





**ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR  
ÜÇKÖŞEGENCİL GÖSTERİLİMİNDE  
ÇEKİRDEK AYRIŞTIRIMI**

**DOKTORA TEZİ**

**Ayla OKAN**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP**

**TEMMUZ 2019**



**ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR  
ÜÇKÖŞEGENCİL GÖSTERİLİMİNDE  
ÇEKİRDEK AYRIŞTIRIMI**

**DOKTORA TEZİ**

**Ayla OKAN  
(702112005)**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı**

**Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP**

**TEMMUZ 2019**



İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702112005 sırasayılı Doktora Öğrencisi Ayla OKAN, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm koşulları yerine getirdikten sonra hazırladığı “ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL GÖSTERİLİMİNDE ÇEKİRDEK AYRIŞTIRIMI” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Prof. Dr. Metin DEMİRALP** .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**      **Prof. Dr. F. Aylin SUNGUR** .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Müjgan TEZ** .....

Marmara Üniversitesi

**Doç. Dr. Adem TEKİN** .....

İstanbul Teknik Üniversitesi

**Dr. Öğr. Üyesi Özlem YILMAZ** .....

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

**Teslim Tarihi :**      **18 Haziran 2019**

**Savunma Tarihi :**      **10 Temmuz 2019**







*Aileme ve arkadaşlarıma,*



## ÖNSÖZ

Doktora eğitimim sürecinde benden bilgi, deneyim ve sabrını esirgemeyen, çok değerli yardım ve katkılarıyla beni destekleyen ve cesaretlendiren değerli hocam Prof. Dr. Metin Demiralp'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Savımın ilerleyişinde görüş ve desteklerini esirgemeyen sav izleme kurulundaki değerli hocalarım Prof. Dr. F. Aylin Sungur ve Dr. Öğr. Üyesi Özlem Yılmaz'a çok teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, lisansüstü eğitimimin başlangıcından bu yana kıymetli katkı ve desteklerinden ötürü değerli hocam Prof. Dr. N. Abdülbaki Baykara'ya teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımızın ve bilimsel ilerleyişimizin hız kazanmasını sağlayan üyesi olduğum Bilişim Enstitüsü Bilgisayar Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT)'nda yer alan değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım. Bilim insanı olma yolunda ilk adımlarımdan bu yana daima yanımda olan ve birlikte çalışmaktan onur duyduğum değerli dostlarım, Dr. Öğr. Üyesi Zeynep Gündoğar ve Derya Bodur'a sonsuz teşekkür ve sevgilerimi sunarım. Son olarak, ilk öğretmenlerim, hayatımın her aşamasında yanımda olan sevgi, ilgi ve desteklerini hiç esirgemeyen, onların bir parçası olmaktan gurur duyduğum anne, babama ve kuşkusuz, sevgili eşim ile canım oğluma sonsuz teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

Temmuz 2019

Ayla OKAN



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ .....	vii
İÇİNDEKİLER .....	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ÖZET .....	xv
SUMMARY .....	xvii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1 Savın Amacı .....	3
1.2 Savda Yer Alan Bölümler .....	4
<b>2. ÇALIŞMANIN KURAMCIL VE UZBİLİMCİL ALTYAPISI .....</b>	<b>7</b>
2.1 Tümlev İşleçleri .....	7
2.2 Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim (YBBG).....	12
2.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) .....	13
<b>3. ÜÇKÖŞEGENCİL ÇEKİRDEK AYRIŞTIRIMI.....</b>	<b>19</b>
3.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG).....	19
3.2 ÇYÇÜÇG İşlemcil Süreci .....	24
3.3 Tekdeğişkenli Doğrucul Tümlev İşlecinin Ayrıştırımı .....	25
<b>4. ÇYÇÜÇG AĞIRLIK VE DESTEK İŞLEVLERİNİN BELİRLENİŞİ .....</b>	<b>27</b>
4.1 Özüyle Tutarlı ÇYÇÜÇG ve Ağırlık İşleçleri, Destek İşlevlerinin Seçimi....	29
4.1.1 Ağırlık işleçlerinin seçimi .....	29
4.1.2 Destek işlevlerinin seçimi.....	29
4.1.3 Özüyle tutarlı ÇYÇÜÇG .....	30
4.2 Açıklayımcıl Uygulamalar.....	32
4.2.1 ÇYÇÜÇG'ne uygulama ve destek işlevlerinin seçimi .....	33
4.2.2 Uyumlu destek işlevleri ve özüyle tutarlı ÇYÇÜÇG .....	34
<b>5. ÇYÇÜÇG İLE İKİLİ ÇARPIM AYRIŞTIRIMI.....</b>	<b>37</b>
5.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi ile İkili Çarpım Ayrıştırımı.....	37
5.1.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlu Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÖÇG).....	38
5.1.1.1 Çokdeğişkenliliği yükseltilmiş üçköşegencil ve okuçlu çekirdek gösterilimleri arasındaki ilişki .....	41
5.1.1.2 Okuçlu düzey gösterilimden üçköşegencil gösterilime dönüşüm ....	42
5.1.1.3 Bilgisayımıl uygulamalar .....	44
5.1.2 Paylaşımıl Dördül Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (PDÖÇYÇÜÇG) .....	50

5.1.2.1 Paylaşımli Dördül Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösteriliminde destek işlevlerinin dikgenlik ve birimboyluluk çözümleyişi .....	52
5.1.2.2 İkili çarpım toplamdzileri ve kesimcil yaklaşımları: PDÖÇYÇÜÇG.....	54
5.1.2.3 Sayıcıl uygulayışlar .....	55
<b>6. SONUÇLAR.....</b>	<b>63</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>67</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>72</b>



## KISALTMALAR

<b>YBBG</b>	: Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim
<b>HDMR</b>	: High Dimensional Model Representation
<b>ÇYÇG</b>	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi
<b>EMPR</b>	: Enhanced Multivariate Products Representation
<b>ÇYÇÜÇG</b>	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi
<b>TKEMPR</b>	: Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation
<b>ÇYÇÜDG</b>	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi
<b>TMEMPR</b>	: Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation
<b>ÇYÇODG</b>	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlu Dizey Gösterilimi
<b>AEMPRM</b>	: Arrowheaded Enhanced Multivariate Products Representation for Matrices
<b>ÇYÇOÇG</b>	: Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlu Çekirdek Gösterilimi
<b>AEMPRK</b>	: Arrowheading Enhanced Multivariate Products Representation for a Kernel
<b>PDÖÇYÇÜÇG</b>	: PaylaşımlıDördül Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi
<b>OSBTKEMPR</b>	: Overlapped Square Blocks Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation
<b>PCA</b>	: Principal Component Analysis
<b>SCF</b>	: Singular Function Coefficient





## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
<b>Çizelge 5.1 :</b> $\cos(x+y)$ işlevi için 2 yinelemeli ÇYÇÜÇG çizimleri.....	45
<b>Çizelge 5.2 :</b> $\cos(x+y)$ işlevi için 3 yinelemeli ÇYÇÜÇG çizimleri.....	46
<b>Çizelge 5.3 :</b> $\sin(x) + \cos(2y) + e^x + y^{10} + 1$ işlevi için 2 yinelemeli ÇYÇÜÇG çizimi.....	47
<b>Çizelge 5.4 :</b> $(x^6 + 1)(y^6 - 1) + e^{x+y} + \sin(2x)\cos(y)$ işlevi için 2 yinelemeli çizimler .....	49





# ÇOKDEĞİŞKENLİLİĞİ YÜKSELTİLMİŞ ÇARPIMLAR ÜÇKÖŞEGENCİL GÖSTERİLİMİNDE ÇEKİRDEK AYRIŞTIRIMI

## ÖZET

Günümüz koşullarında tez gelişen uygulamaya bilimi ile birlikte ortaya çıkan ölçmenlik (mühendislik) sorunları çokdeğişkenli işlevlerin incelenişini her geçen gün biraz daha önemli kılmaktadır. İşlevlerin değişken sayıları arttıkça ortaya çıkan işlem karmaşıklığını ve yüksek ederi enküçükleme gerekli konuma gelmektedir. Oldukça yakın zamanda geliştirilen Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi ile çokdeğişkenli bir işlev, destek işlevi olarak adlandırılan bir kesim işlevler yardımıyla daha az değişkenli işlevlerin toplamı türünden anlatılabilmektedir. Ayrıca, bu gösterilimde kesmeler yaparak gösterilimi yaklaştırım yöntemine dönüştürmek de olanaklıdır. Bu savın odak konusu, Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) taban alınarak çok yakın bir zamanda geliştirilmiş bir gösterilim olup özgün bir çalışma niteliği taşımaktadır. Geliştirilen bu yeni gösterimler yardımıyla çokdeğişkenli bir işlevi, ayrıca, çarpımcı dizey ayrıştırım türünden yazmak olanaklı duruma gelmektedir. Bu çarpımcı ayrıştırım çekirdek dizeyi ile sol ve sağ yan destek yöneyleri geliştirilen yöntemlerin niteliklerine göre türülük kazanmaktadır. İlk olarak savda sol ve sağ yan yöneylerinin dikgen ve birim boylu olup çekirdek dizeyinin üçköşegencil yapıda elde edildiği Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG) yer almaktadır. Bunun yanı sıra, tekdeğişkenli işlevlerin dışçarpımlarının toplamı türünden yazılabilen ikideğişkenli işlevler için, çekirdek dizeyinin örtüştürülmüş dördül öbek biçiminde olup sol ve sağ yan dizeylerinin doğrucul bağımsızlaştırılmış destek yöneylerinden oluşan, ve, dizey çarpımlar yardımıyla belirlenen Paylaşım Dördül Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (PDÖÇYÇÜÇG) olarak adlandırılan yöntem de özgün bir çalışma olarak savda yer almaktadır. Savda ayrıca üçköşegencilleştirim olgusunun yanı sıra tıkız gösterilimde çekirdek dizeyinin okuçlu durumda belirlenebildiği başka bir özgün yöntem de yer almaktadır. Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlu Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÖÇG) olarak adlandırılan yöntem tekdeğişkenli işlevlerin dışçarpımlarının toplamı türünden yazılabilen ikideğişkenli işlevler için geliştirilen bir gösterilimdir. Ancak, ikideğişkenli işlevlerin ÇYÇÜÇG ile dizey ayrıştırımında işlevlerin niteliğine göre birtakım belirlenim karmaşıklığı ile karşılaşmaktadır. Okuçlu gösterilim yardımıyla dışçarpımlarının toplamı türünden ayrıştırılabilen işlevler için tüm bu yöntemlerin temelinde var olan böl ve yönet olgusunu uygulayarak ilerleyiş olanaklı duruma gelebilmektedir. Savda yukarıda belirtilen tüm bu olgular ve yeni bulgular eşliğinde düzenleyiş söz konusu olmaktadır.



# **KERNEL DECOMPOSITION IN TRIDIAGONAL KERNEL ENHANCED MULTIVARIANCE PRODUCTS REPRESENTATION**

## **SUMMARY**

Technological developments that are occurring every day rapidly develop and diversify the problems of human life. This situation, in scientific terms, is seen as an increase in the components affecting the problems in our studies or in other words, the increase of multivariate. This thesis is based on multivariate function decomposition that takes its roots from high dimensional modelling. High Dimensional Model Representation (HDMR) was first proposed by I.M.Sobol and extended by H. A. Rabitz (and his group) and then by M. Demiralp. M. Demiralp and his group studies brought a lot of HDMR varieties. Recent efforts to increase the effectiveness and quality of HDMR, have resulted in the birth of a new representation called as Enhanced Multivariate Products Representation (EMPR). EMPR is used for representing a multivariate function in terms of less variate functions with the aid of support functions. In other words, EMPR, which can be considered as the extended form of HDMR, involves univariate support functions each of which depends on a different independent variable. EMPR has not been developed only for continuous functions. Its discrete forms also have been developed for decomposition of the arrays like vectors, matrices or multiway arrays. To this end, it is focused on the decomposition of infinite matrices involving denumerable infinitely many rows and columns.

Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR) is a method which decomposes a rectangular matrix into a product of three matrices; an orthogonal matrix, a rectangular tridiagonal matrix and another orthogonal matrix. When the target matrix is consisted of only outer products, a new version of decomposition method is proposed and called "Arrowheaded Enhanced Multivariate Products Representation for Matrices (AEMPRM). There are also a lot of matrix-factor-product-decomposition methods derived from TMEMPR to enhance the area of applications.

Applying these methods on the univariate integral operator kernels which are also bivariate functions, have resulted in the birth of recent decomposition methods Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR) which is the basic idea of this thesis. This work has been devoted to the development of a new version of high dimensional modelling. In this developed method, support and weight functions are used in expansion. The choice of support and weight functions used in the method significantly affects the quality of the method. In this study, progress was made in the structure where the selected kernel had no singularity. In case of singularity, the developed method should be revised accordingly. The constraints encountered in each of the problems posed during the studies provided important contributions to the development of new methods by shedding light on the emergence of new method. In these methods, the basic aim is to describe the essential function as much as possible by using only a few components, rather than the display of all the

components. In other words, by means of fewer components, it is much better to reveal the original structure of a target multivariate function. In practice, the general tendency is to process up to two variables and not to take other variables into account. There are lots of studies whose results have been appearing in the proceedings of international conferences.

When it is specifically focused on the bivariate kernel functions which are the finite sum over certain binary products of two univariate functions each of which depends on a different independent variable, another decomposition method, “Arrowheading Enhanced Multivariate Product Representation for a Kernel (AEMPRK)” has been proposed by M. Demiralp and his group. By using this method a bivariate kernel function which is the finite sum over certain binary products can be given in three matrix product form whose midfactor is in an arrowheaded form, and, left and right factors are support function including vectors. It can be expressed in the concise matrix format of singular-value-decomposition-like three factor matrix product whose kernel is in arrowhead matrix form which can be converted to a tridiagonal form.

All these studies led to the birth of another new version of Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR). It is based on the bivariate EMPR of a binary product of univariate functions each of which depends on a different independent variable. The weight functions and initial left and right support function of EMPR needs to be given. Then the bivariate EMPR produces new left and right support functions which can be used to proceed to the next binary product as being initializing left and right support functions. Even though this is the expected action, depending on the target binary product, these new support functions may become undetermined by EMPR. Then we need to define these functions at our favor even though there seems to be indefinitely many options. For each additive term of a binary product series a  $2 \times 2$  square is obtained as core matrix of triple factor representation. When summed up these squares become the overlapped blocks of a denumerable infinite tridiagonal core matrix in triple factor product representation such that the lower rightmost element of the  $j$ th square is added with the upper leftmost element of the  $(j + 1)$ th square and is located on the main diagonal of the core matrix. For this reason we call the entire procedure’s result “Overlapped Square Blocks Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (OSBTKEMPR)”.

This is organized as follows. Second section focuses on the main philosophy for the decomposition of the kernel of a linear integral operator via bivariate Enhanced Multivariate Products Representation (EMPR). The third section includes detailed explanation of the Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR) while the fourth section deals with effect of weight and support functions on the method. The fifth section deals with the decomposition of a single binary product. This section also mentions the details of mutual orthonormalization of left and right support functions in two separate sets. There are two basic methods called Arrowheading Enhanced Multivariate Product Representation for a Kernel (AEMPRK) and Overlapped Square Blocks Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (OSBTKEMPR) in this section. It presents many details of these methods over the binary products. This section also contains certain confirmative applications. The sixth section finalizes the thesis with the concluding remarks. In this section which constitutes the last chapter

of the thesis, there are inferences that reveal all aspects of the decomposition method developed by integrating the findings obtained in the context of all the researches and the processing of the argument. The nature of the method and its contribution to the existing problems are discussed clearly.







## 1. GİRİŞ

Çokdeğişkenli işlevlerin incelenişinin gerekliliği olgusu zamanla arttıkça, bu konuda yapılan çalışmaların sayısında da önemli bir artış oluşmuştur. Bizim çalışmalarımızın temelini oluşturacak adımların ilki olarak 1957 yılında A. N. Kolmogorov'un "On the Representation of Continuous Functions of Many Variables by Superposition of One Variable and Addition" [1] adlı yazısını göstermek olanaklıdır. Kolmogorov bu çalışmasında, sürekli (ing: continuous) çokdeğişkenli işlevlerin, tekdeğişkenli işlevlerin toplamı türünden yazılabileceğini ortaya koymuştur. Daha sonra 1993 yılında I.M. Sobol'un "Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models" [2] adlı çalışmasıyla Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim (YBBG; ing: High Dimensional Model Representation (HDMR)) bilimsel yazında yerini almıştır. Sobol bu çalışmasında Kolmogorov'un yönteminden yola çıkarak  $[0,1]$  aralığında tanımlı çokdeğişkenli bir işlevi birim ağırlık kullanarak daha az değişkenli işlevlerin toplamı türünden anlatılabilişin olanaklı olduğunu göstermiştir. Ardından, H. Rabitz birim ağırlık ve  $[0,1]$  aralığı olgusunu genelleştiren çalışmalar ortaya koymuştur [3]. Ayrıca M. Demiralp bu tür konularla ilgili çalışmalara ağırlık vererek Rabitz ile bir kesim çalışmalarda bulunmuştur. Tüm bunların sonucu olarak da 2003 yılında "High Dimensional Model Representation and Its Application Varieties" [4] adlı bildirisinde YBBG'nin genel özelliklerini vermiş ve ayrıca geliştirilen diğer YBBG türlerini ele almıştır. Böylece YBBG bilimsel yazında da yerini almıştır. Bu gösterilim ile ilgili çalışmalar bu anda da sürmektedir. Ancak, gösterilimin yalnızca toplamcıl yapıdaki işlevler için iyi sonuçlar vermesi olgusu yeni gösterilimlerin arayışının gerekliliğini gündeme getirmiştir. Bu bağlamda birçok gösterilim geliştirilmiştir. Bunların ilki çarpımcıl işlevleri daha iyi yansıtılabilmek adına geliştirilen Çarpımsal YBBG (ing: Factorized High Dimensional Model Representation) 'dir [5–7]. Ardından, üstel yapıdaki işlevler için geliştirilen Evrik Üstel (Logaritmik) YBBG (ing: Logarithmic High Dimensional Model Representation) [8], hem toplamcıl hem de çarpımcıl yapıdaki işlevler için geliştirilen Melez YBBG (ing: Hybrid High Dimensional Model Representation (HHDMR)) [9, 10] gösterilimlerinden de söz edilebilir. Tüm bu

gösterilimlerin en önemli ortak özelliği kullanılan ağırlık işlevlerinin çarpımcıl yapıda oluşudur. Bu olguyu bir adım öteye taşıyabilmek adına ağırlığın çarpımcıl olmadığı durumları da içine alan Genelleştirilmiş YBBG (ing: Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR)) geliştirilmiştir [11]. Günümüzde de, M. Demiralp ve İTÜ BEBBYT (Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu) bu konu ile ilgili çalışmalarını sürdürmekte ve yeni gösterilimler geliştirmektedir.

Son dönemlerde ağırlıklı olan bir diğer YBBG gösterilimi de Metin Demiralp ve çalışma topluluğu tarafından geliştirilen Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimidir (ÇYÇG) [12–15]. ÇYÇG’nde, çokdeğişkenli bir işlev, bir kesim destek işlevleri yardımıyla birbirine dik ve bağımsız, değişken sayısı giderek artan daha yalın yapıli işlevlerin toplamı türünden anlatılabilmektedir. Ayrıca, bizim sav çalışmalarımızın altyapısını oluşturan ÇYÇG yöntemleri de yakın zamanda geliştirilmiştir. İlk olarak özdüzeyce baskın dizeler için geliştirilen Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÜDG)(ing: Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation (TMEMPR)) [16–19] ve hemen bunun yanı sıra geliştirilen Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösteriliminden (ÇYÇÜÇG) (ing: Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariance Products Representation (TKEMPR)) söz edebiliriz [20–25]. Bu gösterilimin ardından geliştirilen bir kesim diğer yöntem de Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlandırımı Dizey Gösterilimi (ÇYÇODG)’dir (ing: Arrowheading Enhanced Multivariance Products Representation for a Kernel (AEMPRK)) [16, 17, 26].

ÇYÇG taban alınarak geliştirilen yöntemleri irdeleyiş sırasında, karşılaşılan sorunların niteliği ve çeşitliliği yeni gösterilimlerin üretilmesi gerekliliğini korumaktadır. Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Katlıdizay Gösterilimi (ÇYÇÜKG) (ing: Tridiagonal Folmat Enhanced Multivariance Products Representation (TFEMPR))de bu yöntemlerden biridir [27–32]. ÇYÇÜDG taban alınarak çokyönlü dizeler için katlıdizay kavramı odaklı geliştirilen bir yöntemdir. Ayrıca, yine ÇYÇÜDG’nde destek yöneyleri yerine destek dizeyleri kullanımı ile belirlenen bir diğer ayrıştırım yöntemi Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Öbekçil Üçköşegencil Dizey Gösterilimi (ÇYÇÖÜDG)’dir(ing: Block Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariance Products Representation (BTMEMPR)) [30, 32].

ÇYÇG yönteminin yönelere ilişkin uygulamaları Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Yöney Gösterilimi (ÇYÇÜYG) (ing: Tridiagonal Vector Enhanced Multivariance Products Representation (TVEMPR))olarak adlandırılan bir başka ayrıştırıma da ışık tutmaktadır [32,33].

Yukarıda verilen tüm bu anlatımlarda da görüldüğü gibi ÇYÇG yöntemi birçok başka ayrıştırım yöntemleri için taban oluşturan bir gösterilim durumuna gelmiş bulunmaktadır. Var olan sorunların çeşitliliğine göre hangi ayrıştırım yöntemi ile çalışılacağı belirlemek olanaklıdır. Bu savda sürekli ve ikideğişkenli işlevlerin irdelenişi doğrultusunda ilerleyiş söz konusu olmaktadır.

### 1.1 Savın Amacı

Bu zamana dek geliştirilen gösterilimler için temelde istenen olgu tüm bileşenlerinin belirlendiği açılımlardan öte, yalnızca birkaç bileşeni kullanılarak asıl işlevi olabildiğince daha iyi nitelikte anlatabilmektir. Diğer bir anlatıyla, daha az bileşenler yardımıyla çokdeğişkenli bir işlevin asıl yapısını çok daha iyi gösterebilmektir. Çoğunlukla, en çok iki değişkene bağlı bileşenlere dek belirleyişe giderek diğer bileşenler için açılıma kesme uygulanmakta ve elde edilen yaklaşıtıının niteliğini olabildiğince yükseltmeye yönelik uygulamalar geliştirilmektedir. Bu savın da asıl amacı bu yapıda biçimlenmektedir. Böylece, savda ÇYÇG temel alınarak geliştirilen yöntemler yardımıyla ikideğişkenli bir işlevi çekirdeği üçköşegencil yapıda çarpımcıl dizey ayrıştırımı türünden yazmak olanaklı duruma gelmektedir. Andıran biçimde, çok yakın zamanda geliştirilen bir diğer yöntem olan Paylaşımlı Dördül (ing: squared)Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (PDÖÇYÇÜÇG) ile tekdeğişkenli işlevlerin dışçarpımlarının toplamı ile anlatılabilen ikideğişkenli bir işlev, örtüştürülmüş dördül blok dizey ile çarpımcıl dizey ayrıştırımı ile anlatılabilir. Bilimsel yazında da kullanılan bilgisayarım yöntemlerine yeni bir seçenek oluşturması bağlamında, savda geliştirilen tüm bu yöntemler günümüzde var olan çok sayıda sorunun çözümüne destek sağlayabilecek nitelikte yöntemler olma yolunda hızla ilerleyişlerini sürdürmektedir.

## 1.2 Savda Yer Alan Bölümler

Bu bağlamda, savın ikinci bölümünde yüksek boyutlu biçme gösterilimin bileşenlerini oluşturan işlemlere etki ettirilen tümlev işlemleri ve izgecil özellikleri yardımıyla geliştirilmiş olduğumuz yöntemin temeli ortaya konmaktadır. Başka bir deyişle dayanaklarının ne olduğu ayrıntılandırılmaktadır. Ayrıca yöntemin temelini oluşturan iki asıl yöntem olarak da niteleyebileceğimiz Yüksek Boyutlu Biçme Gösterilim (YBBG) ve Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) ele alınmaktadır. Savın üçüncü bölümünde savda geliştirilen asıl yöntem olan Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG) ve gösterilimin işlemcil süreci ayrıntılı bir biçimde anlatılmaktadır. Ayrıca, tekdeğişkenli doğrucul tümlev işleminin ayrıştırımı olgusuna da yine bu bölümde yer verilmektedir. Savın bir sonraki bölümü olan dördüncü bölümde ise ağırlıklandırılmış ÇYÇÜÇG yöntemi yalınlaştırılmış ve enözelsizleştirilmiş yapısı ile yer almaktadır. Ağırlık olgusunun yanı sıra destek işlevlerinin seçimi ve bu seçimin gösterilime katkısı üzerinde de durulmaktadır. Bu bağlamda sözü edilen destek işlevlerinin katkılarını ortaya koymaya yönelik açıklayıcı uygulamalara da yine bu bölümde yer verilmektedir. Savın beşinci bölümünde, daha önceki bölümlerde anlatılan ÇYÇÜÇG yöntemini bir adım daha ileri taşıyarak ayrıştırımdaki çekirdek yapıyı türlü dönüştürümler yardımıyla anlatarak yeni yöntemler geliştirmek amaçlanmaktadır. Bunun yanı sıra daha önce belirtmiş olduğumuz çarpımcı yapıdaki işlemler olgusunu geliştirerek ayrıştırım bilimsel yazında oldukça sık kullandığımız belli başlı yöntemlere katkı sağlayacak biçimde ortaya konmaktadır. Bu savın odak konusu Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) taban alınarak yakın bir zamanda geliştirilen bir diğer gösterilim olan Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlandırılmış Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇOÇG) aracılığıyla tekdeğişkenli işlemlerin dışçarpımlarının toplamı türünden anlatılabilen çokdeğişkenli bir işlevi, sayılabilir sonsuz sayıda ögesi olan yatay ve düşey sıralı ve de asal köşegenli okuçlu yapıda bir dizey ile çarpımcı ayrıştırım türünden yazmak olanaklı duruma gelmektedir. Bu gösterilime ilişkin genel anlatımlara beşinci bölümde değinilmektedir. Bunların yanı sıra yöntemi daha iyi anlatabilmek adına Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG)'ni de içinde barındıran

bir takım sayısal uygulamalar da yine aynı bölümde yer almaktadır. Savın bu bölümünde özel olarak Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) taban alınarak yakın bir zamanda geliştirilen bir diğer yöntem olan Paylaşımlı Dördül Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (PDÖÇYÇÜÇG) anlatılmaktadır. Bu yöntem aracılığıyla tekdeğişkenli işlevlerin dışçarpımlarının toplamı türünden anlatılabilen çokdeğişkenli bir işlevi örtüştürülmüş dördül blok düzey ile çarpımcıl ayrıştırım türünden yazmak olanaklı duruma gelmektedir. Savın amacına yönelik ilerleyişte geliştirilmiş olan yönteme ilişkin genel anlatımlara ek olarak, yöntemi daha iyi anlatabilmek adına ÇYÇÜÇG ve PDÖÇYÇÜÇG’ni içinde barındıran bir takım sayısal uygulamalar da yine aynı bölümde yer almaktadır. Savın son bölümünü oluşturan altıncı bölümde savın işlenişi ve yapılan tüm araştırmalar bağlamında elde edilen bulgular bütünleştirilerek geliştirilen ayrıştırım yönteminin tüm yönlerini ortaya koyan çıkarımlara yer verilmektedir. Yöntemin niteliği, var olan sorunlara katkıları, açık bir biçimde ortaya konarak sonuç bölümü ele alınmaktadır.



## 2. ÇALIŞMANIN KURAMCIL VE UZBİLİMCİL ALTYAPISI

### 2.1 Tümlev İşleçleri

Bu çalışmadaki amacımız aşağıdaki biçimde tanımlanan doğrucul bir  $\widehat{\mathcal{F}}$  tümlev işlecini ayırtırmak olacaktır [34].

$$\widehat{\mathcal{F}}f(x) \equiv \int_a^b dy K(x,y)f(y) \quad (2.1)$$

Üzerine etki ettirilen  $f(x)$  işlevi dördümlü tümlevlenebilen tekdeğişkenli işlevlerin doğrucul yöney uzayının bir ögesi olmak durumundadır. Bir tümlev işlecinin temel ya da, belki, en önemli ögesi tümlevlenen üreten işlev işlecidir. Bu işlev işlecinin tanım bölgesi ögeleri de, değer bölgesi ögeleri de dördümlü tümlevlenebilen işlevler olmalıdır. Sağlıklı ilerleyiş için, önce, bir  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) aralığı üzerinde çözümcül olan ve dördümlü tümlevlenebilen işlevler uzayını tanımlamakta yarar bulunmaktadır. Dördümlü tümlevlenebilirlik koşulunun sonlu aralıklar için ek olarak verilmesine gerek yoktur. Ama  $a$  ve/veya  $b$ , sırasıyla,  $-\infty$  ve/veya  $+\infty$ 'a gidecek olursa, sonsuzluktaki aralık ucu kapalıdan açığa dönüşür ve aralık ya açık ya da yarı açık yapıya bürünür. Sonsuzluğun getirebileceği tekillik, dördümlü tümlevlenebilirlik ek koşulunu gerektirir.  $K(x,y)$  ikideğişkenli çekirdek işlevi de andıran biçimde dördümlü  $[a, b]^2$  üzerinde tanımlı, dördümlü tümlevlenebilir olmalıdır. Bu denklikte verilen tüm bileşenler gerçel değerlidir. Ancak karmaşık değerli durumlarını da dile getirmek olanaklıdır.

$K(x,y)$  çekirdek işlevi tüm  $(x,y)$  değerleri için  $K(y,x) = K(x,y)$  özelliğini sağlıyorsa, başka bir deyişle bakışım varsa özüne eşittir. Bakışım bize işlevin özdeğerlerinin gerçel değerli olduğunu güvence altına almaktadır. Ayrıca  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin değişik özdeğerlerine karşılık gelen öz işlevleri birbirine dikgendir. Eğer özdeğerlerde katlılık söz konusu ise cebircil ve uzamcıl katlılık aynı olacaktır. Tüm bunlar özüne eş tümlev işleçlerinin izgecil kanıtından kolaylıkla görülebilmektedir [35]. Bu olgular yardımıyla  $K(x,y)$  çekirdek işlevi

$$K(x,y) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \chi_i(x) \chi_i(y), \quad x, y \in [a, b] \quad (2.2)$$

biçiminde açık olarak yazılabilmektedir. Bu gösterimde  $\kappa_i$   $i$ . özdeğer ve  $\chi_i$  ona karşılık gelen dördümlü tümlevlenebilen ve 1 değerini üreten öz işlevi simgelemektedir.

Aşağıda (2.3) ile verilen izdüşüm işleçlerini tanımlayalım.

$$\widehat{P}_j f(x) \equiv \int_a^b dy \chi_j(x) \chi_j(y) f(y), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

$\widehat{P}_i$  izdüşüm işleçleri eşgüçlü (ing: idempotent) ve dikgendir. Böylece

$$\widehat{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \widehat{P}_i \quad (2.4)$$

ile  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin açık gösteriliminden söz etmek olanaklıdır. Ayrıca yine eşgüçlülük ve dikgenlik olgusu bize eksi değerli olmayan  $m$  bütünsayıları için

$$\widehat{\mathcal{F}}^m = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i^m \widehat{P}_i \quad (2.5)$$

ile verilen işlecin üslülerinin açık gösterilimini yazmaya olanak sağlamaktadır [34]. (2.4) ile verilen bağıntı en yaygın bilinen tümlev işleci ayrıştırımıdır. Temel bileşen çözümleyişi (ing: Principal Component Analysis, PCA) gibi yaklaştırım yöntemleri bu ayrıştırıma dayanmaktadır [36]. Ancak bunun gerçel değerli ve bakışık durumlar için kısıtlandığını unutmamak gerekir. Bu ayrıştırıma izgecil ayrıştırım demek de olanaklıdır. Sürekli işlevler için geçerli olan bu gösterilimi ayrık yapılara taşımak da olanaklıdır. Tümlev gösterilimin yerini ayrıklıkta sonlu ve/veya sonsuz toplam olgusu almaktadır.

İzgecil ayrıştırım yalnızca  $\widehat{\mathcal{F}}$  işleci için geçerli değildir. Aynı zamanda, (2.2) ile verilen eşitlikten de görüldüğü gibi,  $K(x, y)$  çekirdek işlevi için de geçerlidir. Dördül-lerinin ikikatlı tümlevi sonlu değer yaratan işlevlere "Hilbert-Schmidt Çekirdekleri" denmektedir [37]. Sonsuz toplam olgusu da sonlu toplama dönüştüğünde ise çekirdek "Pincherle-Goursat Çekirdeği" adını almaktadır [38].

Bakışım olgusu ele alındığında  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin özüne eş olduğunu belirtmiştik. Bunun anlamı özünün ve eşinin tümlevinin eşsiz olduğudur. Öte yandan bakışık olmayan işleç için

$$\widehat{\mathcal{F}}^\dagger f(x) \equiv \int_a^b dy K(y, x) f(y) \quad (2.6)$$

ile verilen  $\widehat{\mathcal{F}}^\dagger$  eş işlecinin tanımlamak olanaklıdır. Burada (2.2) ile verilen çekirdek işlevini

$$K(x, y) = \boldsymbol{\chi}(x)^T \mathbf{K} \boldsymbol{\chi}(y) \quad (2.7)$$



ile tanımlamak gerekmektedir. Burada  $\mathbf{K}$  ve  $\boldsymbol{\chi}(x)$  ile sırasıyla sayılabilir sonsuzluktaki dördül köşegencil dizey ve yöney işlevleri amaçlanmaktadır.

Bakışım olgusu gözardı edildiğinde (2.7) ile verilen bağıntı bize  $\widehat{\mathbf{I}}$  ile simgelenen işlecin dördülü tümlemlenebilen bir  $f(x)$  işlevine etki ettirilişiyle

$$\widehat{\mathbf{I}}f(x) = \boldsymbol{\chi}(x)^T \int_a^b dy \mathbf{K} \boldsymbol{\chi}(y) f(y) \quad (2.8)$$

biçiminde bir gösterilim yazma olanağı sağlamaktadır. Bakışım olgusu altında sol ve sağ yan özişlevleri aynı olurken bakışım ortadan kalktığına bu durum değişmektedir. Her nasılsa özdeğerlere odaklanım olanaklı olsa da gerçel değerlilik ve katlılık olgusu sıkıntıya düşmektedir. Bu durumdan kaçınmak için "Sürekli Tekil Değer Ayrıştırımına" odaklanım daha yerinde olacaktır [39]. Yeniden aşağıdaki bağıntılar yardımıyla izgecil ayrıştırıma odaklanıldığında

$$\widehat{\mathcal{F}}v(x) = \sigma u(x), \quad \widehat{\mathcal{F}}^\dagger u(x) = \sigma v(x) \quad (2.9)$$

ile verilen işleci ve eşini tanımlamak olanaklıdır. Bu işleç için çekirdeğinin değişik olduğunu bir kez daha vurgulamak gereklidir. Bu işleçlere sırasıyla sol yandan eşini ve özünü uyguladığımızda

$$\widehat{\mathcal{F}}^\dagger \widehat{\mathcal{F}}v(x) = \sigma^2 v(x), \quad \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{F}}^\dagger u(x) = \sigma^2 u(x) \quad (2.10)$$

biçiminde yazmak olanaklıdır. Bu eşitlikleri ayrıca

$$\widehat{\mathcal{F}}_L v(x) = \int_a^b dy K_L(x, y) \sigma^2 v(x), \quad \widehat{\mathcal{F}}_R u(x) = \int_a^b dy K_R(x, y) \sigma^2 u(x) \quad (2.11)$$

olarak aşağıdaki

$$K_L(x, y) \equiv \int_a^b d\eta K(\eta, x) K(\eta, y), \quad K_R(x, y) \equiv \int_a^b d\eta K(x, \eta) K(y, \eta) \quad (2.12)$$

tanımları bağlamında yazılabilmektedir. Burada  $L$  ve  $R$  sırasıyla "Sol" ve "Sağ" anlamında kullanılmaktadır. Bu ayrıştırımın nedeni ise  $\widehat{\mathcal{F}}_L$  ve  $\widehat{\mathcal{F}}_R$  işleçlerinin tanımlanan  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin sol ve sağ yan çarpımcıl bakışık durumu olmasıdır.  $K_L(x, y)$  ve  $K_R(x, y)$  çekirdek işlevleri bakışık olduğundan  $\widehat{\mathcal{F}}_L$  ve  $\widehat{\mathcal{F}}_R$  işleçleri özüne eşittir. (2.11) ile verilen eşitliklere aynı özdeğerleri olan iki ayrı özdeğer sorunu olarak bakmak olanaklıdır. Ayrıca  $\widehat{\mathcal{F}}_L$  ve  $\widehat{\mathcal{F}}_R$  işleçlerinin eksi değerli olmadığını da belirtmek gerekmektedir. Burada yer alan  $\sigma^2$ 'nin artı değerli olduğu açıktır. Ancak  $\sigma$  değeri

için iki değişik durum ortaya çıkmaktadır. Bu durumda da artı değerli olanın seçimi yöntemin özelsizleştirilmesi için büyük bir kısıt oluşturmayacaktır. Tüm bu işlemler sonucunda elde edilen  $\sigma$  değerleri  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlecinin "Tekil Değerleri" adını alırken karşılık gelen  $u(x)$  ve  $v(x)$  işlevleri de sırasıyla "Sol ve Sağ Tekil İşlevleri" adını almaktadır [40].

Yukarıda sözü edilen sürekli tekil değer ayrıştırımının çözümü aşağıdaki ayrıştırım sorununun çözümü için belirtiklik getirmektedir.

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i u_i(x) v_i(y) \quad (2.13)$$

Bu eşitlik ayrıca aşağıda verilen tıkız gösterilim ile de anlatılabilmektedir.

$$K(x, y) = \mathbf{u}^T(x) \mathbf{\Sigma} \mathbf{v}(y) \quad (2.14)$$

Burada  $\mathbf{\Sigma}$  dizeyi ile, sıfırdan değişik öğeleri aşağı doğru artan sırasayıyla sıralanmış tekil değerler olan, dördül ve köşegencil sayılabilir sonsuzlukta öge içeren dizey amaçlanmaktadır. Andıran biçimde  $\mathbf{u}(x)$  ve  $\mathbf{v}(y)$  sayılabilir sonsuzlukta aşağı doğru artan sırasayılı  $u(x)$  ve  $v(x)$  tekil işlevlerini içeren tekil özışlevlerdir.  $\mathbf{\Sigma}$  bakışık dizey olduğundan aşağıdaki eşitlikleri yazmak olanaklıdır.

$$\widehat{\mathcal{F}} f(x) = \mathbf{u}^T(x) \mathbf{\Sigma} \int_a^b dy \mathbf{v}(y) f(y), \quad \widehat{\mathcal{F}}^\dagger f(x) = \mathbf{v}^T(x) \mathbf{\Sigma} \int_a^b dy \mathbf{u}(y) f(y) \quad (2.15)$$

Bu eşitliklere sırasıyla eşleniği ve özü etki ettirildiğinde

$$\widehat{\mathcal{F}}^\dagger \widehat{\mathcal{F}} f(x) = \mathbf{v}^T(x) \mathbf{\Sigma}^2 \int_a^b dy \mathbf{v}(y) f(y) \quad (2.16)$$

ve

$$\widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{F}}^\dagger f(x) = \mathbf{u}^T(x) \mathbf{\Sigma}^2 \int_a^b dy \mathbf{u}(y) f(y) \quad (2.17)$$

ile verilen bağıntılar elde edilmektedir.  $\mathbf{\Sigma}$  dizeyinin bakışımı olgusu altında ise

$$\int_a^b dx \mathbf{u}(x) \mathbf{u}(x)^T = \mathbf{I}_\infty, \quad \int_a^b dx \mathbf{v}(x) \mathbf{v}(x)^T = \mathbf{I}_\infty \quad (2.18)$$

yazılabilmektedir.  $\mathbf{I}_\infty$  sayılabilir sonsuzlukta öğeden oluşan birim dizeyi yardımıyla tekil işlevlerin dikliğinden söz etmek olanaklıdır.

Tüm bu işleçler ile üçköşegencilleştirim için gerekli tümlev işlecinin enözelsiz biçimde tanımlamak amaçlanmaktadır. İlk olarak köşegencil yapıdaki işleçler ve bu işleçlerin ilgili izdüşüm işleçlerini aşağıdaki biçimde yazmak olanaklıdır.

$$\widehat{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \widehat{P}_i \quad (2.19)$$

$\widehat{P}_i$  herhangi dördülü tümlemlenebilen bir  $f(x)$  işlev üzerinde tanımlı izdüşüm işlecidir.

$$\widehat{P}_i f(x) \equiv \int_a^b dy u_i(x) v_i(y) f(y), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

Yukarıda yer alan  $u_i(x)$  ve  $v_i(x)$  işlevleri sırasıyla sol ve sağ yan tekil uzaylarının  $i$ . eksenini örten tekil işlevlerdir.  $\widehat{P}_i$  izdüşüm işleci sağ tekil uzayın  $i$ . ekseninden sol tekil uzayın  $i$ . eksenine izdüşürürken eşleniği sol tekil uzayından sağ tekil uzayına izdüşürmektedir.  $\widehat{P}_i^\dagger \widehat{P}_i$  ve  $\widehat{P}_i \widehat{P}_i^\dagger$  işleçleri sağ ve sol tekil uzayda yer alan herhangi bir işlevi sağ ve sol tekil uzayın  $i$ . eksenine izdüşürmektedirler. Öte yandan  $i$  ve  $j$  altsırasayılarının değişik olduğu çarpımcıl  $\widehat{P}_i^\dagger \widehat{P}_j$  veya  $\widehat{P}_i \widehat{P}_j^\dagger$  izdüşüm işleçleri diklik olgusundan sıfır değer üretmektedir.

Ayrıca daha özelsiz yapıdaki izdüşüm işleçlerini aşağıdaki biçimde de tanımlamak olanaklıdır.

$$\widehat{T}_{i,j} f(x) \equiv \int_a^b dx u_i(x) v_j(y) f(y), \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.21)$$

Bu gösterilim  $i$  ve  $j$  altsırasayılarının birbirinden değişik olduğu öngörümü için geçerli olacaktır. Aynı  $i - j$  değerleri bizi Dönüşüm İşleçleri (ing: Transition Operators) adı verilen işleçlere götürmektedir. Her nasılsa bilgisayarım karmaşası yüksek olan izgecil sorunları çözme yineleyişli aşamalar gerektirse de bu ana dek yapılan tüm çözümler bizi özdeğer sorununa götürmektedir. Bu sorunlar özelsizde dizey ve işleç köşegencilleştirime dayanmaktadır. Bilgisayım ederini arttıran en temel olgu da bu yapıdır. Öte yandan yineleyiş yerine özyineleyiş kullanarak köşegencilleştirim bilgisayarım ederini oldukça düşürmektedir. Üçköşegencilleştirimde (2.19) ile verilen eşitlik yerine aşağıdaki işleç kullanılmaktadır.

$$\widehat{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \alpha_i \widehat{P}_i + \beta_i \widehat{T}_{i+1,i} + \gamma_i \widehat{T}_{i,i+1} \right) \quad (2.22)$$

Bu eşitlikte  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$ , değeri bilinen değıştirgeleri,  $u(x)$  ve  $v(x)$  işlevleri ise ileride ayrıntılı bir biçimde ele alınacak tekdeğışkenli işlevleri anlatmaktadır. Bu durumda asıl olarak tekdeğışkenli doğrucul tümlev işlecinin üçköşegencilleştirimi incelenmek istenmektedir. Bu olgu da çekirdek ayrıştırımı yardımıyla gerçekleştirilmeye çalışılmaktadır. Bu bağlamda yüksek boyutlu biçegösterilim ile yeni bir üçköşegencilleştirimli ayrıştırım yöntemi ilerleyen bölümlerde ayrıntılı bir biçimde ortaya konacaktır. Bildirimim bundan sonraki bölümlerinde öncelikle YBBG ve ÇYÇG

için ön anımsatım yapılacaktır. Daha sonra ÇYÇÜÇG'ne geçilecek ve doğrucul tümlev işleçleri yardımıyla gösterilimin özelsiz yapısı ortaya konacaktır. Ardından iççarpım, boy ve destek işlevlerinde ağırlık işlecinin kullanılması ile oluşacak yeni yapılandırım üzerinde durulacaktır. Ayrıca ÇYÇÜÇG ile ağırlık işleci kullanımı olgusu biraraya getirilecektir. Ağırlık işleci kullanımının gösterilime katkısı ve yöntemi özüyle tutarlı yöneme yaklaştıran olgular da ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır. Son olarak da tüm bu çalışmaları daha anlaşılır ve belirtik duruma getiren uygulamacı örnekler yer verilecektir.

## 2.2 Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim (YBBG)

Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim (YBBG) Yöntemi, çokdeğişkenli  $f(x_1, \dots, x_N)$  işlevinin daha az değişkenli birbirine dikgen işlevlerin sonlu toplamı olarak yazılmasına olanak sağlayan bir yöntemdir. İlk olarak I. M. Sobol tarafından tasarlanan yöntem, 1993 yılında "Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models" isimli yazıda yayınlanmıştır [2]. Belirtilen çalışmada YBBG bileşenlerinin  $[0,1]$  aralığında ve birim ağırlık altındaki temel özelliklerine yer verilmiştir. YBBG yönteminin özelsiz hali ise H. Rabitz tarafından ortaya konmuştur [3]. Bu yöntemle ilgili çalışmalar, incelenen işlevin yapısı toplamsal ise yöntemin iyi sonuçlar verdiğini ortaya koymaktadır. Ancak, toplamsal olmayan işlevler için istenilen sonuçları elde etmek oldukça güçtür. Bu güçlükleri ortadan kaldırmak amacıyla bir takım yeni yöntemler M. Demiralp ve grubu tarafından geliştirilmiştir [4]. Bu gösterilim ile, çokdeğişkenli bir  $f(x_1, \dots, x_N)$  işlevi

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \\ + \dots + f_{1,2,3,\dots,N}(x_1, \dots, x_N) \quad (2.23)$$

biçiminde sırasıyla değişmez, tekdeğişkenli, ikideğişkenli ve andıran biçimde  $N$  değişkenli birbirine dikgen işlevlerin sonlu toplamı ile anlatılabilmektedir [9, 12]. (2.23) açılımının sağ yanında toplam  $2^N$  sayıda anlatım vardır. Bu anlatımlar sırasıyla  $f_0$  sabit anlatım,  $N$  sayıda  $f_{i_1}(x_{i_1})$  tekdeğişkenli anlatım,  $\frac{N(N-1)}{2}$  adet  $f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$  ikideğişkenli anlatımlar ve andıran biçimde devam etmek üzere  $f_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N)$   $N$  değişkenli terim olarak adlandırılmaktadır. Her bir tekdeğişkenli anlatım bağlı bulunduğu bağımsız değişkenin işlevin çözümcül yapısına tek başına yapmış olduğu

katkıyı, çokdeğişkenli anlatımların her biri ise bağlı bulunduğu bağımsız değişkenlerin işlevin çözümcül yapısına birlikte yapmış olduğu katkıyı belirtmektedir. Gösterilim ile ilgili daha çok ayrıntılandırılmasına gerek duyulmamaktadır.

### 2.3 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG)

Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) YBBG ile eşdeğer olarak böl-yönet düşüncesine dayanmaktadır. Bu gösterilim ile  $N$  değişkenli bir işlevi

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + f_{1\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (2.24)$$

biçiminde birbirine dikgen ve bağımsız, daha az sayıda değişken içeren işlevlerin toplamı türünden yazmak olanaklıdır [12–14]. Dolayısıyla, bu gösterilimin işleyiş yapısını böl-yönet düşüncesine dayandırmak oldukça yerinde bir yaklaşım olacaktır. ÇYÇG için de aynı temel düşünceler söz konusudur. Çokdeğişkenli bir işlevi

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) + \dots + f_{1\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (2.25)$$

ile, ÇYÇG yardımıyla, açmak olanaklıdır. Açılımın sağ tarafında  $s_j(x_j)$  ile simgelenen tekdeğişkenli  $N$  adet destek işlevi vardır. Gösterilimin yalnız YBBG ile ayrıldığı ilk ve belki de en temel nokta neredeyse istenildiği gibi seçilebilen bu işlevlerin varlığıdır. Bu işlevler yardımıyla açılımın çokdeğişkenliliğinin yanı sıra niteliği de yükseltilmiş olmaktadır. Ayrıca destek işlevleri değişmez işlev olarak seçildiğinde gösterilim yalnız YBBG gösterilimine dönüşmektedir.

YBBG gösteriliminde bileşenlerin belirlenimi için, kuşkusuz, bir kesim koşullar gereklidir. Ancak, bilimsel yazında gösterilim oldukça sık yer aldığı ve benimsendiği için bu çalışmada yineleme gereği duymamaktayız. Benzer koşullar ÇYÇG için de söz konusudur. İlk olarak bu açılımda diğer açılımlarda da olduğu gibi ağırlıklandırım vardır. Ağırlıklandırım işlemi aslında birçok anlamda gösterilime katkı sağlamaktadır. Ama en temel anlamda çözümcül olmayan bir işlevi ağırlık işlevleri yardımıyla çözümcül duruma getirmek olanaklıdır. Bu da bize kullandığımız işlevler için esneklik kazandırmaktadır. Bu gösterilimde kullandığımız  $N$  değişkenli ağırlık işlevi tekdeğişkenli  $W_i(x_i)$  ile simgelenen ağırlık işlevlerinin çarpımı olarak

tanımlanmaktadır. Bu ağırlık işlevleri için

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1; \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.26)$$

ve

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) (s_i(x_i))^2 = 1; \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.27)$$

ile belirlenen olağanlaştırım (ing:normalization) ya da, birimboylulaştırım koşulu söz konusudur. Ayrıca ÇYÇG bileşenlerinin belirlenimi için gerekli diğer koşullar da aşağıda verilen sıfırlanım koşullarıdır.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) s_i(x_i) f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

Tüm bu koşullar yardımıyla ÇYÇG bileşenlerini eşsiz olarak belirlemek olanaklıdır. Bunun için (2.25) ile verilen eşitliği ilgili ağırlıklar ile çarpıp yine ilgili aralıklarda tümlevini alma ile tanımlanan bir kesim işlemler kullanılmaktadır. Aşağıda verilen  $I_0$  işlecini ÇYÇG açılımına uyguladığımızda

$$\mathcal{I}_0 f(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.29)$$

eşitliğini elde ederiz. İşlem kolaylığı sağlamak amacıyla tanımlanan  $I_i$  işlemleri,  $i$ . değişken dışında tüm diğer değişkenlere göre ilgili ağırlık ve destek işlevleri ile tümlevleyiş işlecini simgelemektedir. Böylece, aşağıda sırasıyla verilen ÇYÇG bileşenleri tek türlü belirlenmiş olmaktadır.

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{j=1}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} W_{i-1}(x_{i-1}) \\ &\times \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} W_{i+1}(x_{i+1}) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \\ &\times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) - s_i(x_i) f_0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Benzer biçimde iki ve daha çok sayıda değişken içeren bileşenleri de yine daha çok altsirasayı içeren ancak aynı temel işleme dayanan işlemler yardımıyla aşağıdaki

biçimde elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}} dx_{i_1-1} W_{i_1-1}(x_{i_1-1}) \\
&\times \int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}} dx_{i_1+1} W_{i_1+1}(x_{i_1+1}) \dots \int_{a_{i_2-1}}^{b_{i_2-1}} dx_{i_2-1} W_{i_2-1}(x_{i_2-1}) \\
&\times \int_{a_{i_2+1}}^{b_{i_2+1}} dx_{i_2+1} W_{i_2+1}(x_{i_2+1}) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \\
&\times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) f(x_1, \dots, x_N) - s_{i_2}(x_{i_2}) f_{i_1}(x_{i_1}) \\
&- s_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2}) - s_{i_1}(x_{i_1}) s_{i_2}(x_{i_2}) f_0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Yukarıda (2.32) ile verilen bağıntıda  $i_1$ . ve  $i_2$ . değişkenle ilgili büyüklükler dışlanarak tanımlanan tümlevleyiş işleci kullanılmaktadır. Kuşkusuz, daha çok sayıda bileşen içeren terimleri de andıran biçimde belirlemek olanaklıdır. Ancak, bu uygulamada bize uygulayıcılık getirmemekle birlikte işlem ederini de oldukça yükselten bir olgudur. Özelsizde yaygın olarak en çok ikideğişkenli analımları içerecek biçimde belirleyişler gerçekleştirerek açılımda kesme işlemine gidiş yeğlenmektedir. Böylece gösterilim açılımdan başka bir boyut kazanan bir yaklaşıım yöntemi durumunu almaktadır. Gösterilim kolaylığı getirmesi açısından aşağıda  $S_i(x_1, \dots, x_N)$  ile simgeleyen yaklaşıımlar tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
S_0(x_1, \dots, x_N) &= f_0 \prod_{j=1}^N s_j(x_j) \\
S_1(x_1, \dots, x_N) &= S_0(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j(x_j) \\
S_2(x_1, \dots, x_N) &= S_1(x_1, \dots, x_N) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j(x_j) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Bu eşitliklerde yaklaşıımlar sırasıyla sıfırncı kereden yapılan kesmeler için sıfırncı kereden yaklaşıım, birinci kereden yapılan kesmeler için birinci kereden yaklaşıım ve en son  $(N-1)$ . kerte için  $(N-1)$ . kereden yaklaşıım adını almaktadır.  $N$ . kereden kesme yapmanın anlamsız olduğu, başka bir deyişle bunun asıl işlevin özü olduğu da açıkça gözükmemektedir.

Daha önceki yazılarımızda ilgili ÇYÇG bileşenlerinin dikgenliğinden söz etmiştik. Bu

olguyu  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N$  ve  $1 \leq k < l \leq N$  olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlamak olanaklıdır.

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1, \dots, j_l}}^N s_j(x_j) f_{i_1 \dots i_k} f_{j_1 \dots j_l} = 0 \quad (2.34)$$

Bunun sonucunda da aşağıda (2.35) bağıntısı ile verilen eşitlik yardımıyla iççarpımdan sözedebilişimiz söz konusudur.

$$\begin{aligned} \left( f_{i_1 \dots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i, f_{j_1 \dots j_l} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1, \dots, j_l}}^N s_j \right) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \dots \\ &\times \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) \\ &\times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i(x_i) f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \\ &\times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1, \dots, j_l}}^N s_j(x_j) f_{j_1 \dots j_l}(x_{j_1}, \dots, x_{j_l}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Daha da ileri gittiğimizde  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$  ve  $1 \leq k \leq N$  için boy tanımından söz edebilir duruma geliriz.

$$\begin{aligned} \left\| f_{i_1 \dots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i \right\|^2 &= \left( f_{i_1 \dots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i, f_{i_1 \dots i_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_k}}^N s_i \right) \\ &= \|f_{i_1 \dots i_k}\|^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

(2.34) ve (2.36) bağıntıları göz önünde bulundurularak (2.25) ile verilen ÇYÇG açılımının her iki yanını ilgili ağırlıklar ile çarpıp tüm değişkenlere göre tümlevlediğimizde

$$\|f\|^2 = \left\| f_0 \prod_{j=1}^N s_j \right\|^2 + \sum_{i=1}^N \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j \right\|^2 + \dots + \|f_{12 \dots N}\|^2 \quad (2.37)$$

ile verilen eşitliği elde ederiz. Bu eşitliğin her iki yanını sol yanda elde ettiğimiz asıl işlevin boy dördülüne böldüğümüzde ise sol yanın 1'e eşit olduğu, sağ yanın ise aşağıdaki gibi gösterilen ayrı ayrı toplamlar türünden verildiği eşitliği elde etmiş oluruz. Burada sağ yanda gördüğümüz her bir anlatım, aslında, gösterilimi yaklaştırım



yöntemine dönüştürdüğümüzü varsaydığımızda niteliği başka bir deyişle asıl işlevi ne kadar iyi gösterip göstermediğine ilişkin ölçümleri vermektedir.

$$1 = \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^N s_j \right\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j \right\|^2 + \dots + \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12\dots N}\|^2 \quad (2.38)$$

Bu anlatımların her birini yaptığımız kesmenin kertesine göre adlandırmak olanaklıdır. Örneğin, aşağıda da açık durumu ile verilen, sırasıyla, sıfıncı kerteden kesme yaptığımızda elde edeceğimiz sıfıncı kerteden nitelik ölçeni, birinci kerteden kesme yaptığımızda elde edeceğimiz birinci kerteden nitelik ölçeni ve en son olarak  $N$ . kerteden nitelik ölçeni tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{\|f\|^2} \left\| f_0 \prod_{j=1}^N s_j \right\|^2 \\ \sigma_1 &= \sigma_0 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \left\| f_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N s_j \right\|^2 \\ \sigma_2 &= \sigma_1 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \left\| f_{i_1 i_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, i_2}}^N s_j \right\|^2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.39)$$

$N$ . kerteden nitelik ölçeninin 1'e eşit ve nitelik ölçenlerinin aşağıda (2.40) ile verilen eşitsizlikteki gibi (uygulayıcıl açıdan, uzbilimcil açıdan değil) iyi sıralı olduğu açıktır.

$$0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_N = 1 \quad (2.40)$$

Bu gösterilim ile ilgili son zamanlarda yapılan çalışmalar bize istenildiği gibi seçilen destek işlevlerinin asıl işleve öykünürlüğünün artışının yaklaştırımın niteliğini de artırdığını açıkça göstermiştir.

ÇYÇG ile ilgili yapılan çalışmalar bugün de süregitmektedir. Çok yakın zamanlarda geliştirilen ve bu anda da geliştirilmekte olan gösterilimlerden ilki ÇYÇÜÇG, bu savda ayrıntılı bir biçimde ele alınmıştır [20–22].



### 3. ÜÇKÖŞEGENCİL ÇEKİRDEK AYRIŞTIRIMI

#### 3.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG)

YBBG yönteminin doğuşu ile Metin Demiralp ve çalışma topluluğunun çokyönlü çalışmaları gün geçtikçe ivme kazanmıştır. Ortaya konan her bir yöntem ile daha başka sorunların varlığı ve bu sorunlara çözümlerin ayırđına varılmakta ve yeni bulgular yeni araştırmalara yön vermektedir. Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG) yöntemi de bu biçimde ortaya konan yöntemlerin arasında yer almaktadır. Bu yöntemi ayrıntılandırabilmek adına ikideğişkenli işlevler için ÇYÇG açılımını yine irdelemek gerekmektedir. Daha önceki bölümlerde  $\hat{I}$  doğrucul tümlev işlecinin çekirdeği olan  $K(x,y)$  ikideğişkenli işlevi için ÇYÇG açılımı aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$K(x,y) = \mathcal{K}_0 u(x)v(y) + \mathcal{K}_1(x)v(y) + u(x)\mathcal{K}_2(y) + \mathcal{K}_{1,2}(x,y) \quad (3.1)$$

Yukarıda sağ yanda görölen  $\mathcal{K}$  işlevleri belirlenecek ÇYÇG bileşenlerini anlatmaktadır. Bu bileşenler sırasıyla

$$\mathcal{K}_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy u(x)v(y)W_1(x)W_2(y)K(x,y), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{K}_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} dy v(y)W_2(y)K(x,y) - \mathcal{K}_0 u(x), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{K}_2(y) = \int_{a_1}^{b_1} dx u(x)W_1(x)K(x,y) - \mathcal{K}_0 v(y), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{K}_{1,2}(x,y) = K(x,y) - \mathcal{K}_0 u(x)v(y) - \mathcal{K}_1(x)v(y) - \mathcal{K}_2(y)u(x). \quad (3.5)$$

ile tek türlü elde edilmektedir. Ayrıca doğrucul tümlev işleci gösterilimi yardımıyla bileşenleri aşağıdaki biçimde de belirlemek olanaklıdır.

$$\mathcal{K}_1(x) = \left( \hat{I}_x - \hat{P}_u \right) \int_{a_2}^{b_2} dy v(y)W_2(y)K(x,y), \quad (3.6)$$

$$\mathcal{K}_2(y) = \left(\widehat{I}_y - \widehat{P}_v\right) \int_{a_1}^{b_1} dx u(x) W_1(x) K(x, y), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{K}_{1,2}(x, y) = \left(\widehat{I}_x - \widehat{P}_u\right) \left(\widehat{I}_y - \widehat{P}_v\right) K(x, y) \quad (3.8)$$

Yukarıda yer alan eşitliklerdeki  $\widehat{I}_x$  ve  $\widehat{I}_y$  işlemleri sırasıyla  $x$  ve  $y$  bağımsız değişkenlerine bağlı tekdeğişkenli işlevlerin örttüğü uzaydaki birim işlemleri simgelemektedir.  $\widehat{P}$  tümlev işleci, üzerine etki ettiği terimi  $u(x)$  destek işlevinin örtmüş olduğu uzaya izdüşürür. Andıran biçimde,  $\widehat{Q}$  tümlev işleci ise, üzerine etki ettiği terimi  $v(y)$  destek işlevinin örtmüş olduğu uzaya izdüşüren işleç olarak tanımlanmaktadır. Başka bir deyişle  $\widehat{P}$  ve  $\widehat{Q}$  işlemlerini

$$\widehat{P}_u f(x) \equiv u(x) \int_{a_1}^{b_1} d\xi u(\xi) W_1(\xi) f(\xi), \quad \widehat{P}_v g(y) \equiv v(y) \int_{a_2}^{b_2} d\eta v(\eta) W_2(\eta) g(\eta) \quad (3.9)$$

olarak yazmak olanaklıdır. İkinci bölümde YBBG ve ÇYÇG yöntemlerini açıklarken dikgenlik olgusundan söz etmiştik. Bu olgunun varoluşu tümlevleme ve iççarpım arasındaki ilişkiden kaynaklanmaktadır. Daha açık olabilmek adına iççarpımı aşağıdaki eşitlikler yardımıyla yinelemek gerekmektedir [41].

$$(f_1, f_2)_x \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx f_1(x) W_1(x) f_2(x), \quad (g_1, g_2)_y \equiv \int_{a_2}^{b_2} dy g_1(y) W_2(y) g_2(y) \quad (3.10)$$

Yukarıda  $f$  and  $g$  ile simgelenen işlevler dördümlü tümlevlenebilen işlev olma özelliğini taşır. Bu iççarpımlardan bağlı bulunduğu değişkenlere göre yönlü iççarpımlar olarak söz edilebilmektedir. Öteki bir anlatımla  $x$  değişkenine bağlı iççarpım için "Birinci Yönlü İççarpım",  $y$  değişkenine bağlı iççarpım için "İkinci Yönlü İççarpım" demek olanaklıdır. İkideğişkenli işlevler için ÇYÇG'nde iççarpım, bu iki yönlü durumun birleşimiyle tanımlanmaktadır. ÇYÇG ile çekirdek işlevi için aşağıdaki iççarpım eşitliklerini yazmak olanaklıdır.

$$(u, \mathcal{K}_1)_x = 0, \quad (v, \mathcal{K}_2)_y = 0 \quad (3.11)$$

$$(u, \mathcal{K}_{1,2})_x = 0, \quad \forall y \in [a_2, b_2], \quad (v, \mathcal{K}_{1,2})_y = 0, \quad \forall x \in [a_1, b_1] \quad (3.12)$$

Her iki  $\widehat{P}_u$  ve  $\widehat{P}_v$  işleci de özünedönendir (ing: idempotent). Aynı zamanda da bu iki işlecin değıştirimli olduğu da açıktır. Bir de  $(\widehat{I}_x - \widehat{P})$  ve  $(\widehat{I}_y - \widehat{Q})$  işlemlerinin de karşılık gelen bağımsız değişkenlerine bağlı tekdeğişkenli işlevlerin örtmüş olduğu eksene dikgen bir boyutlu alt uzaya izdüşüren işlemler olduklarını da söyleyebiliriz.

Bu durumda her aşamada boyut bir düşürülerek bir yapı elde edilmesi ve kesmelerle yaklaştırım yapılmasından söz edilebilmektedir.

$u(x)$  ve  $\mathcal{K}_1(x)$  işlevleri ile andıran biçimde  $v(y)$  ve  $\mathcal{K}_2(y)$  işlevleri arasındaki dikgenlik sırasıyla destek işlevlerinin birinci yöndeki kümelenimi (x-yönü, sol yön), ve ikinci yöndeki kümelenimi (y-yönü, sağ yön) olarak ele alınabilmektedir. Bunun sonucu olarak aşağıda (3.13) ve (3.14) ile verilen eşitlikleri yazmak olanaklıdır.

$$u_1(x) \equiv u(x), \quad u_2(x) \equiv \frac{1}{\beta_1} \mathcal{K}_1(x), \quad \beta_1 \equiv (K_1, K_1)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

$$v_1(y) \equiv v(y), \quad v_2(y) \equiv \frac{1}{\gamma_1} \mathcal{K}_2(y), \quad \gamma_1 \equiv (K_2, K_2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

Böylece ikideğişkenli ÇYÇG açılımının yinelemeli yapıdaki ilk adımı olan gösterilimini (3.15) ile

$$K(x, y) = \alpha_1 u_1(x) v_1(y) + \beta_1 u_2(x) v_1(y) + \gamma_1 u_1(x) v_2(y) + K_{1,2}(x, y) \quad (3.15)$$

$\alpha_1 \equiv K_0$  olmak üzere tanımlamak olanaklıdır [20]. Açılımın sağ yanındaki ilk üç toplamcıl terim tekdeğişkenli işlevlerin ikili çarpımları türündendir. Ama son anlatım olan  $K_{1,2}(x, y)$  kalan anlatım bu türden değildir. Bu nedenden ÇYÇG açılımını bu kez kalan anlatıma uygulayarak gösterilimin niteliğini yükseltme yoluna gidilmektedir. Yineleyişte yöntem için gerekli destek işlevleri, bir önceki yöntemde belirlenen tekdeğişkenli ÇYÇG bileşenlerinden türetilerek elde edilmektedir. Yineleyiş için gerekli alt yapıyı ve gösterilimi enözelsiz durumu ile ortaya koyabilmek adına aşağıdaki üstsırsayılandırım ile yeniden simgelemek gereklidir.

$$K^{(1)}(x, y) \equiv K(x, y), \quad K^{(2)}(x, y) \equiv K_{1,2}(x, y) \quad (3.16)$$

Böylece

$$K^{(1)}(x, y) = \alpha_1 u_1(x) v_1(y) + \beta_1 u_2(x) v_1(y) + \gamma_1 u_1(x) v_2(y) + K^{(2)}(x, y) \quad (3.17)$$

yazılabilmektedir. Bu eşitlik ile  $u_1(x)$  ve  $v_1(y)$  başlangıç destek işlevleri ve  $K^{(1)}(x, y)$  asıl işlevi anlatacaktır. Yineleyişin ilk bulguları da sırasıyla

$$\alpha_1 = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy u_1(x) v_1(y) W_1(x) W_2(y) K^{(1)}(x, y), \quad (3.18)$$

$$\beta_1 \equiv \left( \int_{a_1}^{b_1} dx K_x^{(1)}(x) W_1(x) \left[ \hat{I}_x - \hat{P}_{u_1} \right] K_x^{(1)}(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$K_x^{(1)}(x) \equiv \int_{a_2}^{b_2} dy v_1(y) W_2(y) K^{(1)}(x, y), \quad (3.19)$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\equiv \left( \int_{a_2}^{b_2} dy K_y^{(1)}(y) W_2(y) \left[ \widehat{I}_y - \widehat{P}_{v_1} \right] K_y^{(1)}(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\ K_y^{(1)}(y) &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx u_1(x) W_1(x) K^{(1)}(x, y),\end{aligned}\quad (3.20)$$

ölçekleyiş değiştirgeleri (ing: scaling parameters) ile ikincil ÇYÇĞ bileşenleri olacaktır. Bir sonraki yineleyiş için gerekli türetilmiş destek işlevleri de

$$u_2(x) \equiv \frac{1}{\beta_1} \left( \widehat{I}_x - \widehat{P}_{u_1} \right) K_x^{(1)}(x), \quad v_2(y) \equiv \frac{1}{\gamma_1} \left( \widehat{I}_y - \widehat{P}_{v_1} \right) K_y^{(1)}(y) \quad (3.21)$$

ile belirlenecektir. Kalan terim ise doğrucul tümlev işleçleri yardımıyla tıkız olarak

$$K^{(2)}(x, y) = \left( \widehat{I}_x - \widehat{P}_{u_1} \right) \left( \widehat{I}_y - \widehat{P}_{v_1} \right) K^{(1)}(x, y) \quad (3.22)$$

biçiminde yazılabilecektir. Yineleyiş bu defa  $K^{(2)}(x, y)$  ikideğişkenli kalan terimine ÇYÇĞ açılımının  $u_2(x)$  ve  $v_2(y)$  türetilmiş destek işlevleri yardımıyla uygulanışıyla sürdürülecektir. Böylece açılımın sağ yanındaki toplamcıl terim sayısında artış olacaktır. Bir sonraki adım için elde edilecek gösterilim

$$K^{(2)}(x, y) = \alpha_2 u_2(x) v_2(y) + \beta_2 u_3(x) v_2(y) + \gamma_2 u_2(x) v_3(y) + K^{(3)}(x, y) \quad (3.23)$$

biçiminde olacaktır. Burada elde edilen (3.17) ve (3.23) ile verilen eşitlikler ÇYÇÜÇĞ gösteriliminin birinci ve ikinci adımı olarak tanımlanmaktadır. Bunu herhangi bir  $j$ . adım için de yazmak olanaklıdır.

$$K^{(j)}(x, y) = \alpha_j u_j(x) v_j(y) + \beta_j u_{j+1}(x) v_j(y) + \gamma_j u_j(x) v_{j+1}(y) + K^{(j+1)}(x, y), \quad (3.24)$$

öyle ki,

$$\alpha_j = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy u_j(x) v_j(y) W_1(x) W_2(y) K^{(j)}(x, y), \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}\beta_j &\equiv \left( \int_{a_1}^{b_1} dx K_x^{(j)}(x) W_1(x) \left[ \widehat{I}_x - \widehat{P}_{u_j} \right] K_x^{(j)}(x) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ K_x^{(j)}(x) &\equiv \int_{a_2}^{b_2} dy v_j(y) W_2(y) K^{(j)}(x, y),\end{aligned}\quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}\gamma_j &\equiv \left( \int_{a_2}^{b_2} dy K_y^{(j)}(y) W_2(y) \left[ \widehat{I}_y - \widehat{P}_{v_j} \right] K_y^{(j)}(y) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ K_y^{(j)}(y) &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx u_j(x) W_1(x) K^{(j)}(x, y),\end{aligned}\quad (3.27)$$

$$u_{j+1}(x) \equiv \frac{1}{\beta_j} \left( \widehat{I}_x - \widehat{P}_{u_j} \right) K_x^{(j)}(x), \quad v_{j+1}(y) \equiv \frac{1}{\gamma_j} \left( \widehat{I}_y - \widehat{P}_{v_j} \right) K_y^{(j)}(y). \quad (3.28)$$

Böylece  $j$ . adım için tıkız gösterilim aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir.

$$K^{(j+1)}(x,y) = \left( \widehat{I}_x - \widehat{P}_{u_j} \right) \left( \widehat{I}_y - \widehat{P}_{v_j} \right) K^{(j)}(x,y) \quad (3.29)$$

Artık (3.24) ile  $j$ . adım için verilen açılım, her bir  $j = 1, 2, \dots, n$  için biraraya getirildiğinde

$$\begin{aligned} K^{(1)}(x,y) &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j u_j(x) v_j(y) + \beta_j u_{j+1}(x) v_j(y) + \gamma_j u_j(x) v_{j+1}(y)) \\ &+ K^{(n+1)}(x,y) \end{aligned} \quad (3.30)$$

ile sağ yanda toplamcıl bir açılımı elde etmek olanaklıdır. Açılımın sonunda yer alan  $K^{(n+1)}(x,y)$  anlatımı ise

$$\begin{aligned} K^{(n+1)}(x,y) &= \left[ \prod_{i=1}^n \left( \widehat{I}_x - \widehat{P}_{u_i} \right) \right] \left[ \prod_{i=1}^n \left( \widehat{I}_y - \widehat{P}_{v_i} \right) \right] K^{(1)}(x,y) \\ &= \left( \widehat{I}_x - \sum_{i=1}^n \widehat{P}_{u_i} \right) \left( \widehat{I}_y - \sum_{i=1}^n \widehat{P}_{v_i} \right) K(x,y). \end{aligned} \quad (3.31)$$

ile tıkız gösterilimi verilen kalan anlatım olacaktır. Gösterilimde izdüşüm işlemleri için var olan eşgüçlülük ve yoketme özelliklerinden ötürü  $n$  değeri büyüdükçe kalan anlatımın sıfırlanacağı sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu olgular ışığında, aşağıdaki eşitlikle verilen sonsuz toplamcıl açılımı yazmak olanaklıdır.

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j u_j(x) v_j(y) + \beta_j u_{j+1}(x) v_j(y) + \gamma_j u_j(x) v_{j+1}(y)). \quad (3.32)$$

Bu gösterilim ikideğişkenli işlevler için Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG) açılımı olarak adlandırılmaktadır. Açılım ayrıca tıkız gösterilim ile

$$K(x,y) = \mathbf{u}(x)^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{v}(y) \quad (3.33)$$

biçiminde de yazılabilmektedir. Yukarıda örtük yapıda verilen ayrıştırım gösteriliminde  $\mathbf{U}(x)$  ve  $\mathbf{V}(y)$  ile,  $u_i(x)$  ve  $v_i(y)$  destek işlevlerinin oluşturduğu sayılabilir sonsuz boyutlu yöneyler anlatılmak istenmektedir.  $\mathbf{\Sigma}$  ile ise, yine sayılabilir sonsuz boyutlu üçköşegencil dizey anlatılmaktadır. Bu  $\mathbf{\Sigma}$  dizeyinin köşegen öğeleri, yineleyişli yapıdan elde ettiğimiz ve aslında ÇYÇG değişmez bileşenlerinin oluşturduğu  $\alpha$

değiştirgeleri, köşegenin alt ve üst komşuluktaki öğeleri ise tekdeğişkenli ÇYÇG terimlerinin oluşturduğu  $\beta$  ve  $\gamma$  değiştirgeleridir. Bu ayrıştırım ayrıca ikideğişkenli çekirdek işlevlerin tekdeğişkenli tümlev işleçlerinin açılımında da kullanılabilir. Bu yüzden açılım Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG) adını almıştır [20–24, 42, 43].

### 3.2 ÇYÇÜÇG İşlemcil Süreci

Bu bölümde ÇYÇÜÇG'nin işlemcil süreci aşama aşama sırasaylandırılarak verilecektir.

1. Başlangıç olarak sırasıyla  $K^{(1)}(x, y)$ ,  $u_1(x)$  ve  $v_1(y)$  ile simgeliendireceğimiz  $K(x, y)$  asıl işleviyle  $u(x)$  ve  $v(y)$  başlangıç destek işlevlerinin belirtilmesi gerekmektedir;
2. İlerleyebilmek adına  $K_x^{(1)}(x)$  ve  $K_y^{(1)}(y)$  bileşenleri belirlenmelidir. Bu sağ yan bileşenlerinin belirlenmesinde (3.19) ve (3.20) ile verilen eşitliklerden yararlanmak olanaklıdır;
3. Bir sonraki adım  $\beta_1$  ve  $\gamma_1$  ölçekleme değiştirgelerinin elde edilmesidir. Bunun için de (3.19) ve (3.20) eşitlikleri kullanılmaktadır;
4. Elde edilen  $\beta_1$  ve  $\gamma_1$  değiştirgeleri ile (3.21) bağıntısı yardımıyla yeni  $u_2(x)$  ve  $v_2(y)$  destek işlevleri türetilmektedir;
5. Yineleyişli yapının ilk adımını tamamlayabilmek için ÇYÇÜÇG'nin temel bileşeni olan  $K^{(2)}(x, y)$  kalan anlatımını belirlemek gerekmektedir. Bu belirleyiş için (3.22) ile verilen bağıntılandırımından yararlanmak olanaklıdır. Ayrıca ÇYÇÜÇG açılımının özünden yararlanılarak aşağıda verilen

$$K^{(2)}(x, y) = K^{(1)}(x, y) - \alpha_1 u_1(x) v_1(y) - \beta_1 u_2(x) v_1(y) - \gamma_1 u_1(x) v_2(y) \quad (3.34)$$

eşitliği yardımıyla daha yalın bir belirleyiş yoluna gitmek de olanaklıdır. Yukarıda verilen eşitlik (3.17) ile kolayca elde edilebilmektedir;

6. Yukarıda ilk adım olarak verilen işlemler döngü olarak  $(j - 1)$ . adıma dek yinelenmektedir;
7.  $K_x^{(j)}(x)$  ve  $K_y^{(j)}(y)$  bileşenleri (3.26) and (3.27) eşitlikleri yardımıyla belirlenmektedir;



8. Ardından yine  $\beta_j$  ve  $\gamma_j$  değiştirgeleri (3.26) and (3.27) ile belirlenecektir;
9. Elde edilen  $\beta_j$  ve  $\gamma_j$  değiştirgeleri yardımıyla yeni türetilmiş  $u_{j+1}(x)$  ve  $v_{j+1}(y)$  destek işlevleri belirlenmektedir;
10. Daha önceki işlemcil süreci sonlandırım andıran biçimde asıl işlevden açılımın ikili çarpımlar türünden anlatılan toplamcıl anlatımların çıkarılmasıyla elde edilen  $K^{(j+1)}(x,y)$  kalan terimin belirlenimi gerçekleştirilmektedir. Bunun için aşağıdaki eşitlikten yararlanmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned} K^{(j+1)}(x,y) &= K^{(j)}(x,y) - \alpha_j u_j(x)v_j(y) - \beta_j u_{j+1}(x)v_j(y) \\ &\quad - \gamma_j u_j(x)v_{j+1}(y) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$K(x,y)$  çekirdek işlevinin ÇYÇÜÇG açılımı ile elde edilen sonsuz toplamcıl gösteriliminin bir  $n$  bütünsayı değeri için kesildiği varsayıldığında

$$\begin{aligned} K_{app}^{(n)}(x,y) &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j u_j(x)v_j(y) + \beta_j u_{j+1}(x)v_j(y) + \gamma_j u_j(x)v_{j+1}(y)) \\ &\quad + \alpha_{n+1} u_{n+1}(x)v_{n+1}(y). \end{aligned} \quad (3.36)$$

ile verilen asıl işleve yakın bir işlev elde edildiği görölmektedir. Sağ yanda var olan tüm işlev ve değiştirgeler yukarıdaki adımlarda döngü içerisinde belirlenen değerlerdir. Dolayısıyla açılım bu aşamadan sonra bir çekirdek ayrıştırımının yaklaştırım yöntemine dönüşmektedir.

### 3.3 Tekdeğişkenli Doğrucul Tümlev İşlecinin Ayrıştırımı

Daha önceki bölümlerde elde edilen bulguları biraraya getirip doğrucul tümlev işleçleri üzerine etkisini anlaşılır bir biçimde yansıtmak gerekmektedir. Yapmış olduğumuz tüm bu çalışmalar bizi çekirdeği ÇYÇÜÇG ile işlenmiş  $\widehat{\mathcal{F}}$  doğrucul tümlev işlecinin ayrıştırımı olgusuna götürmektedir. Önceden yapmış olduğumuz tüm anlatımlar bu anda da geçerliliğini korumaktadır. Başka bir deyişle (2.22), (2.20), ve, (2.21) eşitlikleri için

$$\widehat{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \alpha_i \widehat{P}_i + \beta_i \widehat{T}_{i+1,i} + \gamma_i \widehat{T}_{i,i+1} \right) \quad (3.37)$$

öyle ki,

$$\widehat{P}_i f(x) \equiv \int_a^b dy u_i(x)v_i(y)f(y), \quad \widehat{T}_{i,j} f(x) \equiv \int_a^b dx u_i(x)v_j(y)f(y), \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

yazılabilmektedir. Tek fark artık  $u_i(x)$  ve  $v_j(y)$  işlevleri sırasıyla birincil ve ikincil yönlü ( $x$ -yönlü ve  $y$ -yönlü) destek işlevleridir. Ayrıca  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  değerleri ÇYÇÜÇG'nin ölçekleme değiştirgeleridir.



#### 4. ÇYÇÜÇĞ AĞIRLIK VE DESTEK İŞLEVLERİNİN BELİRLENİŞİ

Bu bölümde daha önceden (3.10) bağıntısı ile tanımlanan ağırlıklandırılmış iççarpım olgusunu bu kez  $\widehat{W}_1$  ve  $\widehat{W}_2$  ağırlık işlevleri yardımıyla yeniden ele alalım. Bu durumda,

$$(f_1, f_2)_{\widehat{W}_1} \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx f_1(x) \widehat{W}_1 f_2(x), \quad (g_1, g_2)_{\widehat{W}_2} \equiv \int_{a_2}^{b_2} dy g_1(y) \widehat{W}_2 g_2(y). \quad (4.1)$$

eşitliklerini yazılabilecektir. İççarpımda kullanılan  $f$  ve  $g$  işlevleri ilgili aralıkta dördümlü tümlemlenebilir niteliktedir. İççarpımdaki altsimgelendirim de ilgili yönü anlatmaktadır. Bu gösterilimler ağırlık işlevleri türünden bakıldığında yeni tanımlanmış gösterilim niteliğindedir. Özelsizleştirim adına bu işlevlerin özüne eş (bakışım için) ve artı tanımlı olması gerektiği olgusu göz önünde bulundurulmalıdır. YBBG yönteminin evriğine, ÇYÇG'nde ağırlık birimboylulaştırımı ile de gerekli değildir. Bunun nedeni de, ÇYÇG'nde destek işlevlerinin varlığı ve birimboyluluğudur. Bakışım ve artı tanımlılığın varlığı bize aşağıda (4.2) ile verilen eşitliği yazmaya olanak sağlamaktadır [18, 22].

$$\widehat{W}_i = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^{(i)} \widehat{P}_{w_j^{(i)}}, \quad \omega_j^{(i)} > 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.2)$$

Bu gösterilim izgecil ayrıştırımdan başka birşey değildir.  $\omega$  değerleri özdeğeri ve  $w$  karşılık gelen özışlevleri simgelemektedir.  $\widehat{P}_{w_j^{(i)}}$  işlevi  $w_j^{(i)}$  özışlevi tarafından örtülen uzaya izdüşürmektedir. Bu izdüşürümde iççarpım birim işlev ile alınmak durumundadır.

$\widehat{W}_i$  işlevlerinin artı tanımlılığın bize aşağıdaki biçimde dördül kök durumlarını da tanımlama olanağı sağlamaktadır.

$$\widehat{W}_i^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^{(i)\frac{1}{2}} \widehat{P}_{w_j^{(i)}}, \quad \omega_j^{(i)} > 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

Şimdi, bu dördül kök tanımları yardımıyla (4.1) ile verilen iççarpımı

$$\begin{aligned} (f_1, f_2)_{\widehat{W}_1} &= \int_{a_1}^{b_1} dx \left( \widehat{W}_1^{\frac{1}{2}} f_1(x) \right) \widehat{W}_1^{\frac{1}{2}} f_2(x) = \int_{a_1}^{b_1} dx \bar{f}_1(x) \bar{f}_2(x) = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)_{\widehat{I}_x} \\ (g_1, g_2)_{\widehat{W}_2} &= \int_{a_2}^{b_2} dy \left( \widehat{W}_2^{\frac{1}{2}} g_1(y) \right) \widehat{W}_2^{\frac{1}{2}} g_2(y) = \int_{a_2}^{b_2} dy \bar{g}_1(y) \bar{g}_2(y) = (\bar{g}_1, \bar{g}_2)_{\widehat{I}_y} \end{aligned} \quad (4.4)$$

olacak biçimde yazmak olanaklıdır. Eşitliklerin en sağında yer alan üstçizgili gösterilim ile her bir işlevin ilgili ağırlık işlecinin etki ettirilmesiyle elde edilen durumları anlatılmaktadır. Başka bir deyişle, birim işleç altında işlevlerin ilgili ağırlık ile ölçeklendiğinin de bir göstergesi olarak ele alınabilmektedir.

Artık, daha önce ağırlık işlevi altında (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) ile verdiğimiz eşitlikleri dördül köklü ağırlık işleçleri türünden yeniden düzenlemek olanaklıdır.

$$\begin{aligned}\bar{K}^{(j)}(x,y) &\equiv \widehat{W}_1^{\frac{1}{2}}\widehat{W}_2^{\frac{1}{2}}K^{(j)}(x,y), & \bar{u}_j(x) &\equiv \widehat{W}_1^{\frac{1}{2}}u_j(x), & \bar{v}_j(y) &\equiv \widehat{W}_2^{\frac{1}{2}}v_j(y), \\ \bar{K}_x^{(j)}(x) &\equiv \widehat{W}_1^{\frac{1}{2}}K_x^{(j)}(x), & \bar{K}_y^{(j)}(y) &\equiv \widehat{W}_2^{\frac{1}{2}}K_y^{(j)}(y)\end{aligned}\quad (4.5)$$

öyle ki,

$$\bar{K}^{(j)}(x,y) = \alpha_j \bar{u}_j(x) \bar{v}_j(y) + \beta_j \bar{u}_{j+1}(x) \bar{v}_j(y) + \gamma_j \bar{u}_j(x) \bar{v}_{j+1}(y) + \bar{K}^{(j+1)}(x,y). \quad (4.6)$$

ve,

$$\alpha_j = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \bar{u}_j(x) \bar{v}_j(y) \bar{K}^{(j)}(x,y), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\beta_j &\equiv \left( \int_{a_1}^{b_1} dx \bar{K}_x^{(j)}(x) \left[ \widehat{I}_x - \widehat{P}_{\bar{u}_j} \right] \bar{K}_x^{(j)}(x) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \bar{K}_x^{(j)}(x) &\equiv \int_{a_2}^{b_2} dy \bar{v}_j(y) \bar{K}^{(j)}(x,y),\end{aligned}\quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}\gamma_j &\equiv \left( \int_{a_2}^{b_2} dy \bar{K}_y^{(j)}(y) \left[ \widehat{I}_y - \widehat{P}_{\bar{v}_j} \right] \bar{K}_y^{(j)}(y) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \bar{K}_y^{(j)}(y) &\equiv \int_{a_1}^{b_1} dx \bar{u}_j(x) \bar{K}^{(j)}(x,y),\end{aligned}\quad (4.9)$$

$$\bar{u}_{j+1}(x) \equiv \frac{1}{\beta_j} \left( \widehat{I}_x - \widehat{P}_{\bar{u}_j^{(n)}} \right) \bar{K}_x^{(j)}(x), \quad \bar{v}_{j+1}(y) \equiv \frac{1}{\gamma_j} \left( \widehat{I}_y - \widehat{P}_{\bar{v}_j^{(n)}} \right) \bar{K}_y^{(j)}(y) \quad (4.10)$$

yazılabilir. Yukarıda, izdüşüm işleçlerinin iççarpımı birim ağırlık işleci altında tanımlanmaktadır.

(4.6), (4.7), (4.8), (4.9) ve (4.10) ile verilen eşitlikler ÇYÇÜÇG'nin birim ağırlık işleci türünden (ya da ağırlıksız ÇYÇÜÇG) tanımlanmış biçimdir. Bu ağırlık olgusunun etkisini yitirdiğinin göstergesi olarak ele alınmamalıdır. Evriğine, ağırlık işleci yöntemin daha en başında aşağıda verilen eşitlikler yardımıyla gündeme getirilecektir.

$$\bar{K}^{(1)}(x,y) = \widehat{W}_1^{\frac{1}{2}}\widehat{W}_2^{\frac{1}{2}}K(x,y), \quad \bar{u}^{(1)}(x) = \widehat{W}_1^{\frac{1}{2}}u(x), \quad \bar{v}^{(1)}(y) = \widehat{W}_2^{\frac{1}{2}}v(y) \quad (4.11)$$

## **4.1 Özüyle Tutarlı ÇYÇÜÇG ve Ağırlık İşleçleri, Destek İşlevlerinin Seçimi**

Bu bölümde ağırlık işleçleri ile destek işlevlerinin seçimi ve bu seçimlerin gösterilime katkısı ele alınacaktır. Seçimlerin düzey ayrıştırımı türünden ele alındığında çekirdek düzeyde köşegenliğe etkisi vurgulanacaktır.

### **4.1.1 Ağırlık işleçlerinin seçimi**

Bugüne dek YBBG ve ÇYÇG yöntemlerinin birçoğunda ağırlık işleci kullanılmayıp yoluna gidilmiştir. Daha doğru bir anlatımla birim ağırlık altında inceleyiş yeğlenmiştir. Bunun en temel nedenlerinden biri uygulayıcıl kolaylık sağlanmasıdır. Ancak, kuşkusuz geliştirilmiş ve bu anda da geliştirilmekte olan tüm gösterilim yöntemleri için birim ağırlık dışında da özelsizleştirilmiş ağırlık kullanmak olanaklıdır. Öte yandan özelsiz ağırlık işleci kullanımının gösterilime katkısı da oldukça yüksektir. Öncelikle, uygun kısıtlar altında istenilen ağırlık işleci ile çalışılabilir oluşun getirdiği esneklik söz konusudur. Seçilen uygun ağırlıklar yardımıyla gösterilimin niteliğini, etkinliğini yükseltmek olanaklıdır [22]. Bu durumu daha öncelerde YBBG ve ÇYÇG'nde ağırlık eniyileyişine ilişkin yapılan çalışmalar açıkça ortaya koymaktadır. Ayrıca bir kesim ara düzenleyişler yardımıyla çekirdekte tekil işlevlerin de kullanılabilirliği ve açılım gerçekleştirilebileceği bilinmektedir. Kuşkusuz, burada düzeylerin izgecil gösteriliminden yola çıkılan toplamdizi yöntemlerinin ele alınışı gibi bir kesim uzbilimcil yaklaşımlardan yararlanmak gerekmektedir. Konu ile ilgili anlatımlar burada sonlanmış gibi görünse de ileride yapılacak çalışmalar ile bu olgu daha derin bir biçimde ele alınacaktır.

### **4.1.2 Destek işlevlerinin seçimi**

Destek işlevlerinin seçimi, gösterilimin özünde var olan birimboy ve dördül tümlemlenebilme (varsa ağırlık altında) kısıtları göz ardı edildiğinde seçime bağlıdır. Bugüne dek sıklıkla genel eğilim değişmez işlev seçimi üzerine olmuştur. Ancak, bazı durumlarda birim değişmez işlev eğer tümlev işlecinin sıfırızayında ise bu durum bizi sıfır değerli destek işlevleri sonucuna götürmektedir. Bunun da gösterilime pek çok katkı sağladığını da söylemek olanaklı değildir. Aslında, var olan kısıtlar göz önüne alındığında "destek işlevi seçimi"nin bir eniyileyiş sorunu olduğu da söylenebilmektedir. Bu konu ile ilgili çalışmalar olup bu anda da ele alınışları

sürdürülmektedir [44]. Bu çalışmalarda değişmez nitelik ölçeni yardımıyla destek işlevi eniylenişi üzerine odaklanılmaktadır. Bu nedenle savda ve evrede destek işlevlerinin seçimi ile ilgili ayrıntılı bilgi verilmeyecektir. Öte yandan, kuşkusuz seçilen değişik destek işlevlerinin etkisi uygulamacı düzeyde ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır.

### 4.1.3 Özüyle tutarlı ÇYÇÜÇG

Aşağıda doğrucul tümlev işlecinin çekirdeğini oluşturan işlevin tekil değer ayrıştırımını ele alalım.

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \lambda_i(x) \rho_i(y) \quad (4.12)$$

Ayrıştırımın sağ yanında yer alan  $\sigma_i$  değerleri  $i$ 'nin artan değerli sıralandırımında özdeğerleri anlatırken  $\lambda_i(x)$  ve  $\rho_i(y)$  işlevleri karşılık gelen sol ve sağ yan öz işlevleri olarak nitelendirilmektedir. Bu ayrıştırım bize sırasıyla  $\lambda_i$  ve  $\rho_i$  ile örtülen uzayda tanımlı herhangi iki  $f(x)$  ve  $g(y)$  işlevi için

$$\widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{F}}^\dagger f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 \int_a^b d\xi \lambda_i(x) \lambda_i(\xi) f(\xi) \quad (4.13)$$

ve

$$\widehat{\mathcal{F}}^\dagger \widehat{\mathcal{F}} g(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 \int_a^b d\eta \rho_i(y) \rho_i(\eta) g(\eta) \quad (4.14)$$

ile verilen eşitlikleri yazma olanağı vermektedir.

Bu anda, öte yandan da, ağırlıkların özüyle tutarlılaştırımı ve uyumluluğu adına aşağıdaki gösterilim ile verilen ağırlık işleçlerini ele alalım.

$$\widehat{W}_1^{(n)} \equiv \left( \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{F}}^\dagger \right)^{\frac{n}{2}}, \quad \widehat{W}_2^{(n)} \equiv \left( \widehat{\mathcal{F}}^\dagger \widehat{\mathcal{F}} \right)^{\frac{n}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.15)$$

Bu eşitliklerde eksi değerli olmayan  $n$  bütünsayısına bağımlılık üstsimge olan  $(n)$  gösterilimi ile anlatılmaktadır. Bu ağırlık tanımları yardımıyla aşağıda (4.16) ve (4.17) ile verilen başlangıç destek işlevlerini yazmak olanaklıdır.

$$\bar{u}_1^{(n)}(x) = \left( u, \widehat{W}_1^{(2n)} u \right)^{-\frac{1}{2}} \widehat{W}_1^{(n)} u(x) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^{2n} u_i^{(sfc)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^n u_i^{(sfc)} \lambda_i(x) \quad (4.16)$$

$$\bar{v}_1^{(n)}(y) = \left( v, \widehat{W}_2^{(2n)} v \right)^{-\frac{1}{2}} \widehat{W}_2^{(n)} v(y) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^{2n} v_i^{(sfc)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^n v_i^{(sfc)} \rho_i(y) \quad (4.17)$$

(*sfc*) üstimlendirimi ile tekil işlev katsayıları (ing: singular function coefficient) anlatılmaktadır.

$$\bar{K}^{(1,n)}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^{2n+1} \lambda_i(x) \rho_i(y) \quad (4.18)$$

Son üç eşitlik bize ölçeklenmiş  $\bar{u}_1^{(n)}(x)$  ve  $\bar{v}_1^{(n)}(y)$  destek işlevlerinin,  $\lambda_1(x)$  ve  $\rho_1(y)$  işlevleriyle,  $n$  sonsuza giderken hiçbir  $u_1^{(sfc)}$  ve  $v_1^{(sfc)}$  değerinin sıfırlanmadığı ve  $\bar{K}^{(1,n)}(x,y)$  işlevinin yanaşık olarak  $\sigma_1^{2n+1} \lambda_1(x) \rho_1(y)$  anlatımına eşit olduğu durumlar için 1 veya  $-1$  orancıl değişmezleri ile yanaşık olarak orantılı olduğunu ortaya koymaktadır.

Daha ileri gidebilmek adına aşağıdaki eşitlikleri yazmak olanaklıdır.

$$\bar{K}_x^{(1,n)}(x) \equiv \int_a^b dy \bar{v}_1^{(n)}(y) \bar{K}^{(1,n)}(x,y) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^{2n} v_i^{(sfc)2} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{3n+1} v_j^{(sfc)} \lambda_j(x) \quad (4.19)$$

$$\int_a^b dx \bar{K}_x^{(1,n)}(x) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^{2n} v_i^{(sfc)2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{2n} u_j^{(sfc)2} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{4n+1} v_k^{(sfc)} u_k^{(sfc)} \quad (4.20)$$

Yukarıda son elde ettiğimiz ve daha önceki bulgular yardımıyla (4.10) ile verilen eşitliğin sol yanındaki türetilmiş destek işlevleri özelsiz yapısı ışığında aşağıdaki orancıl eşitliği yazmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(x) &\propto \left( \hat{I}_x - \hat{P}_{\bar{u}_j} \right) \bar{K}_x^{(j)}(x) \propto \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{2n} u_j^{(sfc)2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{3n+1} v_k^{(sfc)} \lambda_k(x) \\ &- \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{4n+1} u_j^{(sfc)} v_j^{(sfc)} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^n u_j^{(sfc)} \lambda_j(x) \\ &= \sigma_1^{5n+1} \left[ \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{2n} u_2^{(sfc)2} v_1^{(sfc)} - \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{4n+1} u_1^{(sfc)} u_2^{(sfc)} v_2^{(sfc)} \right] \lambda_1(x) \\ &+ \sigma_1^{5n+1} \left[ \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{3n+1} u_1^{(sfc)2} v_2^{(sfc)} - \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^n u_1^{(sfc)} u_2^{(sfc)} v_2^{(sfc)} \right] \lambda_2(x) \dots \\ &\asymp -\sigma_1^{4n+1} \sigma_2^n u_1^{(sfc)} u_2^{(sfc)} v_2^{(sfc)} \lambda_2(x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Kuşkusuz, ilerleyen bireycil çözümleyişler  $n$  sonsuza gittikçe  $u_j^{(n)}(x)$  ve  $v_j^{(n)}(y)$  işlevlerinin  $\lambda_j(x)$  ve  $\rho_j(y)$  işlevlerine yakınsayacağını imgelemektedir. Ancak bu çözümleyiş bu aşamada ikincil görünümde kalacak olup ayrıca uzbilimcil kanıtlayış olgusunu da gerektirmektedir. Bir başka varsayım da yine  $n$  değeri büyüdükçe

üçköşegencil ayrıştırım türünden anlatılan ÇYÇÜÇG'nin köşegencil baskınlığındaki artıştır.

#### 4.2 Açıklayımcıl Uygulayışlar

Bu bölümde uygulama için örnekleri çoğaltmak yerine belli başlı örnekler üzerinden özüyle tutarlı olması durumunun gösterilime olan katkılarına ilişkin anlatımlara yer verilecektir. Bu bağlamda,  $[0, \pi]^2$  dördül bölgesinde tanımlı  $K(x, y) \equiv \cos(x + y)$  çekirdek işlevini ele alalım. Bu çekirdeğin tümlev işlecinin sıfırdan değışik özdeğerleri  $\pi/2$  ve  $-\pi/2$ , bu özdeğerlere karşılık gelen özişlevleri de sırasıyla  $\sqrt{2}\cos x/\sqrt{\pi}$  ve  $\sqrt{2}\sin x/\sqrt{\pi}$  olacaktır. Öteki tüm özdeğerler sıfır değerine sahiptir. Başka bir deyişle, bu çekirdek işlevinin tümlev işlecinin iki tane sıfırdan değışik ve sayılabilir sonsuz katlılıkta sıfır özdeğeri bulunmaktadır. Sıfır değerli özdeğerlere karşılık gelen özişlevler  $\sqrt{2}\cos x/\sqrt{\pi}$  ve  $\sqrt{2}\sin x/\sqrt{\pi}$  özişlevlerine dikgen işlev uzayında yer almaktadır. Tüm bunlar bize aşağıda verilen izgecil gösterilimi yazma olanağı sağlamaktadır.

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \cos(x + y) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos x \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos y \right) - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin x \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin y \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Çekirdeğin tekil değeri ayrıştırımına ve ilgili doğrucul tümlev işlecine göz gezdirdiğimizde, yalnızca bir çift  $\pi/2$  değerinde tekil değerlerin varlığı söz konusudur. Bunlara karşılık gelen özişlevler ise  $\sqrt{2}\cos x/\sqrt{\pi}$  ve  $\sqrt{2}\sin x/\sqrt{\pi}$  ile 1 veya evrik imlisi  $-1$  orancıl katsayıları ile orantılı özişlevlerdir. Yani, tekil özişlevler birbiri ile evrik imlidir. Sonuç olarak,  $\cos(x + y)$  çekirdek işlevi için tekil değeri ayrıştırımını aşağıdaki biçimde yazmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \cos(x + y) = \sigma_1 \lambda_1(x) \rho_1(y) + \sigma_2 \lambda_2(x) \rho_2(y), \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\pi}{2} \\ \lambda_1(x) &\equiv \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \rho_1(x) \equiv \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos y, \\ \lambda_2(x) &\equiv \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \rho_2(x) \equiv -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin y \end{aligned} \quad (4.23)$$

Uygun tutarlılık sınırlandırmaları altında im seçimi bizim isteğimize bağlı olduğundan, bu örnek için ayrıca  $\lambda_2(x) \equiv -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin x$ ,  $\rho_2(x) \equiv \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin y$  almak da olanaklıdır.



#### 4.2.1 ÇYÇÜÇG'ne uygulayış ve destek işlevlerinin seçimi

Bu bölümde ÇYÇÜÇG'ni işleyebilmek adına gerekli destek işlevlerinin seçimine değinilecektir. Destek işlevlerinin seçiminde aslında tam anlamıyla kısıtsız olunduğu söylenememektedir. Eğer  $\mathcal{N}(\hat{\mathcal{F}})$  ve  $\mathcal{N}(\hat{\mathcal{F}}^\dagger)$  sıfır uzayları boş değilse, ne  $u(x)$  ne de  $v(y)$  destek işlevleri bu uzayda yer alan işlevler olarak seçilememektedir. Ayrıca gösterilim için ortaya çıkan bir başka kısıt da  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , ve  $\gamma_1$  değıştirgelerinin sıfır değerli çıkabilme durumunda kalan anlatımının yine asıl işleve eşitlenmesi olgusudur. bu durumdan da kaçınmak adına destek işlevlerinin belli kısıtlar altında seçimi söz konusudur. Örneğin yukarıda uygulayıcıl olarak ele alınan  $\cos(x+y)$  işlevi için başlangıç destek işlevlerini  $u(x) \equiv 1/\sqrt{\pi}$  ve  $v(y) \equiv 1/\sqrt{\pi}$  seçmek olanaklı değildir.

Öte yandan, asıl işlevin yönlü ortalamasını da kullanmak burada işlemeyecektir. Bunun nedeni bu değerlerin bizi sıfır destek işlevine götürmesidir.

Verilen çekirdek işlevinin izgecil bileşenlerine baktığımızda tamamıyla  $\hat{\mathcal{F}}$  tümlev işlevinin sıfır uzayının dışında kalan (sol ve sağ sıfır uzayları işleç özüne eş olduğundan aynıdır) yalnızca iki tane işlevi vardır. Bu durumda, destek işlevlerini bu işlevlerden seçmek ÇYÇÜÇG için ilerleyebilme kolaylığı getirecek önemli bir olgudur. Böylece,  $u(x) \equiv \sqrt{2}/\sqrt{\pi} \cos x$  ve  $v(y) \equiv \sqrt{2}/\sqrt{\pi} \cos y$  seçimi ile  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\beta_1 = 0$  ve  $\gamma_1 = 0$  değerlerini elde etmek olanaklıdır. Bu seçim ile ayrıca ilk adımda elde edilen tekdeğişkenli ÇYÇÜÇG bileşenleri sıfırlanacak olup kalan anlatım  $-\sin x \sin y$  işlevine eşit olacaktır.  $\beta_1$  ve  $\gamma_1$  ölçekleme değıştirgelerinin sıfırlanması bir sonraki adım için gerekli destek işlevlerinin bir önceki adımdan türetilmeyeceği, başka bir deyişle, ilgili kısıtlar altında yeniden belirleniş gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bunun yanı sıra, kalan anlatımın iki tekdeğişkenli işlevin çarpımı türünden yazılabilmiş olması, destek işlevlerini  $u_2(x) = \sqrt{2/\pi} \sin x$  ve  $v_2(y) = \sqrt{2/\pi} \sin y$  biçiminde seçebilme kolaylığı da kazandırmaktadır. Böylece bir adım daha öteye gitmek olanaklı duruma gelmektedir. Bir sonraki adımda ise yalnızca  $\alpha_2 = -\pi/2$  değışmezi elde edilip öteki tüm değer ve işlevler sıfırlanmıştır. Dolayısıyla, yineleyiş bu aşamada sonlanmaktadır.

Andırımlı olarak  $u(x) \equiv \sqrt{2}/\sqrt{\pi} \sin x$  ve  $v(y) \equiv \sqrt{2}/\sqrt{\pi} \sin y$  seçimi için de aynı görüş geçerlidir. ilerlendiğinde,  $\alpha_1 = -\pi/2$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$  değıştirge değerleri ve yine sıfırlanan tekdeğişkenli bileşenlerin yanı sıra  $\cos x \cos y$  kalan anlatımı elde edilecektir. Ardından yine  $\beta_1$  ve  $\gamma_1$  ölçekleme değıştirgelerinin sıfır oluşu nedeniyle yeni destek

işlevleri türetme yoluna gidilecek olup  $u_2(x) = \sqrt{2/\pi} \cos x$  ve  $v_2(y) = \sqrt{2/\pi} \cos y$  seçimi ile  $\alpha_2 = \pi/2$  sonraki yineleyiş ile belirlenecek ve öteki tüm değerler sıfıra eşit olacaktır. Dolayısıyla, yineleyiş benzer olarak burada da sonlanmaktadır. Sonuç olarak, her iki ayrıştırım gösterilimi asıl işlevi kesin olarak yansıtmaktadır.

Ölçeklenmiş kosinüs işlevleri ile destek işlevlerinin seçimi kuşkusuz tek seçenek değildir. Ayrıca, aşağıda değişik biçimde seçimler sonucunda elde edilen değerlere ilişkin gösterilimler yer almaktadır.

Aşağıda ilk olarak verilen gösterim için seçilen  $u(x) \equiv \sqrt{2}/\sqrt{\pi} \cos x$  and  $v(y) \equiv \sqrt{2}/\sqrt{\pi} \sin y$  destek işlevleri ile elde edilen gösterim ele alınmaktadır.

$$K(x, y) = \cos(x + y) = \alpha_1 u_1(x) v_1(y) + \beta_1 u_2(x) v_1(y) + \gamma_1 u_1(x) v_2(y) \quad (4.24)$$

öyle ki,

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \gamma_1 = \frac{\pi}{2}, \quad u_2(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad v_2(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos y \quad (4.25)$$

yazılabilmektedir. Yukarıda ilk iki seçimdeki andıran yapı aşağıda  $u(x) \equiv \sqrt{2}/\sqrt{\pi} \sin x$  ve  $v(y) \equiv \sqrt{2}/\sqrt{\pi} \cos y$  destek işlevlerinin seçiminde de gözükmektedir. Burada da bir önceki seçime eşdeğer yapıda sonuçlar elde edilmektedir. Böylece, gösterim,

$$K(x, y) = \cos(x + y) = \alpha_1 u_1(x) v_1(y) + \beta_1 u_2(x) v_1(y) + \gamma_1 u_1(x) v_2(y), \quad (4.26)$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \gamma_1 = \frac{\pi}{2}, \quad u_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad v_2(y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin y \quad (4.27)$$

biçiminde yazılabilmektedir. Burada destek işlevlerinin  $\sqrt{2/\pi} \cos x$  ile  $\sqrt{2/\pi} \sin x$ , ve,  $\sqrt{2/\pi} \cos y$  ile  $\sqrt{2/\pi} \sin y$  işlevlerinin doğrucul birleşiminden seçimi olgusunun ÇYÇÜÇG'ni kolaylaştırdığını yinelemek gerekmektedir.

#### 4.2.2 Uyumlu destek işlevleri ve özülle tutarlı ÇYÇÜÇG

Bir önceki bölümde, destek işlevlerinde kolaylık sağlayışın gösterim için oldukça önemli yer tutan sorunlardan biri olduğu vurgulanmaktadır. Bunun için en azından bu ana dek bilinen bir yöntem ortaya konmuştur. Bu, verilen bir destek işlevi için  $\hat{\mathcal{F}}$  doğrucul tümlev işlecinin sıfır uzayındaki bileşenleri yok eden uygun ağırlıklar kullanma yoludur. Burada sözü edilen yönteme ilişkin aşağıda verilen ağırlık işlevini

ele alalım.

$$\begin{aligned}\widehat{W} f(x) &\equiv \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{F}}^\dagger f(x) = \widehat{\mathcal{F}}^\dagger \widehat{\mathcal{F}} f(x) = \int_0^\pi dy K_{\widehat{W}}(x, y) f(y), \\ K_{\widehat{W}}(x, y) &\equiv \frac{\pi}{2} \cos(x - y)\end{aligned}\quad (4.28)$$

Yukarıda ele alınan çekirdek işlevi için bakışımın olduğu öngörülmektedir. Bu durumda,

$$\widehat{W} f(x) = \frac{\pi}{2} \cos x \int_0^\pi dy \cos y f(y) + \frac{\pi}{2} \sin x \int_0^\pi dy \sin y f(y) \quad (4.29)$$

yazılabilmektedir.  $f(x)$  işlevinin belirtilen ağırlık işlevi altındaki görüntüsü,  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlevinin sol ve sağ sıfırzaylarının bütünüyle dışında kalmaktadır. Başka bir deyişle, sıfırzay bileşenleri  $\widehat{W}$  işlevi altındaki görüntüsünden çıkarılmıştır. Bu olgu bize aşağıda yer alan destek işlevlerini tanımlama olanağı sağlamaktadır.

$$u(x) \equiv \frac{1}{\|\widehat{W} u_g(x)\|} \widehat{W} u_g(x), \quad v(x) \equiv \frac{1}{\|\widehat{W} v_g(x)\|} \widehat{W} v_g(x) \quad (4.30)$$

Burada  $u_g(x)$  ve  $v_g(x)$  işlevleri bir biçimde elde ettiğimiz üreteç destek işlevleridir (ing: generating support functions). Artık, (4.30) ile verilen eşitlikleri daha belirtik bir yapıda yazabiliriz.

$$\begin{aligned}u(x) &= u_c \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos x + u_s \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin x, \\ u_c &\equiv \frac{1}{u_{nr}} \int_0^\pi dy \cos y u_g(y), \quad u_s \equiv \frac{1}{u_{nr}} \int_0^\pi dy \sin y u_g(y) \\ u_{nr} &\equiv \sqrt{\left( \int_0^\pi dy \cos y u_g(y) \right)^2 + \left( \int_0^\pi dy \sin y u_g(y) \right)^2}\end{aligned}\quad (4.31)$$

Yukarıda,  $u(x)$  destek işlevi için verilen eşitlikleri andırımlı olarak  $v(x)$  destek işlevi için de yazmak olanaklıdır. Bu çıkarım destek işlevlerinden sıfırzayı bileşenlerinin yokedimi olgusunun gerçekleştiğini göstermektedir.

(4.28) ile verilen ağırlık işlevini ayrıca  $\widehat{\mathcal{F}}$  ile özüne eşinin çarpımının üslüleri türünden tanımlamak da olanaklıdır. Bu durumda değişen tek şey  $\pi/2$  değerinin kuvvetleri olacaktır. Destek işlevlerinin sonucunda herhangi bir değişim gözlenmeyecektir. Bunun nedeni seçilen ağırlık işlevinin izgecil özelliğidir.  $\widehat{\mathcal{F}}$  işlevinin sıfırdan değişik yalnızca iki özdeğeri vardır.



## 5. ÇYÇÜÇG İLE İKİLİ ÇARPIM AYRIŞTIRIMI

### 5.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Gösterilimi ile İkili Çarpım Ayrıştırımı

İkili çarpımların yer aldığı toplamdizi açılımlar bir çok uygulamıcıl alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu olgu ÇYÇG yönteminin ilgili alanlarda irdelenişine yol açmıştır. Doğrucul tümlev işleçlerinin ikideğişkenli çekirdek işlevini aşağıdaki biçimde

$$K_{BP}(x,y) \equiv \phi(x)\varphi(y), \quad x \in [a_1, b_1], \quad y \in [a_2, b_2] \quad (5.1)$$

ile tekdeğişkenli iki işlevin dışçarpımı türünden seçtiğimizi varsayalım. ÇYÇÜÇG'ne taban olan ikideğişkenli ÇYÇG yardımıyla

$$\alpha_1 = \sigma\rho, \quad \sigma \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx W_1(x) u_1(x) \phi(x), \quad \rho \equiv \int_{a_2}^{b_2} dy W_2(y) v_1(y) \varphi(y), \quad (5.2)$$

$$\beta_1 \equiv \rho \left( \int_{a_1}^{b_1} dx W_1(x) \phi(x)^2 - \sigma^2 \right)^{1/2}, \quad \gamma_1 \equiv \sigma \left( \int_{a_2}^{b_2} dy W_2(y) \varphi(y)^2 - \rho^2 \right)^{1/2} \quad (5.3)$$

ve

$$u_2(x) \equiv \frac{\phi(x) - \sigma u_1(x)}{\|\phi - \sigma u_1\|_x}, \quad v_2(y) \equiv \frac{\varphi(y) - \rho v_1(y)}{\|\varphi - \rho v_1\|_y} \quad (5.4)$$

eşitliklerini yazmak ve böylece  $u_2(x)$ ,  $v_2(y)$  türetilmiş destek işlevleri ile  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  ve  $\gamma_1$  değiştirgelerini elde etmek olanaklıdır. Tüm bu bileşenler ilgili ağırlık işlevlerinin de içerildiği tümlevler yardımıyla belirlenmektedir [21, 22, 26]. Yukarıda (5.1) ile verilen dışçarpımlar türünden seçilmiş ikideğişkenli çekirdek işlevini

$$K_{BP}(x,y) = \mathbf{u}(x)^T \mathbf{\Sigma}_{BP} \mathbf{v}(y) \quad (5.5)$$

ile dizey ayıştırımı ile yazmak olanaklıdır.  $BP$  ile ikili çarpım (ing: binary product) anlatılmak istenmektedir.  $\mathbf{\Sigma}_{BP}$  çekirdek dizeyi açık olarak

$$\mathbf{\Sigma}_{BP} \equiv \begin{bmatrix} \sigma\rho & \sigma \left( \|\phi\|_y^2 - \rho^2 \right)^{1/2} \\ \rho \left( \|\phi\|_x^2 - \sigma^2 \right)^{1/2} & \left( \|\phi\|_x^2 - \sigma^2 \right)^{1/2} \left( \|\varphi\|_y^2 - \rho^2 \right)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

biçiminde dışçarpımcıl öğelerden oluşmaktadır. Ayrıca sol ve sağ yandaki yöneyler,

$$\mathbf{u}(x) = [u_1(x) \ u_2(x)]^T, \quad \mathbf{v}(y) = [v_1(y) \ v_2(y)]^T \quad (5.7)$$

ile verilen destek yöneyleridir. Burada çekirdek dizeyini ve çekirdek işlevi için değiştirgeler türünden ikideğişkenli ÇYÇG açılımını

$$\Sigma_{BP} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad K_{BP}(x,y) = \begin{matrix} \alpha_1 u_1(x)v_1(y) + \beta_1 u_2(x)v_1(y) + \\ \gamma_1 u_1(x)v_2(y) + \alpha_2 u_2(x)v_2(y) \end{matrix} \quad (5.8)$$

olacak biçimde yazmak olanaklıdır.  $\Sigma_{BP}$  dizeyinde yer alan  $\alpha_2$  değiştirgesi,  $\alpha_2 \equiv \beta_1 \gamma_1 / \sigma \rho$  ile hesaplanmaktadır. Ayrıca yeni elde edilen  $u_2(x)$  ve  $v_2(x)$  destek işlevleri "sol ve sağ yan türetilmiş destek işlevleri" olarak adlandırılmaktadır. Bir sonraki adıma geçiş için ışık tutan bir bulguyu burada yinelemekte yarar vardır:  $\Sigma_{BP}$  bir dışçarpım olarak ele alınabilir. Ayrıca bu dizey tüm öğeleri sıfırdan değişik olan dolu bir dizeydir. Böylece dördül öbek yapısına gidişte ilk imler ortaya çıkmış gözükmemektedir [45].

### 5.1.1 Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlu Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG)

Bu bölümde amaç, bir önceki bölümde anlatılan ÇYÇÜÇG yöntemini bir adım daha ileri taşıyarak ayrıştırımdaki çekirdek yapıyı okuçlu duruma dönüştürmektir. Bunun yanısıra daha önce belirtmiş olduğumuz çarpımcıl yapıdaki işlevler olgusunu geliştirerek ayrıştırımı bilimsel yazında oldukça sık kullandığımız belli başlı yöntemlere katkı sağlayacak biçimde ortaya koymaktır.

Yakın zamanda yapmış olduğumuz çalışmalarda ÇYÇÜÇG için bilimsel uygulamalar gerçekleştirmiş ve tekdeğişkenli işlevlerin çarpımı biçiminde tanımlanmış ikideğişkenli işlevler için bir kesim çıkarımlarda bulunmuştuk [21]. Bu anda ise bu olguyu daha da özelsiz duruma getirmeye çalışacağız. Bunun için elimizde tekdeğişkenli işlevlerin çarpımlarının sonlu toplamından oluşan ikideğişkenli bir işlevin olduğunu varsayalım. Bu işlevi

$$f(x,y) \equiv \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \varphi_i(y) \quad (5.9)$$

biçiminde kapalı yapıda göstermek olanaklıdır. Burada  $m$  değeri artıtanımlı sonlu değerli bir sayılı simgelemektedir. Ayrıca  $\phi$  ve  $\varphi$  ile simgelediğimiz tekdeğişkenli işlevlerin bilindiğini öngörelim.

Daha önceki uygulamalı çalışmamızda elimizde tek bir çarpımla simgelenen işlevler vardı. Dolayısıyla, ayrıştırımda oluşturduğumuz sol ve sağ destek yöneylerinde yalnızca yeni destek işlevlerinin eklenişi ile boyut kazandırılan bir yapı söz konusuydu. Ancak, şimdi elimizde bu işlevlerin sonlu toplamından oluşan bir yapı vardır. Bu durumda ise, her bir anlatım için ilk adımda aynı  $\mathbf{u}_1(x)$  ve  $\mathbf{v}_1(y)$  başlangıç destek işlevleri ile başlamış olsak da, anlatımlardaki yineleyiş sonrasında değişik destek işlevleri elde edeceğimiz açıktır. Bu değişiklik toplamdaki terimleri oluşturan işlevlerin değişik oluşundan kaynaklanmaktadır. Bu nedenle aradaki değişikleşimi de vurgulamak adına  $\phi_i(x)\phi_i(y)$  çarpımcıl anlatımlarının ayrıştırımı ile elde edilen sol ve sağ destek işlevlerini  $\bar{u}_{i+1}(x)$  ve  $\bar{v}_{i+1}(y)$  ile simgeliyebiliriz.

(5.9) ile verilen sonlu toplamdaki her bir  $\phi_i(x)\phi_i(y)$  anlatımı tek tek irdeleyelim. Böylece  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi_i(x)\phi_i(y) &= \bar{\alpha}_1^{(i)}u_1(x)v_1(y) + \bar{\beta}_i\bar{u}_{i+1}(x)v_1(y) + \bar{\gamma}_i u_1(x)\bar{v}_{i+1}(y) \\ &+ \bar{\alpha}_{i+1}\bar{u}_{i+1}(x)\bar{v}_{i+1}(y)\end{aligned}\quad (5.10)$$

ile her bir anlatım için ÇYÇĞ yöntemi ile elde edilecek açılımı yazmamız olanaklıdır. Aşağıda (5.11) ve (5.12) eşitlikleri, (5.10) ile açık yapısı verilen sonlu toplamda yer alan her bir anlatım için ÇYÇÜÇĞ açılımı uygulanışı sonucu elde edilen bileşenleri simgelenmektedir.

$$\bar{\alpha}_1^{(i)} = \sigma_i\rho_i, \quad \sigma_i \equiv \int_0^1 dx u_1(x)\phi_i(x), \quad \rho_i \equiv \int_0^1 dy v_1(y)\phi_i(y), \quad (5.11)$$

$$\bar{\beta}_{i+1} \equiv \rho_i \sqrt{\int_0^1 dx \phi_i(x)^2 - \sigma_i^2}, \quad \bar{\gamma}_{i+1} \equiv \sigma_i \sqrt{\int_0^1 dy \phi_i(y)^2 - \rho_i^2}. \quad (5.12)$$

İkideğişkenli çarpımcıl  $f(x, y)$  işlevi, aslında, iki ayrı tekdeğişkenli işlevin çarpımından oluştuğu için tümlev belirleniminde bize ikikatlı tümlevleri tekkatlı tümlevlerin çarpımı türünden belirleyiş kolaylığı gibi oldukça önemli bir katkı sağlamaktadır. Bu durum da bize  $\bar{\alpha}_1^{(i)}$  değişmez bileşenleri iki ayrı tümlevin çarpımı biçiminde tanımlama olanağı vermiştir. Ayrıca yine belirleyiş kolaylığı getirmesi açısından her bir anlatımda aynı başlangıç destek işlevleri ile yola çıkmamıza karşın, bu açılımdaki  $\bar{u}_{i+1}(x)$  ve  $\bar{v}_{i+1}(y)$  ile elde edeceğimiz türetilmiş destek işlevleri başlangıçta seçilen  $u_1(x)$  ve

$v_1(y)$  destek işlevlerine dikgen ve birimboylulaştırılmış ancak birbirine de dikgen olma zorunluluğu olmayan işlevler biçimindedir. Bu işlevlerin açık yapısını

$$\bar{u}_{i+1}(x) \equiv \frac{\phi_i(x) - \sigma_i u_1(x)}{\|\phi_i - \sigma_i u_1\|}, \quad \bar{v}_{i+1}(y) \equiv \frac{\varphi_i(y) - \rho_i v_1(y)}{\|\varphi_i - \rho_i v_1\|}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.13)$$

ile yazmak olanaklıdır. Tüm bu bulgu ve tanımlamalar ışığında ikideğişkenli asıl işlevimizi

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_1^{(i)} u_1(x) v_1(y) + \sum_{i=1}^m \bar{\beta}_i \bar{u}_{i+1}(x) v_1(y) + \sum_{i=1}^m \bar{\gamma}_i u_1(x) \bar{v}_{i+1}(y) \\ &+ \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_{i+1} \bar{u}_{i+1}(x) \bar{v}_{i+1}(y) \end{aligned} \quad (5.14)$$

biçiminde yeniden yazmamız olanaklıdır. Ayrıca aşağıdaki gibi daha tıknaz bir gösterim ile de işlevi simgeliendirebiliriz.

$$f(x, y) = \bar{\mathbf{u}}_m(x)^T \mathbf{K}_A \bar{\mathbf{v}}_m(y). \quad (5.15)$$

Burada,

$$\bar{\mathbf{u}}_m(x) \equiv [u_1(x) \quad \bar{u}_2(x) \quad \dots \quad \bar{u}_{m+1}(x)]^T, \quad \bar{\mathbf{v}}_m(y) \equiv [v_1(y) \quad \bar{v}_2(y) \quad \bar{v}_{m+1}(y)]^T \quad (5.16)$$

ile öğeleri destek işlevleri olarak tanımlanan yöneyler ve

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_A &= \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_1^{(i)} \mathbf{e}_1^{(m+1)} \mathbf{e}_1^{(m+1)T} + \sum_{i=1}^m \bar{\beta}_i \mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)} \mathbf{e}_1^{(m+1)T} + \sum_{i=1}^m \bar{\gamma}_i \mathbf{e}_1^{(m+1)} \mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)T} \\ &+ \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_{i+1} \mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)} \mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)T} \end{aligned} \quad (5.17)$$

ile okuçlu yapıda tanımlanan çekirdek dizeyi simgelenmektedir.  $\mathbf{K}_A$  çekirdek dizeyinin okuçlu yapısını açarsak, yalnızca köşegen ile ilk yataysıra ve düşeysırada yer alan öğelerin sıfırdan değişik, diğer öğelerin sıfır olduğu dizey amaçlanmaktadır.  $\mathbf{K}_A$  dizeyinin açılımında sağ yanda  $\mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)}$  ile simgeliendirilen yöney ise  $i$ . öğesi 1 diğer öğeleri 0 değerini alan  $m + 1$  öğeli yöneyleri anlatmaktadır. Tüm bu bulgular sonucunda gösterilim yöntemi Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlu Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇOÇG) adını almaktadır.



### 5.1.1.1 Çokdeğişkenliliği yükseltmiş üçköşegencil ve okuclu çekirdek gösterilimleri arasındaki ilişki

Yukarıda ayrıntılandırduğumuz her iki gösterilim de temelde ÇYÇG yöntemi taban alınarak geliştirilmiştir. Dolayısıyla, bir kesim ara işlemler yardımıyla iki gösterilim için bir ilişki tanımlamak olanaklıdır. Bunun için, öncelikle, iki yöntemin birbirinden ayrıldığı noktalara değinmek gerekmektedir. Kuşkusuz, gösterilimler arasında birçok ayrılık söz konusudur. Ancak bunlardan en temel olanı ÇYÇÜÇG'nde elde edilen destek işlevlerinin birbirine dikgen olduğu olgusudur. ÇYÇÖÇG için böyle bir kısıtlılık söz konusu değildir. Bu ayrılığın nedeni ÇYÇÜÇG gösteriliminden elde edilen ikideğişkenli ÇYÇG bileşenine yinelemeli olarak sıfırlanım gerçekleşinceye dek açılımın uygulanmasıdır. ÇYÇÖÇG 'nde ise ayrı ayrı toplamcıl anlatımlara yöntem uygulandığından değişik türde destek işlevleri elde edilmektedir. Bu yüzden bu işlevlerin birbirine işlevcil dikgenliği gerekli değildir. İki gösterilim arasındaki ilişkiyi belirleyebilmek adına dikgenlik olgusunu taban alarak bir kesim ara işlemler gerçekleştireceğiz. Bilimcil yazında oldukça sık kullanılan dikgenleştirim yöntemlerinden aklımıza ilk gelen Gram-Schmidt dikgenleştirim yöntemidir. Bu yöntem yardımıyla birbirine dikgen olmayan yöney öğelerini dikgen duruma getirmek olanaklıdır.

Bir önceki bölümde yer verdiğimiz ÇYÇÖÇG'nin örtük biçimde yazılmış dizey ayrıştırımını ele alalım. Bu ayrıştırımda sol ve sağ yandaki  $\bar{\mathbf{u}}_m(x)$  ve  $\bar{\mathbf{v}}_m(y)$  destek yöneylerine Gram-Schmidt dikgenleştirim yöntemini uygulayışımız olanaklıdır. Ayrıntılarına çok değinmeye gerek duymadan bir kesim işlemler sonucunda aşağıda

$$\mathbf{u}_m(x) \equiv \mathbf{T}_L \bar{\mathbf{u}}_m(x), \quad \mathbf{v}_m(y) \equiv \mathbf{T}_R \bar{\mathbf{v}}_m(y) \quad (5.18)$$

ile gösterilen eşitliklerde yer alan  $(m+1) \times (m+1)$  boyutlu  $\mathbf{T}_L$  ve  $\mathbf{T}_R$  altüçgencil sol ve sağ yan dizeyleri yardımıyla dikgen ve birimboylulaştırılmış  $\mathbf{u}_m(x)$  ve  $\mathbf{v}_m(y)$  ile gösterilen yöneylere geçiş olanaklıdır. Böylece (5.15) ile anlatılan eşitliğin sağ yanındaki ayrıştırım için aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklı duruma gelecektir.

$$\bar{\mathbf{u}}_m(x)^T \mathbf{K}_A \bar{\mathbf{v}}_m(y) = \mathbf{u}_m(x)^T \left( \mathbf{T}_L^{T-1} \mathbf{K}_A \mathbf{T}_R^{-1} \right) \mathbf{v}(y). \quad (5.19)$$

Yukarıdaki bu gösterilimin sağ yanında ayıraçlar içinde yer alan çekirdek dizeyin üçköşegencil oluş gerekliliği yoktur. Ancak, bazı düzenleyişler yardımıyla bu

dizeyi üçköşegencil yapıya getirmek olanaklıdır. Bunun için sırasıyla  $\mathbf{R}_L$  ve  $\mathbf{R}_R$  ile gösterdiğimiz sol ve sağ yan dönüşüm dizeylerinden yararlanabiliriz. Bu dönüşüm dizelerini ilk adımda (5.18) bağıntısı ile verdiğimiz eşitliklere uyguladığımızda dikgenlik ve birimboyluluğu etkilemeyen ancak üçköşegencilleştirim sağlayan bir dönüşüm elde etmemiz olanaklı duruma gelecektir.

$$\mathbf{u}_m(x) \equiv \mathbf{R}_L \mathbf{T}_L \bar{\mathbf{u}}_m(x), \quad \mathbf{v}_m(y) \equiv \mathbf{R}_R \mathbf{T}_R \bar{\mathbf{v}}_m(y). \quad (5.20)$$

Böylece (5.19) ile verilen bağıntı yerine aşağıda (5.21) ile verilen ayrıştırım yazılabilmektedir.

$$\bar{\mathbf{u}}_m(x)^T \mathbf{K}_A \bar{\mathbf{v}}_m(y) = \mathbf{u}_m(x)^T \left( \mathbf{R}_L \mathbf{T}_L^{T-1} \mathbf{K}_A \mathbf{T}_R^{-1} \mathbf{R}_R^T \right) \mathbf{v}(y) = \mathbf{u}_m(x)^T \mathbf{K}_T \mathbf{v}(y). \quad (5.21)$$

Bu eşitlik ile  $\mathbf{K}_A$  okuçlu dizey gösteriliminden  $\mathbf{K}_T$  üçköşegencil dizey gösterilimine geçişin tıkız yapısı belirlenmiş olmaktadır. Başka bir deyişle, ÇYÇÖÇG ile ÇYÇÜÇG arasındaki ilişkilendirim tanımlanmıştır.

### 5.1.1.2 Okuçlu dizey gösterilimden üçköşegencil gösterilime dönüşüm

ÇYÇÜÇG yönteminin çekirdek dizeyinde üçköşegencil bir dizey yer alırken ÇYÇÖÇG’nde okuçlu bir dizey gösterilimi yer almaktadır. Bilimcil yazında ve var olan bir çok bilimcil sorunda uygulama kolaylığı getirmesi açısından daha çok üçköşegencil yapılar veya bu yapılara geçiş yeğlenmektedir. Bu bağlamda geliştirilen iki yeni yöntem arasında bir geçiş ortaya koyabilmek önem kazanmaktadır.

Bu yolla ilerleyiş için aşağıda verilen  $2 \times 2$  boyutlu  $\mathbf{A}$  dizeyini ele alalım.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Dördül yapıdaki  $\mathbf{A}$  dizeyini özü gereği hem üçköşegencil hem de okuçlu olarak değerlendirmek olanaklıdır. Bu nedenle, aşağıda  $\mathbf{Q}_1$  ve  $\mathbf{Q}_2$  ile simgelenen dönüşüm dizelerini tanımlamak olanaklıdır.

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Böylece, aşağıdaki biçimde verilen çarpımcıl gösterilim yazılabilmektedir.

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}. \quad (5.24)$$

Ayrıca aynı  $A$  dizeyi için bir diğer dönüşüm dizeyi ile değişik dizilimi olan başka bir üçköşegencil dizey oluşturmak da olanaklıdır.

$$\mathbf{Q}_2 \mathbf{A} \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Dördül dizeler, dönüşüm yönteminin geliştirilebilmesi için yeterli değildir. Bu bağlamda, boyut artışına gidilişi ve inceleyişin ayrıntılı bir biçimde sürdürülüşü gerekmektedir. İlk adım olarak  $3 \times 3$  dizey gösterilimini olan okuçlu  $A$  dizeyi ele alalım.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Ayrıca,  $3 \times 3$ 'lük  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$  ve  $\mathbf{Q}_3$  dönüşüm dizelerini aşağıda verildiği biçimde tanımlayalım.

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Yukarıda (5.27) ile verilen dönüşüm dizeleri yardımıyla inceleyişimizi sürdürelim.  $\mathbf{A}$  dizeyin sol ve sağ yandan  $\mathbf{Q}_2$  dönüşüm dizeyi ile çarptığımızda aşağıdaki biçimde üçköşegencil bir dizey elde etmek olanaklıdır.

$$\mathbf{Q}_2 \mathbf{A} \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_1 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Bu kez,  $A$  dizeyini sol ve sağ yandan  $\mathbf{Q}_3$  dönüşüm dizeyi ile çarptığımızda başka bir okuçlu gösterilimi olan dizey elde etmek de olanaklıdır.

$$\mathbf{Q}_3 \mathbf{A} \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

(5.29) ile elde ettiğimiz dizeye ardından  $\mathbf{Q}_2$  dönüşüm dizeyini uyguladığımızda

$$\mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{A} \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_2 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

ile verilen üçköşegencil dizeyi elde etmek olanaklıdır. Bu çalışmalar bize dönüşümün enözelsiz durumunun tanımlanışının aslında düşünüldüğü düzeyde yalın bir olgu olmadığını izlerini vermektedir.

### 5.1.1.3 Bilgisaymcıl uygulamalar

Bu bölüm, verilen ikideğişkenli işlevler için bir dizi sayısal uygulama sunarak bu yöntemin inceleyişine olanak sağlamaktadır. Ayrıca, ÇYÇÜÇG ayrıştırma yöntemini kullanarak birden çok çarpımcıl ikideğişkenli işlevler yardımıyla asıl işlevi genişleterek yeni bir bakış açısı da getirmektedir. Bilgisaymcıl uygulamalar 10.0.2.0 sürümlü Wolfram Mathematica ile 50 basamak duyarlılık kullanılarak ortaya konmuştur.

#### Örnek 1:

İlk olarak çarpımcıl yapısı göz ardı edilerek işlenecek olan  $\cos(x+y)$  işlevi ile başlayalım. Bu ikideğişkenli işleve ÇYÇÜÇG ayrıştırma yöntemini uyguladıktan sonra, özelsiz yapısı aşağıda belirtilen

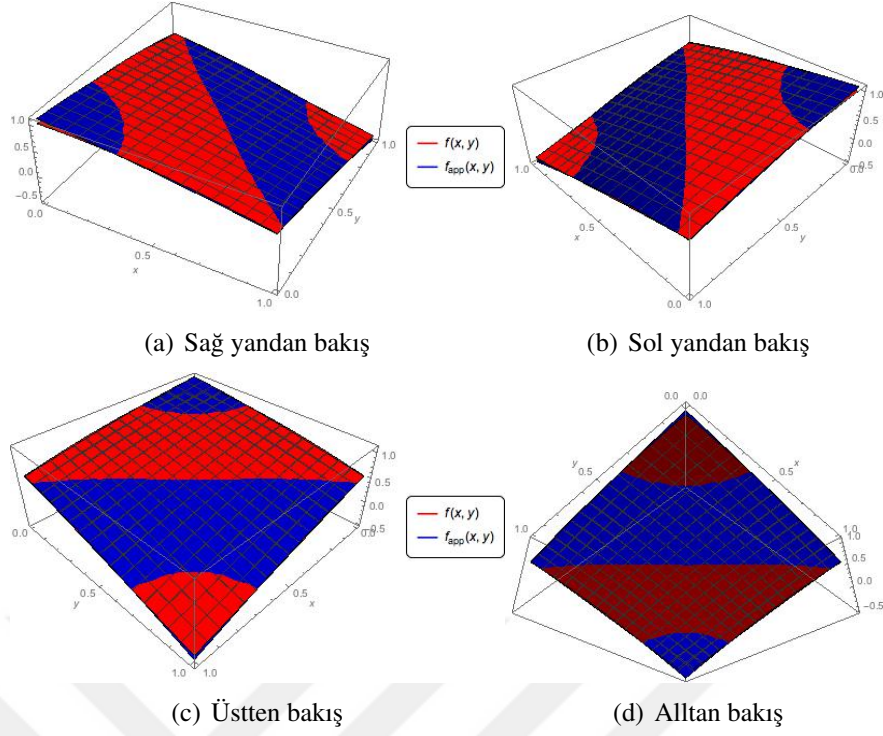
$$\mathbf{K}_T \equiv \begin{bmatrix} 0.496751 & 0.227949 \\ 0.227949 & -0.041087 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

çekirdek dizeyi ile

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -2.179220 + 3.691485\cos(x) - 2.016675\sin(x) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -2.179220 + 3.691485\cos(y) - 2.016675\sin(y) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

sol ve sağ yan destek yöneylerini elde ederiz.

Seçilen işlevin inceleyişinde ilk aşamada dördül yapıda dizey kullanılarak yaklaşım ele alınmıştır. Öteki bir deyişle, iki adım için özyineleyiş kullanılmıştır. Asıl işlev ile yaklaşık olarak oluşturulan işlevin boy değişimi 0.0005 olarak belirlenmiştir. Bu bulguları incelediğimizde, dördül yaklaşımın asıl işlevi göstermek için yeterli olmadığı sonucuna varırız. Aşağıda Çizim 5.1 ile  $2 \times 2$  boyutlu yaklaşık işlev ile asıl işlevin çizimleri yer almaktadır. Kırmızı yüzey, asıl işlevi gösterirken mavi olanı ise yaklaşık işleve karşılık gelmektedir.



**Çizelge 5.1** :  $\cos(x+y)$  işlevi için 2 yinelemeli ÇYÇÜÇG çizimleri

Burada,  $f_{app}$  ÇYÇÜÇG ayrıştırım yöntemi ile belirlenen işleve karşılık gelmektedir. Boyutu 3'e yükselttiğimizde, ÇYÇÜÇG ile elde ettiğimiz yeni ayrıştırım düzey ve yöneyleri aşağıdaki biçimde olacaktır.

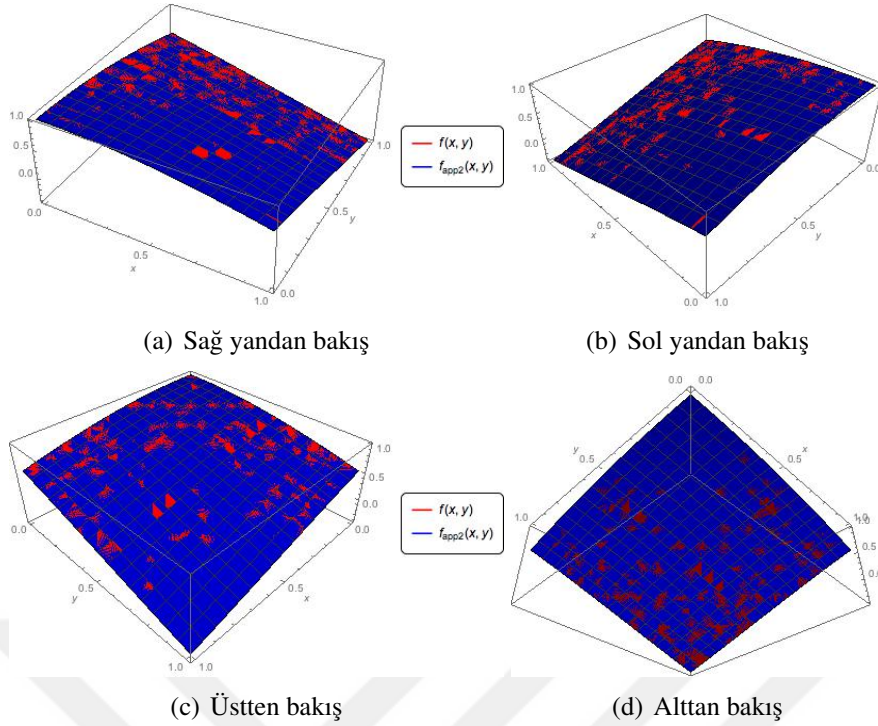
$$\mathbf{K}_T \equiv \begin{bmatrix} 0.496751 & 0.227949 & 0. \\ 0.227949 & -0.041087 & 0.012163 \\ 0. & 0.0121633 & -0.001016 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

öyle ki,

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -2.179220 + 3.691485\cos(x) - 2.016675\sin(x) \\ -26.101985 + 23.748004\cos(x) + 13.310332\sin(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -2.179220 + 3.691485\cos(y) - 2.016675\sin(y) \\ -26.101985 + 23.748004\cos(y) + 13.310332\sin(y) \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Boyutun bir arttırılması, yöntemdeki kalan bileşen yokedimine dayanan yineleyişin üç adım için kullanıldığı anlamına gelmektedir. Asıl işlevin gösteriliminin niteliğini ölçmek adına yanılığın inceleyişi yapıldığında  $1.281152 \cdot 10^{-32}$  gibi bir değer elde edilmiştir. Bu da bizi yöntemin asıl işlevi oldukça iyi gösterdiği çıkarımına götürmektedir.



**Çizelge 5.2 :**  $\cos(x+y)$  işlevi için 3 yinelemeli ÇYÇÜÇG çizimleri

Çizim 5.2 boyut artışının etkilerinin türülüğünü açık bir biçimde göstermektedir. Ayırıştırımın boyutunun artırılışının ÇYÇÜÇG yönteminin niteliğini arttırdığını ayırtetmek olanaklıdır.

### Örnek 2:

Öteki bir örnek uygulama olarak  $(e^x + e^y)/(1+x+y)$  işlevi seçilmiştir. Andırır biçimde, ilk olarak yöntemi  $2 \times 2$  düzey ayırıştırımı ile inceleyiş gerçekleştirilmiştir. Ancak önceki örnekle karşılaştırmalı olarak, bu işlev, yapısına bağlı olarak daha çok bilgisayar karmaşıklığı gösterir. Bu nedenle yalnızca çekirdek düzeyini, yazım kolaylığı açısından, aşağıdaki biçimde vermek olanaklıdır.

$$\mathbf{K}_T \equiv \begin{bmatrix} 1.720984 & 0.034872 \\ 0.034872 & 0.004772 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Aşağıda Çizim 5.3 ile  $2 \times 2$  boyutlu yaklaşık işlev ile asıl işlevin çizimleri yer almaktadır. Daha önceki çizimlere andırımlı olarak kırmızı yüzeyi ile asıl işlev, mavi yüzey ile ise yaklaşık işlev anlatılmaktadır. Yanılgı boy değeri 0.0000378336 olarak belirlenmiştir.

### Örnek 3:

Bir sonraki örnek olan üçüncü uygulamada işlev  $\sin(x) + \cos(2y) + e^x + y^{10} + 1$  olarak seçilmiştir. Dizey boyutu  $2 \times 2$  olarak ele alınmıştır. Böylece  $\mathbf{K}_T$  üçköşegenil

çekirdek dizeyi

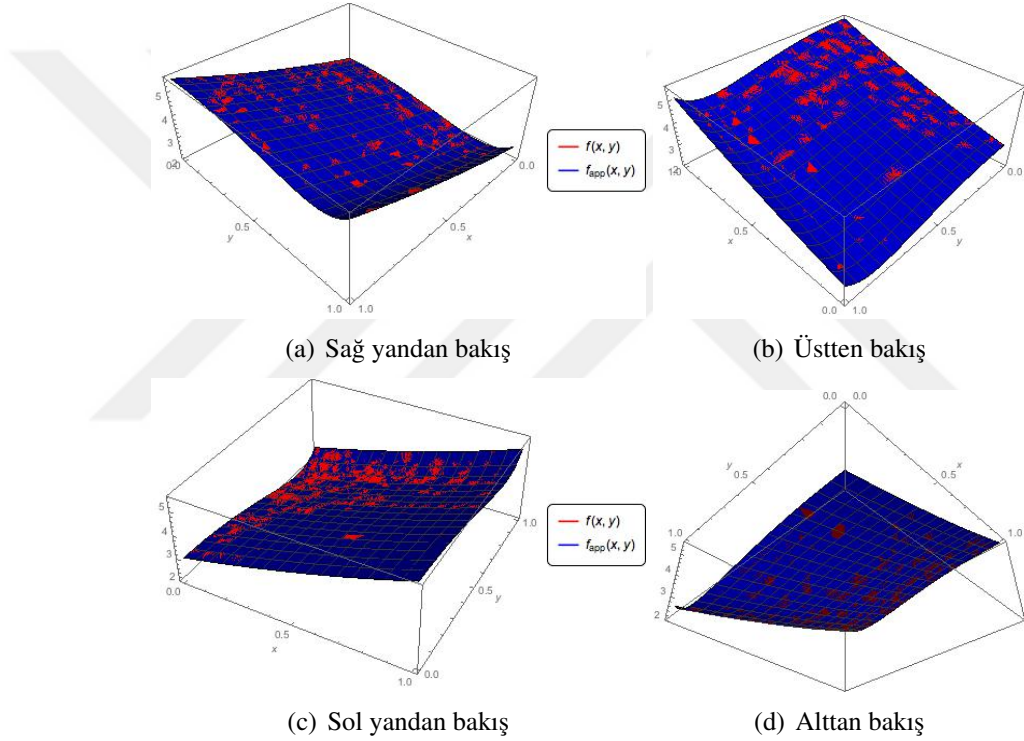
$$\mathbf{K}_T \equiv \begin{bmatrix} 3.723537 & 0.329522 \\ 0.736390 & -2.551521 \times 10^{-38} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

olarak elde edilmektedir. Sol ve sağ yandaki destek yöneyleri ise

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1.357976(-2.17798 + e^x + \sin x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 3.034697(-0.545558 + y^{10} + \cos 2y) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

yöneyleri biçiminde yazılabilmektedir.



**Çizelge 5.3** :  $\sin(x) + \cos(2y) + e^x + y^{10} + 1$  işlevi için 2 yinelemeli ÇYÇÜÇG çizimi

Bu savdaki tüm işlevler sınav işlevleri olarak seçkisiz olarak alınır. Burada, bu yeni geliştirilen yöntemlerin niteliğinin türülüğünü göstermek amaçlanmaktadır. Bu nedenle değişik işlevler için araştırmalar gerçekleştirilmiştir. Tüm bunların yanı sıra orancıl yapıdaki işlevlerin inceleyişi de gerçekleştirilmiştir. Ancak, bu işlevler için yönteme uygun destek ve ağırlık işlevi seçimlerinin gerektiği gözlenmektedir. Başka bir deyişle, içe aktarım zorluklarından kaynaklanan bilgisayar karmaşıklıkları vardır. Bu durum oldukça ayrı bir inceleyiş konusudur.

#### Örnek 4:

Son uygulama  $(x^6 + 1)(y^6 - 1) + e^{x+y} + \sin(2x)\cos(y)$  işlevini taban almaktadır. Bu sınav işlevinin belirleniş süresi  $(x^6 + 1)(y^6 - 1)$ ,  $e^{x+y}$  ve  $\sin(2x)\cos(y)$  işlevlerinin ayrı ayrı belirlenişinde daha yüksektir. Ayrı ayrı inceleyiş ve ardından çekirdekte okuçu yapıda bir dizey ayrıştırımıyla biraraya getiriş belirlenışı kolaylaştırırsa da okuçu yapı sonrası elde edilen sol ve sağ yan destek yöneylerinin bileşenleri arasındaki dikgenlik olgusu ortadan kalkmaktadır.

İlk adım bağlamında  $(x^6 + 1)(y^6 - 1)$  işlevine ÇYÇÜÇG yöntemini uyguladığımızda

$$\mathbf{K}_T \equiv \begin{bmatrix} -0.979592 & 0.271690 \\ 0.203767 & -0.0565149 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

üçköşegencil çekirdek dizeyini ve

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0.600925 - 4.206476x^6 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -0.600925 + 4.206476x^6 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

sol ve sağ yan dikgen ve birim boylu destek işlevlerinden oluşan destek yöneylerini elde ederiz. Andırımlı biçimde,  $e^{x+y}$  işlevi için yöntemi uyguladığımızda,

$$\mathbf{K}_T \equiv \begin{bmatrix} 2.952492 & 0.845345 \\ 0.845345 & 0.242036 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

çekirdek dizeyi ile

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1.18295(1.718280e^x - 2.952490) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1.18295(1.718280e^y - 2.952490) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

sol ve sağ yan destek yöneylerini elde ederiz. Son olarak örnekte yer alan  $\sin(2x)\cos(y)$  işlevine ÇYÇÜÇG yöntemini uyguladığımızda da,

$$\mathbf{K}_T \equiv \begin{bmatrix} 0.595823 & 0.098244 \\ 0.256935 & 0.042365 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

üçköşegencil çekirdek dizeyini ve

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -2.318969 + 6.550018 \sin(x) \cos(x) \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -6.064754 + 7.207324 \cos(y) \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

sol ve sağ yan destek yöneylerini elde etmek olanaklıdır. ÇYÇÜÇG yöntemini kullanarak asıl işlevi oluşturan bu üç işlevi ayrı ayrı üçköşegencil düzey gösterilim türünden anlatmış olduk. Bu anda ise ÇYÇOÇG yöntemi yardımıyla bu işlevlerin toplamları türünden gösterilen asıl işlevi tek bir düzey gösterilimi türünden yazışımız olanaklıdır

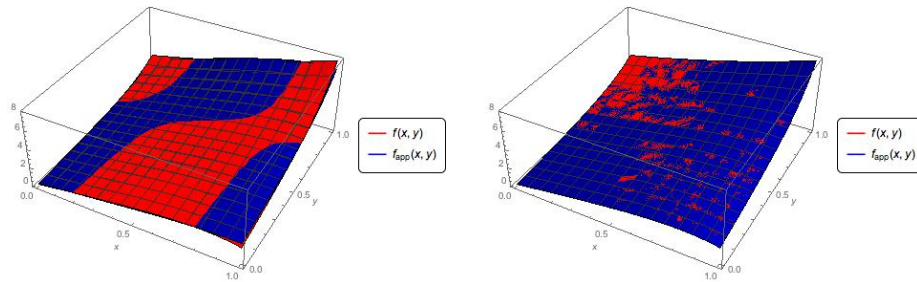
$$\mathbf{K}_T \equiv \begin{bmatrix} 2.568723 & 0.271690 & 0.845345 & 0.098244 \\ 0.203767 & -0.0565149 & 0 & 0 \\ 0.845345 & 0 & 0.242036 & 0 \\ 0.256935 & 0 & 0 & 0.042365 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Bu birleştirmeden elde edilecek olan sol ve sağ yan destek işlevleri yöneyleri ise sırasıyla,

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0.600925 - 4.206476x^6 \\ 1.18295 (1.718280e^x - 2.952490) \\ -2.318969 + 6.550018 \sin(x) \cos(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -0.600925 + 4.206476x^6 \\ 1.18295 (1.718280e^y - 2.952490) \\ -6.064754 + 7.207324 \cos(y) \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

biçiminde olacaktır.



(a) ÇYÇÜÇG, 0.0040402

(b) ÇYÇOÇG,  $4.151266 \times 10^{-12}$

**Çizelge 5.4 :**  $(x^6 + 1)(y^6 - 1) + e^{x+y} + \sin(2x) \cos(y)$  işlevi için 2 yinelemeli çizimler

ÇYÇÜÇG yöntemi, ikideğişkenli işlevin ÇYÇG yöntemiyle yineleyişli ayrıştırımından türetilmiştir. Yöntemi ikiden çok değişkeni olan işlevler için de geliştirmek olanaklıdır. Bu konu, çok yeni bir gelecek çalışma konusu olarak ele alınacaktır.

Bu bölümde verilen öteki bir ayrıştırım yöntemi de, çekirdek dizeyinin bir ok ucu yapısı barındırdığı, sol ve sağ destek yöneylerinin ise, öğeleri karşılıklı olarak dikgen olmayan destek işlevlerinden oluşan ÇYÇOÇG yöntemidir. Bu yöntem, ikideğişkenli işlevler için esnek bir ayarlayış yapmamızı sağlamaktadır. Dış çarpımlar türünden sonlu toplamdan oluşan işlevler tekdeğişkenli işlevlerin ÇYÇOÇG gösterilimi ile ele alınabilir. Taylor toplam dizilerinin yakınsayışı ile bağlantılı olarak yöntemin yüksek niteliği olarak tez bir yakınsayış elde etmek olanaklıdır. Bu bölümde ayrıca, kısaca, okuçlu yapıdan dönüşüm üzerine de odaklanılmıştır. Bilimcil yazında üçköşegencil dizey yapısının uygulamıcıl kolaylıkları oluşu nedeniyle daha sık kullanıldığı açıktır. Bu özellik yoğun bir çalışmadır ve yakın gelecekte özelsizleştirilebilir bir yöntem geliştirmek amaçlanmaktadır.

### 5.1.2 Paylaşımli Dördül Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (PDÖÇYÇÜÇG)

Bu bölümde amaç, önceki bölümde anlatılan ÇYÇÜÇG yöntemini bir adım daha ileri taşıyarak ayrıştırımdaki çekirdek yapıyı örtüştürülmüş dördül öbek duruma dönüştürmektir. Bunun yanısıra daha önce belirtmiş olduğumuz çarpımcıl yapıdaki işlevler olgusunu geliştirerek ayrıştırımı bilimcil yazında oldukça sık kullandığımız belli başlı yöntemlere katkı sağlayacak biçimde ortaya koymaktır.

Yakın zamanda yapmış olduğumuz çalışmalarda ÇYÇÜÇG için bilimcil uygulamışlar gerçekleştirmiş ve tekdeğişkenli işlevlerin çarpımı biçiminde tanımlanmış ikideğişkenli işlevler için bir kesim çıkarımlarda bulunmuştuk. Bu anda ise bu olguyu daha da genel duruma getirmeye çalışacağız. Bunun için elimizde tekdeğişkenli işlevlerin çarpımlarının sonlu toplamından oluşan ikideğişkenli bir işlevin olduğunu varsayalım. Bu işlevi

$$K_{BPS}^{(m)}(x,y) \equiv \sum_{i=1}^m \phi_i(x)\varphi_i(y) \quad (5.46)$$

biçiminde kapalı yapıda göstermek olanaklıdır. Burada  $m$  değeri artıtanımlı sonlu değerli bir sayılı simgelemektedir. Ayrıca  $\phi$  ve  $\varphi$  ile simgelediğimiz tekdeğişkenli işlevlerin bilindiğini öngörelim. Burada  $BPS$  ile ikili çarpımlar toplamı (ing: binary product sum) söylenmek istenmektedir. Daha önceki uygulamıcıl çalışmalarımızda elimizde tek bir çarpımla simgelenen işlevler vardı. Dolayısıyla, ayrıştırımda

oluşturduğumuz sol ve sağ destek yöneylerinde yalnızca yeni destek işlevlerinin eklenişi ile boyut kazandırılan bir yapı söz konusuydu. Ancak, şimdi elimizde bu işlevlerin sonlu toplamından oluşan bir yapı vardır. Bu durumda ise her bir dışçarpım anlatımının başlangıçtaki destek işlevleri  $u_i(x)$  ve  $v_i(x)$  olmak üzere buradan türeyen  $(i+1)$ . destek işlevleri bir sonraki adım için başlangıç destek işlevleri olacaktır. Başka bir deyişle, birinci adımda yer alan  $\phi_1(x)\phi_1(y)$  anlatımını ele alalım. Burada başlangıç destek işlevleri için seçilen  $u_1(x)$  ve  $v_1(x)$  destek işlevleri ile yöntemi uyguladığımızı varsayalım. Buradan türeteceğimiz  $u_2(x)$  ve  $v_2(x)$  sol ve sağ yan destek işlevleri bir sonraki çarpımcıl anlatım olan  $\phi_2(x)\phi_2(y)$  için başlangıç destek işlevleri olacaklardır. Böylece ardarda bağlanmış bu yapı ile her bir dışçarpım

$$\begin{aligned}\phi_i(x)\phi_i(y) &= \alpha_i^{(1)}u_i(x)v_i(y) + \beta_i u_{i+1}(x)v_i(y) + \gamma_i u_i(x)v_{i+1}(y) \\ &\quad + \alpha_{i+1}^{(2)}u_{i+1}(x)v_{i+1}(y), \quad i = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (5.47)$$

ile yazılabilmektedir. Bu ilerleyiş bize ayrıca ardışık türetilen destek işlevlerinin dikgen ve birimboylu oluşu olgusunu da kazandırmaktadır. (5.47) ile verilen açılımdaki bileşenler açık olarak

$$\alpha_i^{(1)} = \sigma_i \rho_i, \quad \sigma_i \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx W_1(x) u_i(x) \phi_i(x), \quad \rho_i \equiv \int_{a_2}^{b_2} dy W_2(y) v_i(y) \phi_i(y), \quad (5.48)$$

$$\beta_i \equiv \rho_i \left( \|\phi_i\|_x^2 - \sigma_i^2 \right)^{1/2}, \quad \gamma_i \equiv \sigma_i \left( \|\phi_i\|_y^2 - \rho_i^2 \right)^{1/2}, \quad (5.49)$$

$$u_{i+1}(x) \equiv \frac{\phi_i(x) - \sigma_i u_i(x)}{\|\phi_i - \sigma_i u_i\|_x}, \quad v_{i+1}(y) \equiv \frac{\phi_i(y) - \rho_i v_i(y)}{\|\phi_i - \rho_i v_i\|_y}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.50)$$

ile belirlenmektedir. Tüm bu bulgu ve tanımlayışlar ışığında ikideğişkenli asıl işlevimizi

$$\begin{aligned}K_{BPS}^{(m)}(x, y) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(1)} u_i(x) v_i(y) + \sum_{i=1}^m \beta_i u_{i+1}(x) v_i(y) + \sum_{i=1}^m \gamma_i u_i(x) v_{i+1}(y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \alpha_{i+1}^{(2)} u_{i+1}(x) v_{i+1}(y) = \mathbf{u}_m(x)^T \boldsymbol{\Sigma}_{BPS}^{(m)} \mathbf{v}_m(y)\end{aligned}\quad (5.51)$$

biçiminde yeniden yazışımız olanaklıdır. Ayrıca aşağıdaki gibi daha tıknaz bir gösterilim ile de işlevi simgeliendirebiliriz.

$$K_{BPS}^{(m)}(x, y) = \mathbf{u}_m(x)^T \boldsymbol{\Sigma}_{BPS}^{(m)} \mathbf{v}_m(y) \quad (5.52)$$

öyle ki,

$$\mathbf{u}_m(x) \equiv [u_1(x) \ u_2(x) \ \dots \ u_{m+1}(x)]^T, \quad \mathbf{v}_m(y) \equiv [v_1(y) \ v_2(y) \ \dots \ v_{m+1}(y)]^T \quad (5.53)$$

ve

$$\begin{aligned} \Sigma_{BPS}^{(m)} = & \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i^{(m+1)} \mathbf{e}_i^{(m+1)T} + \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)} \mathbf{e}_i^{(m+1)T} + \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{e}_i^{(m+1)} \mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)T} \\ & + \sum_{i=1}^m \alpha_{i+1} \mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)} \mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)T}, \quad \alpha_1 \equiv \alpha_1^{(1)}, \quad \alpha_i \equiv \alpha_{i-1}^{(2)} + \alpha_i^{(1)}, \quad i > 1 \end{aligned} \quad (5.54)$$

olsun.  $\Sigma_{BPS}^{(m)}$  dizeyinin açılımında sağ yanda  $\mathbf{e}_{i+1}^{(m+1)}$  ile simgelendirilen yöney ise  $i$ . ögesi 1 diğer ögeleri 0 değerini alan  $m+1$  ögeli yöneyleri anlatmaktadır. Görüldüğü gibi çekirdek dizeyininin sıfırdan değişik ögeleri dizeyin köşegeninde ve köşegenin komşuluğunda yer almaktadır. Böylece  $\Sigma_{BPS}^{(m)}$  dizeyi  $2 \times 2$  türünde paylaşımlı dördül öbeklerin köşegen üzerinde yer aldığı üçköşegencil bir duruma dönüşmektedir [17,45]. Bu nedenle, sağ yan açılımı "Paylaşımlı Dördül Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (PDÖÇYÇÜÇG) kesimi" olarak adlandırılmaktadır.

### 5.1.2.1 Paylaşımlı Dördül Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösteriliminde destek işlevlerinin dikgenlik ve birimboyluluk çözümüyle

Daha önceki bölümlerde (5.53) ile verilen  $u_j(x)$  destek işlevleri için tümünün birbirine dikgen olduğunu söylemek olanaklı değildir. Örneğin  $u_2(x) \perp u_1(x)$  ve  $u_3(x) \perp u_2(x)$  iken  $u_1(x)$  ile  $u_3(x)$  destek işlevleri arasında dikgenlik olmak zorunluluğu yoktur. Daha da özelsizleştirmek istersek yalnızca her  $j$  değeri için  $u_j(x) \perp u_{j+1}(x)$  olgusundan söz etmek olanaklıdır. Bu durum  $\Sigma_{BPS}^{(m)}$  ile  $K_{BPS}^{(m)}$  asıl çekirdek işlevin izgesi arasında değişikliğe neden olmaktadır. Başka bir deyişle çekirdek işlevin dizey gösterilimini tamamıyla anlatamamaktadır. Ancak,  $\Sigma_{BPS}^{(m)}$  dizeyi çekirdek işlevinin izgesi ile ilgili temel anlamda bilgileri tutmaktadır. Ayrıca, asıl işlevin izgesini tam anlamıyla yansıtan uygun bir dönüşümün tanımlanması gerekliliğini de vurgulamak gerekmektedir.

Bu anda,  $u_j(x)$  destek işlevlerinin Gram dizeyini ele alalım [46].

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_m) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx \mathbf{u}_m(x) \mathbf{u}_m(x)^T = \begin{bmatrix} (u_1, u_1)_x & \cdots & (u_1, u_{m+1})_x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_{m+1}, u_1)_x & \cdots & (u_{m+1}, u_{m+1})_x \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

1 ile  $m + 1$  değeri arasında kalan  $j$  altsırasayılı destek işlevlerinin oluşturduğu doğrucul bağımsız kümenin kapsadığı öğelerden oluşan dizey artı tanımlı olacaktır. Bu olgu bizi Gram dizeyinin Cholesky ayrıştırımının incelenişi sonucuna götürmektedir [47].  $\mathbf{L}_u$  altüçgensel dördül dizey olmak üzere, Cholesky ayrıştırımı ile Gram dizeyini

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_m) = \mathbf{L}_u \mathbf{L}_u^T = \int_{a_1}^{b_1} dx \mathbf{u}_m(x) \mathbf{u}_m(x)^T \quad (5.56)$$

biçiminde yazmak olanaklıdır. Böylece, aşağıda verilen inceleyiş ile dikgenlik olgusundan söz etmek artık olanaklı duruma gelebilecektir.

$$\int_{a_1}^{b_1} dx (\mathbf{L}_u^{-1} \mathbf{u}_m(x)) (\mathbf{L}_u^{-1} \mathbf{u}_m(x))^T \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx \bar{\mathbf{u}}_m(x) \bar{\mathbf{u}}_m(x)^T = \mathbf{I}_{m+1} \quad (5.57)$$

öyle ki,

$$\bar{\mathbf{u}}_m(x) \equiv [\bar{u}_1(x) \ \dots \ \bar{u}_{m+1}(x)]^T = \mathbf{L}_u^{-1} \mathbf{u}_m(x). \quad (5.58)$$

(5.57) ile verilen eşitlik bize

$$(\bar{u}_j, \bar{u}_k)_x = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, m+1 \quad (5.59)$$

yazım olanağı sağlamaktadır. Andıran durumlar diğer yan destek işlevleri için de geçerli olacaktır. Yukarıdaki adımları  $v_j(y)$  destek işlevleri için de uyguladığımızda

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}_m) \equiv \int_{a_2}^{b_2} dy \mathbf{v}_m(y) \mathbf{v}_m(y)^T = \begin{bmatrix} (v_1, v_1)_y & \cdots & (v_1, v_{m+1})_y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_{m+1}, v_1)_y & \cdots & (v_{m+1}, v_{m+1})_y \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}_m) = \mathbf{L}_v \mathbf{L}_v^T = \int_{a_2}^{b_2} dy \mathbf{v}_m(y) \mathbf{v}_m(y)^T, \quad (5.61)$$

$$\int_{a_2}^{b_2} dx (\mathbf{L}_v^{-1} \mathbf{v}_m(y)) (\mathbf{L}_v^{-1} \mathbf{v}_m(y))^T \equiv \int_{a_2}^{b_2} dy \bar{\mathbf{v}}_m(y) \bar{\mathbf{v}}_m(y)^T = \mathbf{I}_{m+1}, \quad (5.62)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_m(y) \equiv [\bar{v}_1(y) \ \dots \ \bar{v}_{m+1}(y)]^T = \mathbf{L}_v^{-1} \mathbf{v}_m(y), \quad (5.63)$$

$$(\bar{v}_j, \bar{v}_k)_y = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, m+1. \quad (5.64)$$

biçimindeki olgulara erişileceği açıkça görülmektedir. Tüm bu çözümleyişler bizi

$$K_{BPS}^{(m)}(x, y) = \bar{\mathbf{u}}_m(x)^T \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_{BPS}^{(m)} \bar{\mathbf{v}}_m(y) \quad (5.65)$$

ile verilen tıkHz gösterilime götürmektedir. Bu gösterilimin çekirdek dizeyi aşağıda (5.66) ile verilen yapıda olacaktır.

$$\bar{\Sigma}_{BPS}^{(m)} \equiv \mathbf{L}_u^T \Sigma_{BPS}^{(m)} \mathbf{L}_v. \quad (5.66)$$

Yeni elde edilen dizey ayrıştırımındaki  $\bar{\Sigma}_{BPS}^{(m)}$  çekirdek dizeyi artık üçköşegencil biçimde değildir. Ancak, izgeleri için ( $m$  sonsuza yaklaştığında) değişiklik ortadan kalkacaktır.

### 5.1.2.2 İkili çarpım toplam dizileri ve kesimcil yaklaşımları: PDÖÇYÇÜÇG

Bilimsel yazında yer alan birçok ikili çarpım türünden işlevin toplamsal gösterilimi

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \phi_j(y) \quad (5.67)$$

ile yazılabilmektedir. Ancak özelsiz eğilim  $m$  değeri artı tanımlı sonlu değerli bir sayılı simgelemek üzere

$$f_m(x, y) \equiv \sum_{j=1}^m \phi_j(x) \phi_j(y), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.68)$$

türünden kesmeler yaparak işleve yaklaşım uygulamaktır. Yaklaşık işleve PDÖÇYÇÜÇG ile açılım uyguladığımızda

$$\begin{aligned} f_m(x, y) = & \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(1)} u_i(x) v_i(y) + \sum_{i=1}^m \beta_i u_{i+1}(x) v_i(y) + \sum_{i=1}^m \gamma_i u_i(x) v_{i+1}(y) \\ & + \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(2)} u_{i+1}(x) v_{i+1}(y) \end{aligned} \quad (5.69)$$

biçiminde bir sağ yan açılımı elde etmek olanaklı olacaktır. Daha tıkHz bir gösterilim ile açılımı

$$f_m(x, y) = \mathbf{u}_m(x)^T \Sigma_{BPS}^{(m)} \mathbf{v}_m(y) \quad (5.70)$$

türünden göstermek olanaklıdır [17, 45]. İlgili işlevin boy dördülü için de aşağıda (5.71) ile verilen eşitlikten yararlanılmaktadır.

$$\|f_m\|^2 = \int_{a_2}^{b_2} W_2(y) dy \mathbf{v}_m(y)^T \Sigma_{BPS}^{(m)T} \mathbf{G}(\mathbf{u}_m) \Sigma_{BPS}^{(m)} \mathbf{v}_m(y). \quad (5.71)$$

Aynı zamanda bu eşitlik  $\Sigma_{BPS}^T \mathbf{G}(\mathbf{u}_m) \Sigma_{BPS}$  dizeyinin  $\mathbf{v}_m(y)$  yöney işlevi altındaki beklenen değeridir. Beklenen değeri çekirdek dizeyi  $u_j(x)$  destek işlevleri doğrucul bağımsız olduğu sürece bakışık ve artı tanımlıdır. Bu nedenle (5.71) ile verilen boy

dördül tanımını  $m$ . kerten kesimcil yaklaşırtımının nitelik ölçeni bileşeni olarak ele almak olanaklıdır. Boy dördülünün belirlenimindeki olası güçlük veya kolaylıklar tümlevlenen yapılarla bağılı olmaktadır.

Yukarıdaki bağıntılar yardımıyla geliştirilen yaklaşırtım yöntemi için nitelik ölçeni

$$\sigma_m \equiv \frac{\|f_m\|^2}{\|f\|^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.72)$$

olarak tanımlanmaktadır. Yakınsak bir  $f(x, y)$  işlevi için  $\sigma_m$  nitelik ölçeninin  $m$  sonsuza gittikçe yakınsayışı beklenmektedir. PDÖÇYÇÜÇG için bazı durumlarda  $\sigma_m$  dizisinin tekdüze olarak artan anlatımlardan oluşması gerekir ve dizinin ereğı 1 olacaktır.

### 5.1.2.3 Sayıcıl uygulayırlar

Bu bölümde uygulama için örnekleri çoğaltmak yerine belli başlı örnekler üzerinden özüyle tutarlı olması durumunun gösterilime olan katkılarına ilişkin anlatımlara yer verilecektir. Seçilen işlev çekirdek işlevini anımsatımı açısından  $K(x, y)$  ile gösterilecektir.

#### Örnek 1:

İlk olarak

$$K(x, y) \equiv \frac{1}{1 - vxy}, \quad 0 < v < 1, \quad x, y \in [0, 1] \quad (5.73)$$

türünden seçilmiş bir çekirdek işlevini inceleyelim. Bu işlevin  $(x, y)$  bölgesinde yakınsayan aşağıdaki toplamdizi gösterilimini ele alalım.

$$K(x, y; v) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} K_j(x, y; v), \quad K_j(x, y; v) \equiv v^{j-1} x^{j-1} y^{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.74)$$

Bu gösterilimde PDÖÇYÇÜÇG'ne ilişkilendirimin görülebilmesi açısından sağ yandaki işlev bileşenlerini aşağıdaki biçimde ikili çarpımlar türünden ayrıştırdığımızı varsayalım.

$$\phi_j(x) \equiv v^{\frac{j-1}{2}} x^{j-1}, \quad \varphi_j(y) \equiv v^{\frac{j-1}{2}} y^{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.75)$$

Şimdi, ilk toplamcıl anlatımdan başlamak üzere PDÖÇYÇÜÇG'ni sağ yandaki anlatımlara uygulamaya başlayalım. Başlangıç destek işlevlerini

$$u_1(x) \equiv 1_f, \quad v_1(y) \equiv 1_f, \quad x, y \in [0, 1] \quad (5.76)$$

olarak seçtiğimizi varsayalım. Burada  $1_f$  ile her yerde 1 değerini alan değişmez işlev anlatılmak istenmektedir. Ayrıca yine işlemlerde kolaylık sağlanması açısından ilgili  $[0,1]$  aralığı için değişmez ağırlık altında çalıştığımızı varsayalım. Bu durumda bu ağırlık da aslında  $1_f$  ile anlatılan değişmez işleve eş olacaktır. Bu kısıtlar altında, ara işlemleri atlayarak elde edeceğimiz sonuç

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \alpha_1^{(2)} = 0 \quad (5.77)$$

biçiminde olacaktır. Böylece ilk toplamcıl anlatım için yazacağımız PDÖÇYÇÜÇG açılımı

$$K_1(x,y) = \alpha_1^{(1)} u_1(x) v_1(y) = [u_1(x) \ u_2(x)] \begin{bmatrix} \alpha_1^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(y) \\ v_2(y) \end{bmatrix}. \quad (5.78)$$

biçimindedir. Bu anda, çekirdek dizeyinin salt en üst ilk anlatımı dolu olsa da bu gösterilim aslında çekirdekte bir dördül öbek gösteriliminin varlığını çağrıştırmaktadır. Biraz daha ilerlediğimizde bunu açıkça görmek olanaklı duruma gelecektir. (5.77) ile verilen eşitliklerde sıfırlanan ölçekleyiş değıştirgeleri bizi türetilecek destek işlevlerinin sıfır değeri üreteceğı sonucuna götürmektedir. Geliştirilen bu yöntemin belki de en önemli noktalarından biri budur; destek işlevleri sıfırlansa bile bu durum yöntemde herhangi bir tıkanıklığa yol açmamaktadır. Yöntemin gerektirdiğı kısıtlar altında yeni dikgen ve birimboylu destek işlevleri üreterek ilerleyişi sürdürmek olanaklıdır. Bu uygulama için başlangıçta seçilen sol ve sağ yan destek işlevleri değişmez işlevler türünden seçilmişti. Başka bir deyişle sıfırcı kereden çokterimliler türündendi. Bu anda da ilgili değışkenine bağılı birinci kereden çokterimliler olarak seçilebilirler. Örneğın,

$$u_2(x) \equiv \sqrt{3}(2x-1), \quad v_2(y) \equiv \sqrt{3}(2y-1) \quad (5.79)$$

biçimde sol ve sağ yan destek işlevleri türettiğimizi varsayalım. Burada bu seçimin kuşkusuz tek türlü olmadığını belirtmekte yarar vardır. Daha önceki evrelerde de üzerinde sıkça durduğumuz bir olguyu anımsatalım. Destek işlevlerinin seçimi yöntemin yaklaşırtım niteliğine doğrudan etki eden oldukça önemli olgulardır.

Bu tanımlayışlar ve seçimlerin ardından asıl çekirdek işlevinin ikinci toplamcıl anlatımına doğru ilerlediğimizde aşağıdaki eşitlikleri yazışımız olanaklıdır.

$$K_2(x,y) \equiv vxy, \quad \phi_2(x) \equiv \sqrt{v}x, \quad \phi_2(y) \equiv \sqrt{v}y. \quad (5.80)$$



Bu ilerleyiş sonucunda aşağıdaki eşitlikler elde edilecektir.

$$\sigma_2 = \rho_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{v}, \quad \alpha_2^{(1)} = \frac{v}{12}, \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{v}{4}, \quad \beta_2 = \gamma_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}v \quad (5.81)$$

$$\|\phi_2 - \sigma_2 u_2\|_x = \|\varphi_2 - \rho_2 v_2\|_y = \frac{\sqrt{v}}{2}, \quad u_3(x) = 1_f, \quad v_3(y) = 1_f \quad (5.82)$$

Burada seçilen destek işlevleri bir önceki anlatımda de seçmiş olduğumuz başlangıç sol ve sağ yan destek işlevleri ile aynı olacak biçimde ele alınmışlardır. Seçimin isteğe bağlı oluşu yöntemle esneklik kazandıran ve ederini düşüren önemli bir olgudur. Bu durum ayrıca, oluşturulan destek işlevleri arasında doğrucul bağımlılığın olması varlığının kanıtıdır.

Tüm bu bulgular ışığında çekirdek dizey yapısı

$$\Sigma_{BPS}^{(2)} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12}v \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{12}v & \frac{v}{4} \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

biçiminde olacaktır. Sol ve sağ yan destek yöneyler ise

$$\mathbf{u}_2(x) \equiv \left[ 1_f \quad \sqrt{3}(2x-1) \quad 1_f \right]^T, \quad \mathbf{v}_2(y) \equiv \left[ 1_f \quad \sqrt{3}(2y-1) \quad 1_f \right]^T \quad (5.84)$$

ile verilen doğrucul bağımlı yöneyler olarak gözükecekleridir. Ancak, bu doğrucul bağımlılığı ortadan kaldırmak olanaklıdır. Bunun için dizey gösterilimini bir boyut indirgeyerek uygun düzenleyişlerle yeniden yazımla ele almak gerekmektedir. Başka bir deyişle,  $3 \times 3$  türünden  $2 \times 2$  türüne bir düzenleyiş yaparak doğrucul bağımlılığı ortadan kaldırmak olanaklıdır. Böylece, yöntem için bu adımda

$$K_{BPS}^{(2)}(x, y; v) = \mathbf{u}_{2,c}(x)^T \Sigma_{BPS}^{(2,c)} \mathbf{v}_{2,c}(y), \quad (5.85)$$

$$\mathbf{u}_{2,c}(x) \equiv \left[ 1_f \quad \sqrt{3}(2x-1) \right], \quad \mathbf{v}_{2,c}(y) \equiv \left[ 1_f \quad \sqrt{3}(2y-1) \right], \quad (5.86)$$

$$\Sigma_{BPS}^{(2,c)} \equiv \begin{bmatrix} 1 + \frac{v}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12}v \\ \frac{\sqrt{3}}{12}v & \frac{v}{12} \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

eşitliklerini yazmak olanaklı duruma gelecektir. Destek işlevlerinin seçilebilir oluşununun yöntemi ne düzeyde öteye taşıdığı da açıkça görülmektedir.

Bir sonraki toplamlı anlatım ve onun ikili çarpımlarını ele alalım.

$$K_3(x, y; \mathbf{v}) \equiv \mathbf{v}^2 x^2 y^2, \quad \phi_3(x) = \mathbf{v} x^2, \quad \phi_3(y) = \mathbf{v} y^2. \quad (5.88)$$

Bu anlatım için de andırımlı adımların uygulayışını gerçekleştireceğiz. Yine, başlangıç destek işlevini  $1_f$  ile eşdeğer biçimde seçelim. Bu durumda,

$$\sigma_3 = \rho_3 = \frac{\mathbf{v}}{3}, \quad \alpha_3^{(1)} = \frac{\mathbf{v}^2}{9}, \quad \alpha_3^{(2)} = \frac{4\mathbf{v}^2}{45}, \quad \beta_3 = \gamma_3 = \frac{2\sqrt{5}}{45} \mathbf{v}^2, \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} \|\phi_3 - \sigma_3 u_3\|_x &= \|\phi_3 - \rho_3 v_3\|_y = \frac{2\sqrt{5}}{15} \mathbf{v}, \\ u_4(x) &= \frac{\sqrt{5}}{2} (3x^2 - 1), \quad v_4(y) = \frac{\sqrt{5}}{2} (3y^2 - 1) \end{aligned} \quad (5.90)$$

yazılabilir. Bu durumda çekirdek işlevi,

$$\Sigma_{BPS}^{(3)} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{v}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} \mathbf{v} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{12} \mathbf{v} & \left( \frac{\mathbf{v}}{4} + \frac{\mathbf{v}^2}{9} \right) & \frac{2\sqrt{5}}{45} \mathbf{v}^2 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{45} \mathbf{v}^2 & \frac{4\mathbf{v}^2}{45} \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

biçiminde olacaktır. Yeni elde edilen destek yöneyleri ise

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3(x) &\equiv \left[ 1_f \quad \sqrt{3}(2x-1) \quad 1_f \quad \frac{\sqrt{5}}{2} (3x^2-1) \right]^T, \\ \mathbf{v}_3(y) &\equiv \left[ 1_f \quad \sqrt{3}(2y-1) \quad 1_f \quad \frac{\sqrt{5}}{2} (3y^2-1) \right]^T \end{aligned} \quad (5.92)$$

ile verilen doğrucul bağımlı duruma dönüşecektir. Daha önceki adımlardan da bilindiği gibi doğrucul bağımlılığı ortadan kaldırmak olanaklıdır. Bunu gerçekleştirdiğimizde

$$K_{BPS}^{(3)}(x, y; \mathbf{v}) = \mathbf{u}_{3,c}(x)^T \Sigma_{BPS}^{(3,c)} \mathbf{v}_{3,c}(y), \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{3,c}(x) &\equiv \left[ 1_f \quad \sqrt{3}(2x-1) \quad \frac{\sqrt{5}}{2} (3x^2-1) \right], \\ \mathbf{v}_{3,c}(y) &\equiv \left[ 1_f \quad \sqrt{3}(2y-1) \quad \frac{\sqrt{5}}{2} (3y^2-1) \right], \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\Sigma_{BPS}^{(3,c)} \equiv \begin{bmatrix} 1 + \frac{v}{4} + \frac{v^2}{9} & \frac{\sqrt{3}}{12}v & \frac{2\sqrt{5}}{45}v^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{12}v & \frac{v}{12} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{45}v^2 & 0 & \frac{4v^2}{45} \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

eşitliklerini yazmak olanaklı duruma gelecektir. Son eşitliklerdeki gösterimler açılımın tıkHz bir gösterilimi olarak da ele alınabilir.

PDÖÇYÇÜÇG ile çekirdek işlevi sağ yan bileşenler için işlemleri sürdürmek olanaklıdır. Yine her bir toplamcıl anlatım için başlangıç destek işlevlerinin eş seçimi yukarıda (5.95) ile verilen okuçlandırılmış çekirdek dizey elde edimine varacaktır.

Ancak, kuşkusuz değişik destek işlevleri ile ilerlemek de olanaklıdır. Ancak, bu durumda, gerek anlatımlarda gerek de uygulamalarda görüldüğü üzere, destek işlevlerinin doğrucul bağımlılığı söz konusu olabilmektedir.

### Örnek 2:

Şimdi de aşağıda (5.96) ile verilen bilimsel yazında da Legendre çokterimlilerinin ürettiği işlev olarak bilinen çekirdek işlevini ele alalım [48].

$$K(x, y; v) \equiv (1 - 2vxy + v^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} v^j P_j(y)x^j, \quad 0 < v < 1, \quad x, y \in [-1, 1]. \quad (5.96)$$

$[-1, 1]$  aralığında ÇYÇG yönteminin kısıtları altında başlangıç destek işlevleri özgürce istenildiği biçimde seçilebilmektedir. Aynı durum kuşkusuz ağırlık işlevleri için de geçerlidir. Bu kısıtlar altında yine kolaylık getirmesi açısından ağırlık işlevlerini  $W_1(x) = 1_f/2$  ve  $W_2(y) = 1_f/2$  olacak biçimde değişmez işlevler olarak seçelim. Andırımımlı olarak başlangıç destek işlevlerini de sıfırcı kereden çokterimliler türünden seçmek olanaklıdır. Bu seçimin iyi işleyeceği açıktır. Bir önceki uygulamayışta andırımımlı bir yol izlenişi buna örnek olarak verilebilir. Ancak, bu yol izlendiğinde her adım için destek işlevlerinin sıfırlanımından ötürü yeni destek işlevleri üretme olgusu karşımıza çıkacaktır. Bu durumu her adım için kıyısız birçok destek işlevi seçeneği ile karşı karşıya kalmak olarak da değerlendirmek olanaklıdır. Bu kıyısızlığı gidermek için daha yüksek kereden çokterimli destekler kullanma yoluna gitmek olanaklıdır. Böylece destek işlevleri

$$u_j(x) \equiv \sqrt{2j-1}x^{j-1}, \quad v_j(y) \equiv \sqrt{2j-1}P_j(y), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.97)$$

olarak seçilebilmektedir. Bu seçim bizi aşağıda (5.98) ile verilen PDÖÇYÇÜÇĞ açılımına götürecektir.

$$K(x, y; \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} u_j(x) v_j(y) \quad (5.98)$$

Bu yapıyı (5.96) ile verilen açılmadan elde etmek olanaklıdır. Başka bir deyişle, (5.96) açılımı doğal bir PDÖÇYÇÜÇĞ açılımıdır.

Andırımlı biçimde bir başka doğal PDÖÇYÇÜÇĞ açılımı da

$$K(x, y) \equiv \frac{1}{1 - \nu xy}, \quad 0 < \nu < 1, \quad x, y \in [-1, 1] \quad (5.99)$$

çekirdek işlevi için verilebilmektedir. Bu işlev (5.73) ile verilen işlevin değişik bir aralıkta incelenişinden ortaya çıkmaktadır. Bu aralık seçimi ile destek işlevleri

$$u_j(x) \equiv \sqrt{2j-1} x^{j-1}, \quad v_j(y) \equiv \sqrt{2j-1} y^{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.100)$$

olarak özelsizleştirilebilmektedir. Böylece  $1/(1 - \nu xy)$  işlevinin toplamdizi açılımı için doğal bir PDÖÇYÇÜÇĞ dir demek olanaklıdır.

$$K(x, y; \nu) = \frac{1}{1 - \nu xy} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} u_j(x) v_j(y), \quad x, y \in [-1, 1] \quad (5.101)$$

### Örnek 3:

Bu uygulamalara ek olarak aşağıdaki yine bilimcil yazında oldukça sık karşılaştığımız Laguerre çokterimlilerinin ürettiği bir diğer işlevi ele alabiliriz.

$$K(x, y; \nu) = \frac{e^{-\frac{\nu xy}{1 - \nu x}}}{1 - \nu x}, \quad 0 < \nu < 1, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \infty) \quad (5.102)$$

PDÖÇYÇÜÇĞ için bu kez ağırlık işlevlerini  $W_1(x) \equiv 1_f/2$  ve  $W_2(y) \equiv e^{-y}$ , ve, başlangıç destek işlevlerini de  $u_1(x) \equiv 1_f$  ve  $v_1(y) \equiv 1_f$  olarak seçmek olanaklıdır. Bu durumda destek işlevlerinin özelsizleştirimi için

$$u_j(x) \equiv \sqrt{2j-1} x^{j-1}, \quad v_j(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{(j-1)!}} L_{j-1}(y) \quad (5.103)$$

yazmak olanaklıdır. Böylece,

$$K(x, y; \nu) = \frac{e^{-\frac{\nu xy}{1 - \nu x}}}{1 - \nu x} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2j-1)(j-1)!}} u_j(x) v_j(y), \quad 0 < \nu < 1, \quad y \in [0, \infty) \quad (5.104)$$

ile çekirdek işlevinin PDÖÇYÇÜÇĞ açılımından söz edebiliriz. Bu bölümü sonlandırmadan önce bir olguya vurgu yapmakta yarar vardır. Aşağıda genel sonsuz açılımı verilen ikideğişkenli çekirdek işlevlerini ele alalım.

$$K(x, y; \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \varphi_j(y) \quad (5.105)$$

1'den daha yüksek olan tüm artı  $j$  değerleri için  $\phi_j(x)$  ve  $\varphi_j(y)$  işlevlerinin sırasıyla  $\phi_{j-1}(x)$  ve  $\varphi_{j-1}(y)$  işlevlerine dikgen olduğu tüm durumlarda yukarıda verilen (5.105) işlev açılımı bir doğal PDÖÇYÇÜÇĞ açılımına dönüşmektedir. Böyle durumlarda açılımın çekirdek dizeyi ilgili  $\phi$  ve  $\varphi$  işlevlerinin boy çarpımlarından oluşan köşegen dizey durumuna dönüşmektedir.





## 6. SONUÇLAR

Bu çalışmada yüksek boyutlu biçelendirilim yardımıyla doğrucul tümlev ayrıştırımı üzerinde odaklanılmıştır. Yöntem yakın zamanda geliştirilen Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Gösterilimi (ÇYÇG) kullanılarak türetilmiştir. Bu gösterilim Yüksek Boyutlu Biçe Gösterilim (YBBG)'nin geliştirilmiş biçimi olarak ele alınabilmektedir. Ayrıca yine bu yöntem çekirdeği üçköşegencil çarpımcıl dizey ayrıştırımı türünden bir ayrıştırım yöntemi ortaya koymaktadır. Böylece, geliştirilen yeni yöntem Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegencil Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÜÇG) adını almaktadır. Uygun kesmeler ile gösterilim üçköşegencil yaklaştırım yöntemi olarak da ele alınabilmektedir. Üçköşegencil yapı yineleyiş ile elde edilen bir yapıda olduğundan, gösterilim izgecil veya tekil değer ayrıştırımı ile karşılaştırıldığında, hesaplama karmaşıklığını oldukça düşük tutan bir özelliğe sahiptir. Üçköşegencilleştirimi belli bir adımda keserek kesmeleri yaklaştırım olarak da kullanmak olanaklıdır.

Destek işlevleri gösterilimin belki de en seçkin bileşenleri olarak düşünebilmektedir. Bu işlevler kesme niteliğini etkileyen en önemli bileşenlerdir. Seçkisiz tanımlanan her destek işlevi için yöntemin iyi işleyeceğinin güvencesi kuşkusuz yoktur. Bazı seçimler gösterilimde kalan terim dışında sıfır değerler üreten sonuçlar verebilir. Bu da bir sonraki yineleyişte çıkmaza sokan olgular üretebilmektedir. Ancak yine de var olan kısıtlar altında yeni destek işlevlerinin türetilmesiyle yineleyişe devam etmek olanaklıdır. Bu sıkıntılar genellikle sıfırüzayı boş olmayan işleçler için ortaya çıkmaktadır.

Ağırlık işleci kullanımı çözümleyişi kolaylaştıran bir olgudur. Özellikle işleçler çarpımcıl bakışık seçildiğinde oldukça etkin olup sıfırüzayı bileşenlerinin sıfırlanışı ile destek işlevleri üretiminde önem kazanmaktadır. Ağırlık işleci kullanımında üssünü alma yoluna da gitmek olanaklıdır. Bu durum değişik özdeğerlerin çok olduğu durumlar için gösterilimde belirgin bir yansıma yapacaktır.

Bu çalışmada seçilen çekirdeğin tekilliğinin olmadığı yapıda ilerleyiş gerçekleştirilmiştir. Tekillik durumunda geliştirilen yöntemin tekrar gözden geçirilmesi ve düzenlenmesi gerekmektedir. Çalışmalar sırasında ortaya konan her bir sorun için karşılaşılan kısıtlar özgün çalışmaların doğuşuna ışık tutarak savda yeni yöntemlerin geliştirilmesine önemli katkılar sağlamışlardır. Bu bağlamda geliştirilen bir diğer gösterilim yöntemi de Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Okuçlu Çekirdek Gösterilimi (ÇYÇÖÇG)'dir. Bu gösterilimde tekdeğişkenli işlevlerin çarpımlarının sonlu toplamı ile özelsiz hali verilen ikideğişkenli çekirdek işlevlerin ayrıştırımı incelenmiştir. Aslında, bu gösterilim daha önce de belirtilmiş olduğu gibi ÇYÇÜÇG geliştirildiği sırada belirleyiş karmaşıklığı olan işlevler üzerinde çalışılırken geliştirilen bir yöntemdir. Aslında bu gösterilim de tıpkı öteki toplamcıl gösterilimler gibi böl ve yönet işleyişiyle ilerleyiş temel almaktadır. Toplamcıl yapıda verilen işlevleri ayrı ayrı anlatımlar olarak ele alıp her birine ÇYÇÜÇG uygulanmasının ardından uygun düzenleyişler yardımıyla asıl işlev yine örtük bir biçimde biraraya getirildiğinde çekirdekteki üçkeşegenci dizey bu kez kendini okuçlu başka bir dizey olarak göstermektedir. Ancak, burada gözden kaçırılmaması gereken çok önemli bir olgu yer almaktadır. Okuçlu örtük dizey ayrıştırımında sol ve sağ yanda elde edilen destek yöneyleri için üçköşegencil ayrıştırımdaki gibi doğrucul bağımsızlıktan söz etmek ilk adımda olanaklı değildir. Bununla birlikte, kuşkusuz uygun dönüşümler ve dikgenleştirim yöntemleriyle destek yöneylerini dikgen hale getirmek olanaklıdır. Ancak, böyle bir durumda da çekirdek dizeyinin de değişeceği açıktır.

Doğrucul bağımsızlık ve dikgenlik sorununda ilerleyiş gösterilime yeni bir bakış açısı kazandırmaktadır. İkili çarpım toplamdizileri türünden seçilen çekirdek işlevleri için her bir anlatıma yine ÇYÇÜÇG uygulayışı sürdürülmektedir. Ancak, bu kez destek işlevlerinin seçiminin isteğe bağlı oluşundan yararlanılmaktadır. toplamdizide yer alan ek anlatım için seçilecek başlangıç destek işlevlerinin bir önceki anlatımda yer alan destek işlevlerinden seçilmesi yönetime değişik bir boyut kazandırmaktadır. Bu biçimde tasarlanan çekirdek ayrıştırımı, aynı seçim altındaki destek işlevlerine karşılık gelen çekirdek dizey bileşenlerinin biraraya gelmesinde oluşan dördül öbek yapılarında özünü gösterecektir. Ayrıca, çekirdek dizey üçköşegencil değil bu kez okuçlu yapıda olacaktır. Böylece elde edilen yeni gösterilim Paylaşımlı Dördül



Öbek Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımlar Üçköşegenlik Çekirdek Gösterilimi (PDÖÇYÇÜÇG) olarak adlandırılmaktadır.

Tüm bu çalışmaların yanı sıra karşılaşılan bir başka coşku verici olgu ise bilimcil yazında da oldukça sık kullanılan üreteç işlemleri ile PDÖÇYÇÜÇG açılımının kesişimidir. Savda destek ve ağırlık işlevlerinin seçiminin gösterilimin niteğine katkısından bir çok bölümde söz edilmektedir. Bu seçimlerin bir başka getirisi de sayısal uygulamalar sırasında gözlenmiştir. Uygun ağırlık ve destek işlevi seçimiyle Legendre, Laguerre ve daha bir çok çokterimlinin ürettiği ikideğişkenli çekirdek işlevi açılımları doğal bir PDÖÇYÇÜÇG açılımıdır.





## KAYNAKLAR

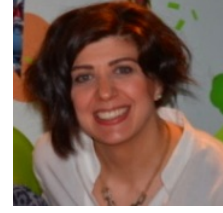
- [1] **Kolmogorov, A.N.** (1957). On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition, *Doklady Akademii Nauk*, 114, 5, Russian Academy of Sciences, s.953–956.
- [2] **Sobol, I.M.** (1993). Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models, *MMCE*, 1, s.407–414.
- [3] **Alış, Ö., F. ve Rabitz, H.** (1999). General foundations of high dimensional model representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, 25, s.197–233.
- [4] **Demiralp, M.** (2003). High dimensional model representation and its application varieties, *The Fourth International Conference on Tools for Mathematical Modelling, St. Petersburg, Russia*, s.23–28.
- [5] **Kurşunlu, A. ve Demiralp, M.** (2003). Additive and Factorized High Dimensional Model Representation Applications to the Multivariate Diffusion Equation under Vanishing Derivative Boundary Conditions, *Mathematical Research*, 9, 315–327.
- [6] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2004). A Factorized High Dimensional Model Representation on the Partitioned Random Discrete Data, *Appl. Num. Anal. Comp. Math.*, 1, 231–241.
- [7] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2005). A Factorized High Dimensional Model Representation on the Nodes of a Finite Hyperprismatic Regular Grid, *Applied Mathematics and Computation*, 164, 865–883.
- [8] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2011). Fluctuation free multivariate integration based logarithmic HDMR in multivariate function representation, *Journal of Mathematical Chemistry*, 49(4), 894–909.
- [9] **Tuna, S., Tunga, B., Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2009). Fluctuation free matrix representation based univariate integration in hybrid high dimensional model representation (HHDMR) over plain and factorized HDMR, *WSEAS Trans. Math*, 6(8), 230–255.
- [10] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2009). A novel hybrid high-dimensional model representation (HDMR) based on the combination of plain and logarithmic high-dimensional model representations, 101–111.
- [11] **Tunga, M.A. ve Demiralp, M.** (2012). Multivariate data modelling through Piecewise generalized HDMR method, *Journal of Mathematical Chemistry*, 50(7), 1711–1726.

- [12] **Demiralp, M.**, New generation HDMR based multiway array decomposers: enhanced multivariate products representation (EMPR).
- [13] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2010). An iterative scheme for enhanced multivariate product representation method, *Proceedings for the 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS)*, s.247–255.
- [14] **Okan, A., Baykara, N. ve Demiralp, M.** (2010). Weight optimization in enhanced multivariate product representation (EMPR) method, *ICNAAM 2010: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2010, 1281(1)*, AIP Publishing, s.1935–1938.
- [15] **Tunga, M.** (2013). Multivariate data modelling through EMPR in orthogonal geometry, *13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2013)*, s.1342–1349.
- [16] **Özdemir, G.** (2014). Sayılabilir Sonsuz Sıralı Dizelerde Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Okuçlandırılmış Dizeler Gösterimleri, *İstanbul Teknik Üniversitesi, Bilişim Enstitüsü, YL Tezi*.
- [17] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2017). Recursive bivariate enhanced multivariate products representation to tridiagonalize arrowheaded matrices: Tridiagonal matrix enhanced multivariate products representation (TMEMPR) with weight considerations, *AIP Conference Proceedings, 1798*, s.020116.
- [18] **Demiralp, E.** (2014). Weighted Tridiagonal matrix enhanced multivariate products representation of finite interval data, *Proceedings of the 14th International Conference on computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2014, Costa Ballena, Rota, Spain, 2*, s.441–445.
- [19] **Özay, E.K. ve Demiralp, M.** (2017). Weighted tridiagonal matrix enhanced multivariate products representation (WTMEMPR) for decomposition of multiway arrays: applications on certain chemical system data sets, *Journal of Mathematical Chemistry, 55(2)*, 455–476.
- [20] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2014). Tridiagonal kernel enhanced multivariate products representation (TKEMPR) for univariate integral operator kernels, *Mathematics and Computers in Sciences and in Industry (MCSI), 2014 International Conference on*, IEEE, s.195–200.
- [21] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2015). Tridiagonal kernel enhanced multivariate products representation (TKEMPR) for outer product sums: Arrow-heading EMPR for kernel (AEMPRK), *International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM-2014), 1648(1)*, AIP Publishing, s.160002.
- [22] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2016). Numerical implementations for tridiagonal kernel enhanced multivariate products representation (TKEMPR) method: Bivariate case, *International Journal of Signal Processing, 1(3)*, 103–107.

- [23] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2017). Tridiagonal kernel enhanced multivariance products representation (TKEMPR) for univariate linear operators: Continuous singular value decomposition, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE), Cadiz, Spain, 5*, s.1584–1595.
- [24] **Okan, A. ve Demiralp, M.** (2017). A self-consistent high dimensional modelling based decomposition approach for univariate linear integral operators: Tridiagonal kernel enhanced multivariance products representation (TKEMPR), *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 326, 99–115.
- [25] **Demiralp, M., Okan, A. ve Gündoğar, Z.** (2018). Tridiagonal folded kernel enhanced multivariance products representation (TFKEMPR), s.020023.
- [26] **Özdemir, G. ve Demiralp, M.** (2015). Arrowheaded enhanced multivariance products representation for matrices (AEMPRM): Specifically focusing on infinite matrices and converting arrowheadedness to tridiagonality, *International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2015 (ICCMSE 2015), 1702(1)*, AIP Publishing, s.170004.
- [27] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2016). Certain illustrative numerical implementations of tridiagonal folmat enhanced multivariance products representation (TFEMPR) for 3-way array, *International Journal of Signal Processing, 1*, 108–113.
- [28] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2017). Digital image sequence processing via tridiagonal folmat enhanced multivariance products representation (TFEMPR), *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE 2017, 2*, s.990–1001.
- [29] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2017). Tridiagonal folmat enhanced multivariance products representation (TFEMPR) under subspace supported rational transformations (SsSRT), *AIP Conference Proceedings, 1798, 1*, AIP Publishing, s.020064.
- [30] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2018). Block tridiagonal matrix enhanced multivariance products representation (BTMEMPR), *Journal of Mathematical Chemistry, 56(3)*, 747–769.
- [31] **Gündoğar, Z. ve Demiralp, M.** (2015). Formulation of tridiagonal folmat enhanced multivariance products representation (TFEMPR), *International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2015 (ICCMSE 2015), 1702(1)*, AIP Publishing, s.170005.
- [32] **Gündoğar, Z.** (2018). Katlıdizeylerin Çokdeğişkenliliği Yükseltmiş Çarpımlar Üçköşegencil Gösterilim Yoluyla Ayrıştırımı: Kavramcıl Taban ve Uygulayışlar, *İstanbul Teknik Üniversitesi, Bilişim Enstitüsü, Doktora Tezi*.

- [33] **Gündoğar, Z.** (2018). Tridiagonal vector enhanced multivariate products representation (TVEMPR), *Mathematics in Engineering, Science & Aerospace (MESA)*, 9(2).
- [34] **Jörgens, K.** (1982). *Linear Integral Operators*, Pitman Advanced Pub. Program.
- [35] **Williams, A. ve Williams, G.** (2010). *Linear Algebra with Applications, Alternate Edition*, Jones & Bartlett Learning.
- [36] **Franco, D.** (2013). *Factor Analysis and Principal Component Analysis*, Franco Angeli.
- [37] **Pedersen, M.** (1999). *Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering*, Taylor & Francis.
- [38] **Masujima, M.** (2009). *Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics, 2nd Edition*, Wiley VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, Germany.
- [39] **Burden, R.L. ve Faires, J.D.** (2005). *Numerical Analysis*, Thomson Brookes/Cole, Boston, 8 sürüm.
- [40] **Demiralp, M.** (2011). Decomposing functions, arrays, function arrays in lecture talk based on the symposium 48s preface, *AIP Proceedings for the 9th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2011)*, 1389, s.1138–1138.
- [41] **Epperson, J.** (2013). *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*, Wiley.
- [42] **Gürvit, E., Okan, A. ve Baykara, N.** (2018). Taylor series remainder's kernel evaluation in tridiagonal enhanced multivariate products representation (TKEMPR) perspective, *AIP Conference Proceedings, 2046*, 1, AIP Publishing, s.020038.
- [43] **Gürvit, E., Okan, A. ve Baykara, N.** (2018). Univariate function evaluation via contour integration in tridiagonal enhanced multivariate products representation (TKEMPR) perspective: Focusing on high oscillations, *AIP Conference Proceedings, 2046*, 1, AIP Publishing, s.020008.
- [44] **Tuna, S. ve Demiralp, M.** (2015). Bivariate enhanced multivariate products representation (EMPR) at zero volume limit via geometric separation, *International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2015 (ICCMSE 2015)*, 1702(1), AIP Publishing, s.170009.
- [45] **Okan, A.** (2018). A New decomposition approach for binary product series via high dimensional modeling, *Journall MESA*, 9(2), 165–176.
- [46] **Lancaster, P. ve Tismenetsky, M.** (1985). *The Theory of Matrices, Second Edition: With Applications (Computer Science and Scientific Computing) 2nd Edition*, Academic Press; 2 edition.
- [47] **Hammerlin, G. ve Hoffmann, K.H.** (1991). *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag New York Inc., New York.
- [48] **Andrews, L.C. ve Andrews, L.C.** (1992). *Special functions of mathematics for engineers*, McGraw-Hill New York.

## ÖZGEÇMİŞ



**Ad Soyad:** Ayla OKAN

**Doğum Tarihi ve Yeri:** 20/10/1983 Bulgaristan

**E-Posta:** ayla.okan.ozturk@gmail.com

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2005, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Çift Anadal Lisans:** 2007, Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü
- **Y. Lisans:** 2012, İstanbul Teknik Üniversitesi, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı.

### MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER:

- 2007-2009 yılları arasında Akbank T.A.Ş. bünyesinde çalıştı.
- 2012 yılında İ.T.Ü. Bilişim Enstitüsü Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı yüksek lisansını tamamladı.
- 2012-2018 yılları arasında İ.T.Ü. Bilişim Enstitüsü'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı.

### DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Okan, A., Demiralp, M.** 2015. Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR) for Univariate Integral Operator Kernels, *Proceedings - 2014 International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry*, 195-200.
- **Okan, A., Demiralp, M.** 2015. Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR) for Outer Product Sums: Arrowheading EMPR for Kernel (AEMPRK), *AIP Conference Proceedings*, 1648, 160002.
- **Okan, A., Demiralp, M.** 2015. Arrowheading Enhanced Multivariate Products Representation for a Kernel (AEMPRK) in a Bivariate Taylor Series Expansion. *AIP Conference Proceedings*, 1702, 170007.

- **Okan, A.**, Demiralp, M. 2017. Recursive Bivariate Enhanced Multivariate Products Representation to Tridiagonalize Arrowheaded Matrices: Tridiagonal Matrix Enhanced Multivariate Products Representation (TMEMPR) with Weight Considerations. *AIP Conference Proceedings*, 1798, 020116.
- **Okan, A.**, Demiralp, M. 2017. A Self-Consistent High Dimensional Modelling Based Decomposition Approach for Univariate Linear Integral Operators: Tridiagonal Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR), *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 326,
- Gürvit, E., **Okan, A.**, Baykara, N. A., 2018. Taylor Series Remainder's Kernel Evaluation in Tridiagonal Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR) Perspective, *AIP Conference Proceedings*, 2046, 020038.
- Gürvit, E., **Okan, A.**, Baykara, N. A., 2018. Univariate Function Evaluation via Contour Integration in Tridiagonal Enhanced Multivariate Products Representation (TKEMPR) Perspective: Focusing on High Oscillations, *AIP Conference Proceedings*, 2046, 020008.
- Demiralp, M., **Okan, A.**, Gündoğar, Z., 2018. Tridiagonal Folded Kernel Enhanced Multivariate Products Representation (TFKEMPR) *AIP Conference Proceedings*, 2046, 020023.