeleri her adımda tüm sözlükten seçilir. Bu, bir öğenin birden çok seçilme durumuna sebep olur ki istenilen bir durum değildir. Bu durumun üstesinden gelebilmek amacı ile Orthogonal Matching Pursuit (OMP) algoritması geliştirilmiştir [95–97]. Bir adımda birden çok öğe seçilmesi ile de OMP, gOMP olarak genişletilmiştir.

Basis Pursuit (BP) algoritması ℓ_p norm düzenlemesine dayalı algoritmadır. SIP, yüksek boyutlu verilerdeki ℓ_1 norm düzenleme sorunlarını çözmek için ortaya çıkmıştır. Adım belirlemek için Önceden Eğitilmiş Eşlenik Yön (ing: Preconditioned Conjugate Gradient) algoritmasını kullanır. İngilizce adları ile Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO) yöntemleri ise yine ℓ_1 normuna dayalıdır, ancak tabanında ingilizce adıyla Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) yöntemini kullanırlar [96–98].

ℓ_p normuna dayalı yöntemler sınıfındaki bir diğer yöntem ise ingilizce adıyla Bayesian Compressive Sensing (BCS)'dir. Bu gösterilim, 2 boyutlu resmin alt öbeklere ayrılarak her bir öbeğe yöntemin ayrı ayrı işlenmesine dayalıdır [97, 98]. Bu yöntem tabanında

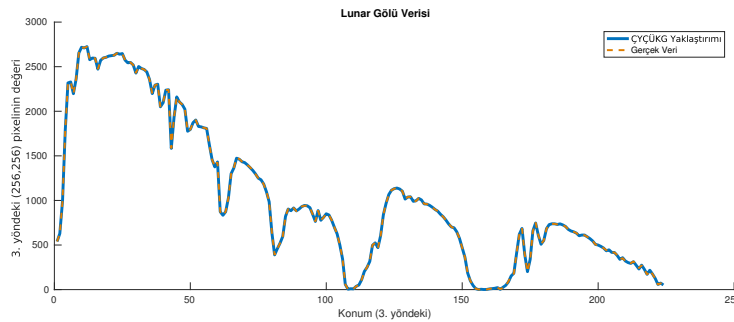
Çizelge 7.15 : Lunar Gölü aşkınizgecil verisi için ÇYÇÜKG sonuçları

ÖS	BPS	PSNR	Yaklaştırım Niteliği
25	0.4	82.8966	0.9999918
50	0.8	84.5927	0.9999945
75	1.2	85.7693	0.9999958
100	1.6	87.0644	0.9999968
125	2	88.6697	0.9999978
150	2.4	90.0118	0.9999984

ingilizce adıyla Projected Landweber (PL) iterasyonunu kullanır. Çizelgede bu yöntemin çeşitli boyutlarda dönüşüm, filtre ve büzleştirme işleçleri altında geliştirilen türevleri için sonuçlar verilmiştir [97, 98]. (3DWPT: 3 Dimensional Wavelet Packet Transform, 3DBS: 3 Dimensional Bivariate Shrinkage)

Çizelge 7.14’de 3 değişik veri için değişik bps değerlerinde ÇYÇÜKG ve öteki yöntemler için PSNR değerleri verilmiştir. Bu değerler incelendiğinde ÇYÇÜKG yönteminin çizelgedeki diğer tüm yöntemlerden daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Çizelgede diğer yöntemlerdeki bps değerlerine erişebilmek için 0.1 bps’de 6 özyineleme adımı, 0.3 bps ve 0.5 bps değerlerinde ise sırasıyla 20 ve 30 özyineleme adımı kullanılmıştır.

Çizelge 7.13’de verilen 3 değişik aşkınizgecil veri için daha yüksek özyineleme sayılarında durumu görmek amacı ile PSNR ve ÇYÇÜKG yönteminin nitelik ölçeni olan σ değerlerine göre sonuçlar çizelgeler ile verilmiştir. Ayrıca her bir veri için 256×256 konumundaki pixelin oluşturduğu izgecil imler çizdirilmiştir. Çizelge 7.15, Lunar Gölü verisine ilişkin özyineleme sayısına bağlı değişen PSNR ve σ değerlerini; Şekil 7.19 ise bu veri için 150 özyineleme adımında elde edilen ÇYÇÜKG yaklaştırımı ile gerçek verinin 256×256 konumunda çizdirilmiş izgecil imini göstermektedir.

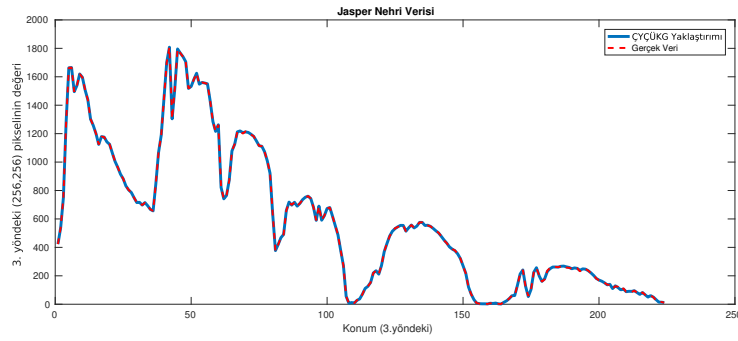


Şekil 7.19 : Lunar Gölü aşkınizgecil verisi, 256x256 pixelindeki izgecil im.

Çizelge 7.16 : Jasper Akarsuyu aşkınizgecil verisi için ÇYÇÜKG sonuçları.

ÖS	BPS	PSNR	Yaklaşım Niteliği
25	0.4	83.0167	0.9999755
50	0.8	85.7080	0.9999868
75	1.2	86.9874	0.9999902
100	1.6	88.2913	0.9999927
125	2.0	89.6401	0.9999946
150	2.4	91.1007	0.9999962

Çizelge 7.16, Jasper Akarsuyu verisine ilişkin özyineleme sayısına bağlı değişen PSNR ve σ değerlerini; Şekil 7.20 ise bu veri için 150 özyineleme adımında elde edilen ÇYÇÜKG yaklaşımını ile gerçek verinin 256×256 konumunda çizdirilmiş izgecil imini göstermektedir.

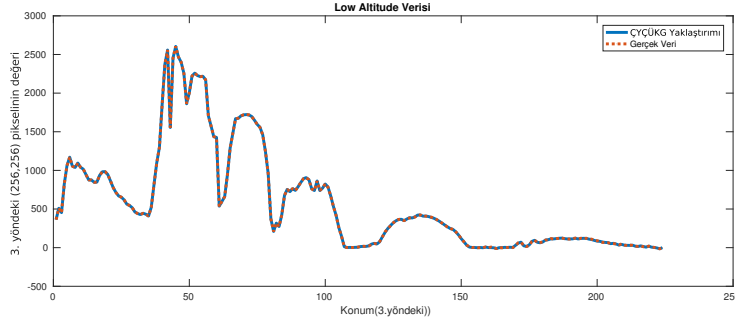


Şekil 7.20 : Jasper Akarsuyu aşkınizgecil verisi, 256×256 pixelindeki izgecil im.

Çizelge 7.17, Düşük yükselti (Low Altitude) verisine ilişkin özyineleme sayısına bağlı değişen PSNR ve σ değerlerini; Şekil 7.21 ise bu veri için 150 özyineleme adımında elde edilen ÇYÇÜKG yaklaşımını ile gerçek verinin 256×256 konumunda çizdirilmiş izgecil imini göstermektedir.

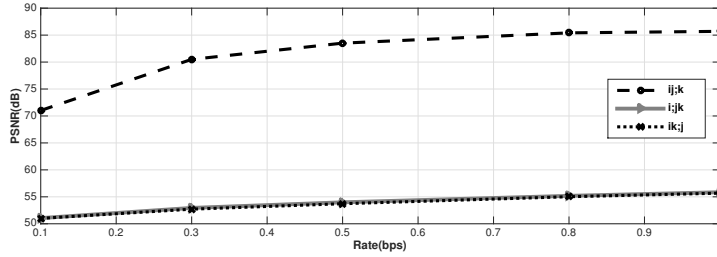
Çizelge 7.17 : Düşük yükselti aşkınizgecil verisi için ÇYÇÜKG sonuçları

ÖS	BPS	PSNR	Yaklaşım Niteliği
25	0.4	81.6208	0.9999715
50	0.8	83.8801	0.9999830
75	1.2	85.0906	0.9999872
100	1.6	86.2197	0.9999901
125	2.0	87.4191	0.9999925
150	2.4	88.8485	0.9999946



Şekil 7.21 : Düşük yükselti aşkınizgecil verisi, 256x256 pikselindeki izgecil im.

Aşkınizgecil veriler için hangi tür ayrıştırım seçiminin en iyi olduğu durumu da incelenmiştir. Burada aşkınizgecil veri yapısı tür ayrıştırımı için belirleyici olmuştur. Bunun nedeni ise ilk iki yönün uzamcıl koordinatları, üçüncü yönün ise o uzamcıl noktadaki izgeyi göstermesidir. Bu yapı $A_{i,j,k}$ seçiminin en iyi olduğu sonucuna bizi götürmektedir ve bu sonuç Jasper Akarsuyu için Şekil 7.22 teki gibi verilmiştir.



Şekil 7.22 : Farklı tür ayrıştırımlarında Jasper Nehri için PSNR sonuçları.

$A_{i,j,k}$ seçiminin en iyi sonucu vermesi, aşkınizgecil verinin yapısındaki, izgecil yöndeki ("k") güçlü korelasyondan kaynaklanmaktadır. Şekil 7.22'e göre i, j, k en iyi ayrıştırım, i, k, j ve ik, j ise hemen hemen aynı değerlerde olup i, k, j daha iyidir.

7.6 4-Boyutlu Verilerde ÇYÇÜKG Uygulamaları

Bu bölümde ÇYÇÜKG yönteminin işlerliğini yüksek boyutlarda da göstermek amacıyla uygulamalar verilmiştir. Uygulamalarda 4 yönlü diziler üzerinde çalışılmış olup $X_{i,j,k,l}$ tür ayrıştırımı ele alınmıştır. Başlangıç destek katlıyöneyleleri olarak olağanlaştırılmış yönlü ortalama destekleri (OYOD) kullanılmıştır.

İlk olarak aşağıda verilen $5 \times 4 \times 5 \times 5$ türünde salınlımlı işlevler aracılığıyla elde edilmiş 4 yönlü yapay veri üzerine ÇYÇÜKG uygulanmıştır.

$$X(i, j, k, l) = \sin(100il)^3 \cos(20(j+k))^3 \quad (7.23)$$

Bu veri kümesi için tür ayrıştırımı taban alındığında 20 adımda asıl verinin elde edilmiş olması gerekmektedir. Aşağıdaki çizelgede 5 özyineleme adımında elde edilen çekirdek dizeyi parametreleri değerleri ve yaklaştırım niteliği verilmiştir. Bu çizelgede 4. adımda asıl veri elde edilmektedir.

Çizelge 7.18 : 4 yönlü yapay veri için ÇYÇÜKG sonuçları

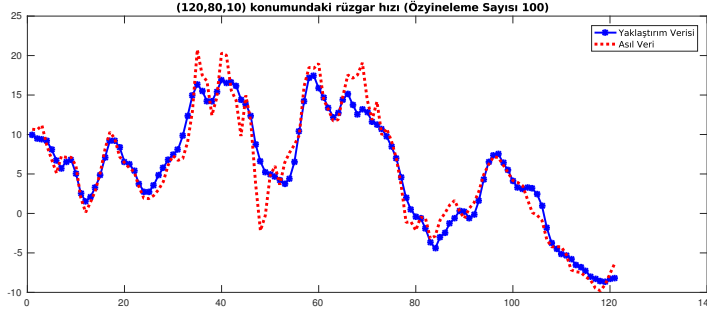
ÖS	alfa	beta	gama	Yak. Niteliği
1	1.8050	0.6031	0.4764	0.3097
2	0.3836	0.8663	0.7075	0.4223
3	-2.3411	0.1110	1.1206	0.9654
4	-0.6559	0.0000	0.0000	1.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

MATLab’da 32 basamak duyarlılıkta, 20 adım için yanılığ değeri $MSE = 2.2542e - 33$ elde edilmiştir. Bu da beklenen sonuçtur.

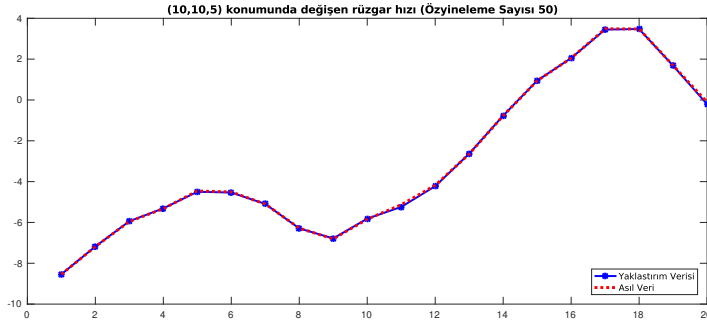
Bir diğer uygulama olarak ÇYÇÜKG yönteminin işlerliğini yüksek boyutlardaki gerçek veri kümesi üzerinde de göstermek amacıyla $235 \times 169 \times 29 \times 121$ türünde 4 boyutlu iklim verisi ele alınmıştır. Bu veri için $X_{i,j,kl}$ tür ayrıştırımı kullanılmıştır.

Veri hakkında detaylı bilgi vermek gerekirse, bu veri WRF atmosfer modeli ile Akdeniz üzerinde 27 km yersel çözünürlüğe sahip bir benzetim tarafından üretilmiştir. Veri 4 boyutlu olup, zaman, seviye, enlem ve boylama göre rüzgar hızını ıcermektedir. Atmosferde bilindiği gibi yükseklik ile birlikte rüzgar hızı artmaktadır. Rüzgar hızının eksi olması ise bunun boylam olarak doğu yönünde değil, batı yönünde estiğini göstermektedir.

$235 \times 169 \times 29 \times 121$ boyutundaki esinti hızı verisine 100 özyineleme adımında ÇYÇÜKG uygulanmış olup sonuçlar aşağıdaki Şekil 7.23 ile verilmiştir. Bu şekilde yaklaştırımın çok iyi olmadığı gözlemlenmektedir. Bu, veri boyutunun büyük olmasına karşın özyineleme sayısının az olmasından kaynaklanmaktadır. Tür ayrıştırımı seçimi nedeniyle, sağ ve sol örgü boyutlarından en küçük olan 29×121 kadar özyineleme adımında tam olarak veriyi elde etmemiz gerekmektedir. Bu nedenle 100 özyineleme adımı, asıl veri için iyi bir yaklaştırım vermemektedir. Bu amaçla veri boyutu $20 \times 20 \times 10 \times 20$ türünde kırılarak yeniden boyutlandırılmış ve elde edilen bu veriye ÇYÇÜKG uygulanmıştır. Sonuçlar Şekil 7.24 ile verilmiştir.



Şekil 7.23 : İklim verisi, 100 özyineleme adımı, ÇYÇÜKG sonucu.



Şekil 7.24 : Yeniden boyutlandırılmış iklim verisi, 50 özyineleme adımı, ÇYÇÜKG sonucu.

Yeniden boyutlandırılmış $20 \times 20 \times 10 \times 20$ türündeki veri için ÇYÇÜKG yaklaşım niteliği sonuçları aşağıda verilmiştir.

Çizelge 7.19 : Yeniden boyutlandırılmış iklim verisinin ÇYÇÜKG nitelik ölçenleri

Ö.S.	10	20	30	40	50
σ	0.9965	0.9989	0.9995	0.9997	0.9999

7.7 Bilimsel Yazındaki Diğer Yöntemlerle Karşılaştırma

Uygulayışlara ilişkin bu alt kesimde, ÇYÇÜKG yöntemi bilimsel yazında ayrıştırma yöntemi olarak yaygın olarak kullanılan Tucker ve CP ayrıştırımları ile karşılaştırılacaktır [4, 5, 18–20, 28, 57]. Tucker, CP ve ÇYÇÜKG ayrıştırma yöntemleri gerçek veri kümeleri üzerinde uygulanmış, karşılaştırma ölçütü olarak da bağıl yanılığın değerleri ele alınmıştır. Tucker ve CP için MATLAB programında Tensor Araç Kutusu (ing: toolbox) kullanılmıştır [102]. Tucker ve CP ayrıştırımların altyapısında en çok kullanılan yöntem Alternating Least Square (ALS) olduğu için, araç kutusundaki altyapısında ALS kullanan Tucker ve CP ayrıştırımları kullanımı yeğlenmiştir.

Çizelge 7.20 : Değişik yöntemler için çeşitli veri kümelerinde bağıl yanılığın sonuçları

Özdüzyey	Veri	Ayrıştırım Yöntemleri		
		Tucker	CP	ÇYÇÜKG
1	Aminoasit Verisi	$1.976e-01$	$1.976e-01$	$6.166e-02$
	Enzim Verisi	$1.195e-02$	$1.195e-02$	$5.901e-03$
	Elektronik Burun Verisi	$5.374e-04$	$5.374e-04$	$5.237e-04$
5	Aminoasit Verisi	$9.190e-05$	$2.614e-04$	$7.982e-05$
	Enzim Verisi	$2.374e-03$	$3.877e-03$	$0.00e+0$
	Elektronik Burun Verisi	$8.218e-07$	$6.032e-06$	$6.506e-07$

Çizelge 7.21 : "xylophone.mp4" için değişik özdüzeylerde bağıl yanılığın sonuçları

Özdüzyey	Tucker	CP	ÇYÇÜKG
10	$1.382e-02$	$1.478e-02$	$1.745e-03$
20	$7.880e-03$	$9.615e-03$	$5.662e-04$
30	$4.961e-03$	$7.256e-03$	$1.351e-04$

Karşılaştırım için sırasıyla $5 \times 201 \times 61$ türünde aminoasit verisi [15, 103], $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ türünde $9 \times 9 \times 5$ olarak yeniden boyutlandırılmış enzim verisi [104] ve $18 \times 241 \times 12$ türünde iyi ve kötü meyanköklerini birbirinden ayırmak için kullanılan elektronik burun (ing: e-nose) verisi [105] kullanılmıştır³. Bu verilerin yanısıra canlandırım uygulamalarında ele alınan "xylophone.mp4" verisi üzerinde de bu üç ayrıştırım yöntemi için karşılaştırım yapılmıştır.

Çizelge 7.20 değişik yöntemlerin çeşitli veri kümelerine uygulanışı sonucu elde edilen bağıl yanılığın sonuçlarını içermektedir. Bu çizelgede özdüzyey aynı zamanda ÇYÇÜKG yöntemi için özyineleme sayısını da göstermektedir. Çizelge 7.20'da verilen bağıl yanılığın sonuçlarına göre ÇYÇÜKG yönteminin diğer yöntemlere göre daha iyi yaklaştırım elde ettiği gözlemlenmiştir. Ayrıca enzim verisine 5 özyineleme adımında ÇYÇÜKG uygulandığında elde edilen bağıl yanılığın değerine göre, asıl veri tam olarak elde edilmektedir. Bu, ÇYÇÜKG yönteminin yapısı gereği elde edilmesi gereken bir sonuçtur.

Ayrıca, 7.4 altkesiminde ele alınan boz boyalı xylophone.mp4 canlandırım verisi üzerine de aynı yöntemler uygulanmış ve bağıl yanılığın sonuçları elde edilmiştir. Bu sonuçlar Çizelge 7.21'de verilmiştir.

Bu altkesimde bağıl yanılığın yanısıra, yöntemlerin bilgisayarım süreleri ile ilgili de sayısal sonuçlar paylaşılmıştır. Bu verilere ilişkin cpu zamanları da benzer

³Bu verilere <http://www.models.life.ku.dk/datasets> bulanağından erişilebilir.

Çizelge 7.22 : Değişik yöntemler uygulayışı altında çeşitli veri kümeleri için bilgisayarım süreleri

Özdüzyey	Veri	Ayrıştırım Yöntemleri		
		Tucker	CP	ÇYÇÜKG
1	Aminoasit Verisi	0.62	0.21	0.04
	Enzim Verisi	0.52	0.21	0.01
	Elektronik Burun Verisi	0.56	0.22	0.03
	xylophone.mp4	0.69	0.24	1.35

biçimde elde edilmiştir. Çizelge 7.22 ile verilen bilgisayarım sürelerine göre, ÇYÇÜKG yönteminin ilk 3 veri için bilgisayarım süresi açısından daha hızlı olduğu, canlandırım verisinde daha yavaş olduğu görülmektedir. Bunun nedeni ise ÇYÇÜKG yönteminin tamsayılı verilerde taşmalar nedeniyle düzeltme işlemine gereksinim duymasıdır. Ayrıca Tucker ve CP için kullanılan uzışler, Tensor Toolbox içinde olup eniyilenmiş uzışlerdir ancak yazılan ÇYÇÜKG uzışı (ing: algoritması) eniyilenmiş bir uzış değildir.

Bilimsel yazında veri türüne göre özellikle tamsayılı ve ikili sayı (0,1) verilerinde Tucker ve CP ayrıştırım yöntemleri için iyileştirme çalışmaları sürdürülmektedir. Benzer durum ÇYÇÜKG yöntemi için de geçerli olup, bu tezde de iyileştirme gerekliliği sayısal sonuçlar ile ortaya konulmuştur.

Bu kesimde aynı zamanda [57] referansında ortaya konulmuş olan ÇYÇÜDG yönteminin uygulandığı Lena⁴ test görüntüsü ele alınmış ve ilgili referanstaki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. ÇYÇÜDG yöntemi Lena görüntüsü üzerine 50 ve 100 özyineleme sayısında etki ettirildiğinde sırasıyla bağıl yanılığ değerleri 0.0615 ve 0.0288 olarak elde edilmiştir [57]. ÇYÇÜKG yönteminde ise, aynı Lena test görüntüsü için 1 özyineleme adımında bağıl yanılığ değeri 0.0091, bilgisayarım süresi 0.1 olarak elde edilmiştir.

7.8 ÇYÇÜKG Yönteminin Sıkıştırma Oranı

ÇYÇÜKG yöntemi yukarda da belirttiğimiz üzere çokyönlü diziler için bir ayrıştırım ve aynı zamanda çarpanlara ayırma yöntemidir. Bu alt bölümde yöntemin sıkıştırma

⁴ [57]'de kullanılan bu veri $256 \times 256 \times 3$ boyutunda boyalı görüntü verisidir.

oranını açıklayabilmek için (6.28) denklemini burada yeniden ele alalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{G_L;G_R} = & \sum_{\ell=1}^{\min\{m,n\}} \alpha_{\ell} \mathbf{U}_{G_L;^{(\ell)}} \mathbf{V}_{G_R;^{(\ell)}}^T + \sum_{\ell=1}^{\min\{m,n\}-1} \beta_{\ell} \mathbf{U}_{G_L;^{(\ell+1)}} \mathbf{V}_{G_R;^{(\ell)}}^T \\ & + \sum_{\ell=1}^{\min\{m,n\}} \gamma_{\ell} \mathbf{U}_{G_L;^{(\ell)}} \mathbf{V}_{G_R;^{(\ell+1)}}^T \end{aligned} \quad (7.24)$$

Denklemden de anlaşılacağı gibi katlıdizeyi tam olarak elde edebilmek için $\min\{m,n\}$ özyineleme adımı yeterlidir. $\min\{m,n\}$ özyineleme adımından daha düşük özyineleme adımları ile asıl katlıdizeye yaklaştırm elde etmek olasıdır. Bu biçimde belirli düzeyde özyineleme ile belirli düzeyde yaklaştıranlar elde edilmiş olur. (6.28) denkleminin sağ yanı incelendiğinde, yaklaştırm katlıdizeyi için α, β, γ sayıllarının yanısıra destek katlıyöneylelerini bellekte tutmak gerektiğini görmekteyiz. Tüm bunlar göz önünde bulundurularak bir $k < \min\{m,n\}$ sayısı ve $I_1 \times I_2 \times I_3$ türündeki 3-yönlüdüzi için yöntemimizin sıkıştırma oranı aşağıdaki gibi belirlenmektedir.

$$\frac{k \times (I_1 \times I_2 + I_3) + I_3 + 3 \times k - 1}{I_1 \times I_2 \times I_3} \quad (7.25)$$

Bu sıkıştırmanın belirli düzeyde kesmelerden yola çıkılarak elde edilmesi nedeniyle yitimli bir sıkıştırma yöntemi olacağı apaçıktır.

$240 \times 320 \times 36$ türündeki Bölüm 7.4'de ilgilenilen "xylophone.mp4" bozboyalı canlandırım verisi için 20 özyineleme adımında sıkıştırma oranı,

$$\frac{20 \times (240 \times 320 + 36) + 36 + 3 \times 20 - 1}{240 \times 320 \times 36} \approx 0.56 \quad (7.26)$$

olarak elde edilir. Andıran biçimde aynı canlandırım verisinin boyalı olanı için ise bu sıkıştırma oranını aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{3 \times 20 \times (240 \times 320 + 36) + 3 \times 36 + 3 \times 3 \times 20 - 3}{240 \times 320 \times 3 \times 36} \approx 0.56 \quad (7.27)$$

Burada her bir renk için ÇYÇÜKG uygulandığı için 3 çarpanı gelmektedir ancak bu sıkıştırma oranını değiştirmemektedir.

7.9 ÇYÇÜKG Yönteminin Bilgisayım Karmaşıklığı

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ ve $I_1 = I_2 = \dots = I_N = I$ olmak üzere yüksek kerten Tekil değer ayrıştırımının (ing: HOSVD) bilgisayarım karmaşıklığı $\mathcal{O}(I^{(N+1)})$ olarak bilimsel

yazında yer almaktadır [106]. ÇYÇÜKG yöntemi incelendiğinde, bilgisayar karmaşıklığı $\mathcal{O}(I^N)$ olduğu görülmüştür.

ÇYÇÜKG yönteminin en önemli özelliklerinden biri de, bilgisayar karmaşası yüksek mertebeden TDA yönteminden düşük olmasına karşın, köşegencilikten ödün veriyor olmasıdır. Ayrıca TDA iteratif bir yöntem olup, yapısında dizey evriği alma işlemi bulundururken; ÇYÇÜKG yöntemi özyinelemeli ve evrik alma işlemi bulundurmayan bir yöntemdir.

ÇYÇÜKG yönteminde özyineleme sayısı arttıkça yaklaştırım niteliğinin artış hızı azalmaktadır. Bu, ilk adımlarda belirlenen destek katlıyöneylemlerinin baskın olmasından kaynaklanmaktadır. Bu aynı zamanda, özyineleme sayısı arttıkça dış çarpımlardan gelen katkıların (α, β, γ değerlerinin) sifira çok çok yakın değerler olarak ortaya çıkması anlamına gelmektedir. Bu nedenle özyineleme sayısı arttıkça, PSNR değerleri artmakta ancak PSNR değerlerindeki artış hızı azalmaktadır.

8. SONUÇLAR

Bilimsel yazında yer alan birçok ayrıştırım yöntemi, bir dizeyden veya bir çokyönlü diziden anlamlı bilgileri/özelliklerini ortaya çıkaracak yöney/dizey/çokyönlü dizi çarpanları şeklinde yazma felsefesine dayanmaktadır. Bu çarpanlar belirlenirken tüm bilimsel sorunlarda olduğu gibi az eder ile daha iyi sonuç elde etmek veya yaklaştırım elde etmek tabandır. Çokyönlü dizi ayrıştırımı olarak bu savda geliştirilen ÇYÇÜKG yöntemi bir çokyönlü diziyi katlıdizey olarak ele alıp, katlıyöneyleyin dışçarpımlarından oluşan, başka bir deyişle çarpanlarının katlıyöneyleyin biçiminde olduğu, bir ayrıştırımdır. Katlıdizey kullanımı, bilimsel yazındaki yöntemlerin her yönde ayrıştırım zorluğundan kaçınmak ve ikili ayrıştırım (ing: binary decomposition) elde etmek amacıyla ortaya çıkmıştır. Bu biçimdeki ayrıştırım her yöndeki ayrıştırımın bilgisayarım ederini azaltmaktadır.

ÇYÇÜKG yöntemi bilimsel yazındaki iteratif yöntemlerin aksine sayıtım (istatistiksel) tabanlı ve özyinelemeli (ing: recursive) bir yöntemdir. Ayrıca bilimsel yazında yer alan yöntemlerden farklı olarak yapısında dizey evriği alma işlemini bulundurmamaktadır. Bilindiği gibi dizey evriği alma işlemini bilgisayarım ederi yüksek bir işlemdir özellikle veri boyutu çok büyükse.

ÇYÇÜKG, yöntemin yapısı gereği iki tür esnekliğe sahiptir:

- 1. Tür Ayrıştırımı:** ÇYÇÜKG yönteminde katlıdizey kullanımı sonucu elde edilen ikili ayrıştırım yapısı, sağ ve sol örgülerin nasıl seçilmesi gerektiği sorusunu doğurmuştur. Bu esneklik bu savda tür ayrıştırımı (ing: decomposition type) olarak adlandırılmıştır. Evrencil bir seçim bulunmamasına karşın veriler arasındaki korelasyonun bu seçimde etkin olduğu saptanmıştır.
- 2. Başlangıç Desteklerin Seçimi:** Başlangıç destek katlıyöneyleyin seçimi, temelinde bulunan öteki yöntemler gibi ÇYÇÜKG yönteminde de esneklik olup, en iyi destek belirlenimi ile ilgili bilimsel yazında çalışmalar bulunmaktadır. Bu savda özelsiz eğilim olan asıl çokyönlü diziden yönlü ortalama alınarak elde edilen

destek kullanımı gündeme getirilmiştir. Bu biçimdeki seçim, çok özyineleme adımına gerek duyulmaksızın, etkin bir yaklaşımla elde edilmesini sağlamaktadır. Ayrıca her özyineleme adımında elde edilen birbirine dik bir şekilde belirlendiği için dikgen bir taban takımı da elde edilmektedir. Ayrıca desteklerin etkinliği asıl çökyönlü diziden elde edilen ağırlıklar ile artırılabilir. Bu şekilde seçimler üçköşegen çekirdek dizeyin köşegen baskınlığını arttırmaktadır. Ancak ağırlıklandırma derecesi arttıkça işlem ederini arttırdığı için çok yüksek derecede ağırlık kullanımı yeğlenmemiştir.

Uygulamalardan elde edilen sonuçları aşağıdaki gibi sırasaylandırabiliriz:

- Gerçek yaşama ilişkin veri türü olan görüntü ve canlandırma verileri üzerinde ÇYÇÜKG yönteminin işlevliliğini gösterebilmek amacıyla sınıyışlar gerçekleştirilmiş olup yöntemin etkinliği yöntemin nitelik ölçeni ve bilimsel yazında çok kullanılan bir ölçen olan PSNR değerleri ile sayısal olarak doğrulanmıştır. Ayrıca görüntünün yeniden oluşturulması (ing: reconstruction) sorunlarında işler olduğu gözlemlenmiş, özellikle arka görünüm kestiriminde (ing: background reconstruction) özyinelemenin ilk adımlarında bile iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Canlandırma verileri ile ilgilenirken, ÇYÇÜKG yöntemine ilişkin iyileştirme yapılması gereken bir durum ile karşı karşıya kalınmıştır. ÇYÇÜKG yöntemi sürekli aralıkta çalışan bir yöntemdir ve tam sayılı verilerde çalışıldığında verilerde taşmalar gözlemlenmiştir. Bunun nedeni yöntemin yapısında bulunan bölme ve dördükkök alma işlemlerinin olmasıdır. Bu bağlamda tamsayı verilerde yöntemin iyileştirilmesi gerektiğini burada vurgulamak gerekir. Uygulamalar sırasında bu taşmalar mod alma ya da aralık dönüşümü ile giderilmiştir. Bilimsel yazında da veri türlerine ilişkin ayrıştırma yöntemlerinin iyileştirilmesine ilişkin çalışmalar yer almaktadır. ÇYÇÜKG için de benzer durum sözkonusudur.

- ÇYÇÜKG yöntemi, bir diğer gerçek veri kümesi olan aşkınizgecil verilere uygulanmış, kayıplı sıkıştırma yöntemi olarak kullanılabileceği ortaya çıkarılmıştır. Bu tür verilerdeki etkinliğini göstermek amacı ile bilimsel yazında aşkınizgecil veriler için kullanılan diğer sıkıştırma yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca yöntem için hangi bps değeri için kaç özyineleme adımı kullanılması gerektiği ile ilgili bağıntılandırma ortaya çıkarılmıştır.

- ÇYÇÜKG yönteminin daha yüksek boyutlarda da işlerliğini göstermek amacı ile yapay verilerin yanısıra 4 boyutlu gerçek ölçümlerden elde edilmiş iklim verisi üzerinde inceleyişler gerçekleştirilmiş olup yaklaşıım yöntemi olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.
- ÇYÇÜKG yöntemi, bilimsel yazında çokyönlü dizi ayrıştırımları için yaygın olarak kullanılan Tucker ve CP ayrıştırım yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırımların sayısal sonuçları bağıl yanılığı türünden verilmiş olup, ÇYÇÜKG yönteminin etkinliği gösterilmiştir.

Tüm bunların yanısıra savda, ÇYÇÜDG yönteminde dizey destekleri kullanımı gündeme getirilerek çekirdeğinde öbekler (ing: blocks) bulunan Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Öbekçil Üçköşegencil Dizey Gösterilim (ÇYÇÖÜDG) yöntemi ortaya çıkarılmıştır. Bilimsel yazında olduğu gibi kısıtlar değiştirilerek yöntemin yapısı genelleştirilmiştir. Ayrıca destek dizeyleri kullanımı dizeycil dikgenliği sorununu beraberinde getirmiş olup, dizeycil dikgenlik tanımlanmıştır. Yöntemin işlerliği, yüksek olmayan boyutlardaki yapay veriler üzerinde doğrulanmıştır.

ÇYÇÜDG yönteminin ortaya çıkış düşüncesi göz önünde bulundurularak dizey ayrıştırımına ek olarak bu savda yöney ayrıştırımı yöntemi de geliştirilmiştir. Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Üçköşegencil Yöney Gösterilimi (ÇYÇYG) olarak adlandırılan bu yeni ayrıştırım yöntemi, ikili Kronecker çarpımların toplamı şeklinde yazılabilen bir gösterilim olarak elde edilmiş ve yöneyler üzerinde yöntemin işlerliği sınanmıştır.

ÇYÇÜKG yöntemi sayıtım tabanlı, çokyönlü diziler için ortaya çıkarılmış özgün bir yöntem olup, çokyönlü dizi ayrıştırımlarının söz konusu olduğu tüm sorunlarda uygun bir biçimde uygulanabilir. Bu savda yapılan çalışmalarda özellikle görüntü ve video işleme, aşkınizgecil görüntüleme (ing: hyperspectral imaging) ve sıkıştırma sorunlarında uygulanabilirliği gösterilmiştir. Yöntem yalnızca bu alanlarda sınırlı olmayıp kemometride, beyinbiliminde, uzaktan algılama, veri işleme ve makina öğrenmesi gibi birçok alanda etkin bir biçimde uygulanabilir.



KAYNAKLAR

- [1] **Hitchcock, F.L.** (1927) The Expression of a Tensor or a Polyadic as a Sum of Products, *Studies in Applied Mathematics*, 6 (1–4), 164–189.
- [2] **Hitchcock, F.L.** (1927) Multiple invariants and generalized rank of a p-way matrix or tensor, *Journal of Mathematics and Physics*, 7, 39–79.
- [3] **Cattell, R.B.** (1944). Parallel proportional profiles and other principles for determining the choice of factors by rotation. *Psychometrika*, 9 (4), 267–283.
- [4] **Tucker, L.R.** (1964) The extension of factor analysis to three-dimensional matrices, *Contributions to Mathematical Psychology*, 110–127. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [5] **Tucker, L.R.** (1966) Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, 31, 279–311.
- [6] **Carroll J.D. ve Chang J.J.** (1970) Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of Eckart–Young decomposition, *Psychometrika*, 35 (3), 283–319.
- [7] **Carroll, J.D., De Soete, G. ve Pruzansky, S.** (1989) Fitting of the latent class model via iteratively reweighted least squares CANDECOMP with nonnegativity constraints, *Multiway data analysis*, 463–472. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- [8] **Harshman, R.A.** (1970) Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an explanatory multimodal factor analysis, *UCLA Working Papers in Phonetics*, 16, 1–84.
- [9] **Harshman, R.A.** (1972) PARAFAC2: Mathematical and technical notes. *UCLA Working Papers in Phonetics*, 22, 30–44.
- [10] **Harshman, R.A., Hong, S. ve Lundy, M.E.** (2003) Shifted factor analysis - Part I: Models and properties, *Journal of Chemometrics*, 17 (7), 363–378.
- [11] **Möck, J.** (1988) Topographic components model for event-related potentials and some biophysiological considerations, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 35, 482–484.
- [12] **Kruskal, J.B.** (1977) Three-way arrays: Rank and uniqueness of trilinear decompositions with applications to arithmetic complexity and statistics, *Linear Algebra and its Applications*, 18, 95–138,

- [13] **Kruskal, J.B.** (1989) Rank, decomposition, and uniqueness for 3-way and N-way arrays, *Multiway Data Analysis*, R.Coppi and S. Bolasco (Eds.), 7-18, North-Holland,
- [14] **Appelhof, C. J. ve Davidson, E. R.** (1981). Strategies for analyzing data from video fluorometric monitoring of liquid chromatographic effluents. *Analytical Chemistry*, 53 (13), 2053-2056.
- [15] **Bro, R.** (1998). Multi-way analysis in the food industry. Models, Algorithms, and Applications, PhD Thesis, University of Amsterdam, Holland, 1998.
- [16] **Comon, P.** (1994) Independent component analysis, a new concept?, *Signal Processing*, 36, 287-314.
- [17] **Comon, P.** (2001) Tensor decompositions: State of the art and applications, in *Mathematics in Signal Processing V*, J.G. McWhirter and I.K. Proudler, eds., Oxford University Press.
- [18] **Kolda, T.G. ve Bader, B.W.** (2008) Tensor Decompositions and Applications, *SIAM Review*, 51 (3), 455-500.
- [19] **Kolda, T.G.** (2001) Orthogonal tensor decompositions, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23, 243-255.
- [20] **Kolda, T.G.** (2003) A counterexample to the possibility of an extension of the Eckart-Young low-rank approximation theorem for the orthogonal rank tensor decomposition, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 24, 762-767.
- [21] **De Lathauwer, L., De Moor, B. ve Vandewalle, J.** (2000) A Multilinear Singular Value Decomposition, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21 (4), 1253-1278.
- [22] **De Lathauwer, L., De Moor, B. ve Vandewalle, J.** (2001) Independent component analysis and (simultaneous) third-order tensor diagonalization, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49, 2262-2271.
- [23] **De Lathauwer, L.** (2005) Parallel factor analysis by means of simultaneous matrix decompositions, *In Proceedings of the First IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-sensor Adaptive Processing (CAMSAP 2005)*, 125–128, Puerto Vallarta, Jalisco State, Mexico.
- [24] **De Lathauwer, L.** (2006) A link between the canonical decomposition in multilinear algebra and simultaneous matrix diagonalization, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 28, 642–666.
- [25] **De Lathauwer, L.** (2008) Decompositions of a higher-order tensor in block terms – Part I: Lemmas for partitioned matrices, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications (SIMAX)*, 30 (3), 1022–1032.
- [26] **De Lathauwer, L.** (2008) Decompositions of a higher-order tensor in block terms – Part II: Definitions and uniqueness, *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, 30 (3), 1033–1066.

- [27] **De Lathauwer, L. ve Nion, D.** (2008) Decompositions of a higher-order tensor in block terms – Part III: Alternating least squares algorithms. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications (SIMAX)*, 30 (3), 1067–1083.
- [28] **Cichocki, A., Zdunek, R., Phan, A.H. ve Amari, S.** (2009) Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations-Applications to Exploratory Multiway Data Analysis and Blind Source Separation, Wiley and Sons Publication.
- [29] **Leurgans, S.E., Ross, R.T. ve Abel, R.B.** (1993) A decomposition for three-way arrays, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 14, 1064-1083.
- [30] **Zhang, T. ve Golub, G.H.** (2001) Rank-one approximation to high order tensors, *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.*, 23 (2), 534–550.
- [31] **Kiers, H. A.** (2000) Towards a standardized notation and terminology in multiway analysis, *Journal of Chemometrics*, 14 (3), 105–122.
- [32] **Jolliffe, I.** (2002) Principal Component Analysis, Springer, US.
- [33] **Kolmogorov, A.N.** (1963) On the Representation of Continuous Functions of Many Variables by Superposition of One Variable and Addition, *English Translation: American Math. Soc.*, 2, 55–59.
- [34] **Sobol, I.M.** (1993) Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, 1, 407–414.
- [35] **Rabitz, H. ve Alis, O.F.** (1999) General Foundations of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, 25, 197–233.
- [36] **Rabitz, H., Alis, O.F., Shorter, J. ve Shim, K.** (1999) Efficient Input-Output Model Representations, *Computer Phys. Comm.*, 117, 11–20.
- [37] **Alis, O.F. ve Rabitz, H.** (2001) Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, 29, 127–142.
- [38] **Li, G., Rosenthal, C. ve Rabitz, H.** (2001) High Dimensional Model Representations, *J. Phys. Chem. A*, 105, 7765–7777.
- [39] **Demiralp, M.** (2003) High Dimensional Model Representation and its Application varieties, *Mathematical Research*, 9, 146–159.
- [40] **Rao, B. N. ve Chowdhury, R.** (2009) Enhanced high-dimensional model representation for reliability analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77 (5), 1097–1207.
- [41] **Chowdhury, R., Rao, B. N. ve Prasad, A. M.** (2009) Stochastic sensitivity analysis using HDMR and score function, *Sadhana*, 34(6), 967–986.
- [42] **Ziehn, T. ve Tomlin, A. S.** (2008) Global sensitivity analysis of a 3D street canyon model—Part I: The development of high dimensional model representations, *Atmospheric Environment*, 42(8), 1857–1873.
- [43] **Ziehn, T. ve Tomlin, A. S.** (2009) GUI-HDMR - A software tool for global sensitivity analysis of complex models, *Environmental Modelling and Software*, 24 (7), 775–785.

- [44] **Hajikolaie, K. ve Gary Wang, GG.** (2013) High dimensional model representation with principal component analysis, *ASME. J. Mech. Des.*, 136(1), 011003-011003-11.
- [45] **Ma, X. ve Zabarar, N.** (2010) An adaptive high-dimensional stochastic model representation technique for the solution of stochastic partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, 229, 3884–3915.
- [46] **Demiralp, E.** (2009) Applications of high dimensional model representations to computer vision, *WSEAS Trans. on Math.*, 8 (4), 184–192.
- [47] **Divanyan, L. ve Demiralp, M.** (2011) High Dimensional Model Representation (HDMR) Based Folded Vector Decomposition, *Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT11)*, 2, 39–44.
- [48] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2011)
Towards a New Multiway Array Decomposition Algorithm: Elementwise Multiway Array High Dimensional Model Representation (EMAHDMR), *Proceedings of the 2nd international conference on Applied informatics and computing theory*, 2, 76–81.
- [49] **Demiralp, M.** (2010) New Generation HDMR Based Multiway Array Decomposers: Enhanced Multivariate Products Representation (EMPR), *Proceedings for 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS)*, 16.
- [50] **Korkmaz Özyay, E. ve Demiralp, M.** (2012) A new multiway array decomposition via enhanced multivariate product representation, *Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM*, 1479 (1), 2015–2018.
- [51] **Tunga, M. A. ve Demiralp, M.** (2011) Generalized enhanced multivariate product representation for data partitioning: Constancy level, *AIP Conference Proceedings*, 1389 (1), 1152.
- [52] **Tunga, M. A. ve Demiralp, M.** (2013) A novel method for multivariate data modelling: Piecewise Generalized EMPR, *J. Math. Chem.*, 51 (10), 2654–2667.
- [53] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2010) Numerical studies on the use of Enhanced Multivariate Product Representation as a multiway array decomposer, 1922-1925, *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Rhodes, Greece.
- [54] **Okan, A.** (2011) Çok Değişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim Yönteminde Ağırlık Optimizasyonu, YL Tezi, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- [55] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2010) The Influence of the Support Functions on the Quality of Enhanced Multivariate Product Representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, 48, 827–840.

- [56] **Tuna, S. ve Demiralp, M.** (2015) Bivariate enhanced multivariate products representation (EMPR) at zero volume limit via geometric separation, *AIP Publishing*, **1702** (1), p. 170009 .
- [57] **Korkmaz Özay, E.** (2015) Çok Yönlü Dizilerin Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi Aracılığıyla Ayırıştırımı ve Uygulamalar, DR Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- [58] **Korkmaz Özay, E. ve Demiralp, M.** (2014) Reductive enhanced multivariate product representation for multi-way arrays, *J. Math. Chem.*, **52** (10), 2546–2558.
- [59] **Demiralp, E. ve Demiralp, M.** (2010) Reductive Multilinear Array Decomposition Based Support Functions in Enhanced Multivariate Product Representation (EMPR), Proceedings for the 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS), Malta, 15-17 September 2010, pp. 448-454.
- [60] **Demiralp, E.** (2009) Application of Reductive Decomposition Method for Multilinear Arrays (RDMMA) to Animations, *Proceedings of the 11th WSEAS international conference on Mathematical methods and computational techniques in electrical engineering (MMACTEE'09)*, 648-656.
- [61] **Demiralp, E. ve Demiralp, M.** (2014) Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR) for Matrix Decomposition, *Proceedings of 14th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, **2**, 446–455.
- [62] **Demiralp, E.** (2014) Weighted Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation of Finite Interval Data, *Proceedings of 14th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, **2**, 441–445.
- [63] **Korkmaz Özay, E. ve Demiralp, M.** (2014) Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR) Studies: Decomposing the Planarly Unfolded Three-way Arrays, *Proceedings of 14th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, **3**, 785–793.
- [64] **Özdemir, G.** (2014) Sayılabilir Sonsuz Sıralı Dizelerde Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Okuçlandırılmış Dizey Gösterimleri, YL Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- [65] **Korkmaz Özay, E.** (2017) Face recognition using tridiagonal matrix enhanced multivariate products representation, *AIP Conference Proceedings*, **1798**, 020083. doi: 10.1063/1.4972675
- [66] **Korkmaz Özay, E. ve Demiralp, M.** (2016) Weighted tridiagonal matrix enhanced multivariate products representation (WTMEMPR) for decomposition of multiway arrays: applications on certain chemical system data sets, *J. Math. Chem.*, **55**, 1-22.

- [67] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2009) An Orthonormal Decomposition Method For Multidimensional Matrices, *AIP Proceedings for the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2009)*, 18-22 September 2009, Rethymno, Crete, Greece, 1168, 428-431.
- [68] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2014) Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariance Products Representation (TKEMPR) for Univariate Integral Operator Kernels, *The Proceedings of International Conference on Mathematics and Computers in Science and Industry*, 195-200.
- [69] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2017) A self-consistent high dimensional modelling based decomposition approach for univariate linear integral operators: Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariance Products Representation (TKEMPR), *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 326, 99-115.
- [70] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2015) Tridiagonal kernel enhanced multivariance products representation (TKEMPR) for outer product sums: Arrowhead-ing EMPR for kernel (AEMPRK), *AIP Conference Proceedings*, 1648, 160002 .
- [71] **Zhang, H. and Ding, F.** (2013) On the Kronecker products and their applications, *Journal of Applied Mathematics*.
- [72] **Graham, A.** Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications, 1981. Hasted, New York.
- [73] **Demiralp, M.** (2013) Binomial expansion for the Kronecker powers of vector sums. Recent Advances in Finite Differences and Applied and Computational Mathematics, ISBN, 978-1.
- [74] **Demiralp, M.** (2017) Binary Kronecker Product Based Orthogonal Decompositions of Linear Algebraic Vectors, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE 2017*, 2, 744–754 .
- [75] **Everitt, W. N.** (1958) Some properties op Gram matrices and determinants. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 9 (1), 87-98.
- [76] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2013) A contemporary linear representation theory for ordinary differential equations: multilinear algebra in folded arrays (folarrs) perspective and its use in multidimensional case, *J. Math. Chem.*, 51 (1), 38-57.
- [77] **Tuna, S., Baykara, N. A., Demiralp, M.** (2011). Weighted singular value decomposition for folded matrices. *In Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT'11)*, 26-28, IEEEAM, Prague, Czech Republic.
- [78] **Marcus, M.** (1975) Finite Dimensional Multilinear Algebra, Dekker, New York.
- [79] **Coppi R., Bolasco, S. ve diğerleri** (1989) Multiway Data Analysis, North-Holland, Amsterdam.

- [80] **Aiazzi, B., Alparone, L. and Baronti, S.** (2012) Quality issues for compression of hyperspectral imagery through spectrally adaptive DPCM. *In Satellite Data Compression*, 115-147. Springer, New York, NY.
- [81] **Eismann, M. T.** (2012) *Hyperspectral Remote Sensing*. Bellingham, WA: SPIE.
- [82] **Park B. ve Lu, R.** (2015) *Hyperspectral imaging technology in food and agriculture*. New York, USA: Springer.
- [83] **Chang, C. I.** (2013) *Hyperspectral Data Processing: Algorithm Design and Analysis*. John Wiley and Sons.
- [84] **August, Y., Rivenson, C. ve Stern, A.** (2013) Compressive hyperspectral imaging by random separable projections in both the spatial and the spectral domains, *Appl. Opt.*, 52 (10), D46-D54.
- [85] **Christophe, E.** (2011) Hyperspectral Data Compression Tradeoff, *in Optical Remote Sensing. Augmented Vision and Reality*, 3, 9–29.
- [86] **Lim, S., Sohn, K. H. ve Lee, C.** (2001) Principal component analysis for compression of hyperspectral images, *IGARSS 2001. Scanning the Present and Resolving the Future. Proceedings. IEEE 2001 International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, Sydney, NSW, 1, 97-99.
- [87] **Du, Q. ve Fowler, J. E.** (2007) Hyperspectral Image Compression Using JPEG2000 and Principal Component Analysis, *in IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 4 (2), 201-205.
- [88] **Fowler, J. E.** (2009) Compressive-Projection Principal Component Analysis, *in IEEE Transactions on Image Processing*, 18 (10), 2230-2242.
- [89] **Chen, C., Wei, L., Tramel, E. W. ve Fowler, J. E.** (2014) Reconstruction of hyperspectral imagery from random projections using multihypothesis prediction, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 52, 365–374.
- [90] **Huo, C., Zhang, R., Yin, D., Wu, Q. ve Xu, D.** (2012) Hyperspectral data compression using sparse representation, *in 4th Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing*, 1–4.
- [91] **Wang, Z., Nasrabadi, N. M. ve Huang, T. S.** (2014) Spatial-spectral classification of hyperspectral images using discriminative dictionary designed by learning vector quantization, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 52, 4808–4822.
- [92] **Ülkü, I. ve Töreyn, B. U.** (2015) Hyperspectral image compression using an online learning method, *in Proc SPIE 9501*, 950104.
- [93] **Elad, M.** (2010) *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*, Springer.
- [94] **Huang, J. B. ve Yang, M. H.** (2010) Fast sparse representation with prototypes,” *in IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 3618–3625.

- [95] **Pati, Y. C., Rezaifar, R. ve Krishnaprasad, P. S.** (1993) Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition, *in Conference on Signals, Systems and Computers, Record of the Twenty-Seventh Asilomar*, 40–44.
- [96] **Yang, J., Peng, Y., Xu, W. ve Dai, Q.** (2009) Ways to sparse representation: an overview, *Sci. China Ser. F*, 52 (4), 695–703.
- [97] **Ülku I. ve Töreyn, B. U.** (2015) Sparse representations for online-learning-based hyperspectral image compression, *Appl Opt.*, 54 (29), 8625-8631.
- [98] **Hou, Y. ve Zhang, Y.** (2014) Effective hyperspectral image block compressed sensing using three-dimensional wavelet transform, *in IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 2973–2976.
- [99] <http://aviris.jpl.nasa.gov/html/aviris.freedata.html>
- [100] <https://pixabay.com/en/videos>
- [101] <http://www.models.life.ku.dk/datasets>
- [102] **Bader, B. W., Kolda, T. G. ve diğerleri** (2012), MATLAB Tensor Toolbox Version 2.6, Available online, <http://www.sandia.gov/~tgkolda/TensorToolbox>.
- [103] **Kiers, H.A.L.** (1998) A three-step algorithm for Candecomp/Parafac analysis of large data sets with multicollinearity, *Journal of Chemometrics*, 12, 155-171.
- [104] **Bro, R. ve Heimdal, H.** (1996) Enzymatic browning of vegetables. Calibration and analysis of variance by multiway methods, *Chemom Intell Lab Syst*, 34, 85-102.
- [105] **Skov, T. ve Bro, R.** (2005) A new approach for modelling sensor based data, *Sensors and Actuators B: Chemical*, 106(2), 719-729.
- [106] **Özdemir, A., Iwen, M. A. ve Aviyente, S.** (2016) Multiscale tensor decomposition. *In Signals, Systems and Computers*, 2016 50th Asilomar Conference on IEEE, 625–629.
- [107] **Gündoğar, Z.** (2018) Tridiagonal Vector Enhanced Multivariance Products Representation (TVEMPR), *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)*, 9 (2), 153-163.
- [108] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2018) Block tridiagonal matrix enhanced multivariance products representation (BTMEMPR), *Journal of Mathematical Chemistry*, 56 (3), 747-769. DOI: 10.1007/s10910-017-0828-7
- [109] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2016) Certain Illustrative Numerical Implementations of Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation (TFEMPR) for 3-Way Arrays. *International Journal of Mathematical and Computational Methods*, 1, 108-113.

- [110] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2017) Digital Image Sequence Processing via Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation (TFEMPR), *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE 2017*, 2, 990-1001, Costa Ballena, Spain.
- [111] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2017) Tridiagonal folmat enhanced multivariance products representation (TFEMPR) under subspace supported rational transformations (SsSRT), *AIP Conference Proceedings, 1798* (1), ICNPAA 2017, La Rochelle, France.
- [112] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2015) Formulation of Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation (TFEMPR), *AIP Conference Proceedings, 1702*.
- [113] **Gündoğar, Z., Töreyn, B. U. ve Demiralp, M.** (2018) Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation Based Hyperspectral Data Compression, *Journal of Selected Topics on Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 99, 1–7. DOI: 10.1109/JSTARS.2018.2851368



EKLER

EK A.1 : Boyalı Canlandırım Verileri





EK A.1 Boyalı Canlandırım Verileri

Bu bölümde, ÇYÇÜKG'nde veri değerlendiriminde çoklu bileşenler üzerine yoğunlaşılacaktır. Bu ana dek gerçekleştirilen araştırmalarda, uygulamacılar olarak, canlandırmalar üzerinde durulmuştur. Yalınlık açısından, boya boz olarak seçilmekte ve işlev değerleri boz'un değişik düzeyleri olarak gündeme getirilmektedirler. Bağımsız değişkenler ise çerçeve sırasayısı, odaklanılan çerçevede yatay ve düşey konum bileşenleri olarak gündeme getirilirler ve her biri ayrı olabilen baştan sonlu sayıda artı tamsayı içeren kümelerden değer alırlar. Bozluk düzeyi, aslında, bellekte 1 bayt uzunlukta yer alabilen sayılarla verilirler. Bu, 0'dan başlayıp 255'te sonlanan bir aralıktaki tamsayıların tanımbölgesini oluşturduğu anlamındadır. Kimi yazılımlarda, bozluk değeri $[0, 1]$ aralığında değerlerle de verilir. Ama aslında bunlar 1 bayttaki tamsayılara çevrilerek kullanılırlar ve bilgisayarın tabanını sorgulamayan kullanıcılar, çoğu zaman, bunun ayırında da olmazlar. Boz (gri) aslında aynı baytla verilen al, yeşil, mavi boya bileşenlerinden oluşur. Bu yüzden tek bir boya bileşeni gibi de düşünülebilirler. Boya bileşenleri, bellekte, çoğunlukla, 1 bayt olarak yer alacak biçimde kullanılıyor olsalar da, özellikle sağlık bilimlerinde (sözgelimi kanser tanısında) 1 bayt'ınkinden çok çözünürlükte verilere de gereksinim duyulabilir. Bu amaçla, bellekte, her bir ana boya bileşenine 2 bayt ayrılır ve derecelendiriş de $[0, 65535]$ kapalı aralığındaki tamsayılar kullanılarak gerçekleştirilir.

Boyalı Canlandırmalarda Tam Birleştirimli İşlev Değeri Kullanımı

İlk olarak, boz (gri) boyadan özelsiz boya durumuna geçelim. Bu durumda, özelsiz bir boyanın bir kaç ana bileşenin doğrucul birleşimi olarak verilebileceğini vurgulamakta yarar bulunmaktadır. Bu bağlamda, uygulamalarda birden çok biçem bulunmaktadır. Bunlardan, önce, ingilizce kısaltımla RGB (red, green, blue) bileşenleriyle boya tanımını gündeme getirelim. Burada, ana boyalar, al, yeşil, mavi durumundadır. Boyayı, ya bu bileşenleri öge olarak alan bir yöneye ya da bunların sayıcıl değerlerinin birleştirimiyle anlatmak olanaklıdır.

Yöney gösterilim durumunda, boyanın, canlandırımın veri tutamağındaki her bir görüntü biriminin (3 bayt) ilk, ikinci, ve de, üçüncü baytları, sırasıyla, al, yeşil, ve de, mavi baytlarına ayrıştırılabileceğini us'ta tutmakta yarar bulunmaktadır (bu ayrıştırımda sıra değiştirilebilir de; ancak, hangi sıralayışın gündemde olduğu bilinmeli ve değiştirilmemelidir). Tutamaktan bu ayrıştırımın gerçekleştirimi için ya kullanımda varolan yazılımlardan, ya da buyrukdizilerden veya betiklerden yararlanışın olanaklı olabileceği bir gerçektir. Öteki bir yol ise tutamağı ham tutamağa çevirip yazılacak bir buyrukdizi ya da betikle ayrıştırmaktır. Hangi yol izlenirse izlensin, anaboyalar birbirlerinden ayrılmış olur ve her biri için, boz canlandırmalarda yapıldığı gibi, her bir ana boya verisi üzerinde 1 baytlık görüntü değerli veri için ÇYÇÜKG uygulayışı gerçekleştirilebilir. Böylece, üç ayrı ÇYÇÜKG'nin gerçekleştirimi söz konusudur. Ancak, bu durumda, anaboyalar arası, sözümona, etkileşimlerin devre dışı kalacağı da düşünülebilir.

Birleştirimli durumu belirtik olarak anlatabilmek için al, yeşil, mavi bileşenlerin birer baytlık sayıcıl değerler olarak verildiklerini ve bu değerleri *al*, *ye*, ve de, *ma* ile simgelediğimizi varsayalım. Bu durumda, *bo* ile simgeleyeceğimiz boya sayıcıl değeri

aşağıdaki uzbilimcil anlatımla verilebilir.

$$bo = al \times 65536 + ye \times 256 + ma = al \times 2^{16} + ye \times 2^8 + ma \quad (A.1)$$

Buradaki anlatımla verilen boya değeri, aslında, canlandırımın belli bir çerçevedeki belli bir konumda yerleşik görüntü birimi içindir. Bu yüzden, tüm çerçevelerdeki tüm konumlardaki görüntü birimleri (pixel) birer boya değeri taşımalıdır. Bu da, canlandırım verisinin bir boya değerler kümesi ile bir konuşlandırım kümesinden oluştuğu anlamına gelir. Konuşlandırım için ce ile simgeleyeceğimiz çerçeve sırasayısı; yk ile simgeleyeceğimiz, o çerçevedeki konum yatay bileşeni; dk ile simgeleyeceğimiz, o çerçevedeki konum düşey bileşeni; üç ögeli bir yöneyin ögeleri olarak ya da üç yönlü bir çokludizinin ögelerinin altsırasayıları olarak düşünülebilir. Bu durumda, boya değerini simgeleyen bo 'nun ce , yk , ve de , dk ile simgelenen değişkenlere bağlı bir işlev olduğu düşünülebilir. Bu ise aşağıdaki anlatımın geçerliliği demektir.

$$bo = bo(ce, yk, dk) \quad (A.2)$$

Bu eşitlikte, bağımsız değişken olan ce , yk , dk büyüklükleri sırasayı niteliklidirler. Bu yüzden, tanımbölgeleri artı tamsayılar kümesinden tekdüze artan değerlerden birer sonlu sayıda kesimini içeren altkümelerdir. Bu durum aşağıdaki bağıntılarla uzbilimcil olarak verilebilir.

$$ce \in \mathbb{Z}_{n_{ce}}^+, \quad yk \in \mathbb{Z}_{n_{yk}}^+, \quad dk \in \mathbb{Z}_{n_{dk}}^+ \quad (A.3)$$

Bu tanımlarda, n_{ce} , n_{yk} , n_{dk} ile, sırasıyla, çerçeve sayısı, çerçevelerin yataydaki ortak görüntü birimi sayısı, çerçevelerin düşeydeki ortak görüntü birimi sayısı simgelenmektedir. Tıkız gösterilim açısından örgü (grid) kullanımına yönelmekte yarar bulunmaktadır. Burada ve özelsiz inceleyişlerimizde dikgen çokyüzlü ya da aşkın çokyüzlü kullanmak durumundayız, bunun nedeni de yapıcıdır. Buradaki inceleyişlerimizde, bağımsız değişkenlerden her birinin tanımbölgesinin öbür değişkenlere bağlı olduğu durumlara odaklanım sözkonusu değildir. Burada tanımlayacağımız örgü, altküme ölçüleri, bağımsız değişken sırası gözetilecek olursa, $n_{ce} \times n_{yk} \times n_{dk}$ türünde olmak durumundadır. Sıralanış değiştirilirse örgü türü de değişir. Ancak, karşılaşılabilecek örgü türleri, uzamcıl dönüşümlerle, birbirlerine dönüştürülebilirler.

ce , yk , dk değişkenlerinin sırasayı nitelikli oluşları, onların altsırasayı olarak kullanımını us'a getirir. Bu da, aşağıdaki eşitliğin yazımına götürür.

$$CD_{bo} = [bo_{ce,yk,dk}]_{(i) \in G_{n_{ce} \times n_{yk} \times n_{dk}}}, \quad (i) \equiv (ce.yk, dk) \quad (A.4)$$

Bu eşitlikte, CD ile "çokyönlü dizi" çağrıştırmı yapacak bir simgeleştirim kullanılmaktadır.

Yukarıdaki anlatımlar, aslında, savın evreleri sürecinde gerçekleştirilen araştırmalara yabancı ya da onlardan çok yeni bilgiler içermemektedirler. Ancak, savın ilk evrelerinde, hep boz boyalı verilerle ilgilenilmiş olduğundan özelsiz boyalı uygulayışlar için gerekli vurgulayışların dile getirilmesine yönelmek büyük önem kazanmaktadır. Bu nedenle bu anlatımlar yazıya dökülmüştür. Ancak, burada salt çokludizi düzeyinde kalınmış; katlıdizilerle ya da katlıdizelere geçişle ilgili konular

yinelenmemiştir. Bunun da nedeni, bu doğrultuda, araştırmalarımızla çok güçlü denilebilecek bir tabanın oluşturulmuş olduğu görüşüdür.

Yukarıda (A.1) eşitliği ile verilen birleştirim tek türlü olmayıp yukardaki eşitliğe ek olarak tüm üçlü birleştirimleri gündeme getireceğiz. Bu türlüleştirim anaboya bileşenleri arasında birleştirim ayrılık ya da aykırılıkları varsa onları yakalamak ya da en azından varlıkları ile ilgili imlerin varolduğunu ya da olmadığını saptamak amacına yönelik olarak düşünölmelidir.

$$bo = al \times 65536 + ma \times 256 + ye = al \times 2^{16} + ma \times 2^8 + ye \quad (A.5)$$

$$bo = ye \times 65536 + al \times 256 + ma = ye \times 2^{16} + al \times 2^8 + ma \quad (A.6)$$

$$bo = ye \times 65536 + ma \times 256 + al = ye \times 2^{16} + ma \times 2^8 + al \quad (A.7)$$

$$bo = ma \times 65536 + al \times 256 + ye = ma \times 2^{16} + al \times 2^8 + ye \quad (A.8)$$

$$bo = ma \times 65536 + ye \times 256 + al = ma \times 2^{16} + ye \times 2^8 + al \quad (A.9)$$

Anaboyada Ayrılık Çokdeğişkenliliği Yükseltölmüş Çarpımlar Üçköşegencil Katlıdizy Ayrıştırımı

Yukarıda, bölümün başlarında verildiği üzere, özelsiz boyalı canlandırım için kullanılabilir yöntemlerden biri de anaboya bileşenleri arasında etkileşim yokmuşçasına iç görmektir. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir

$$\begin{aligned} (1) & : al = bo(ce, yk, dk) \\ (2) & : ye = bo(ce, yk, dk) \\ (3) & : ma = bo(ce, yk, dk) \end{aligned} \quad (A.10)$$

Bu biçimdeki seçim ile, ana boyalar arası işlevcil ilişkiler ortadan kalkmış olur. Bu yüzden, bu durumdaki ÇYÇÜKG'in boz boyalı canlandırımındaki durumdan hiçbir değişik yanı yoktur. Ancak, ayrıştırım eyleminin her bir anaboya bileşeni için ayrı ayrı gerçekleştirmesi ve onun sonrasında, oluşan yaklaşık ayrıştırmaların bir tutamakta birleştirmesi ve böylece özelsiz boyalı ayrıştırım olarak kullanımı gereklidir. Uygulayılarda boyalı canlandırmalar için bu biçimdeki işlev değer kullanılmıştır.

Boya Verisinin Sayıcıl Biçemi

Yukarıdaki inceleyişlerimizde *bo* ile simgelediğimiz, tam anaboyalı birleştirimlerde veya birleştirmsiz durumlarda, *bo*'nun sayıcıl veri yapısı tamsayı türündedir. C ve onu andıran dillerde birden çok tamsayı veri türleri vardır. Bunlar arasında, 2, 4, ve de, 8 bayt uzunluklu olan ve sırasıyla "kısa tamsayı", "tamsayı", ve de, "uzun tamsayı" olarak adlandırılan verilerden sözedilebilir. Öte yandan, betikleyiş gerçekleştiren bilgisayar dillerinden bir kesiminde böylesine katı veri ayrımı olmayabilmektedir ve betiğin gerektirdiği düzeyde, bellekte, yer ayrılabilir. Bir kesim betik dilinde de, (Maxima, Mathematica) orancıl sayılar, ya da, öteki deyişiyle, üleşkeler üzerinde işlem yapılabilir. Bu yüzden, ÇYÇÜKG uygulayılarda kullanım için seçilen

dil ya da yazılımın özelliklerini iyi bilmek ve bo için verinin bellekte tam doğru olarak saklanımını sağlayacak yapıları seçmekte yarar bulunmaktadır. Eğer veri, yeterli basamağı olan tamsayı düzeyde değilse, sözelimi kayar noktalı veri kullanımı gerekiyorsa, tamsayı veriyi bu türe, ya da, bu türü tamsayı türe çevirecek olanakların kullanımını gündeme getirmek gerekir.

Veri gösterilimi açısından sorun yaşanmadığı düşünülecek olursa, öngörünüme çıkacak olgu her bir bo değerinden anaboya bileşenlerinin nasıl çekileceğidir. Eğer, tam birleştirimli durum söz konusuysa, her bir bo değerinden anaboya bileşenlerini belirleyecek işlemler aşağıdaki eşitliklerle verilebilir.

$$\begin{aligned}al &= bo/65536 \\ ye &= (bo - al \times 65536)/256 \\ ma &= bo - al \times 65536 - ye \times 256\end{aligned}\quad (A.11)$$

Burada / simgesiyle belirtilen işlem kalansız ya da tamsayı bölmedir. Öteki bir deyişle, anaboya bileşenleri “Kipçil İşlemler”, ya da, “Bölen-Kalan Tabanlı İşlemler (ing; modular arithmetic)” adı verilen işlemlerle belirlenebilmektedir.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Zeynep GÜNDOĞAR

Doğum Tarihi ve Yeri: 1986, Kayseri

E-Posta: gundogarzeynep@gmail.com, gundogarz@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2009, Marmara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
- **Y. Lisans:** 2011, Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Gündoğar, Z., Demiralp, M.** A Novel Point of View for Digital Image Sequence Processing: Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation (TFEMPR), *Mathematical Methods in the Applied Science* (under review)
- **Gündoğar, Z., Töreyn, B. U. ve Demiralp, M.** (2018) Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation Based Hyperspectral Data Compression, *Journal of Selected Topics on Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 99, 1–7. DOI: 10.1109/JSTARS.2018.2851368
- **Gündoğar, Z.** (2018) Tridiagonal Vector Enhanced Multivariance Products Representation (TVEMPR), *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)*, 9 (2), 153-163.
- **Gündoğar, Z., Demiralp, M.** (2018) Block tridiagonal matrix enhanced multivariance products representation (BTMEMPR), *Journal of Mathematical Chemistry*, 56(3), 747-769. DOI: 10.1007/s10910-017-0828-7
- **Gündoğar, Z., Demiralp, M.** (2016) Certain Illustrative Numerical Implementations of Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation (TFEMPR) for 3-Way Arrays. *International Journal of Mathematical and Computational Methods*, 1, 108-113.
- **Gündoğar, Z., Demiralp, M.,** (2017) Digital Image Sequence Processing via Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation (TFEMPR), *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE 2017*, 2, 990-1001, Costa Ballena, Spain.

- **Gündoğar, Z.**, Demiralp, M. (2017) Tridiagonal folmat enhanced multivariance products representation (TFEMPR) under subspace supported rational transformations (SsSRT), *AIP Conference Proceedings*, 1798 (1), ICNPAA 2017, La Rochelle, France.
- **Gündoğar, Z.**, Demiralp, M. (2015) Formulation of Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation (TFEMPR), *AIP Conference Proceedings*, 1702.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Gündoğar, Z.**, Baykara, N.A. (2013) Initial Value Kronecker Power Images Under Telescope Matrix in Probabilistic Evolution Approach for One Variable Conical ODEs, *13th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC '13)*, 6-8 August 2013, Valencia, Spain.
- **Gündoğar, Z.**, Demiralp, M. (2013) Constancy Added Space Extension and Kronecker Power Series Kernel Separation for One Variable Conical ODEs, *13th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC'13)*, 6-8 August 2013, Valencia, Spain.
- **Gündoğar, Z.**, Baykara, N.A. (2012) Probabilistic Evolution Approach to ODEs with Laurent Series Expandable Descriptive Functions, *AIP Proceedings for the 10th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2012)*, Kos, Greece, 19– 25 September 2012, 1479, pp. 2002-2006. DOI: 10.1063/1.4756581
- **Gündoğar, Z.**, Baykara, N.A., Demiralp, M., 2012. Weight Function Optimisation to Get Constancy for a Given Mobius Transformational High Dimensional Model Representation, *Advances in Systems Theory, Signal Processing and Computational Science, Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation*, Istanbul, Turkey, 21-23 August 2012, 198-202.
- **Gündoğar, Z.**, Baykara, N.A. and Demiralp, M. (2011) Conic Transformational High Dimensional Model Representation in Comparison With Hermite-Pade Approximants, *Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT'11)*, IEEEAM, Prague, Czech Republic, 26-28 September, 45-51.
- **Gündoğar, Z.**, Baykara, N.A., Demiralp, M. (2011) Derivative Including Quadratures Based on Kernel Decomposition, *AIP Proceedings for the 9th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2011)*, Halkidiki, Greece, 19-25 September 2011, 1389, 1176-1179.
- **Gündoğar, Z.**, Baykara, N.A. and Demiralp, M. (2010) Basic Features of Conic Transformational High Dimensional Model Representation, *AIP Proceedings for the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2010)*, Symposium 112, *Recent Developments in Hilbert Space Tools and Methodology for Scientific Computing*, 19-26 September 2010, Rhodes, Greece, ID: 112-3.