ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN ALT CEBİRLERİ

Nida ÖZBİLEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ..../..../2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

....	....	....
Doç.Dr. Zeynep ÖZKURT DANIŞMAN	Doç.Dr.Dilek ERSALAN ÜYE	Dr.Öğr.Üyesi Cennet ESKAL ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr.Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN ALT CEBİRLERİ

Nida ÖZBİLEN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman	:Doç.Dr. Zeynep ÖZKURT
	Yıl: 2018, Sayfa: 59
Jüri	:Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT
	:Doç. Dr. Dilek ERSALAN
	:Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL

Bu çalışmada öncelikle serbest birleşmeli cebirler ve alt cebirlerin yapısını anlamak için temel olan konular ile P.M.Cohn (1963) un makalesinden elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların uygulamaları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest birleşmeli cebirler, Serbest Lie cebirleri, Poincare-Bİrkhoff-Witt Teoremi, Lie cebirlerin otomorfizmleri, Ters fonksiyon teoremi

ABSTRACT

MASTER THESIS

SUBALGEBRAS OF FREE ASSOCIATIVE ALGEBRAS

Nida ÖZBİLEN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor	: Doç.Dr. Zeynep ÖZKURT
	Year: 2018, Pages: 59
Jury	:Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT
	:Doç. Dr. Dilek ERSALAN
	:Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL

In this study, firstly the basic subjects which are necessary to understand the structure of free-associative algebras and sub-algebras of free-associative algebras were studied. Then, the results obtained from the article of P.M.Cohn (1963) and the applications of these results were examined.

Key words: Free-associative algebras, Free Lie algebras, Poincare-Bİrkhoff-Witt Theorem, Automorphism of Lie algebras, Inverse function theorem.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Bu çalışmada serbest birleşmeli cebirler ve alt cebirlerin yapısı ile ilgili Cohn (1963) un makalesinden elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların serbest Lie cebirlerindeki uygulamaları incelenmiştir.

Serbest değişmeli ve birleşmeli cebirler, değişmeli halka teorisi ve cebirsel geometri de önemli bir yere sahiptir.

Bir serbest grubun herhangi bir alt grubunun da serbest olduğu Schreir (1927) tarafından gösterilmiştir. Birleşmeli olmayan lineer cebirler için benzer bir sonuç Kuros (1947) tarafından (ayrıca Witt (1953) ve Shirshov (1954) tarafından ve Lie cebirleri için Shirshov (1953) ve Witt (1956) tarafından ispatlanmıştır. Bu ifadenin tersi, F cismi üzerinde $\{x\}$ tarafından üretilen serbest birleşmeli cebirlerin serbest olmayan alt cebirleri olduğuna bir örnek $F[x^2,x^3]$ polinom cebiri olarak verilebilir. O halde şimdiki sorun kendisi serbest olan serbest birleşmeli cebirlerin alt cebirlerini karakterize etmektir. Tek üreteçli durumlar için, $F[x]$, F cismi üzerinde tek x serbest üreteci ile serbest birleşmeli cebir ve R de $F[x]$ in bir alt cebiri olsun. "R nin serbest olması için gerek ve yeter koşul R nin tam kapalı olmasıdır". Bu sonuç aynı zamanda tek üreteçli birleşmeli ve değişmeli cebirler için de geçerlidir, ama bu sonuç birden fazla üretece sahip cebirler için geçerli değildir. Bunun ana sebebi Lüroth' un teoreminin yüksek boyutlu cebirler için başarısız olmasıdır. A serbest birleşmeli cebirinin alt cebiri olan B nin serbest olması için bazı koşullar vardır. Bunların bir uygulaması olarak sonlu ranklı bir serbest Lie cebirinin otomorfizm grubunun elemanter dönüşümler yardımıyla elde edilebileceği sonucu Cohn (1963) tarafından elde edilmiştir.

Ayrıca Poincare-Birkhoff-Witt teoremi serbest Lie cebirinin bir serbest grubun alt merkez serileri ile bağlantılı olduğunu ispatlar. Bir serbest Lie cebirinin otomorfizmi elemanter otomorfizmler tarafından üretilir ve bir Jacobian matrisi ile karakterize edilir. (Reutenauer, 2003)

Witt (1956) ve Shirshov (1953) bir cisim üzerindeki bir serbest Lie cebirinin her alt cebirinin serbest olduğunu göstermişlerdir. Schreier (1927) bir serbest grubun her alt grubunun da serbest olduğunu göstermiştir. Witt bu ispatı cebire uygulamıştır. Shirshov ise Lie cebirinin M. Hall tarafından inşa edilen bazını kullanarak bir serbest Lie cebirinin her alt cebirinin serbest olduğunu ispatlamıştır. Bir serbest Lie cebirinin bir alt cebirinin serbest olup olmadığı, serbest Lie cebirinin üzerinde tanımlandığı değişmeli halkanın bir cisim olup olmadığına bağlıdır. Ayrıca, bir cisim üzerinde tanımlı serbest Lie cebirlerinin serbest üreteç kümeleri ile bu kümelerin Jacobian matrisi arasında bir ilişki vardır. Bu konudaki ilk çalışma Mikhalev,Shpilrain ve Zolotykh (1996) tarafından yapılmış ve sonlu üretilmiş alt cebirlerin rankının üreteç kümesinin Jacobian matrisinin satırlarının sol rankına eşit olduğu ispatlanmıştır.

Bu tez toplam 8 bölümden oluşmuş olup her bir bölümün içeriği aşağıda özetlenmiştir:

Birinci bölümde tez konusunun temelini oluşturan tanım, teorem ve örneklerden söz edilip, serbest birleşmeli cebir ve tensör cebirinin inşası yapılmıştır.

İkinci bölümde F cismi üzerinde x üreteci ile serbest birleşmeli F[x] cebirinin serbest alt cebirlerini tanımlayabilmek için gerekli tanım ve teoremler yapılmış ve konuyla ilgili örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde "Bir serbest birleşmeli cebirin alt cebiri ne zaman serbest olur?" sorusuna cevap aranmış ayrıca F[x] in alt cebirlerinin serbest olması için ikinci bir kriter elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde Lie cebirinin tanımı yapılarak, evrensel zarf cebirinin inşası yapılmış. Son olarak Poincare-Birkhoff-Witt teoreminin ispatına yer verilmiştir.

Beşinci bölümde bir serbest Lie cebirinin her alt cebirinin serbest olduğu gösterilmiştir

Altncı bölümde "Bir serbest birleşmeli cebirin bir alt kümesi verildiğinde bu alt kümenin bir serbest üreteç kümesi olup olmadığına karar verilebilir mi?" sorusuna cevap aranmıştır.

Yedinci bölümde elemanter Lie dönüşümleri ve serbest Lie cebirlerinin otomorfizmleri incelenmiştir.

Sekizinci bölümde serbest birleşmeli cebirlerin uygulamaları olarak ters fonksiyon teoremi ispatlanmış ve serbest birleşmeli cebirlerin serbest olmayan alt cebirlerine ait örneklere yer verilmiştir.

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu çalışmam sırasında bana yol gösteren, hayatımızdaki en önemli şey olan zamanını benim için harcayan ve her zaman sonsuz sabır gösterip, desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Zeynep ÖZKURT'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca ilk sırada bu çalışmam esnasında dünyaya gelen sevgili oğlum Çınar Alp ÖZBİLEN ve desteklerini her zaman üzerimde hissettiğim sevgili eşim ve aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bu bölümde P. A. Grillet' in "Graduate Texts in Mathematics" kitabından faydalanılmıştır.

R bir birim elemanlı, değişmeli halka ve tüm modüller birimli kabul edilecektir.

Tanım 1.1. Bir değişmeli R halkası üzerindeki bir A R-modül alalım. $\bullet : A \times A \to A$ olmak üzere eğer her $a,b,c \in A$ ve $r \in R$ için

i. $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

ii. $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$

iii. $(ra) \bullet b = a \bullet (rb) = r(a \bullet b)$

koşulları sağlanıyorsa A ya R üzerinde bir cebir, kısaca R-cebir denir.

Her $a,b,c \in A$ için $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ koşulunu da sağlıyorsa A ya birleşmeli cebir , her $a \in A$ için $1 \bullet a = a = a \bullet 1$ ise birimli cebir , "$\bullet$" işlemine göre değişmeli ise değişmeli cebir denir.

Ayrıca A R-cebiri yukarıdaki koşullarla bir birimli halka olarak düşünülebilir.

Örnek 1.2. $R[x]$, ($R[(x_i)_{i\in I}]$) (bir ya da çok değişkenli) polinom halkaları, $R[[x]]$, ($R[[(x_i)_{i\in I}]]$) kuvvet serisi halkaları R-cebirlerdir. $\mathbb{C}$ cebiri ve H (quaternion cebiri) R-cebirlerdir. Her halka bir $\mathbb{Z}$-cebirdir. Ayrıca her değişmeli R halkası ve a , R nin bir ideali olmak üzere R/a bölüm halkası bir R-cebirdir. $M_n(R)$ nxn tipindeki matris halkaları bir R-cebirdir. Lie cebirleri ve Leibniz cebirleri birleşmeli olmayan R-cebirlerdir.

Bir A R-cebirinde her $r,s \in R$ için

$$r1 + s1 = (r + s)1 \text{ ve } (r1)(s1) = (rs)1$$

olup $\ell(r) = r1$ şeklinde tanımlanan $\ell : R \to A$ dönüşümü bir halka homomorfizmidir. Her $a \in A$ için $(r1)a = ra = a(r1)$ olduğundan her $r1$, A da merkezdedir. Dolayısıyla ℓ bir merkezi homomorfizmdir.

ℓ birebir ise, $r1$ yerine r alabiliriz, o zaman R, A nın bir alt halkası olur; örneğin R bir cisim ve $A \neq 0$ olduğu durumlarda, A üzerindeki R-modül yapısı ℓ ile belirlenir.

$$\rho : R \times A \to A$$
$$(s, \underbrace{r1}_{\ell(r)}) \to s(r1) = (sr)1 = \ell(rs)$$

dönüşümüyle birlikte A bir R modüldür.

Her A halkası için, R den A ya merkezi halka homomorfizmlerinin arasında bir birebir denklik vardır ve A üzerindeki R-modül yapıları A yı R-cebir yapar.

Tanım 1.3. A ve B R-cebirler olsun. $\varphi : A \to B$ dönüşümü verilsin.

Eğer her $a,b \in A$ ve $r \in R$ için

i. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

ii. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

iii. $\varphi(ra) = r\varphi(a)$ ve $\varphi(1) = 1$

ise φ ye bir R-cebir homomorfizmi denir.

Açıkça R-cebirlerinin bir homomorfizmi aynı zamanda R-modül homomorfizmi olan bir halka homomorfizmidir.

Tanım 1.4. A bir R-cebiri olsun. A nın bir S alt cebiri, A nın bir alt halkası ve bir alt modülü olan bir alt kümesidir.

Tanım 1.5. A bir R-cebir, I, R nin bir alt kümesi olsun. I, A nın bir çift yanlı ideali ve bir alt modülü ise, o zaman I ya A R-cebirinin bir çift yanlı ideali denir.

A/I bölüm halkası aynı zamanda bölüm modülü olduğundan bir R-cebirdir. Bu cebire bölüm cebiri denir. Ayrıca $A \rightarrow A/I$ izdüşümü bir cebir homomorfizmidir.

Teorem 1.6. Eğer $\varphi : A \rightarrow B$ R-cebirlerinin bir homomorfizmi ise Görφ, B nin alt cebiri , Çekφ, A nın ideali ve

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \\ A/\text{Çek}\varphi \arrow[r, "\theta"'] & \text{Gör}\varphi \arrow[u, "\subseteq"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\theta : A/\text{Çek}\varphi \rightarrow \text{Gör}\varphi$ cebir izomorfizmi vardır.

İspat. Halkalar ve modüller için olan homomorfizm teoremlerinden bir θ izomorfizmi yukarıdaki diyagramı sağlar. Aynı dönüşümlerle θ bir cebir izomorfizmidir.

Teorem 1.7. I, bir A R-cebirinin iki yanlı ideali olsun. Çekirdeği I yı içeren her cebir homomorfizmi için

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A/I \arrow[d, "\psi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

A/I nın alt cebirleri ile A nın I yı içeren alt cebirleri arasında birebir bir denklik vardır.

İspat. Benzer teorem halkalar ve modüller için ispatlanmıştır. Dolayısıyla aynı ψ homomorfizmi ile yukarıdaki diyagram sağlanır. ψ bir cebir homomorfizmidir.

Tanım 1.8. A bir R-cebiri olsun. Eğer her $m,n \geq 0$ için

i. $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$

ii. $1 \in A_0$

iii. $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$

olacak şekilde $(A_n)_{n\geq 0}$ alt modülleri varsa A ya bir derecelendirilmiş R-cebiri denir. A_n nin elemanları n dereceli homojen elemanlardır.

Herhangi bir derecelendirilmiş $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ cebirinde her $a \in A$, a_n, a nın n. homojen bileşeni olmak üzere $a = \sum_{n\geq 0} a_n$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir. (Sonlu tane n dışında $a_n = 0$ dir.) Eğer $a \neq 0$ ise o zaman a nın derecesi $a_n \neq 0$ olacak şekildeki en büyük n dir. 0 ın derecesi ise $-\infty$ alınır.

Örneğin; $f(x, y) = x^2 + y^2 + 7x - 3y + 1 \in R[x, y]$ verildiğinde f nin homojen bileşenleri $x^2 + y^2$, $7x - 3y$ ve 1 dir. f nin derecesi 2 dir, fakat homojen değildir.

Örnek 1.9. R[x] polinom cebiri derecelendirilmiş bir R-cebiridir. A_n alt modülü derecesi n olan tüm homojen polinomları içersin.

$$A_0 = \{a_0 \mid a_0 \in R\}$$
$$A_1 = \{a_1 x \mid a_1 \in R\}$$
$$A_2 = \{a_2 x^2 \mid a_2 \in R\}$$
$$\ldots$$
$$A_n = \{a_n x^n \mid a_n \in R\}$$
$$A_m A_n = \{a_m x^m a_n x^n \mid a_m, a_n \in R\} = \{a_m a_n x^{n+m} \mid a_m, a_n \in R\} \subseteq A_{n+m}$$

olup $R[x] = \oplus_{n\geq 0} A_n$ dir.

Örnek 1.10. R[x,y] polinom cebiri derecelendirilmiş bir R-cebiridir. A_n ile derecesi n olan tüm homojen polinomların kümesini gösterelim.

$$A_0 = R$$
$$A_1 = \{a_1 x + a_2 y \mid a_1, a_2 \in R\} = Rx + Ry$$
$$A_2 = \{a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 \mid a_1, a_2, a_3 \in R\} = Rx^2 + Rxy + Ry^2$$
$$.$$

şeklinde devam edilirse $A_m A_n \subseteq A_{n+m}$ ve $R[x,y] = \oplus_{n\geq 0} A_n$ elde edilir.

Genel olarak $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom cebirinin derecelendirilmiş cebir olduğu benzer şekilde gösterilir.

Tanım 1.11. $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ ve $B = \oplus_{n\geq 0} B_n$ derecelendirilmiş R-cebirleri verilsin. Her $n \geq 0$ için $\varphi(A_n) \subseteq B_n$ olacak şekildeki $\varphi : A \to B$ R-cebir homomorfizmine derecelendirilmiş cebirlerin bir homomorfizmi denir.

Tanım 1.12. $S \subseteq A$ olacak şekildeki S derecelendirilmiş cebirine $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ derecelendirilmiş R-cebirinin bir derecelendirilmiş alt cebiri denir. S, A nın bir derecelendirilmiş alt cebiri ise S_n, A_n nin alt cebiri olmak üzere $S = \oplus_{n\geq 0} S_n$ şeklindedir. O zaman $S_n = A_n \cap S$ ve her m,n için $S_m S_n \subseteq S_{m+n}$ şeklindedir.

Tanım 1.13. A_n nin bir I_n alt modülü için $I = \oplus_{n\geq 0} I_n$ olmak üzere I ya $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ derecelendirilmiş cebirinin bir derecelendirilmiş ideali denir. O zaman $I_n = I \cap A_n$ ve her m,n için $A_m I_n \subseteq I_{m+n}$ ve $I_n A_m \subseteq I_{n+m}$ dir.

Örnek 1.14. $\mathbb{Z}[x]$ de çift katsayılı polinomlar bir derecelendirilmiş ideal oluştururlar, fakat x^2+1 in katları oluşturmaz.

$$I = 2\mathbb{Z}[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots \mid a_i \in 2\mathbb{Z}\},\ \mathbb{Z}[x] = \oplus_{n\geq 0} A_n$$

I_n , derecesi n olan çift katsayılı homojen polinomlar olmak üzere

$I = \oplus_{n\geq 0} I_n$, $A_m I_n \subseteq I_{m+n}$ ve $I_n A_m \subseteq I_{n+m}$ dir.

$I = (x^2+1)\,\mathbb{Z}[x] = \{(x^2+1)p(x) \mid p(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$ alalım. x^2+1 homojen olmadığından $\mathbb{Z}[x]$ de bir f polinomunun homojen bileşenleri x^2+1 tarafından bölünemez. I nın n dereceli tüm homojen elemanları kümesi olan I_n sadece 0 içerir ve $I \neq \oplus_{n\geq 0} I_n$ dir.

Örnek 1.15. R[x,y] nin x-y tarafından üretilen I ideali bir derecelendirilmiş idealdir. x-y homojen olduğundan R[x,y] nin bir f polinomunun x-y tarafından bölünebilir olması için gerek ve yeter koşul f nin her homojen bileşeninin x-y tarafından bölünebilmesidir. Böylece I_n, I nın derecesi n olan tüm homojen elemanlarının kümesi olmak üzere $I = \oplus_{n\geq 0} I_n$ dir.

Fakat R[x,y] nin x^2-y tarafından üretilen J ideali bir derecelendirilmiş ideal değildir. Çünkü x^2-y sıfırdan farklı homojen çarpanı olmadığından J nin n dereceli tüm homojen elemanları kümesi olan J_n sadece 0 içerir ve $J \neq \oplus_{n\geq 0} J_n$ dır.

Örnek 1.16. Bir $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ derecelendirilmiş cebirinin bir $S = \oplus_{n\geq 0}(A_n \cap S)$ derecelendirilmiş alt cebiri her m,n $\geq$ 0 için

i. $1 \in A_0 \cap S$ ve

ii. $(A_m \cap S)(A_n \cap S) \subseteq A_{m+n} \cap S$

olduğundan kendisi de bir derecelendirilmiş cebirdir.

Derecelendirilmiş bir $I = \oplus_{n\geq 0}(A_n \cap I)$ çift yönlü ideali ile derecelendirilmiş bir $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ cebirinin A/I bölüm cebiri

$$A/I = \oplus_{n\geq 0}(A_n + I)/I$$

derecelendirilmiş bir cebirdir.

$I = (A_1 \cap I) \oplus (A_2 \cap I) \oplus \ldots \oplus (A_n \cap I) \oplus \ldots$

$$\begin{aligned} A/I &= A/((A_1 \cap I) \oplus (A_2 \cap I) \oplus \ldots \oplus (A_n \cap I) \oplus \ldots) \\ &\cong (A/(A_1 \cap I)) \oplus (A/(A_2 \cap I)) \oplus \ldots \quad \text{(Çin kalan teoremi)} \\ &= ((A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n) \oplus \ldots / (A_1 \cap I)) \oplus ((A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus \ldots) / (A_2 \cap I)) \oplus \ldots \\ &= A_1/_{A_1 \cap I} \oplus A_2/_{A_2 \cap I} \oplus \ldots \end{aligned}$$

2. izomorfizm teoreminden $A/_{A \cap I} \cong A+I/_{I}$ olduğundan

$$A/I \cong A_1+I/_{I} \oplus A_2+I/_{I} \oplus \ldots$$

elde edilir.

Teorem 1.17. $\varphi : A \to B$ derecelendirilmiş R-cebir homomorfizmi ise Görφ , B nin derecelendirilmiş alt cebiri, Çekφ , A nın derecelendirilmiş alt ideali ve

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow & & \uparrow \subseteq \\ A/Çek\varphi & \xrightarrow[\theta]{} & Gör\varphi \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde derecelendirilmiş cebirlerin bir

$$\theta : A / Çek\varphi \rightarrow Gör\varphi$$

izomorfizmi vardır. (Grillet, 2007)

1.1. Serbest Birleşmeli Cebirler

Bu bölümde M. R. Bremner' in "Free Associative Algebras, Noncommutative Gröbner Bases, and Universal Associative Envelopes for Nonassociative Structures, 2013" makalesi temel alınarak serbest birleşmeli cebirler için gerekli olan tanımlara yer verilecektir.

Tanım 1.1.1. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ sonlu ya da sayılabilir sonsuzlukta bir belirsizler kümesi olsun. X kümesi üzerinde $i < j$ olması için gerek ve yeter koşul $x_i < x_j$ şeklinde bir tam sıralamanın tanımlı olmasıdır. X^* ile $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik} \in X$ ve $k \geq 0$ iken $w = x_{i1}x_{i2} \cdots x_{ik}$ kelimelerinin (monomiallerinin) kümesini gösterelim. $k=0$, $w=1$ boş monomialini gösterir. $w = x_{i1}x_{i2} \cdots x_{ik}$ monomialinin derecesi içerdiği harflerin sayısıdır, tekrarlarda dahildir : $\deg(w) = k$.

X^* üzerinde herhangi bir $u, v \in X^*$ için;

$$(u,v) \rightarrow uv$$

ikili işlemini birleşmeli olacak şekilde tanımlayalım. Bu işlemle X^*' a X tarafından üretilen serbest monoid denir.

Örnek 1.1.2. $X = \{a\}$ tek elemanlı ise, $X^* = \{a^k \mid k \geq 0\}$, a nın tüm negatif olmayan kuvvetlerinin kümesidir. X^* üzerindeki çarpma;

$$a^i a^j = a^{i+j}$$

ile verilirse X^* değişmelidir.

X, iki ya da daha fazla elemana sahipse, X^* değişmeli değildir. Örneğin $X=\{a,b\}$ ise tüm $k \geq 0$ için derecesi k olan 2^k tane ayrık kelime vardır:

k=0: 1

k=1: a, b

k=2: a^2,ab, ba, b^2

k=3: a^3, a^2b, aba, ab^2, ba^2, bab, b^2a, b^3

k=4: a^4,a^3b, a^2ba, a^2b^2,aba^2,abab, ab^2a, ab^3,ba^3,ba^2b, baba, bab^2,b^2a^2,b^2ab, b^3a, b^4

Tanım 1.1.3. Eğer bazı $v_1,v_2 \in X^*$ için $w=v_1uv_2$ ise boş olmayan bir $u \in X^*$ kelimesine $w \in X^*$ ın bir alt kelimesi denir.

$v_1=1$ ise u, w nin bir sol alt kelimesi, $v_2=1$ ise u, w nin bir sağ alt kelimesidir. Eğer $u \neq w$ ise u, w nin bir öz alt kelimesidir denir.

Tanım 1.1.4. X üzerindeki tam sıralamayı X^* üzerindeki tam sıralamaya genişletelim. Bu sıralama aşağıdaki şekilde tanımlıdır ve buna deglex (degree lexicographical) sıralama denir. $u, w \in X^*$ ise,

$$u < w \Leftrightarrow \deg(u) \leq \deg(w)$$

Burada $v, u', w' \in X^*$ için $u= vx_iu'$ ve $w= vx_jw'$, $x_i < x_j$ dir. $(x_i, x_j \in X)$

Örnek 1.1.5. $X=\{a,b\}$ ve $a<b$ olsun. X^* ın derecesi ≤ 3 olan kelimelerini deglex sıralamasıyla listeleyelim.

$1 < a < b < a^2 < ab < ba < b^2 < a^3 < a^2b < aba < ab^2 < ba^2 < bab < b^2a < b^3$.

Örnek 1.1.6. $X=\{a,b,c\}$ ve $a<b<c$ olsun. X^{*}' ın derecesi ≤ 3 olan kelimelerini deglex sıralamasıyla listeleyelim.

$1<a<b<c<a^2<ab<ac<ba<b^2<bc<ca<cb<c^2<a^3<a^2b<a^2c<aba<ab^2<abc<aca<acb$
$<ac^2<ba^2<bab<bac<b^2a<b^3<b^2c<bca<bcb<bc^2<ca^2<cab<cac<cba<cb^2<cbc<c^2a$
$<c^2b<c^3$

Tanım 1.1.7. Eğer tüm $u, v, w \in X^{*}$ için $u<v$ iken $uw<vw$ ve $wu<wv$ ise X^{*} üzerindeki tam sıralama çarpımsaldır denir. (Kısaca her $u, v, w_1, w_2 \in X^{*}$ için $w_1uw_2 < w_1vw_2$ olur.)

Tanım 1.1.8. X^{*} üzerindeki tam sıralama $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n \geq \ldots$ iken bir n için $w_n = w_{n+1} = \ldots$ ise azalan zincir koşulunu (DCC) sağlar. $(w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots \in X^{*})$

Lemma 1.1.9. Tanım 2.1.4 de verilen X^{*} üzerindeki $"<"$ sıralaması çarpımsal ve DCC yi sağlar.

Tanım 1.1.10. F bir cisim olsun. $F\langle X\rangle$ ile F üzerinde X^{*} bazı tarafından üretilen vektör uzayını gösterelim. $F\langle X\rangle$ üzerinde ;

$$\left(\sum_i a_i u_i\right)\left(\sum_j b_j v_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j u_i v_j \quad (a_i, b_j \in F;\ u_i, v_j \in X^{*}).$$

çarpımını tanımlayalım. Bu çarpım ile $F\langle X\rangle$, F üzerinde X tarafından üretilen serbest birleşmeli cebirdir. Boş kelime birim eleman olduğundan bu cebir birimlidir. $F\langle X\rangle$ ın elemanları X^{*} daki monomiallerin lineer kombinasyonlarıdır ve bu elemanlar değişmeli olmayan polinomlardır.

Örnek 1.1.11. $X=\{a\}$ ise , $F\langle X\rangle$ bir değişkenli F[a] birleşmeli polinom cebiri ile aynıdır. X , iki ya da daha fazla elemanlı ise, $F\langle X\rangle$ ile F[X] aynı değildir. Çünkü F[X] değişmeli fakat $F\langle X\rangle$ değişmeli değildir.

1.2. Tensör Cebiri

Bu bölüm de bir modülün tensör cebirinin yapısı P. A. Grillet, 2007, "Graduate texts in mathematics, second edition" kitabından faydalanılarak incelenecektir.

Bir modülün tensör cebiri o modül tarafından "serbest" olarak üretilmiş bir cebirdir.

R bir değişmeli birim elemanlı halka, tüm modüller birimli, tüm cebirler ve tensör çarpımları R üzerinde tanımlı, R değişmeli olduğundan n tane R-modülün tensör çarpımı bir R-modüldür.

A bir R-cebir olsun. A nın alt cebirlerinin her kesişimi, A nın bir alt cebiridir. O halde A nın her S alt kümesi için S yi içeren A nın bir en küçük alt cebiri vardır. A nın S yi içeren tüm alt cebirlerinin kesişimi olan $M = < S >$ alt cebiri S tarafından üretilir.

Bir A R-cebiri verilsin. M , A nın bir alt modülü olsun. A nın M tarafından üretilen alt cebiri $r_i 1_M + a_1 a_2 ... a_i, a_i \in M, r_i \in R$ formundaki elemanları içerir. M nin elemanları genellikle A daki bazı bağıntıları sağlar.

M nin $n \geq 2$ için $a_1 ... a_n$ elemanı M nin $a_1, ..., a_n$ elemanlarının bir n-lineer fonksiyonudur ve bu fonksiyon $a_1 \otimes ... \otimes a_n$ i $a_1 ... a_n$ 'ye dönüştüren $M \otimes ... \otimes M$ den A ya bir R-modül homomorfizmi belirler. O zaman $\varphi : R \to A$ ve $i : M \to A$ homomorfizmleri verildiğinde

$$\psi(r, m, (m \otimes m), ...) = \varphi(r) + i(m) + (i(m) + i(m)) + ...$$

şeklinde tanımlanan

$$\psi : R \oplus M \oplus (M \otimes M) \oplus ... \to A$$

dönüşümü bir örten modül homomorfizmidir.

İnşa. M bir R-modül olsun. M nin n. tensör kuvvetini $T^n(M)$ ya da $\otimes^n M$ ile gösterelim. $T^0(M) = R$, $T^1(M) = M$ ve $n \geq 2$ iken $T^n(M)=M \otimes \ldots \otimes M$ olsun. Her $m, n > 0$ için

$$T^m(M) \otimes T^n(M) \cong T^{m+n}(M)$$

olduğundan

$$T^m(M) \times T^n(M) \xrightarrow{\otimes} T^m(M) \otimes T^n(M) \xrightarrow{\cong} T^{m+n}(M)$$

dır ve dolayısıyla

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_m, b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_n) \longrightarrow a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_m \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_n$$

şeklinde tanımlanan bir bilineer

$$T^m(M) \times T^n(M) \cong T^{m+n}(M)$$

çarpımı vardır.

Benzer şekilde her $n > 0$ için R nin $T^n(M)$ üzerindeki sağ ve sol etkisi ve R nin kendi üzerindeki çarpımı bilineer çarpımlardır. Her $r, s \in T^0(M) = R$ ve $t \in T^n(M)$ için

$$\begin{aligned} R \otimes T^n(M) = T^0(M) \otimes T^n(M) &\cong T^n(M) \\ r \otimes t &\rightarrow rt \\ T^n(M) \otimes R = T^n(M) \otimes T^0(M) &\cong T^n(M) \\ t \otimes r &\rightarrow tr \\ R \otimes R = T^0(M) \otimes T^0(M) &\cong T^0(M) \\ r \otimes s &\rightarrow rs \end{aligned}$$

dır.

Tanım 1.2.1. Bir M R- modülünün tensör cebiri

$$\left(\sum_{m\geq 0} t_m\right)\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \sum_{m,n\geq 0} (t_m \otimes u_n)$$

ile tanımlanan çarpma ile birlikte $T(M) = \oplus_{n\geq 0} T^n(M)$ dir.

Önerme 1.2.2. Bir M (birimli) R-modülünün T(M) tensör cebiri bir derecelenmiş R-cebiridir ve M tarafından üretilir.

Önerme 1.2.3. Bir serbest M R-modülünden bir A R-cebiri içine her modül homomorfizmi T(M) den A ya bir cebir homomorfizmine tek bir şekilde genişletilir..

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d, "\varphi"'] & T(M) \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

İspat. $\varphi : M \to A$ bir modül homomorfizmi olsun. Her $n \geq 2$ ve her $a_1, a_2, ..., a_n \in M$ için A daki çarpım ile bir

$$M^n \longrightarrow A$$

$$(a_1, ..., a_n) \to \varphi(a_1)...\varphi(a_n)$$

n-lineer dönüşümü vardır. Bu dönüşüm her $a_1, a_2, .., a_n \in M$ için

$$\varphi_n(a_1 \otimes ... \otimes a_n) = \varphi(a_1)...\varphi(a_n)$$

şeklinde tanımlanan

$$\varphi_n : T^n(M) \to A$$

modül homomorfizmini belirler.

$\varphi_0(r) = r.1$ olacak şekilde $\varphi_0 : R \to A$ ve $\varphi_1 = \varphi : M \to A$ olsun. $n \geq 0$ için φ_n homomorfizmlerini

$$\overline{\varphi}(\sum_{n\geq 0} t_n) = \sum_{n\geq 0} \varphi_n(t_n),$$

şeklinde tanımlanan $\overline{\varphi} : T(M) \to A$ modül homomorfizmine genişletelim.

$t = a_1 \otimes ... \otimes a_m$ ve $u = b_1 \otimes ... \otimes b_n$ sırasıyla, $T^m(M)$ ve $T^n(M)$ nin üreteçleri olmak üzere $\overline{\varphi}(t)\overline{\varphi}(u) = \overline{\varphi}(tu)$ eşitliği sağlanır.

(m=0 ya da n=0 olduğunda φ_n bir modül homomorfizmidir.)

Ayrıca $\overline{\varphi}(1)=\varphi_0(1)=1$ ve her $t,u \in T(M)$ için yine yukarıdaki eşitlik sağlanır. Böylece $\overline{\varphi}$ bir cebir homomorfizmidir.

ψ , $\overline{\varphi}$ nin özelliklerini sağlayan başka bir cebir homomorfizmi olsun. O zaman

$$S=\left\{t\in T(M)\,\middle|\,\psi(t)=\overline{\varphi}(t)\right\}$$

M yi içeren T(M) nin bir alt cebiri olup $S=T(M)$ ve $\psi=\overline{\varphi}$ elde edilir.

Sonuç 1.2.4. M, bir X kümesi üzerinde serbest R- modül ise T(M), X kümesi üzerinde serbest R-cebirdir.

İspat. X den bir A R-cebirine olan her dönüşüm M den A ya bir modül homomorfizmine tek şekilde genişletilir. Önerme 1.2.3 den M den A ya her modül homomorfizmi T(M) den A ya tek bir şekilde genişletilir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[r] \arrow[d] & T(M) \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Sonuç 1.2.5. Eğer M bir X kümesi üzerinde serbest R-modül ise, o zaman T(M) $n\geq 0$ ve $x_1,\dots,x_n \in X$ için tüm $x_1\otimes\dots\otimes x_n$ elemanlarının oluşturduğu baz ile bir serbest R-modüldür.

2. F[x] 'İN ALTCEBİRLERİ

Bu bölümde P.M.Cohn, 1963 makalesinden yararlanılmıştır.

F bir cisim ve F[x], F cismi üzerinde x üreteci ile serbest birleşmeli cebir olsun. F[x] in serbest alt cebirlerini tam olarak tanımlayabilmek için öncelikle bazı gerekli tanımları ve teoremleri verelim.

Tanım 2.1. R bir halka ve S de R yi içeren bir R-cebir olsun. Eğer

$$x^n + r_1x^{n-1} + \dots + r_{n-1}x + r_n = 0$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ ve $r_1,\dots,r_n \in R$ elemanları varsa bir $x \in S$ elemanına R üzerinde kapalıdır denir.

R üzerinde kapalı olan S nin tüm elemanlarının kümesine S de R nin tam kapanışı denir. Eğer S nin her elemanı R üzerinde tam ise S, R üzerinde tamdır denir.

Eğer R nin tam kapanışı R ye eşit ise R halkasına tam kapalıdır denir.

Tanım 2.2. R bir tamlık bölgesi olsun. $0 \neq r \in R$, r birim olmasın.

i. $r = p_1.p_2...p_n$, $p_i \in R$ indirgenemezler.

ii. Eğer $r = q_1.q_2...q_m$, r nin başka bir parçalanışı $r = p_1....p_s$ varsa;

$uq_i = p_i$ (u birim) ve $m = s$ $(i = 1,2,...,n)$

koşulları sağlanıyorsa, R ye tek çarpan bölgesi denir.

Teorem 2.3. Her tek çarpan bölgesi tam kapalıdır.

İspat. R bir tek çarpan bölgesi olsun. K da R nin kesirler cismi olsun. $u \in K$, R üzerinde tam ise bazı $c_0,...,c_{n-1} \in R$ için

$$u^n + c_{n-1}u^{n-1} + ... + c_0 = 0 \qquad (1)$$

dır. (1) denkleminde $u = \frac{a}{b}$, $a,b \in R$ yazarsak, R tek çarpan bölgesi olduğundan a ve b nin birimden farklı hiç ortak böleni yoktur. b^n ile (1) denklemini çarparsak

$$a^n + c_{n-1}.b.a^{n-1} + c_{n-2}.b^2.a^{n-2} + ... + c_0 b^n = 0$$

elde edilir.

d, b nin indirgenemez bir böleni olsun. b = d.k olur ve R tek çarpan bölgesi olduğundan d asaldır.

d / a_n olup, d asal olduğundan d / a dır.

d / a ve d / b ise d, a ile b nin birim olmayan bir ortak bölenidir. Halbuki a ve b nin birimden farklı hiç ortak böleni yoktur. O halde b bir birim olmalıdır , b birim ise $u \in R$ olmalıdır.

O halde R tam kapalıdır. (Rm, 2013a)

Önerme 2.4. F[x] in bir R alt cebirinin serbest olması için gerek ve yeter koşul R nin tam kapalı olmasıdır.

İspat. (Cohn, 1963)

Örnek 2.5. F[x] in $F[x^2, x^3]$ alt halkasını düşünelim. $F[x^2, x^3]$ in kesirler cisminde $x = \frac{x^3}{x^2}$ elemanı vardır. Bu eleman bir z^2 -x^2 polinomunun bir kökü olduğundan $F[x^2, x^3]$ de tamdır. Fakat x, $F[x^2, x^3]$ in bir elemanı değildir. O halde $F[x^2, x^3]$ tam kapalı değildir ve bu yüzden serbest değildir.

Örnek 2.6. $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ halkasını düşünelim.

$$u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q} \text{ için } 2u - 1 = \sqrt{5} \text{ ve } 4u^2 - 4u - 4 = 0 \text{ olduğundan u, } \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$$

de kapalıdır fakat $u \notin \mathbb{Z}\sqrt{5}$ dir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ tam kapalı değildir ve bu yüzden serbest değildir. (Rm, 2013b)

Örnek 2.7. $\mathbb{R}$=$\mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ in serbest olmadığını gösterelim. $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$, $\mathbb{R} = \mathbb{Z}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ nin kesirler cismidir.

$$u = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{R} \text{ fakat } \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2+\sqrt{3} \text{ ve } u^2 - 2 = \sqrt{3} \text{ dir.}$$

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ alalım. $(x^2-2)^2 - 3 = 0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunun kökü $\mathbb{R}$ nin elemanı olmadığından $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ üzerinde tam kapalı değildir. O halde serbest değildir.

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $\mathbb{Z}[x]$ de bir polinomunun kökü olduğundan $\mathbb{Z}$ üzerinde tamdır.
(Rm, 2013b)

Örnek 2.8. $[K:Q]<\infty$ olduğunda $\mathcal{Q}_K$ kesir cismi tam kapalıdır. Eğer $u\in K$, $\mathcal{Q}_K$ üzerinde tam ise $\mathbb{Z}\subset \mathcal{Q}_K \subset \mathcal{Q}_K[u]$ dır ve u, $\mathbb{Z}$ üzerinde tamdır ve tanımdan $u\in \mathcal{Q}_K$ olur. $\mathcal{Q}_K$ K nın $\mathbb{Z}$ deki tam kapanışı olarak tanımlanabilir. (Rm, 2013b)

Örnek 2.9. $\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^3)$ nin tam kapalı olmadığını gösterelim.

y^2-x^3 indirgenemez olduğundan y^2-x^3 tarafından üretilen (y^2-x^3) ideali maksimal idealdir. Birimli bir halkada her maksimal ideal asal idealdir. Dolayısıyla (y^2-x^3) asal idealdir.R bir birimli halka ve I, R nin bir asal ideali ise R/I bir tamlık bölgesidir. Böylece $\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^3)$ bir tamlık bölgesidir.

$\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^3)$ ün tam kapalı olmadığını gösterelim.

$$\begin{aligned}\delta:\mathbb{C}[x,y]&\to\mathbb{C}[t]\\ x&\to t^2\\ y&\to t^3\end{aligned}$$

dönüşümünü alalım. Her $a=a(x,y)$, $b=b(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ için;

$$\delta(a+b)=\delta((a+b)(x,y))=(a+b)(t^2,t^3)=a(t^2,t^3)+b(t^2,t^3)=\delta(a)+\delta(b)$$

$$\delta(a.b)=\delta(a.b(x,y))=a.b(t^2,t^3)=a(t^2,t^3).b(t^2,t^3)=\delta(a).\delta(b)$$

olduğundan δ bir halka homomorfizmidir.

$$\text{Çek}\delta=\{a\in\mathbb{C}[x,y]\mid \delta(a)=0\}$$

$\delta(y^2-x^3)=\delta(y^2)-\delta(x^3)=t^6-t^6=0$ olup $(y^2-x^3)\in \text{Çek}\delta$ dir.

Bu dönüşümün çekirdeği (y^2-x^3), görüntüsü $\mathbb{C}[t^2,t^3]$ tür.

1. izomorfizm teoreminden;

$$\mathbb{C}[x,y] / \text{Çek}\delta \cong \delta(\mathbb{C}[x,y])$$

$$\mathbb{C}[x,y] / (y^2 - x^3) \cong \delta(\mathbb{C}[t^2,t^3])$$

elde edilir. $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{C}[t^2,t^3]$ ün kesirler cismidir. $t \in \mathbb{C}[t]$, $\mathbb{C}[t^2,t^3]$ üzerinde tamdır.

$z = t$ alalım. $z^2 = t^2 \Rightarrow z^2 - t^2 = 0$, $p(z) = z^2 - t^2$ fakat $t \notin \mathbb{C}[t^2,t^3]$ dür. O zaman $\mathbb{C}[t^2,t^3]$ tam kapalı değildir. $\mathbb{C}[t^2,t^3]$, $\mathbb{C}[t]$ nin tam kapanışı değildir. Dolayısıyla serbest değildir. (Rm, 2013b)

Örnek 2.10. $A = \mathbb{C}[x,y,z] / (z^2 - xy)$ tam kapalı dolayısıyla serbest olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{C}[x,y,z] &\to \mathbb{C}[u,v] \\ x &\to u^2 \\ y &\to v^2 \\ z &\to uv \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Çekδ yi belirleyelim.

$$\delta(z^2 - xy) = \delta(z^2) - \delta(x).\delta(y) = u^2v^2 - u^2v^2 = 0$$

$$B = \text{Gör}\delta = \mathbb{C}[\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{u^2}, \underset{\substack{\downarrow \\ y}}{v^2}, \underset{\substack{\downarrow \\ \sqrt{xy}}}{uv}]$$

B için tam kapalı olduğunu gösterelim.

$r,s \in \mathbb{C}[x,y]$ için bir $r + s\sqrt{xy} \in \mathbb{C}[x,y,\sqrt{xy}]$ elemanını , $\mathbb{C}[x,y]$ üzerinde tam olacak şekilde seçelim.

$$z = r + s\sqrt{xy}$$
$$(z - r)^2 = s^2xy$$
$$(z - r)^2 - s^2xy = 0$$

bulunur. Benzer şekilde $r - s\sqrt{xy} \in \mathbb{C}[x,y,\sqrt{xy}]$ elemanı da $\mathbb{C}[x,y]$ üzerinde tamdır.

$(r + s\sqrt{xy}) + (r - s\sqrt{xy}) = 2r$, $\mathbb{C}[x,y]$ üzerinde tamdır.

$\mathbb{C}[x,y]$ bir tek çarpan bölgesidir. Her tek çarpan bölgesi tam kapalı olduğundan $\mathbb{C}[x,y]$ tam kapalıdır. $2r \in \mathbb{C}[x,y]$ ve $r \in \mathbb{C}[x,y]$, $s\sqrt{xy}$, $\mathbb{C}[x,y]$ üzerinde tam ve $s^2xy \in \mathbb{C}[x,y]$, $s \in \mathbb{C}[x,y]$ olup $r + s\sqrt{xy} \in \mathbb{C}[x,y,\sqrt{xy}]$ dir.

$\mathbb{C}[x,y,\sqrt{xy}]$, $\mathbb{C}[x,y,\sqrt{xy}]$ nin tam kapanışıdır.

O halde B tam kapalıdır.

1. izomorfizm teoreminden;

$$\mathbb{C}[x,y,z] / \text{Çek}\delta \cong B$$

$\mathbb{C}[x,y,z] / (z^2 - xy) \cong B$ olup B tam kapalı olduğundan $\mathbb{C}[x,y,z] / (z^2 - xy)$ de tam kapalıdır. Dolayısıyla serbesttir. (Rm, 2013b)

3. SERBEST BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN ALT CEBİRLERİ

Bu bölümde P.M.Cohn, 1963 makalesinden faydalanılmıştır.

Tanım 3.1. R bir halka olsun. Her $a \in R$ için

i. Her sıfırdan farklı $a \in R$ için $d(a) > 0$ ve $d(0) = -\infty$

ii. $d(a - b) \leq \max(d(a), d(b))$

iii. $d(ab) = d(a) + d(b)$

koşulları sağlanıyorsa R ye bir d derece fonksiyonuna sahiptir denir.

Tanım 3.2. R bir halka olsun. Her $a, b \in R, b \neq 0$ için $d(r) < d(b)$ olacak şekilde $a = bq + r$ eşitliğini sağlayan $q, r \in R$ var ise R ye bir d derece fonksiyonuyla bir bölme algoritmasına sahiptir denir.

Tanım 3.3. R bir halka olsun.

$d(a_1b_1) = d(a_2b_2) = \ldots = d(a_rb_r) > d\sum(a_ib_i)$, $d(a_1) \geq d(a_i)$ $(i = 2,\ldots,r)$ koşulunu sağlayan $a_1,\ldots,a_r, b_1,\ldots,b_r \in R$ elemanları verilsin.

$$d(a_1 - \sum a_ic_i) < d(a_1), \quad d(a_ic_i) \leq d(a_1)$$

olacak şekilde $c_2,\ldots,c_r \in R$ elemanları varsa d derece fonksiyonuna genelleştirilmiş algoritmayı sağlıyor denir.

Bu derece fonksiyonuna sahip bir halkaya genelleştirilmiş algoritmayı sağlar denir.

Tanım 3.4. R bir halka ve d bir derece fonksiyonu olsun.

i. Eğer $a_1, a_2,\ldots,a_r \in R$ elemanları için,

$$d(a_1b_1) = d(a_2b_2) = \ldots = d(a_rb_r) > d\sum(a_ib_i)$$

olmak üzere $b_1,...,b_r \in R$ elemanları varsa $a_1,a_2,...,a_r$ elemanlarına sağ R-bağımlı denir.

ii. Bir $a \in R$ için eğer $a = 0$ veya

$$d(a - \sum a_i c_i) < d(a),\ d(a_i c_i) \leq d(a) \quad i = 1,...,r$$

olacak şekilde $c_1,...,c_r \in R$ elemanları varsa a ya R nin $a_1,a_2,...,a_r$ elemanları üzerinde sağ R-bağımlı denir.

Aşağıdaki önermede Cohn , serbest birleşmeli cebirlerin alt cebirlerinin karakterizasyonunu verir.

Önerme 3.5. A, F cismi üzerinde X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir olsun. O halde A nın bir B alt cebirinin serbest olması için gerek ve yeter koşul B de genelleştirilmiş algoritmayı sağlayan bir derece fonksiyonunun var olmasıdır.

A daki (X kümesine bağlı) doğal derece fonksiyonunu inceleyerek B de bir derece-fonksiyonu tanımlamak için yeterli bir şartı elde edebiliriz.

Sonuç 3.6. A, F cismi üzerinde X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir olsun. A nın X-derecesine bağlı genelleştirilmiş algoritmayı sağlayan her alt cebiri serbesttir.

Bu ifadenin tersi doğru değildir, yani A serbest, B alt cebiri de serbest olduğu halde B algoritmayı sağlamayabilir.

Örneğin, A, x ve y üzerinde serbest ve B de $u = x + y^2$, $v = y^3$ tarafından üretilen alt cebir olsun. A nın sırasıyla u , v yi x, y^3 dönüştüren $x \to x - y^2$, $y \to y$ dönüşümü tarafından üretilen θ otomorfizmi için,

$$\theta(u) = \theta(x+y^2) = \theta(x) + \theta(y^2) = x - y^2 + y^2 = x$$
$$\theta(v) = \theta(y^3) = y^3$$

ve x, y^3 tarafından üretilen cebir de serbesttir. Dolayısıyla B de u , v üzerinde serbesttir.

B genelleştirilmiş algoritmayı sağlıyor olsun.

$$d(uv) = d(xy^3 + y^5) = 5,$$
$$d(vu) = d(y^3x + y^5) = 5,$$
$$d(uv\text{-}vu) = d(xy^3 - y^3x) = 4,$$

olup, $d(uv - vu) < d(uv) = d(vu)$ yani, u , v B-bağımlıdır.

B deki bazı c ler için $d(v - uc) < 3$ olur, o halde u ve v yi incelediğimizde c nin $c = y + \alpha \ (\alpha \in F)$ formunda olmak zorunda olduğunu görürüz;

$$d(v - u(y + \alpha)) = d(y^3 - (x + y^2)(y + \alpha)) = d(y^3 - xy - x\alpha - y^3 - y^2\alpha) = 2$$

ve $d(u.c) \leq d(y^3)$ dir.

Bu da B , y yi içerir demek olacaktır $(y.y = y^2 \in B)$ ve buradan $x = u - y^2$ yani B= A dır. Fakat A nın θ otomorfizmi B den x ve y^3 tarafından üretilen A nın bir özalt cebirine tanımlanmıştı. Dolayısıyla v, u üzerinde B bağımlı değildir. B genelleştirilmiş algoritmayı sağlamaz.

Yine de homojenlikten yararlanarak gerekli ve yeterli şartları elde edebiliriz.

Önerme 3.7. A, F cismi üzerinde bir X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir olsun. Homojen elemanlar tarafından üretilen herhangi bir B alt cebirinin serbest olması için gerek ve yeter koşul B nin X-derecesine bağlı genel algoritmayı sağlamasıdır.

Önermenin ispatı için eğer B, Y de serbest ve Y deki her bir y_i nin derecesi n_i pozitif tam sayısı ise B,

$$d(\sum y_{i1} \dots y_{ir}\alpha_{i1\dots ir}) = \max\{n_{i1} + \dots + n_{ir} : \alpha_{i1\dots ir} \neq 0\} \qquad (2)$$

şeklinde tanımlanan derece fonksiyonuna bağlı algoritmayı sağlar. Şimdi n_i yi y_i'nin X-derecesi olarak alalım; o halde (2) denklemi , B nin herhangi bir elemanının X-derecesini verecektir, buradan ispat tamamlanır.

Genel olarak, A bir serbest birleşmeli cebir ise, herhangi bir X serbest üreteç kümesi genelleştirilmiş algoritmayı sağlayan bir d_x derece-fonksiyonu tanımlar, burada d_x 'e kısaca bir algoritmik derece-fonksiyonu denir.

A daki her algoritmik derece-fonksiyonu için bir serbest üreteç kümesi vardır ve A daki iki serbest üreteç kümesinin aynı derece-fonksiyonunu tanımlayabilmeleri için gerek ve yeter koşul aralarında bir lineer dönüşümün tanımlı olmasıdır. A nın serbest üreteç kümeleri A nın tüm otomorfizmlerinin grubu Aut(A) ile elde edilir. Böylece algoritmik derece-fonksiyonları da Aut(A) tarafından belirlenir. B, A nın bir serbest alt cebiri olsun, o halde Önerme 3.5 den B üzerinde algoritmik derece-fonksiyonları vardır, fakat geriye şu problem kalır:

A ve B nin ikisi de genelleştirilmiş algoritmayı sağlayacak şekilde A üzerinde her zaman bir derece-fonksiyonu var mıdır?

A=F[x] için Aut(A) $x \to ax + b\ (a \neq 0)$ lineer dönüşümlerinden oluşur ve F[x] de bir tek algoritmik derece fonksiyonu vardır. Buradan F[x] in alt cebirlerinin serbest olması için bir ikinci kriter daha elde edilir.

Önerme 3.8. F[x] in bir R alt cebirinin serbest olması için gerek ve yeter koşul R'nin bölme algoritmasını sağlamasıdır.

Serbest birleşmeli cebirlerin altcebirlerinin serbest olması için daha kullanışlı bir yeterlilik koşulu belirlemek üzere, bir d-derece fonksiyonuyla birlikte F üzerinde herhangi bir R cebirini düşünelim. Bir (sağ) M R-modülüne M nin sıfırdan farklı her X elemanı için $d(x) \geq 0$ ve $d(0) = -\infty$ ile birlikte

i. $d(x - y) \leq \max(d(x), d(y))$
ii. $d(xa) = d(x) + d(a) \quad x,y \in M,\ a \in R$

koşulları sağlanıyorsa bir d derece fonksiyonuna sahiptir denir.

Not 3.9. R, kendi üzerine bir modül olarak derece fonksiyonuna sahiptir, bu derece fonksiyonuna d diyelim. Daha genel olarak, eğer S, R nin herhangi bir alt halkası ise, R deki derece fonksiyonu S nin de derece fonksiyonudur ve R deki orijinal derece-fonksiyonu R, S-modül olarak düşünüldüğünde hala kullanılabilir.

(i) ve (ii) den her $u_i \in M$ ve her $a_i \in R$ için,

$$d(\sum u_i a_i) \leq \max\{d(u_i) + d(a_i)\}$$

olur.

Tanım 3.10. Eğer R nin elemanlarının herhangi bir $(a_i)_{i\in I}$ ailesi için (bazı elemanları dışında hepsi sıfır),

$$d(\sum u_i a_i) = \max\{d(u_i) + d(a_i)\}$$

ise M' nin elemanlarının bir $U=(u_i)_{i\in I}$ ailesine R-bağımsızdır denir.

Bir M, R-modülü, R-bağımsız bir U üreteç kümesi tarafından üretiliyorsa serbesttir. O halde artık ana sonucu verebiliriz.

Teorem 3.11. A, F cismi üzerinde bir serbest üreteç kümesi ile tanımlanan derece fonksiyonu ile birlikte bir serbest birleşmeli cebir olsun. B , A nın B-bağımsız bazıyla serbest sağ B-modülü olacak şekilde herhangi bir alt cebiri ise B, F üzerinde serbest birleşmeli cebirdir.

Aynı sonuç sol modüller için de yazılabilir. B nin genelleştirilmiş algoritmayı sağladığı gösterilir. (A ya Önerme 3.5 ve Sonuç 3.6 nın uygulanmasıyla derece-fonksiyonuna göre ispatlanır.) Simetriden dolayı B nin herhangi sol B-bağımsız alt kümesinin, maksimal dereceli herhangi bir elemanının diğer elemanlar üzerinde sol bağımlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$U = (u_i)_{i \in I}$ A nın bir sağ B-bağımsız bazı ve U da derecesi sıfır olan bir elaman olsun. Genelliği bozmaksızın bu elemanı $u_0 = 1$ alabiliriz. Verilen herhangi bir sol B-bağımlı $\{b_1, \ldots, b_k\}$ kümesi için, b_1 maksimal dereceli olsun. O zaman A daki genelleştirilmiş algoritmadan, b_1, $b_2, \ldots, b_k$ üzerinde sol A-bağımlı olur, yani

$$d(c_r b_r) \leq d(b_1), \; d(c') < d(b_1) \tag{3}$$

olmak üzere

$$b_1 = \sum_{r>1} c_r b_r + c' \quad (c_r, c' \in A) \tag{4}$$

dir. Burada

$$c_i = \sum u_i a_{ir}, \quad c' = \sum u_i a_i' \quad (a_{ir}, a_i' \in B)$$

alınırsa ve bu değerleri (4) deki denkleme yerleştirirsek;

$$b_1 = \sum_{r>1} a_{0r} b_r + a_0$$

dan

$$u_0 b_1 = \sum_{r>1} \sum_{i} u_i a_{ir} b_r + \sum u_i a_i^{'}$$

elde ederiz.

Bundan başka (3) den ve U nun sağ B-bağımsızlığından,

$$d(a_{0r} b_r) \leq d(c_r b_r) \leq d(b_1) \text{ ve } d(a_0^{'}) \leq d(c') < d(b_1)$$

olur.

Bu da $b_2,\ldots,b_k$ üzerinde b_1 in sol B-bağımlı olduğunu gösterir. Böylece B genelleştirilmiş algoritmayı sağlar.

Cohn, 1963 de genelleştirilmiş algoritmayı sağlayan bir derece-fonksiyonuna sahip bir R halkasının bir R-bağımsız bazıyla her sağ idealinin serbest olduğunu gösterir. Aynı ispat genelleştirilmiş algoritmayı sağlayan bir derece-fonksiyonuna sahip bir R-modülün serbest olduğu gerçeğine ulaşmak için de kullanılabilir. Buradan şu sonuç elde edilir.

Sonuç 3.12. A, F üzerinde bir serbest birleşmeli cebir olsun. B, A nın bir altcebiri ve A bir B-modül olarak genelleştirilmiş algoritmayı sağlıyor ise B bir serbest alt cebirdir.

Sonuç 3.13. A bir serbest birleşmeli cebir olsun. B, A nın homojen elemanlar tarafından üretilen bir altcebiri ve A bir serbest B-modül ise B homojen elemanlardan oluşan bir serbest üreteç kümesine sahiptir.

Teorem 3.11 e göre B serbesttir. B nin herhangi bir elemanının homojen bileşenleri de yine B ye aittir. B nin genişletme idealinin herhangi bir sağ B-bağımsız üreteç kümesi cebir olarak B nin bir serbest üreteç kümesidir.

4. LİE CEBİRLERİ

Tanım 4.1. L bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde "Lie çarpımı" denilen bir $[,]:L \times L \to L$ bilineer fonksiyonu tanımlı ve aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde bir Lie cebiri denir.

i. Her $x \in L$ için $[x,x]=0$

ii. Her $x,y,z \in L$ için $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

A bir birleşmeli cebir olsun. Her $u,v \in A$ için $[u,v]=u.v-v.u$ işlemiyle A bir Lie cebiridir ve bu cebiri $[A]$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.2. L bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan birim elemanlı birleşmeli U(L) cebirine L nin evrensel zarf cebiri denir.

i. L den $[U(L)]$ ye bir $i:L \to [U(L)]$ kanonik homomorfizmi vardır.

ii. F cismi üzerindeki her birim elemanlı birleşmeli W cebiri ve her

$$J:L \to [W]$$

homomorfizmi için $J=\psi \circ i$ olacak şekilde bir tek

$$\psi:[U(L)] \to [W]$$

homomorfizmi vardır. (Tvalavadze, 2010)

Şimdi L bir Lie cebiri olsun. L nin U(L) evrensel zarf cebirini inşa edelim.

L nin cebir yapısını bir an için unutup sadece bir vektör uzayı olarak düşünelim. T(L) tensör cebirini kuralım.

$$T(L)=F \oplus L \oplus T^2L \oplus \ldots$$

T(L) de bir I idealini aşağıdaki şekilde tanımlayalım: $x,y \in L$ olmak üzere,

$I_{x,y} = x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ şeklinde elemanları düşünelim. Bu elemanlar tarafından doğrulan ideale I diyelim.

$$I = \left\{ \sum_{x,y \in L} t \otimes I_{x,y} \otimes t' \mid t,t' \in T(L) \ , x,y \in L \right\}$$

$U(L) = T(L)/I$ bölüm cebirini ve $\pi : T(L) \to U(L)$ kanonik projeksiyonu nu düşünelim.

$$\pi : T(L) \longrightarrow T(L)/I$$

$$\pi(I) = 0 \quad (I \in \text{Çek}\pi) \text{ ve}$$

$$\pi(x \otimes y - (y \otimes x) - [x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x) - \pi[x, y] = 0$$
$$([x, y] = xy - yx)$$

U(L), π ile birlikte bir Lie cebiridir.

Bir X kümesi tarafından doğrulan bir Lie cebirinin inşasını inceleyelim. $X \neq \phi$ olsun.

$$V(X) = \left\{ \sum_{x \in X} c(x)x \mid c(x) \in F, x \in X \right\}$$

kümesi bir vektör uzayıdır.

$V(X)$ de toplama ve çarpma aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\sum c(x)x + \sum d(x)x = \sum (c(x) + d(x))x$$

$$\lambda \sum c(x)x = \sum (\lambda c(x))x$$

$T(V(X))$ tensör cebirini düşünelim. $T(V(X))$ üzerinde $u,v \in T(V(X))$ için;

$$[u,v] = u \otimes v - v \otimes u$$

çarpımını tanımlarsak $T(V(X))_L$ Lie cebiri elde edilir.

$T(V(X))_L$ içinde X i içeren bütün alt cebirlerin kesişimi X tarafından doğurulan Lie cebiridir. Bu cebir $L(X)$ ile gösterilir.

4.1. Poincaré - Birkhoff - Witt Teoremi

Bu bölüm N. Jacobson , 1962, Lie Algebras kitabından yararlanılarak hazırlanmıştır.

J bir küme iken $\{u_j | j \in J\}$ V nin bir bazıdır. O halde n dereceli $(n \geq 1)$ $u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_n}$ monomialler kümesi V_n için bir bazdır.

J indeks kümesinin elemanlarının sıralı olduğunu düşünelim ve herhangi $n \geq 1$ için verilen monomiallerin kümesinde bir kısmi sıralama tanımlamak için bu sıralamayı kullanalım.

Tanım 4.1.1. Bir $u = u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_n}$ monomialinin indeksi $i < k$ için

$$\eta_{ik} = \begin{cases} 0 & , j_i < j_k \text{ ise} \\ 1 & , j_i = j_k \text{ ise} \end{cases}$$

ile birlikte

$$\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_n}) = \sum_{i<k} \eta_{ik}$$

şeklinde tanımlanır.

$\operatorname{ind} u = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_n$ olmasıdır. Bu özelliği sağlayan monomiallere "standart monomial" denir.

Örnek 4.1.2. n=5 olsun. $j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq j_4 \leq j_5$ iken $u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes u_{j_3} \otimes u_{j_4} \otimes u_{j_5}$ monomialinin indeksini bulalım.

$$\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes u_{j_3} \otimes u_{j_4} \otimes u_{j_5}) = \sum_{i<k} \eta_{ik} = \eta_{12} + \eta_{23} + \eta_{34} + \eta_{45} = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

elde edilir.

Not. $j_t > j_{t+1}$ olmak üzere ;

$$\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_n}) \text{ ve } \operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t} \otimes \cdots \otimes u_{j_n})$$

monomiallerinin indekslerini karşılaştıralım. Burada 2. monomial u_{j_t} , $u_{j_{t+1}}$ ' in yer değiştirmesiyle elde edilmiştir. η'_{ik} , 2. monomialin η sini belirtsin. O halde,

i, n $\neq$ t, t+1 ise $\eta'_{in} = \eta_{in}$,
$i < t$ ise $\eta'_{it} = \eta_{i,t+1}$, $\eta'_{i,t+1} = \eta_{it}$,
$n > t+1$ *ise* $\eta'_{tn} = \eta_{t+1,n}$, $\eta'_{t+1,n} = \eta_{tn}$

ve $\eta'_{t,t+1} = 0$, $\eta_{t,t+1} = 1$ elde edilir. Buradan

$\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_n}) = 1 + \operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t} \otimes \cdots \otimes u_{j_n})$ olur.

Örnek 4.1.3. n = 6 olsun. $j_3 > j_4$ iken

$\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes u_{j_3} \otimes u_{j_4} \otimes u_{j_5} \otimes u_{j_6})$ ve $\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes u_{j_4} \otimes u_{j_3} \otimes u_{j_5} \otimes u_{j_6})$

monomiallerinin indekslerini karşılaştıralım.

$$\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes u_{j_3} \otimes u_{j_4} \otimes u_{j_5} \otimes u_{j_6}) = \sum_{i<k} \eta_{ik} = \underbrace{\eta_{12}}_{0} + \underbrace{\eta_{23}}_{0} + \underbrace{\eta_{34}}_{1} + \underbrace{\eta_{45}}_{0} + \underbrace{\eta_{56}}_{0} = 1$$

$$\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes u_{j_4} \otimes u_{j_3} \otimes u_{j_5} \otimes u_{j_6}) = \sum_{i<k} \eta'_{ik} = \underbrace{\eta'_{12}}_{0} + \underbrace{\eta'_{23}}_{0} + \underbrace{\eta'_{34}}_{0} + \underbrace{\eta'_{45}}_{0} + \underbrace{\eta'_{56}}_{0} = 0$$

olup,

$\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes u_{j_3} \otimes u_{j_4} \otimes u_{j_5} \otimes u_{j_6}) = 1 + \operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes u_{j_4} \otimes u_{j_3} \otimes u_{j_5} \otimes u_{j_6})$ elde edilir. Buradan,

$\operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_n}) = 1 + \operatorname{ind}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t} \otimes \cdots \otimes u_{j_n})$ olur.

Bu ifadeyi $U(L) = T(L)/I$ cebirine uygulayıp, sıradaki önermeyi ispatlayalım.

Önerme 4.1.4. T(L) nin her elemanı standart monomiallerin bir lineer kombinasyonuna modI kongruentdir.

İspat. Önermeyi monomialler için ispatlamak yeterlidir. Bu monomialleri derecelerine ve indekslerine göre sıralarız. İddiayı tümevarım yöntemiyle ispatlayalım. Bir $u_{j_1} \otimes u_{j_2} \cdots \otimes u_{j_n}$ monomiali verildiğinde hipotezin daha düşük dereceli monomialler ve verilen monomialden düşük indeksli olan aynı n dereceli monomialler için doğru olduğunu varsayalım.

Monomialin standart olmadığını varsayalım. $j_t > j_{t+1}$ olsun.

$$u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_n} = u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t} \otimes \cdots \otimes u_{j_n} - u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t} \otimes \cdots \otimes u_{j_n} + u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_n}$$

$$= u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t} \otimes \cdots \otimes u_{j_n} + u_{j_1} \otimes \cdots \otimes (u_{j_t} \otimes u_{j_{t+1}} - u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t}) \otimes \cdots \otimes u_{j_n}$$

olup,

$$u_{j_t} \otimes u_{j_{t+1}} - u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t} \equiv [u_{j_t}, u_{j_{t+1}}] \ (\text{mod} I) \text{ olduğundan}$$

$$u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_n} \equiv \underbrace{u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t} \otimes \cdots \otimes u_{j_n}}_{\text{verilen monomialden düşük indeksli}} + \underbrace{u_{j_1} \otimes \cdots \otimes [u_{j_t}, u_{j_{t+1}}] \otimes \cdots \otimes u_{j_n}}_{\text{düşük dereceli monomiallerin bir lineer kombinasyonu}} \ (\text{mod} I)$$

dir.

Sağ taraftaki 2. terim düşük dereceli monomiallerin bir lineer kombinasyonu iken, ilk terim verilen monomialden daha düşük indekslidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

1' in kosetlerinin ve standart monomiallerin lineer bağımsız ve U(L) için bir baz olduğunu gösterelim. Bunun için $i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_n$, $i_j \in J$ olmak üzere $u_{i_1} \otimes u_{i_2} \cdots \otimes u_{i_n}$ bazıyla birlikte β_n vektör uzayını düşünelim.

$$\beta = F \oplus \beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \cdots$$

Gerekli olan bağımsızlık şartı aşağıdaki önermeden elde edilir.

Önerme 4.1.5. $\sigma(1) = 1$, $i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_n$ ise;

$$\sigma(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \cdots \otimes u_{i_n}) = u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n} \tag{5}$$

$$\sigma(u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_n} - u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_{t+1}} \otimes u_{j_t} \otimes \cdots \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes \cdots \otimes [u_{j_t}, u_{j_{t+1}}] \otimes \cdots \otimes u_{j_n}) \tag{6}$$

olacak şekilde bir

$$\sigma : T(U) \to \beta \text{ lineer dönüşümü vardır.}$$

İspat. $\sigma(1)=1$ ve L , L nin derecesi n ve indeksi $\leq j$ olan monomialler tarafından gerilen alt uzayı olsun.

Bir σ lineer dönüşümü bu uzaydaki monomialler için (5) ve (6) yı sağlayan, $F\oplus L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_{n-1}$ için daha önceden tanımlanmış olsun. Derecesi n olan standart monomialler için $\sigma(u_{i_1}\otimes u_{i_2}\cdots\otimes u_{i_n})=u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_n}$ uygulayarak σ' yi

$F\oplus L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_{n-1}\oplus L_{n,0}$ a lineer olarak genişleteceğiz.

$F\oplus L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_{n-1}\oplus L_{n,i-1}$ için σ' nin tanımlandığını , bu uzaya ait monomialler için (5) ve (6) nın sağlandığını kabul edelim. $i\geq 1$ indeksli $u_{i_1}\otimes u_{i_2}\cdots\otimes u_{i_n}$ monomiallerini alalım.

$j_t>j_{t+1}$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$\sigma(u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n})=\underbrace{\sigma(u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_{t+1}}\otimes u_{j_t}\otimes\cdots\otimes u_{j_n})}_{i-1}+\underbrace{\sigma(u_{j_1}\otimes\cdots\otimes[u_{j_t},u_{j_{t+1}}]\otimes\cdots\otimes u_{j_n})}_{i-1} \tag{7}$$

olur.

Sağ taraftaki iki terim $F\oplus L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_{n-1}\oplus L_{n,\,i-1}$ de olduğundan ifade anlamlıdır.

Öncelikle (7) denkleminin $(j_t\,,j_{t+1})$, $j_t>j_{t+1}$ çiftinin seçiminden bağımsız olduğunu gösterelim. $j_l>j_{l+1}$ olacak şekilde başka bir $(j_l\,,j_{l+1})$ çiftini alalım. O halde 2 durum vardır.

Durum I. $l>t+1$ Durum II. $l=t+1$

Durum I. $u_{j_l}=u,\ u_{j_{l+1}}=v,\ u_{j_l}=w,\ u_{j_{l+1}}=x$ olsun. O halde

$$\sigma(u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n})=\sigma(\cdots\otimes v\otimes u\otimes\cdots\otimes w\otimes x\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[uv]\otimes\cdots\otimes w\otimes x\otimes\cdots)$$
$$=\sigma(\cdots\otimes v\otimes u\otimes\cdots\otimes x\otimes w\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes v\otimes u\otimes\cdots\otimes[wx]\otimes\cdots)$$
$$+\sigma(\cdots\otimes[uv]\otimes\cdots\otimes x\otimes w\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[uv]\otimes\cdots\otimes[wx]\otimes\cdots)$$

yazabiliriz.

$(j_l\ ,j_{l+1})$ ile başlarsak;

$$\sigma(u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n})=\sigma(\cdots\otimes u\otimes v\otimes\cdots\otimes x\otimes w\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes u\otimes v\otimes\cdots\otimes[wx]\otimes\cdots)$$
$$=\sigma(\cdots\otimes v\otimes u\otimes\cdots\otimes x\otimes w\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[uv]\otimes\cdots\otimes x\otimes w\otimes\cdots)$$
$$+\sigma(\cdots\otimes v\otimes u\otimes\cdots\otimes[wx]\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[uv]\otimes\cdots\otimes[wx]\otimes\cdots)$$

elde ederiz. İlk denklem ile aynı sonuç elde edilir.

Durum II. $u_{j_l}=u,\ u_{j_{l+1}}=v=u_{j_l},\ u_{j_{l+1}}=w$ olsun. O halde;

$$\sigma(\cdots\otimes u\otimes v\otimes w\otimes\cdots)$$
$$=\sigma(\cdots\otimes v\otimes u\otimes w\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[uv]\otimes w\otimes\cdots)$$
$$=\sigma(\cdots\otimes v\otimes w\otimes u\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes v\otimes[uw]\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[uv]\otimes w\otimes\cdots)$$
$$=\sigma(\cdots\otimes w\otimes v\otimes u\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[vw]\otimes u\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes v\otimes[uw]\otimes\cdots)$$
$$+\sigma(\cdots\otimes[uv]\otimes w\otimes\cdots)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\sigma(\cdots\otimes u\otimes v\otimes w\otimes\cdots)$$
$$=\sigma(\cdots\otimes u\otimes w\otimes v\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[u\otimes[vw]\otimes\cdots)$$
$$=\sigma(\cdots\otimes w\otimes u\otimes v\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[uw]\otimes v\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[u\otimes[vw]\otimes\cdots)$$
$$=\sigma(\cdots\otimes w\otimes v\otimes u\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes w\otimes[uv]\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[uw]\otimes v\otimes\cdots)$$
$$+\sigma(\cdots\otimes[u\otimes[vw]\otimes\cdots)$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$\sigma(\cdots\otimes w\otimes v\otimes u\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[vw]\otimes u\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes v\otimes[uw]\otimes\cdots)$$
$$+\sigma(\cdots\otimes[uv]\otimes w\otimes\cdots)$$
$$=\sigma(\cdots\otimes w\otimes v\otimes u\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes w\otimes[uv]\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[uw]\otimes v\otimes\cdots)$$
$$+\sigma(\cdots\otimes[u\otimes[vw]\otimes\cdots)$$

olur.

$$\begin{aligned}(\cdots\otimes[vw]\otimes u\cdots)-(\cdots\otimes u\otimes[vw]\cdots)\\ +(\cdots\otimes v\otimes[uw]\cdots)-(\cdots\otimes[uw]\otimes v\cdots)\\ +(\cdots\otimes[uv]\otimes w\cdots)-(\cdots\otimes w\otimes[uv]\cdots)\end{aligned} \tag{8}$$

elemanını alalım.

$a,b\in L_1$ iken $(\cdots a\otimes b\cdots)\in L_{n-1}$ ise

$$\sigma(\cdots a\otimes b\cdots)=(\cdots b\otimes a\cdots)+(\cdots[ab]\cdots)$$

olup

$$\sigma(\cdots a\otimes b\cdots)-(\cdots b\otimes a\cdots)-(\cdots[ab]\cdots)=0$$

bulunur. Sonuç olarak σ, (8) ye uygulanırsa;

$$\sigma(\cdots\otimes[[vw]u]\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[v[uw]]\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[[uv]w]\otimes\cdots) \tag{9}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}[[vw]u]+[v[uw]]+[[uv]w]&=[[vw]u]-[v[wu]]+[[uv]w]\\ &=[[vw]u]+[[wu]v]+[[uv]w]=0\end{aligned}$$

olduğundan (9) daki elemanın değeri sıfırdır.

Bu durumda (7) denkleminin sağ kısmı da tek şekilde belirlenir.

σ yi tanımlamak için (7) denklemini derecesi n ve indeksi i olan monomiallere uygulayalım. Bu dönüşümün $L_{n,i}$ uzayına lineer genişlemesi koşullarımızı sağlayan $F\oplus L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_{n-1}\oplus L_{n,i}$ üzerinde bir dönüşüm verir.

Teorem 4.1.6. (Poincaré - Birkhoff - Witt) 1 in kosetleri ve standart monomialler $U(L)=T(L)/I$ için bir bazdır.

İspat. Önerme 4.1.4 her kosetin 1+I nın bir lineer kombinasyonu olduğunu gösterir. Önerme 4.1.5 de (5) ve (6) denklemlerini sağlayan bir $\sigma:T(L)\rightarrow\beta$ lineer dönüşümünü verir. I idealinin her elemanı

$$u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n}-u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_{l+1}}\otimes u_{j_l}\otimes\cdots\otimes u_{j_n}-u_{j_1}\otimes\cdots\otimes[u_{j_l},u_{j_{l+1}}]\otimes\cdots\otimes u_{j_n})$$

formundaki elemanların bir lineer kombinasyonudur. σ dönüşümü bu elemanları "0" a götürdüğünden $\sigma(I)=0$ olur ve böylece σ, bir $U(L)={T(L)}/{I}\rightarrow\beta$ lineer dönüşümünü belirler.

(5) denklemi sağlandığından, belirlenen dönüşüm, 1 in kosetlerini ve $u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_n}$ standart monomialini sırasıyla 1 ve $u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_n}$ ye götürür. Bu görüntüler β de lineer bağımsız olduğundan, 1 in kosetlerinin ve standart monomiallerin $U(L)$ de lineer bağımsız olduğunu elde ederiz.

5.SERBEST LİE CEBİRLERİNİN ALT CEBİRLERİ

L, bir F cismi üzerinde bir serbest cebir olsun, o halde L nin evrensel birleşmeli zarfı olan A bir serbest birleşmeli cebirdir (Jacobsan, 1962).

Eğer M, L nin herhangi bir alt cebiri ise M, A ya gömülebilir ve M tarafından üretilen A nin B alt cebiri M nin evrensel birleşmeli zarfıdır. Şimdi B nin serbest birleşmeli cebir olduğunu göstermek için Teorem 4.11 uygulayacağız, ve buradan da M nin serbest Lie cebiri olduğu sonucunu çıkaracağız.

Aşağıdaki teorem (Shirshov, 1953) ve (Witt, 1956) tarafından verildi.

Teorem 5.1. Bir serbest Lie cebirinin herhangi bir alt cebiri serbesttir.

İspat. F bir cisim, L F üzerinde bir X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri ve A, L nin evrensel birleşmeli zarfı olsun. O halde A, F üzerinde X tarafından üretilen bir serbest birleşmeli cebirdir. M, L nin herhangi bir alt cebiri olsun. M nin bir $V=(v_i)$ bazını ve L deki M nin tümleyenleri için bir $U=(u_i)$ bazını alalım, böylece $U \cup V$, L nin bir bazı olur. Eğer $U \cup V$, V nin tüm elemanları U nun elemanlarından önce gelecek şekilde tam sıralı ise Birkhoff-Witt teoreminden

$$u_I v_J = u_{i1} \ldots u_{ir} v_{j1} \ldots v_{js}, \quad (i_1 \leq \ldots \leq i_r ; j_1 \leq \ldots \leq j_s)$$

formundaki artan monomialler A nın bir bazıdır.

M, L nin bir alt cebiri olduğundan, v_J A nın bir B alt cebirini gerer. B, M nin evrensel birleşmeli zarfıdır(v_J nin lineer bağımsızlığından), fakat bu gerçeğe ihtiyacımız yok. Şimdi de elimizdeki

$$d(\sum u_I v_J \alpha_{IJ}) = \max\{d(u_I v_J) : \alpha_{IJ} \neq 0\};$$

ifadesi u_I ' nin sağ B-bağımsız olduğunu gösterir. Ayrıca u_I A yı sağ B-modül olarak ürettiğinden, A ve B Teorem 3.11 in hipotezini sağlar. O halde B serbest birleşmeli cebirdir. Bundan başka v_J artan monomiallari

$$d(\sum v_J\alpha_J) = \max\{d(v_J) : \alpha_J \neq 0\}.$$

koşulunu sağlar.

B nin Y serbest üreteç kümesi M de düşünülebilir. Böylece eğer M_1, Y tarafından üretilen Lie cebiri ise M_1, Y üzerinde serbesttir. Çünkü B, Y üzerinde serbest birleşmeli cebirdir. Ayrıca B, M tarafından üretilmiştir ve buradan M_1 tarafından üretilen B_1 serbest birleşmeli cebiri B tarafından içerilir.

Eğer $M_1 \neq M$ ise M 'nin V bazı M_1 i üretmez. O halde $B_1 \neq B$ olur. Diğer taraftan $Y \subseteq B_1 \subseteq B$ ve B , Y tarafından üretildiğinden, $B_1 = B$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $M_1 = M$ dir ve ispat tamamlanmış olur.

6. SERBEST BİRLEŞMELİ CEBİRLER VE SERBEST LİE CEBİRLERİNDE DENKLİK KÜMELERİ

A herhangi bir birleşmeli cebir olsun; A nın herhangi bir X alt kümesi için $<X>$, X tarafından üretilen A nın alt cebirini göstersin. Eğer $<X>$ alt cebiri X üzerinde serbest ise, A nın X alt kümesine serbest denir. Serbest birleşmeli cebirlerin alt cebirlerinin ne zaman serbest olacağına karar vermedeki problem belki şimdi daha kesin form da belirtilebilir:

Bir A serbest birleşmeli cebirinin bir X alt kümesi verildiğinde X in serbest olup olmadığına karar verilebilir mi?

Daha özel olarak şunu sorabiliriz: Eğer A nın bir sonlu X alt kümesi verilirse ve $<X>$ alt cebiri bir Y kümesi üzerinde serbestse, bir dizi elemanter dönüşümler yardımıyla X den Y ye geçmek için bir standart prosedür mevcut mudur?

Tanım 6.1. A bir serbest birleşmeli cebir ve X , A nın bir sonlu alt kümesi olsun. X kümesine uygulanan ve aşağıdaki şekilde tanımlanan dönüşümlere elemanter dönüşümler denir.

i. X' e uygulanan tersinir lineer dönüşümler

ii. $x \in X$ elemanını $x + f(x_1,...,x_k)$ elemanı ile değiştiren

dönüşümlerdir. Burada $x_1,...,x_k \in X \setminus \{x\}$ ve $f(x_1,...,x_k)$, $x_1,...,x_k$ cinsinden bir elemandır.

X bir serbest küme ise elemanter dönüşümler ile X den elde edilen herhangi bir küme yine serbesttir. Eğer elemanter dönüşümlerle bir kümeden diğerine geçilebilir ve sıfırlar eklenip çıkarılabilir ise bu iki kümeye denktir denir. Böylece yukarıdaki problem şimdi ifade edilebilir:

X, bir A serbest birleşmeli cebirinin $< X >$ Y üzerinde serbest olacak şekilde bir sonlu alt kümesi olsun. X, Y ye denk olmak zorunda mıdır?

Özellikle X , A nın bir serbest üreteç kümesi ise A nın herhangi iki serbest üreteç kümesi denktir. A nın herhangi bir otomorfizmi A nın bir serbest üreteç kümesinden bir başka serbest üreteç kümesine dönüşümü olduğundan ve bu dönüşüm otomorfizmin tamamını belirlediğinden, A nın otomorfizm grubu elemanter dönüşümlerle üretilir.

A, F üzerinde X serbest üreteç kümesi ile serbest birleşmeli cebir olsun. Eğer $U=\{u_1,...u_k\}$ A nın bir sonlu alt kümesi ise,

$$d(U)=\sum_{1}^{k} d(u_r)$$

yazabiliriz.

$0 \notin U$ ve elemanter dönüşümlerle $d(U)$ yu küçültemiyorsak, U indirgenemezdir denir. Bir sonlu U kümesi tarafından üretilen alt cebirin serbest olup olmadığına karar verebilmek için, sıfırlar çıkarılarak ve elemanter dönüşümlerle U dan elde edilen herhangi bir sonlu U' için $<U>=<U'>$ olduğundan U nun indirgenemez olduğunu varsayabiliriz. Açıkça, her sonlu küme bir indirgenemez kümeye denktir; bundan başka A nın homojen elemanlarının bir sonlu kümesi, homojen elemanların bir indirgenemez kümesine denktir.

Şimdide daha önce ortaya atılan sorunun homojen kümeler için olumlu cevaba sahip olduğunu göstereceğiz.

Teorem 6.2. A, bir serbest birleşmeli cebir ve U da homojen elemanların bir sonlu indirgenemez alt kümesi olsun. O zaman $B = < U >$ nun serbest olması için gerek ve yeter koşul U nun sağ B-bağımsız olmasıdır.

İspat. Öncelikle B nin serbest olduğunu ve Y nin (Teorem 5.11 Sonuç 5.13 den homojen olarak alınabilir.) bir sol B-bağımsız serbest üreteç kümesi olduğunu varsayalım , $a = \sum u_i b_i$ $(b_i \in B,\ u_i \in U)$ verilsin,

$$d(a) < \max_i \{d(u_i b_i)\}$$

olsun. En yüksek dereceli terimleri eşitleyerek aşağıdaki formda bir denklem elde ederiz.

$$\sum u_i b_i = 0 \quad (b_i \in B,\ b_i \text{ homojen}) \tag{10}$$

Bazı i ler için $b_i \neq 0$ varsayılırsa, (10) daki her bir sıfırdan farklı terim aynı n derecesine sahip olur. Böylece daha düşük dereceliler için böyle bir bağıntı yoktur. $B = \langle U \rangle$ olduğundan her bir b_i yi U' nun elemanları cinsinden ifade edebiliriz ve böylece (10) dan U'nun elemanları arasında derecesi sıfır olan b_i olmadığını gösteren (U nun indirgenemez oluşundan) bir bağıntı elde edilmiş olur. Şimdi de Y üzerinde sol B-bağımlı olan her bir b_i için şunu söyleyebiliriz,

$$b_i = \sum b_{iy} y \quad (y \in Y) \tag{11}$$

Denklem (11) i denklem (10) a eklersek,

$$\sum u_i b_{iy} y = 0$$

elde ederiz ve böylece , Y nin sol B-bağımsızlığından

$$\sum u_i b_{iy} = 0 \text{ olur.}$$

Fakat denklem (10) düşük dereceliler için aşikar olmayan bir bağıntıdır, bu yüzden Y deki tüm y ler ve tüm i ler için $b_{iy} = 0$ olur; bunun sonucu olarak

$$b_i = \sum b_{iy} y = 0 \text{ olur.}$$

Bu çelişki denklem (10) un korunmadığını ispatlamış olur, yani U sağ B-bağımsız olmak zorundadır.

Tersine, U nun sağ B-bağımsız olduğunu varsayalım ; U serbest değilse $u \in U$ lar arasında aşikar olmayan bir bağıntı mevcuttur. Bu bağıntıyı şu şekilde ifade ederiz;

$$\sum u_i a_i = 0.$$

Buradaki $a_i \in B$ lerin hepsi aynı anda sıfır değildir. Bu U' nun B-bağımsız olması ile çelişir, ve buradan U serbest ve B, U üzerinde serbest olup ispat tamamlanmış olur.

Not. "B-bağımsız" ifadesinin "A-bağımsız" ifadesi ile değiştirilmesi durumunda bu teoremin doğru olmadığına dikkat edelim. Her A-bağımsız küme ayrıca B-bağımsız olmasına rağmen, tersi doğru değildir. Örneğin, A x, y üzerinde serbest ise xy ve x tarafından üretilen alt cebir de serbesttir (çünkü $\{xy, x\}$ B-bağımsızdır.), ama $\{xy, x\}$ A-bağımsız değildir.

Teorem 7.2 nin ispatında, U nun serbest olduğu gösterildi, bu sayede aşağıda verilen daha açık ifadeye sahip oluruz.

Teorem 6.3. A bir serbest birleşmeli cebir olsun. O halde homojen elemanlardan oluşan bir sonlu indirgenemez U kümesinin serbest olması için gerek ve yeter koşul $B = \langle U \rangle$ iken bu kümenin sağ B-bağımsız olmasıdır.

Bu teorem Teorem 6.2 için verilen ispatın bir sonucudur. Koşulun yeterliliği için U nun homojen olduğunu varsaymamıza gerek yoktur. Ancak bu varsayım tamamen göz ardı edilemez:

Örneğin A, x, y üzerinde serbest ise $U = \{x + y^2, y^3\}$ kümesi indirgenemez ve serbesttir; böylece B tarafından üretilen alt cebir serbest olur, fakat U B-bağımsız değildir. Bununla birlikte, U, A nın serbest üreteçli $x' = x + y^2, y' = y$ elemanlarından oluşan serbest üretç kümesiyle homojen bağlantılıdır; böylece U aynı zamanda x', y' tarafından tanımlanan derece-fonksiyonuna göre de B-bağımsızdır.

7. SERBEST LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

Tanım 7.1. U, L nin bir sonlu alt kümesi olsun. U kümesine uygulanan ve aşağıdaki şekilde tanımlanan dönüşümlere elemanter Lie dönüşümleri denir.

i. U nun elemanlarına singüler olmayan lineer dönüşümler uygulayan dönüşümler

ii. f, u dan farklı olan U nun $u_1 ... u_k$ elemanları ile ifade edilirken, U nun bir u elemanını $u + f(u_1,...,u_k)$ ile değiştiren dönüşümler

Açıkça L nin bir serbest üreteç kümesine uygulanan herhangi bir elemanter Lie dönüşümü bir otomorfizm tanımlar.

Şimdi de L sonlu üreteçli ise, herhangi bir otomorfizmin böyle adımların ardı ardına uygulanmasıyla elde edilebileceğini göstereceğiz.

Teorem 7.2. L, F üzerinde bir sonlu X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri olsun. L nin her otomorfizmi X e elemanter Lie dönüşümlerin ard arda uygulanmasıyla elde edilebilir.

İspat. L yi X üzerindeki A serbest birleşmeli cebirine gömebiliriz. $\alpha \in Aut(L)$ olsun ve $Y = \alpha(X)$ alalım; o halde Y, L nin bir serbest üreteç kümesi olup buradan $< Y > = A$ elde edilir. Y ye elemanter Lie dönüşümleri uygulanarak, Y ye eşdeğer Z indirgenemez kümesi elde edilir (X tarafından tanımlanan derece fonksiyonuna göre) Her bir elemanter Lie dönüşümü bir otomorfizm ifade ettiğinden

$$\beta : X \to Z$$

otomorfizmi vardır. Eğer β elemanter Lie dönüşümlerin bir çarpımı şeklinde yazılabilirse bir lineer dönüşümdür.

Bir $z \in Z$ verilsin, z*, z nin leading terimi(yüksek dereceli homojen bileşeni) olsun. Z* da bu leading terimlerin kümesi olsun. O halde Z* in indirgenemez olduğu açıktır. B = < Z* >, A nın bir serbest alt cebiridir,Teorem 5.1 den B, Z* evrensel birleşmeli zarfıdır. Bu nedenle Teorem 6.2 den Z*, sağ B-bağımsız olur ve serbesttir. Z nin elemanlarının leading terimleri B-bağımsız olduğundan üzerlerinde bir bağıntı yoktur.

$X = \{x_1,...,x_k\}$, $Z = \{z_1,...,z_k\}$ olsun. $\beta : X \to Z$ otomorfizmi var olduğundan , bu otomorfizmin tersinden

$$x_i = f_i(z_1,...,z_k) \quad (i=1,...,k) \tag{12}$$

elde edilir.

Elemanter dönüşümlerden her bir f_i nin sabit terimi sıfırdır. Eğer , bazı i ler için f_i, $z_1,...,z_k$ da lineer değilse en yüksek X-dereceli terimleri eşitleyerek z nin leading terimleri arasında sıfırdan farklı bir bağıntı elde edilir. Bu da Z* in serbest olması ile çelişir; buradan (12) deki elemanlar lineer olup $\beta : X \to Z$ de lineerdir ve böylece göstermek istediğimiz gibi X den Y ye elemanter Lie dönüşümleriyle geçebiliriz.

Sonuç 7.3. L , F üzerinde {x,y} serbest üreteç kümesi ile bir serbest Lie cebiri olsun. L nin her otomorfizmi x ve y nin bir lineer dönüşümü tarafından belirlenir.

İki elemanlı kümenin her elemanter Lie dönüşümü lineerdir çünkü bir değişkenli bir Lie polinomu lineer olmak zorundadır.

Aynı yöntemle aşağıdaki önerme ispatlanır.

Önerme 7.4. L, F üzerinde X serbest üreteç kümesi ile bir serbest Lie cebiri olsun. Eğer Y, L'nin herhangi bir sonlu alt kümesi ise Y, L nin bir serbest alt kümesine denktir.

İspat. L, X={ $x_1,\ldots,x_k$ } kümesi üzerinde serbest olsun ve T de herhangi bir elemanter Lie dönüşümü olsun;

O halde X'e uygulanan T, L nin bir τ otomorfizmini tanımlar.

$$L = < X > = < T(X) >$$

$$\tau : L \to L$$
$$x \to T(x) = \tau(x)$$

Eğer Y, L nin herhangi bir serbest üreteç kümesi ise $Y = \alpha(X)$ olacak şekilde L nin bir α otomorfizmi vardır,

$$\begin{pmatrix} \alpha : L \to L & & L = < X > = < Y > \\ x \to y & & \alpha(x) = y, x \in X, y \in Y \end{pmatrix}$$

buradan

$$T(Y) = T(\alpha(X)) = \tau(\alpha(x)) = \tau \circ \alpha(x) \tag{13}$$

elde edilir.

Teorem 7.2. den herhangi bir otomorfizm T_i bir elemanter Lie dönüşümü olmak üzere $T_1 \ldots T_r$ formundadır. τ_i , T_i nin X e uygulanmasıyla elde edilen otomorfizm olsun;

$$\tau_i : L \to L x \in R$$
$$\tau_i(x) = T_i(x)$$

O zaman

$$T_r \ldots T_2 T_1(X) = \tau_r \ldots \tau_2 \tau_1(X)$$

olduğunu iddia ediyoruz.

r = 1 olduğunda, τ_1 in tanımından ifade doğrudur, $T_1(x) = \tau_1(x)$

r > 1 olsun ve r üzerinde tümevarım uygulayalım. Tümevarım hipotezinden, r - 1 için

$$T_{r-1}...T_2T_1(X) = \tau_{r-1}...\tau_1(X) \text{ olsun.}$$

Denklemin her iki tarafına τ_r uygulayarak ve (13) denklemini kullanarak,

$$T_r(T_{r-1}...T_2T_1(X)) = T_r(\tau_{r-1}...\tau_1(X)) = \tau_r(\tau_{r-1}...\tau_1(X))$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7.5. L, F üzerinde $\{x_1,...,x_k\}$ serbest üreteç kümesi ile bir serbest Lie cebiri olsun. O halde L' nin otomorfizm grubu $x_1,...,x_k$ tarafından gerilen alt uzay üzerindeki genel lineer grup ve

$$\tau_1 : x_1 \to x_1 + f(x_2,...,x_k), \qquad x_i \to x_i \quad (i \neq 1).$$

otomorfizmi tarafından üretilir.

Sonuç 7.6. Eğer L, F üzerinde $\{x_1,...,x_k\}$ serbest üreteç kümesi ile bir serbest Lie cebiri ise, L nin otomorfizm grubu

$$\alpha_\lambda : x_1 \to \lambda x_1,\ x_i \to x_i \quad (i \neq 1) \quad (\lambda \in F, \lambda \neq 0),$$

$$\tau_1 : x_1 \to x_1 + f(x_2,...,x_k), \qquad x_i \to x_i \quad (i \neq 1).$$

dönüşümleri tarafından üretilir. (Jacobson, 1943)

8. SERBEST BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN UYGULAMALARI

8.1.Ters Fonksiyon Teoremi

Bu bölümde "V.A. Romankov'un The Inverse Function Theorem For Free Associative Algebras" adlı makalesinden yararlanılmıştır.

8.1.1. Serbest Fox Türevleri

$X_n=\{x_1,...,x_n\}$ bir serbest F_n grubunun serbest üreteç kümesi olsun. KF_n herhangi bir K cismi üzerinde F_n nin grup cebiri olsun.

$\frac{\partial}{\partial x_i}: KF_n \to KF_n$, $\delta/\delta x_i$ ya da $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,...,n$ ile KF_n nin kısmi türevlerini belirtelim.

Kısmi türev,

$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}$ (Kronecker symbol)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial(\alpha u+\beta v)}{\partial x_i}=\alpha\frac{\partial u}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \alpha,\beta\in K,\ u,v\in KF_n\\ &\frac{\partial(uv)}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}\varepsilon(v)+u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad u,v\in KF_n\end{aligned}\right\}$$

özellikleriyle tek olarak belirlenir.

$\varepsilon: KF_n \to K$ homomorfizmi F_n nin elemanlarını "1" e götürür. $\varepsilon(x_i)=1$

$$\sum_{i=1,...,n}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x_i-1)=w-\varepsilon(w), \quad w\in KF_n \tag{14}$$

özdeşliği sağlanır. $\psi\in \mathrm{End}KF_n$ nin Jacobian matrisi $J_\psi=\frac{\partial\psi(x_i)}{\partial x_j}$ dir.

$$J_\psi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi(x_1)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi(x_1)}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial\psi(x_1)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi(x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi(x_2)}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial\psi(x_2)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\psi(x_n)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi(x_n)}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial\psi(x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{nxn}$$

Birman Teoremine (Birman J. S., 1973) göre $\psi \in \mathrm{End}F_n$ endomorfizminin bir otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul , J_ψ matrisinin, KF_n cebiri üzerinde tersinir olmasıdır. Montgomery teoremine (Montgomery M. S., 1969) göre herhangi bir grup üzerindeki bir matrisin tek taraflı tersinirliği, kendisinin tersinirliğine denktir.

K üzerindeki $A_n = K\langle x_1,...,x_n\rangle$ serbest birleşmeli cebirini KF_n grup cebirine gömebiliriz.

A_n , $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ kısmi türev altında invaryant olduğundan, bunlar A_n nin serbest Fox türevleri olarak düşünebiliriz. Eğer, $\psi : A_n \to A_n$ bir endomorfizm ise, gruplarda olduğu gibi ψ 'nin Jacobian matrisi $J_\psi = \dfrac{\partial\psi(x_i)}{\partial x_j}$ dir.

Önerme 8.1.1.1. Eğer $\psi \in \mathrm{Aut}A_n$ bir K cismi üzerinde $A_n = K\langle x_1,...,x_n\rangle$ serbest birleşmeli cebirinin bir otomorfizmi ise $J_\psi = \dfrac{\partial\psi(x_i)}{\partial x_j}$ Jacobian matrisi A_n üzerinde tersinirdir.

İspat. $u_i = \psi(x_i)$, $i=1,...,n$ belirtsin. $X_n = \{x_1,...,x_n\}$ kümesinin elemanlarını $U_n = \{u_1,...,u_n\}$ kümesinin elemanları cinsinden $X_i = w_i(u_1,...,u_n)$ şeklinde yazabiliriz. Bu ifadelerin türevlerini alarak,

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

formunda $A = (\frac{\partial w_i}{\partial x_j})$, $i, k = 1,...,n$ iken

$$AJ_{\psi} = J_{\psi}A = E$$

elde edilir. O halde ispat tamamlanmış olur.

Bir $c_1,...,c_n \in A_n$ elemanları verilsin, türevi

$$D = D(c_1,...,c_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} c_i = \frac{\partial}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} c_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} c_n,$$

$$D(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} c_i$$

formülü ile tanımlansın.

$a_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1,...,n$ alalım. $A = (a_{ij})$ matrisi için, türevleri

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ji}, \quad i = 1,...,n \tag{15}$$

tanımlayalım. $D_i(u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1,...,n$ dir.

$J_\psi A = E$, Jacobian matrisinin tersinir olduğunu varsayalım, fakat ψ' nin tersinirliği hakkında bir bilgimiz yok. (15) de olduğu gibi A nın girdilerini a_{ij}, $i, j = 1,...,n$ alalım. Bu durumda $D_i(u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1,...,n$ eşitliği de sağlanır.

Bu durumlar altında şu önermede geçerlidir.

Lemma 8.1.1.2. Bazı $b, c \in A_n$ elemanları için $D_i(b) = D_i(c)$, $i = 1,...,n$ eşitliği sağlanıyorsa $b - c \in K$ dır.

İspat. (14) denklemi kullanılarak $\dfrac{\partial d}{\partial x_i} = 0$, $i = 1,...,n$ ise bazı $d \in A_n$ için $d \in K$ dır.

$$\underbrace{\sum_{i=1,...,n} \frac{\partial d}{\partial x_i}(x_i - 1)}_{0} = d - \varepsilon(d)$$

$$0 = d - \varepsilon(d)$$

$d = \varepsilon(d)$ olup $d \in K$ dır.

$$D_i(b) = D_i(c)$$

$$D_i(b) - D_i(c) = 0$$

$$D_i(b - c) = 0, \quad i = 1,...,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(b - c)}{\partial x_j}.a_{ji} = 0$$

$$\frac{\partial(b - c)}{\partial x_1}a_{1i} + ... + \frac{\partial(b - c)}{\partial x_n}a_{ni} = 0$$

O halde $\dfrac{\partial(b - c)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1,...,n$ ise $b - c \in K$ dır.

Yukarıdaki gibi

$$\varepsilon : KF_n \to K$$

homomorfizmi olsun.

Genelliği bozmaksızın $\varepsilon(u_i) = 0,\ \ i = 1,...,n$ kabul edebiliriz. Bu durumda herhangi $b_1,...,b_n$ için

$$D_i(b_1u_1 + ... + b_nu_n)$$

$$D_i(b_1u_1) + D_i(b_2u_2) + ... + D_i(b_nu_n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_1 u_1}{\partial x_j} a_{ji} + ... + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_n u_n}{\partial x_j} a_{ji}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_1}{\partial x_i} \underbrace{\varepsilon(u_1)}_{0} + b_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + ... + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_n}{\partial x_i} \underbrace{\varepsilon(u_n)}_{0} + b_n \frac{\partial u_n}{\partial x_i}$$

$$b_1 \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}_{0} + ... + b_i \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{1} + ... + b_n \underbrace{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}}_{0} = b_i$$

$D_i(b_1u_1 + ... + b_nu_n) = b_i,\ \ i = 1,...,n$ elde edilir.

Tanım 8.1.2. Eğer bir grubun her sonlu üreteçli alt grubu nilpotent ise bu gruba yerel nilpotent denir.

Teorem 8.1.3. $A_n = K\langle x_1,...,x_n\rangle$ herhangi bir K halkası üzerinde rankı n olan bir serbest birleşmeli cebir olsun. O halde $\psi \in \mathrm{End}A_n$ bir otomorfizmdir.

Diğer bir deyişle $\psi \in \mathrm{End}A_n$ bir otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul

1. $J_\psi = \dfrac{\partial \psi(x_i)}{\partial x_j}$ Jacobian matrisi $A_n : J_\psi A = E$ üzerinde tersinir ve

2. A_n nin $D_i = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j} a_{ji}$, $i = 1,\dots,n$ daki gibi $A = (a_{ij})$ olarak

tanımlanan $D_i, i = 1,\dots,n$ deki $D = K < D_1,\dots,D_n >$ cebirinin yerel nilpotent olmasıdır.

Örnek 8.1.4. $\begin{matrix} u = x^2 + xy - x - 1 \\ v = 2x + y - x^2 - xy - 1 \end{matrix}$ olmak üzere $u,v \in A_2 = K< x,y >$ olsun. O halde $\psi \in EndA_2$, $\psi(x) = u$, $\psi(y) = v$ için,

$$J_\psi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi(x)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi(y)}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi(y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$ matrisini bulalım.

$$\frac{\partial x^2}{\partial x} = \frac{\partial (x.x)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1}.\underbrace{\varepsilon(x)}_{1} + x.\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} = 1 + x \text{ ve } \frac{\partial xy}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1}.\underbrace{\varepsilon(y)}_{1} + x.\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{0} = 1 \text{ olduğundan}$$

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + xy - x - 1)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial x^2}{\partial x}}_{1+x} + \underbrace{\frac{\partial xy}{\partial x}}_{1} - \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{0} = 1 + x \text{ elde edilir.}$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial y} = \frac{\partial (x.x)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0}.\underbrace{\varepsilon(x)}_{1} + x.\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0} = 0 \text{ ve } \frac{\partial xy}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0}.\underbrace{\varepsilon(y)}_{1} + x.\underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{1} = x \text{ olduğundan}$$

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 + xy - x - 1)}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial x^2}{\partial y}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial xy}{\partial y}}_{x} - \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}}_{0} = x \text{ elde edilir.}$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial x}=\frac{\partial(x.x)}{\partial x}=\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1}.\underbrace{\varepsilon(x)}_{1}+x.\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1}=1+x \text{ ve } \frac{\partial xy}{\partial x}=\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1}.\underbrace{\varepsilon(y)}_{1}+x.\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{0}=1 \text{ olduğundan}$$

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial(2x+y-x^2-xy-1)}{\partial x}=2\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1}+\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{0}-\underbrace{\frac{\partial x^2}{\partial x}}_{1+x}-\underbrace{\frac{\partial xy}{\partial x}}_{1}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{0}=-x \text{ elde}$$

edilir. Son olarak;

$$\frac{\partial x^2}{\partial y}=\frac{\partial(x.x)}{\partial y}=\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0}.\underbrace{\varepsilon(x)}_{1}+x.\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0}=0 \text{ ve } \frac{\partial xy}{\partial y}=\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0}.\underbrace{\varepsilon(y)}_{1}+x.\underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{1}=x \text{ olduğundan}$$

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial(2x+y-x^2-xy-1)}{\partial y}=2\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{1}-\underbrace{\frac{\partial x^2}{\partial y}}_{0}-\underbrace{\frac{\partial xy}{\partial y}}_{x}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}}_{0}=1-x$$

olup,

$$J_\psi=\begin{pmatrix}1+x & x\\ -x & 1-x\end{pmatrix} \text{ ve } J_\psi^{-1}=\begin{pmatrix}1-x & -x\\ x & 1+x\end{pmatrix} \text{ elde edilir.}$$

8.2. Serbest Birleşmeli Cebirlerin Serbest Olmayan Alt Cebirleri

Bu bölümde serbest olmayan alt cebirlere bazı örnekler vereceğiz.

Önerme 8.2.1. A, bir serbest birleşmeli cebir ve I , A nın sıfırdan farklı bir ideali olsun. B, A nın I tarafından üretilen A dan farklı bir alt cebiri ise B serbest değildir.

İspat. A, X üzerinde serbest ve B de Y üzerinde serbest olsun. $x\in X, y\in Y$ alalım ve $y_0\in I$, $\alpha\in F$ iken $y=y_0+\alpha$ olsun.

Eğer $a=xy_0$, $b=y_0x$ ise $a,b\in I$ ve $y_0a=by_0$ olur.

Yani y_0 ve b sağ B-bağımlıdır. B deki genelleştirilmiş algoritmadan (ve y_0 ın Y-dereceli olmasından)

$$b = y_0 c + \beta, \quad c \in B, \beta \in F$$

bulunur. Buradan $y_0(x - c) = \beta$ elde edilir.

Sonuç olarak da $\beta = 0$ ve $x = c \in B$ elde edilir. Bu ifade her $x \in X$ için sağlandığından, B = A sonucu elde edilir.

Örnek 8.2.2. $X=\{x,y,z\}$ ve δ , A(X) in

$$\delta(x) = xyx + x,$$
$$\delta(y) = -yxy - y$$
$$\delta(z) = -x$$

olarak verilen bir türev dönüşümü olsun. Çekδ

$$a = xyz + x + z$$
$$b = yx + 1$$
$$c = xy + 1$$
$$d = zyx + x + z$$

tarafından üretilen alt cebir ile çakışır. $ab = cd$ olduğundan , Çekδ bir serbest alt cebir değildir.

Örnek 8.2.3.

$$X = \{x, y_1, y_2, y_3, z\}$$
$$Y=\{x, y_1, y_3, y_2 z, z\}$$
$$Z=\{x, xy_1, y_1 y_2 - y_3, y_2, z\}$$

olsun ve A ve B sırasıyla Y ve Z tarafından üretilen A(X) in alt cebirleri olsunlar. A ve B, A(X) in serbest alt cebirleridir, fakat $A \cap B$ serbest değildir.

Bir yönlü idealler için Önerme 8.2.1. yanlıştır.

Örnek 8.2.4. Eğer A, x, y üzerinde serbest birleşmeli ise, ve B, xA sağ ideali tarafından üretilen alt cebir ise A, sağ B-modül olarak düşünüldüğünde $1, y, y^2 ...$ B-bağımsız bazına sahip olur ve Teorem 3.11 den bir serbest birleşmeli cebirdir.Aslında xy^r $(r = 0,1,2,...)$ formundaki elemanlar bir serbest üreteç kümesinin elemanlarıdır.

KAYNAKLAR

Birman, J. S., 1973. An inverse function theorem for free groups, Proc. Amer Math. Soc.i 41i 634-638

Bremner , M. R., 2013. Free associative algebras,noncommutative Gröbner bases, and universal associative envelopes for nonassociative structures,Dep. Math. and Stat. University of Saskatchevan, Canada

Cohn, P.M., 1963. Subalgebras of free associative algebras,Proc London Math Soc. (3)14:618-32

______, 1969. Free associative algebras, Bull London Math Soc, 1: 1-39

Dummit, D. S., 2004. Abstract algebra,third addition, Page 368, Corollory 12

Grillet, P. A., 2007. Graduate texts in mathematics,second edition, 242: 515-520

Jacobson, N., 1943. Theory of rings, New York

______, 1962. Lie Algebras, Henry Ford II Professor of Mathematics Yale University, New Haven, Connecticut, Page 156-160

Kuros, A. G., 1947. Nonassociative free algebras and free products of algebras, (Russian), Math. Sbornik 20(62):239-62

Mikhalev, A.A., Shpilrain, V., Zolotykh, A.A., 1996. Subalgebras of free algebras , Proc.Amer .Math.Soc.124, 1977-1984

Montgomery, M. S., 1969. Left and right inverses in group algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 539-540

Reutenauer, C., 2003. Handbook of algebra, Volüme 3:887-903

Rm, 2013a-03-21, UFD is Integrally Closed, https://planetmath.org/UFDsAreIntegrallyClosed

______, 2013b-03-21, Examples of Integrally Closed Extensions, http://planetmath.org/examplesofintegrallyclosedextensions

Roman'kov, V.A., 2004. The inverse function theorem for free associative algebras, Omsk. Tran. from Sibirskii Mat. Zhurnal, Vol 45, NO5, pp. 1178-1183

Schreier , O., 1927. Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. math. Sem., Hamburg. 5:161-83

Shirshov, A.I., 1953. On subalgebras of free Lie algebras, Russian, Mat. Sbornik 33(75):441-53

______, 1954. On subalgebras of free commutative and anticommutative algebras, Russian, ibid. 34(76):81-8

Tvalavadze, M., 2010. Universal Enveloping Algebras Of Nonassociative Structures, Mathematics Subject Classification: Primary 17D15. Secondary 17D05, 17B35, 17A99

Witt, E., 1953. Über freie Ringe und ihre Unterringe, Math. Zeitschrift 58:113-14

______, 1956. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe, ibid. 64:195-216

ÖZGEÇMİŞ

12.03.1985 tarihinde Mersin ' de doğdu. 2003 yılında İçel Anadolu Lisesi (İAL) 'nden mezun oldu. 2004 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi'nde lisans eğitime başladı ve 2008 yılı Şubat ayında mezun oldu. Aynı yıl Anadolu Üniversitesi'nde Tezsiz Yüksek Lisans eğitimine başladı ve 2010 yılında mezun oldu. 2014 yılından beri Milli Eğitime bağlı okullarda Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.