İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

HERMITE ÇOKTERİMLİLERİNİN BELİRLENİMİNDE SAPTIRIM AÇILIMLARI VE ÜÇGENCİL İŞLEV ÇARPANLI TOPLAMDİZİ AÇILIMLARI

YÜKSEK LİSANS SAVI

Bahar YOLCU

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

HAZİRAN 2019

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

HERMITE ÇOKTERİMLİLERİNİN BELİRLENİMİNDE SAPTIRIM AÇILIMLARI VE ÜÇGENCİL İŞLEV ÇARPANLI TOPLAMDİZİ AÇILIMLARI

YÜKSEK LİSANS SAVI

Bahar YOLCU
(702041001)

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Sav Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

HAZİRAN 2019

İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702041001 sırasayılı Yüksek Lisans Öğrencisi Bahar YOLCU, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm koşulları yerine getirdikten sonra düzenlediği "HERMITE ÇOKTERİMLİLERİNİN BELİRLENİMİNDE SAPTIRIM AÇILIMLARI VE ÜÇGENCİL İŞLEV ÇARPANLI TOPLAMDİZİ AÇILIMLARI" başlıklı savını aşağıdaki onayimleri olan sınav kurulu önünde başarı ile sunmuştur.

Sav Danışmanı : **Prof. Dr. Metin DEMİRALP** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Sınav Kurulu Üyeleri : **Doç. Dr. Adem TEKİN** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Özlem YILMAZ ....
Mimar Sinan Üniversitesi

....

Teslim Tarihi : 03 Mayıs 2019
Savunma Tarihi : 13 Haziran 2019

Aileme,

ÖNSÖZ

Büyük katkı sağlayan Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) üyelerine çok teşekkür ederim.

Çalışmam boyunca değerli bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, yol gösteren ve bana sabırla tahammül eden, fedakarlığı ile bana çok destek olan bilime karşı duruşu ile örnek bir bilim insanı olan değerli hocam Prof. Dr. Metin Demiralp'a teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2019 Bahar YOLCU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTIMLAR

STD	**:** Sıradan Türevli Denklem
STİ	**:** Sıradan Türevli işleç
ODE	**:** Ordinary Differential Equation
GTD	**:** Göre Türevli Denklem
PDE	**:** Partial Differential Equation
BEBBYT	**:** Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu
G4SMC	**:** Group for Science and Methods of Computing

SİMGELER

$\mathbf{H_j}(\mathbf{x})$	: Hermite çokterimlileri
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Gamma işlevi
$\boldsymbol{\delta}_{ij}$	: Kronecker delta
$\overline{\mathbf{H}}_\mathbf{j}(\mathbf{x})$	: Birimboylulaştırılmış Hermite çokterimlileri
$\mathbf{h_j}$	: Hermite işlevleri
$\mathbf{H_j}$	: j. Hermite sayısı
$\mathbf{M}\left(\widehat{\mathbf{f}}\right)$	: $\widehat{f}$ işlecinin dizey gösterilimi
$\mathbf{F}_{++}$	: $\widehat{f}$ işlecinin, çift Hermite işlev tabanı üzerinde dizey gösterilimi
$\mathbf{M}_{\mathscr{H}_+}$	: Çift işlevli Hermite işlev taban dizilimi
$\mathbf{M}_{\mathscr{H}_-}$	:Tek işlevli Hermite işlev taban dizilimi
$\mathbf{F}_{--}$	: $\widehat{f}$ işlecinin, tek Hermite işlev tabanı üzerinde dizey gösterilimi
$\boldsymbol{\Pi}$	: Yerdeğiştirim dizeyi
$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$	: Dizey gösterilimlerindeki özdeğerler
$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$	: (2n). ve (2n+1). dereceden Hermite çokterimlilerinin kökleri
$\mathscr{T}$	: Tam taban kümesi
$\boldsymbol{\varepsilon}$	: Saptırım değiş tirgesi
$\widetilde{\mathbf{x}}$	: Konum kaydırımı
$\widehat{\mathbf{L}}$	: Doğrucul bir ikinci kerte sıradan türevli işleç
$\widehat{\mathbf{D}}$	: Evirtim işleçi
$\widehat{\mathbf{I}}$	: Birim işleç
$\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{s}$	: Saptırım işleci
$\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{bs}$	: Bağıl saptırım işleci
$\dagger$	: Eşlik

ÇİZELGE DİZELGESİ

Sayfa

HERMITE ÇOKTERİMLİLERİNİN BELİRLENİMİNDE SAPTIRIM AÇILIMLARI VE ÜÇGENCİL İŞLEV ÇARPANLI TOPLAMDİZİ AÇILIMLARI

ÖZET

Hermite çokterimlilerinin köklerini (sıfırlarını) belirlemek amaçlı yöntem geliştirimine dayalı bu savda, değişik arayışlara yönelik araştırımlara girişilmiş ve bunlardan ulaşılan vargılarla bir kesim sonuçlara erişilmiştir.

Savda, bilimsel yazında varolan ve iyi bilinen "sonsuz derece ereyinde üçgencil işlevli Hermite çokterimli yanaşık anlatımlarının" derecenin en az hangi değerinde istenildiğince iyi yaklaştırım oluşturduğu sorusuna yanıt aranmıştır. Bu en az değerin, en düşük sayılabilecek duyarlılıklarda bile, pek öyle 9-10 gibi sayılara inemediği gözlenmiştir. Oysaki istenen ve beklenen bu inişin sağlanabileceğiydi ve bu işlevcil yapıdan kök belirlenişi de beklenmekteydi.

Hermite çokterimlileri ile ilgili bilimsel kaynaklarda bulunabilecek temel tanımlar ve özellikler savda yeterince vurgulanmıştır. Gerekli olanlarının yeniden kanıtlanışı gerçekleştirilmiştir.

Sendelenimsizlik kanıtsavları ve sendelenimsizlik yaklaştırımları savda yeterince anımsatılmıştır. Doğrucul işleçler içeren sorunların yaklaşık çözümlerini elde edebilmek için, sonlu sayıda taban işlevi ile örtülen doğrucul yöney uzayları üzerinde işleçlerin dizey gösterilimleri kullanılabilir. Böylece doğrucul yöney uzayının boyutu arttırılarak istenilen yaklaştırım niteli ğine ulaşılabilir.

Savda, sonsuz derece ereyinde Hermite işlevleriyle ilgili türlü yanaşık davranışlar belirtilmiştir. "Baskın yanaşım" olarak alınan bu yaklaştırımın çok ham olduğu savıyla baskın yanaşımdan başlayan bir saptırım açılımı oluşturarak niteliksiz yaklaştırımı nitelikliye çevirişin olanaklı olabileceği düşünülmüştür. Bu bağlamda, uygun bir STD oluşturup $1/n$ ile orantılı toplamcıl anlatıma saptırım gözüyle bakıp bir açılım gerçekleştirilmiştir. Ancak, buradan oluşturulan kesimcil yaklaştıranlar, daha düşük düzeyde olsa da, yine de niteliksiz sonuçlar vermiştir. Dolayısıyla, kullanılışı pek de yararlı gözükmemektedir.

Savda Hermite çokterimli kökleri belirlenişinde, sonsuz derece ereyinde sönümlü saptırım açılımına da odaklanılmıştır. Saptırım açılımında her saptırım anlatımı belirlenişinde bağdaşık çözümler sıfır alınmıştır. Oradaki nitelik olumsuzluğunun bundan kaynaklandığı düşünülerek bağdaşıklık sıfırlanımından kaçınılarak bir açılım oluşturuş yoluna gidilmiştir. Böylece, daha nitelikli sonuçlar beklentisine karşın yine de olumsuzluk, azalsa da, sürmüştür. Bu da, sorunun salt bağdaşıklıksız olmadığı vargısına ulaşılmıştır.

Savda, ayrıca, Hermite çokterimli kökleri belirlenişinde sonsuz derece ereyinde sönümlü, ekkoşullandırımlı saptırım açılımına da odaklanılmıştır. Olumsuzlukların kaynağının sonsuz boylu saptırım işlecinden kaynaklanabileceği düşünülerek, aralık $(-\infty,\infty)$'den sonlu bir $\widetilde{x}$ konumu yöresindeki sonlu bir aralığa dönüştürülerek

ilerlenmek istenmiştir. Ancak, yine de sonuçların niteliği iyileşse de, bir yerlerden sorun kaynağı etkileri olabileceği yargısına varılmıştır.

Nitelik olumsuzluğunu gidermek için, sonsuzluktan sonluluğa indirgenen saptırım işleç boyunu bastırmak için bağdaşıklığın eniyileyişi, daha da doğrusu ineçleyişi (enküçükleyişi) gündeme getirilmiş ve bağdaşıklık katsayıları saptanmıştır.

İneçleyiş sonrası ele geçen bağdaşıklık katsayılarının kullanımıyla saptırım işlecinin doğrucul bir tümlev işlecine dönüşeceği uzbilimcil (matematiksel) olarak kanıtlanmıştır.

Doğrucul Tümlev işlecinde yalınlık elde edilişi açısından yukarıda sözü edilen aralığın gerçel değeri az olan ucunun $\widetilde{x}$ konumuna yerleşik oluşunun en uygun durum sayılabileceği gösterilmiştir. Aralığın sağ ucunun yerleşim konumunun $\widetilde{x}+\pi$ oluşunun sonsuz derece ereyinde en iyi seçim olacağı da, ayrıca, gösterilmiştir.

Yukarıdaki kuramcıl başarılara karşın elde edilen yöntemin etkin bir sayıcıl yöntem durumuna getirilebilişi için sonuca erişilmez bir durum olmasa da, uygulayımcıllık açısından, sav araştırım çizemi bağlamında yüksek bir çaba gerekeceği yargısına sav danışmanınca varılmış, bu saptırım açılımları olgusu bu içeriğinde bırakılmış ve başka arayışlara gidilmiştir. Savdan bütünüyle uzaklaştırım istenmemiş ve olası okuyucuların durumu görebilişleri için savda sunuluşunda yarar görülmüştür.

Savda, tüm bunlardan sonra, çift Hermite çokterimlilerinin üçgencil işlevli (trigonometrik fonksiyonlu) Maclaurin açılımı anlatılmaktadır. Savın hem kuramcıl hem de uygulayımcıl açıdan en başarılı olan kesimi verilmiştir. Orada odaktaki Hermite işlevi için, ölçeklenmiş bağımsız değişken olan x değişkenine göre biri kosinüs, ötekisi sinüs işlevi ile çarpılan toplamdizilerin toplamı olan bir anlatım kullanılmış ve toplamdizilerin kesimcil çokterimli yaklaştırımları kullanılarak yaklaştıranlar oluşturulup onların kökleri belirlenmiştir.

Sonuçlar, yöntemin istenilen duyarlılıkta işlediğini ve sonuçlar elde edilirken sıfıra uzak köklerin küçük sayılabilecek dereceler için daha yüksek kesimcil yapılar gerektirip çalıştırılış sürelerinin daha büyük süreler gerektireceği gözlenmiştir. Ama, sonuçta, uygulayımcıl açıdan da başarılı bir yöntem geliştirilmiş bulunmaktadır. Bu yöntemde, kökler'n bulunuşunda saptırım açılımı değil sıradan kök belirleyiş yöntemleri kullanılmıştır. Bu bağlamda, MuPAD simgecil yorumlayıcısının olanakları kullanılmıştır. Öteki bir deyişle, daha önceden odağa alınıp sonuçta dışlanan saptırım açılımı uygulamalarında kökler de saptırım açılımıyla belirlendiğinden niteliksizlikle ya da az nitelilikle yüzleşildiği düşünülmüştür. Gerçekten de, işlev yaklaştırımındaki yanılgılar kök belirlenişlerinde çok daha yüksek yanılgılara neden olab'lmektedir. Bu da gürbüzlük kuramından (ing: Robustness Theory) iyi bilinen bir gerçektir.

Üçgencil işlevli Maclaurin açılımı yönteminin saptırım açılımıyla bütünleştirimi olanaklı görünmekle birlikte, savda buraya doğru bir yönelim gerçekleştirilmemiştir. BEBBYT araştırımları bağlamında gelecek için bir tasarı olarak yapılandırılabilecek gibi görünmektedir.

PERTURBATION EXPANSIONS AND SERIES EXPANSIONS WITH TRIGONOMETRIC FUNCTION FACTORS

SUMMARY

In this thesis based on the development of the method to determine the roots (zeros) of the Hermite polynomials, research has been initiated for different searches and some deductions have been reached with the conclusions produced from them.

We have also focused on the answer to the question of the well-known cosine function asymptotically for even Hermite polynomials and sine function asymptotically for odd Hermite polynomials in a more detailed form than existing in the related scientific literature (these forms asymptotically hold for infinite polynomial degree limit and works quite well when the degree grows unboundedly). We have investigated the situation for quite moderate polynomial degree values like two or even one digit integers. What we have observed that the cosinusoidal or sinusoidal asymptotically are needed to be combined to get asymptotic behaviors working well even two or one digit integer polynomial degrees.

The basic definitions and features that can be found in the scientific resources related to Hermite polynomials are revisited and the practically necessary ones have been reaffirmed.

The assertions of fluctuation and the fluctuation approximations are revisited and sufficiently explained. Mathematical Fluctuation Theory uses the matrix representation of the operator multiplying an appropriate arbitrary function of independent variable such that the truncated finite matrix representations on certain number of first consecutive basis functions. These representations can be approximated by using Hermite polynomials' roots and the related Hermite polynomials' values at those roots when the relevant interval of integration in the matrix representation matches the entire real number line. These roots are in fact the eigenvalues of the truncated matrix representation of the algebraic operator which multiplies its operand by the value of the independent variable at the same time and can be obtained by solving the relevant matrix eigenvalue problem. However, this becomes a tedious and numerically complicated problem when the truncation order tends to go to infinity. Essential numerical difficulty comes from the eigenvalue determination not from the eigenvector determination. On the other hand, these eigenvalues asymptotically related to the roots of cosine and sine function respectively for even and odd degree Hermite polynomials. This asymptotically comes from the solution of the ODE for Hermite polynomials at the infinite degree limit by using appropriate scalings and considerations of the term tending to vanish at that limit as perturbation. This enables us to develop a perturbative expansion for the solution of that perturbation equation to get terms involving powers of the independent variable and the cosine and sine functions. This series of terms can be truncated for approximations and the perturbative approximant roots can also be expanded to a similar type perturbation series whose

truncations can be used as truncation approximants. This thesis involves certain important issues of this approach as the content size allows.

All kinds of asymptotic behaviors related to Hermite functions are stated in here, the thesis. It is thought that it may be possible to change the unqualified approximation into qualified ones by creating a perturbation expansion starting from the dominant asymptotic approach which is very crude in accordance with the observation. In this context, an appropriate ODE has been created and an expansion has been realised by looking at the terms proportional to $1/n$ as perturbations. However, the truncated perturbation approximations formed here still produced quite low quality results, or even diverging perturbation series. Regarding with these observations the considered perturbation expansions do not seem to be very useful (even useful).

Hermite polynomial roots are also tried to be identified with infinite degree of damped perturbation expansions. In defining each perturbation expression in the perturbation expansion homogeneous perturbative solutions had been taken as zero. Later we have considered that this omittance negatively affects the numerical approximation quality. This urged us not to discard homogeneities to get better qualities. Despite these efforts seemed to decrease the negativity in the obtention of quality, it has been observed that the situation was still far from the acceptability.

In this thesis, Hermite polynomial roots have also been tried to be identified via perturbation expansion of the solution of an ODE not on infinite interval (real axis) but also certain finite intervals. Considering that the source of the quality negativities may be caused by infinite perturbation operator, we have tried to change the interval $(-\infty,\infty)$ to a finite range around a finite $\widetilde{x}$ position. However, although the quality of the results improves, at the end, we have had to consider that there might be still another problem negatively affecting the truncation approximation quality.

In order to remove or suppress negativity in quality we have considered the optimization to suppress the perturbation operator norm even in the finite interval case we have taken the homogeneity coefficients and the interval endpoint as the optimisation agents. to finite and coherence coefficients were determined. In this way we have expected that a more convenient integral operator appearing in the analysis can be obtained.

The optimisation analysis has shown that the best interval on which the integration is performed should locate its left endpoint on the value $\widetilde{x}$. Beyond this the right endpoint of the interval on which integration is performed should be located at the point $\widetilde{x}+\pi$

In spite of the above theoretical successes, although it is not an inaccessible situation for the method to be turned into an effective numerical method, it has been concluded by the thesis supervisor that in terms of applicability, a quite high effort will be required in the completion of the method construction and therefore we have no longer desired to continue on this route and we have left the perturbational efforts. However, all these perturbational investigations have not been discarded from the thesis and we have considered that it was beneficial to present it to the readers who are possibly willing to see the situation.

The construction of the triangular function coefficiented Maclaurin expansion of even Hermite polynomials is explained in sufficient details. We have not given the case for the odd Hermite polynomials. The most successful part of the thesis, in both theoretical and practical point of views, for the Hermite polynomial representation has been this part of research.

In the construction of the triangular function coefficiented Maclaurin expansion we have proposed two power series in the scaled independent variable x such that first and second power series are individually multiplied by $cos(x)$ and $sin(x)$ respectively and are of even and odd functions. Appropriate recursions have been constructed to evaluate the coefficients these power series. So the power series become to be determined uniquely as long as necessary initial values are given these recursions. After having the capability of evaluating these power series, their certain degree polynomial truncations have been used for numerical approximations. After all these, the the roots of the truncated approximants have been evaluated individually for the desired roots. What we have observed in the evaluations has been the fact that the roots far from the origin need more numerical effort for a specified numerical precision.

Although it seems possible to combine this latest proposed method with the perturbation expansion, we have not attempted to do so in this thesis. In the context of G4SMC (Group for Science and Methods of Computing) research studies, this can be considered as a project for the future.

1. GİRİŞ

Burada, savın sunumuna geçmeden önce, önemli bir olguda belirtimde bulunmanın yararlı olacağı düşünülmektedir. Ben ve saygıdeğer hocam Prof. Dr. Metin Demiralp, 10'u aşkın yıl önce İTÜ Bilişim Enstitüsü'nde, enstitü dışı katılımlarla da, kurulmuş olan ve üretkenliğini bugünlerde de sürdürmekte bulunan "Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT)" üyesiyizdir. Bu toplulukta, olabildiğince arı Türkçe kullanımı istenmekte, bu yolda, Türkiye'de dil geliştirimi çabasında olan birey ve kurumlarca geliştirilen ya da öngörülen sözcük ve yazılarından benimsenebilenler kullanılmakta, gerektiğinde toplulukta gereksinimi duyulan arı Türkçe sözcükler üretimi için de öngörümlerde bulunulmakta ve kullanılmaktadır. Savda da, bu eğilim sürdürülmek istenmekte, ama, herkesçe bilinmeyebilecek olan sözcüklerin kullanımında ya varolan güncel karşılıkları ya da İngilizce karşılıkları ayça ayıraçları (ing: crescent parantheses, ordinary parantheses, (,)) arasında verilmektedir.

Uzbilimcil doğabilim (Matematiksel fizik) sorunlarında kullanılan biçeler (modeller), çoğu zaman, katsayıları değişkenlerine bağlı olan Sıradan Türevli Denklemler (STD) (ing: Ordinary Differential Equations, <ODE>s) veya Göre Türevli Denklemler (GTD) (ing: Partial Differential Equations, <PDE>s) yardımıyla betimlenebilmektedir (ing: described). Bu türdeki denklemlerin, inceleyişleri ilginçleştirebilecek ve çoğu zaman güçleştirecek olan özellikleri araştırım gerçekleştirilen bölgede veya bölgenin kıyı (sınır, <yunanca kökenlidir>) çizgisinin üzerinde katsayılarında tekillik (ing: singularity) bulunabilişidir. Yani, bölgenin bazı noktalarında baskın katsayılarda sıfır oluşlar veya belli katsayı ya da anlatımlarda belirsizlik yaratabilecek yapılar bulunuşudur. Bu türdeki denklemlere dönüşen doğabilimcil sorunların kesin (ing: exact, analytic) çözümlerini buluşun çok güç oluşu yanısıra bazı durumlarda çözüme yaklaştırımla ulaşmak da olanaklı değildir. Sorunun güçlüğü denklemin çözümünün sonsuz toplamdizi yapısında aranışından kaynaklanmaktadır. Böyle durumlarda ise karşımıza yeni bir sorun çıkmaktadır. Bu da, denklemin tüm özel durumları için sonsuz toplamdizinin yakınsaklığının varoluşunun istenişi ve varlığının kanıtlanışıdır.

Öte yandan, izgecil (ing: spectral) inceleyişlerde, özişlevlerin (ing: eigenfunctions) belirlenişi, ve de, dikgenliklerinin (ing: orthogonality) gösterilişi de, çoğu kez, sorun çıkarabilirler. Ayrıca devinimle ilgili sorunlarda çözümünün kararlılığını (ing: stability) sağlamak ve sağlandığını kanıtlamak da güçlükler yaratabilir.

Yukarıdaki bölümcede (ing: paragraph) sözedilen denklemlerin, özellikle STD ya da GTD yapısı doğrucul (ing: linear) olanlarında "Doğrucul Yöney Uzayları (ing: Linear Vector Spaces)" ile ilgili bilgi birikiminden yararlanılabilir. Böyle uzaylar yöney (ing: vector) adı verilen öğelerden oluşur. Ancak, buradaki "yöney" sözcüğü onun soyut (ing: abstract) anlamındadır. Öteki bir deyişle, tanımları olabildiğince özelsizdir. Bunlar, kartezyen yöneyler, dizeyler (ing: matrices), işlevler (ing: functions), işleçler (ing: operators) ya da bunlar gibi somut tanımlarla ayrışıklaştırılmış (ing: distinguished) öğeler olabilir. Eğer, işlevler gündemdeyse, ilgilenilen uzaylar "Doğrucul İşlev Uzayları" gibi de adlandırılabilir. Bu tür, uzaylarda, boy (ing: norm) ve iççarpım (ing: inner product) tanımlanırsa, "İççarpım Uzayları (ing: innerproduct spaces)" ile yüzleşilir. Bu uzaylarda, tüm işlev toplamdizileri (işlevlerin doğrucul birleşimleri, ing: Linear combinations of functions) uzay içinde bir öğeye yansıdığında olay Hilbert Uzayları odağında olur. Bu uzaylarda, herhangi bir işlevi bir doğrucul birleşimle eşsiz biçimde betimleyen işlevler bir taban küme'si olarak adlandırılır. Odaklanılan biçelerin yapısına bağımlı olarak bunların tanımları uygun biçimde yapılabilir.

Çoğunluğu, bir biçimde, Hilbert uzaylarında kullanılan ve türlü yönlerde büyük önem kazanabilen birçok özel işlev tanımlanmış bulunmaktadır. Bunlardan en çok kullanılanları arasında, yuvakçıl (ing: cylinderical) işlevler (Bessel, Hankel, Weber, Neuman işlevleri), yuvarcıl (ing: spherical) işlevler (Legendre çokterimlileri) ve özel çokterimlilerin (Chebyshev-Hermite, Chebyshev-Laguerre çokterimlileri) oluşturduğu soyocaklar (aileler) sayılabilir. Bu tür işlevlerin yardımıyla ile türlü doğabilimcil olaylarda uygulayımın önemli sorunlarında yaklaşık çözümler bulunmakta ve sorunlara açıklık getirilebilmektedir.

Hermite çokterimlilerinin bilinen ilk tanımlanışını, 1810'da Laplace adlı bilimci gerçekleştirmiştir. Bunları, 1859'da ayrı olarak Chebyshev incelemiştir. Ancak, 1864'te Charles Hermite, Chebyshev'in çalışmalarını yeniden ele almış ve çokterimlileri yeniden tanımlamıştır [1].

Uzbilimde, Hermite çokterimlileri olasılık kuramı (ing: Probability theory) içinde Edgeworth serisi olarak ortaya çıkan bir başal dikgen (ing: classical orthogonal) toplamdizi'dir (ing: series); katışımcıl uygulayışlar (ing: combinatorial applications) içinde de, nicem uyumlu salıngaç (ing: quantum harmonic oscillator) ile ilgili uygulayışlarda da kullanılan yapılardır.

Uzbilimcil Sendelenim açılımı (ing: Fluctuation Expansion), Prof. Dr. Metin Demiralp ve BEBBYT (Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu) tarafından geliştirilmiş ve geliştirilmekte olan bir yöntemdir [2–13]. Sendelenim açılımı işleçlerin dizey gösterilimi (ing: matrix representation) temeline dayanmaktadır. İşleçlerin dizey gösterilimi, değişik sorunların sayıcıl çözümlerinin elde edilmesi için oluşturulan cebirsel yöntemlerin gelişmesinde önemli rol oynar. Özellikle doğrucul işleçler içeren sorunların yaklaşık çözümlerini elde edebilmek için, sonlu sayıda taban işlevi ile örtülen (ing: span) doğrucul yöney uzayları üzerinde işleçlerin dizey gösterilimleri kullanılabilir. Böylece doğrucul yöney uzayının boyutu arttırılarak istenilen yaklaştırım niteliğine ulaşılabilir. Bu türden sorunlar arasında nicem eniyileyişli denetim (ing: quantum optimal control), sayıcıl tümlevleyiş, Taylor açılımları, sıradan türevli ve göre türevli denklem çözümleri, sayıtsal işleybilim (ing: statistical mechanics) sayılabilir. Bu alanlarda, argümanlarını işlevlerin belli değerleri ile çarpan cebircil işleçler ile sıkça karşılaşılır. Bu işleçlerin dizey gösterilimindeki elemanlar, Hilbert uzayında tümlev yardımı ile tanımlanan iççarpımlarla verilmektedir. Bu tümlevlerin belirlenişi ile elde edilebilecek her durum için kolay değildir ve bu durum yaklaşık çözümlerin gereksinimine yol açar. Böylece bu işlecin dizey gösterilimlerinin yaklaştırımları yalnızca kuramda değil uygulayımda da oldukça önem taşımaktadır.

Saptırım açılımı (ing: Perturbation Expansion) yöntemi ise daha çok matematiksel modelleme sonrasında ortaya çıkan denklemlerin çözülebilmesi için kullanılmaktadır [14, 15]. Çoğu denklemlerin matematiksel yapısı açık ve kesin bir analitik çözüm üretmeye olanak vermediğinden bu yöntem probleme yaklaşık bir çözüm bulabilmek için kullanılanılmaktadır. Uygulamada karşılaşılan problemlerin birçoğunda, ortaya çıkan denklemlerdeki bazı parametrelerin özel bir değer alması durumunda problemin çözümü kolay duruma gelebilir. Bu tür durumlarda, parametrenin bir saptırıma neden olduğu düşünülerek saptırım olmadığı durum taban alınır ve saptırım etkileri ardışık bir biçimde yansıtılacak yapıda bir yöntem oluşturulur. Bazı durumlarda denklem içinde bir parametre bulunmayabilir. Bu durumda denklem içine yapay olarak bir parametre eklenerek saptırım açılımı yöntemi gündeme getirilebilir.

Hilbert uzaylarındaki boy ve iççarpım tanımları gerçel bir değişkenin değer aldığı aralık üzerinden yapılır. Bu aralığa göre taban işlevleri de değişir. Ayrıça, yine boy ve iççarpım tanımlarında aralık üzerinde bir ağırlık işlevinden de yararlanılabilir ve bu ağırlık da taban işlevlerini değiştirebilir. Aralığın $(-\infty, \infty)$, ağırlığın $\exp(-x^2/2)$ alındığı durumlarda taban işlevleri de x bağımsız değişkeninin Hermite işlevleri olarak ortaya çıkar.

Hermite işlevleri BEBBYT araştırımlarında, sendelenimsizlik kanıtsavı kullanımında, ya da, sendelenim açılımlarında başarıyla kullanılmış ve kullanılmaktadır.

Sav, toplamda, bilimcil içerikli sekiz bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde Hermite işlevleri ile ilgili bir kesim bilgileri içermektedir ve anımsatım amaçlıdır. Üçüncü bölümde de sendelenim kanıtsavı ve bunun çevresindeki bilgi ve gönderimlerle bezenmiş olgular sunulmaktadır. Dördüncü bölümdeki inceleyişler sonsuz derece ereyinde yanaşım odaklıdır. Orada çokterimlilerin köklerinin ya da sıfırlarının bu derece ereyinde incelenişiyle ilgili temel öğeler de verilmektedir. Beşinci ve altıncı bölümlerde Hermite çokterimlilerinin sonsuz derece ereyinde sönümlü saptırım açılımıyla onun ekkoşullandırımlışının belli ölçüde ayrıntılandırımı ve bir anlamda yargılanışı verilmektedir. Yedinci bölümde ise saptırım açılımından esinlenimlerle, neredeyse bütünüyle değişik, yapıda tasarımlanmaktadır. Orada sinüs ve kosinüs işlev çarpanlı iki toplamdizi belirlenişe çalışılmakta ve kesimcil toplamlarla kökler için yaklaşık değerler sunulabilmektedir. Oradaki tasarım kavramcılık açısından yüksek düzeyde oluşun yanısıra uygulayımcıl açıdan da yüksek nitelikli durumdadır. Böylece, orada, sav amacına gerçekçi anlamda ulaşmış olmaktadır. Sekizinci bölüm sonuçların vurgulandığı kesimdir.

2. HERMITE ÇOKTERİMLİLERİ ILE İLGİLİ BİR KESİM TANIMLAR VE ÖZELLİKLER

Hermite çokterimlilerini aşağıdaki toplamdizi aracılığıyla tanımlamak olanaklıdır [16].

$$e^{2xt-t^2} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} H_j(x)\frac{t^j}{j!} \tag{2.1}$$

Buradan, çok belirtik bir tanım olmasa da, aşağıdaki eşitliğe geçilebilir.

$$H_j(x) \equiv \left\{\frac{d^j}{dt^j}e^{2xt-t^2}\right\}\Bigg|_{t=0}, \qquad j=0,1,2,... \tag{2.2}$$

Bundan da,

$$\begin{aligned} H_j(x) &= e^{x^2}\left\{\frac{d^j}{dt^j}e^{-(x-t)^2}\right\}\Bigg|_{t=0} = (-1)^j e^{x^2}\left\{\frac{d^j}{d(x-t)^j}e^{-(x-t)^2}\right\}\Bigg|_{t=0} \\ &= (-1)^j e^{x^2}\frac{d^j}{dx^j}e^{-x^2}, \qquad j=0,1,2,... \end{aligned} \tag{2.3}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu bağıntı Rodrigues eşitliği [16] olarak da bilinir ve Hermite çokterimlilerinin doğrudan, yoktan üretilmiş, bir tanımı olarak da düşünülebilir.

Hermite çokterimlileri arasında bir özyineleyişi (ing: recursion) (2.3)'ten üretmek olanaklıdır. Bu amaçla, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} (-1)^j e^{x^2}\frac{d^j}{dx^j}e^{-x^2} &= (-1)^j e^{x^2}\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}(-2x)e^{-x^2} \\ &= 2(-1)^{j-1}e^{x^2}\left\{x\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}e^{-x^2}+(j-1)\frac{d^{j-2}}{dx^{j-2}}e^{-x^2}\right\} \\ &= 2xH_{j-1}(x)-2(j-1)H_{j-2}(x), \qquad j=0,1,2,... \end{aligned} \tag{2.4}$$

Böylece, j yerine $(j+1)$ alarak aşağıdaki özyineleyişe [16] geçilir.

$$H_{j+1}(x) = 2xH_j(x)-2jH_{j-1}(x), \qquad j=0,1,2,... \tag{2.5}$$

Hermite çokterimlileri arasında, türev de içeren, bir özyineleyiş oluşturmak da olanaklıdır. Bu amaçla, (2.1)'in her iki yanını x'e göre türevleyerek yola çıkılabilir. Böylece, üs simgesi x'e göre türevi anlatmak üzere,

$$2te^{2xt-t^2} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} H_j'(x)\frac{t^j}{j!} \tag{2.6}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sol yanında, (2.1)'den yararlanarak, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$2te^{2xt-t^2} = \sum_{j=0}^{\infty} 2H_j(x)\frac{t^{j+1}}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} 2H_{j-1}(x)\frac{t^j}{(j-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} 2jH_{j-1}(x)\frac{t^j}{j!}. \qquad (2.7)$$

Bunun ve (2.6)'nın sol yanları eşdeğerdir ve sağ yanları da eşdeğer olmalıdır. Böylece,

$$H_j'(x) = 2jH_{j-1}(x), \qquad j = 0,1,2,... \qquad (2.8)$$

bağıntısına varılır.

Hermite çokterimlileri e^{-x^2} ağırlığı altında dikgen (ing: orthogonal) bir taban küme'si oluştururlar. Bunun kanıtlanışı için (2.1)'den aşağıdaki eşitliğe geçilebilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{2xt_1-t_1^2+2xt_2-t_2^2-x^2} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{t_1^{j_1}}{j_1!}\frac{t_2^{j_2}}{j_2!}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2}H_{j_1}(x)H_{j_2}(x) \qquad (2.9)$$

Özenli bir bakış, bu eşitliğin sol yanındaki tümlevin çözümcül (ing: analytic) olarak belirlenebileceğini gösterir ve o tümlevin belirleniş için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{2xt_1-t_1^2+2xt_2-t_2^2-x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-(x-t_1-t_2)^2+2t_1t_2} = \int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2+2t_1t_2}\\ &= \sqrt{\pi}e^{2t_1t_2} \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Bu arasonucun kullanımıyla, (2.9) yerine aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\sqrt{\pi}e^{2t_1t_2} = \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\pi}2^j\frac{t_1^jt_2^j}{j!} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{t_1^{j_1}}{j_1!}\frac{t_2^{j_2}}{j_2!}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2}H_{j_1}(x)H_{j_2}(x) \qquad (2.11)$$

Buradan, hemen ayırdına varılabileceği gibi, ilk eşitlik simgesinin sağındaki toplamdizide t_1 ve t_2'nin değişik üslülerinin çarpımını içeren anlatımlar yoktur. Bu durum, ikinci eşitliğin sağ yanındaki toplamdizide (ing: series), bu tür anlatımların sıfırlanışını gerektirir. Eşüslü t'ler içeren anlatımların ise eşdeğer oluşu gerekir. Bu gerekliliklerin sağlanımı için ise aşağıdaki eşitliklerin geçerliliği gerekir.

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2}H_{j_1}(x)H_{j_2}(x) = \sqrt{\pi}2^{j_1}j_1!\,\delta_{j_1,j_2} = \sqrt{\pi}2^{j_2}j_2!\,\delta_{j_1,j_2},\\ &j_1, j_2 = 0,1,2,... \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Burada, δ_{j_1,j_2} ile $j_1 = j_2$ için 1, onun dışında 0 değerini alan Kronecker'in delta simgesi gösterilmektedir. Bu ise, biraz önce belirtildiği üzere, Hermite çokterimlilerinin, e^{-x^2} ağırlığı altında, dikgen bir küme oluşturduklarını gösterir.

Bu son sonuç, bir yandan da, Hermite çokterimlilerinin boylarını (ing: norms) belirtir. Bu da, birimboylulaştırım (ing: normalization) için olanak sağlar. Bu ise, birimboylulaştırılmış Hermite çokterimlileri tanımına olanak sağlar. Böylece, aşağıdaki tanım eşitlikleri yazılabilir.

$$\overline{\mathrm{H}}_j(x) \equiv \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}2^{-\frac{j}{2}}}{\sqrt{j!}}H_j(x), \;\; H_j(x) = \pi^{\frac{1}{4}}2^{\frac{j}{2}}\sqrt{j!}\,\overline{\mathrm{H}}_j(x), \;\; j=0,1,2,... \qquad (2.13)$$

Bunların (2.5)'te ve (2.8)'de kullanımıyla, aşağıdaki özyineleyişler elde edilebilir.

$$\sqrt{j+1}\,\overline{\mathrm{H}}_{j+1}(x) = \sqrt{2}x\overline{\mathrm{H}}_j(x) - \sqrt{j}\,\overline{\mathrm{H}}_{j-1}(x), \qquad j=0,1,2,... \qquad (2.14)$$

$$\overline{\mathrm{H}}_j'(x) = \sqrt{2j}\,\overline{\mathrm{H}}_{j-1}(x), \qquad j=0,1,2,... \qquad (2.15)$$

2.1 Hermite İşlevleri

Birimboylulaştırılmış Hermite çokterimlileri de, e^{-x^2} ağırlığı altında, bir dikgen küme oluşturur. Bunun da ötesinde, bunlardan, birim ağırlık işlevi (ing: unit weight function) altında dikgen küme oluşturan işlevler de tanımlanabilir. "Hermite İşlevleri" olarak da adlandırılan bu işlevlerin belirtik tanımları aşağıda verilmektedir.

$$h_j(x) \equiv \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\overline{\mathrm{H}}_j(x), \qquad \overline{\mathrm{H}}_j(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}h_j(x), \qquad j=0,1,2,... \qquad (2.16)$$

Bunların kullanımıyla, (2.14) ve (2.15)'ten aşağıdaki eşitliklere geçilebilir.

$$\sqrt{j+1}h_{j+1}(x) = \sqrt{2}xh_j(x) - \sqrt{j}h_{j-1}(x), \qquad j=0,1,2,... \qquad (2.17)$$

$$h_j'(x) = -\frac{\sqrt{j+1}}{\sqrt{2}}h_{j+1}(x) + \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{2}}h_{j-1}(x), \qquad j=0,1,2,... \qquad (2.18)$$

x değeri için bir kısıt konmamış olmakla birlikte, en azından gerçel tüm x'ler için geçerli olarak kullanılan (2.3)'te x yerine $-x$ yerleştiğinde elde edilecek eşitlikte yine (2.3)'ün kullanımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$H_j(-x) = (-1)^jH_j(x), \qquad j=0,1,2,... \qquad (2.19)$$

Bunun anlamı, altsırasayısı 2 ile tam olarak bölünebilen Hermite çokterimlilerinin çift işlev olduğu, öteki bir deyişle, x'in, salt, 2 ile tam olarak bölünebilen, tamsayı üslülerinden oluştuğudur. Öteki Hermite çokterimlileri ise x'in tek (2 ile tam olarak bölünemeyen tamsayı) üslülerinden oluşur. Bu durum, tek ve çift Hermite çokterimlilerinin, ayrı birer küme olarak düşünülüp, sanki birer ayrı taban takımının öğeleri gibi kullanılabileceği anlamına da gelir. Gerçekten de, çift işlevler salt çift Hermite çokterimlilerince, tek işlevler salt tek Hermite çokterimlilerince, gösterilebilirler. Tüm bunlar, Hermite işlevleri için de söylenebilirler. Bunun nedeni de, bunların Hermite çokterimlileriyle çift bir işlev çarpanla orantılı oluşudur.

(2.17), x ile çarpılıp özünün (kendisinin) içinde kullanılacak olursa aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$x^2 h_j(x) = \frac{\sqrt{(j+2)(j+1)}}{2} h_{j+2}(x) + \left(j+\frac{1}{2}\right) h_j(x) + \frac{\sqrt{j(j-1)}}{2} h_{j-2}(x), \quad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.20}$$

(2.18)'i türevleyerek ve özünü içinde kullanarak da aşağıdaki eşitliğe ulaşılabilir.

$$h_j''(x) = \frac{\sqrt{(j+2)(j+1)}}{2} h_{j+2}(x) - \left(j+\frac{1}{2}\right) h_j(x) + \frac{\sqrt{j(j-1)}}{2} h_{j-2}(x), \quad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.21}$$

(2.21) ve (2.20)'den aşağıdaki sıradan türevli denkleme geçilebilir.

$$-\frac{1}{2} h_j''(x) + \frac{1}{2} x^2 h_j(x) - \left(j+\frac{1}{2}\right) h_j(x) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.22}$$

Bu denklem uzbilimcil doğabilimde (ing: mathematical physics) nicem uyumlu salıngaç (ing: quantum harmonic oscillator) olarak bilinen biçede (ing: model) üretilen denklemle örtüşür. Ancak, bunun için ya doğabilimcil birimsizleştirimeye geçmek ya da indirgenmiş Planck değişmezi olan $\hbar$, dizgedeki kütle değiştirgesi (ing: parameter) olan μ, uyumlu salıngaç esneklik değiştirgesi olan k değişmezlerinin 1 değerli olarak alınışı gerekir. Bunun yanısıra, o denklemde, $\left(j+\frac{1}{2}\right)$ yerinde erke (ing: energy) simgesinin bulunduğunu, ama çözümdeki kıyı (sınır <yunanca kökenli>) koşullarının sağlanımı için o erke yerine burada $\left(j+\frac{1}{2}\right)$ alındığını vurgulamakta yarar bulunmaktadır.

(2.22)'deki sıradan türevli denklemden, $\overline{\mathrm{H}}_j$ için aşağıdaki sıradan türevli denklem üretilebilir.

$$\overline{\mathrm{H}}_j''(x) - 2x\overline{\mathrm{H}}_j'(x) + 2j\overline{\mathrm{H}}_j(x) = 0, \qquad \overline{\mathrm{H}}_j(0) = \frac{\pi^{-\frac{1}{4}} 2^{-\frac{j}{2}}}{\sqrt{j!}} H_j,$$
$$\overline{\mathrm{H}}_j'(0) = \frac{\pi^{-\frac{1}{4}} 2^{-\frac{(j-2)}{2}}}{\sqrt{(j-1)!}} H_{j-1}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.23}$$

Burada, H_j j. Hermite çokterimlisinin, bağımsız değişkeninin sıfır oluşu durumunda, aldığı değer olarak bilinen ve j. Hermite sayısı [16] olarak adlandırılan büyüklüğü simgelemektedir. Bunun belirtik tanımı aşağıda verilmektedir.

$$H_j \equiv \frac{1+(-1)^j}{2}\frac{(-1)^{\frac{j}{2}}j!}{\left(\frac{j}{2}\right)!}, \qquad j=0,1,2,... \tag{2.24}$$

(2.23) eşitlikleri birimboylu Hermite çokterimlilerince sağlanır. Ama, bir yandan da, başka başlangıç koşulları altında, yaygın olarak bilinen ve birimboylu olmayan Hermite çokterimlilerince de sağlanır. Bu bağlamda, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$H_j''(x)-2xH_j'(x)+2jH_j(x)=0, \qquad H_j(0)=H_j, \qquad H_j'(0)=2jH_{j-1},$$
$$j=0,1,2,... \tag{2.25}$$

Hermite işlevleriyle ilgili bir başka önemli özyineleyiş de, onların ikili çarpımları üzerinde yazılanıdır. Bu özyineleyişi üretmek için önce (2.20)'de j yerine k yerleştirerek yeni bir özyineleyiş elde edilmelidir. Bu durumda, (2.20) j'li, yeni üretilense k'lı özyineleyiş olarak adlandırılacak olursa; j'li özyineleyiş sağdan $h_k(x)$ ile, k'lı özyineleyişse soldan $h_j(x)$ ile çarpılıp oluşan eşitliklerde yanlar yanlara toplanırsa, bir kesim yalınlaştırımlardan sonra, aşağıdaki özyineleyiş elde edilir.

$$\frac{\sqrt{(j+2)(j+1)}}{2}h_{j+2}(x)h_k(x)-\frac{\sqrt{(k+2)(k+1)}}{2}h_j(x)h_{k+2}(x)+(j-k)h_j(x)h_k(x)$$
$$-\frac{\sqrt{k(k-1)}}{2}h_j(x)h_{k-2}(x)+\frac{\sqrt{j(j-1)}}{2}h_{j-2}(x)h_k(x)=0, \qquad j,k=0,1,2,... \tag{2.26}$$

Bu eşitlikler, işlevle çarpım işleçlerinin, dizey gösterilimlerinde etkin bir biçimde kullanılabileceği niteliktedirler.

Hermite işlevlerinin tüm x değerleri için sonlu kalışı, bunun da ötesinde, x'in imsiz (im = ing. sign) değerinin sonsuza gidişinde, yeterince tez olarak sıfıra gidişi gerekir. Bunun nedeni de, bu işlevlerden her birinin tüm x değerleri için tümlevlenebilir oluşunun gerekliliğidir. Bu durumun, olabildiğince yalın olarak anlatımı için Hermite işlevlerinin $x=0$'daki değerine odaklanabiliriz. Bunun başlıca nedeni ise bu değerin çözümcül anlatımlarla verilebilir oluşudur. (2.16)'nın ilk, (2.23)'ün ikinci eşitliklerinden, ve de, (2.24)'ten aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$h_j(0)=\overline{\mathrm{H}}_j(0)=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}2^{\frac{j}{2}}\sqrt{j!}}H_j=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}2^{\frac{j}{2}}\sqrt{j!}}\frac{1+(-1)^j}{2}\frac{(-1)^{\frac{j}{2}}j!}{\left(\frac{j}{2}\right)}, \quad j=0,1,2,.. \tag{2.27}$$

Bunun, tek ve çift altsırasayılı Hermite işlevleri için, ayrıştırılmış karşılıkları aşağıda verilmektedir.

$$h_{2j+1}(0) = 0, \qquad h_{2j}(0) = \frac{(-1)^j \Gamma(2j+1)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^j j!}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.28}$$

Burada, yalınlaştırım için, Gamma işlevi özyineleyişinden yararlanarak, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\Gamma(2j+1) &= 2j(2j-1)...2.1 = \prod_{k=1}^{2j} k = \left[\prod_{k=1}^{j} 2k\right]\left[\prod_{k=1}^{j} 2k-1\right] \\
&= 2^{2j} j! \left[\prod_{k=1}^{j}\left(k - \frac{1}{2}\right)\right] \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{2j}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(j+1)\Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Bu eşitlik, her nasılsa, salt doğalsayı j değerleri için üretilmiş olsa da, aslında, j'nin tüm değerleri için geçerlidir (ancak, tekillikler çevresinde özel bir eylemle tekilliklerden arındırılarak yolalınmalıdır). Buradan, aşağıdaki eşitliği çıkarmak hiç de güç değildir.

$$\frac{\Gamma(2j+1)^{\frac{1}{2}}}{j!} = \frac{2^j}{\pi^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(j+1)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.30}$$

Bu, (2.28)'in ikinci eşitliğinde kullanılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$h_{2j}(0) = \frac{(-1)^j}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(j+1)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.31}$$

Buradaki Gamma işlevler oranı için aşağıdaki eşitlik ve eşitsizlik yazılabilir.

$$\frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(j+1)} = \left(\frac{j-\frac{1}{2}}{j}\right)\left(\frac{j-\frac{3}{2}}{j-1}\right)\cdots\left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} < \sqrt{\pi}, \quad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.32}$$

Bu, söz konusu Gamma işlev değerleri oranı için bir üst kıyı tanımlar ve bu kıyı oldukça kötümserdir. Ancak, kötümserliğin düzeyi j tanım bölgesi 0'dan daha büyük değerlerden başlatıldıkça azalır ve kıyı değeri de azalır. Ancak, kötümser de olsa bu an için bu eşitsizliği kullanacağız. (2.32)'nin (2.31)'de kullanımı aşağıdaki imsiz değer eşitsizliğine götürür.

$$\left|h_{2j}(0)\right| < \pi^{-\frac{1}{4}}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.33}$$

Bu eşitsizlik $j \to \infty$ için çok aşırı kötümser duruma düşer. Ama (2.31)'den, Gamma işlev oranlarının yanaşık (ing: asymptotic) davranışlarından yararlanarak, aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$h_{2j}(0)\Big|_{j\to\infty} \approx \pi^{-\frac{1}{4}} \tag{2.34}$$

Bunun anlamı, bu değerin, j büyüdükçe, $\pi^{-\frac{1}{4}}$'e çok yaklaşacağıdır.

$h_{2j}(x)$ işlevinin $x = 0$'daki değeri bir aşaç (ing: extremum) değerdir. $x = 0$ konumu işlevin, j tek ise bir azınına (ing: minimum), çift ise bir çoğununa (ing: maximum) karşılık gelir. Ancak, bu işlevin bu aşaç değerleri, imsiz değerde bütüneyaygın en büyük değerleri değildir. Çizim yapılarak bakıldığında, bu en büyük değer(ler)in $x = 0$'dan en uzaktaki konumlarda yerleşik olduğunu ve j arttıkça $x = 0$'dan uzaklaşmakta olduğunu gösterir. Bu yüzden, x'in j'ye bağlı olan ve j arttıkça sonsuza giden bir konumu üzerinde $h_j(x)$ değerinin ne olduğunun incelenişi büyük önem kazanır.

2.2 İşlevle Çarpım İşlecinin Hermite İşlev Tabanı Üzerinde Dizey Gösterilimi

Dördülü (ing: square) gerçel sayı doğrusu üzerinde tümlevlenebilen bir işlevi $f(x)$ ile simgeleyelim. Bu işlev üzerinden, yine dördülü gerçel sayı doğrusu üzerinde tümlevlenebilen herhangi bir $g(x)$ işlevi için, $\widehat{f}$ ile simgelenen ve aşağıdaki biçimde tanımlanan bir "işlevle çarpım işleci" (işleç = ing. operator) aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

$$\widehat{f}g(x) \equiv f(x)g(x) \tag{2.35}$$

Buradan bir dizey (ing: matrix) gösterilimine geçebilmek için önce $g(x)$ işlevini Hermite işlevleri türünden toplamdiziye açmak gerekir. Böylece,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k h_k(x) \tag{2.36}$$

yazılabilir. Bu toplamdizinin yakınsayışı için $g(x)$ işlevinin dördülü tümlevlenebilir oluşu yeterlidir. Ancak, bu yakınsayış yeterince yüksek tezlikte olmayabilir. Bu an için yavaş da olsa yakınsaklık yeterlidir.

(2.36)'nın (2.35)'te kullanımı sonrasında ele geçen eşitliğin her iki yanı $h_j(x)$ ile çarpılıp x üzerinde gerçel sayı doğrusu üzerinde tümlevlenirse aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx h_j(x) \widehat{f} h_k(x) g_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx h_j(x) f(x) h_k(x) g_k, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{2.37}$$

Burada, Hermite işlevlerinin dikgen bir küme oluşundan ve yakınsak Hermite işlev toplamdizilerinin tümlevlerinin toplananlar üzerinde dağıtılabilirliğinden yararlanılmıştır, ve de böylece, sayılabilir sonsuzlukta, doğrucul (ing: linear) denklem ortaya çıkarılmış olmaktadır. Bunları, $M_{j,k}\left(\widehat{f}\right)$ simgelenişi $\widehat{f}$ işlecinin dizey gösteriliminin $j$nci yataysırasıyla $k$ncı düşeysırasının kesiştiği yerdeki öğesini kimliklendirmek üzere,

$$M_{j,k}\left(\widehat{f}\right) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx h_j(x)\widehat{f} h_k(x), \qquad j,k = 0,1,2,... \tag{2.38}$$

$$F_{j,k} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx h_j(x) f(x) h_k(x), \qquad j,k = 0,1,2,... \tag{2.39}$$

tanımlarıyla, aşağıdaki daha tıkız biçimde yazmak olanaklıdır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_{j,k}\left(\widehat{f}\right) g_k = \sum_{k=0}^{\infty} F_{j,k} g_k, \qquad j = 0,1,2,... \tag{2.40}$$

Eğer,

$$\mathbf{g} \equiv \left[g_0 \;\; g_1 \;\; ... \;\; \right]^T \tag{2.41}$$

ve

$$\mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} F_{0,0} & \cdots & F_{0,n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ F_{n,0} & \cdots & F_{n,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

tanımları yapılacak olur, ve de, $\widehat{f}$ işlecinin dizey gösterilimi $\mathbf{M}\left(\widehat{f}\right)$ kısayol ile simgelenecek olursa, (2.39)'u aşağıdaki dizey cebircil biçimde yeniden yazmak olanaklı olur.

$$\mathbf{M}\left(\widehat{f}\right)\mathbf{g} = \mathbf{F}\mathbf{g} \tag{2.43}$$

Bu yöney (ing: vector) eşitlik, $\mathbf{g}$ ne olursa olsun, geçerlidir. Bu ise

$$\mathbf{M}\left(\widehat{f}\right) = \mathbf{F} \tag{2.44}$$

anlamına gelir. Böylece, $\widehat{f}$ işlecinin Hermite işlevleri tabanı üzerinde dizey gösterilimi belirtik olarak bulunmuş olur. $\mathbf{F}$'nin $\widehat{f}$ işlecinin dizey gösterilimi oluşu yanısıra $\mathbf{g}$ de g işlevinin dizey gösterilimidir (yöney oluşuna karşın dizey gösterilimi deyiminin kullanışı bir anlamda bir kalıp deyim oluşundandır).

g_k değerinin tümlev gösterilimini yazmak da olanaklıdır. (2.36)'nın her iki yanının $h_j(x)$ ile çarpıldıktan sonra x'in gerçel sayı doğrusu üzerindeki tüm değerleri için tümlevi alınır ve Hermite işlevlerinin dikgenliğinden yararlanılacak olursa aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$g_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx h_k(x) g(x), \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{2.45}$$

Bu eşitlik, $g(x)$'in x'in bir çift işlev oluşu durumunda, g_k'lardan k'nın 2'nin tam katları olanlar dışındakilerin 0 olacağını belirtir. Bunun nedeni de, $h_k(x)$'lerden yalnız çift işlev olanların üzerindeki tümlevlerin bu durumda 0'dan değişik oluşudur. Yine bu eşitlik, $g(x)$'in x'in bir tek işlev oluşu durumunda, g_k'lardan k'nın 2'nin tam katları olmayanlar dışındakilerin 0 olacağını belirtir. Bunun nedeni de, $h_k(x)$'lerden yalnız tek işlev olanların üzerindeki tümlevlerin bu durumda 0'dan değişik oluşudur. Bu durum, bir kesim indirgeyişlerde kullanılabilir. Herhangi bir, dördülü, x değişkeninin gerçel sayı doğrusunda yerleşik tüm değerleri üzerinde, tümlevlenebilir $g(x)$ işlevi

$$g_+(x) \equiv \frac{1}{2}\left(g(x) + g(-x)\right), \qquad g_-(x) \equiv \frac{1}{2}\left(g(x) - g(-x)\right) \tag{2.46}$$

tanımlarıyla verilen iki işlev türünden

$$g(x) = g_+(x) + g_-(x) \tag{2.47}$$

eşitliğiyle anlatılabilir. $g_+(x)$, x yerine $-x$ alındığında im değiştirmez, yani bir çift işlevdir. Buna karşın, $g_-(x)$, x yerine $-x$ alındığında im değiştirir, yani bir tek işlevdir. Böylece,

$$\begin{aligned} g_+(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} g_{2k}^{(+)} h_{2k}(x) \\ g_-(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} g_{2k+1}^{(-)} h_{2k+1}(x) \end{aligned} \tag{2.48}$$

yazılabilir. Buradan daha tıkız anlatımlara geçebilmek için

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_+(x) &\equiv [h_0(x) \;\; h_2(x) \;\; ... \;\; ...]^T \\ \mathbf{h}_-(x) &\equiv [h_1(x) \;\; h_3(x) \;\; ... \;\; ...]^T \end{aligned} \tag{2.49}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_+ &\equiv [g_0 \;\; g_2 \;\; ... \;\; ...]^T \\ \mathbf{g}_- &\equiv [g_1 \;\; g_3 \;\; ... \;\; ...]^T \end{aligned} \tag{2.50}$$

tanımları yapılırsa

$$g(x) = \mathbf{g}_+^T \mathbf{h}_+(x) + \mathbf{g}_-^T \mathbf{h}_-(x) \tag{2.51}$$

doğrucul cebircil anlatımlı eşitliğine geçilebilir. Burada, $\mathbf{g}_+$ ve $\mathbf{g}_-$ yöneylerine, $g(x)$ işlevinin, sırasıyla, "Hermite çift işlevler tabanı" ile "Hermite tek işlevler tabanı" üzerinde dizey gösterilimi denir. Böylece, Hermite taban işlev küme'si, biri çift ötekisi tek işlevlerce örtülen birbirine dikgen iki taban altkümesine ayrıştırılmış olur.

Son kesimde, aslında, bir bölüntülendirim (ing: partitioning) gerçekleştirilmiş olmaktadır. Bu yapılırken, Hermite işlevlerinin sıralanışında, sonsuz sayıda yerdeğiştirimi gerçekleştirilerek iki sonsuz yöney öbek oluşturulmuştur. Andıran biçimde, $\mathbf{F}$ dizeyi için de bir bölüntülendirim gerçekleştirilebilir. Bu amaçla, aşağıdaki gerçeği uzbilimcil dilde yazarak yola çıkabiliriz.

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x) \tag{2.52}$$

Bu ise aşağıdaki eşitliğe götürür.

$$f(x)g(x) = (f_+(x) + f_-(x))\left(\mathbf{h}_+(x)^T\mathbf{g}_+ + \mathbf{h}_-(x)^T\mathbf{g}_-\right) \tag{2.53}$$

Bunun her iki yanı, $\mathbf{h}_+(x)$ ile çarpıldıktan sonra, x'in tüm gerçel değerleri üzerinde tümlevlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f(x)g(x) \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f_+(x)\mathbf{h}_+(x)^T\mathbf{g}_+ \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f_-(x)\mathbf{h}_+(x)^T\mathbf{g}_+ \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f_+(x)\mathbf{h}_-(x)^T\mathbf{g}_- \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f_-(x)\mathbf{h}_-(x)^T\mathbf{g}_-\end{aligned} \tag{2.54}$$

Burada, sağ yandaki 2. ve 3. tümlevlerin, birer sayılabilir sonsuzlukta yatay ve düşey sıra içeren tümlevlenen dizeylerinin tüm öğelerinin tümlevleri sıfırlanır. Bunun nedeni de bu tümlevlenenlerin x'in tek bir işlevi oluşudur. Bu yüzden, (2.44) yerine

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f(x)g(x) \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f_+(x)\mathbf{h}_+(x)^T\mathbf{g}_+ \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f_-(x)\mathbf{h}_-(x)^T\mathbf{g}_-\end{aligned} \tag{2.55}$$

yazılabilir. Burada, eğer,

$$\mathbf{F}_{++} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f_+(x)\mathbf{h}_+(x)^T, \qquad \mathbf{F}_{+-} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f_-(x)\mathbf{h}_-(x)^T \tag{2.56}$$

tanımları yapılacak olursa, aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\mathbf{h}_+(x)f(x)g(x) \quad = \quad \mathbf{F}_{++}\mathbf{g}_+ + \mathbf{F}_{+-}\mathbf{g}_- \tag{2.57}$$

(2.54)'ten bu yana gerçekleştirilen işlemlerde $\mathbf{h}_+(x)$ yerine $\mathbf{h}_-(x)$ kullanılacak olursa aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathbf{h}_-(x) f(x) g(x) \quad = \quad \mathbf{F}_{-+}\mathbf{g}_+ + \mathbf{F}_{--}\mathbf{g}_- \tag{2.58}$$

Burada,

$$\mathbf{F}_{-+} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathbf{h}_-(x) f_-(x) \mathbf{h}_+(x)^T, \qquad \mathbf{F}_{--} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathbf{h}_-(x) f_+(x) \mathbf{h}_-(x)^T \tag{2.59}$$

eşitlikleri geçerli olup sonuca varımda yine iki dizeyin tümlevlerle tanımlanan öğelerinin sıfırlandığı gerçeği gözönüne alınmıştır.

Pek de güçlük çekmeden anlaşılabileceği üzere, $\mathbf{F}_{++}$ ve $\mathbf{F}_{--}$ dizeyleri, aslında, $\widehat{f}$ işlecinin, sırasıyla, "çift Hermite işlev tabanı" ve "tek Hermite işlev tabanı" üzerinde dizey gösterilimleridir. $f(x)$ işlevi bir "tek işlev" olduğunda bu dizeyler sıfır dizeylere dönüşürler. Bunların, sıfır olmayışları için, $f(x)$'in kesinlikle bir çift bileşeni olmalıdır.

Yine, pek de güçlük çekmeden anlaşılabileceği üzere, $\mathbf{F}_{+-}$ ve $\mathbf{F}_{-+}$ dizeyleri, aslında, $\widehat{f}$ işlecinin, sırasıyla, "çift Hermite işlev tabanından tek Hermite işlev tabanına" ve "tek Hermite işlev tabanından çift Hermite işlev tabanına" geçiş dizeyleridir. $f(x)$ işlevi bir "çift işlev" olduğunda bu dizeyler sıfır dizeylere dönüşürler. Bunların, sıfır olmayışları için, $f(x)$'in kesinlikle bir "tek işlev" bileşeni olmalıdır.

(2.39) aşağıdaki tıkız biçimde yeniden yazılabilir.

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathbf{h}(x) f(x) \mathbf{h}(x)^T \tag{2.60}$$

Burada,

$$\mathbf{h}(x) \equiv [h_0(x) \ \ \ldots \ \ h_n(x) \ \ \ldots]^T \tag{2.61}$$

tanımı geçerlidir. Bu sonsuz yöneyin, önce $h_2(x)$ işlevini ikinci konuma, sonra $h_4(x)$ işlevini üçüncü konuma, ondan sonra da, $h_{2j}(x)$leri artan altsırasayı sıralayışı gerçekleştirecek biçimde, $\mathbf{\Pi}$ ile simgelenen, bir (eşsiz) yerdeğiştirim dizeyi ile çarpılışı durumunda aşağıdaki eşitliğin yazılabileceğini görmek hiç de güç değildir.

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_+(x) \\ \mathbf{h}_-(x) \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

Bunun (2.60)'ta kullanımıyla aşağıdaki dizey eşitliği yazmak olanaklıdır.

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{F}\mathbf{\Pi}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{++} & \mathbf{F}_{+-} \\ \mathbf{F}_{-+} & \mathbf{F}_{--} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

$f(x)$'in x'in bir çift işlevi olması durumunda, bu eşitliğin sağ yanındaki 2×2 türündeki öbek dizeyinin köşegen dışı öbekleri sonsuz sıfır dizeyler durumuna dönüşürler. $f(x)$'in x'in bir tek işlevi olması durumunda, bu eşitliğin sağ yanındaki 2×2 türündeki öbek dizeyinin köşegen öbekleri sonsuz sıfır dizeyler durumuna dönüşürler. Biz daha çok çift işlevlerle yüzleşeceğimizden, öncelikle, $\mathbf{F}_{++}$ ve $\mathbf{F}_{--}$ dizeylerinin, olabildiğince yalın bir yoldan, yaklaştırımına çabalayacağız.

3. SENDELENİMSİZLİK KANITSAVLARI VE SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMLARI

Uzbilimcil Sendelenim (ing: Fluctuation) Kuramı'nda "Sendelenimsizlik Kanıtsavı (ing: Fluctuationlessness Theorem)" olarak bilinen olgu, bir bağımsız değişkenli bir $f(x)$ için aşağıdaki gibi verilir.

3.1 Bir Bağımsız Değişkenli İşlevler İçin Sendelenimsizlik Kanıtsavı

Gerçel sayı doğrusu, ya da, onun bir aralığı üzerinde değerler alan bir x bağımsız değişkeni için bir $f(x)$ işlevi, x karmaşık düzleminin ilgili aralığını içine alan bir bölgesi içinde çözümcül olan bir $f(x)$ işlevinin, sözedilen aralık üzerinde dikgen olan bir tam taban kümesi üzerindeki dizey gösterilimi, x bağımsız değişkeninin o taban kümesi üzerindeki dizey gösteriliminin f işlevi altındaki görüntüsüne eşittir [2–13].

$\mathscr{T}$ ile odakta bulunan tam taban kümesi simgelenecek olursa ve bu taban kümesi üzerinde bir $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin dizey gösterilimi $\mathbf{M}_{\mathscr{T}}\left(\widehat{\mathscr{L}}\right)$ ile simgelenirse yukarıdaki kanıtsav

$$\mathbf{M}_{\mathscr{T}}\left(\widehat{f}\right) = f\left(\mathbf{M}_{\mathscr{T}}\left(\widehat{x}\right)\right) \tag{3.1}$$

eşitliğiyle anlatılabilir. Burada, $\widehat{f}$ ve $\widehat{x}$ ile simgelenen doğrucul işleçler, kanıtsavda sözedilen aralık üzerinde tekilliği olmayan ve dördülü tümlevlenebilen bir $g(x)$ işlevi üzerinden aşağıdaki eşitliklerle tanımlanabilir.

$$\widehat{f}g(x) \equiv f(x)g(x), \qquad \widehat{x}g(x) \equiv xg(x) \tag{3.2}$$

Yukarıdaki kanıtsavın birden çok bağımsız değişkenli işlevler için karşılığı da ileri sürülmüş ve kanıtlanmıştır [2–13].

3.2 Bir Bağımsız Değişkenli İkili Birleşik İşlevler İçin Sendelenimsizlik İlerisürümü

Bu kanıtsavı uygulayımcıl olarak uzbilimcil dilde

$$\mathbf{M}_{\mathscr{T}}\left(\widehat{f}\right) = f\left(\mathbf{M}_{\mathscr{T}}\left(\widehat{g}\right)\right) \tag{3.3}$$

eşitliğiyle verebiliriz. Burada, (3.2)'teki $g(x)$ yerine $\gamma(x)$ yazılmak üzere, aşağıdaki tanım eşitlikleri geçerlidir.

$$\widehat{f}\gamma(x) \equiv f(g(x))\gamma(x), \qquad \widehat{g}\gamma(x) \equiv g(x)\gamma(x) \tag{3.4}$$

Bu ilerisürümün (ing: conjecture) geçerliliği, bu an için, kanıtlanmış olmadığından bir kanıtsav düzeyine gelememiştir. Ancak, $g(x)$'in çok özel durumlar (sözgelimi $g(x) \equiv x$ durumu) için kanıtlayışın çok yalınlaşabileceğini vurgulamakta da yarar bulunmaktadır.

Bu bölümdeki ilk kanıtsavın kanıtlanışında gerçel sayı doğrusunun bir altkümesi olan bir aralık odağa alınmaktadır. Ama bu aralık değil onu içine alan bir karmaşık düzlem bölgesi içerisinde çözümcüllük öngörümü kanıtlayışta kullanılmıştır.

Yukarıdaki kanıtlanmış ya da salt ilerisürülmüş kanıtsavlar tam taban kümesi üzerinde geçerlidir. Ama o küme, ya da daha da doğrusu, diziliminin (ing: sequence) alt dizilimleri üzerinde de, belli bir nitelik çerçevesinde, yaklaşık olarak geçerlidirler. Dizilimin ölçüsü yükseldikçe yaklaştırımın niteliği de artar. Bunun nedeni, sonsuz ereyde kesinliğe erişilecek oluşudur. Sonlu dizilimler üzerindeki dizey gösterilimler de sonlu ve dördül dizeyler oluşturulurlar. Bu tür, sonlu dizilim üzerinde tanımlı sonlu dizey gösterilimlere dizey gösterilimlerinin "Sendelenimsizlik Yaklaştırımları" adı verilebilir.

Bu bölümde, önce, $\mathbf{F}_{++}$ dizeyinin sendelinimsizlik yaklaştırımlarını belirleme işine yöneleceğiz. Bu amaçla, önce, aşağıda tanımlanan işleci gözönüne alalım.

$$\widehat{f_+}\gamma(x) \equiv \frac{1}{2}\left(f(\sqrt{x^2}) + f(-\sqrt{x^2})\right)\gamma(x), \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{3.5}$$

Burada, $\gamma(x)$ gerçel sayı doğrusu üzerinde tümlevlenebilen herhangi bir işlevi simgelemektedir ve x yerine bilinçli olarak $\sqrt{x^2}$ yazılmıştır. Böyle yazmakla, sanki tekillik yaratılmış izlenimi verilebiliyor olsa da, aslında, durum öyle değildir. Buradan gelebilecek $x = 0$'daki tekillik (3.5)'in sağındaki anlatımın, bağlı olduğu anlatıma göre, çift işlev oluşundan dolayı, aslında, ortadan kalkmaktadır.

(3.5) tanımı bağlamında

$$\mathbf{F}_{++} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_+}\left(\widehat{f_+}\right) \tag{3.6}$$

yazılabilir. Buradan da, birleşik işlevde sendelenimsizlik kanıtsavı çerçevesinde, aşağıdaki eşitliğe geçilebilir.

$$\mathbf{F}_{++} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_+}\left(\widehat{f}_+\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{\mathbf{M}_{\mathscr{H}_+}\left(\widehat{x}^2\right)}\right) + f\left(-\sqrt{\mathbf{M}_{\mathscr{H}_+}\left(\widehat{x}^2\right)}\right)\right] \tag{3.7}$$

Bu eşitliği daha yalınlaştırmak için

$$\mathbf{X} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_+}\left(\widehat{x}^2\right) \tag{3.8}$$

tanımına geçilebilir. Burada, $\mathbf{X}$ sayılabilir sonsuz sayıda yatay ve düşey sırası olan bir dizeydir. Ondan, çift işlevli Hermite işlev taban diziliminin ilk (n) öğeli altdizilimi üzerinde bir tanıma geçilecek olursa

$$\mathbf{X}_n \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_{+,n}}\left(\widehat{x}^2\right) \tag{3.9}$$

yazılabilir. $\mathbf{X}_n$ dizeyinin $j$nci yatay sıra ile $k$ncı düşey sıranın kesiştiği konumdaki öğesi $X_{j,k}^{(n)}$ ile simgelenirse

$$X_{j,k}^{(n)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx h_{2j}(x) x^2 h_{2k}(x), \qquad j,k = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{3.10}$$

ve buradan çok daha tıkız biçimde

$$\mathbf{X}_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathbf{h}_{+,n}(x) x^2 \mathbf{h}_{+,n}(x)^T \tag{3.11}$$

eşitliği yazılabilir. (3.9)'dan

$$X_{j,j}^{(n)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 h_{2j}(x)^2, \qquad j = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{3.12}$$

yazılabilir. (2.20)'de j yerine $2j$ yerleştirildikten sonra oluşan eşitliğin her iki yanı $h_{2j}(x)$ ile çarpılıp x'in tüm gerçel değerleri için tümlevlenirse ve dikgenlikler gözönüne alınırsa

$$X_{j,j}^{(n)} = 2j + \frac{1}{2}, \qquad j = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{3.13}$$

sonucuna ulaşılır. Andıran biçimde, yine (3.9)'dan

$$X_{j,j-1}^{(n)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx h_{2j}(x) x^2 h_{2j-2}(x), \qquad j = 1,2,\ldots,n-1 \tag{3.14}$$

elde edilebilir. (2.20)'de j yerine $2j$ yerleştirildikten sonra oluşan denklemin her iki yanı $h_{2j-2}(x)$ ile çarpılıp x'in tüm gerçel değerleri üzerinde tümlevlenirse

$$X_{j,j-1}^{(n)} = \sqrt{j\left(j - \frac{1}{2}\right)}, \qquad j = 1,2,\ldots,n-1 \tag{3.15}$$

sonucuna ulaşılır. Andıran biçimde, yine (3.9)'dan

$$X_{j,j+1}^{(n)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx h_{2j+2}(x) x^2 h_{2j}(x), \qquad j = 0,1,2,...,n-1 \tag{3.16}$$

elde edilebilir. (2.20)'de j yerine $2j$ yerleştirildikten sonra oluşan eşitliğin her iki yanı $h_{2j+2}(x)$ ile çarpılıp x'in tüm gerçel değerleri üzerinde tümlevlenirse

$$X_{j,j+1}^{(n)} = \sqrt{(j+1)\left(j+\frac{1}{2}\right)}, \qquad j = 0,1,2,...,n-1 \tag{3.17}$$

sonucuna ulaşılır. Bunların dışındaki $\mathbf{X}_n$ dizey öğelerinin sıfır olduğunu göstermek de olanaklıdır. Böylece, $\mathbf{X}_n$'in bakışık (ing: symmetric) ve üçköşegencil (ing: tridiagonal) olduğu anlaşılmış olur. $\mathbf{X}_5$'in açık yapısı, yapıyı daha belirtik gösterebilmek için, aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{X}_5 \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{12}}{2} & \frac{9}{2} & \frac{\sqrt{30}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{30}}{2} & \frac{13}{2} & \frac{\sqrt{56}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{56}}{2} & \frac{17}{2} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$\mathbf{X}_n$ gerçel değerli öğelerden oluşan bakışık dördül bir dizey olduğundan, özdeğerlerinin tümü gerçel değerli olup her birine katlılığına eşdeğer sayıda doğrucul bağımsız özyöneyler karşılık gelir ve aralarında dikgenleştirilebilirler. Bunun ötesinde, değişik özdeğerlere karşılık gelen özyöneyler de birbirlerine dikgen olurlar. Ayrıca, özyöneylerin her biri özyöney oluş niteliklerini yitirmeksizin birimboylulaştırılabilir. Tüm bunlar, $\mathbf{X}_n$ için aşağıdaki izgecil (ing: spectral) gösterilimin yazılabileceği anlamına gelir.

$$\mathbf{X}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j^{(n)} \mathbf{x}_j^{(n)} \mathbf{x}_j^{(n)T} \tag{3.19}$$

Burada, katlı özdeğerlerin her biri katlılıkları düzeyinde yinelenerek yazılırken özyöneylerin de birimboylulaştırılarak yazıldıkları öngörülmüştür. Sırasayılandırım ise, Hermite işlevlerinin sırasayılandırımıyla koşutlaştırılmak için, 0 değerinden başlatılmaktadır.

(3.10)'dan $n \times n$ türü kesimcil yaklaştırımlar tanımlanmak istenirse aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\mathbf{F}_{++}^{(n)} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_{+,n}}\left(\widehat{f}_+\right) \approx \frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{\mathbf{X}_n}\right) + f\left(-\sqrt{\mathbf{X}_n}\right)\right], \quad n = 1,2,3,... \tag{3.20}$$

(3.19)'dan yararlanım aşağıdaki sonuçlara götürür.

$$\mathbf{F}_{++}^{(n)} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_{+,n}}\left(\widehat{f}_{+}\right) \approx \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\sqrt{\xi_j^{(n)}}\right)+f\left(-\sqrt{\xi_j^{(n)}}\right)\right]\mathbf{x}_j^{(n)}\mathbf{x}_j^{(n)^T}, \quad n=1,2,3,... \tag{3.21}$$

Bu bölümün bu kesiminde de, $\mathbf{F}_{--}$ dizeyinin sendelinimsizlik yaklaştırımlarını belirleme işine yöneleceğiz.

(3.5) tanımı bağlamında

$$\mathbf{F}_{--} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_{-}}\left(\widehat{f}_{+}\right) \tag{3.22}$$

yazılabilir. Buradan da, birleşik işlevde sendelenimsizlik kanıtsavı çerçevesinde, aşağıdaki eşitliğe geçilebilir.

$$\mathbf{F}_{--} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_{-}}\left(\widehat{f}_{+}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{\mathbf{M}_{\mathscr{H}_{-}}\left(\widehat{x}^2\right)}\right)+f\left(-\sqrt{\mathbf{M}_{\mathscr{H}_{-}}\left(\widehat{x}^2\right)}\right)\right] \tag{3.23}$$

Bu eşitliği daha yalınlaştırmak için

$$\mathbf{Y} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_{-}}\left(\widehat{x}^2\right) \tag{3.24}$$

tanımına geçilebilir. Burada, $\mathbf{Y}$ sayılabilir sonsuz sayıda yatay ve düşey sırası olan bir dizeydir. Ondan, tek işlevli Hermite işlev taban diziliminin ilk (n) öğeli altdizilimi üzerinde bir tanıma geçilecek olursa

$$\mathbf{Y}_n \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_{-,n}}\left(\widehat{x}^2\right) \tag{3.25}$$

yazılabilir. $\mathbf{Y}_n$ dizeyinin $j$nci yataysıra ile $k$ncı düşeysıranın kesiştiği konumdaki öğesi $Y_{j,k}^{(n)}$ ile simgelenirse

$$Y_{j,k}^{(n)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx h_{2j+1}(x)x^2 h_{2k+1}(x), \qquad j,k=0,1,2,...,n-1 \tag{3.26}$$

ve buradan çok daha tıkız biçimde

$$\mathbf{Y}_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathbf{h}_{-,n}(x)x^2\mathbf{h}_{-,n}(x)^T \tag{3.27}$$

eşitliği yazılabilir. (3.27)'den

$$Y_{j,j}^{(n)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 h_{2j+1}(x)^2, \qquad j=0,1,2,...,n-1 \tag{3.28}$$

yazılabilir. (2.20)'de j yerine $(2j+1)$ yerleştirildikten sonra oluşacak eşitliğin her iki yanı $h_{2j+1}(x)$ ile çarpılıp x'in tüm gerçel değerleri için tümlevlenirse ve dikgenlikler gözönüne alınırsa

$$Y^{n}_{j,j} = 2j + \frac{3}{2}, \qquad j = 0,1,2,...,n-1 \tag{3.29}$$

sonucuna ulaşılır. Andıran biçimde, yine (3.27)'den

$$Y^{(n)}_{j,j-1} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx h_{2j+1}(x) x^2 h_{2j-1}(x), \qquad j = 1,2,...,n-1 \tag{3.30}$$

elde edilebilir. (2.20)'de j yerine $(2j+1)$ yerleştirdikten sonra oluşacak denklemin her iki yanı $h_{2j-1}(x)$ ile çarpılıp x'in tüm gerçel değerleri üzerinde tümlevlenirse

$$Y^{(n)}_{j,j-1} = \sqrt{j\left(j+\frac{1}{2}\right)}, \qquad j = 1,2,...,n-1 \tag{3.31}$$

sonucuna ulaşılır. Andıran biçimde, yine (3.27)'den

$$Y^{(n)}_{j,j+1} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx h_{2j+3}(x) x^2 h_{2j+1}(x), \qquad j = 0,1,2,...,n-1 \tag{3.32}$$

elde edilebilir. (2.20)'de j yerine $(2j+1)$ yerleştirdikten sonra oluşacak eşitliğin her iki yanı $h_{2j+3}(x)$ ile çarpılıp x'in tüm gerçel değerleri üzerinde tümlevlenirse

$$Y^{(n)}_{j,j+1} = \sqrt{(j+1)\left(j+\frac{3}{2}\right)}, \qquad j = 0,1,2,...,n-1 \tag{3.33}$$

sonucuna ulaşılır. Bunların dışındaki $\mathbf{Y}_n$ dizey öğelerinin sıfır olduğunu göstermek de olanaklıdır. Böylece, $\mathbf{Y}_n$'in bakışık ve üçköşegencil olduğu anlaşılmış olur. $\mathbf{Y}_5$'in açık yapısı, yapıyı daha belirtik gösterebilmek için aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{Y}_5 \equiv \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{7}{2} & \frac{\sqrt{20}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{20}}{2} & \frac{11}{2} & \frac{\sqrt{42}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{42}}{2} & \frac{15}{2} & \frac{\sqrt{72}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{72}}{2} & \frac{19}{2} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$\mathbf{Y}_n$ gerçel değerli öğelerden oluşan bakışık dördül bir dizey olduğundan, özdeğerlerinin tümü gerçel değerli olup her birine katlılığına eşdeğer sayıda doğrucul bağımsız özyöneyler karşılık gelir ve aralarında dikgenleştirilebilirler. Bunun ötesinde, değişik özdeğerlere karşılık gelen özyöneyler de birbirlerine dikgen olurlar. Ayrıca, özyöneylerin her biri özyöney oluş niteliklerini yitirmeksizin birimboylulaştırılabilir. Tüm bunlar, $\mathbf{Y}_n$ için aşağıdaki izgecil gösterilimin yazılabileceği anlamına gelir.

$$\mathbf{Y}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^{(n)} \mathbf{y}_j^{(n)} \mathbf{y}_j^{(n)T} \tag{3.35}$$

Burada, katlı özdeğerlerin her birinin katlılıkları düzeyinde yinelenerek yazılırken özyöneylerin de birimboylulaştırılarak yazıldıkları öngörülmüştür.

(3.24)'ten $n \times n$ türü kesimcil yaklaştırımlar tanımlanmak istenirse aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\mathbf{F}_{--}^{(n)} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_{-},n}\left(\widehat{f}_{+}\right) \approx \frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{\mathbf{Y}_n}\right) + f\left(-\sqrt{\mathbf{Y}_n}\right)\right], \qquad n = 1,2,3,... \tag{3.36}$$

(3.35)'ten yararlanım aşağıdaki sonuçlara götürür.

$$\mathbf{F}_{++}^{(n)} \equiv \mathbf{M}_{\mathscr{H}_{+},n}\left(\widehat{f}_{+}\right) \approx \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\sqrt{\eta_j^{(n)}}\right) + f\left(-\sqrt{\eta_j^{(n)}}\right)\right]\mathbf{y}_j^{(n)}\mathbf{y}_j^{(n)T}, \quad n = 1,2,3,... \tag{3.37}$$

Buraya dek olan inceleyişlerden sonra sayıcıl sonuçlar üretebilmek için X_n ve Y_n dizeylerinin özikililerinin belirlenimine yönelmek gerekir.

3.3 X_n ve Y_n Dizeylerinin Özikililerinin Belirlenişi

Burada önce $\mathbf{X}_n$ dizeyinin özikililerinin belirlenişine odaklanalım. Bu amaçla, herhangi bir özdeğeri ξ ile ona karşılık gelen özyöneyi de $\mathbf{x}$ ile simgeleyelim. Bu durumda, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathbf{X}_n \mathbf{x} = \xi \mathbf{x} \tag{3.38}$$

$\mathbf{x}$ yöneyinin (n sayıdaki) öğeleri x_0, x_1,...,x_{n-1} ile gösterilir ve $\mathbf{X}_n$'in önceki bölümde belirlenişi verilen öğe değerleri kullanılacak olursa aşağıdaki özyineleyişler elde edilir.

$$\sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)}x_{j-1} + \left(2j+\frac{1}{2}\right)x_j + \sqrt{(j+1)\left(j+\frac{1}{2}\right)}x_{j+1} = \xi^2 x_j, \quad j = 0,1,2,...(n-1)$$

$$\sqrt{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}x_{n-2} + \left(2n-\frac{3}{2}\right)x_{n-1} = \xi^2 x_{n-1} \tag{3.39}$$

Buradaki son eşitlikte x_{n+1} (aslında varolmadığından) sıfır alınmıştır. Buradaki ilk $(n-1)$ denklemin çözümünün, c bu an için belirsiz bir değiştirge olmak üzere,

$$x_j \equiv ch_{2j}(\xi), \qquad j = 0,1,2,...,n-1 \tag{3.40}$$

öngörümüyle gerçekleştirilebileceğini görmek hiç de güç değildir. Ancak, bu öngörüm, ilk $(n-1)$ denklemi sağlayışının ötesinde son denklemi de sağlamalıdır. Bunun gerçeklenişi için önce Hermite işlevleri arasında geçerli olan aşağıdaki eşitliği yazmakta yarar bulunmaktadır.

$$\sqrt{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}h_{2n-4}(\xi)+\left(2n-\frac{3}{2}\right)h_{2n-2}(\xi)+\sqrt{n\left(n-\frac{1}{2}\right)}h_{2n}(\xi)$$
$$=\xi^2 h_{2n-2}(\xi) \qquad (3.41)$$

Öte yandan, (3.39)'daki son denklemden ve (3.40)'tan aşağıdaki denklem de yazılabilir.

$$\sqrt{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}h_{2n-4}(\xi)+\left(2n-\frac{3}{2}\right)h_{2n-2}(\xi)=\xi^2 h_{2n-2}(\xi) \qquad (3.42)$$

(3.41) ve (3.42)'nin birlikte sağlanabilişinin tek bir yolu vardır. O da aşağıdaki denklemin sağlanışıdır.

$$h_{2n}(\xi)=0, \qquad n=1,2,3,... \qquad (3.43)$$

$\mathbf{X}_n$ dizeyi bakışık oluşunun dışında artı tanımlılık özelliğini de taşır. Bu nedenle, ξ'nin, ancak, artı değerleri geçerlidir. Oysa, (3.43)'ten ξ'nin alabileceği değerlerin h_{2n} işlevinin sıfırları oluşunun gerekliliği anlaşılır. Bu da, $2n$'nci dereceden Hermite çokterimlisinin sıfırları demektir. Bu sıfırlar, imsiz değerleri eş olan ama evrik imli bulunan ikililerden oluşur. Bunlardan, n sayıda sıfır ξ'nin aranan değerleridir. Böylece, $\mathbf{X}_n$ dizeyinin özdeğerlerinin $H_{2n}(\xi)$ çokterimlisinin artı sıfırları olduğu anlaşılmış olur.

$\mathbf{X}_n$ dizeyinin özyöneylerinin belirlenişi için j. özdeğerinin, $\xi_j^{(n)}$ $(j=0,1,2,...,n-1)$ ile simgelendiği öngörülecek olursa, yukarıdaki çözümleyiş (ing: analysis) sonuçlarından aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathbf{x}_j^{(n)} \equiv \left(\mathbf{h}_{+,n}^T\left(\xi_j^{(n)}\right)\mathbf{h}_{+,n}\left(\xi_j^{(n)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{h}_{+,n}\left(\xi_j^{(n)}\right), \quad j=0,1,2,...,n-1 \qquad (3.44)$$

Buradaki dördülköklü sayıl (ing: scalar) anlatım, yukarıdaki çözümleyişte c ile simgelenen belirsiz değiştirgenin, birimboyluluğu sağlamak için belirlenen değeridir.

Andıran bir sonuç, $\mathbf{Y}_n$ dizeyinin özyöneyleri için aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\mathbf{y}_j^{(n)} \equiv \left(\mathbf{h}_{-,n}^T\left(\eta_j^{(n)}\right)\mathbf{h}_{-,n}\left(\eta_j^{(n)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{h}_{-,n}\left(\eta_j^{(n)}\right), \quad j=0,1,2,...,n-1 \qquad (3.45)$$

Burada, $\mathbf{Y}_n$ dizeyinin $\eta_j^{(n)}$ ile simgelenen j. özdeğeri H_{2j+1} Hermite çokterimlisinin artı değerli sıfırlarından biri olmak durumundadır.

Bu bölümde özdeğer ve özyöneyler, 0'dan başlayarak sırasayılandırılmıştır. Bunun nedeni, Hermite işlev ya da çokterimlilerinin, derecelerine göre altsırasayılandırılışıdır. $H_n(x)$ ile simgelenen Hermite çokterimlisinin hem derecesinin hem de çokterimlilerin artan dereceye göre sıralanışındaki konumunun, altsırasayı olan n ile simgelenişidir. Sırasayılandırım eksi olmayan bütünsayılar üzerinde gerçekleştirilmektedir ve sıfırdan başlamaktadır. Bu açıdan bakıldığında, sayış için taban gösterge kümenin "doğalsayılar küme'si" olduğu düşünüldüğünden, burada doğalsayılar küme'sinin 0'ı da içerdiği varsayımı gündemde demektir. Oysa ki, bilimsel yazında, doğalsayılar kümesinin 0 sayısını içerip içermeyişi bugün de tartışma konusudur ve kimileri "içerilir" derken ötekiler "salt artı tamsayılardır" demektedir. Bu savın danışmanı, 0'ın da bir doğalsayı olduğunu öngörenlerdendir ve bu savda da o öngörüm geçerli olarak yazım gerçekleştirilmektedir. Bundan sonraki bölümlerde de, burada sözedilen sırasayılandırımın geçerliliği öngörülecektir.

Bu bölümdeki anlatımlar sav danışmanının bir kesim yayınlarından da [2–13] esinlenmekle birlikte hem bir kesim önemli yeni özgünlükler içermekte hem de bütünüyle özgün bir derleyişi sunmaktadır.

4. SONSUZ DERECE EREYİNDE HERMITE İŞLEVLERİYLE İLGİLİ TÜRLÜ YANAŞIK DAVRANIŞLAR

Hermite çokterimlilerinin köklerinin yalın sayılabilecek düzeyde çözümcül anlatımlarını belirlemek neredeyse olanaksızdır. Bu doğrultuda, türlü yaklaştırım bağıntıları üretilebilse de, bunların özelsizde kullanımları oldukça karmaşık olabilmektedir. Bu bölümde, sonsuz derece ereyinde (ing: limit) ne tür yanaşık bağıntıların elde edilebileceği olgusuna odaklanılmaktadır.

4.1 Hermite İşlevlerinin Sonsuz Derece Ereyinde Yanaşık Davranışı

Bu bölüme (2.22) eşitliğini yeniden yazarak başlamakta yarar bulunmaktadır.

$$-h_j''(x) + x^2 h_j(x) - (2j+1)\, h_j(x) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.1}$$

Bu eşitlikte

$$h_j(x) \equiv \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \overline{\mathrm{H}}_j(x), \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.2}$$

yerleştirilecek olursa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\overline{\mathrm{H}}_j''(x) - 2x\overline{\mathrm{H}}_j'(x) + 2j\overline{\mathrm{H}}_j(x) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.3}$$

Bu eşitlikler, (2.13)'ten dolayı, Hermite çokterimlilerince de sağlanırlar.

$$H_j''(x) - 2xH_j'(x) + 2jH_j(x) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.4}$$

Bu eşitliklerde j yerine, n bir doğalsayı olmak üzere, $2n$ yerleştirilir; x yerine de $x/(2\sqrt{n})$ yerleştirilecek olursa; aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$\frac{d^2\chi_{2n}(x)}{dx^2} - \frac{x}{2n}\frac{d\chi_{2n}(x)}{dx} + \chi_{2n}(x) = 0, \quad \chi_{2n}(x) \equiv H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.5}$$

Bunlar çift işlev nitelikli Hermite çokterimlilerinin sağladığı denklemlerdir. Eğer, $+$ altsimgesi çift (ing: even) işlev niteliğini simgelemek üzere,

$$\chi_{2n}(x)\big|_{n\to\infty} \approx \chi_+(x) \tag{4.6}$$

tanımı yapılacak olursa (4.5)'ten

$$\frac{d^2\chi_+(x)}{dx^2}+\chi_+(x)=0 \tag{4.7}$$

sıradan türevli denklemine (STD) geçilebilir. Bunun kesin çözümü çok iyi bilinen niteliktedir ve aşağıdaki eşitlikle verilebilir.

$$\chi_+(x)=A_1\cos(x) \tag{4.8}$$

Burada, A_1 ile, bu an için belirsiz olan ama ille de sonlu bir değerinin oluşu gerekmeyen, bir değişmez (sabit) simgelenmektedir. Bu değişmezi belirleyebilmek için yukarıdaki inceleyişlere dayanarak aşağıdaki yanaşım eşitliğini yazmakta yarar bulunmaktadır.

$$\chi_{2n}(x)\approx A_{1,n}\cos(x) \implies H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)\approx A_{1,n}\cos(x), \qquad A_{1,\infty}=A_1 \tag{4.9}$$

Burada, $A_{1,n}$, $x=0$ olduğunda yaklaştırımın kesin bir eşitliğe dönüşeceği biçimde, seçilebilir. Böylece, usbilimcil (ing: logical) bir ölçün (ing: standard) sağlanmış da olur. Sonuçta, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$A_{1,n}=H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}, \qquad n=0,1,2,... \tag{4.10}$$

Buradan, kolayca ayırdına varılabileceği gibi, A_1 değeri, $n\to\infty$ ereyinde, sonsuz olmak zorundadır. Ama (4.10)'dan o sonsuzluğa nasıl yaklaşılabildiği de anlaşılmış olur.

(4.10), (4.9)'un ikinci yaklaştırımında kullanılarak aşağıdaki yanaşık yaklaştırıma ulaşılabilir.

$$(-1)^n\frac{n!}{\sqrt{\pi}(2n)!}H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x) \tag{4.11}$$

Burada, sol yanı yalınlaştırmak amacıyla, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\frac{n!}{\sqrt{\pi}(2n)!}=\frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}=\frac{1}{4^n n!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\approx\frac{\sqrt{n}}{4^n n!} \tag{4.12}$$

Bunlar (4.11) yerine

$$(-1)^n\frac{1}{4^n n!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x) \tag{4.13}$$

ya da onun çok daha yanaşığı olan

$$(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{4^n n!}H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x) \tag{4.14}$$

eşitliğinin yazımına olanak sağlar. (4.14) bilimsel yazında çok iyi bilinen bir bağıntıdır [16].

Bu bölümdeki inceleyişler tek (ing: odd) işlev nitelikli Hermite çokterimlilerine de uygulanabilir. Bilimsel yazında varolan aşağıdaki eşitlik de çıkarılış ayrıntıları verilmeksizin sunulmaktadır.

$$(-1)^n \frac{1}{4^n n!} H_{2n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin(x) \tag{4.15}$$

Üçüncü bölümde önceden gündeme getirilen ξ ve η sayıları, aslında, bir kesim dizey gösterilimlerindeki özdeğerleri simgeler ve, bir yandan da sırasıyla (2n). ve (2n+1). dereceden Hermite çokterimlilerinin kökleridirler. Bu bağlamda, aşağıdaki eşitlikleri, $n \to \infty$ ereyinde sağlamalıdırlar.

$$\cos\left(2\sqrt{n}\,\xi_j^{(n)}\right) = 0, \qquad \sin\left(2\sqrt{n}\,\eta_j^{(n)}\right) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{4.16}$$

Burada, n üst simgesiyle n sayıda imsiz kök değeri olan ilgili Hermite çokterimlisinin $H_{2n}(x)$ köklerine odaklanıldığı anlatılmak istenmektedir. Bunlar için, $n \to \infty$ ereyinde, üçgencil (ing: trigonometrik) işlevler olan kosinüs ve sinüs işlevlerinin yeterince n sayıda ilk artı sıfırlarına (köklerine) odaklanılacağından, kök sırasayılandırımı 0'dan başlatılmak üzere, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\xi_j^{(n)} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \eta_j^{(n)} = \frac{1}{2\sqrt{n}}(j+1)\pi, \qquad j = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{4.17}$$

Bu iki sonuç kümesi, sırasıyla, (3.44) ve (3.45)'de kullanılacak olursa bunlara karşılık gelen özyöneylerin $n \to \infty$ ereyindeki değerleri de belirlenmiş olur.

(3.21)'deki eşitliğin her iki yanının Frobenius boyunun dördülü alınacak olursa ve dikgenliklerden de yararlanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{F}_{++}^{(n)}\right\|_{Fr}^2 &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\sqrt{\xi_j^{(n)}}\right) + f\left(-\sqrt{\xi_j^{(n)}}\right)\right]^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\sqrt{\frac{(2j+1)\pi}{4\sqrt{n}}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{(2j+1)\pi}{4\sqrt{n}}}\right)\right]^2 \\ &\qquad n = 0, 1, 2, ... \end{aligned} \tag{4.18}$$

Andıran bir eşitlik de $\mathbf{F}_{--}^{(n)}$'nin boy dördülü için aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathbf{F}_{--}^{(n)}\right\|_{Fr}^{2} &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\sqrt{\eta_j^{(n)}}\right)+f\left(-\sqrt{\eta_j^{(n)}}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\sqrt{\frac{(j+1)\pi}{2\sqrt{n}}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{(j+1)\pi}{2\sqrt{n}}}\right)\right]^2 \\
& \qquad n=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Bu son iki bağıntılandırımda, özdeğerler olan Hermite çokterimli kökleri yerine onların $n\to\infty$ ereyindeki anlatımları kullanılmıştır. Bu yüzden, bu anlamda, yanaşık bağıntılandırımlardır.

Bu anlatımlar $n\to\infty$ ereyinde geçerli de olsalar, f işlevinin yapısına bağımlı olarak, sonsuz büyüyebilirler. Ancak, bu durum, kesimcil yaklaştırım dizeyleri dizilimlerinin sayılabilir sonsuz sıra ereyinde yakınsamayacağı anlamına gelmeyebilir. Bunun nedeni de, Frobenius boy tanımının oldukça kötümser bir yapıda oluşu, öteki bir deyişle, odaktaki dizey için daha küçük değerler üretebilen boy tanımlarının varolabilişidir. Bunlar arasında, izgecil boy (ing: spectral norm) en yaygın kullanılanlarındandır. Bu boy tanımına göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathbf{F}_{++}^{(n)}\right\|_{\text{İzg}}^{2} &= \max_{\mathbf{a}\in\mathscr{H}_{n+1}}\left(\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{F}_{++}^T\mathbf{F}_{++}\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\right) \\
&= \max_{i=0,\ldots,n-1}\left(\frac{1}{4}\left[f\left(\sqrt{\frac{(2j+1)\pi}{4\sqrt{n}}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{(2j+1)\pi}{4\sqrt{n}}}\right)\right]^2\right)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathbf{F}_{--}^{(n)}\right\|_{\text{İzg}}^{2} &= \max_{\mathbf{a}\in\mathscr{H}_{n+1}}\left(\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{F}_{--}^T\mathbf{F}_{--}\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\right) \\
&= \max_{j=0,\ldots,n-1}\left(\frac{1}{4}\left[f\left(\sqrt{\frac{(j+1)\pi}{2\sqrt{n}}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{(j+1)\pi}{2\sqrt{n}}}\right)\right]^2\right)
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

4.2 Hermite İşlevlerinin İççarpımcıl Toplayış Bağıntıları

$f(x)$ işlevi gerçel sayı doğrusu üzerinde eksi olmayan ve dördülü tümlevlenebilen işlevler küme'sinde bulunduğuna göre, gerçel sayı doğrusu üzerinde bir çıkaç (maksimum) değeri bulunacaktır. Bu nedenle, hem (4.20) hem de (4.21) bağıntılarındaki boylar $n\to\infty$ için sonlu bir ereye ulaşmak durumundadır. Bu, yakınsayışa yol açacak ama yeterli olmayabilecek bir durumdur. Salt boyun bir sonlu bir ereye ulaşımı yeterli olmayabilir. Özyöneylerin de, en azından büyük bir çoğunlukla birer ereye ulaşımı gerekir. Özellikle baskın olanlarda yakınsayış gözlenmelidir.

Özyöneylerin yakınsayışı ile ilgilenmek için Hermite işlev çarpımları üzerindeki toplamların çözümcül olarak ve tek bir tıkız bağıntı biçeminde belirlenişinin gerçekleştirimi gerekir. Daha sonra, bu anlatımlarda $n \to \infty$ için erey anlatımlardan yararlanarak sonuca ulaşmak yoluna gidilmelidir.

(2.20) eşitliği aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} x^2 h_{2j}(x) &= \sqrt{(j+1)\left(j+\frac{1}{2}\right)} h_{2j+2}(x) + \left(2j+\frac{1}{2}\right) h_{2j}(x) \\ &\quad + \sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)} h_{2j-2}(x), \qquad j=0,1,2,... \end{aligned} \tag{4.22}$$

Bu eşitlikte x yerine y yerleştirilirse aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\begin{aligned} y^2 h_{2j}(y) &= \sqrt{(j+1)\left(j+\frac{1}{2}\right)} h_{2j+2}(y) + \left(2j+\frac{1}{2}\right) h_{2j}(y) \\ &\quad + \sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)} h_{2j-2}(y), \qquad j=0,1,2,... \end{aligned} \tag{4.23}$$

(4.22)'in her iki yanının $h_{2j}(y)$ ile çarpılmışından, (4.23)'ün her iki yanının $h_{2j}(x)$ ile çarpılmışı, yanlar yanlara, çıkarılacak olursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(x^2-y^2\right) h_{2j}(x)h_{2j}(y) =& \sqrt{(j+1)\left(j+\frac{1}{2}\right)} \left(h_{2j+2}(x)h_{2j}(y) - h_{2j+2}(y)h_{2j}(x)\right) \\ & - \sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)} \left(h_{2j}(x)h_{2j-2}(y) - h_{2j}(y)h_{2j-2}(x)\right), \qquad j=0,1,2,... \end{aligned} \tag{4.24}$$

Bu eşitliğin her iki yanı j üzerinde 0'dan başlayıp $(n-1)$'de sonlanan tamsayı değerler üzerinde toplanacak olursa, sağ yanda birbirinin evrik imlisi olan n sayıda toplamcıl anlatım ikilisi bulunduğundan, tek bir toplamcıl anlatım elde edilir. Ulaşılan eşitliğin her iki yanı $\left(x^2-y^2\right)$ ile bölünür ve yalınlaştırımlar gerçekleştirilirse aşağıdaki eşitliğe varılır.

$$\sum_{j=0}^{n-1} h_{2j}(x)h_{2j}(y) = \sqrt{n\left(n-\frac{1}{2}\right)} \frac{h_{2n}(x)h_{2n-2}(y) - h_{2n}(y)h_{2n-2}(x)}{x^2-y^2} \tag{4.25}$$

Bu eşitlik, aşağıdaki daha tıkız biçimde de yazılabilir.

$$\mathbf{h}_{+,n}^T(x)\,\mathbf{h}_{+,n}(y) = \sqrt{n\left(n-\frac{1}{2}\right)} \frac{h_{2n}(x)h_{2n-2}(y) - h_{2n}(y)h_{2n-2}(x)}{x^2-y^2} \tag{4.26}$$

Bu eşitlik geçerliliğini, x ile y değişik değerlerde oldukça, korur. Ama, $x = y$ durumu için erey alarak daha değişik bir eşitliğe geçilmelidir. Erey alımında aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\left.\frac{h_{2n}(x)h_{2n-2}(y) - h_{2n}(y)h_{2n-2}(x)}{x^2 - y^2}\right|_{y \to x} = \frac{h_{2n}(x)h'_{2n-2}(x) - h'_{2n}(x)h_{2n-2}(x)}{-2x} \qquad (4.27)$$

$$\mathbf{h}^T_{+,n}(x)\,\mathbf{h}_{+,n}(x) \quad = \quad \sqrt{n\left(n-\frac{1}{2}\right)}\frac{h'_{2n}(x)h_{2n-2}(x) - h_{2n}(x)h'_{2n-2}(x)}{2x} \qquad (4.28)$$

$$\mathbf{h}^T_{+,n}\left(\xi_j^{(n)}\right)\mathbf{h}_{+,n}\left(\xi_j^{(n)}\right) = \sqrt{n\left(n-\frac{1}{2}\right)}\frac{h'_{2n}\left(\xi_j^{(n)}\right)h_{2n-2}\left(\xi_j^{(n)}\right)}{2\xi_j^{(n)}} \qquad (4.29)$$

Son eşitlik yazılırken, $\xi_j^{(n)}$ değerinin $n \to \infty$ ereyinde $h_{2n}(x)$ Hermite işlevini sıfırladığı gerçeğinden yararlanılmıştır.

(4.11) yanaşım eşitliği, türevlenebilir olduğu düşünülecek olursa ve türevlenirse, aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

$$(-1)^n\frac{n!}{(2n)!2\sqrt{n}}H'_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right) \approx -\sin(x) \qquad (4.30)$$

Burada üs simgesi, işlevin bağımlı olduğu büyüklüğe göre türevi anlatmaktadır.

Andıran biçimde (4.14)'ün her iki yanı türevlenecek olursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{(-1)^{n+1}}{4^n n!}H'_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin(x) \qquad (4.31)$$

Burada da, üs simgesi daha önceki anlamında kullanılmaktadır.

(4.30) ve (4.31) daha değişik bir yoldan da üretilebilirdi. Bu amaçla, Hermite çokterimlilerinin türevlerinin yine onlar türünden anlatımıyla (4.15)'in birleştirilerek kullanımından yararlanılabilir.

(4.31)'den aşağıdaki yanaşık eşitliğe geçilebilir.

$$H'_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right) \approx \frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}n!}{\sqrt{\pi}}\sin(x) \qquad (4.32)$$

Öte yandan, (2.13) ile (4.2)'nin birleştirimi aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak sağlar.

$$h_j(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}2^{\frac{j}{2}}\sqrt{j!}}H_j(x) \qquad (4.33)$$

Burada j yerine $2n$ yerleştirilecek olursa

$$h_{2n}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^n \sqrt{(2n)!}} H_{2n}(x) \tag{4.34}$$

eşitliğine ulaşılır. Bunun her iki yanı x'e göre türevlenecek olursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$h'_{2n}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^n \sqrt{(2n)!}} H'_{2n}(x) - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^n \sqrt{(2n)!}} x H_{2n}(x) \tag{4.35}$$

Burada x yerine $\xi_j^{(n)}$ yerleştirilirse

$$h'_{2n}\left(\xi_j^{(n)}\right) = \frac{e^{-\frac{\xi_j^{(n)2}}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^n \sqrt{(2n)!}} H'_{2n}\left(\xi_j^{(n)}\right) - \frac{e^{-\frac{\xi_j^{(n)}}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^n \sqrt{(2n)!}} \xi_j^{(n)} H_{2n}\left(\xi_j^{(n)}\right) \tag{4.36}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin en solundaki eksi imli anlatım $n \to \infty$ ereyinde sıfırlanır. Geriye aşağıdaki yanaşık eşitlik kalır.

$$h'_{2n}\left(\xi_j^{(n)}\right) \approx \frac{e^{-\frac{\xi_j^{(n)2}}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^n \sqrt{(2n)!}} H'_{2n}\left(\xi_j^{(n)}\right) \tag{4.37}$$

Burada (4.32)'den yararlanılırsa ve

$$\frac{n!}{\sqrt{\Gamma(2n+1)}} \approx \frac{\pi^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}}}{2^n} \tag{4.38}$$

yanaşımından yararlanılırsa

$$\begin{aligned} h'_{2n}\left(\xi_j^{(n)}\right) &\approx \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} n! e^{-\frac{\xi_j^{(n)2}}{2}}}{\pi^{\frac{3}{4}} \sqrt{\Gamma(2n+1)}} \sin\left(2\sqrt{n}\xi_j^{(n)}\right) = \frac{(-1)^{n+j+1} 2^{n+1} n! e^{-\frac{\xi_j^{(n)2}}{2}}}{\pi^{\frac{3}{4}} \sqrt{\Gamma(2n+1)}} \\ &\approx 2(-1)^{n+j+1} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned} \tag{4.39}$$

yanaşık eşitliğine ulaşılır.

(4.29)'u, salt n'ye bağlı, çok daha kullanışlı bir yapıya büründürmek olanaklıdır. Bu yolda aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} h_{2n-2}\left(\xi_j^{(n)}\right) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi_j^{(n)2}}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{n-1} \sqrt{(2n-2)!}} H_{2n-2}\left(\xi_j^{(n)}\right) \\ &\approx \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{\pi^{\frac{3}{4}} \sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{\Gamma(n)^2}{\Gamma(2n-1)}} e^{-\frac{1}{2}\xi_j^{(n)2}} \cos\left(2\sqrt{n}\xi_j^{(n)}\right) \end{aligned} \tag{4.40}$$

Buradan ilerleyebilmek için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$2\sqrt{n}\xi_j^{(n)} = \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \approx \left(j+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{2n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(2\sqrt{n}\xi_j^{(n)}\right) &\approx \cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\cos\left(\frac{1}{2n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi\right) \\ &\quad +\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\sin\left(\frac{1}{2n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi\right) \\ &\approx \frac{(-1)^j}{2n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\sqrt{\frac{\Gamma(n)^2}{\Gamma(2n-1)}} \approx \frac{\pi^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{4}}}{2^{n-1}}, \qquad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi_j^{(n)2}} \approx 1 \tag{4.43}$$

Bunların kullanımıyla, (4.40)'tan aşağıdaki yanaşım eşitliğine ulaşılabilir.

$$h_{2n-2}\left(\xi_j^{(n)}\right) \approx \frac{(-1)^{n+j-1}}{2n^{\frac{5}{4}}}\left(j+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} \tag{4.44}$$

(4.44) ve (4.39) sonuçları (4.29)'da kullanılacak olursa

$$\mathbf{h}_{+,n}^T\left(\xi_j^{(n)}\right)\mathbf{h}_{+,n}\left(\xi_j^{(n)}\right) \approx \frac{2\sqrt{n}}{\pi} \tag{4.45}$$

erek sonucuna ulaşılır. Böylece, oldukça yalın bir yanaşım bağıntısı elde edilmiş olur. Bu bağıntının $\mathbf{h}_{+,n}$ yöneyinin birimboylulaştırılabilir olduğu anlamına geldiğini de vurgulamak gerekir. Gerçekten de, (4.45)'in (3.42) ile (3.43)'te kullanımı oradaki yöneylerin n'den bağımsız olarak birimboylu olduğunu gösterir.

Bu bölümün, geriye kalan son çözümleyişi için (4.26)'dan aşağıdaki eşitliği yazarak yola çıkılabilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{+,n}^T\left(\xi_j^{(n+1)}\right)\mathbf{h}_{+,n}\left(\xi_k^{(n)}\right) &= \sqrt{(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)} \times \\ &\quad \frac{h_{2n+2}\left(\xi_j^{(n+1)}\right)h_{2n}\left(\xi_k^{(n)}\right) - h_{2n+2}\left(\xi_k^{(n)}\right)h_{2n}\left(\xi_j^{(n+1)}\right)}{\xi_j^{(n)2} - \xi_k^{(n)2}} \\ &= \sqrt{(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{h_{2n+2}\left(\xi_j^{(n+1)}\right)h_{2n}\left(\xi_k^{(n)}\right)}{\xi_j^{(n)2} - \xi_k^{(n)2}} \end{aligned} \tag{4.46}$$

Burada, $j \neq k$ öngörümü geçerli olup son yataysıra eşitliği üretilirken h_{2n+2} Hermite işlevinin $\xi_j^{(n)}$ değerinde sıfırlanışından da yararlanılmıştır. Bu yöney çarpımı $n \to \infty$

için $1/\sqrt{n}$ ile orantılı bir davranış gösterir. Yani, $n \to \infty$ için dikgenleşim söz konusudur.

Bu bölüm de, bütünüyle özgün olmayıp bir kesim bilinen gerçekleri anımsatışlara da yer verilmiştir. Ancak, özgün olan kesimler, özelsizde, sendelenim kuramıyla ilintili olup çok önemli denilebilecek olgularla bezenmiş durumdadır.

5. HERMITE ÇOKTERİMLİ KÖKLERİ BELİRLENİŞİNDE SONSUZ DERECE EREYİNDE SÖNÜMLÜ SAPTIRIM AÇILIMI

Önceki bölümlerde Hermite çokterimlilerinin köklerinin, ya da öteki deyişle, sıfırlarıyla ilgili azımsanmayacak sayıda olgudan sözedilmişti. Bu bağlamda, köklerin Hermite çokterimli derecesi sonsuza gittiğindeki yanaşık anlatımlarına odaklanılmış ve sonsuz derece ereyinde azımsanmayacak doygunlukta bir çözümleyiş sunulmuştu. Bir büyüklüğün belli bir ereydeki değer ya da değerleri bilindiğinde erey uzağındaki değerlerin belirlenişi için, özelsizde, düzeltimler getiren yöntemlerin oluşturumu yöntembilimin önemli odaklarındandır. Bu bağlamda, düzeltim için büzülüş dönüşümlerine (ing: contraction mapping) dayanan yöntemler önemli konumdadırlar. Bunlar, aslında, yineleyişli (ing: iterative) çizemler (ing: scheme) olarak tasarlanırlar ve, kuşkusuz, yineleyişin yakınsayışı önemli bir konudur. Bu yakınsayış yöntemdeki yapı ve değiştirgelere bağımlıdır ve uygulayımcıl açıdan etkinliği sorgulanıp yaklaştırımın niteliğinin benimsenebilecek düzeyde oluşuna özen göstermek gerekir. Yine de, yineleyişli yöntemler yerine özyineleyişli (ing: recursive) yöntemler çok daha yeğlenen olgulardır. Bu tür yöntemler arasında saptırım kuramı (ing: perturbation theory) tabanlı olanlar da, duruma göre, sıklıkla ve etkinlikle kullanılırlar.

Saptırım kuramı, özelsizde, iki tür uygulayışa odaklanır. Bunlardan birincisinde, odaklanılan denklemlerde değeri küçük en azından bir değiştirge bulunur. Öyle ki, bu değiştirge ya da değiştirgelerin sıfırlanışı durumunda, denklem çözümcül ya da yaklaşık olarak yalın sayılabilecek biçimde çözülebilsin. Bu durumda, değiştirgelere "doğal saptırım değiştirge(ler)i (ing: natural perturbation parameter(s)) olarak adlandırılır ve denklemdeki tüm bilinen ve bilinmeyenlerin bunların üslüleri türünden toplamdizi açılımları öngörülür. Sonra da bilinmeyenler olan açılım katsayılarının belirlenişi için gerekli çok daha yalın (cebircil oluşları yeğlenen) denklemler oluşturulup çözülürler. Denklemler, özelsizde, özyineleyişli olacaklarından, belirleniş de özyineleyişçil olur.

Saptırım kuramında odaklanılan ikinci uygulayış durumlarında, odaktaki denklemde saptırım değiştirgesi olmasa da, bir kesim anlatımların denklemde gözardı edilişi durumunda çözüm çok güçlük çekmeden elde edilebilecek düzeyde yalınlaşır. Bu durumda, bu anlatımlar, bir ya da birden çok saptırım değiştirgesi ile ölçeklenir. Bu değiştirgeler istenildiği gibi simgelenebilmekle birlikte, çoğunlukla, birden çok olduklarında sırasayılandırılan ε simgesiyle gösterilirler. Sonrası, birinci durumda olduğu gibidir. Bu tür saptırım açılımlarına "Neumann Saptırım Açılımı (ing: Neumann Perturbation Expansion" adı da verilir.

Bir çokterimlinin köklerinin belirlenişinde bir yol o çokterimlinin yapıcıl anlatımı üzerine odaklanarak saptırım açılımı oluşturmaktır. Bu yol, özelsizde, doğrucul olmayan denklemler de içerebilir ve bir kesim güçlüklerle yüzleşime de yol açabilir.

Kök belirlenişinde bir başka yol, çokterimlinin sağladığı bir denklem üzerinde saptırım açılımı tasarlayışa dayandırılır. Burada, bu bağlamda, Hermite çokterimlilerinin sağladığı sıradan türevli denkleme odaklanacağız.

5.1 Sıradan Türevli Denklem Üzerinden Saptırım Açılımı: İlk İki Kerte

(4.4)'te verilen ve Hermite çokterimlilerince sağlanan sıradan türevli denklemleri, sayfalarda geriye gidişten kaçınmak için, aşağıda yeniden yazalım.

$$H_j''(x) - 2xH_j'(x) + 2jH_j(x) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.1}$$

Burada üs simgesiyle x'e göre türev gösterilmektedir. Bu Hermite çokterimlilerinin, n eksisiz bir tamsayı olmak üzere, $j = 2n$ için çift, $j = 2n+1$ için tek işlev nitelikli oluşu $j \to \infty$ ereyinde yanaşılacak işlevin $j = 2n$ için kosinüslü $j = 2n+1$ için sinüslü bir yapıda olacağı önceki bölümlerdeki inceleyişlerimizden bilinmektedir. Bu ayrışık davranış, (5.1)'in de j değerlerine göre iki ayrı STD küme'si olarak ayrıştırımını akla getirir. Bu bağlamda, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$H_{2n}''(x) - 2xH_{2n}'(x) + 4nH_{2n}(x) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.2}$$

$$H_{2n+1}''(x) - 2xH_{2n+1}'(x) + (4n+2)H_{2n}(x) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.3}$$

Bu STD'lerde x yerine $x/(2\sqrt{n})$ yerleştirilir ve bu durumdaki x'e göre türev yine üs ile simgelenirse, bunlardan aşağıdaki STD'lere geçilebilir.

$$H_{2n}''\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right) - \frac{x}{2n}H_{2n}'\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right) + H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

$$H''_{2n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)-\frac{x}{2n}H'_{2n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)+\left(1+\frac{1}{2n}\right)H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)=0, \quad n=0,1,2,... \tag{5.5}$$

(5.4) ve (5.5)'te, denklemlerin çözümünü yalınlıktan çıkaran birinci türevli anlatımdır. Bu anlatımın saptırım nitelikli olup olmadığını anlamak için önce, (4.17)'deki eşitliklere odaklanmakta yarar bulunmaktadır. Bu yapılırsa, köklerde en yüksek değerler için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\xi_{n-1}^{(n)}=\left(\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)\pi, \qquad \eta_{n-1}^{(n)}=\frac{\sqrt{n}}{2}\pi \tag{5.6}$$

Bunlar, köklerin $n\to\infty$ için $\sqrt{n}\pi/2$'yi aşan bir davranış göstermeyeceği anlamına gelir. Bu ise, (5.2)'nin kökler yöresinde $x/(2n)$ değerinin $n\to\infty$ için 0 değerinde kümeleneceğini gösterir. Bu yüzden, (5.4) ve (5.5), $x/(2n)$ ile orantılı anlatımı bir saptırım olarak niteleyip saptırım açılımına gitmek olanaklıdır. Ancak, (5.5)'te bir de $1/(2n)$ ile çarpılmış bir türevsiz anlatım bulunmaktadır. Onu da saptırım olarak nitelendirip yola çıkmak düşünülebilir. Böylece, (5.4) ve (5.5) yerine aşağıdaki saptırımlı STD'ler yazılabilir.

$$\chi_c''(x,\varepsilon)-\varepsilon\frac{x}{2n}\chi_c'(x,\varepsilon)+\chi_c(x,\varepsilon)=0, \qquad n\gg 1 \tag{5.7}$$

$$\chi_s''(x,\varepsilon)-\varepsilon\frac{x}{2n}\chi_s'(x,\varepsilon)+\left(1+\varepsilon\frac{1}{2n}\right)\chi_s(x,\varepsilon)=0, \qquad n\gg 1 \tag{5.8}$$

Burada c ve s altsimgeleri, sırasıyla, kosinüs ve sinüs işlevlerini çağrıştırmak amaçlı olarak da düşünülebilir. Ama bir yandan da, sırasıyla, çift ve tek işlev niteliğini yansıtmak amaçlıdır.

Son iki STD küme'si, aslında, n'nin 0'dan başlayan değerleri için yazılan denklemlerden üretilmiştir. Ancak, bunların buradaki üretiliş amaçları, çoklukla, n'nin sonsuz değer ereyinde çözüm üretmektir. Bu yüzden de, bu denklemlerde $n=0,1,2,...$ tanımbölgesi yerine $n\gg 1$ bölgelendirimi vurgulanmaktadır.

(5.7) ve (5.8)'nin her ikisinin birden saptırım açılımıyla çözümünü vermeye burada gerek duyulmamaktadır. Salt bunlardan birine odaklanım yeterli görülmektedir. Bunun nedeni de her iki durumun inceleneşinin birbirlerine çok koşut (ing: parallel) oluşudur. Burada, salt (5.7) üzerine odaklanacağız. Bu durum için de, $\chi_c(x,\varepsilon)$'un x'e göre çift bir işlev olduğunu öngöreceğiz. Bunun ötesinde, $x\to 0$ için de $2n$. dereceden Hermite çokterimlisinin davranışına yanaşacağı da öngörülecektir. Bunların ötesinde, saptırım değiştirgesi 1 olduğunda, bağımsız değişkeni $2\sqrt{n}$ ile bölünmüş $2n.$ dereceden Hermite çokterimlisinin elde edileceği, uzbilimcil dilde (ing: mathematical language)

$$\chi_c(x,1) = H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right) \tag{5.9}$$

yazılabileceği de, saptırım kuramının temel düşüncelerinden biri olarak da, yazılabilmektedir.

(5.7)'nin çözümü için χ_c'nin ε'a göre çözümcül (analitik) olduğu varsayılırsa, aşağıdaki toplamdizi açılımı yazılabilir.

$$\chi_c(x,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \chi_{c,j}(x) \tag{5.10}$$

Bu açılım (5.7)'de kullanıldıktan sonra oluşan yapı ε'un artan üslüleri olarak yeniden düzenlenir ve oluşan toplamdizinin her bir ε tamsayı üslüsünün katsayısı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki özyineleyiş elde edilir.

$$\chi''_{c,j}(x) + \chi_{c,j}(x) = \frac{x}{2n}\chi'_{c,j-1}(x), \qquad \chi'_{c,-1}(x) \equiv 0, \qquad j = 0,1,2,... \tag{5.11}$$

Burada, $j = 0$ alındığında

$$\chi''_{c,0}(x) + \chi_{c,0}(x) = 0 \tag{5.12}$$

elde edilir. Bunun çift işlev tabanlı özelsiz çözümü, B_0 bu an için belirsiz bir değişmez olmak üzere, aşağıda verildiği gibidir.

$$\chi_{c,0}(x) = B_0 \cos(x) \tag{5.13}$$

(5.11)'de $j = 1$ alınır ve (5.13)'ten yararlanılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\chi''_{c,1}(x) + \chi_{c,1}(x) = -\frac{B_0}{n} x\sin(x) \tag{5.14}$$

Bu sağ yanlı bir STD'dir. Çözüm için önce aşağıdaki eşitlikleri yazmakta yarar bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} \left(x^2\cos(x)\right)'' + x^2\cos(x) &= 2\cos(x) - 4x\sin(x), \\ (x\sin(x))'' + x\sin(x) &= 2\cos(x) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Bunlardan esinlenimlerle, c'ler bu an için belirsiz değişmezler olmak üzere, aşağıdaki öngörüm yazılabilir.

$$\chi_{c,1}(x) = c_1 x^2 \cos(x) + c_2 x \sin(x) + c_3 \cos(x) \tag{5.16}$$

Bunun (5.14)'te kullanımı, daha sonra da ele geçen denklemde (5.15)'in kullanımı aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak sağlar.

$$2\left(c_1+c_2\right)\cos(x)-4c_1 x\sin(x)=-\frac{B_0}{n}x\sin(x) \tag{5.17}$$

Bunun sağlanışı için

$$c_1=\frac{B_0}{4n}, \qquad c_2=-\frac{B_0}{4n}, \qquad c_3=B_1 \tag{5.18}$$

eşitliklerinin ilk ikisinin sağlanımı gerekli ve yeterlidir. Son denklem ise $\chi_{c,0}$'daki bağdaşık çözüm katsayısının B_0 ile simgelenişiyle uyum sağlamak için yazılmıştır ve, aslında, c_3'ün belirsizliğini ortadan kaldırmamaktadır. Böylece, sonuçta, $\chi_{c,1}(x)$ için aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\chi_{c,1}(x)=\frac{B_0}{4n}\left(x^2\cos(x)-x\sin(x)\right)+B_1\cos(x) \tag{5.19}$$

5.2 Sıfırda Sıfırlanımlı Doğal Saptırım Açılımı

Bu bölümde sıradan türevli denklem (STD) üzerinden bir saptırım açılımı gerçekleşirilecektir. Saptırım açılım bileşenleri üzerinde oluşturulacak STD'ler çözülürken saptırımsız dışında kalan her bir bileşendeki bağdaşık çözümler, bileşenin $x=0$'da sıfırlanacağı biçimde seçileceği bir yol izlenecektir. Altbölüm başlığındaki "Sıfırda Sıfırlanım" deyim bu nedenle kullanılmaktadır.

(5.7) ile (5.8) yazılırken ε değiştirgesi, varolan herhangi bir değişmez anlatımın yerine değil, $n\to\infty$ için ötekilerin yanında sıfırlanan bir ya da birden çok anlatımın başına, yapay olarak yerleştirilmiştir. Bu biçimde, gözardı edilecek anlatımların başına, özü sıfıra gittiğinde sıfırlanan bir değiştirgeye bağlı, ve onlar da sıfıra gidecek biçimde, değişmez anlatımlar yerleştirilerek gerçekleştirilen, saptırım açılımlarına "Yapay" sanını vermek olanaklıdır ve bunların bir kesimi, bölüm başında da belirtildiği gibi, "Neuman Saptırım Açılımı" olarak da bilinirler. Oysa ki, (5.4)'te ve (5.5)'te $1/2n$ yerine saptırım değiştirgesi olan ε'u yerleştirmek de olanaklıdır. Böyle yapılırsa, (5.7) ile (5.8) yerine

$$\chi_c''(x,\varepsilon)-\varepsilon x\chi_c'(x,\varepsilon)+\chi_c(x,\varepsilon)=0, \qquad n\gg 1 \tag{5.20}$$

$$\chi_s''(x,\varepsilon)-\varepsilon x\chi_s'(x,\varepsilon)+(1+\varepsilon)\chi_s(x,\varepsilon)=0, \qquad n\gg 1 \tag{5.21}$$

yazılabilir. Bu STD'in çözümünde belirsiz değişmezler göründüğü önceki bölümdeki inceleyişlerde görülmüştü. Bu değişmezlerin görünmemesi için bir kesim koşullar getirimi gereklidir. Değişen koşullara göre çözümler de değişir. Ancak, eşsiz çözüm üreten koşullardan birisi altında üretilen çözümden bir başkası altında üretilen çözüme geçiş "yeniden olağanlaştırım (ing: renormalization)" yoluyla gerçekleştirilebilir. Buradaki durumdaki en yalınlık getiren olağanlaştırım için, çözümün çift işlev oluşu ve, ε'a bağımlı olmaksızın, sıfırda 1 oluşu koşul olarak getirilecektir. Böyle yapıldığında (5.20) yerine aşağıdaki denklem ve koşullar yazılabilir.

$$\chi_c''(x,\varepsilon) - \varepsilon\chi_c(x,\varepsilon) + \chi_c(x,\varepsilon) = 0, \quad \chi_c(-x,\varepsilon) = \chi_c(x,\varepsilon), \quad \chi_c(0,\varepsilon) = 1 \quad (5.22)$$

(5.22)'nin çözümü için χ_c'nin ε'a göre çözümcül olduğu varsayılırsa, aşağıdaki toplamdizi açılımı yazılabilir.

$$\chi_c(x,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \chi_{c,j}(x) \quad (5.23)$$

Bu açılım (5.22)'de kullanıldıktan sonra oluşan yapı ε'un artan üslüleri olarak yeniden düzenlenir ve oluşan toplamdizinin her bir ε üslüsünün katsayısı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki özyineleyiş elde edilir.

$$\chi_{c,j}''(x) + \chi_{c,j}(x) = x\chi_{c,j-1}'(x), \qquad \chi_{c,-1}(x) \equiv 0, \qquad j = 0,1,2,\ldots \quad (5.24)$$

Burada, $j = 0$ alındığında

$$\chi_{c,0}''(x) + \chi_{c,0}(x) = 0 \quad (5.25)$$

elde edilir. Bunun çift işlev nitelikli olan ve $x = 0$'da 1 değeri alan çözümü aşağıda verildiği gibidir.

$$\chi_{c,0}(x) = \cos(x) \quad (5.26)$$

(5.24)'te $j = 1$ alınır ve (5.26)'dan yararlanılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\chi_{c,1}''(x) + \chi_{c,1}(x) = -x\sin(x) \quad (5.27)$$

Bu sağ yanlı bir STD'dir. $x = 0$'da sıfırlanan ve çift işlev nitelikli olan bir çözüm için önce aşağıdaki eşitlikleri anımsatmakta yarar bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} &\left(x^2\cos(x)\right)'' + x^2\cos(x) = 2\cos(x) - 4x\sin(x), \\ &(x\sin(x))'' + x\sin(x) = 2\cos(x) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Bunlardan esinlenimlerle, $c_{1,1}$ ve $s_{1,1}$ bu an için belirsiz değişmezler olmak üzere, aşağıdaki öngörüm yazılabilir.

$$\chi_{c,1}(x) = c_{1,1}x^2\cos(x) + s_{1,1}x\sin(x) \tag{5.29}$$

Bunun (5.27)'de kullanımı, daha sonra da ele geçen denklemde (5.28)'in kullanımı aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak sağlar.

$$2\left(c_{1,1} + s_{1,1}\right)\cos(x) - 4c_{1,1}x\sin(x) = -x\sin(x). \tag{5.30}$$

Bunun sağlanışı için

$$c_{1,1} = \frac{1}{4}, \qquad s_{1,1} = -\frac{1}{4} \tag{5.31}$$

eşitliklerinin sağlanımı gerekli ve yeterlidir. Böylece, sonuçta, $\chi_{c,1}(x)$ için aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\chi_{c,1}(x) = \frac{x^2}{4}\cos(x) - \frac{x}{4}\sin(x) \tag{5.32}$$

Bu sonucun, (5.24)'te, $j = 2$ alındıktan sonra, kullanımı aşağıdaki eşitliğe götürür.

$$\chi''_{c,2}(x) + \chi_{c,2}(x) = \frac{x^2}{4}\cos(x) - \frac{x^3}{4}\sin(x) - \frac{x}{4}\sin(x), \tag{5.33}$$

Bu denklemin çift nitelikli ve $x = 0$'da sıfırlanan çözümünü bulabilmek için (5.28)'dekilere ek olarak aşağıdaki eşitlikleri yazmakta yarar vardır.

$$\begin{aligned}\left(x^4\cos(x)\right)'' + x^4\cos(x) &= 12x^2\cos(x) - 8x^3\sin(x),\\ \left(x^3\sin(x)\right)'' + x^3\sin(x) &= 6x^2\cos(x) + 6x\sin(x)\end{aligned} \tag{5.34}$$

(5.27) ve (5.33)'ten esinlenimlerle $\chi_{c,2}(x)$ için aşağıdaki öngörüm yazılabilir.

$$\chi_{c,2}(x) \equiv c_{2,2}x^4\cos(x) + c_{2,1}x^2\cos(x) + s_{2,2}x^3\sin(x) + s_{2,1}x\sin(x) \tag{5.35}$$

Bunun (5.33)'te kullanımı ve kullanım sonrasında ele geçen (bağdaşıklaştırılmış) denklemin doğrucul bağımsız anlatımlarının her birinin katsayısının ayrı ayrı sıfıra eşitlenişiyle aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir.

$$\begin{aligned}12c_{2,2} + 6s_{2,2} = \frac{1}{4}, &\qquad -8c_{2,2} = -\frac{1}{4},\\ 2c_{2,1} + 2s_{2,1} = 0, &\qquad 6s_{2,2} - 4c_{2,1} = -\frac{1}{4}\end{aligned} \tag{5.36}$$

Bunların çözümü aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$c_{2,1}=\frac{1}{6},\qquad s_{2,1}=-\frac{1}{6},\qquad c_{2,2}=\frac{1}{32},\qquad s_{2,2}=-\frac{1}{48} \tag{5.37}$$

Böylece,

$$\chi_{c,2}(x)\equiv\frac{1}{32}x^4\cos(x)-\frac{1}{48}x^2\cos(x)+\frac{1}{6}x^3\sin(x)-\frac{1}{6}x\sin(x) \tag{5.38}$$

sonucuna ulaşılır.

$\chi_{c,1}(x)$ ile $\chi_{c,2}(x)$ işlevlerinin belirlenen yapılarından esinlenimlerle $\chi_{c,j}(x)$ işlevi için de aşağıdaki öngörüme gidilebilir.

$$\chi_{c,j}(x)=\sum_{k=1}^{j}c_{j,k}x^{2k}\cos(x)+\sum_{k=1}^{j}s_{j,k}x^{2k-1}\sin(x) \tag{5.39}$$

Buradan ilerleyebilmek için aşağıdaki eşitliklere gereksinim vardır.

$$\begin{aligned}
&\left(x^{2k}\cos(x)\right)'=2kx^{2k}\cos(x)-x^{2k+1}\sin(x),\\
&\left(x^{2k-1}\sin(x)\right)'=(2k-1)x^{2k-1}\sin(x)+x^{2k}\cos(x),\\
&\left(x^{2k}\cos(x)\right)''+x^{2k}\cos(x)=2k(2k-1)x^{2k-2}\cos(x)-4kx^{2k-1}\sin(x),\\
&\left(x^{2k-1}\sin(x)\right)''+x^{2k-1}\sin(x)=(2k-1)(2k-2)x^{2k-3}\sin(x)\\
&\qquad\qquad+2(2k-1)x^{2k-2}\cos(x)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Bunlardan yararlanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\chi''_{c,j}(x)+\chi_{c,j}(x) &= \sum_{k=1}^{j}\left(2k(2k-1)c_{j,k}+2(2k-1)s_{j,k}\right)x^{2k-2}\cos(x)+\\
&\quad\sum_{k=1}^{j}\left(-4kc_{j,k}+2(2k+1)s_{j,k+1}\right)x^{2k-1}\sin(x),\\
&\quad s_{j,j+1}\equiv 0
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
x\chi'_{c,j-1}(x) &= \sum_{k=1}^{j}\left((2k-2)c_{j-1,k-1}+s_{j-1,k-1}\right)x^{2k-2}\cos(x)+\\
&\quad\sum_{k=1}^{j}\left((2k-1)s_{j-1,k}-c_{j-1,k-1}\right)x^{2k-1}\sin(x),\\
&\quad c_{j-1,0}\equiv 0,\qquad s_{j-1,j}\equiv 0
\end{aligned} \tag{5.42}$$

(5.42) ve (5.41)'in sol yanları eşit olmak durumundadır. Bu nedenle, sağ yanlar da eşit olmalıdır. Bu ise sağ yanlarda bulunan eş doğrucul bağımsız işlev anlatımlarının katsayılarının da eşit oluşunu gerektirir. Böylece, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} 2k(2k-1)c_{j,k}+2(2k-1)s_{j,k} &= (2k-2)c_{j-1,k-1}+s_{j-1,k-1} \\ -4kc_{j,k}+2(2k+1)s_{j,k+1} &= (2k-1)s_{j-1,k}-c_{j-1,k-1} \\ c_{0,1}=1, \qquad s_{0,1}=1, \qquad & j=1,2,3,... \qquad k=1,2,3,...,j \end{aligned} \tag{5.43}$$

Bunlarda görünen $c_{j,k}$ ve $s_{j,k}$ olarak simgelenen büyüklüklerde, $j>0$ için, $k<1$ veya $k>j$ olursa, ilgili büyüklüğün özdeş olarak sıfır olduğu öngörülmektedir. Doğrucul olan bu eşitliklerin çözümleri eşsizdir ve çok da güçlük çekmeksizin bulunabilirler. Üstelik, buyrukdizileyiş (ing: programming) ya da betikleyiş (ing: scripting) ile de bu işin üstesinden gelinebilir. Ancak, burada bu doğrultuda daha öteye gitmeyeceğiz.

(5.39) ve (5.23)'ten aşağıdaki eşitliklere ulaşılabilir.

$$\chi_c(x,\varepsilon)=\cos(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\left(\sum_{k=1}^{j}c_{j,k}x^{2k}\cos(x)+\sum_{k=1}^{j}s_{j,k}x^{2k-1}\sin(x)\right) \tag{5.44}$$

$$\chi_c\left(x,\frac{1}{2n}\right)=\cos(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^jn^j}\left(\sum_{k=1}^{j}c_{j,k}x^{2k}\cos(x)+\sum_{k=1}^{j}s_{j,k}x^{2k-1}\sin(x)\right) \tag{5.45}$$

Bu, çözümün aranan saptırım açılımıdır. Bunun sıfırları Hermite çokterimlilerinin sıfırları olacaktır.

5.3 Köklerin Saptırım Açılımı

(5.44)'teki x kök olduğunda ε'a bağımlı olmak durumundadır. x ile karışıklığa yol açmamak amacıyla (5.44)'ün köklerini, özelsizde, $\overline{\xi}(\varepsilon)$ ile simgelersek (5.44)'ü aşağıdaki biçimde yeniden yazmak olanaklı olur.

$$\begin{aligned} \chi_c\left(\overline{\xi}(\varepsilon),\varepsilon\right) &= \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\left(\sum_{k=1}^{j}c_{j,k}\overline{\xi}(\varepsilon)^{2k}\cos\left(\overline{\xi}(\varepsilon)\right)+\sum_{k=1}^{j}s_{j,k}\overline{\xi}(\varepsilon)^{2k-1}\sin\left(\overline{x}(\varepsilon)\right)\right) \\ &\quad +\cos\left(\overline{\xi}(\varepsilon)\right)=0 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Bu eşitlik, yakınsaklık altında, tüm ε değerleri için geçerli olmalıdır. Bu nedenle, ε yerine 0 yerleştirildiğinde de geçerli olmalıdır. Bu ise

$$\chi_c\left(\overline{\xi}(0),0\right)=\cos\left(\overline{\xi}(0)\right)=0 \tag{5.47}$$

Böylece, saptırımsız kök değerinin kosinüs işleviinin ilk n kökü olacağı anlaşılmış olur ki bu da bu yönlendirimde daha önceki bulgularımızla tutarlıdır. Burada n kök alınış nedeni çokterimlinin salt n kökü oluşudur. Bu n kökü, $j = 1,2,3,...,n$ için, $\overline{\xi}_j(0)$ ile simgelersek aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\overline{\xi}_j(0) = \left(j - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad j = 1,2,3,...,n \tag{5.48}$$

Köklerin ilk saptırım katsayısının belirlenimi için (5.46)'nın her yanı, ε'a göre türevlenip ele geçen denklemde $\varepsilon = 0$ alınırsa, ve de, $\overline{\xi}$ yerine $\overline{\xi}_j$ yerleştirilirse, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$-\sin\left(\overline{\xi}_j(0)\right)\overline{\xi}_j'(0) + c_{1,1}\overline{\xi}(0)^2\cos\left(\overline{\xi}(0)\right) + s_{1,1}\overline{\xi}(0)\sin\left(\overline{\xi}(0)\right) = 0 \tag{5.49}$$

Burada,

$$\sin\left(\overline{\xi}_j(0)\right) = (-1)^{j-1}, \qquad j = 1,2,3,...,n; \qquad c_{1,1} = s_{1,1} = \frac{1}{4} \tag{5.50}$$

eşitliklerinden ve kosinüslü anlatımın sıfırlanışından yararlanılırsa,

$$(-1)^j\left[\overline{\xi}'(0) - \frac{1}{4}\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 0, \qquad j = 1,2,3,...,n \tag{5.51}$$

ve buradan da

$$\overline{\xi}_j'(0) = \frac{1}{4}\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad j = 1,2,3,...,n \tag{5.52}$$

sonucuna varılır. Kök için Maclaurin açılımının ilk iki toplamcıl anlatımı alınarak

$$\overline{\xi}_j(\varepsilon) \approx \overline{\xi}_j(0) + \varepsilon\overline{\xi}'(0), \qquad j = 1,2,3,...,n \tag{5.53}$$

birinci kerte (mertebe, ing: order) saptırım açılımı yazılabilir. Bu ise, daha da belirtik olarak

$$\overline{\xi}_j(\varepsilon) \approx \left(j - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{8n}\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad j = 1,2,3,...,n \tag{5.54}$$

yapısında da yazılabilir.

Buraya dek gerçekleştirilen anlatımlar, ε'a göre ardışık türevleyişler sonrasında $\varepsilon = 0$ yerleştirilerek, ilkede, tüm kök saptırımlarının belirlenebileceğini gösterdiği gibi, aslında, yolu da açıklar. Ancak, bu türevleyişlerin elyordamlı gerçekleştirimi hem kesinlikle çok yorucu hem de yanılgılara çok açık bir yaklaşımdır. Oysa ki, bu eylemlerin simgecil betikleyişlerle (ing: symbolic scripting) gerçekleştirimi, yanılgılara tam kapalı olmasa da, hem çok daha az zaman alıcı hem de yanılgılara karşı çok daha güvenlidir.

Bu doğrultuda, $\overline{\xi}_j(\varepsilon)$ için aşağıdaki açılımı öngörebiliriz.

$$\overline{\xi}_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \xi_{j,k}\varepsilon^k, \qquad j = 1,2,3,...,n \tag{5.55}$$

Bu açılım kesin ya da tam doğru bir eşitlik değildir. ε'un $(m+1)$. ve daha yüksek üslülerinin yokluğundan kaynaklanan yanılgılar sapışlara neden olur. Ama yine de bu öngörümü kullanarak $\overline{\xi}_j(\varepsilon)$'un Maclaurin açılımının ilk $(m+1)$ toplamcıl anlatım katsayısını tam doğru olarak belirlemek olanaklıdır. Eğer bu öngörüm (5.46)'da kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}\chi_c\left(\overline{\xi}(\varepsilon),\varepsilon\right) \approx \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j &\left(\sum_{k=1}^{j} c_{j,k}\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)^{2k}\cos\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)\right.\\ &\left.+\sum_{k=1}^{j} s_{j,k}\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)^{2k-1}\sin\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)\right)+\cos\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)\end{aligned} \tag{5.56}$$

Bu eşitliğin sağ yanının ε'a göre türevlerinden ilk $(m+1)$'i, $\varepsilon = 0$ yerleştirildiğinde, ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır. Ama bu durum, yukarıdaki sonsuz toplamın tümünün değil, yalnızca, j'nin 0'dan başlayıp m'de son bulan kesiminin bu türevlerin $\varepsilon = 0$'daki anlatımlarında yer alır. Öteki anlatımlar sıfırlandıklarından gözükmezler. Bu yüzden, yukarıdaki yanaşım yerine aşağıdaki yazılabilir.

$$\begin{aligned}\chi_c\left(\overline{\xi}(\varepsilon),\varepsilon\right) \;\approx\; &\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j\left(\sum_{k=1}^{j} c_{j,k}\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)^{2k}\cos\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)\right.\\ &\left.+\sum_{k=1}^{j} s_{j,k}\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)^{2k-1}\sin\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)\right)+\cos\left(\sum_{k=0}^{m}\xi_{j,k}\varepsilon^k\right)\\ \approx\; &\sum_{j=0}^{m} C\left(\overline{\xi}_{j,1},...,\overline{\xi}_{j,k},...,\overline{\xi}_{j,m}\right)\varepsilon^j\end{aligned} \tag{5.57}$$

Bu eşitliğin en son kesimindeki C katsayıları, güçlük çekmeden görülebileceği gibi, $\overline{\xi}_{j,k}$'ların doğrucul anlatımlarıyla, sıfır da olabilen, birer değişmezin toplamıdırlar. Bunların her biri ayrı ayrı 0'a eşit olmalıdır. Böylece, toplamda $(m+1)$ bilinmeyen için $(m+1)$ doğrucul denklem elde edilir. Bunların çözümü $\overline{\xi}_{j,k}$'ları verir.

5.4 Sıfırda Sıfırlanımlı Doğal Saptırım Açılımı: Tek Hermite İşlevleri

(5.22)'nin yazılışında çift işlev oluş kısıtı öngörülmüştü. Bu kesimde tek Hermite işlevlerine odaklanacağımızdan bu kısıt yerine tek işlev oluş kısıtını yerleştirmek gerekir. Böylece,

$$\chi_s''(x,\varepsilon)-\varepsilon\chi_s(x,\varepsilon)+(1+\varepsilon)\chi_s(x,\varepsilon)=0,\quad \chi_s(-x,\varepsilon)=-\chi_s(x,\varepsilon),\quad \chi_s'(0,\varepsilon)=1 \tag{5.58}$$

yazılabilir. Burada olağanlaştırım için tek işlevin $x=0$'da 1 kılınabilişi olanaklı olmadığından, χ_s'nin x'e göre türevinin $x=0$'da 1 kılınışına gidilmiştir.

(5.58)'in çözümü, için χ_s'nin ε'a göre çözümcül olduğu varsayılırsa, aşağıdaki toplamdizi açılımı yazılabilir.

$$\chi_s(x,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\chi_{s,j}(x) \tag{5.59}$$

Bu açılım (5.57)'de kullanıldıktan sonra oluşan yapı ε'un artan üslüleri olarak yeniden düzenlenir ve oluşan toplamdizinin her bir ε üslüsünün katsayısı sıfıra eşitlenirse aşağıdaki özyineleyiş elde edilir.

$$\chi_{s,j}''(x)+\chi_{s,j}(x)=x\chi_{s,j-1}'(x),\qquad \chi_{s,-1}(x)\equiv 0,\qquad j=0,1,2,... \tag{5.60}$$

Burada, $j=0$ alındığında

$$\chi_{s,0}''(x)+\chi_{s,0}(x)=0 \tag{5.61}$$

elde edilir. Bunun tek işlev nitelikli olan ve türevi $x=0$'da 1 değeri alan çözümü aşağıda verildiği gibidir.

$$\chi_{s,0}(x)=\sin(x) \tag{5.62}$$

(5.60)'ta $j=1$ alınır ve (5.62)'den yararlanılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\chi_{s,1}''(x)+\chi_{s,1}(x)=x\cos(x) \tag{5.63}$$

Bu sağ yanlı bir STD'dir. $x=0$'da türevi sıfırlanan ve tek işlev nitelikli olan bir çözüm için önce aşağıdaki eşitlikleri anımsatmakta yarar bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}\left(x^2\sin(x)\right)''+x^2\sin(x)&=2\sin(x)+4x\cos(x),\\ (x\cos(x))''+x\cos(x)&=-2\sin(x)\end{aligned} \tag{5.64}$$

Bunlar, $\chi_{s,1}$'in $x^2\sin(x)$ ile $x\cos(x)$'in bir doğrucul birleşimi olarak yazılabileceğini düşündürür. Ancak, böyle yapılırsa, $x=0$'da sıfırlanan $\chi_{s,1}$'in türevinin de $x=0$'da sıfırlanımı gerekecektir. Bu gereksinim bu doğrucul birleşimle sağlanamayacağından, sıfır ekleniminden başka denklemi etkilemeyecek olan bağdaşık çözümün de $\chi_{s,1}$'e katılışı düşünülebilir. Böylece, $s_{1,1}$ ve $c_{1,1}$ bu an için belirsiz değişmezler olmak üzere, aşağıdaki öngörüm yazılabilir.

$$\chi_{s,1}(x) = s_{1,1}x^2\sin(x) + c_{1,1}x\cos(x) - c_{1,1}\sin(x) \tag{5.65}$$

Bunun (5.63)'te kullanımı, daha sonra da ele geçen denklemde (5.64)'ün kullanımı aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak sağlar.

$$2\left(s_{1,1} - c_{1,1}\right)\sin(x) - 4s_{1,1}x\cos(x) = x\cos(x) \tag{5.66}$$

Bunun sağlanışı için

$$s_{1,1} = -\frac{1}{4}, \qquad c_{1,1} = -\frac{1}{4} \tag{5.67}$$

eşitliklerinin sağlanımı gerekli ve yeterlidir. Böylece, sonuçta, $\chi_{s,1}(x)$ için aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\chi_{s,1}(x) = -\frac{x^2}{4}\sin(x) - \frac{x}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(x) \tag{5.68}$$

Bu sonucun, (5.60)'ta, $j = 2$ alındıktan sonra, kullanımı aşağıdaki eşitliğe götürür.

$$\chi''_{s,2}(x) + f_2(x) = -\frac{x^2}{4}\sin(x) - \frac{x^3}{4}\cos(x) \tag{5.69}$$

Bu denklemin tek işlev nitelikli ve türevi $x = 0$'da sıfırlanan çözümünü bulabilmek için (5.64)'tekilere ek olarak aşağıdaki eşitlikleri yazmakta yarar vardır.

$$\begin{aligned}\left(x^4\sin(x)\right)'' + x^4\sin(x) &= 12x^2\sin(x) + 8x^3\cos(x),\\ \left(x^3\cos(x)\right)'' + x^3\cos(x) &= -6x^2\sin(x) + 6x\cos(x)\end{aligned} \tag{5.70}$$

(5.64) ve (5.70)'ten esinlenimlerle ve $\chi_{s,1}$'in öngörülüşündeki düşüncelerle $\chi_{s,2}(x)$ için aşağıdaki öngörüm yazılabilir.

$$\begin{aligned}\chi_{s,2}(x) \quad \equiv \quad & s_{2,2}x^4\sin(x) + s_{2,1}x^2\sin(x) + c_{2,2}x^3\cos(x) + c_{2,1}x\cos(x)\\ & -\left(4s_{2,1} + 8c_{2,2}\right)\sin(x)\end{aligned} \tag{5.71}$$

Bunun (5.69)'da kullanımı ve kullanım sonrasında ele geçen (bağdaşıklaştırılmış) denklemin doğrucul bağımsız anlatımlarının her birinin katsayısının ayrı ayrı sıfıra eşitlenişiyle aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir.

$$\begin{aligned}12s_{2,2} - 6c_{2,2} = \frac{1}{4}, &\qquad 8s_{2,2} = \frac{1}{4},\\ -2s_{2,1} - 2c_{2,1} = 0, &\qquad 6c_{2,2} + 4s_{2,1} = 0\end{aligned} \tag{5.72}$$

Bunların çözümü aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$c_{2,1} = -\frac{1}{32}, \qquad s_{2,1} = -\frac{1}{32}, \qquad c_{2,2} = \frac{1}{48}, \qquad s_{2,2} = \frac{1}{32} \tag{5.73}$$

Böylece,

$$\chi_{s,2}(x) \equiv \frac{1}{48}x^4\cos(x) - \frac{1}{32}x^2\cos(x) + \frac{1}{32}x^3\sin(x) - \frac{1}{32}x\sin(x) \tag{5.74}$$

sonucuna ulaşılır.

Bu bölümde, buraya dek olan inceleyişlerde varılan bağıntılar hem elyordamıyla, hem de MuPAD betikleyişi ile üretilmişlerdir. Betik tutamağının içeriği, LaTeX'in `verbatim` biçeminde Ek A'da verilmektedir.

$\chi_{s,1}(x)$ ile $\chi_{s,2}(x)$ işlevlerinin belirlenen yapılarından esinlenimlerle $\chi_{s,j}(x)$ işlevi için de aşağıdaki öngörüme gidilebilir.

$$\begin{aligned} \chi_{s,j}(x) = \sum_{k=1}^{j} c_{j,k}x^{2k-1}\cos(x) + \sum_{k=1}^{j} s_{j,k}x^{2k}\sin(x) - c_{j,1}sin(x) \\ j = 1,2,3,\ldots \qquad k = 1,2,3,\ldots,j \end{aligned} \tag{5.75}$$

Buradan ilerleyebilmek için aşağıdaki eşitliklere gereksinim vardır.

$$\begin{aligned} &\left(x^{2k-1}\cos(x)\right)' = (2k-1)x^{2k-2}\cos(x) - x^{2k-1}\sin(x), \\ &\left(x^{2k}\sin(x)\right)' = 2kx^{2k-1}\sin(x) + x^{2k}\cos(x), \\ &\left(x^{2k-1}\cos(x)\right)'' + x^{2k-1}\cos(x) = (2k-1)(2k-2)x^{2k-3}\cos(x) - 2(2k-1)x^{2k-2}\sin(x), \\ &\left(x^{2k}\sin(x)\right)'' + x^{2k}\sin(x) = 2k(2k-1)x^{2k-2}\sin(x) + 4kx^{2k-1}\cos(x) \end{aligned} \tag{5.76}$$

Bunlardan yararlanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \chi''_{s,j}(x) + f_j(x) &= \sum_{k=1}^{j}\left(4ks_{j,k} + (2k+1)2kc_{j,k+1}\right)x^{2k-1}\cos(x) + \\ &\quad \sum_{k=1}^{j}\left(2k(2k-1)s_{j,k} - 2(2k-1)c_{j,k}\right)x^{2k-2}\sin(x), \\ &\quad c_{j,j+1} \equiv 0 \end{aligned} \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned} x\chi'_{c,j-1}(x) &= \sum_{k=1}^{j}\left((2k-1)c_{j-1,k} + s_{j-1,k-1}\right)x^{2k-1}\cos(x) + \\ &\quad \sum_{k=1}^{j}\left((2k-2)s_{j-1,k-1} - c_{j-1,k-1}\right)x^{2k-2}\sin(x), \\ &\quad c_{j-1,0} \equiv 0, \qquad s_{j-1,j} \equiv 0 \end{aligned} \tag{5.78}$$

(5.77) ve (5.78)'in sol yanları eşit olmak durumundadır. Bu nedenle, sağ yanlar da eşit olmalıdır. Bu ise sağ yanlarda bulunan eş doğrucul bağımsız işlev anlatımlarının katsayılarının da eşit oluşunu gerektirir. Böylece, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} 2k(2k-1)c_{j,k} - 2(2k-1)s_{j,k} &= (2k-2)c_{j-1,k-1} + s_{j-1,k-1} \\ 4ks_{j,k} + 2k(2k+1)c_{j,k+1} &= (2k-1)c_{j-1,k} + s_{j-1,k-1} \\ c_{0,1} = 1, \qquad s_{0,1} = 1, \qquad j = 1,2,3,..., &\qquad k = 1,2,3,...,j \end{aligned} \tag{5.79}$$

Bunlarda görünen $c_{j,k}$ ve $s_{j,k}$ olarak simgelenen büyüklüklerde, $j > 0$ için, $k < 1$ veya $k > j$ olursa, ilgili büyüklüğün özdeş olarak sıfır olduğu öngörülmektedir. Doğrucul olan bu eşitliklerin çözümleri eşsizdir ve çok da güçlük çekmeksizin bulunabilirler. Üstelik, buyrukdizileyiş ya da betikleyişle de bu işin üstesinden gelinebilir. Ancak, burada bu doğrultuda daha öteye gitmeyeceğiz.

(5.75) ve (5.79)'dan aşağıdaki eşitliklere ulaşılabilir.

$$\chi_s(x,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \left(\sum_{k=1}^{j} c_{j,k} x^{2k} \cos(x) + \sum_{k=1}^{j} s_{j,k} x^{2k-1} \sin(x) \right) - c_{j,1} \sin(x) \tag{5.80}$$

$$\chi_s\left(x, \frac{1}{2n}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j n^j} \left(\sum_{k=1}^{j} c_{j,k} x^{2k} \cos(x) + \sum_{k=1}^{j} s_{j,k} x^{2k-1} \sin(x) \right) - c_{j,1} \sin(x) \tag{5.81}$$

Bu, çözümün aranan saptırım açılımıdır. Bunun sıfırları Hermite çokterimlilerinin sıfırları olacaktır.

5.5 Buradaki Saptırım Açılım Kesimcil Yaklaştıranlarının Nitelikleri

Bu bölümde oluşturulan saptırım açılımlarının tanımladığı toplamdizilerde baştan belli sayıda toplamcıl anlatımın alıkonup geriye kalanların gözardı edilerek oluşturulan anlatımlara "Kesimcil Toplam Yaklaştıranlar (ing: Partial Sum Approximants)" adı verilebilir. Burada bu kesimcil yaklaştıranların oluşturulup onların her birinin sıfıra eşit kılınışlarıyla oluşturulan denklemlerin sayıcıl çözümlerini vermeyeceğiz. Bunun nedeni, hem çok sayıda sonucun elde bulunuşu, hem de sonuçların ancak en küçük köklerde, pek iyi olmasa da, belli bir doğrulukta elde edilebilişidir. Bu durum, "Buradaki saptırım açılım tanımına bir kesim ek koşullandırımlar getirerek iyileştirilebilir mi?" sorusunu gündeme getirmektedir. Bunun anlamlı bir yanıtını bulmak için gösterilen çabalar gelecek bölümde sunulacaktır.

6. HERMITE ÇOKTERİMLİ KÖKLERİ BELİRLENİŞİNDE SONSUZ DERECE EREYİNDE SÖNÜMLÜ, EKKOŞULLANDIRIMLI, SAPTI RIM AÇILIMI

Bu bölümde, beşinci bölümde sunulan ve pek de etkin olmayacağı sonradan anlaşılan saptırım açılımının nasıl etkinleştirilebileceği üzerinde durulacaktır. Bu bağlamda, etkinliğin yüksek oluşunu engelleyen öğelerin neler olduğunu anlamak üzere, öncelikle, baskın yanaşım adı verilebilecek olan, duruma odaklanacağız.

6.1 Baskın Yanaşım

Önceki kesimlerde üzerinde durulduğu gibi, Hermite çokterimlilerinin köklerinin sonsuz derece ereyindeki anlatımları aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$\xi_j^{(n)} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \eta_j^{(n)} = \frac{1}{2\sqrt{n}}(j+1)\pi, \qquad j = 0,1,2,...,n-1 \quad (6.1)$$

Burada, n kök söz konusu gibi görünmekle birlikte, bu köklerin eksileri de köktür. Ancak, çift ve tek işlev ayrımı nedeniyle, salt artı değerlerle çalışmak olanaklıdır. Ayrıca, tek dereceli Hermite çokterimlilerde 0 değerli bir kök de bulunmaktadır.

Böylece, Hermite çokterimlilerinin çift işlevlerinin de tek işlevlerinin de, sıfırlarının başat (ing: dominant) değerleri belirlenmiş olur. Yukarıdaki dördülkökler içerisinde salt n ya da $n+1$ gibi değişik yapıların bulunuşu başatlık açısından değişiklik yaratmaz ama ikincil ya da daha öte katkılarda değişikliklere neden olabilir.

Baskın yanaşımın ne düzeyde nitelikli olduğunu anlamak için belli derecede Hermite çokterimlilerinin köklerini sayıcıl olarak belirleyip baskın yanaşım bağıntılarından elde edilecek karşılık gelen değerlerle karşılaştırıma yönelişte yarar bulunmaktadır. Bu eylemlerin gerçekleştirimi için yazılmış olan MuPAD betiği Ek A'da verilmektedir.

O betiğin koşturumu (ing: running) ile üretilen oturum çıktıları tutamağının salt sonuçlarla ilgili kesimi Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2'de verilmektedir. Burada, 10. ve 11. dereceden Hermite çokterimlilerinin kökleri ile ilgili sonuçlar verilmektedir. `CKok` ve `TKok` ile simgelenen değerler, sırasıyla, ilgili çift ve

Çizelge 6.1 : Çift Hermite Çokterimli Kök Baskın Yanaşımı.

n	CKok	BYCKok	CSap
2	0.3429013272	0.3512407366	-0.02374271
4	1.03661083	1.05372221	-0.01623898
6	1.756683649	1.756203683	0.000273297
8	2.532731674	2.458685156	0.030116307
10	3.436159119	3.161166629	0.086990824

Çizelge 6.2 : Tek Hermite Çokterimli Kök Baskın Yanaşımı.

n	TKok	BYTKok	TSap
3	0.6568095669	0.7024814731	-0.06501510
5	1.326557084	1.404962946	-0.05580635
7	2.025948016	2.107444419	-0.03867072
9	2.7832901	2.809925892	-0.00947917
11	3.668470847	3.512407366	0.044432056

tek çokterimlinin köklerini göstermektedir. Kökler salt artı değerler için ve artan değer sıralayış biçimiyle verilmektedir. $n = 5$ değeri, sırasıyla, $2n$. ve $(2n+1)$. derece anlatımlarıyla belirleyişlere girdiğinden, 10. ve 11. dereceye karşılık gelmektedir. `BY` simgedizisi baskın yanaşımı çağrıştırmaktadır. `Sap` simgedizisi ise yaklaştırımın kesin değerden orancıl olarak ne düzeyde saptığı anlamındadır. Bunun ilgili değeri, 100 ile çarpıldığında, bağıl yüzde olarak kesin değerden ne düzeyde uzaklaştığı anlaşılabilmektedir. En küçük kökte kesin değer küçük kalırken, kök değeri yükseldikçe, kesin değer baskın yanaşımın verdiği değerden ivmeli bir biçimde uzaklaşmaktadır. Burada verilen uygulayış dışındaki dereceler için de betik koşturulabilir ve sonuçlar alınabilir. Sapan değerlerle ilgili değişim özellikleri değişebilecek olsalar da, burada verilmeyen sonuçlardan da gözlendiği üzere, baskın yanaşım, kesin değerden çok büyük olabilen uzaklaşımlara neden olabilmektedir. Derecenin çok çok büyüyüşü durumunda n. köklerin anlatımları da çok büyür ve bu büyüyüş saptırım olarak alınan anlatımın saptırımsız anlatıma göre bağıl boyu (ing: norm) da yükseltir. Bu yükseliş, kuşkusuz, saptırım açılımının yakınsayışının azalışına neden olur. Bu, baskın yanaşımı taban alan bir saptırım açılımında, yakınsayış elde edilemeyebileceğinin ilk belirtileri olarak algılanabilir. Bu yüzden de, daha önceden geliştirilen saptırım açılımına göre, daha değişik bir saptırım açılımına yönelmekte yarar bulunmaktadır.

6.2 Nasıl Bir Saptırım Açılımı?

(6.1)'deki en yüksek değerler için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\xi_{n-1}^{(n)} = \left(\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{4\sqrt{n}}\right)\pi, \qquad \eta_{n-1}^{(n)} = \frac{\sqrt{n}}{2}\pi \tag{6.2}$$

Bunlar, köklerin $n \to \infty$ için $\sqrt{n}\pi/2$'yi aşan bir davranış göstermeyeceği anlamına gelir. Bu yüzden $[0,(\sqrt{n}\pi)/2]$ aralığına "İmsiz Kökler Yöresi" adını verebiliriz. $\xi_j^{(n)}$'ler ve $\eta_j^{(n)}$'ler bu yörenin iç konumlarıdırlar. Bu ise, imsiz kökler yöresinde, x/n değerinin $n \to \infty$ için 0 değerinde kümeleneceğini gösterir. Bu yüzden, x/n ile orantılı anlatımı bir saptırım olarak niteleyip saptırım açılımına gitmek olanaklıdır. Bu ana dek olan inceleyişlerimizde de, bu yola giderek bir saptırım açılımı oluşturup açılımın ilk kerte anlatımlarını belirleyiş çabasına girişmiştik. Ancak, elde edilen sonuçlar ile saptırım açılımında düzgün bir yakınsayış elde edilişinin olanaklı gözükmediği yargısına da varmıştık. Önce, saptırım açılımına taban olan sıradan türevli denklemleri yeniden yazarak görüş belirtiş yoluna gidelim.

$$\chi_c''(x,\varepsilon) - \varepsilon\frac{x}{2n}\chi_c'(x,\varepsilon) + \chi_c(x,\varepsilon) = 0, \qquad n \gg 1 \tag{6.3}$$

$$\chi_s''(x,\varepsilon) - \varepsilon\frac{x}{2n}\chi_s'(x,\varepsilon) + \left(1+\varepsilon\frac{1}{2n}\right)\chi_s(x,\varepsilon) = 0, \qquad n \gg 1 \tag{6.4}$$

Burada, χ_c'nin ve χ_s'nin x'e göre, sırasıyla, birer çift ve tek işlevler olduğu öngörülmektedir. $\chi_c(x,\varepsilon)$'un $x \to 0$ için $H_{2n}(x)$ ile, $\chi_s(x,\varepsilon)$'un $x \to 0$ içinse $H_{2n+1}(x)$ ile eşdeğerli olacağı da bir öngörüm olarak verilmektedir. Bu bağlamda, aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı da ayrıca öngörülmektedir.

$$\chi_c(x,1) = H_{2n}(x), \qquad \chi_s(x,1) = H_{2n+1}(x) \tag{6.5}$$

(6.3) ve (6.4)'te saptırım değiştirgesi denklemde doğal olarak bulunan bir değiştirge değildir. İnceleyişlerimizde, $1/2n$ büyüklüğünü ε ile simgeleyerek de saptırım açılımına gitmiştik. O saptırım açılımında da, neredeyse, eşdüzeyde sıkıntılı yakınsayış sorunlarıyla yüzleşmiştik. Tüm bunlar, sorunların nereden kaynaklanmış olabileceğinin iyice irdelenişini gündeme getirir. Bu doğrultuda görüşlerimiz aşağıda sırasayılandırıldığı gibi verilebilir.

1. (6.3) ve (6.4)'te saptırıma taban olan işleç xd/dx yapısında bir çarpımdır. Burada, türev işleci kıyısız (sınırsız) ya da sonsuz kıyılı bir işleçtir. Yakınsayışta sorun oluşunun nedeni bu işlecin etkisinin, bölen konumundaki, $2n$ ile dengelenemediği izlenimi vermektedir. Gerçi, gözlemlerimizde n derece değeri çok büyütülememiş olduğundan daha yüksek n değerlerinde daha iyi bir bastırım beklenebilse de, elde edilecek saptırım açılımının büyük sayılmayabilecek n'ler için de nitelikli oluşu da yürekten istenen bir olgudur.

2. d/dx işlecinden öte x çarpanının da saptırım açılımının yakınsayışına olumsuz etkileri olabileceğini düşünmek gerekir. Eğer, x'in değer aldığı aralık $\sqrt{n}$ ile orantılı bir uzunlukta seçilirse, öteki bir deyişle, tüm kökleri içerecek biçimde alınırsa; bu, bütüneyaygınlık sorunumuzun kaynağı olabilir. Bunun nedeni de saptırım açılımında, saptırım değiştirgesinin en küçük kökte $1/2n$ gibi davranırken en büyük kökte $1/\sqrt{n}$ ile orantılı olarak davranacak oluşudur. Bu saptırım değiştirge davranış değişimi, bu bağlamda, en büyük kökte daha büyük yaklaştırım niteliği azalışlarına neden olmak durumundadır. Gözlemler de, bunları doğrular niteliktedir.

3. Saptırım işlecinde x çarpanı yerine onun belli bir değişmeze göre değişiminin yerleştirimi o işlecin sonsuz kıyılılığını azaltacak niteliktedir. Bu yüzden xd/dx işleci yerine, $\widetilde{x}$ bir değişmezi simgelemek üzere, $(x-\widetilde{x})d/dx$ işlecine saptırım gözüyle bakıp $\widetilde{x}d/dx$ işlecini saptırımsız kesime taşımak olumsuzlukları azaltmak açısından yerinde olabilir.

4. 3 ile sırasayılandırılan önceki kesimdeki değişmez yerleştirimi bütüneyaygın olarak (tüm kökler için eşdeğer olarak) gerçekleştirilecek olursa olumsuzluk giderimi istenilen nitelikte sağlanamayabilir. Bunun nedeni de, bütüneyaygınlığın olumsuzluğa önemli bir katkıda bulunuyor oluşunun düşünülüşüdür. Bu nedenle, bütüneyaygınlığın olumsuzluğa olan katkısını kırmak ya da gidermek için her köke özgü olarak değişik olabilen $\widetilde{x}$ seçimlerine gitmek us'a (akıla) ilklerde gelen önemli bir görüştür.

5. Bütüneyaygınlığın olumsuzluğa katkısının daha da çok denetim altına alınabilişi ve her köke özgü $\widetilde{x}$ seçiminin yeterince etkin olabilişi için salt ilgili kökün içinde bulunduğu bir aralık içinde çalışarak, her kök için ayrı, saptırım açılımına gitmek de gündeme alınmalıdır.

6. Önceki inceleyişlerimizde, Hermite çokterimlilerinin teklik/çiftlik ayrıştırımını da kullanmıştık. Burada, gündeme getirilişi düşünülen yeni saptırım açılımında saptırımsız denklemde teklik/çiftlik ayrıştırımı sözkonusu değildir. Ama, $n \to \infty$ e-reyinde sözkonusudur. Ya da, x sıfıra giderken ki davranışta bu ayrıştırımdan sözedilebilir. Saptırımsız denklem ikinci kerteden olduğundan çözümde iki belirsiz değişmezle yüzleşilir. Bunları belirlemek üzere, koşullandırım için bu tür ayrıştırımlar ya da çözümün $x = 0$ veya başka bir konumdaki davranışlarının ilgilenilen Hermite çokterimlisininkiyle bağdaşık oluşu gibi olgular gündeme getirilebilir.

6.3 Konum Kaydırımlı Saptırım Açılımı

Yukarıda, önceki kesimde, sırasayılandırımlı anlatımlarda önerilen konum kaydırımlı saptırım açılımı ile ilgili bu altbölümde bilgilendirim gerçekleştirilmektedir. Bu bağlamda, önce, (6.3)'ten esinlenimle saptırım açılımı için aşağıdaki sıradan türevli denklem yazılabilir.

$$\chi_c''(x,\varepsilon) - \frac{\widetilde{x}}{2n}\chi_c'(x,\varepsilon) + \chi_c(x,\varepsilon) - \varepsilon\frac{(x-\widetilde{x})}{2n}\chi_c'(x,\varepsilon) = 0, \qquad n \gg 1 \tag{6.6}$$

$\varepsilon = 0$ için bu denklem aşağıdaki yapıya bürünür.

$$\chi_c''(x,0) - \frac{\widetilde{x}}{2n}\chi_s'(x,0) + \chi_c(x,0) = 0, \qquad n \gg 1 \tag{6.7}$$

Burada, daha önceden de belirttiğimiz gibi, $\widetilde{x}$, değeri bu an için belirsiz olan bir değişmezi simgelemektedir.

Eğer bu denklemde, α bu an için belirsiz bir değişmez olmak üzere,

$$\chi_c(x,0) \equiv \mathrm{e}^{\alpha x}\widetilde{\chi}_c(x,0) \tag{6.8}$$

bilinmeyen dönüşümü yapılır ve (6.7)'de kullanılırsa, üstel işlevli ortak çarpan dışlandıktan sonra, aşağıdaki denkleme geçilir.

$$\widetilde{\chi}_c''(x,0) + \left(2\alpha - \frac{\widetilde{x}}{2n}\right)\widetilde{\chi}_c'(x,0) + \left(\alpha^2 - \frac{\widetilde{x}}{2n}\alpha + 1\right)\widetilde{\chi}_c(x,0) = 0, \qquad n \gg 1 \tag{6.9}$$

Bu STD'de birinci türevli anlatım bulunmasaydı, çözüm üçgencil işlevlerden kosinüs ve sinüsün bir doğrucul birleşimi olacaktı ve bu, yalınlık açısından, istenen bir durum olacaktı. Bu yüzden, (6.9)'daki birinci türevli anlatımın yokedilimi için α aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\alpha = \frac{\widetilde{x}}{4n} \tag{6.10}$$

Bu seçim altında (6.9) aşağıdaki yapıya kavuşur.

$$\widetilde{\chi}_c''(x,0)+\left(1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}\right)\widetilde{\chi}_c(x,0)=0 \tag{6.11}$$

Bu denklemin özelsiz çözümü, C_1 ve C_2 iki belirsiz değişmez olmak üzere,

$$\widetilde{\chi}_c(x,0)=C_1\cos\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}x\right)+C_2\sin\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}x\right) \tag{6.12}$$

eşitliğiyle verilebilir. Bu sonuç, $\chi_c(x,0)$'in olmasa bile $\widetilde{\chi}_c(x,0)$'ın tek/çift işlev ayrımına götürülebileceği anlamına gelir. Çift işlevler için kosinüsün, tek işlevler için sinüsün, yeterince sayıda, ilk kökleri saptırımsız yaklaştırımın kökleri olarak alınabilir. Böylece, (6.2)'deki eşitliklerin yerine aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\xi_j^{(n)}=\frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}}\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \eta_j^{(n)}=\frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}}(j+1)\pi,$$
$$j=0,1,2,\ldots,n-1 \tag{6.13}$$

Bunlar, $\widetilde{x}$'in alacağı değere bağlı olarak, saptırımsız yaklaştırım köklerinin (6.2)'deki karşılık gelen değerlerinden büyük olacaktır. Kesin kök değerlerinin büyük olduğu kökler de bu yoldan kesin köklere daha yakın saptırımsız yaklaştırım kökleri üretilebilecektir. Bu durum, daha önceki yani $\widetilde{x}$'ın sıfır olduğu, sonuçlarda iyileştirim sağlanabileceğinin belirtilerini vermektedir. Bunun, saptırım açılımında da daha iyi yakınsayış anlamına geldiğini düşünmek olanaklıdır. Bununla birlikte, önceden kosinüs ya da sinüs köklerinin kesin kök değerinden büyük olduğu köklerde, $\widetilde{x}$'i sıfırdan değişik alarak ilgili yaklaşık kökleri daha da büyütmek anlamlı gözükmemektedir. O kökler için $\widetilde{x}=0$ durumuyla ilerlemek daha anlamlı olacaktır.

Burada önemli bir gözlemin, hangi $\widetilde{x}$ değerinde (6.11) bağıntıların karşılık gelen baskın yanaşımla köklerini vereceğini belirlemek olacağını vurgulamakta yarar bulunmaktadır. (6.11)'deki kökleri kullanarak karşılık gelen kesin değeri elde edebilmek için $\widetilde{x}$'e atanacak değerin ne olacağı bir MuPAD betiği aracılığıyla belirlenmiştir. Hem betik hem de o betiğin koşturulduğunda oluşturulan oturum tutamağı, `Verbatim` çevresini kullanarak Ek A'da verilmektedir. Orada oturum tutamağını, tüm içeriği değil salt $\widetilde{x}$ değerlerinin olduğu kesim yerleşim biçimleri, çok yer almayışları için, değiştirilerek alıkonulup öteki kesimler dışlanmıştır.

Oturum tutamağından görüldüğü gibi, gerçel değerler üzerinden kaydırışlarla, yaklaşık değerin kesin değerden küçük oluşu durumunda kesin değere yaklaştırılabilmekte, öteki durumlarda sıfır alınsın deyişimize karşın, sanal $\widetilde{x}$'ler kullanarak da, yaklaştırımı saptırımsız düzeyde iyileştirmek olanaklı gibi görünmektedir.

6.4 Konum Kaydırımlı Saptırım Açılımında Saptırımsız İşleç Evirtimi

Önceki altbölümde konum kaydırımında $\widetilde{x}$ değerinin uygun seçilerek kesin kök değerlerinin üretilebileceği gösterilmişti. Ancak, bu yolda baskın yanaşım yaklaştırımından yararlanılmıştı. Oysa ki, böyle bir saptayış, aslında, çok yapay bir olgudur ve $\widetilde{x}$'nın çok daha anlamlı ve yanaşımdan çok daha özelsiz durumlar için de geçerli olacak biçimde belirlenişi istenir. Bu da, $\widetilde{x}$'nın çok daha usbilimcil düşüncelere dayanarak belirlenişini gündeme getirir. Bu bağlamda, saptırım işlecinin, saptırımsız işlece göre bağıl boyunu (ing: relative norm) olabildiğince küçük kılmak us'a gelen ilk eylemlerden biridir. Ancak, bu eylem, öncelikle, açık tanımı aşağıda verilen "Saptırım İşleci"'nin evirtimini gündeme getirir.

$$\widehat{L}f(x) \equiv \widehat{D}^2 f(x) - \frac{\widetilde{x}}{2n}\widehat{D}f(x) + \widehat{I}f(x), \qquad \widehat{D} \equiv \frac{d}{dx} \tag{6.14}$$

Burada, $\widehat{I}$ ile birim işleç gösterilmekte olup, n'nin 1'e göre sonsuz denebilecek düzeyde büyük (çok büyük) oluşunu anlatan $n \gg 1$ eşitsizliği de geçerlidir. (6.14)'te $\widehat{L}$ doğrucul bir ikinci kerte sıradan türevli işlecidir. Üstelik de değişmez katsayılıdır. Bu işleçte belirsizlikleri ortadan kaldırmak için, öncelikle, x'in içinden değerler alabileceği bir aralık tanımlamak gerekir. Burada, $[\widetilde{x}-a, \widetilde{x}+b]$ ile tanımlanan bir aralığı gündeme getireceğiz. Bu aralıkta a sonsuz olarak alınırsa aralık -sonsuzdan başlar ve soldan açık duruma düşer. Yine bu aralıkta b sonsuz olarak alınırsa aralık +sonsuzda son bulur ve sağdan açık duruma gelir. $(-\infty, \infty)$ aralığının gündemde oluşu için a ve b'nin her ikisinin birden sonsuz oluşu gerekir. Bu anlatılan öngörümler bağlamında (6.14) aşağıdaki biçemde yeniden yazılabilir.

$$\widehat{L}f(x) \equiv \widehat{D}^2 f(x) - \frac{\widetilde{x}}{2n}\widehat{D}f(x) + \widehat{I}f(x), \quad \widehat{D} \equiv \frac{d}{dx}, \quad x \in [\widetilde{x}-a, \widetilde{x}+b], \quad n \gg 1 \tag{6.15}$$

Bu, öncekinden daha somut bir tanım olmakla birlikte, yine bir kesim belirsizlikler vardır ve bunlar bu işlecin bir ikinci kerte sıradan türevli işleç (STİ) oluşundan kaynaklanır. İkinci kerteden doğrucul (ing: linear) bir STİ'nin bağdaşık (ing: homogeneous) çözümü iki belirsiz değişmez içerir ve bunların belirlenerek eşsizliğin sağlanımı için iki koşul verilişi gerekir. Koşullar tek bir konumda verilirse, olay, bir başlangıç değer sorunu (ing: initial value problem) ile ilintilidir. Yoksa, iki değişik konumda verilen iki koşul bir kıyı değer sorunu (ing: boundary value problem) ile ilintilidir. Burada, bu an için bu türden bir koşullandırım gündemde olmadığından bu işlecin tanımında iki bağımsız değişmez simgelenebilen düzeyde bir belirsizlik söz konusudur. Tüm bunlar, $\widehat{L}^{-1}$'in belirlenimi için doğrudan (ing: direct) değil dolaylı (ing: indirect) bir yolu izleyişi us'a getirir. Bu yolda, herhangi bir dördülü (karesi) tümlevlenebilen $g(x)$ işlevinin $\widehat{L}^{-1}$ altındaki görüntüsünün $g(x)$ ile nasıl ilişkilendirilebildiği konusuna odaklanılabilir. Bu bağlamda, bu görüntü işlevi $f(x)$ ile simgelenirse aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$f(x) \equiv \widehat{L}^{-1} g(x), \qquad \widehat{L} f(x) = g(x) \tag{6.16}$$

Buradaki ikinci denklem çok daha belirtik biçemde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f''(x) - \frac{\widetilde{x}}{2n} f'(x) + f(x) = g(x), \qquad x \in [\widetilde{x} - a, \widetilde{x} + b], \qquad n \gg 1 \tag{6.17}$$

Bu STD'in özelsiz çözümünü bulabilmek için önce aşağıdaki bağdaşık denkleme odaklanarak yola çıkabiliriz.

$$f_B''(x) - \frac{\widetilde{x}}{2n} f_B'(x) + f_B(x) = 0, \qquad x \in [\widetilde{x} - a, \widetilde{x} + b], \qquad n \gg 1 \tag{6.18}$$

Burada, B altsimgesi, "bağdaşık" sözcüğünü çağrıştırmak için kullanılmaktadır. Bu altbölümde önceden verilen bilgiler bağlamında bu bağdaşık çözüm için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$f_B(x) \equiv C_1 \exp\left(\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right) u_1(x) + C_2 \exp\left(\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right) u_2(x) \tag{6.19}$$

$$u_1(x) \equiv \cos\left(\sqrt{1 - \frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}\, x\right), \qquad u_2(x) \equiv \sin\left(\sqrt{1 - \frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}\, x\right) \tag{6.20}$$

(6.17)'nin çözümü için "Değişmezlerin Değişimi (ing: Variation of Constants)" yoluna başvurulabilir ve bu yolda aşağıdaki öngörümde bulunulabilir.

$$f(x) \equiv \exp\left(\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right) \left(C_1(x) u_1(x) + C_2(x) u_2(x)\right) \tag{6.21}$$

Bu eşitliğin her iki yanının x'e göre türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right) \left(C_1'(x) u_1(x) + C_2'(x) u_2(x)\right) \\ &\quad + \exp\left(\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right) \left[C_1(x) \left(u_1'(x) + \frac{\widetilde{x}}{4n} u_1(x) \right) + C_2(x) \left(u_2'(x) + \frac{\widehat{x}}{4n} u_2(x) \right) \right] \end{aligned} \tag{6.22}$$

Bu eşitlik bir bilinmeyen işlevi $f(x)$ iki yeni bilinmeyen işlev $C_1(x)$ ile $C_2(x)$ türünden anlatır. Öteki deyişle varolandan daha çok sayıda bilinmeyenli duruma götürür. Ama, bu durum bize, (6.22)'nin sağındaki anlatımın, çelişki yaratmayacak biçimde, istenilen bir kesiminin sıfırlanımını öngörüş için yetki verir. Sağ yanda, yeni bilinmeyenler olan $C_1(x)$ ile $C_2(x)$ işlevlerinin hem özleri hem de birinci türevleri bulunmaktadır. Oysa salt özleri bulunsa daha iyi olacak ve $f(x)$'in ikinci türevinde bu bilinmeyenlerin en çok birinci türevleri bulunacaktır. Bu nedenle, (6.22)'de aşağıda, (6.23)'teki, eşitlik öngörülecektir. Bu öngörüm (6.22)'nin, aşağıda, (6.24)'teki, eşitliğe dönüşümünü sağlayacaktır.

$$u_1(x)C_1'(x)+u_2(x)C_2'(x)=0 \tag{6.23}$$

$$f'(x)=\exp\left(\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right)\left[\left(u_1'(x)+\frac{\widetilde{x}}{4n}u_1(x)\right)C_1(x)+\left(u_2'(x)+\frac{\widehat{x}}{4n}u_2(x)\right)C_2(x)\right] \tag{6.24}$$

Bu eşitliğin her iki yanının x'e göre türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \exp\left(\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right)\left[\left(u_1'(x)+\frac{\widetilde{x}}{4n}u_1(x)\right)C_1'(x)+\left(u_2'(x)+\frac{\widehat{x}}{4n}u_2(x)\right)C_2'(x)\right. \\ &\quad +\left(u_1''(x)+\frac{\widetilde{x}}{2n}u_1'(x)+\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}u_1(x)\right)C_1(x) \\ &\quad \left.+\left(u_2''(x)+\frac{\widehat{x}}{2n}u_2'(x)+\frac{\widehat{x}^2}{16n^2}u_2(x)\right)C_2(x)\right] \end{aligned} \tag{6.25}$$

Bu eşitliklerden (6.25), (6.24) ve (6.21)'ın (6.17)'de kullanımı C'lerin türevsiz anlatımlarını ortadan kaldırıp aşağıdaki eşitliğin elde edilimine olanak sağlar.

$$\left(u_1'(x)C_1'(x)+u_2'(x)C_2'(x)\right)+\frac{\widetilde{x}}{4n}\left(u_1(x)C_1'(x)+u_2(x)C_2'(x)\right)=\exp\left(-\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right)g(x) \tag{6.26}$$

Bu eşitlikte (6.23)'ün kullanımı, aşağıdaki, daha yalın eşitliğe götürür.

$$u_1'(x)C_1'(x)+u_2'(x)C_2'(x)=\exp\left(-\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right)g(x) \tag{6.27}$$

(6.23) ve (6.27)'den C'lerin türevleri için aşağıdaki ara sonuçlar elde edilir.

$$C_1'(x)=-\frac{u_2(x)g(x)e^{-\frac{\widetilde{x}x}{4n}}}{u_1(x)u_2'(x)-u_1'(x)u_2(x)},\qquad C_2'(x)=\frac{u_1(x)g(x)e^{-\frac{\widetilde{x}x}{4n}}}{u_1(x)u_2'(x)-u_1'(x)u_2(x)} \tag{6.28}$$

Bunlarda, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$u_1(x)u_2'(x)-u_1'(x)u_2(x)=\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}\left(\cos(x)^2+\sin(x)^2\right)=\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}} \tag{6.29}$$

(6.28) denkleminde, x yerine y yerleştirilir ve ele geçen denklemler y üzerinde $(\widetilde{x}-a)$'dan x'e dek tümlevlenirse aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= C_1(\widetilde{x}-a)-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}}\int_{\widetilde{x}-a}^{x}dy\mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{x}y}{4n}}u_2(y)g(y), \\
C_2(x) &= C_2(\widetilde{x}-a)+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}}\int_{\widetilde{x}-a}^{x}dy\mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{x}y}{4n}}u_1(y)g(y)
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Burada, $C_1(\widetilde{x}-a)$ ve $C_2(\widetilde{x}-a)$ bu an için bilinmeyen iki belirsiz değiştirgedir. Bu da evirtimdeki iki değişmezlik belirsizliğin somut kanıtıdır. Bu değiştirgeleri, yalınlık sağlamak açısından, bundan sonra, sırasıyla, $\overline{C}_1$ ve $\overline{C}_2$ ile göstereceğiz. Bu yapıldığında (6.30)'daki eşitlikler aşağıdaki yapılara bürünürler.

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \overline{C}_1-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}}\int_{\widetilde{x}-a}^{x}dy\mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{x}y}{4n}}u_2(y)g(y), \\
C_2(x) &= \overline{C}_2+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}}\int_{\widetilde{x}-a}^{x}dy\mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{x}y}{4n}}u_1(y)g(y)
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Bunların (6.21)'de kullanımıyla aşağıdaki eşitliğe geçilebilir.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{\frac{\widetilde{x}x}{4n}}\left(\overline{C}_1u_1(x)+\overline{C}_2u_2(x)\right)+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}} \\
&\quad\times\int_{\widetilde{x}-a}^{x}dy\mathrm{e}^{\frac{\widetilde{x}(x-y)}{4n}}\left(-u_1(x)u_2(y)+u_2(x)u_1(y)\right)g(y)
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Burada aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklıdır.

$$-u_1(x)u_2(y)+u_2(x)u_1(y)=\sin\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}(y-x)\right) \tag{6.33}$$

Bunun (6.32)'de kullanımı aşağıdaki eşitliğe götürür.

$$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{\widetilde{x}x}{4n}}\left(\overline{C}_1u_1(x)+\overline{C}_2u_2(x)\right)+\int_{\widetilde{x}-a}^{x}dy\frac{\mathrm{e}^{\frac{\widetilde{x}(x-y)}{4n}}\sin\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}(y-x)\right)}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}}g(y) \tag{6.34}$$

Burada,

$$\widehat{J}_1g(x)\equiv\int_{\widetilde{x}-a}^{x}dy\frac{\mathrm{e}^{\frac{\widetilde{x}(x-y)}{4n}}\sin\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}(y-x)\right)}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}}g(y) \tag{6.35}$$

ile doğrucul bir tümlev işleci tanımlanacak olursa (6.34) yerine aşağıdaki daha tıkız eşitlik yazılabilir.

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\widetilde{x}x}{4n}}\left(\overline{C}_1u_1(x)+\overline{C}_2u_2(x)\right)+\widehat{J}_1g(x) \tag{6.36}$$

Bu ise

$$\widehat{L}^{-1}g(x) = \mathrm{e}^{\frac{\widetilde{x}x}{4n}}\left(\overline{C}_1u_1(x)+\overline{C}_2u_2(x)\right)+\widehat{J}_1g(x) \tag{6.37}$$

eşitliğinin yazılabileceği anlamına gelir.

Burada, $\overline{C}_1$ ile $\overline{C}_2$ değiştirgeleri, $g(x)$ işlevinden $[\widetilde{x}-a,\widetilde{x}+b]$ aralığında, ya da onun bir altaralığında, tümlevleyişle elde edilebiliyorsa; sağ yanı, bütünüyle bir tümlev işleç altında $g(x)$'in görüntüsü durumuna getirmek olanaklıdır. Eğer öyle oluyorsa evirtim yalın olarak o tümlev işleçe eşit işleç üretir. Ancak, burada, salt kavramcıl düzeyde kalmak istediğimizden, daha çok ayrıntıya girmeyeceğiz.

6.5 Konum Kaydırımlı Saptırım Açılımında İşleççil Saptırım Açılımı

(6.6)'daki eşitliği salt işleçler ve onlar altındaki görüntüler türünden yeniden yazmak da olanaklıdır. Bu yolda, $g(x)$ dördülü tümlevlenebilir bir işlev olmak üzere, önce, aşağıdaki işleç tanımına gidilebilir.

$$\widehat{L}_sg(x) \equiv \frac{(x-\widetilde{x})}{2n}g'(x)=0, \qquad n \gg 1 \tag{6.38}$$

Burada s altsimgesi ile saptırım sözcüğü çağrıştırılmaktadır. Bu ve önceki tanımlardan yararlanarak (6.6)'yı aşağıdaki biçemde yeniden yazmak olanaklıdır.

$$\widehat{L}\chi_c(x,\varepsilon)-\varepsilon\widehat{L}_s\chi_c'(x,\varepsilon)=0, \qquad n \gg 1 \tag{6.39}$$

Bu denklemi aşağıdaki biçemde yeniden yazmak olanaklıdır.

$$\widehat{L}\left(\widehat{I}-\varepsilon\widehat{L}_{bs}\right)\chi_c(x,\varepsilon)=0, \qquad n \gg 1 \tag{6.40}$$

$$\widehat{L}_{bs} \equiv \widehat{L}^{-1}\widehat{L}_s \tag{6.41}$$

Burada ortaya çıkan $\widehat{L}_s$ ve $\widehat{L}_{bs}$ büyüklüklerine, sırasıyla, "Saptırım İşleci" ve "Bağıl Saptırım İşleci" adları vereceğiz.

(6.40)'ı iki ayrı denkleme ayırabilmek için aşağıdaki bağıntılarla betimlenen yol izlenebilir.

$$\overline{\chi}_c(x,\varepsilon) \equiv \left(\widehat{I}-\varepsilon\widehat{L}_{bs}\right)\chi_c(x,\varepsilon), \qquad n \gg 1 \tag{6.42}$$

$$\widehat{L}\overline{\chi}_c(x,\varepsilon)=0, \qquad n \gg 1 \tag{6.43}$$

Son denklem (6.18) ile eşdeğerdir ve salt bağdaşık çözümü vardır. Böylece, yeniden simgelendirime geçmemek için, belirsiz değiştirgelerde, yine C_1 ile C_2 simgelerini kullanabilir ve (6.19)'dan esinlenimle aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\overline{\chi}_c(x,\varepsilon) = C_1 \exp\left(\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right) u_1(x) + C_2 \exp\left(\frac{\widetilde{x}x}{4n}\right) u_2(x) \tag{6.44}$$

Öte yandan, (6.42)'den, biçimcil olarak, aşağıdaki eşitlik ya da denklemlere de geçebiliriz.

$$\chi_c(x,\varepsilon) = \left(\widehat{I} - \varepsilon \widehat{L}_{bs}\right)^{-1} \overline{\chi}_c(x,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \widehat{L}_{bs}^j \overline{\chi}_c(x,\varepsilon), \qquad n \gg 1 \tag{6.45}$$

Bağıl saptırım işlecine daha çok odaklanabilmek için, önce, $g(x)$ en azından $[\widetilde{x}-a,$ $\widetilde{x}+b]$ aralığında dördülü tümlevlenebilen herhangi bir işleç olmak üzere aşağıdaki eşitliği yazarak yola çıkabiliriz.

$$\widehat{L}_{bs} g(x) = \widehat{L}^{-1} \widehat{L}_s g(x) \tag{6.46}$$

Bu eşitlik, (6.37)'de $g(x)$ yerine $\widehat{L}_s g(x)$ yerleştirdikten sonra ele geçecek eşitlikte kullanılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\widehat{L}_{bs} g(x) = e^{\frac{\widetilde{x}x}{4n}} \left(\overline{C}_1 u_1(x) + \overline{C}_2 u_2(x)\right) + \widehat{J}_1 \widehat{L}_s g(x) \tag{6.47}$$

Öte yandan, (6.35)'ten aşağıdaki eşitliğe de geçilebilir.

$$\widehat{J}_1 \widehat{L}_s g(x) \equiv \int_{\widetilde{x}-a}^{x} dy \frac{e^{\frac{\widetilde{x}(x-y)}{4n}} \sin\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}(y-x)\right)}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}} (y-\widetilde{x})\, g'(y) \tag{6.48}$$

Burada, g'de bulunan türev sonsuz boylu (normlu) bir işleç altında görüntüdür ve, aslında, pek de istenen bir olgu değildir. Ondan kurtulmakta yarar bulunmaktadır. Bu eylemi gerçekleştirebilmek için kesimcil tümlevleyişten yararlanılabilir. Böyle yapılırsa, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} \widehat{J}_1 \widehat{L}_s g(x) &= \left(\frac{e^{\frac{\widetilde{x}(x-y)}{4n}} \sin\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}(y-x)\right)}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}} (y-\widetilde{x})\right) g(y) \Bigg|_{y=\widetilde{x}-a}^{y=x} \\ &\quad - \int_{\widetilde{x}-a}^{x} dy \left(\frac{e^{\frac{\widetilde{x}(x-y)}{4n}} \sin\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}(y-x)\right)}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}} (y-\widetilde{x})\right)' g(y) \end{aligned} \tag{6.49}$$

Bu eşitliğin ilk yataysırasının sağında gözüken artık anlatım $y = x$'te sıfırlanır ama $y = \widetilde{x} - a$'da a değiştirgesiyle orantılı bir anlatım ortaya çıkar. Artık terimsiz durum, anlatım olarak, bütünüyle, bir tümlev işleç altında $g(x)$'in görüntüsüyle eşlenir ve, aslında, yalınlık açısından istenen bir durumdur. $a = 0$ alındığında (6.49) aşağıdaki yapıya bürünür.

$$\widehat{J}_1\widehat{L}_s g(x) \quad = \int_{\widetilde{x}}^{x} dy \left(\frac{e^{\frac{\widetilde{x}(x-y)}{4n}} \sin\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}(x-y)\right)}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}} (y-\widetilde{x}) \right)' g(y) \tag{6.50}$$

Bu, birleşik işleç altındaki görüntü, aslında, $\overline{C}_1$ ile $\overline{C}_2$ değişmezleri sıfır alındığında, $\widehat{L}_{bs}$'nin altındaki görüntüdür. Bu yüzden, bunu daha yalın bir işlecin altında görüntü olarak göstermek için aşağıdaki tanım yapılabilir.

$$\widehat{\widehat{L}}_{bs} g(x) \quad = \int_{\widetilde{x}}^{x} dy \left(\frac{e^{\frac{\widetilde{x}(x-y)}{4n}} \sin\left(\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}(x-y)\right)}{\sqrt{1-\frac{\widetilde{x}^2}{16n^2}}} (y-\widetilde{x}) \right)' g(y) \tag{6.51}$$

Bu yapılınca, (6.47) aşağıdaki yapıya bürünür.

$$\widehat{L}_{bs} g(x) = e^{\frac{\widetilde{x}x}{4n}} \left(\overline{C}_1 u_1(x) + \overline{C}_2 u_2(x) \right) + \widehat{\widehat{L}}_{bs} g(x) \tag{6.52}$$

Burada, bu an için, $\overline{C}_1$ ve $\overline{C}_2$ değişmezleri $g(x)$'ten bağımsız olarak düşünülmektedirler. Bu durum, $\widehat{L}_{bs}$ işlecinin doğrucul oluşuna olanak vermez. Oysa, $\overline{C}_1$ ve $\overline{C}_2$ değişmezleri $g(x)$'e bağımlı olursa, bağımlılığın türüne göre $\widehat{L}_{bs}$ işleci doğrucul da, yüksek derecede doğruculsuz da olabilir. Gelecek altbölümde $\overline{C}_1$ ve $\overline{C}_2$ değişmezlerinin nasıl belirleneceğine odaklanacağız.

6.6 Konum Kaydırımlı Saptırım Açılımında Boy İnceleyişi

Önceki altbölümde $a = 0$ yargısına varılmıştı. Bu, x ve y değişkenlerinin, b artı bir sayı olmak üzere, $[\widetilde{x}, \widetilde{x} + b]$ aralığında olduğu öngörümü anlamına gelir. Bu aralık üzerinde dördülü tümlevlenebilen işlevler için bir doğrucul yöney uzayı (ing: Linear Vector Space) tanımlanabileceği bilinen bir gerçektir. Eğer, bu uzay üzerinde bir de iççarpım (ing: inner product) ve ona bağımlı olarak boy (ing: norm) tanımlanacak olursa bu doğrucul yöney uzayı bir iççarpım uzayı (ing: Inner Product Space) ya da Hilbert uzayına dönüşür. Bu yolda, $g_1(x)$ ile $g_2(x)$ bu uzay içinden seçilen herhangi iki işlev (soyut anlamında yöney) arasında iççarpım (g_1, g_2) ile simgelenirse tanımı aşağıdaki özdeşlikle verilir.

$$(g_1, g_2) \equiv \int_{\widetilde{x}}^{\widetilde{x}+b} dx g_1(x) g_2(x) \tag{6.53}$$

Bu tanımda, soldaki gösterilimde, x değişkeni belirtik olarak yazılmamaktadır. Bunun nedeni de, x'in tümlevleyiş değişkeni konumunda oluşu, üretilen sonuçta doğrudan görünmeyişidir.

Eğer, $g(x)$ yukarıdaki iççarpımın üzerinde tanımlandığı uzaydan herhangi bir işlevse, $g(x)$'in boyu (normu) $\|g\|$ ile simgelenir ve aşağıdaki özdeşlikle tanımlanır.

$$\|g\| \equiv (g,g)^{\frac{1}{2}} \tag{6.54}$$

Bu tanımlara ve boyun özelsizdeki (geneldeki) özelliklerine dayanarak (6.45)'ten aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\|\chi_c(\varepsilon)\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \varepsilon^j \widehat{L}_{bs}^j \overline{\chi}_c(\varepsilon) \right\|, \qquad n \gg 1 \tag{6.55}$$

Burada da boy gösterilimleri içinde x değişkeni belirtik olarak gösterilmemekte ama x ile ilgisi olmayan saptırım değiştirgesi ε'a olan bağımlılık belirtik olarak gösterilmektedir.

Eğer, burada "altçarpımcıl (ing: submultiplicative) bir boy kullanılacak olursa, bir çarpımın boyu, çarpanlarının boyları çarpımından küçük olamaz. En azından eşit, ya da çoğunlukla, büyük olur. Bu yüzden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\|\chi_c(\varepsilon)\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \varepsilon^j \widehat{L}_{bs}^j \overline{\chi}_c(\varepsilon) \right\|, \qquad n \gg 1 \tag{6.56}$$

$$\left\| \varepsilon^j \widehat{L}_{bs}^j \overline{\chi}_c(\varepsilon) \right\| \leq |\varepsilon|^j \left\| \widehat{L}_{bs} \right\|^j \|\overline{\chi}_c(\varepsilon)\| \tag{6.57}$$

Bunun (6.55)'te kullanımı aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak sağlar.

$$\|\chi_c(\varepsilon)\| \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\varepsilon|^j \left\| \widehat{L}_{bs} \right\|^j \right) \|\overline{\chi}_c(\varepsilon)\|, \qquad n \gg 1 \tag{6.58}$$

Burada yakınsayışın güvence altında olabilişi için $|\varepsilon|^j \left\| \widehat{L}_{bs} \right\|^j < 1$ oluşu gerekir. Bu varsa, (6.55) yerine

$$\|\chi_c(\varepsilon)\| \leq \frac{\|\overline{\chi}_c(\varepsilon)\|}{1 - |\varepsilon| \left\| \widehat{L}_{bs} \right\|}, \qquad n \gg 1 \tag{6.59}$$

yazılabilir.

Bu inceleyişlerde, ε, yapay bir saptırım değiştirgesi olduğundan, 1 değerini aldığında da yakınsayışın varoluşu gerekir. Bu ise

$$\left\| \widehat{L}_{bs} \right\| < 1 \tag{6.60}$$

kısıtının sağlanışını gerektirir. Buradaki boy belirtik olarak $\overline{C}_1$ ve $\overline{C}_2$'nin değerlerine bağımlıdır. Onların değerine göre 1'den küçük, büyük, ya da ona eşit olabilir. Ama bizim için istenen durum 1'den küçük oluşudur. Üstelik 1'den ne düzeyde küçükse o düzeyde iyi yakınsayan bir saptırım açılımı elde edilir. Bu ise $\widehat{L}_{bs}$ işlecinin boyunun $\overline{C}_1$ ve $\overline{C}_2$'ye göre ineç (ing: minimum) değerinin belirlenişinin, ya da sözel biçimiyle, "Bağıl Saptırım İşleç Boyu'nun İneçleyişi (ing: minimization)" eyleminin usçu (akılcı) bir yaklaşım olacağı anlamına gelir.

(6.52)'den, salt gerçellik öngörümü altında, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{L}_{bs}g\right\|^2 &= \left\|\overline{C}_1\overline{u}_1+\overline{C}_2\overline{u}_2+\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right\|^2\\ &= (\overline{u}_1,\overline{u}_1)\overline{C}_1^2+(\overline{u}_2,\overline{u}_2)\overline{C}_2^2+2(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\overline{C}_1\overline{C}_2+2\left(\overline{u}_1,\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right)\overline{C}_1\\ &\quad +2\left(\overline{u}_2,\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right)\overline{C}_2+\left\|\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right\|^2 \end{aligned}\qquad (6.61)$$

Burada, iççarpımın bakışıklığı (simetrisi) gözönüne alınmış olup aşağıdaki tanımlar geçerlidir.

$$\overline{u}_1(x)\equiv \mathrm{e}^{\frac{\tilde{x}x}{4n}}u_1(x),\qquad \overline{u}_2(x)\equiv \mathrm{e}^{\frac{\tilde{x}x}{4n}}u_2(x)\qquad (6.62)$$

(6.61)'de bağıl saptırım işleci altında $g(x)$ işlevinin görüntüsünün boyu değil boy dördülü bulunmaktadır. Böyle yapmakla, dördül kök kullanımından kaçınılarak, denklemler, bir anlamda, daha yalın yapı da elde edilebilmektedirler. Öte yandan, boy dördülü ineçleyişiyle boy ineçleyişinin eşdeğer olduğunu söylemek de, en azından gerçel büyüklükler üzerinde, olanaklıdır.

İneçleyiş için (6.60)'ın sağ yanının, ayrı ayrı, $\overline{C}_1$ ve $\overline{C}_2$'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}(\overline{u}_1,\overline{u}_1)\overline{C}_1+(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\overline{C}_2+\left(\overline{u}_1,\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right)&=0\\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2)\overline{C}_1+(\overline{u}_2,\overline{u}_2)\overline{C}_2+\left(\overline{u}_2,\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right)&=0\end{aligned}\qquad (6.63)$$

Bunu daha yalınlaştırmak için aşağıdaki eşitliklerle verilen tanımlar yazılabilir.

$$\overline{\mathbf{u}}(x)\equiv\begin{bmatrix}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Upsilon}\equiv\begin{bmatrix}\left(\overline{u}_1,\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right)\\ \left(\overline{u}_2,\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right)\end{bmatrix},\quad \overline{\mathbf{C}}\equiv\begin{bmatrix}\overline{C}_1\\ \overline{C}_2\end{bmatrix},\quad \mathbf{U}\equiv\left(\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}}^T\right)\qquad (6.64)$$

Bunları kullanarak (6.63) aşağıdaki tıkız biçimde yeniden yazılabilir.

$$\mathbf{U}\overline{\mathbf{C}}+\boldsymbol{\Upsilon}=\mathbf{0}\qquad (6.65)$$

Burada, $\overline{u}_1(x)$ ve $\overline{u}_2(x)$ doğrucul bağımsız (ing: linearly independent) iki işlevdir. **U** dizeyi ise aslında, birim işleç olan $\widehat{I}$'nın, bu iki işlevden oluşan taban küme'si üzerinde dizey gösterilimidir ve $\widehat{I}$ işlecinde tekillik söz konusu olmadığından tekilliği yoktur. Öteki deyişle, **U** evirtilebilir bir dizeydir. Bu nedenle, (6.65)'in eşsiz bir çözümü vardır ve aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\overline{\mathbf{C}} = -\mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} \tag{6.66}$$

Burada, (6.61)'i aşağıdaki tıkız biçimde yazmakta yarar bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} \left\|\widehat{L}_{bs}g\right\|^2 &= \overline{\mathbf{C}}^T\mathbf{U}\overline{\mathbf{C}} + 2\boldsymbol{\Upsilon}^T\overline{\mathbf{C}} + \left\|\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right\|^2 = \boldsymbol{\Upsilon}^T\mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - 2\boldsymbol{\Upsilon}^T\mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} + \left\|\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right\|^2 \\ &= \left\|\widehat{\overline{L}}_{bs}g\right\|^2 - \boldsymbol{\Upsilon}^T\mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} \end{aligned} \tag{6.67}$$

Bu eşitliğin sağ yanının artı oluşu gerekmektedir ve özenli bir inceleyişle bu artılık, ya da daha doğrusu, eksisizlik kanıtlanabilir. Bu yolda Sylvester'in dizeylerle ilgili özdeşliklerden yararlanılabilir. Ancak, burada bu olgunun ayrıntılarına girmeyeceğiz. Buna karşın, yukarıdaki uzbilimcil yapıların sonsuz derece ereyindeki davranışlarına odaklanarak daha yalın anlatımlarla davranışları incelemek yolunu yeğleyeceğiz.

(6.20) ve (6.62)'den, sonsuz derece ereyinde, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\overline{u}_1(x)\big|_{n\to\infty} = \cos(x), \qquad \overline{u}_2(x)\big|_{n\to\infty} = \sin(x) \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned} (u_1,u_1)_{n\to\infty} &= \int_{\widetilde{x}}^{\widetilde{x}+b} dx\cos(x)^2 = \int_{\widetilde{x}}^{\widetilde{x}+b} dx\frac{1+\cos(2x)}{2} \\ &= \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2\widetilde{x}+2b)-\sin(2\widetilde{x})}{2} \end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned} (u_2,u_2)_{n\to\infty} &= \int_{\widetilde{x}}^{\widetilde{x}+b} dx\sin(x)^2 = \int_{\widetilde{x}}^{\widetilde{x}+b} dx\frac{1-\cos(2x)}{2} \\ &= \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2\widetilde{x}+2b)-\sin(2\widetilde{x})}{2} \end{aligned} \tag{6.70}$$

$$(u_1,u_2)_{n\to\infty} = \frac{1}{2}\int_{\widetilde{x}}^{\widetilde{x}+b} dx\sin(2x) = \frac{\cos(2\widetilde{x})-\cos(2\widetilde{x}+2b)}{4} \tag{6.71}$$

İççarpımdaki bakışımdan dolayı, $(u_2,u_1)_{n\to\infty}$'nin değeri de (6.71)'de verilenle eşdeğerdir.

Bu eşitlikleri kullanarak **U** dizeyi için aşağıdaki yanaşım eşitliklerini yazabilmek olanaklıdır.

$$Tr(\mathbf{U})_{n\to\infty} = b \tag{6.72}$$

$$\det(\mathbf{U})_{n\to\infty} = \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4}\sin(b)^2 \tag{6.73}$$

$$\lambda_1(\mathbf{U})_{n\to\infty} = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sin(b), \qquad \lambda_2(\mathbf{U})_{n\to\infty} = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sin(b) \tag{6.74}$$

Burada, λ simgesi ile özdeğer gösterilmektedir. Son eşitlikler aşağıdaki eşitliklerin yazımına olanak sağlar.

$$\mathbf{U}_{\substack{n\to\infty\\ b=\pi}} = \frac{\pi}{2}\mathbf{I}, \qquad \mathbf{U}^{-1}_{\substack{n\to\infty\\ b=\pi}} = \frac{2}{\pi}\mathbf{I} \tag{6.75}$$

Son eşitlik, aslında, b'nin sinüs işlevinin herhangi bir kök oluşu için de geçerlidir. Ama $b=\pi$ alındığında aralık $[\widetilde{x}, \widetilde{x}+\pi]$ olur ve onun içindeki değerler için sinüs işlevi hep artı kalır. Bu durum, sonsuz derece ereyinde, b'nin π alınışının yerinde olacağını göstermektedir. n sonlu ama yeterince büyük kaldıkça da, b'nin bu değere yakın alınabileceği anlamına gelir.

Biraz daha ilerleyebilmek için, önce, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\overline{g}(x) \equiv \widehat{\overline{L}}_{bs}g(x), \qquad \mathbf{\Upsilon} \equiv (\overline{\mathbf{u}}, \overline{g}) \tag{6.76}$$

Bunların kullanımıyla, (6.67) sonsuz derece ereyinde aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\left\|\widehat{L}_{bs}g\right\|^2 = \|\overline{g}\|^2 - \frac{2}{\pi}\mathbf{\Upsilon}^T\mathbf{\Upsilon} = \|\overline{g}\|^2 - \frac{2}{\pi}\left(\overline{g}, \widehat{\Lambda}\overline{g}\right) \tag{6.77}$$

Burada, $\overline{g}$, $[\widetilde{x}, \widetilde{x}+b]$ aralığı üzerinde dördülü tümlevlenebilen herhangi bir işlevle de değiştirilebilmek üzere, aşağıdaki tanım eşitliği geçerlidir.

$$\widehat{\Lambda}\overline{g}(x) \equiv \int_{\widetilde{x}}^{\widehat{x}+b} dy\cos(x-y)\overline{g}(y) \tag{6.78}$$

Bunun yanısıra, $\widehat{I}$ birim işleci göstermek üzere (6.77) yeniden aşağıdaki biçemde yazılabilir.

$$\left\|\widehat{L}_{bs}g\right\|^2 = \left(\overline{g}, \left[\widehat{I} - \frac{2}{\pi}\widehat{\Lambda}\right]\overline{g}\right) \tag{6.79}$$

Bu eşitliği, aşağıdaki yapıda yeniden biçemlendirebiliriz.

$$\left\|\widehat{L}_{bs}g\right\|^2 = \frac{\left(\overline{g}, \left[\widehat{I} - \frac{2}{\pi}\widehat{\Lambda}\right]\overline{g}\right)}{(\overline{g}, \overline{g})} \frac{\left(\widehat{\overline{L}}_{bs}g, \widehat{\overline{L}}_{bs}g\right)}{(g,g)}(g,g) \tag{6.80}$$

Burada, sağ yanda, (g,g)'ın solunda iki Rayleigh oranı çarpan bulunmaktadır. Bu Rayleigh oranlarının çekirdek işleçleri için işleç boyları aşağıdaki eşitsizliklerle tanımlanabilir (aslında, ilk eşitlikte çekirdek işleci dördül değildir. Ama oradaki çekirdek işleci hem bakışık hem de artı tanımlı olduğundan, çekirdek işlevini özünün dördülkökünün dördülü olarak düşünmek durumunda kalınmıştır).

$$\left\| \left[\widehat{I} - \frac{2}{\pi} \widehat{\Lambda} \right]^{\frac{1}{2}} \right\|^2 \equiv \max_{h(x)} \frac{\left(h, \left[\widehat{I} - \frac{2}{\pi} \widehat{\Lambda} \right] h \right)}{(h,h)} \tag{6.81}$$

$$\left\| \widehat{\overline{L}}_{bs} \right\|^2 \equiv \max_{h(x)} \frac{\left(h, \widehat{\overline{L}}_{bs}^{\dagger} \widehat{\overline{L}}_{bs} h \right)}{(h,h)} \tag{6.82}$$

Burada, kama (†) simgesi eşlik (ing: adjointness, Hermiticity) betimleyişi için kullanılmaktadır.

Son üç eşitliğin bağdaştırımından aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\left\| \widehat{L}_{bs} \right\| = \left\| \left[\widehat{I} - \frac{2}{\pi} \widehat{\Lambda} \right]^{\frac{1}{2}} \right\| \left\| \widehat{\overline{L}}_{bs} \right\| \tag{6.83}$$

Böylelikle iki işlecin boylarından bağıl saptırım işlecinin boyunun belirlenebileceği ortaya çıkmaktadır. Burada daha çok ayrıntıya girmeyeceğiz.

Bu bölümde, saptırım açılımında, bağdaşıklık eniyileyişine odaklandık ve bağdaşık çözüm katsayılarını, bağıl saptırım işlecinin boyunu ineçleyiş yoluna saptık. Eniyileyiş çözümlerini, örtük yapıda elde edebildiysek de; sonsuz derece ereyinde daha yalın anlatımlar elde edip onlardan, n'in özelsiz değerlerinde durum ile ilgili çıkarımlarda bulunduk. Buradan üretilen vargı (sonuç) "eniyileyiş sonunda, saptırım açılım anlatımlarından her birinin bir bağıl saptırım işlecinin üslüleri altında görüntü durumuna geldikleri ve işlecin doğrucul bir tümlev işleci olduğunun kanıtlanabildiği" burada yeniden vurgulanışı gereken bir olgudur. Üstelik bu olgu, aslında, n ne olursa olsun, geçerlidir.

Bu anlatılanlar bağlamında, bu bölüm de özgün bir içerik ve sunum gündeme getirilmiştir. Yine de, bu yol savın belkemiğini oluşturmamaktadır. Bunun nedeni, sav danışmanınca gerçekleştirilen çok daha ileri düzeyde araştırımların, yaklaşımda tıkanışa neden olmasa da, buradaki yaklaşımın bu an için salt işlev yaklaştırımında iyileştirime neden olduğu ama kök buluş için yeterince etkinliğin sağlanımının çok daha uzun soluklu çaba gerektireceğini gösterişidir. Bu nedenle, daha değişik yöntem arayış çabalarına girişilmiş olup gelecek bölümde ayrıntılandıracaklardır.

7. ÇİFT HERMİTE ÇOKTERİMLİLERİNİN ÜÇGENCİL İŞLEVLİ MACLAURIN AÇILIMLARI

Aşağıdaki sıradan türevli denkleme yeniden odaklanalım:

$$\chi_c''(x) - \frac{x}{2n}\chi_c'(x) + \chi_c(x) = 0 \tag{7.1}$$

Burada salt c altsimgeli işlevler, öteki deyişle, çift dereceli Hermite çokterimlileri, gözönüne alınmaktadır. s altsimgeli, öteki deyişle, tek dereceli Hermite çokterimlilerine odaklanılmamaktadır ve odaklanılmayacaktır. Bunun nedeni, tek ve çift dereceli durumların birbirinin neredeyse özdeşi oluşundandır. Burada, c simgeliler için gerçekleştirilen her şey s simgeliler için de, deyim yerindeyse, dişe dokunur, neredeyse, hiçbir değişiklik yapmaksızın, gerçekleştirilebilir. Kavramcıl açıdan, neredeyse bütünüyle, eşdeğerlilik söz konusudur.

Önceki bölümlerde, özellikle saptırım açılım odaklı olanlarda, aslında hem kosinüs hem de sinüs işlevlerinin, x'in üslüleri olarak yazılabilen, toplamdizi yapılı, işlevlerle çarpımlarının Hermite çokterimlilerini yansıtabileceği gözlenmişti. Bu gözlem bilinmeyen işlev yerine aşağıdaki eşitlikle verilen uzbilimcil yapıda bir öngörüme götürür.

$$\chi_c(x) \equiv \cos(x)\varphi_c(x) + \sin(x)\varphi_s(x) \tag{7.2}$$

Burada, $\varphi_c(x)$ ve $\varphi_s(x)$ x'in doğalsayı üslüleri türünden birer toplamdizi olarak, sırasıyla, çift ve tek işlevlerdir. (7.2)'nin (7.1)'de kullanımı aşağıdaki denkleme götürür.

$$\begin{aligned}&\cos(x)\left[\varphi_c''(x) + 2\varphi_s'(x) - \frac{x}{2n}\varphi_c' - \frac{x}{2n}\varphi_s(x)\right]\\ &+\sin(x)\left[\varphi_s''(x) - 2\varphi_c'(x) - \frac{x}{2n}\varphi_s' + \frac{x}{2n}\varphi_c(x)\right] = 0\end{aligned} \tag{7.3}$$

Bu denklemde, $\varphi_c(x)$ ve $\varphi_s(x)$ ile simgelenen, iki bilinmeyen işlev bulunmaktadır. Oysa ki, (7.1)'de salt bir bilinmeyen $\chi_c(x)$ bulunduğundan, iki bilinmeyen için iki denkleme gereksinim bulunmaktadır. Bir bakışta edinilen izlenim, sinüs ve kosinüs işlevlerinin çarptığı anlatımların ayrı ayrı sıfıra eşitlenimine götürür. Öteki bir deyişle, sinüs ve kosinüs işlevcil yapılarının, bir anlamda, ayrıştırımı istenir. Böylece, aşağıdaki iki ayrı sıradan türevli denklem yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
\varphi_c''(x) + 2\varphi_s'(x) - \frac{x}{2n}\varphi_c'(x) - \frac{x}{2n}\varphi_s(x) = 0 \\
\varphi_s''(x) - 2\varphi_c'(x) - \frac{x}{2n}\varphi_s'(x) + \frac{x}{2n}\varphi_c(x) = 0
\end{aligned}
\qquad (7.4)
$$

Yukarıda da belirtildiği gibi, $\chi_{2n}(x)$'in bir çift işlev oluşunun gerekliliği, $\varphi_c(x)$ ve $\varphi_s(x)$'nin, sırasıyla, birer çift ve tek işlev oluşlarını gerektirir. Böylece, aşağıdaki toplamdizi açılımları öngörülebilir.

$$
\varphi_c(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{c,j} x^{2j}, \qquad \varphi_s(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{s,j} x^{2j+1} \qquad (7.5)
$$

Bu toplamdiziler (7.4)'deki sıradan türevli denklemlerde ilgili oldukları büyüklükler yerine yerleştirilir ve ele geçen sonsuz toplamlarda, toplananların tümünün, ilk denklem için x^{2j} ile, ikinci denklem için x^{2j+1} ile orantılı olacak biçimde toplamlarda kaydırışlar sağlanacak olursa ve sonra bu üslülerin katsayıları sıfıra eşitlenirse, aşağıdaki özyineli denklemler elde edilir.

$$
\begin{aligned}
(2j+2)(2j+1)\varphi_{c,j+1} + 2(2j+1)\varphi_{s,j} - \frac{j}{n}\varphi_{c,j} - \frac{1}{2n}\varphi_{s,j-1} = 0, \\
(2j+3)(2j+2)\varphi_{s,j+1} - 4(j+1)\varphi_{c,j+1} - \frac{2j+1}{2n}\varphi_{s,j} + \frac{1}{2n}\varphi_{c,j} = 0
\end{aligned}
\qquad (7.6)
$$

Bu denklemlerde, eksi altsırasayılı katsayıların özdeş olarak sıfır alınacağı uylaşımı kullanılmaktadır.

Eğer,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi}_j \equiv \begin{bmatrix} \varphi_{c,j} \\ \varphi_{s,j} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{1,j} \equiv \begin{bmatrix} (2j+2)(2j+1) & 0 \\ -4(j+1) & (2j+3)(2j+2) \end{bmatrix}, \\
&\mathbf{A}_{2,j} \equiv \begin{bmatrix} -\frac{j}{n} & 2(2j+1) \\ \frac{1}{2n} & -\frac{2j+1}{2n} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{3,j} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (7.7)
$$

yöney ve dizey tanımları yapılırsa, (7.6) yerine aşağıdaki özyineli yöney denklem yazılabilir.

$$
\mathbf{A}_{1,j}\boldsymbol{\varphi}_{j+1} + \mathbf{A}_{2,j}\boldsymbol{\varphi}_j + \mathbf{A}_{3,j}\boldsymbol{\varphi}_{j-1} = \mathbf{0}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7.8)
$$

Bu denklemde de eksi altsırasayılı yöney, uylaşım gereği, yoksayılmakta olup $1/2n$ bağımlılığı belirtik olarak gösterilmemekte; katsayı dizeyleri içine gömülmektedir.

(7.7)'dan ayırdına varılabileceği gibi, $\mathbf{A}_1$ dizeyi, j doğalsayılardan değer aldığı sürece, evirtilebilirdir. Bu yüzden, (7.8)'in her iki yanı, soldan, $\mathbf{A}_1$'in evriğiyle çarpılırsa ele geçecek denklem aşağıdaki eşitlikle verilebilir.

$$\boldsymbol{\varphi}_{j+1} + \mathbf{A}_{4,j}\boldsymbol{\varphi}_j + \mathbf{A}_{5,j}\boldsymbol{\varphi}_{j-1} = \mathbf{0}, \qquad j = 0,1,2,... \tag{7.9}$$

Burada aşağıdaki tanım eşitlikleri geçerlidir.

$$\nu \equiv \frac{1}{4n}, \qquad \mathbf{A}_{4,j} = \begin{bmatrix} -\frac{4\nu j}{(2j+1)(2j+2)} & \frac{4j+2}{(2j+1)(2j+2)} \\ -\frac{(4j-2)\nu}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)} & \frac{4-2\nu(2j+1)}{(2j+2)(2j+3)} \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

$$\mathbf{A}_{5,j} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2\nu}{(2j+1)(2j+2)} \\ 0 & -\frac{4\nu}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)} \end{bmatrix}, \qquad j = 0,1,2,... \tag{7.11}$$

(7.9) üç toplamcıl anlatımlı bir özyineli yöney denklemdir. Oysa ki, iki toplamcıl anlatımlı bir yapısı olsaydı, kesin çözümü bulunabilirdi. Öte yandan, bu denklem, iki öğeli yöneyler üzerinde tanımlı olsa da, iki yerine dört öğeli yöneyler üzerindeki bir özyineleyişe de dönüştürülebilir. Ama, bu yapıldığında yakınsayış bölgesinin, oluşu gerekenden daha küçük olarak elde edilebileceği de bilinen bir olgudur. Bu yüzden, bu yola sapmayacağız, onun yerine yanaşım durumuna odaklanacağız. Ancak, bu yanaşım durumu yöneycil düzeyde de, buradaki yapının elverişi nedeniyle, sayılcıl düzeyde de gerçekleştirilebilir. Bu doğrultuda yola çıkmak için, (7.9)'un, iki ayrışık sayıl denklem yapısındaki aşağıdaki denklemlerle, yeniden yazılışına yönelmekte yarar bulunmaktadır.

$$\varphi_{c,j+1} - \frac{4\nu j}{(2j+1)(2j+2)}\varphi_{c,j} + \frac{1}{(j+1)}\varphi_{s,j} - \frac{2\nu}{(2j+1)(2j+2)}\varphi_{s,j-1} = 0,$$
$$j = 0,1,2,... \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{s,j+1} \quad - \quad & \frac{2\nu(2j-1)}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)}\varphi_{c,j} + \frac{[2-\nu(2j+1)]}{(j+1)(2j+3)}\varphi_{s,j} \\ & -\frac{4\nu}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)}\varphi_{s,j-1} = 0, \qquad j = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{7.13}$$

Bunlardan (7.12)'de kosinüs katsayılarından $\varphi_{c,j}$ salt bir kez ve yalın olarak bulunmaktadır. Dolayısıyla, $\varphi_{c,j}$'nin denklemde görünen öteki bilinmeyenler olan $\varphi_{s,j+1}$, $\varphi_{s,j}$, $\varphi_{s,j-1}$ türünden belirlenebilişi olanaklıdır. Bu eylem gerçekleştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \varphi_{c,j} \quad = \quad & \frac{(2j+1)(2j+2)(2j+3)}{2\nu(2j-1)}\varphi_{s,j+1} + \frac{(2j+1)[2-\nu(2j+1)]}{\nu(2j-1)}\varphi_{s,j} \\ & -\frac{2}{2j-1}\varphi_{s,j-1}, \qquad j = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{7.14}$$

Bu eşitliğin (7.9)'un sağ yanında, $\varphi_{c,j}$ yerine karşılığını yerleştirmek amacıyla kullanımı sonrasında ele geçecek denklem $\varphi_{s,j+1}$ yalın gözükecek biçemde yazılırsa aşağıdaki sayıl özyineleyişin yazımına olanak sağlar.

$$\varphi_{s,j+2}+\kappa_{1,j}(\nu)\varphi_{s,j+1}+\kappa_{2,j}(\nu)\varphi_{s,j}+\kappa_{3,j}(\nu)\varphi_{s,j-1}=0, \qquad j=0,1,2,... \quad (7.15)$$

Burada, aşağıdaki, ν bağımlılığının simgelerde de vurgulandığı, tanımlar geçerlidir.

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,j}(\nu) &\equiv \frac{(4j-2)-\nu(8j^2+6j-3)}{(2j-1)(j+2)(2j+5)},\\
\kappa_{2,j}(\nu) &\equiv \frac{\nu(1-6j-8j^2)+\nu^2(8j^3+8j^2+2j)}{(2j-1)(j+1)(j+2)(2j+3)(2j+5)},\\
\kappa_{3,j}(\nu) &\equiv \frac{\nu^2(2j+1)}{(2j-1)(j+1)(j+2)(2j+3)(2j+5)}, \qquad j=0,1,2,... \quad (7.16)
\end{aligned}$$

(7.15)'teki denklem, dört toplamcıl anlatımlı, üçüncü kerteden bir özyineleyiştir, ama bir yandan da, değişken katsayılıdır. Bu nedenle, kesin çözümü pek yalın bir biçimde anlatılamaz. Buna karşın, bundan, bir bilinmeyen dönüşümüyle, $j\to\infty$ ereyinde yanaşacağı, değişmez katsayılı özyineleyiş üretilebilir. Bu bağlamda, α artı değerli bir değişmez olmak üzere,

$$\varphi_{s,j}=\frac{1}{(\alpha)_j}\widetilde{\varphi}_{s,j}=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(j+\alpha)}\widetilde{\varphi}_{s,j}, \qquad j=0,1,2,... \quad (7.17)$$

bilinmeyen dönüşümüne gidilebilir. Bu yapılır ve (7.15)'de kullanıldıktan sonra ele geçen denklem, $\widetilde{\varphi}_{s,j+1}$'in yalın olarak görüneceği, biçemde düzenlenirse aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\widetilde{\varphi}_{s,j+2}+\widetilde{\kappa}_{1,j}(\nu)\widetilde{\varphi}_{s,j+1}+\widetilde{\kappa}_{2,j}(\nu)\widetilde{\varphi}_{s,j}+\widetilde{\kappa}_{3,j}(\nu)\widetilde{\varphi}_{s,j-1}=0, \quad j=0,1,2,... \quad (7.18)$$

Buradaki $\widetilde{\kappa}$ katsayıları (7.16)'dan üretilebilecek büyüklükler olup belirtik yapıları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\kappa}_{1,j}(\nu) &\equiv \frac{(j+\alpha+1)\left[(4j-2)-\nu(8j^2+6j-3)\right]}{(2j-1)(j+2)(2j+5)},\\
\widetilde{\kappa}_{2,j}(\nu) &\equiv \frac{(j+\alpha+1)(j+\alpha)\left[\nu(1-6j-8j^2)+\nu^2(8j^3+8j^2+2j)\right]}{(2j-1)(j+1)(j+2)(2j+3)(2j+5)},\\
\widetilde{\kappa}_{3,j}(\nu) &\equiv \frac{\nu^2(j+\alpha+1)(j+\alpha)(j+\alpha-1)(2j+1)}{(2j-1)(j+1)(j+2)(2j+3)(2j+5)}, \qquad j=0,1,2,... \quad (7.19)
\end{aligned}$$

(7.18) özyineleyişi iki yöneyin iç çarpımı olarak da düşünülebilir. Bu bağlamda,(7.18) yerine aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}
&\left[1\ \ \widetilde{\kappa}_{1,j}(\nu)\ \ \widetilde{\kappa}_{2,j}(\nu)\ \ \widetilde{\kappa}_{3,j}(\nu)\right]^T\left[\widetilde{\varphi}_{s,j+2}\ \ \widetilde{\varphi}_{s,j+1}\ \ \widetilde{\varphi}_{s,j}\ \ \widetilde{\varphi}_{s,j-1}\right]\equiv\\
&\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_j^T(\nu)\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{s,j}(\nu)=0, \qquad j=0,1,2,... \quad (7.20)
\end{aligned}$$

Buradan, aşağıdaki yöney yanaşım eşitliği yazılabilir.

$$\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\infty}(\nu)=\begin{bmatrix}1\\-2\nu\\\nu^2\\0\end{bmatrix},\qquad j=0,1,2,...,,\qquad \nu\neq 0 \tag{7.21}$$

Buradan ve (7.20)'ten

$$\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\infty}(\nu)^T\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{s,\infty}(\nu)=\widetilde{\varphi}_{s,j+2}-2\nu\widetilde{\varphi}_{s,j+1}+\nu^2\widetilde{\varphi}_{s,j}=0,\qquad j\rightarrow\infty,\qquad \nu\neq 0 \tag{7.22}$$

eşitliğine ulaşılabilir. Bu özyineleyiş ikinci kerteden ve değişmez katsayılı doğrucul bir yapıdadır. Bilinen yöntemleri taban alarak, bunun iki doğrucul bağımsız çözümünden birisinin

$$\widetilde{\varphi}_{s,j}\Big|_{j\rightarrow\infty}\approx\widetilde{\varphi}_{s,N}\nu^{(j-N)},\qquad N\gg 1 \tag{7.23}$$

olacağı neredeyse ilk bakışta görülebilir. Bununla birlikte üssü alınan ν bu özyineleyişin belirtken cebircil (ing: characteristic algebraic) iki katlı köküdür. Bu iki katlılık da gözönüne alındığında, (7.22) yerine çok daha doğru olan aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\widetilde{\varphi}_{s,j}\Big|_{j\rightarrow\infty}\approx\nu^{j-N}\left[\widetilde{\varphi}_{s,N}+\left(\widetilde{\varphi}_{s,N+1}-\nu\widetilde{\varphi}_{s,N}\right)(j-N)\right],\qquad N\gg 1 \tag{7.24}$$

(7.24), j'den bağımsız ama N ile simgelenen ve çok büyük bütünsayı değeri olan bir büyüklüğe bağlı olan iki belirsiz değişmezi, $\widetilde{\varphi}_{s,N}$ ile $\widetilde{\varphi}_{s,N+1}$'i içermektedir. Ama bunların varlığı yanaşım açısından sorun yaratmaz. Bunun nedeni de, $\widetilde{\varphi}_{s,j}$'nin $j\rightarrow\infty$ için davranışını belirleyenin, aslında, ν^{j-N} oluşudur. Eğer ν, gerçel değer olarak, 1'e eşit ya da büyükse üstel büyüyüşün 1'den küçükse üstel küçülüşün oluşudur. Bu nedenle, bir de, andıran biçimde, ölçeklenmemiş büyüklük olan $\varphi_{s,j}$'nin, bu üstel değişimden öte, bir de bir gama işlevine bağımlı olarak üstelden çok daha tez azalışın gündemde oluşudur.

(7.18)'deki özyineleyişin, $\nu\neq 0$ ve $j\rightarrow\infty$ için, (7.22)'deki özyineleyiş dönüşümü değişmez katsayılılık getirirken, aslında bir yandan da, kerte düşüşüne neden olur. (7.18)'de bilinmeyenin en yüksek altsırasayı değeri $(j+2)$ iken en küçük altsırasayı değeri de $(j-1)$'dir. Bu yüzden özyineleyiş kertesi $(j+2)-(j-1)=3$ değerindedir. Oysa ki, (7.22)'de bu değer $(j+2)-j=2$ olduğundan kerte azalışı söz konusudur. Kerte azalışı özyineleyişin doğrucul bağımsız çözümlerinin sayısının da azalışı demektir. Burada azalış 1'dir. Öteki bir deyişle, (7.22)'de yanaşığı belirlenemeyen bir üçüncü çözüm söz konusudur. Bunun 0'dan değişik olarak belirlenemeyip apaçık çözüm gibi algılanış nedeni, aslında, $j \to \infty$ için öteki iki çözüme göre çok daha tez sıfıra yanaşan bir çözüm oluşudur. Bunu belirleyebilmek için öteki çözümlerin de sıfıra daha tez gittiği duruma odaklanımda yarar bulunmaktadır. Böylece, (7.18)'e geri dönüp onun $\nu = 0$ için durumuna bakmak yoluna gideceğiz. Böyle yapılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\widetilde{\varphi}_{s,j+2} + \widetilde{\kappa}_{1,j}(0)\widetilde{\varphi}_{s,j+1} + \widetilde{\kappa}_{2,j}(0)\widetilde{\varphi}_{s,j} + \widetilde{\kappa}_{3,j}(0)\widetilde{\varphi}_{s,j-1} = 0, \qquad j = 0,1,2,... \tag{7.25}$$

Burada, $\widetilde{\kappa}_{i,j}(0)$, $(i = 1,2,3)$ değerlerinin belirtik yapıları kullanılırsa ve ulaşılan özyineleyişte j yerine $(j-1)$ yerleştirilirse, aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\widetilde{\varphi}_{s,j+1} + \frac{2(j+\alpha)}{(j+1)(j+4)}\widetilde{\varphi}_{s,j} = 0, \qquad j = 0,1,2,... \tag{7.26}$$

Bu özyineleyişin kesin çözümünü belirlemek olanaklıdır. Ara aşamalar sunulmaksızın sonuç aşağıda verilmektedir.

$$\widetilde{\varphi}_{s,j} = \frac{(-2)^j\Gamma(j+\alpha)3!}{\Gamma(\alpha)j!(j+3)!}\widetilde{\varphi}_{s,0}, \qquad j = 0,1,2,... \tag{7.27}$$

Bu bölümdeki çözümleyişlerde $\varphi_{s,j}$'lerin özyineleyişinden üç belirsiz katsayı ortaya çıkmaktadır. Onların nasıl belirleneceği ve değerlerinin neler olduğu eşsizlik açısından önemlidir.

Bu bölümdeki bağıntılandırımlar, kâğıt üzerinde gerçekleştirilmiş olmakla birlikte bir MuPAD betiğiyle de, doğrulayış amaçlı olarak, ayrıca üretilmişlerdir. Betik, Ek A'da verilmektedir.

Buraya dek gerçekleştirilen inceleyişler yanaşım çözümleyişi bağlamında ve en baskın (başat) katkılar içindir. Aslında, başat ya da baskın yapıların saptırımsızlık olarak alınacağı bir saptırım açılımı da gerçekleştirilebilir ve yanaşıklıkta daha geri baskınlıkta olan katkılar belirlenebilir. Sonuçta, yanaşık yakınsak (ing: asymptotically convergent) açılımlar da üretilebilir. Ancak, bu eylem, bu an için, birincil derecede önemli olarak düşünülmemektedir.

Bu savdaki baskın yanaşım ve ardından saptırım açılım çözümleyişleri (7.5)'te belirtik olarak yazılan üslü toplamdizilerin, sonlu bağımsız değişken değerleri için, yakın sayacağını göstermektedir. Bu yüzden de, artık, bu toplamdizilerin katsayılarını (7.15) ve (7.14) özyineleyişleri üzerinden belirleyiş çabalarına girişebiliriz. (7.14)'ün verdiği izlenime göre, $\varphi_{c,j}$'nin belirlenişi için salt $\varphi_{s,j}$'lerin belirlenişi gerekmektedir. Bu yüzden, öncelikle, (7.15)'in çözülüşü büyük önem kazanmaktadır. (7.15), üçüncü kerteden, doğrucul, ama değişken katsayılı bir özyineleyiştir ve çözümünün bilgisayım ortamlarında belirlenişinde, uzbilimcil açıdan, pek de bir sorun görünmez durumdadır. (7.15)'in eşsiz çözümünü belirleyebilmek için onda görünen en küçük altsırasayılı bilinmeyenlerin değerlerinin verileceği öngörümlerde bulunmak gerekir. Olayın uzbilimcil yapısı bunu gerektirmektedir. Öngörümler, $\varphi_{s,-1}$, $\varphi_{s,0}$, $\varphi_{s,1}$ katsayılarına koşullandırım getirmelidir. $\varphi_{s,-1}$'in, uylaşım gereği, sıfır olarak alınışı aslında bu öngörümlerden birisidir. Öteki iki öngörüm, $\varphi_{s,0}$, $\varphi_{s,1}$ üzerinde koşullandırımlar getirmelidir. Bunlardan birisi $\varphi_{c,0}$'ın alışının gerekliliği düşünülen değerle ilgilidir. (7.2)'deki $\chi_c(x)$ işlevinin $x = 0$'da alacağı değer ilgili sıradan türevli denklemden gelen bir olgu değildir. O, aslında, bir anlamda, bir başlangıç değer öngörümüdür. Burada, yalınlık açısından, bu değerin 1 oluşunu öngöreceğiz. Böylece,

$$\varphi_{c,0} = 1 \tag{7.28}$$

yazacağız. Öte yandan, (7.14)'de $j = 0$ yerleştirilir ve $\varphi_{s,-1} = 0$ öngörümü uygulanırsa, (7.28)'de gözönüne alınarak, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\frac{3}{\nu}\varphi_{s,1}(\nu) + \frac{2-\nu}{\nu}\varphi_{s,0}(\nu) = 1 \tag{7.29}$$

Buradan, $\varphi_{s,1}(\nu)$, $\varphi_{s,0}(\nu)$ türünden, aşağıdaki eşitlikle verildiği gibi belirlenebilir.

$$\varphi_{s,1}(\nu) = \frac{\nu}{3} + \frac{\nu-2}{3}\varphi_{s,0}(\nu) \tag{7.30}$$

Burada, $\varphi_{s,1}(\nu)$, $\varphi_{s,0}(\nu)$ yazılarak, bu büyüklüklerin, özelsizlikten herhangi bir yitim olmaksızın, ν'ya bağımlı olabileceği de gözönüne alınmaktadır. $\nu \to \infty$ için $\chi_c(x)$'in köklerinin kosinüsün köklerine gidiyor oluşu, bu ereyde, sinüsten gelen katkıların sıfıra gidişinin gerekliliğini ortaya koyar. Bu ise, $\nu \to \infty$ için, tüm $\varphi_{s,j}(\nu)$ katsayılarının sıfıra gidişinin gerekliliği anlamına gelir. Bu durum, ancak $\varphi_{s,0}(0)$'ın 0 oluşuyla sağlanabilir. Bunun dışında, $\varphi_{s,0}(\nu)$'nun nasıl bir yapıda olacağı için elimizde bulunan olgularla somut bir yargıda bulunmak olanaklı değildir. Böylece,

$$\varphi_{s,0}(\nu) \equiv \nu \tag{7.31}$$

ve bunun (7.29)'te kullanımıyla da,

$$\varphi_{s,1}(\nu) = \frac{\nu}{3} + \frac{\nu(\nu-2)}{3} = \frac{\nu(\nu-1)}{3} \tag{7.32}$$

vargılarına ulaşılabilir. Bunların ve $\varphi_{s,-1} = 0$ öngörümünün (7.15)'te kullanımı, aşağıdaki eşsiz çözümlü özyineleyişe götürür.

$$\begin{aligned} \varphi_{s,j+2} + \kappa_{1,j}(\nu)\varphi_{s,j+1} + \kappa_{2,j}(\nu)\varphi_{s,j} + \kappa_{3,j}(\nu)\varphi_{s,j-1} = 0, \\ \varphi_{s,-1} = 0, \ \ \varphi_{s,0} = \nu, \ \ \varphi_{s,1} = \frac{\nu(\nu-3)}{3}, \ \ j = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{7.33}$$

Bu özyineleyişi ve eşlik eden başlangıç koşullarını bir betikte buyruklar dizisi durumuna getirip buyruğu koşturarak ilgili katsayıları belirlemek ve işlemlerin gerçekten doğru olarak gerçekleştirildiğini denetlemek olanaklıdır. Böyle bir MuPAD betiği oluşturulmuş olup aşağıda LaTeX'in `Verbatim` çevresi içinde verilmektedir (Bu betik, öteki betiklerden çok daha önemli olarak düşünüldüğünden, herhangi bir ekte değil, burada, anlatım içinde verilmektedir).

7.1 betik01d.mpd

```
n:=6; nu:=1/(4*n);
kapskat1:=j->((4*j-2)-nu*(8*j^2+6*j-3))/((2*j-1)*(j+2)*(2*j
               +5));
kapskat1(j);
kapskat2:=j->(nu*(1-6*j-8*j^2)+nu^2*(8*j^3+8*j^2+2*j))/((2*j
              -1)*(j+1)*(j+2)*(2*j+3)*(2*j+5));
kapskat2(j);
kapskat3:=j->(nu^2*(2*j+1))/((2*j-1)*(j+1)*(j+2)*(2*j+3)*(2*
              j+5));
kapskat3(j);
varphis[-1]:=0;varphis[0]:=nu;varphis[1]:=nu^2/3-nu;
print(Unquoted,"varphis[".expr2text(-1)."]=".expr2text(varphis
      [-1]));
print(Unquoted,"varphis[".expr2text(0)."]=".expr2text(varphis
      [0]));
print(Unquoted,"varphis[".expr2text(1)."]=".expr2text(varphis
      [1]));
for j from 0 to n+5 do
  varphis[j+2]:=expand(-kapskat1(j)*varphis[j+1]-kapskat2(j)*
                       varphis[j]-kapskat3(j)*varphis[j-1]):
  print(Unquoted,"varphis[".expr2text(j+2)."]=".expr2text(
        varphis[j+2])):
end_for:
kapckat1:=j->((2*j+1)*(2*j+2)*(2*j+3))/(2*nu*(2*j-1));
kapckat1(jj);
kapckat2:=j->((2*j+1)*(2-nu*(2*j+1)))/(nu*(2*j-1));
kapckat2(jj);
kapckat3:=j->-2/(2*j-1);
for j from 0 to n+7 do
  varphic[j]:=expand(kapckat1(j)*varphis[j+1]+kapckat2(j)*
```

```
                      varphis[j]+kapckat3(j)*varphis[j-1]):
  print(Unquoted,"varphic[".expr2text(j)."]=".expr2text(
         varphic[j])):
end_for:
cosis:=x->_plus(varphic[j]*x^(2*j) $ j=0..(n+6));
cosis(x);
sinis:=x->_plus(varphis[j]*x^(2*j+1) $ j=0..(n+6));
sinis(x);
expand(diff(cosis(x), x$2)+2*diff(sinis(x),x)-(x/(2*n))*diff
        (cosis(x),x)-(x/(2*n))*sinis(x));
expand(diff(sinis(x), x$2)-2*diff(cosis(x),x)-(x/(2*n))*diff
        (sinis(x),x)+(x/(2*n))*cosis(x));
HerYak:=cos(x)*cosis(x)+sin(x)*sinis(x);
topdiz:=series(HerYak,x=0,2*n+12);
HerYakTopDiz:=_plus(coeff(topdiz,j)*x^j $ j=0..(2*n+10));
simplify(diff(HerYakTopDiz,x$2)-(x/(2*n))*diff(HerYakTopDiz,x)
               +HerYakTopDiz);
varphic[0];
HerErey:=orthpoly::hermite(2*n,x/(2*sqrt(n)))/orthpoly::
          hermite(2*n,0);
HerYakTopDiz-HerErey;
quit;
```

Bu betikte, ilk başta n (Hermite çokterimlisinin derecesinin yarısı) ve $nu = 1/4n$ değiştirge değeri tanımlanmaktadır. Okuyucu bunu değiştirerek başka uygulayışlar gerçekleştirebilir. Bunu, $\kappa_{s,j}$ katsayılarının j'nin işlevi olarak verilişleri, ve de, $\varphi_{s,-1}$, $\varphi_{s,0}$, $\varphi_{s,1}$ başlangıç değerlerinin tanımları izlemektedir. Bu tanımlarda, $\varphi_{s,0}$ değeri, $\nu \to \infty$ için sıfırlanacak biçimde tanımlanmaktadır. $\varphi_{s,1}$ katsayısı ise, $\varphi_{s,0}$'nin seçimine de bağımlı olarak $\varphi_{c,0}$ katsayısının değerini 1 kılacak biçimde tanımlanmaktadır. Bu tanımlayışları, ilgili değerlerin biçemli yazdırımı izlemektedir.

Daha sonra bir döngü aracılığıyla, $\varphi_{s,j}$ katsayıları j değiştirgesi $(n+8)$'den küçük kaldığı sürece özyineleyişle belirlenmekte ve sonuçlar biçemli olarak yazdırılmaktadır. Bu eylemin ardından $\varphi_{c,j}$ katsayıları için gerekli özyineleyiş katsayı anlatımları tanımlanmakta, ve de, $\varphi_{c,j}$ katsayıları j değiştirgesi $(n+8)$'den küçük kaldığı sürece özyineleyişle belirlenmekte ve sonuçlar biçemli olarak yazdırılmaktadır.

Bunu izleyen aşama denetleyiş amaçlıdır. $\varphi_c(x)$ ile $\varphi_s(x)$ işlevlerinin belli sayıda katsayıyı devreye alacak biçimde çokterimli yaklaştırımlarla tanımlanıp ilgili sıradan türevli denklemlerini belli ve katlanılabilir bir yanılgı çerçevesinde sağladığını kanıtlama eylemini gerçekleştirmek amaçlıdır ve betik koşturulduğunda bu sağlanımın gerçekleştiği gözlenebilmektedir.

Son kesim ise $\chi_c(x)$ işlevinin, son bölümcede (ing: paragraph) belirtilen yaklaştırımlardan oluşturulan yaklaştırımının, $H_{2n}(x/2\sqrt{n})/H_{2n}(0)$ çokterimlisine belli bir x üslüsüne dek çakıştığının kanıtlanışının gözlenebilişine olanak sağlanmaktadır.

7.2 Kesimcil Yaklaştıranlar

Böylece, m yeterince yüksek seçilecek bir bütünsayı olmak koşuluyla, aşağıdaki kesimcil yaklaştıranların (ing: truncated approximants) kullanılabileceği gösterilmiş olmaktadır.

$$\begin{aligned}
\chi_c(x) &\equiv \frac{H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)}{H_{2n}(0)}, \\
\chi_{c,yak,2m+1}(x) &\equiv \cos(x)\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor}\varphi_{c,j}(\nu)x^{2j}+\sin(x)\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}\varphi_{s,j}(\nu)x^{2j+1}, \\
j,m &= 0,1,2,...
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Burada, katsayıların ν bağımlılığı, belirtik olarak yazılmakta ve böylece özellikle vurgulanmaktadır. Ayrıca, üst kıyısı alt kıyısından küçük olan toplamların sıfır alınacağı uylaşımı da geçerlidir.

Bu durumda, bu yaklaştıranlardan ve ν bağımlılıklarından, köklerin ν bağımlılığı için, yanaşık ya da belki düzenli yakınsak, açılımlar üretmek daha etkin olarak görülebilmektedir. Uygulamalara gelecek altbölümde başlayacağız.

7.3 Çift Hermite Çokterimlilerinin Üçgencil İşlevli Maclaurin Açılımları: Sayıcıl Uygulayışlar

Artık, (7.34)'te tanımlanan χ işlevleri yaklaştıranlarını kullanarak köklere yaklaştırım gerçekleştirimi çabasına girişebiliriz. Bu amaçla, bir MuPAD betiği düzenleyebiliriz ve bu doğrultuda `betik01d.mpd` tutamağından yola çıkabiliriz. Bu eylem, öncelikle, ikinci dereceden Hermite çokterimlisinin artı değerli kökünü belirlemekte yaklaştırımlar oluşturmak yolunda gerçekleştirilmiştir. Önce betik sonra da oturum tutamağından kesimler aşağıda verilmekte ve açıklayışlarla olayın aydınlatımına çaba gösterilmektedir (Burada da, en önemli saydığımız betik gündemde olduğundan, o, herhangi bir eke bırakılmaksızın, anlatım içinde LaTeX'in Verbatım çevresi içinde verilmektedir).

7.4 betik01e.mpd

```
n:=1: nu:=1/(4*n): N:=20:
kapskat1:=j->((4*j-2)-nu*(8*j^2+6*j-3))/((2*j-1)*(j+2)*(2*j+5)):
kapskat1(j):
kapskat2:=j->(nu*(1-6*j-8*j^2)+nu^2*(8*j^3+8*j^2+2*j))/((2*j
              -1)*(j+1)*(j+2)*(2*j+3)*(2*j+5)):
kapskat2(j):
kapskat3:=j->(nu^2*(2*j+1))/((2*j-1)*(j+1)*(j+2)*(2*j+3)*(2*j+5)):
kapskat3(j):
varphis[-1]:=0:varphis[0]:=nu:varphis[1]:=nu^2/3-nu:
for j from 0 to N-1 do
  varphis[j+2]:=expand(-kapskat1(j)*varphis[j+1]-kapskat2(j)*
                       varphis[j]-kapskat3(j)*varphis[j-1]):
end_for:
kapckat1:=j->((2*j+1)*(2*j+2)*(2*j+3))/(2*nu*(2*j-1)):
kapckat1(jj):
kapckat2:=j->((2*j+1)*(2-nu*(2*j+1)))/(nu*(2*j-1)):
kapckat2(jj):
kapckat3:=j->-2/(2*j-1):
for j from 0 to N do
  varphic[j]:=expand(kapckat1(j)*varphis[j+1]+kapckat2(j)*
          varphis[j]+kapckat3(j)*varphis[j-1]):
end_for:
DIGITS:=50:
ChiKesYak[0]:=x->cos(x)*varphic[0]+x*sin(x)*varphis[0]:
print(Unquoted,"ChiKesYak[0] = ".expr2text(ChiKesYak[0](x))):
for j from 1 to N do
  ChiKesUstYak[j]:=x->cos(x)*_plus(varphic[jj]*x^(2*jj) $
          jj=0..(j-1))+x*sin(x)*_plus(varphis[jj]*x^(2*jj) $
                jj=0..(j-2));
  UstYakKok[j]:=numeric::solve(ChiKesUstYak[j](x)=0,
          x=1.0..1.5,AllRealRoots):
end_for:
for j from 1 to N do
  ChiKesAltYak[j]:=x->cos(x)*_plus(varphic[jj]*x^(2*jj) $
          jj=0..(j-1))+x*sin(x)*_plus(varphis[jj]*x^(2*jj) $
                jj=0..(j-1)):
  AltYakKok[j]:=numeric::solve(ChiKesAltYak[j](x)=0,
                  x=1.0..1.5,AllRealRoots):
end_for:
for j from 1 to N do
  print(Unquoted,"YakKok[".expr2text(2*j-1)."] = "
          .expr2text(UstYakKok[j])):
  print(Unquoted,"YakKok[".expr2text(2*j)."] = "
          .expr2text(AltYakKok[j])):
end_for:
HerErey:=orthpoly::hermite(2*n,x/(2*sqrt(n)))/orthpoly::
                hermite(2*n,0):
```

```
print(Unquoted,"KesinKok = ".expr2text(float(sqrt(2))));
quit;
```

Bu betikte, önce, κ_c, κ_s, φ_c, ve de, φ_s katsayılarından yeterince sayıda öğe belirlenmektedir. Daha sonra MuPAD'in sayıcıl duyarlılığı (ing: precision) 50 ondalık basamağa ayarlanmaktadır. Daha da sonra, kesimcil yaklaştıranlardan alt ve üst kıyılar (ing: limits) sayıcıl kök belirleyişle (MuPAD, `numeric::solve` yöntemiyle) bulunmakta ve yazdırılmaktadır. Betiğin son sayıcıl eylemi odaktaki Hermite çokterimlisi kökünün MuPAD'çe belirlenişine odaklıdır. Ama, onu simgecil bir eylem olarak, odaktaki Hermite çokterimlisinin yapısının MuPAD'in "Sevimli Yazım(ing: Pretty Print)" biçeminde verilişi izlemektedir. Sayıcıl değerlerde, her bir yaklaştırımın üst kıyısı tek sırasayılı dizi öğesi olarak, alt kıyısı ise çift sırasayılı dizi öğesi olarak verilmektedir.

7.5 H_2 İçin betik01e.mpd'den Sonuçlar

Yukarıdaki betikten H_2 çokterimlisinin tek artı kökü için üretilen sonuçlar LaTeX'in `Verbatim` çevresi içinde verilmektedir.

```
 YakKok[4] = 1.2894035852049828708461791928402234506395341259 87
 YakKok[5] = 1.3356598985490527045622159133139283378389317940 17
 YakKok[6] = 1.4315403791241978884881633037700110462637394537 88
 YakKok[7] = 1.4252205006297631376362463811377849579452107851 63
 YakKok[8] = 1.4132291956708942268524154219690805663088391053 95
 YakKok[9] = 1.4136766476137864728425666378961095137603050793 47
YakKok[10] = 1.4142389742014747436425985117080233850309620618 67
YakKok[11] = 1.4142253290046862969571581228806512089023720385 53
YakKok[12] = 1.4142127386059049319078211589438217059830030976 13
YakKok[13] = 1.4142131276512359101187822655469320001771926294 53
YakKok[14] = 1.4142135595478278009678937348646387285629565093 13
YakKok[15] = 1.4142135559796414889693891638110046823303457358 89
YakKok[16] = 1.4142135618591806257309550699396014220491702398 55
YakKok[17] = 1.4142135618887363243592415988385120771539737903 77
YakKok[18] = 1.4142135623616345273982086389087893711103443289 75
YakKok[19] = 1.4142135623557383476271989665894575275753049239 01
YakKok[20] = 1.4142135623729111878550491809740821468805452065 64
YakKok[21] = 1.4142135623725263301003799719075251524326385023 68
YakKok[22] = 1.4142135623731006197148412933517839592758882475 81
YakKok[23] = 1.4142135623730806017964464666649648124947863753 78
YakKok[24] = 1.4142135623730956564123713587166555595200522788 91
YakKok[25] = 1.4142135623730948107788687358461830169331442979 48
YakKok[26] = 1.4142135623730950807321599193215052008032517282 76
YakKok[27] = 1.4142135623730950500435678952956845458948920556 09
YakKok[28] = 1.4142135623730950500847817488090075547103614701 49
YakKok[29] = 1.4142135623730950491084219072322069048408163217 20
```

```
YakKok[30] = 1.4142135623730950488451670839623823281628481439998
YakKok[31] = 1.4142135623730950488176730311816242689907939645449
YakKok[32] = 1.4142135623730950488029789178675609291774839792970
YakKok[33] = 1.4142135623730950488022932402144031315306871166000
YakKok[34] = 1.4142135623730950488017228522490816469165114799160
YakKok[35] = 1.4142135623730950488017078635466549665717772604060
YakKok[36] = 1.4142135623730950488016895352164403235934635557220
YakKok[37] = 1.4142135623730950488016892570296537011456409560180
YakKok[38] = 1.4142135623730950488016887415299990769303208228480
YakKok[39] = 1.4142135623730950488016887375543006650445489408800
YakKok[40] = 1.4142135623730950488016887245393395237981079485320
  KesinKok = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753760
HerErey:=orthpoly::hermite(2*n,x/(2*sqrt(n)))/
         orthpoly::hermite(2*n,0);
                                         2
                                         x
                                     1 - -
                                         2
```

Kırkıncı kerteye dek alınan sonuçlardan 28 ondalık basamak duyarlılık sağlanmış görünmektedir. Sonuçlarda, ilk üç değer verilmemektedir. Bunun nedeni, bu değerlerin `numeric::solve` buyruğuyla elde edildiği ve bu eylem sürecinde verilen bir aralık içinde arayış gerçekleştiren uzişler kullanımıdır. İlk üç değer için $[1.0, 1.5]$ aralığında herhangi bir değer üretilememektedir. Öteki bir deyişle, bu aralıkta ilgili yaklaştıranın herhangi bir kökü bulunmamaktadır.

Değerlerin en sonunda MuPAD'le belirlenen kesin kök değeri ve çokterimlinin belirtik yapısı verilmektedir.

7.6 H_4'ün Küçük Artı Kökü İçin betik01e.mpd'den Sonuçlar

İkinci bir uygulayış olarak 4. dereceden Hermite çokterimlisinin köklerinin yaklaştırımına odaklanırsak sonuçları, aşağıdaki, betik koşturum oturumundan alınan gerekli yataysıralarla verebiliriz.

```
 YakKok[4] = 1.3834214461276341908401387203024285234712767753470
 YakKok[5] = 1.4093953086543958399994455023524809214721073474570
 YakKok[8] = 1.4821425794546512344784441173564745211384394113010
 YakKok[9] = 1.4826196548906057123496530204894549100501779515130
YakKok[10] = 1.4840143185622687287456007932735809957647064946860
YakKok[11] = 1.4839869673207866749819922437047369313244776689940
YakKok[12] = 1.4839249363190006671131244027120270717220326349610
YakKok[13] = 1.4839258884764699892697661546206921047745091868350
YakKok[14] = 1.4839276222173351627624835428783150016454340715850
YakKok[15] = 1.4839276005323993751890100620067348127822281032660
```

```
YakKok[16] = 1.483927567819643666048894160588610393049038570863
```

Burada da, bir kesim altsırasayılarda (1,2,3,6,7) değerler verilmemektedir.

```
YakKok[16] = 4.62784890181251401418532684029415422711641513693
YakKok[17] = 4.63573716814349632573918327013396565231466246567
YakKok[18] = 4.67323340723593645622080876289209510932957825364
YakKok[19] = 4.67268316736375996097217582465946742059526561989
YakKok[20] = 4.66846684524411618473354249888222442023122358775
YakKok[21] = 4.66851931815150149532161860623000460941008726599
YakKok[22] = 4.66885179983897143408464047614872547337154127901
YakKok[23] = 4.66884796478644372465155432323675282622298218097
YakKok[24] = 4.66882732495562762534058704309073178946661513680
YakKok[25] = 4.66882751051107090866845376270210191803921473819
YakKok[26] = 4.66882852149359748822257145544573008334426154438
YakKok[27] = 4.66882850779095625582180698250243498984231935072
YakKok[28] = 4.66882844098735401682977008376490872657128531632
YakKok[29] = 4.66882844087336554209762027414732471939467076999
YakKok[30] = 4.66882843777655282112702870254478797226747313761
YakKok[31] = 4.66882843771341997513644289023991149830116748594
YakKok[32] = 4.66882843682244349483295214945006253665316680073
YakKok[33] = 4.66882843681990935062735168709978601306797905391
YakKok[34] = 4.66882843669582101203164372922247096845786460091
YakKok[35] = 4.66882843669603194610068036382405594833229917504
YakKok[36] = 4.66882843667981377025024014958926861648657529003
YakKok[37] = 4.66882843667991893092232123064682761533193831073
YakKok[38] = 4.66882843667811304328134081328191487527835811566
YakKok[39] = 4.66882843667813426675999481032577753427682995716
YakKok[40] = 4.66882843667796372990190789047681762372630590539
YakKok[41] = 4.66882843667796699864804179916738501647063218226
YakKok[42] = 4.66882843667795442385129970219714071390267411692
YakKok[43] = 4.66882843667795484965598632046888744944476740630
YakKok[44] = 4.66882843667795435883913705265711442651146821414
YakKok[45] = 4.66882843667795440751890607244356574621986358929
YakKok[46] = 4.66882843667795445564643355192931834558296026218
YakKok[47] = 4.66882843667795446059644329786546160399316307178
YakKok[48] = 4.66882843667795447547456066282298281643204274745
YakKok[49] = 4.66882843667795447592208442573623628023233395825
YakKok[50] = 4.66882843667795447827034391349286302802507355738
YakKok[51] = 4.66882843667795447830574330482716581799927211091
YakKok[52] = 4.66882843667795447859789711207596005070581610490
YakKok[53] = 4.66882843667795447860022940995652378267301168805
YakKok[54] = 4.66882843667795447863162081701392570931814498135
YakKok[55] = 4.66882843667795447863172834601482572402498000742
YakKok[56] = 4.66882843667795447863474150718290322527606188499
YakKok[57] = 4.66882843667795447863474118396929115360268341825
YakKok[58] = 4.66882843667795447863500323519070378850900338880
YakKok[59] = 4.66882843667795447863500237719730108622674324309
YakKok[60] = 4.66882843667795447863502310386306746815494606756
YakKok[61] = 4.66882843667795447863502296875175784054654543661
YakKok[62] = 4.66882843667795447863502445186683607873311974274
YakKok[63] = 4.66882843667795447863502443652742438024442715303
YakKok[64] = 4.66882843667795447863502453077828498765762265991
YakKok[65] = 4.66882843667795447863502452930143056390320032667
YakKok[66] = 4.66882843667795447863502453436476995851723141458
YakKok[67] = 4.66882843667795447863502453423784489136170955001
```

```
YakKok[68] = 4.66882843667795447863502453443255288421441066039
  Kesinkok = 4.66882843667795447863502453442072438897814142043
HerErey:=orthpoly::hermite(2*n,x/(2*sqrt(n)))/\
         orthpoly::hermite(2*n,0);
                                    4    2
                                   x    x
                                   -- - -- + 1
                                   48    2
```

Burada, 29 doğru basamak ondalık doğruluk ancak 68. kerteye çıkılarak elde edilebilmektedir. Bu da kesimcil yaklaştıranların kertesinin, kök büyüdükçe yükseltilişinin gerekliliği ve dolayısıyla yakınsaklık yavaşlayışının gözleneceği olgusudur.

7.8 H_{10}'ün Büyük Artı Kökü İçin betik01e.mpd'den Sonuçlar

Burada, en büyük, beşinci kök için yaklaşık köklerin salt 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200 sırasayılı sonuçları verilip öteki kesimleri dışlanmıştır

```
YakKok[20] = {15.0093116006904576357884703290581037292442530554\
614570721860899443374518395}
YakKok[40] = {15.1162722822998598081484508712136970581671050198\
817436357724259648563455617}
YakKok[60] = {15.3669826137235744416046293445685567224114478178\
801191131879256072703741942}
YakKok[80] = {15.3669707424539594033056922232151743769994370568\
36513092593722386892944317}
YakKok[100] = {15.366970742453918873473231154257977657559824144\
1203460724384678377028396499}
YakKok[120] = {15.366970742453918873490292259813586790670525082\
0218863571969651592062310889}
YakKok[140] = {15.366970742453918873490292258420363913210558843\
0055516590244328875629829947}
YakKok[160] = {15.366970742453918873490292258420363935345351693\
9220148561088754698084811861}
YakKok[180] = {15.366970742453918873490292258420363935345351632\
4546488816844905674759538145}
YakKok[200] = {15.366970742453918873490292258420363935345351632\
45464887317307415281088294}
  KesinKok  = {15.366970742453918873490292258420363935345351632\
454648873173074197736353013}
HerErey:=orthpoly::hermite(2*n,x/(2*sqrt(n)))/\
         orthpoly::hermite(2*n,0);

       10         8        6      4    2
      x          x        x      x    x
 - -------- + ------ - ---- + -- - - +1
   94500000   210000   1500   30   2
```

Burada, 64 doğru ondalık basamak doğruluk ancak 200. kerteye çıkılarak elde edilebilmektedir. Daha düşük kertelerde asıl kökle tutarlı olan basamak sayısı da azalmaktadır. Böylece, üçgencil açılımlardaki kesilmiş toplamdizi kesimlerinin (çokterimlilerin) belli bir duyarlılık istemindeki etkinliğinin, incelenen kök sıfırdan uzaklaştıkça azaldığı gözlemlenmektedir. Bu nedenle, en büyük artı kökün belirlenişinde hem duyarlılığın hem de toplamdizi kesimlerinin derecelerinin uygun biçimde yükseltilmesinin gerekli olduğu anlaşılmaktadır.

MuPAD betiğinde, yaklaşık kök belirleyişinde, köklerin teker teker aranan bir biçimde `numeric:: solve` buyruğu kullanılmıştır. Bu yüzden de, belirleyişle kökün aranacağı aralığın tanımlanışı gereklidir. Aranan kökün nerede yerleşik olduğu ile ilgili $1-3$ basamak duyarlılıkta bir kestirim yapılışı gereklidir. Böyle yapılsa bile kök bulmak zorunda kalınmaması için kökü aranan işlevin 0'dan başlayıp 0.5'lik artımlarla oluşturulan alt aralıkların uç noktalarında belirlenebilir. Aralık boyunca im değişimi gözlenen aralıklar kökleri içeren aralıklar olacaktır. Bu yoldan im değişimli alt aralıkların sayısı $2n$. dereceden Hermite çokterimlisi için n sayıda olmalıdır. Bu yüzden, çokterimlinin $0, 0.5, 1.0, \ldots$ konumlarında değerleri belirlenerek n sayıda altaralık elde edilene dek altaralık oluşturulabilir. Bunlardan istenileni seçilerek istenilen köke yaklaştırım oluşturulabilir.

Üçgencil (cos ve sin) işlevlerin ilk n kökü de altaralık belirleyişinin nereye dek sürdürülebileceği hakkında bilgi verebilir. Bunların sıfırdan uzaklaşan sıradaki n. kökleri altaralıkların nereye dek oluşturulabileceği hakkında bilgi verir. Ancak, burada, yanaşıklık söz konusu olduğundan, özellikle yeterince büyük olmayan n değerlerinde, yeterince çok köklü altaralık oluşturulamayabilir. Böyle bir durumla yüzleşilirse, altaralık oluşturumunu, yeterince çok köklü altaralık oluşturana dek sürdürmek gerekir.

7.9 Son Söz

Bu bölümde $n = 1$ (birinci derece), $n = 2$ (ikinci derece) ve $n = 10$ (onuncu derece) Hermite çokterimlileri için bazı kökler incelenmiştir. Önerilen yöntem bunlar için başarılı gözükmektedir. Burada, bu bağlamda, başka uygulayışa geçilmeyecektir. Başka çokterimliler için de yukarıdaki betik koşturulmuş ve sonuçlar elde edilmiştir. Ancak, burada verilmemektedirler. Derece yükseldikçe ve kök sıfırdan uzaklaştıkça, hem çok daha yüksek duyarlılık hem de daha yüksek kertelere dek çıkış gerekmektedir.

8. SONUÇLAR, UYARILAR VE ÖNERİLER

Hermite çokterimlilerinin köklerini (sıfırlarını) belirlemek amaçlı yöntem geliştirimine dayalı bu savda, değişik arayışlara yönelik araştırımlara girişilmiş ve bunlardan ulaşılan vargılarla bir kesim sonuçlara erişilmiştir. Bunlar, bunlarla ilgili uyarılar, ve de, öneriler aşağıda, LaTeX'in "imli bölümce biçeminde (ing: marked paragraph format)" sunulmaktadır.

- Savda, bilimsel yazında varolan ve iyi bilinen "sonsuz derece ereyinde üçgencil işlevli Hermite çokterimli yanaşık anlatımlarının" derecenin en az hangi değerinde istenildiğince iyi yaklaştırım oluşturduğu sorusuna yanıt aranmıştır. Bu en az değerin, en düşük sayılabilecek duyarlılıklarda bile, pek öyle 9-10 gibi sayılara inemediği gözlenmiştir. Oysaki istenen ve beklenen bu inişin sağlanabileceğiydi ve bu işlevcil yapıdan kök belirlenişi de beklenmekteydi.

- İlk bölümcede verilen ve "baskın yanaşım" olarak alınan bu yaklaştırımın çok ham olduğu savıyla baskın yanaşımdan başlayan bir saptırım açılımı oluşturarak niteliksiz yaklaştırımı nitelikliye çevirişin olanaklı olabileceği düşünülmüştür. Bu bağlamda, uygun bir STD oluşturulup $1/n$ ile orantılı toplamcıl anlatıma saptırım gözüyle bakıp bir açılım gerçekleştirilmiştir. Ancak, buradan oluşturulan kesimcil yaklaştıranlar yine de niteliksiz sonuçlar vermiştir. Dolayısıyla, kullanılışı pek de yararlı gözükmemektedir.

- Önceki bölümcedeki saptırım açılımında her saptırım anlatımı belirlenişinde bağdaşık çözümler sıfır alınmıştır. Oradaki nitelik olumsuzluğunun bundan kaynaklandığı düşünülerek bağdaşıklık sıfırlanımından kaçınılarak bir açılım oluşturuş yoluna gidilmiştir. Böylece, daha nitelikli sonuçlar beklentisine karşın yine de olumsuzluk, azalsa da, sürmüştür. Bu da, sorunun salt bağdaşıklıksız olmadığı vargısına ulaşılmıştır.

- Önceki bölümlerdeki olumsuzlukların kaynağının sonsuz boylu saptırım işlecinden kaynaklanabileceği düşünülerek, aralık $(-\infty,\infty)$'den sonlu bir $\widetilde{x}$ konumu yöresindeki sonlu bir aralığa dönüştürülerek ilerlenmek istenmiştir. Ancak, yine de sonuçların niteliği iyileşse de, bir yerlerden sorun kaynağı etkileri olabileceği yargısına varılmıştır.

- Önceki bölümcelerdeki nitelik olumsuzluğunu gidermek için, sonsuzluktan sonluluğa indirgenen saptırım işleç boyunu bastırmak için bağdaşıklığın eniyileyişi, daha da doğrusu ineçleyişi gündeme getirilmiş ve bağdaşıklık katsayıları saptanmıştır.

- İneçleyiş sonrası ele geçen bağdaşıklık katsayılarının kullanımıyla saptırım işlecinin doğrucul bir tümlev işlecine dönüşeceği uzbilimcil olarak kanıtlanmıştır.

- Doğrucul Tümlev işlecinde yalınlık elde edilişi açısından yukarıda sözü edilen aralığın gerçel değeri az olan ucunun $\widetilde{x}$ konumuna yerleşik oluşunun en uygun durum sayılabileceği gösterilmiştir.

- Yukarıda sözü edilen aralığın sağ ucunun yerleşim konumunun $\widetilde{x}+\pi$ oluşunun sonsuz derece ereyinde en iyi seçim olacağı gösterilmiştir.

- Yukarıdaki kuramcıl başarılara karşın elde edilen yöntemin etkin bir sayıcıl yöntem durumuna getirilebilişi için sonuca erişilmez bir durum olmasa da, uygulayımcıllık açısından, sav araştırım çizemi bağlamında yüksek bir çaba gerekeceği yargısına sav danışmanınca varılmış, bu saptırım açılımları olgusu bu içeriğinde bırakılmış ve başka arayışlara gidilmiştir. Savdan bütünüyle uzaklaştırım istenmemiş ve olası okuyucuların durumu görebilişleri için savda sunuluşunda yarar görülmüştür.

- Savın hem kuramcıl hem de uygulayımcıl açıdan en başarılı olan kesimi yedinci bölümde verilmiştir. Orada odaktaki Hermite işlevi için, ölçeklenmiş bağımsız değişken olan x değişkenine göre biri kosinüs, ötekisi sinüs işlevi ile çarpılan toplamdizilerin toplamı olan bir anlatım kullanılmış ve toplamdizilerin kesimcil çokterimli yaklaştırımları kullanılarak yaklaştıranlar oluşturulup onların kökleri belirlenmiştir. Sonuçlar, yöntemin istenilen duyarlılıkta işlediğini ve sonuçlar elde edilirken sıfıra uzak köklerin küçük sayılabilecek dereceler için daha yüksek kesimcil yapılar gerektirip çalıştırılış sürelerinin daha büyük süreler gerektireceği gözlenmiştir. Ama, sonuçta, uygulayımcıl açıdan da başarılı bir yöntem geliştirilmiş bulunmaktadır.

- Yedinci bölümdeki yöntemin saptırım açılımıyla bütünleştirimi olanaklı görünmekle birlikte, savda buraya doğru bir yönelim gerçekleştirilmemiştir. BEBBYT araştırımları bağlamında gelecek için bir tasarı olarak yapılandırılabilecek gibi görünmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Url-1<https://wiki2.org/en/Hermite_polynomials/>, erişim tarihi 02.05.2019.

[2] **Demiralp, M.** (2005). A fluctuation e xpansion m ethod f or t he e valuation o f a function's expectation value, *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2005)*, s.711–714.

[3] **Demiralp, M.** (2005). A new fluctuation expansion based method for the univariate numerical integration under Gaussian weights, *Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (MATH'08)*, s.68–73.

[4] **Altay, N. ve Demiralp, M.** (2008). Application of fluctuationlessness theorem on the numerical solution of higher order linear Ordinary Differential Equations, *AIP Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2008)*, cilt1048, s.52–55.

[5] **Demiralp, M.** (2008). Finite subspace matrix representation of the multiplication operator's resolvent in terms of fluctuation matrices, *AIP Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2008)*, cilt1048, s.159–162.

[6] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2009). The application of the fluctuation expansion with extended basis set to numerical integration, *Proceedings for the WSEAS Conference on the 2nd Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE'09)*, s.93–100.

[7] **Demiralp, M.** (2009). Fluctuationlessness theorem to approximate univariate functions' matrix representations, *WSEAS Transactions on Mathematics*, ***8***(6), 258–267.

[8] **Demiralp, M.** (2011). Fluctuation expansion for a univariate function's matrix representation, *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, ***2***(2), 176–193.

[9] **Altay, N. ve Demiralp, M.** (2009). Numerical solution of ordinary differential equations by Fluctuationlessness theorem, *Journal of Mathematical Chemistry*, ***47***(4), 1323–1343.

[10] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2010). Extended fluctuationlessness theorem and its application to numerical integration, *Proceedings for the 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS)*, s.226–233.

[11] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2012). Self-consistent fluctuation expansion and its application to numerical integration, *AIP Proceedings for the International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE 2009)*, cilt1504, s.788–791.

[12] **Demiralp, M.** (2007). Fluctuation expansion at the horizon as a new and efficient tool for integration ODE and PDE solving, *11th World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS) Conference on Applied Mathematics (MATH'07)*.

[13] **Demiralp, M.** (2012). Various parallel and diversive aspects of the mathematical fluctuations theory with the related standing issues, *AIP Proceedings for the International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE 2009)*, cilt1504, s.364–376.

[14] **Yolcu, B. ve Demiralp, M.** (2018). A Perturbative Expansion for the Roots of Hermite Polynomials at Infinite Degree Limit, *Proceedings of ICNPAA 2018 : Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences*, to be presented.

[15] **Üsküplü Altınbaşak, S. ve Demiralp, M.** (2010). Solutions to linear matrix ordinary differential equations via minimal, regular and excessive space extension based universalization: Perturbative matrix splines, convergence and error estimate issues for polynomial coefficients in the homogeneous case, *Journal of Mathematical Chemistry*, ***48***(2), 253–265.

[16] **Abramowitz, M. ve Stegun, I.** (1964). *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Cambridege University Press.

[17] **Atkinson, K.**, **Han, W. ve Stewart, D.** (2011). *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, Wiley.

[18] **Bulirsch, R. ve Stoer, J.** (1966). Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods, *Numerische Mathematik*, ***8***(1), 1–13.

[19] **Butcher, J.C.** (1992). The role of orthogonal polynomials in numerical ordinary differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, ***43***(1-2), 231–242.

[20] **Lebedev, N.N.** (1972). *Special functions and their applications*, Courier Dover Publications.

EKLER

EK A : MuPAD Betikler

Ek A

kök.mpd

```
f0:=t->sin(t);
f0(x);
f1:=t->c11*(t*cos(t)-sin(t))+s11*t^2*sin(t);
f1(x);
subs(diff(f1(x),x),x=0);
den1:=t2->expand(diff(f1(t2),t2\$2)+f1(t2)-t2*diff(f0(t2),t2));
den1(x);
den11:=diff(subs(den1(x),sin(x)=tt1),tt1);
den12:=diff(subs(den1(x),cos(x)=tt2/x),tt2);
solve([den11=0,den12=0],[c11,s11]);
f2:=t3->c21*(t3*cos(t3)-sin(t3))+s21*t3^2*sin(t3)
        +c22*t3^3*cos(t3)+s22*t3^4*sin(t3);
subs(diff(f2(x),x),x=0);
den2:=t4->expand(diff(f2(t4),t4\$2)+f2(t4)-t4*diff(f1(t4),t4));
den2(x);
den2s:=diff(subs(den2(x),sin(x)=tt3),tt3);
den2s1:=subs(den2s,x=0);
den2s2:=subs(diff(den2s,x\$2)/2,x=0,c11=1/4,s11=1/4);
den2c:=diff(subs(den2(x),cos(x)=tt4),tt4);
den2c1:=subs(diff(den2c,x),x=0,c11=1/4,s11=1/4);
den2c2:=subs(diff(den2c,x\$3)/6,x=0,c11=1/4,s11=1/4);
solve([den2s1=0,den2s2=0,den2c1=0,den2c2=0],[c21,s21,c22,s22]);
quit;
```

betik01a.mpd

```
Her:=(n,x)->expand(evalp(orthpoly::hermite(n,xx),xx=x));
Her(0,x);Her(1,x);Her(2,x);Her(3,x);Her(4,x);Her(5,x);
        Her(6,x);Her(7,x);Her(8,x);Her(9,x);Her(10,x);
i:=5;
CKokler:=numeric::solve(Her(2*i,x)=0,x);
CKokler[1];CKokler[2];CKokler[3];CKokler[4];CKokler[5];
  CKokler[6];CKokler[7];CKokler[8];CKokler[9];CKokler[10]:
BYCKok:=(n,i)->float((1/(2*sqrt(n)))*(i+1/2)*PI);
BYCKok(i,0);BYCKok(i,1);BYCKok(i,2);BYCKok(i,3);BYCKok(i,4):
CSap:=(n,i)->(CKokler[n+i]-BYCKok(n,i-1))/BYCKok(n,i-1);
CSap(i,1);CSap(i,2);CSap(i,3);CSap(i,4);CSap(i,5);
for j from 1 to i do
    print(Unquoted,"CKok[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(CKokler[i+j]));
    print(Unquoted,"BYCKok[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(BYCKok(i,j-1)));
    print(Unquoted,"CSap[".expr2text(j)."]=".
```

```
        expr2text(CSap(i,j)));
end_for:
TKokler:=numeric::solve(Her(2*i+1,x)=0,x);
BYTKok:=(n,i)->float((1/(2*sqrt(n)))*(i+1)*PI);
Sap:=(n,i)->(TKokler[n+1+i]-BYTKok(n,i-1))/BYTKok(n,i-1);
for j from 1 to i do
    print(Unquoted,"TKok[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(TKokler[i+1+j])):
    print(Unquoted,"BYTKok[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(BYTKok(i,j-1))):
    print(Unquoted,"TSap[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(TSap(i,j))):
end_for:
quit;
```

betik01b.mpd

```
Her:=(n,x)->expand(evalp(orthpoly::hermite(n,xx),xx=x));
Her(0,x);Her(1,x);Her(2,x);Her(3,x);Her(4,x);Her(5,x);
        Her(6,x);Her(7,x);Her(8,x);Her(9,x);Her(10,x);
i:=20;
CKokler:=numeric::solve(Her(2*i,x)=0,x);
CKokler[1];CKokler[2];CKokler[3];CKokler[4];CKokler[5];
        CKokler[6];CKokler[7];CKokler[8];CKokler[9];CKokler[10];
BYCKok:=(n,i)->float((1/(2*sqrt(n)))*(i+1/2)*PI);
BYCKok(i,0);BYCKok(i,1);BYCKok(i,2);BYCKok(i,3);BYCKok(i,4);
CSap:=(n,i)->(CKokler[n+i]-BYCKok(n,i-1))/BYCKok(n,i-1);
CSap(i,1):CSap(i,2):CSap(i,3):CSap(i,4):CSap(i,5):
for j from 1 to i do
    print(Unquoted,"CKok[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(CKokler[i+j])):
    print(Unquoted,"BYCKok[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(BYCKok(i,j-1))):
    print(Unquoted,"CSap[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(CSap(i,j))):
end_for:
Tildex4C:=(i,j)->4*i*sqrt(1-BYCKok(i,j-1)^2/CKokler[i+j]^2);
for j from 1 to i do
    print(Unquoted,"Tildex4C[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(Tildex4C(i,j))):
end_for:
TKokler:=numeric::solve(Her(2*i+1,x)=0,x);
BYTKok:=(n,i)->float((1/(2*sqrt(n)))*(i+1)*PI);
TSap:=(n,i)->(TKokler[n+1+i]-BYTKok(n,i-1))/BYTKok(n,i-1);
for j from 1 to i do
    print(Unquoted,"TKok[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(TKokler[i+1+j])):
    print(Unquoted,"BYTKok[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(BYTKok(i,j-1))):
    print(Unquoted,"TSap[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(TSap(i,j))):
```

```
end_for:
Tildex4T:=(i,j)->4*i*sqrt(1-BYTKok(i,j-1)^2/TKokler[i+1+j]^2);
for j from 1 to i do
    print(Unquoted,"Tildex4T[".expr2text(j)."]=".
          expr2text(Tildex4T(i,j))):
end_for:
quit;
```

betik01b.otr

```
Tildex4C[1]=8.926449522*I  Tildex4C[2]=8.554264069*I
Tildex4C[3]=7.75344764*I   Tildex4C[4]=6.356620462*I
Tildex4C[5]=3.72804775*I   Tildex4C[6]=4.42905342
Tildex4C[7]=7.77255566     Tildex4C[8]=10.43282996
Tildex4C[9]=12.85927436    Tildex4C[10]=15.18337991
Tildex4C[11]=17.46693438   Tildex4C[12]=19.74773414
Tildex4C[13]=22.05438324   Tildex4C[14]=24.41308758
Tildex4C[15]=26.85225327   Tildex4C[16]=29.4074233
Tildex4C[17]=32.12915735   Tildex4C[18]=35.0996902
Tildex4C[19]=38.47868994   Tildex4C[20]=42.69156049

Tildex4T[1]=15.40487036*I  Tildex4T[2]=15.09214736*I
Tildex4T[3]=14.55348603*I  Tildex4T[4]=13.75826354*I
Tildex4T[5]=12.65172532*I  Tildex4T[6]=11.1315501*I
Tildex4T[7]=8.97428841*I   Tildex4T[8]=5.438661637*I
Tildex4T[9]=5.424737853    Tildex4T[10]=9.852233283
Tildex4T[11]=13.19385587   Tildex4T[12]=16.16823745
Tildex4T[13]=18.98178987   Tildex4T[14]=21.73530755
Tildex4T[15]=24.49580261   Tildex4T[16]=27.32163508
Tildex4T[17]=30.27839721   Tildex4T[18]=33.45956777
Tildex4T[19]=37.03530388   Tildex4T[20]=41.44686815
```

betik01c.mpd

```
khi:=x->cos(x)*phic(x)+sin(x)*phis(x);
expand(diff(khi(x),x$2)-(x/(2*n))*diff(khi(x),x)+khi(x));
A1:=j->matrix(2,2,[[(2*j+2)*(2*j+1),0],[-4*j-4,(2*j+2)
                        *(2*j+3)]]);
A1(j);
A1(j)^(-1);
A2:=j->matrix(2,2,[[-4*j*epsi,2*(2*j+1)],[2*epsi,-
                  (4*j+2)*epsi]]);
A2(j);
A3:=j->matrix(2,2,[[0,-2*epsi],[0,0]]);
A3(j);
A4:=j->A1(j)^(-1)*A2(j); A4(j);
A5:=j->A1(j)^(-1)*A3(j); A5(j);
varphi:=j->matrix(2,1,[varphic(j),varphis(j)]);
varphi(j);
```

```
ozyon1:=expand((varphi(j+1)+A4(j)*varphi(j)+A5(j)*
               varphi(j-1))[1]);
kat1_1:=subs(ozyon1,varphic(j)=0,varphis(j)=0,
             varphis(j-1)=0)\varphic(j+1);
kat1_2:=simplify(subs(ozyon1,varphic(j+1)=0,varphis
                 (j)=0,varphis(j-1)=0)/varphic(j));
kat1_3:=simplify(subs(ozyon1,varphic(j+1)=0,varphic
                 (j)=0,varphis(j-1)=0)/varphis(j));
kat1_4:=simplify(subs(ozyon1,varphic(j+1)=0,varphic
                 (j)=0,varphis(j)=0)/varphis(j-1));
simplify(kat1_1*varphic(j+1)+kat1_2*varphic(j)+
         kat1_3*varphis(j)+kat1_4*varphis(j-1)-ozyon1);
ozyon2:=expand((varphi(j+1)+A4(j)*varphi(j)+A5(j)*
               varphi(j-1))[2]);
kat2_1:=subs(ozyon2,varphic(j)=0,varphis(j)=0,
             varphis(j-1)=0)/varphis(j+1);
kat2_2:=simplify(subs(ozyon2,varphis(j+1)=0,varphis
                 (j)=0,varphis(j-1)=0)/varphic(j));
kat2_3:=simplify(subs(ozyon2,varphis(j+1)=0,varphic
                 (j)=0,varphis(j-1)=0)/varphis(j));
kat2_4:=simplify(subs(ozyon2,varphis(j+1)=0,varphic
                 (j)=0,varphis(j)=0)/varphis(j-1));
simplify(kat2_1*varphis(j+1)+kat2_2*varphic(j)+
         kat2_3*varphis(j)+kat2_4*varphis(j-1)-ozyon2);
assume(j,Type::Integer); assume(epsi<>0);
varphicdeg(j):=solve((varphi(j+1)+A4(j)*varphi(j)+
             A5(j)*varphi(j-1))[2]=0,varphic(j))[1];
katvpc1:=simplify(subs(varphicdeg(j),varphis(j)=0,
            varphis(j-1)=0)/varphis(j+1));
katvpc2:=simplify(subs(varphicdeg(j),varphis(j+1)=0,
                                varphis(j-1)=0)/varphis(j));
katvpc3:=simplify(subs(varphicdeg(j),varphis(j+1)
                  =0,varphis(j)=0)/varphis(j-1));
simplify(katvpc1*varphis(j+1)+katvpc2*varphis(j)+
         katvpc3*varphis(j-1)-varphicdeg(j));
varphicdeg(j+1):=subs(varphicdeg(j),j=j+1);
ozyin:=expand(subs((varphi(j+1)+A4(j)*varphi(j)+A5(j)*
        varphi(j-1))[1],varphic(j)=varphicdeg(j),varphic(j+1)=
              varphicdeg(j+1)));
kat1:=factor(simplify(subs(ozyin,varphis(j-1)=0,
          varphis(j)=0,varphis(j+1)=0)))/ varphis(j+2);
kat2:=factor(simplify(subs(ozyin,varphis(j-1)=0,
       varphis(j)=0,varphis(j+2)=0)))/varphis(j+1);
kat3:=factor(simplify(subs(ozyin,varphis(j-1)=0,
          varphis(j+1)=0,varphis(j+2)=0)))/varphis(j);
kat4:=factor(simplify(subs(ozyin,varphis(j)=0,
          varphis(j+1)=0,varphis(j+2)=0)))/varphis(j-1);
simplify(kat1*varphis(j+2)+kat2*varphis(j+1)+
         kat3*varphis(j)+kat4*varphis(j-1)-ozyin);
kapp1:=kat2/kat1;kapp2:=kat3/kat1;kapp3:=kat4/kat1;
end_for:
quit;
```

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Bahar Yolcu

Doğum Tarihi ve Yeri : İstanbul, 24.04.1981

E-posta : bahar.zora@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2004, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Mühendisliği
- **Yüksek Lisans:** 2012, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Fizik Öğretmenliği

MESLEKİ DENEYİM :

- Yazılım Mühendisliği (Akbank, 2004-2009)
- Yazılım Mühendisliği (İş Bankası, 2009-2010)

YÜKSEK LİSANS TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR VE SUNUMLAR:

- **Bahar Yolcu** and Metin Demiralp, 2018: A Perturbative Expansion for the Roots of Hermite Polynomials at Infinite Degree Limit. *Proceedings of ICNPAA 2018: Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences*,3–6 July 2018, Yerevan, Armenia, presented.

DİĞER YAYINLAR VE SUNUMLAR :

- M. Sinan Özeren, Nazmi Postacıoğlu, **Bahar Zora** "A New Spectral Algoritm for 3-D Wave Field In Deep Water", *Vibration Problems, Springer Proceedings in Physics*, volume 111, Springer, Dordrecht, ICOVP 2005, pp. 395-401
- **Bahar Yolcu** and Muzaffer Ayvaz, "Fluctuations in Kronecker Power Series of Quantum Mechanical Operators Under Gaussian Initial Wave Packets", *The Proceedings of the WSEAS 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG'13)*, 8-10 October 2013, Antalya, Turkey, pp. 206–211
- **Bahar Yolcu** and Metin Demiralp, "Fine Tuning Points of Generating Function Construction for Linear Recursion", *10th International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE), The First ICCMSE Symposium on Mathematical Fluctuation Theoretical Issues and Kronecker Power Series in Quantum Dynamical Problems*, 4–7 April 2014, Athens, Greece, AIP Proceedings (to be published)

- **Bahar Yolcu** and Metin Demiralp, "Fine Tuning Points of Generating Function Construction in Integral Form for Linear Recursions", *Europment Conferences: The 2014 International Conference on Applied Mathematics, Computational Science & Engineering (AMCSE 2014)*, 12–15 September 2014, Varna, Bulgaria, (to appear in the relevant IEEE publication)