

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**AYRIŞIK KONUMLARDA ARTAN TÜREVLER AÇILIMI
(AKATA), TAYLOR TOPLAMDIZI
AÇILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRIM**

DOKTORA TEZİ

Derya BODUR

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

OCAK 2020

**AYRIŞIK KONUMLARDA ARTAN TÜREVLER AÇILIMI
(AKATA), TAYLOR TOPLAMDIZI
AÇILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRIM**

DOKTORA TEZİ

**Derya BODUR
(702132004)**

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

OCAK 2020

İTÜ, Bilişim Enstitüsü'nün 702132004 numaralı Doktora Öğrencisi Derya BODUR, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm koşulları yerine getirdikten sonra düzenlediği "AYRIŞIK KONUMLARDA ARTAN TÜREVLER AÇILIMI (AKATA), TAYLOR TOPLAMDIZI AÇILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRIM" başlıklı savını aşağıdaki onayimleri olan altkurul önünde başarı ile sunmuştur.

Sav Danışmanı : **Prof. Dr. Metin DEMİRALP**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Metin DEMİRALP**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Adem TEKİN
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Burcu TUNGA
İstanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Özlem YILMAZ
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Berna KIRAZ
Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi

Teslim Tarihi : **16 Aralık 2019**

Savunma Tarihi : **16 Ocak 2020**





Aileme,



ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca beni her zaman destekleyen, cesaretlendiren, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan ve görüşleri ile bana yol gösteren çok değerli hocam Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Doktora ilerleme sürecinde değerli görüşleri ile bana ve savımın ilerleyişine katkıda bulunan sav izleme kurulundaki değerli hocalarım Doç. Dr. Burcu TUNGA ve Dr. Öğr. Üyesi Özlem YILMAZ'a teşekkürlerimi sunarım. Birlikte yol almaktan büyük mutluluk duyduğum, her zaman yanımda ve bana destek olan, güç veren çok sevgili yol arkadaşlarım Dr. Öğr. Üyesi Zeynep GÜNDOĞAR ve Dr. Ayla OKAN'a teşekkür ve sevgilerimi sunarım. Değerli hocamın kurduğu ve üyesi olduğum İTÜ Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu üyelerinden başta değerli hocam Prof. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA'ya ve sevgili arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım. Son olarak hayatımın her anında yanımda olan en büyük şanslarım annem Hatice BODUR, babam Osman BODUR ve canım kardeşim Uğurcan BODUR'a sonsuz teşekkür ve sevgilerimi sunarım. Bu çalışma, ITUVF20180901P11 proje numarası ile İstanbul Teknik Üniversitesi (İTÜ) Vodafone Future Lab tarafından kısmen desteklenmiştir.

Ocak 2020

Derya BODUR
(Araştırma Görevlisi)



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ.....	1
2. ÇALIŞMANIN KURAMCIL VE UZBİLİMCİL ALTYAPISI.....	5
2.1 Türevin Tümlevi Özdeşliği.....	5
2.2 Ayırışık Konumlarda Artan Türevler Açılımı (AKATA).....	5
2.3 Tümlev İşleçleri.....	6
2.4 Taban Çokterimlileri.....	7
3. İKİ KONUMLU AYRIŞIK KONUMLARDA ARTAN TÜREVLER AÇILIMI (AKATA)	9
3.1 Çokterimli Katsayılarında Özyineleyiş	11
3.2 Iraksak Toplamdizili Üreteç İşlevi Belirleyişi: $G(z, u, v)$	20
3.2.1 Sanal z değerleri için çözümleyiş	21
3.2.2 Özelsiz z değerleri için çözümleyiş	25
3.2.3 Tümlevlerin belirlenişi	26
3.2.4 İki konumlu AKATA'nın geçerliliği	27
4. UCAYCIL TEKİLLİKLERİN AKATA YAKINSAKLIĞINA ETKİSİ	33
4.1 Ucaycıl Tekillikli İşlevler	33
4.2 Büyültke Üzerinden Yakınsayış İnceleyişleri.....	36
4.3 Sayıcıl Uygulayışlar	39
5. KARMAŞIK DÜZLEMDE AKATA YAKINSAKLIK İNCELEYİŞLERİ... 45	
5.1 AKATA Tümlev Katsayıları Tanımlayışları	45
5.2 AKATA Tümlev Katsayılarının Saptırım Açılımları ve Kıyılandırmalar	46
5.3 Yuvalandırımı Konum Tekerleri ve AKATA Tümlev Katsayılarının Bütüneyaygın Kıyılandırmaları.....	53
5.4 Erek İşlevinin Türevlerinin Kıyılandırımı	55
5.5 AKATA'nın Yakınsayışı	56
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ	66

KISALTMALAR

AKATA : Ayrışık Konumlarda Artan Türevler Açılımı
SNADE : Separate Node Ascending Derivatives Expansion





ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1: $1/(x+15)$ için AKATA ve erek işlev değerleri	41
Çizelge 4.2: $1/(x+7)$ için AKATA ve erek işlev değerleri	42
Çizelge 4.3: $1/(x-1)$ için AKATA ve erek işlev değerleri	42
Çizelge 4.4: $1/(x+2)$ için AKATA ve erek işlev değerleri	42
Çizelge 4.5: $1/(x-2)$ için AKATA ve erek işlev değerleri	42
Çizelge 4.6: $1/(x-5)$ için AKATA ve erek işlev değerleri	42
Çizelge 4.7: $1/(x+15)$ için AKATA ve Taylor yöntemi bağıl yanılığ değerleri	44
Çizelge 4.8: $1/(x+7)$ için AKATA ve Taylor yöntemi bağıl yanılığ değerleri	44
Çizelge 4.9: $1/(x-1)$ için AKATA ve Taylor yöntemi bağıl yanılığ değerleri	44



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.1 : $x_p = -15, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 10$	39
Şekil 4.2 : $x_p = 1, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 10$	39
Şekil 4.3 : $x_p = -15, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 10$	40
Şekil 4.4 : $x_p = -2, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 5$	40
Şekil 4.5 : $x_p = 5, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 5$	41
Şekil 4.6 : $x_p = -2, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 5$	41
Şekil 4.7 : $x_p = 1, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 10$	43



AYRISIK KONUMLARDA ARTAN TÜREVLER AÇILIMI (AKATA), TAYLOR TOPLAMDIZİ AÇILIMLARI İLE KARŞILAŞTIRIM

ÖZET

Bilimcil yazında, açık yapısı verilen bir işlevi yaklaştırmak için kullanılan birçok yöntem bulunmaktadır. Bu yaklaşımların bir yolu sonlu çokterimliler şeklinde yazılamayan işlevleri, sonsuz bileşenli çokterimliler şeklinde yazıp kesmelerle yanılığ değeri düşük toplam diziler elde etmektir. En çok kullanılan yöntemler Taylor toplam dizileri veya dikgen çokterimlilerin doğrucul birleşimlerinden oluşan sonsuz toplam dizilerden kesmeler ile elde edilen yaklaştırım yöntemleridir. Taylor toplam dizileri işlevleri artan türev değerlerini içeren bileşenleri yardımıyla göstermektedir. En yaygın olarak kullanılanlar tek değişkenli işlevler üzerinde olsa bile çokdeğişkenli işlevler için de oluşturulmuş yapılar bulunmaktadır. Taylor toplam dizisi açılımında bileşenler oluşturulurken her bir türev değeri tek bir açılım konumunda belirlenmektedir. Savda yer alan “Ayrışık Konumlarda Artan Türevler Açılımı (AKATA)” yöntemi ise Taylor toplam dizisi açılımının özelsizleştirimi olarak düşünülmüş ve gösterilimde kesmeler yaparak tek değişkenli işlevlere yaklaştırım yöntemi olarak ortaya atılmıştır. AKATA “türevin tümlevi özdeşliğine” dayanan bir yöntemdir ve özdeşliği değişik aralıklarda ve yineli bir biçimde kullanarak oluşturulmuştur. Bu aralıkların bir ucu birbirinden değişik değeri olan düğüm konumları iken diğer ucu bağımsız değişken olarak verilmektedir. Her bir türev değeri, değişik düğüm konumu değerlerinde belirlenmekte ve taban çokterimlileri bu değerlere bakarak belirlenmektedir. Dolayısıyla tüm düğüm konumlarının aynı alındığı özel AKATA durumunda AKATA ve Taylor toplam dizilerinin eşleştiği söylenebilir. Savda iki düğüm konumunun devirli olarak kullanıldığı özel AKATA durumu ele alınmış ve bununla ilgili bağıntılandırmalar elde edilmiştir. Yöntem Taylor toplam dizileri ile yakından ilişkili olduğu için uygulama yönünde ucaycıl tekilliğe sahip birtakım işlevlerle çalışılmış ve hem yöntemin nasıl çalıştığı gösterilmiş hem de Taylor toplam dizileri ile AKATA sonuçları karşılaştırılmıştır. Bu bulgular çeşitli çizim ve çizelgeler yardımıyla desteklenmiştir. Tek değişkenli işlevler salt gerçel değerler için geçerli olmak zorunda olmadığından gerçellikten karmaşıklığa geçiş konusu da ele alınmıştır. Bu yapılırken “Saptırım Açılımları” yönteminden yararlanılmıştır. Yöntem bir yaklaştırım yöntemi olduğundan yakınsayış bölgesi saptayışı önem kazanmaktadır. Bu yapılırken yine AKATA ve Taylor toplam dizilerinin yakınsaklık bölgeleri karşılaştırılmıştır. AKATA düğüm konumlarının birden çok oluşu durumunda yakınsaklık bölgesi değişik yapılar olarak ortaya çıkacaktır. Savda tüm bu belirtilen olgular ve bulgular eşliğinde düzenleyiş söz konusu olmaktadır.



SEPARATE NODE ASCENDING DERIVATIVES EXPANSION (SNADE), COMPARISON WITH TAYLOR SERIES EXPANSION

SUMMARY

Scientific literature involves many methods for the approximation of a given univariate or multivariate function. One group of these methods have been developed to construct infinite series to represent certain given functions in such a way that the finitely many additive components including truncations of the produced infinite series can be used as approximations to the target function. Truncations are expected to represent the target function in a quality increasing as the truncation's component population grows. If this happens then one can mention the convergence of the infinite series. Otherwise, the divergence may be encountered by depending on how quality changes. In many practical applications divergence can be cured by using rather nonlinear algorithms like Borel summation even though these algorithms is kept out of the scope of this thesis.

The abovementioned infinite series are constructed over the rather much simpler structured functions like certain orthogonal polynomials for the case of univariance or orthogonal multinomials for the case of multivariance with certain weight functions behaving same as or different than unit constant functions at least in the orthogonality domain of the independent variables. The set of basis function can be constructed in accordance with various different philosophies. As mentioned above orthogonality is one of the important issues and in many cases are somehow related to the interpolation even though more general and more robust interpolative methods are also in widely use.

We do not intend to attempt for making a complete classification of these simpler functions which can be called "basis functions". However we need to emphasize on one quite specific basis function set which is composed of monomials proportional to integer powers of independent variable(s). Taylor series or their very specific forms, Maclaurin series are such infinite series. They are not only for univariate functions and can be constructed for some multivariate functions under certain appropriate conditions, even though the convergence investigation is of course more easy for the case of univariance, as long as some very specific multivariate functions are not on the focus.

Taylor and therefore Maclaurin series represent a univariate function in ascending derivative values. These series expansions are based on the very well known "integral of derivative" identity. When obtaining components in these series, each derivative value is calculated at a single nodal point which is zero for Maclaurin series while their nonzero values correspond to Taylor series. Both type series' convergence can be better investigated on the complex plane of the independent variable and the singularities of the target function arise most important agents in the investigations. The singularity investigation stands as a quite comprehensive issue and is basically based on the

Cauchy contour integrals. Even this issue is not deeply recalled in this thesis, its certain important aspects are revisited when they are needed somewhere in this thesis.

In this thesis, we propose and focus on a new method, method we call “Separate Node Ascending Derivatives Expansion” which can also be called as an acronym SNADE. SNADE has been developed as a result of the studies realized by Metin Demiralp and his group members. SNADE is closely related to Taylor Series. It can be considered as if a new Taylor Series Expansion. The method is based on the “integral of derivative” identity like Taylor Series. To formulate the SNADE, this identity is used repetitiously but not on the same interval. One of the boundaries of these intervals are different nodal points while the other ones are located on the position represented by the independent variable. Each derivative value is evaluated at a different nodal value and basis polynomials are determined by these values. So it can be said that SNADE involves Taylor Series as a specific case where all nodes match.

Although SNADE has been declared as based on multi nodes this must not be taken as denumerable infinitely many nodal points. Uniqueness is not mandatory in the nodal points. Finitely or infinitely many of them may be equivalent and this may facilitate the method’s construction and practical utilization. For example, in our studies we focus on a specific case where the SNADE nodal sequence is composed of elements alternating between two nodal values and we obtain related formulae therein. Because the method is closely related to Taylor Series, in implementations it is studied with functions which have polar singularities and two actions have been realized: (1) it has been shown how the method works and the results of the Taylor Series and the SNADE have been compared. These findings were supported by various figures and tables. Even though the SNADE is considered for real valued univariate functions it is in fact defined in a more general way including the complex variables and complex planes. For this situation, it has been taken support from Perturbation Theory. Since the method is an approximation method, it is important to identify a region of convergence. While this was done, regions of convergence of the SNADE and Taylor Series were compared. If there are more than one nodal point in SNADE, this region will appear as different structures.

Thesis is organized as follows. Second section focuses on the main philosophy for the decomposition of the given univariate function via SNADE and theoretical and mathematical correlations related to the method are explained.

In the third section, firstly explicit expressions of basis polynomials in the two-node SNADE and recursion correlations between them are obtained. In the context of these correlations, convergence investigations of the method have been carried out. As a result of these investigations, the validity of the two-node SNADE has been proven. The functions discussed up to this stage of the thesis have been selected as analytical in all finite regions.

However, in the fourth section, the rational functions which have polar singularities are analyzed in detail. Numerical implementations have been realized by using theoretical findings obtained in the previous sections. In some of these implementations, the results of comparisons between Taylor series which are well-known in scientific literature and the SNADE have also been shown in this section.

In the fifth section, wider investigations were conducted regarding the convergence of the SNADE, including complex values. Therein, Borel summation type algorithms

have also been brought to the scene. Although we have declared that these types of divergence will be kept out of the scope of this thesis this is not a complete contradiction since we use the relevant theory's very limited aspects not comprehensive recall from it.

The sixth section finalizes the thesis with the concluding remarks. Therein, not only important findings but also some remarks have been given in itemized format.





1. GİRİŞ

Bilimcil araştırmaların birçoğunda işlevlerin verilen bir konumdaki sayıclı değerini bulmak ve buna ek olarak türlü uzbilimcil (ing: mathematical) işlemleri daha yalın gerçekleştirebilmek adına türlü yaklaştırım yöntemleri ele alınmış ve geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin oluşturuluşunda kullanılan yollardan biri de işlevi (ing: function) bir toplamdiziye ağıp istenilen işlemleri gerçekleştirmektir. Bu toplamdizi türlerinden biri olan Taylor toplamdizileri, işlevleri artan türev değerleri yardımıyla gösteren ve kullanımları bilimcil yazında çok bilinen bir yaklaşımdır [1–10]. En yaygın olarak kullanılanlar tek değişkenli işlevlerde olsa da, çok değişkenli işlevler için de tasarlanmış bağıntılar elde bulunmaktadır. Taylor toplamdizileri, türevin tümlevi üzerine kurulu bir özdeşliğin yineli bir biçimde ve ardışık kullanımıyla oluşturulur. Ancak, bunun geçerliliği için kalan anlatımın istenildiği düzeyde küçük kılınışının olanaklı oluşu gerekir. Taylor toplamdizileri, açılım odağındaki işlevin tüm türevlerinin tek bir konumdaki değerini sarmalar. Bu açılım adını ingiliz matematikçi Brook Taylor'dan almıştır. Eğer toplamdizi açılım konumu sıfır alınırsa, Taylor toplamdizi açılımının özel durumu olarak değerlendirilebilen Maclaurin toplamdizisi elde edilmiş olur. Bu özel toplamdizi adını iskoç matematikçi Colin Maclaurin'den almıştır.

Taylor toplamdizisi, Taylor çokterimlilerinin ereyi (ing: limit) olarak da görülebilir. Bu çokterimliler ve kalan anlatım tek değişkenli bir işlevin Taylor ayrıştırımını tanımlar. Çokdeğişkenlilik durumunda çokboyutlu bir Euclid uzayında iki konum arasında andıran bir ayrıştırım yapılabilir. Taylor toplamdizisinin yakınsaklığı çokterimli derecesi sonsuza gittikçe ve kalan tümlev anlatımı sıfıra yaklaştıkça sağlanmış olur. Her işlevin Taylor toplamdizisi yakınsamakla yükümlü değildir. Yakınsayış için süreklilik ve türevlenebilirliğin yanında işlevin çözümcül (ing: analytical) oluşu da gereklidir. Çözümcül, gerçel ya da karmaşık değerli bir $f(x)$ işlevinin a gerçel ya da

karmaşık bir sayı olmak üzere Taylor toplam dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \quad (1.1)$$

Taylor toplam dizilerinde, yukarıda görüldüğü gibi, tek bir açılım konumu vardır ve bütün türev belirleyişleri bu konumda gerçekleştirilir.

Taylor toplam dizileri tek bir açılım konumunda yapılabileceği gibi birden çok açılım konumu kullanmak da değerlendirilebilecek bir yapıdadır. Bunun için bilimci yazında ilk olarak “Two-point Taylor Series Expansions” [11] adlı bir yazı yayımlanmış ve bu yazıda Taylor toplam dizisi açılımı iki konum içerebilecek şekilde düşünülmüştür. Burada izlenen yolun yararı tek konumlu Taylor toplam dizisi açılımında $2n$ sayıda türev kullanarak elde edilen duyarlılığa iki konumlu Taylor toplam dizisi açılımında n sayıda türev kullanarak ulaşılmasıdır. Bu çizemin (ing: scheme) elde edilebilmesi için başlangıç olarak Hermite çokterimlilerinden yola çıkılmıştır. “Multi-node higher order expansions of a function” [12] adlı yazıda ise Taylor, Bernstein ve Lagrange çokterimlileri ile çalışılmış ve verilen konumlarda işlevin ve işlevin türev değerlerinin belirlenmesi ile oluşturulan çizimler elde edilmiştir. 2002 yılında “Two-point Taylor expansions of analytic functions” [13] adlı yazıda çözümcül işlevlerin Taylor toplam dizisi açılımları iki konumlu olarak gözönüne alınmıştır. Açılımdaki katsayılar ve kalan anlatım için Cauchy türü tümlevler verilmiş ve yakınsaklık bölgeleri gösterilmiştir. Bu açılımların tümlevlerin düzgün yanaşık açılımlarında nasıl kullanılacağı gösterilmiş ve ayrıca yöntem iki konumlu Laurent açılımı elde etmek için de kullanılmıştır. 2004 yılında ise bu yazı özelsizleştirilmiş ve “Multi-point Taylor expansions of analytic functions” [14] başlığı ile bilimci yazında yerini almıştır.

Yukarıda sözü edilen tümlevin türevi özdeşliğini, değişik konumlarla bağımsız değişkenle betimlenen konum arasında kullanarak ve bu kullanımı yineli biçimde de gerçekleştirerek çokkonumlu bir açılımın olanaklı olabileceği gösterilmiştir. Bu amaçla İngilizce olarak “Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE)” [15–24] olarak adlandırılıp, Türkçe’de “Ayrışık Konumlarda Artan Türevler Açılımı (AKATA)” başlığı altında sunulan bir yöntem ileri sürülmüş ve bir kesim bildiriler ve yazılarla budunlararası (ing: international) düzeyde duyurulmuştur.

AKATA sayılabilir sonsuzlukta düğüm konumu (ing: nodal point) içeren yeni bir özelsizleştirilmiş Taylor açılımı olarak düşünülebilir. Bu açılım, “türevin tümlevi özdeşliğinin” tek değişkenli işlevin değişik konumlarda açılımında kullanımı ile oluşturulmuştur. AKATA her dereceden türev için ayrışık olabilen konular kullanımına dayanır. Yöntem ilk olarak Metin Demiralp’in “Separate node ascending derivatives expansion (SNADE) for univariate functions: Conceptuality and formulation” [15] adlı bilimcil yazısında ortaya atılmış ve bu çalışmada yöntemin kuramcıl yönleri ile açılımla ilgili bağıntılandırmalar açıklanmıştır.

Bu çalışmanın ardından N. A. Baykara ve Metin Demiralp “Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) for Univariate Functions: Polynomial Recursions, Remainder Bounds and the Convergence” [16] adlı çalışmalarında açılımda görünen çokterimliler arasındaki özyineleyişleri ve kalan anlatım için kıyıları (ing: bounds) ele almışlardır. Bu özyineleyişler hem belirtik hem de örtük biçimde oluşturulmuştur. Ayrıca yöntemin yakınsaklığı da aynı çalışmada gösterilmiştir.

Budunlararası düzeyde duyurulan bir diğer çalışma ise N. A. Baykara ve Ercan Gürvit’in ortaklaşa gerçekleştirdiği “Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) for Univariate Functions: Univariate Numerical Integration” [17] adlı çalışmadır. Bu çalışma diğer iki çalışmada ele alınan kuramlar üzerine oturtulmuştur. AKATA yöntemi kullanılarak tek değişkenli bir işlevin tek değişkenli sayısal tümlevinin bulunmasına odaklanılmıştır. Bu amaçla AKATA kalan işlevinin tümlev gösterilimi birim aşkındördül (ing: hyperrectangle) çizeminde yeniden bağıntılandırılmıştır.

Bu dördümlü çalışmaların sonucusu Ercan Gürvit ve N. A. Baykara yazarlığı altında düzenlenen “Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) for Univariate Functions: Node Optimization via Partial Fluctuation Suppression” [18] adlı çalışmadır. Bu çalışmada ise kalan anlatımın yoksayıldığı AKATA çokterimlisi ile erek (hedef) işlevin arasındaki Öklid uzaklığını betimleyen düğüm değerlerinin belirlenmesine odaklanılmıştır.

Savın 2. bölümünde AKATA ile ilgili kuramcıl ve uzbilimcil bağıntılar anlatılmıştır. 3. bölümde ise ilk olarak taban çokterimlilerinin iki konumlu durumda belirtik anlatımları ve aralarındaki özyineleyiş bağıntıları elde edilmiştir. Elde edilen bu

bağıntılar bağlamında yöntemin yakınsayış inceleyişleri gerçekleştirilmiştir. Bu inceleyişler sonucunda da iki konumlu AKATA açılımının geçerlilik kanıtlayışı gerçekleştirilmiştir. Savın bu evresine dek ele alınan işlevler tüm sonlu bölgelerde çözümcül olarak seçilmiştir. Ancak, savın 4. bölümünde, bunların ötesinde, özel olarak ucaycıl tekillikleri (ing: polar singularities) olan, orancıl işlevler ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Bir önceki evrede elde edilen kuramcıl bulgulardan da yararlanılarak sayıcıl uygulamayışlar gerçekleştirilmiştir. Bu uygulamayışların bir kesiminde bilimcil yazında (ing: scientific literature) çok bilinen Taylor toplamdizileri ile AKATA yöntemi arasında karşılaştırm sonuçları da gösterilmiştir. 5. bölümde ise açılımın yakınsaklığı ile ilgili, karmaşık değerler de içerilecek biçimde, daha geniş araştırmalara yönelinmiştir.



2. ÇALIŞMANIN KURAMCIL VE UZBİLİMCİL ALTYAPISI

2.1 Türevin Tümlüvi Özdeşliği

Tek değişkenli işlevleri türlü yaklaşımlar yöntemleri ile göstermek olanaklıdır. Bu yöntemler arasında Taylor toplamdizileri sıkça kullanılan araçlardan biridir. Taylor toplamdizileri, bileşenleri işlevin türev değerlerinin tek bir konumda belirlenmesi ile elde edilen sonsuz toplamdizilerdir. Taylor toplamdizilerinin en temel özelliği “türevin tümlüvi özdeşliğine” dayanır. $x \in [a, b]$ bölgesinde çözümlü olduğu düşünülen tek bağımsız değişkene bağımlı bir $f(x)$ işlevi için

$$f(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^x d\xi f'(\xi), \quad x, x_1 \in [a, b] \quad (2.1)$$

eşitliği yazılabilir. Bu denklemde görülen $f(x)$ ve $f'(\xi)$ sırasıyla $f'(\xi)$ ve $f''(\xi_1)$ ile yer değiştirildiğinde bu durum bizi

$$f'(\xi) = f'(x_2) + \int_{x_2}^{\xi} d\xi_1 f''(\xi_1) \quad (2.2)$$

eşitliğine götürür. Taylor toplamdizisi bunun yineli bir biçimde türevlerin değiştirilerek kullanımı ile gündeme getirilen bir yapıdır. Ayrışık Konumlarda Artan Türevler Açılımı da bu yapıyı kullanarak ortaya çıkmıştır [15–24].

2.2 Ayrışık Konumlarda Artan Türevler Açılımı (AKATA)

(2.1) ve (2.2) denklemleri birleştirildiğinde açık yapılı olan yani işlevcil yapıları belli olan anlatımlar ve ardından da kalan anlatımın gündemde olduğu

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_2)(x - x_1) + \int_{x_1}^x d\xi_1 \int_{x_2}^{\xi_1} d\xi_2 f''(\xi_2) \quad (2.3)$$

yapısında elde edilir. Taylor toplamdizilerinde tek bir açılım konumu vardır ve belirleyişler bu açılım konumunda yapılır. Burada ise bu ana dek işlevin x_1 konumundaki ve türevinin ise x_2 konumundaki değeri gündeme gelmektedir. İlerledikçe her bir türeve değişik bir konum olabilecek biçimde bir tasarım gündeme gelecektir.

Bir aşama daha gidecek olursak, biraz önceki anlatıma ek olarak aşağıdaki yapıda

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_2)(x - x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)(x + x_1 - 2x_2)f''(x_3) + \int_{x_1}^x d\xi_1 \int_{x_2}^{\xi_1} d\xi_2 \int_{x_3}^{\xi_2} d\xi_3 f'''(\xi_3) \quad (2.4)$$

ikinci dereceden bir çokterimli gündeme gelmektedir. Taylor toplamdizilerinde bu yapı $(x - x_1)$ 'in üslüsünün o üsse karşılık gelen çarpımına (ing: factorial) bölümü ile verilmektedir.

Yukarıda elde edilen yapı simgecil biçimde

$$f(x) = f(x_1)\mathcal{I}_0 1_f + f'(x_2)\mathcal{I}_1(x_1)1_f + f''(x_2)\mathcal{I}_2(x_1, x_2)1_f + \mathcal{R}_2(x; x_1, x_2, x_3) \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir. Burada görülen 1_f , $[a, b]$ aralığında birim değişmez işlevi simgelemektedir.

2.3 Tümlev İşleçleri

Yukarıda verilen \mathcal{I} işleci (ing: operator)

$$\mathcal{I}_m(x_1, \dots, x_m)g(x) \equiv \int_{x_1}^x d\xi_1 \int_{x_2}^{\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_{x_m}^{\xi_{m-1}} d\xi_m g(\xi_m), \quad m = 1, 2, \dots, \quad \mathcal{I}_0 g(x) \equiv g(x) \quad (2.6)$$

eşitliğiyle tanımlanmaktadır. Burada m . işleç m katlı bir tümlev aracılığı ile verilmektedir. $g(x)$ ise tümlevlenebilen herhangi bir işlevi simgelemektedir.

Kalan anlatım ise

$$\mathcal{R}_m(x; x_1, \dots, x_{m+1}) \equiv \mathcal{I}_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1})f^{(m+1)}(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

yapısında elde edilir ve “ m . dereceden artık işlev” olarak değerlendirilir. Bu tanımlayışlardan sonra (2.5) denklemi özelsizleştirilerek

$$f(x) = \sum_{i=0}^m f^{(i)}(x_{i+1})\mathcal{I}_i(x_1, \dots, x_i)1_f + \mathcal{R}_{m+1}(x; x_1, \dots, x_{m+1}), \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.8)$$

çizeminde yazılabilir. Burada sağ yanda doğrucul (ing: linear) bir birleşim olan yapı gündeme gelir. Bu yapı, her birinin öğeleri ayrı olan çokterimliler ve bir kalan anlatımdan oluşmaktadır.

Kalan işlev, m büyüdükçe, sıfırlanım eğiliminde olduğundan (2.8) eşitliği

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x_{i+1})\mathcal{I}_i(x_1, \dots, x_i)1_f \quad (2.9)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlik “Sonsuz Kerteden AKATA” olarak adlandırılabilir. Kertesi yükselirken artık işlevin sıfırlandığı tüm x değerleri için yakınsar. Bu yapı, aslında, bir içdeğerbiçimden (ing: interpolation) üremiş gibi düşünülebilir ve öyle olduğu kanıtlanabilir.

2.4 Taban Çokterimlileri

Taban çokterimlilerinin özelsiz tanımı

$$\phi_j(x; x_1, \dots, x_j) \equiv \mathcal{I}_j(x_1, \dots, x_j) 1_f, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

yapısındadır. Sağ yanda j katlı tümlev aracılığı ile verilen (1’in değişik aralıklardaki j katlı tümlevleri ile ortaya çıkan) çokterimliler bulunmaktadır. Tanımlanan bu özdeşlikten yola çıkarak ilk üç ϕ işlevi

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &\equiv 1, \\ \phi_1(x) &\equiv (x - x_1), \\ \phi_2(x) &\equiv (x - x_1) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_1 - x_2 \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

biçiminde elde edilir. Burada aşağıdaki biçimde verilen bir özyineleyiş (ing: recursion) bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} \phi_i(x; x_1, \dots, x_i) &= \int_{x_1}^x d\xi_1 \phi_{i-1}(\xi_1, x_2, \dots, x_i), \\ \phi_i^{(i)}(x; x_1, \dots, x_i) &= 1, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Bu özyineleyiştten, aynı Taylor toplam dizilerinde olduğu gibi, i . çokterimlinin i . türevinin 1 olduğu olgusu çıkmaktadır. Yazmış olduğumuz bu özyineleyiştten türev aracılığı ile aşağıdaki özyineleyişe gitmek olanaklıdır.

$$\phi_i^{(j)}(x; x_1, \dots, x_i) = \phi_{i-1}^{(j-1)}(x; x_2, \dots, x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, i \quad (2.13)$$

Bu kanıtlayıştan sonra ilerlediğimizde önemli bir yargıya varıyoruz. i . çokterimlinin j . türevini aldığımızda onun içinde i sayıda konum bulunmaktadır. Bu türev bir düşük türevliye geçildiğinde sona doğru olan salt $(i - 1)$ konumun varolduğu bir çokterimli durumuna gelmektedir. Bir kez daha türevi azaltacak olursak sona doğru olan $(i - 2)$ konum içerir duruma gelmekte ve en sonunda x_j 'den x_1 'e dek olan konumları içeren bir çokterimli yapısı gündeme gelmektedir. Son anlatımda ilk tümlevin x_j 'den x_i 'e dek

oluşundan dolayı x yerine x_j yerleştirildiğinde sıfırlanacağı görülmektedir. Bu yapı ise Lagrange içdeğerbiçim çokterimlilerinin [25, 26] genel özelliğini yansıtan niteliktedir.

$$\begin{aligned}
\phi_i^{(j)} \left(x_j; \underbrace{x_1, \dots, x_i}_i \right) &= \phi_{i-1}^{(j-1)} \left(x_j; \underbrace{x_2, \dots, x_i}_{i-1} \right) = \phi_i^{(j-2)} \left(x_j; \underbrace{x_3, \dots, x_i}_{i-2} \right) \\
&= \phi_{i-1}^{(1)} \left(x_j; \underbrace{x_j, \dots, x_i}_{i-j+1} \right) = 0 \\
i &= 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, i-1
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Ayrışık Konumlarda Artan Türevler Açılımı (AKATA) içdeğerbiçimcil bir bağıntılandırımıdır. Buradan, Taylor toplam dizilerinin de içdeğerbiçimcil oldukları çıkarılabilir. Bu yargıya, taban çokterimlilerinin yapısına bakarak, çok daha kısa yoldan varılabilir.

$$\phi_i(x; x_1) \equiv \frac{(x - x_1)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{2.15}$$

$$\phi_i^{(j)}(x_1; x_1) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \tag{2.16}$$

3. İKİ KONUMLU AYRIŞIK KONUMLARDA ARTAN TÜREVLER AÇILIMI (AKATA)

Burada, “iki konumlu ayrışık konumlarda artan türevler açılımı (AKATA)” demekle anlatılmak istenen, AKATA konumlarının x_1, x_2, \dots değişmezleriyle (ing: constants) simgelenmesi durumunda, altsırasayıları 2'nin katları olmayan artı bütünsayılar (yani tek bütünsayılar) için konum x_1 olmakta geriye kalan konumlar (yani altsırasayıları çift bütünsayı olanlar) x_2 ile simgelenmekte olduğu anlatılmak istenmektedir [23, 24]. Bu tür konumlu AKATA için aşağıdaki tanımlayışlar gerçekleştirilerek inceleyişlere başlanacaktır.

$$\widehat{J}f(x) \equiv \int_{x_1}^x d\xi \int_{x_2}^{\xi} d\xi_1 f(\xi_1) \quad (3.1)$$

$$P_{2k}(x) \equiv \widehat{J}^k 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

(3.1) ve (3.2) bağıntılarından iki konumlu AKATA çokterimlilerinin yalnız bir biçimde özelsizleştirilebilecek yapılarını elde edebilmek için aşağıdaki işlemleri gerçekleştirmekte yarar bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \widehat{J}1_f = \widehat{J}P_0(x) = \int_{x_1}^x d\xi \int_{x_2}^{\xi} d\xi_1 = \int_{x_1}^x d\xi (\xi - x_2) \\ &= \frac{1}{2}(x - x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aynı işlem $P_4(x)$ için de gerçekleştirilecek olursa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$P_4(x) = \widehat{J}^2 1_f = \widehat{J}(\widehat{J}1_f) = \widehat{J}P_2(x) = \frac{1}{2}\widehat{J}(x - x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \widehat{J}1_f \quad (3.4)$$

Bu eşitliklerden en sağdakinin sağ yanındaki ilk anlatım için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \widehat{J}(x - x_2)^2 &= \int_{x_1}^x d\xi \int_{x_2}^{\xi} d\xi_1 (\xi_1 - x_2)^2 = \frac{1}{3} \int_{x_1}^x d\xi (\xi - x_2)^3 \\ &= \frac{1}{12}(x - x_2)^4 - \frac{1}{12}(x_1 - x_2)^4 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Bu ara sonuç ve \widehat{J}_f 'nin $P_2(x)$ oluş gerçeği (3.4)'ün en sağındaki anlatımda kullanılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= \frac{1}{24}(x-x_2)^4 - \frac{1}{24}(x_1-x_2)^4 - \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2 \left[\frac{1}{2}(x-x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2 \right] \\
&= \frac{1}{24}(x-x_2)^4 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2(x-x_2)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24} \right) (x_1-x_2)^4 \\
&= \frac{1}{24} \left[(x-x_2)^4 - 6(x_1-x_2)^2(x-x_2)^2 + 5(x_1-x_2)^4 \right] \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Bu çokterimliler arasında aşağıdaki özyineleyiş tanımını yapmak olanaklıdır.

$$P_{2k}(x; x_1, x_2) = \widehat{J}(x_1, x_2) P_{2k-2}(x; x_1, x_2), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad P_0 \equiv 1 \quad (3.7)$$

Bu özyineleyiştten yola çıkarak ve $v \equiv x_1 - x_2$ ile $u \equiv (x - x_2) / v$ tanımlayışları gerçekleştirilerek, ara işlemler verilmeksizin sırasıyla P_2 , P_4 , P_6 , ve P_8 çokterimlileri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
P_2(x; x_1, x_2) &= \frac{v^2}{2!} (u^2 - 1), \\
P_4(x; x_1, x_2) &= \frac{v^4}{4!} (u^4 - 6u^2 + 5), \\
P_6(x; x_1, x_2) &= \frac{v^6}{6!} (u^6 - 15u^4 + 75u^2 - 61), \\
P_8(x; x_1, x_2) &= \frac{v^8}{8!} (u^8 - 28u^6 + 350u^4 - 1708u^2 + 1385) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Burada, görüldüğü gibi, çokterimlilerde, üslümler üzerindeki doğrucul birleşimler salt bir tek büyüklüğe, $u(x)$ 'e bağlı olmakta, v 'nin tek bir üslüsü önçarpan olarak bulunmakta, doğrucul birleşim katsayıları da salt bütünsayılardan oluşmaktadır. Bunlar çok önemli yalınlaştırıcı olgular olup, bunlardan da öte, çarpınlı bir ortak bölen, çokterimlilerde önemli ölçüde boy indirgeyişine neden olmakta ve AKATA yakınsayışına büyük katkıda bulunmaktadır.

Burada verilen çokterimli anlatımlarından izlenimler aşağıdaki özelsizleştirim öngörümüne götürür.

$$P_{2k}(x) = \frac{v^{2k}}{(2k)!} \sum_{j=0}^k p_{k,j} u(x)^{2j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Burada, $p_{k,j}$ ile simgelenen ve salt sayılar olan büyüklükler, eşsiz olarak belirlenebilecek olursa bu öngörüm geçerli bir özelsiz anlatım durumuna dönüşür. Bu belirlenişin gerçekleştirilebilişi için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$P_{2k+2}(x) \equiv \widehat{J}P_{2k}(x) = \frac{v^{2k}}{(2k)!} \sum_{j=0}^k p_{k,j} \widehat{J}(u(x)^{2j}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Özenli bir inceleme aşğıdaki özelsiz bağıntının geçerli olduğunu gösterir.

$$\widehat{J}(u(x)^{2j}) = \frac{v^2}{(2j+1)(2j+2)} [u(x)^{2j+2} - 1], \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Bu eşitliğin (3.10)'da kullanımını aşğıdaki eşitliklere götürür.

$$\begin{aligned} P_{2k+2}(x) &= \frac{v^{2k+2}}{(2k+2)!} \left[\sum_{j=0}^k \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2j+1)(2j+2)} p_{k,j} u(x)^{2j+2} - \sum_{j=0}^k \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2j+1)(2j+2)} p_{k,j} \right] \\ &= \frac{v^{2k+2}}{(2k+2)!} \left[- \sum_{j=0}^k \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2j+1)(2j+2)} p_{k,j} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2j-1)2j} p_{k,j-1} u(x)^{2j} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Öte yandan, (3.9)'da k yerine $(k+1)$ yerleştirilecek olursa aşğıdaki eşitlik yazılabilir.

$$P_{2k+2}(x) = \frac{v^{2k+2}}{(2k+2)!} \sum_{j=0}^{k+1} p_{k+1,j} u(x)^{2j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

(3.12) ve (3.13)'ün sağ yanlarının eşit oluşunun gerekliliği, p katsayıları için aşğıdaki eşitliklerin yazılışına olanak verir.

$$\begin{aligned} p_{k+1,0} &= - \sum_{j=0}^k \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2j+1)(2j+2)} p_{k,j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ p_{k+1,j} &= \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2j-1)2j} p_{k,j-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad j = 1, 2, 3, \dots, k+1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Bunlar $(k+1)$ altsırasayılı çokterimlinin katsayılarını, k altsırasayılı çokterimlinin katsayıları türünden belirleyişi olanaklı kılan özyineleyişlerdir.

3.1 Çokterimli Katsayılarında Özyineleyiş

$p_{k,j}$ katsayıları (3.14) eşitliğine dönüp yeniden

$$p_{k,j} = \frac{(2k)(2k-1)}{(2j)(2j-1)} p_{k-1,j-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (3.15)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte j yerine k yerleştirilecek olursa

$$p_{k,k} = p_{k-1,k-1}, \quad p_{0,0} = 1, \quad p_{k,k} = 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

ara sonucuna ulaşılabilir. Böylelikle, en azından $p_{k,k}$ için, özelsiz (k eksi olmamak üzere hangi bütünsayı olursa olsun) bir sonuç elde edilmiş olur. Özelsiz bulgu elde edimini sürdürmek için (3.15)'te j yerine $(k-1)$ yerleştirilecek olursa

$$p_{k,k-1} = \frac{(2k)(2k-1)}{(2k-2)(2k-3)} p_{k-1,k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

yazılabilir. Buradan da, yineleyişlerle, aşağıdaki eşitliklere ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}
p_{k,k-1} &= \frac{(2k)(2k-1)}{(2k-4)(2k-5)} p_{k-2,k-3} \\
&= \frac{(2k)(2k-1)}{(2k-6)(2k-7)} p_{k-3,k-4} \\
&= \frac{(2k)(2k-1)}{(2k-2j)(2k-2j-1)} p_{k-j,k-j-1} \\
&= \frac{(2k)(2k-1)}{(2)(1)} p_{1,0} = \binom{2k}{2} p_{1,0}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Burada, payda sıfırlanmaları eksi altsırasayılı ve dolayısıyla sıfır olan bir büyüklükle çarpıldığından sorun yaratmamaktadır. Bu durum, en sağdaki anlatımın k 'nın tüm artı bütünsayı değerleri için geçerli oluşundan da anlaşılmaktadır.

Yukarıdaki inceleyişler (3.15)'te j yerine $k-2$ konulduğunda elde edilecek eşitlik üzerinde de gerçekleştirilebilir ve, ara aşamalar belirtik olarak verilmeksizin, aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

$$p_{k,k-2} = \binom{2k}{4} p_{2,0}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (3.19)$$

(3.16), (3.18) ve (3.19) çok daha özelsiz eşitsizliklerin yazımına olanak sağlar. Bu eşitlikler, kanıtlayışa girişmeksizin, aşağıda verilmektedir.

$$p_{k,k-j} = \binom{2k}{2j} p_{j,0}, \quad k = j, 3, 4, \dots, \quad p_{k,j} = \binom{2k}{2k-2j} p_{k-j,0}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Burada, ikinci eşitlik birincisinden, j yerine $k-j$ yerleştirerek elde edilmiştir ve iki altsırasayılı bir bilinmeyeni bir altsırasayılı başka bir bilinmeyene bağlamaktadır. Bu altsırasayı indirgeyişi, kuşkusuz, bir özelsizleştirmedir, ancak yine de bilinmeyen bir yapı yaratmaktadır. Bu bilinmezliğin giderimi için $p_{k,0}$ 'ın, k eksi olmayan bütünsayı olmak üzere ne olursa olsun, belirlenişi gerekmektedir. Bu amaçla, (3.14)'teki ilk denkleme odaklanım gerekmektedir. O denklemde k yerine $k-1$ yerleştirilirse

$$p_{k,0} = - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2k)(2k-1)}{(2j+1)(2j+2)} p_{k-1,j}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

yazılabilir. (3.20)'deki ikinci eşitlikte k yerine $k-1$ yerleştirip elde edilen eşitlik (3.21)'de kullanılır ve j yerine $j-1$ yerleştirilirse, ara aşamalar verilmeksizin, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\sum_{j=0}^k \binom{2k}{2j} p_{k-j,0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Bu eşitliğin her iki yanını, k 'nın tüm değerleri için 0 olmayan $(2k)!$ 'e bölünür ve en özelsiz durumda herhangi bir karmaşık değer alabilen bir z değişkeninin $2k$ üslüsüyle çarpılıp k 'nın bütünsayı değerleri üzerinde 1'den sonsuza dek toplanırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{2k} \sum_{j=0}^k \frac{1}{(2j)!(2k-2j)!} p_{k-j,0} = 0 \quad (3.23)$$

ve buradan da, her iki yana 1 ekleyip solda toplam dizilerin Cauchy çarpımından yararlanarak,

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} z^{2j} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{k,0}}{(2k)!} z^{2k} \right) = 1 \quad (3.24)$$

buradan da,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{k,0}}{(2k)!} z^{2k} = \frac{1}{\cosh z} \quad (3.25)$$

eşitliğine ulaşılır. Bunun anlamı, sol yandaki toplam dizinin, aslında, sağ yandaki işlevin z 'ye göre Maclaurin açılımı oluşudur. Bu ise

$$p_{k,0} = \left\{ \frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \left(\frac{1}{\cosh z} \right) \right\}_{z=0}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.26)$$

belirtik ve somut sonucuna götürür. Bu eşitliğin (3.20)'deki ikinci eşitlikle birleştirimi aşağıdaki sonuca götürür.

$$p_{k,j} = \binom{2k}{2k-2j} \left\{ \frac{d^{2k-2j}}{dz^{2k-2j}} \left(\frac{1}{\cosh z} \right) \right\}_{z=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, 2, \dots, k \quad (3.27)$$

Böylece, $p_{k,j}$ katsayılarının belirtik olarak belirlenip somut bağıntularla anlatılabilirliği sağlanmış olur. İki konumlu AKATA çokterimlilerinde, değişmez olanı dışında, her bir katsayı daha düşük dereceden bir AKATA çokterimlisinin değişmez katsayısı ile orantılıdır. Orantı katsayısı, ilgili çokterimli derecesi (k) sayısında ögenin, değişmez çokterimlisinin derecesi (j) sayısında, katışımıdır (ing: combination), ya da, k . dereceden ikiterimlinin j . katsayısıdır. Bu durum, değişmez dışındaki anlatımların katsayılarının salt değişmezlere indirgenebildiği anlamına gelir ve değişmezlerin belirlenişine yadsınamaz bir önem kazandırır. Buraya dek atılan adımlarla, iki konumlu AKATA çokterimlilerinin derecesi ikinin tam katları olanlarının eşsiz anlatımları belirlenmiş olmaktadır. Bu çokterimlilerin, 2010'a yakın yıllarda önerilmiş olan ve "İsviçre Çakısı" [27, 28] olarak bilinen çokterimlilerle, çok yakından ilişkileri olduğu gözlenmiştir. Ancak, bu durum, bir kesim yalınlıklar getirirse de, AKATA

çokterimlileri özüne özgündür ve yeni bir kuramın gereksinimlerinden doğmuştur. Burada elde edilen bulgulardan yararlanarak yakınsayış inceleyişlerine de girişilebilir. Bu doğrultuda, (3.9)'dan yararlanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} P_{2k}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{v^{2k} z^{2k} u(x)^{2j}}{(2j)!(2k-2j)!} P_{k-j,0} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{v^{2k} z^{2k} u(x)^{2j}}{(2j)!(2k-2j)!} P_{k-j,0} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{2k+2j} z^{2k+2j} u(x)^{2j}}{(2j)!(2k)!} P_{k,0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^{2j} u(x)^{2j} z^{2j}}{(2j)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{2k} z^{2k}}{(2k)!} P_{k,0} \\
&= \cosh(vu(x)z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{2k} z^{2k}}{(2k)!} P_{k,0} = \frac{\cosh(vu(x)z)}{\cosh(vz)} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki üreteç işlevi, gerçel değerli v ve uv ile karmaşık değerli z 'ye bağımlıdır. Bilinen işlevlerden oluşan bu işlevin payı ve paydası tam işlevlerdir. Sonluda tekillikleri yoktur. Ancak, vz , n bir doğal sayı olmak üzere, $\pm i(n+1/2)\pi$ değerlerinden birisini alırsa, payda sıfırlanır. Dolayısıyla belli bir v için z değişkeni $\pm i(n+1/2)(\pi/v)$ değerlerinden birisini aldığıında tekillikle yüzleşilir. Salt bu yüzden, söz konusu üreteç işlevinin z 'deki Maclaurin toplam dizisi, vz 'nin karmaşık boyu (ing: norm) $\pi/2$ 'den küçük kaldığında, yakınsar yoksa ıraksar. Ancak, \cosh işlevlerinin oranı olan işlevi bu üreteç için tüm karmaşık düzleme çözümcül uzatımı olarak düşünüp kullanmak olanaklıdır.

(3.25)'ten aşağıdaki eşitliği yazarak yeni bir inceleyişe geçmekte yarar bulunmaktadır.

$$g(z) \equiv \frac{1}{\cosh z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k,0}}{(2k)!} z^{2k} \quad (3.29)$$

Bu yeni eşitlik, $P_{k,0}$ katsayılarının, bir üreteç işlevinden toplam dizi açılımıyla elde edilebildiğini göstermektedir. Bu tür işlevlere “Üreteç İşlevi (ing: Generating Function)” adı verilir. İşlevde $g(z)$ simgesinin kullanılış nedeni de budur.

(3.29)'un her iki yanının z 'ye göre $(2j)$. türevi alınacak olursa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$g^{(2j)}(z) \equiv \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh z} \right) = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{P_{k,0}}{(2k-2j)!} z^{2k-2j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k+j,0}}{(2k)!} z^{2k}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.30)$$

Öte yandan, (3.28)'de de bir üreteç işlevi tanımı bulunmaktadır. Oradaki değişiklikler toplam dizi yapısında ve üretilecek büyüklüklerin başka bir değişkene bağlı oluşundadır. Yine de, (3.28) $P_{2k}(x)$ çokterimlilerini üretmek için yapılabilecek tek üreteç işlevi

tanımı değildir. Aşağıdaki tanım da, o amaçla kullanılabilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (2k)!P_{2k}(x)z^{2k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(2k)!v^{2k}u(x)^{2j}z^{2k}}{(2j)!(2k-2j)!} p_{k-j,0} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(2k)!v^{2k}u(x)^{2j}z^{2k}}{(2j)!(2k-2j)!} p_{k-j,0} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2j)!}{(2j)!(2k)!} p_{k,0} v^{2k+2j} u(x)^{2j} z^{2k+2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^{2j}u(x)^{2j}z^{2j}}{(2j)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2j)!}{(2k)!} p_{k,0} v^{2k} z^{2k} \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Burada, görüldüğü gibi, en sağdaki kesimde sonsuz toplamlar ayrışık değildir. İkinci toplamızın ürettiği değer ilk toplamızın sırasayısı olan j bütünsayısına bağlıdır. İlerleyebilmek için aşağıdaki tanımdan yararlanılabilir.

$$\gamma_j(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2j)!}{(2k)!} p_{k,0} z^{2k} \quad (3.32)$$

Burada, üreteç işlevi nitelikli olan ve $\gamma_j(z)$ ile simgelenen, sayılabilir sonsuz sayıda, işlevler tanımlanmaktadır. Öteki bir deyişle, tek bir üreteç işlevi yerine bir “Üreteç Dizilimi (ing: Generator Sequence)” tanımı gündeme getirilmektedir.

(3.31) eşitliği, (3.32)’den yararlanarak, aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k)!P_{2k}(x)z^{2k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^{2j}u(x)^{2j}z^{2j}}{(2j)!} \gamma_j(vz) \quad (3.33)$$

Buradan ilerleyebilmek için $\gamma_j(vz)$ işlevlerinin belirlenimi gerekmektedir. Bu amaçla, (3.32)’nin aşağıdaki biçimde yeniden yazımıyla yola çıkılabilir.

$$\begin{aligned}
\gamma_j(z) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} p_{k,0} \int_0^{\infty} dt t^{2k+2j} e^{-t} z^{2k} = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{2j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} p_{k,0} t^{2k} z^{2k} \\
&= \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t} t^{2j}}{\cosh(zt)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Böylece, bu üreteç işlevlerinin tümlev gösterimleri de belirlenmiş olur. Bu anlatımların (3.29)’da kullanımı ve ortaya çıkan toplamızın çözümcül toplamı aşağıdaki sonuca götürür.

$$G(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (2k)!P_{2k}(x)z^{2k} = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t} \cosh(vu(x)zt)}{\cosh(vzt)} \quad (3.35)$$

(3.35) eşitliğiyle, aslında, $G(z)$ ile simgelenen bir üreteç işlevinin özü yerine tümlev gösterilimi verilmektedir ve üreteç işlevinin özünün belirlenişi için bu tümlevin

belirtik sonucunun bulunuşu gerekmektedir. Böyle de olsa, bu üretcin tanımında, P çokterimlilerinin dışında bir işlev ya da işlevler kullanılmamaktadır. Oysa ki, üretç tanımında, işlev kullanımı da olanaklıdır. Bu bağlamda aşağıdaki üretç işlevi gündeme getirilebilir.

$$F(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k)}(z) P_{2k}(x) \quad (3.36)$$

Burada, $f(z)$ işlevi z karmaşık düzleminde, sonlu ve boş olmayan bir teker içinde, çözümcül olarak öngörülmektedir. (3.32)'de, toplamdizi yerine tümlev gösterilimli bir anlatım varolsun istenirse aşağıdaki çevirge tümlev gösteriliminden yararlanılabilir.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad (3.37)$$

Burada, C ile saatinkine evrik yönde çevrimcil olan bir çevirge simgelenmektedir. Çevirge, özelsizde, karmaşık düzlemde herhangi bir kapalı yol ya da yolak (keçi yolu) olarak düşünülebilir. Ancak, yakınsaklık inceleyişlerinde, çevirge olarak z özekli (ing: center) bir çember alınmaktadır. Bu çemberin yarıçapının da, z 'ye en yakın tekillik konumuna olan uzaklıktan az olması gerekmektedir. Yoksa, çevirge tümlev gösterilimi geçerliliğini yitirir.

(3.37), çevirge tümlevinin çevrelediği tekerin herhangi bir tekillik içermemesi durumunda, z 'ye göre istenildiğince çok sayıda ardışık olarak türevlenebilir ve çıkan sonuç da baştaki teker içinde geçerli kalır. Böylece, aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

Bunda, k yerine $2k$ yerleştirerek elde edilen eşitlik (3.32)'de kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(\zeta - z)^{2k}} P_{2k}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} G\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \int_0^{\infty} dt e^{-t} \frac{\cosh\left(\frac{v u(x)t}{\zeta - z}\right)}{\cosh\left(\frac{vt}{\zeta - z}\right)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j}{(2j)!} v^{2j} u(x)^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j}{(2j)!} (x - x_2)^{2j} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$F_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{2j+1}} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t} t^{2j}}{\cosh\left(\frac{vt}{\zeta - z}\right)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

(3.39)'un en sağındaki toplam dizinin yakınsaklık durumunu incelemek için F_j katsayılarının j 'ye göre değişimini ayrıntılı olarak belirlemek ya da, en azından, karmaşık boyca davranışını saptamak gerekir. Bu amaçla, (3.40)'ta, r, z özekli çevirge çemberinin yarıçapı ve θ bu çember üzerinde konumu belirten açı değişkeni olmak üzere, $\zeta = r \exp(i\theta) + z$ değişken dönüşümü yapılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$F_j = \frac{1}{2\pi r^{2j}} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i2j\theta} f\left(z + r e^{-i\theta}\right) \int_0^\infty dt \frac{e^{-t} t^{2j}}{\cosh\left(\frac{\nu}{r} e^{-i\theta} t\right)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

F_j katsayılarının yapısını iyi anlayabilmek için bu eşitliğin sağ yanındaki ikinci tümeleve odaklanımda yarar bulunmaktadır. Böylece, aşağıdaki eşitlikleri yazarak yola çıkılabilir.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \frac{e^{-t} t^{2j}}{\cosh\left(\frac{\nu}{r} e^{-i\theta} t\right)} &= 2 \int_0^\infty dt t^{2j} \frac{e^{-(1+\frac{\nu}{r} e^{-i\theta})t}}{1 + e^{-(\frac{2\nu}{r} e^{-i\theta})t}} \\ &= 2(2j)! \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\left(1 + (2k+1)\frac{\nu}{r} e^{-i\theta}\right)^{2j+1}} \\ &= 2(2j)! \left(\frac{r e^{i\theta}}{2\nu}\right)^{2j+1} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\left(k + \frac{1}{2} + \frac{r e^{i\theta}}{2\nu}\right)^{2j+1}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.42)$$

Burada, en sağdaki sonsuz toplam, aşağıdaki biçimde, iki kesime ayrıştırılabilir.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\left(k + \frac{1}{2} + \frac{r e^{i\theta}}{2\nu}\right)^{2j+1}} &= \frac{1}{2^{2j+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\left(k + \frac{1}{4} + \frac{r e^{i\theta}}{4\nu}\right)^{2j+1}} \\ &\quad - \frac{1}{2^{2j+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\left(k + \frac{3}{4} + \frac{r e^{i\theta}}{4\nu}\right)^{2j+1}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Bunun (3.42)'de kullanımı aşağıdaki eşitliğin yazılışına olanak sağlar.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \frac{e^{-t} t^{2j}}{\cosh\left(\frac{\nu}{r} e^{-i\theta} t\right)} &= 2(2j)! \left(\frac{r e^{i\theta}}{4\nu}\right)^{2j+1} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\left(k + \frac{1}{4} + \frac{r e^{i\theta}}{4\nu}\right)^{2j+1}} \\ &\quad - 2(2j)! \left(\frac{r e^{i\theta}}{4\nu}\right)^{2j+1} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\left(k + \frac{3}{4} + \frac{r e^{i\theta}}{4\nu}\right)^{2j+1}} = 2 \left(\frac{r e^{i\theta}}{4\nu}\right)^{2j+1} \\ &\quad \times \left[\psi^{(2j)}\left(\frac{3}{4} + \frac{r e^{i\theta}}{4\nu}\right) - \psi^{(2j)}\left(\frac{1}{4} + \frac{r e^{i\theta}}{4\nu}\right) \right], \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.44)$$

Burada, $\psi^{(2j)}$ ile, İngilizce adı ‘‘polygamma’’ olan ve ψ ile simgelenen işlevin $(2j)$. türevi gösterilmektedir. İngilizce’de ‘‘digamma’’ olarak da adlandırılan ψ işlevi,

bilimsel yazında “ Γ İşlevi” olarak iyi bilinen işlevin evriküstelcil (ing: logarithmic) türevi olarak tanımlanır:

$$\psi(z) \equiv \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (3.45)$$

Bunun toplamdizi gösterilimi de aşağıdaki anlatımla verilir

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+z} \right) \quad (3.46)$$

Burada, γ ile Euler-Mascheroni değişmezi simgelenmekte olup; buradan her iki yanın $(2j)$ kez ardışık türevlenimiyle aşağıdaki toplamdizi eşitliğine ulaşılır.

$$\psi^{(2j)}(z) = -(2j)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^{2j+1}} \quad (3.47)$$

Bu eşitlik, biraz önceki kesimlerde kullanılmış olup, z eksi bütünsayı ya da 0 olmayan herhangi bir karmaşık değer olmak üzere geçerliliğini hep korur.

(3.40)'ın (3.37)'de kullanımı aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak verir.

$$F_j = \frac{1}{2\pi r^{2j}} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i2j\theta} f(z + re^{-i\theta}) 2 \left(\frac{re^{i\theta}}{4v} \right)^{2j+1} \left[\psi^{(2j)} \left(\frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} \right) - \psi^{(2j)} \left(\frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} \right) \right] \quad (3.48)$$

Bunun (3.39) ile birleştirimi aşağıdaki sonuca götürür

$$F(z) = \frac{re^{i\theta}}{4v\pi_0} \int_0^{2\pi} d\theta f(z + re^{-i\theta}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \frac{(x-x_2)^{2j}}{4^{2j}v^{2j}} \left[\psi^{(2j)} \left(\frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} \right) - \psi^{(2j)} \left(\frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} \right) \right] \quad (3.49)$$

Bu eşitliğin sağ yanında iki Maclaurin toplamdizisi bulunmaktadır ve onlar için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \frac{(x-x_2)^{2j}}{4^{2j}v^{2j}} \psi^{(2j)} \left(\frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\psi \left(\frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} + \frac{(x-x_2)}{4v} \right) + \psi \left(\frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} - \frac{(x-x_2)}{4v} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \frac{(x-x_2)^{2j}}{4^{2j}v^{2j}} \psi^{(2j)} \left(\frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\psi \left(\frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} + \frac{(x-x_2)}{4v} \right) + \psi \left(\frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} - \frac{(x-x_2)}{4v} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

Son iki eşitliğin geçerli olabilmesi için aşağıdaki eşitsizliklerin, k 'nın tüm doğalsayı değerleri üzerinde, sağlanması gereklidir.

$$\frac{\left| \frac{x-x_2}{4v} \right|}{\left| k + \frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} \right|} < 1 \implies \frac{|x-x_2|}{|(4k+3)v + re^{i\theta}|} < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.52)$$

$$\frac{\left| \frac{x-x_2}{4v} \right|}{\left| k + \frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} \right|} < 1 \implies \frac{|x-x_2|}{|(4k+1)v + re^{i\theta}|} < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.53)$$

Bunlar, özel yapılarından dolayı, aşağıdaki tek bir eşitsizlik kümesine indirgenebilir.

$$\frac{|x-x_2|}{|(2k+1)v + re^{i\theta}|} < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.54)$$

Son üç bağıntıda, önceden de olduğu gibi, düşey boru simgeleri karmaşık boyu simgelemek amacıyla kullanılmaktadır.

(3.54)'ü yalınlaştırabilmek için paydadaki boy'a odaklanmak ve aşağıdaki eşitsizliği yazmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned} & \left| (2k+1)v + re^{i\theta} \right| > |(2k+1)|v| - r| \\ \implies & \frac{|x-x_2|}{|(2k+1)|v| - r|} < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.55)$$

Burada, en sağdaki eşitsizlikte paydanın, k 'nın belirli özel bir K değeri için belen (en az) değerini aldığı öngörülecek olursa; aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$\left(K + \frac{1}{2} \right) - \frac{r}{2|v|} = \alpha \implies \frac{r}{|v|} = 2K + 1 - 2\alpha, \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \quad (3.56)$$

Burada, $r/|v|$ değeri $2K + 1$ bütünsayısına gerçel eksen üzerinde soldan ya da sağdan en yakın durumda olabilir. Bu ikililiğin yansıtımı için hem eksi hem de artı değer alabilen bir değiştirgeye (ing: parameter) gerek duyulmuştur. Yukarıdaki eşitlikte, α değiştirgesi için öngörülen aralık bu yüzden o yapıda verilmiştir.

(3.56)'nın (3.55)'te kullanımı aşağıdaki eşitsizliğe götürür.

$$|x-x_2| < 2|\alpha| \quad (3.57)$$

Böylece, (3.49) yerine, (3.50) ve (3.51)'in (3.49)'da kullanımıyla, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} F(z) = & \frac{re^{i\theta}}{v\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f\left(z + re^{-i\theta}\right) \left[\psi\left(\frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} + \frac{(x-x_2)}{4v}\right) \right. \\ & + \psi\left(\frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} - \frac{(x-x_2)}{4v}\right) - \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} + \frac{(x-x_2)}{4v}\right) \\ & \left. - \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} - \frac{(x-x_2)}{4v}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Burada, z yerine $x_1 + i0$ alınacak olursa, iki konumlu AKATA'nın yalnızca \hat{J} işlecinin üslüleri altındaki görüntülerden oluşan kesimi belirlenmiş olur. Bu durumu

bütünüyle belirtik olarak gösterebilmek amacıyla, AKATA bağıntılandırımının en özelsiz durumunu aşağıda yeniden vererek ilerleyişe başlayabiliriz.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x_i) \widehat{\mathcal{F}}_i(x; x_1, \dots, x_i) 1_f,$$

$$\widehat{\mathcal{F}}_i(x; x_1, \dots, x_i) 1_f \equiv \int_{x_1}^x d\xi \int_{x_2}^{\xi} d\xi_1 \dots \int_{x_i}^{\xi_{i-2}} d\xi_{i-1} 1_f, \quad \xi_0 \equiv \xi, \quad \xi_{-1} \equiv x \quad (3.59)$$

Burada, işleç tanımı değil işleç altında görüntü tanımı yapılmaktadır. İşleç tanımı için ilgili eşitlikte 1_f yerine herhangi bir tümlevlenebilir işlev yerleştirmek olanaklıdır.

Burada, iki konumlu özelleştirim için $x_{2i} \equiv x_1$ ve $x_{2i+1} \equiv x_2$ tanımları yapılırsa, aşağıdaki tanımlar yazılabilir.

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(2i)}(x_{2i}) \widehat{\mathcal{F}}_{2i}(x; x_1, \dots, x_{2i}) 1_f,$$

$$F_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(2i+1)}(x_{2i+1}) \widehat{\mathcal{F}}_{2i+1}(x; x_1, \dots, x_{2i+1}) 1_f,$$

$$\widehat{\mathcal{J}} \equiv \widehat{\mathcal{F}}_2(x; x_1, x_2) \quad (3.60)$$

Bunlar ve $x_{2i} = x_1$ eşitliği aşağıdaki bağıntıların yazımına olanak verir.

$$\widehat{\mathcal{F}}_{2i}(x; x_1, \dots, x_{2i}) = \widehat{\mathcal{J}}^i, \quad F_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(2i)}(x_1) \widehat{\mathcal{J}}^i 1_f = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(2i)}(x_1) P_{2i}(x) \quad (3.61)$$

Buradaki ikinci eşitlik, (3.36)'da, $F(z)$ yerine $F_1(x)$, z yerine x_1 , ya da tam uzbilimcil anlatımıyla, $(x_1 + i0)$ yerleştirmesiyle elde edilebilecek yapıdadır. Bu nedenle, (3.58)'den

$$F_1(x) = \frac{re^{i\theta}}{v\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f(x_1 + re^{-i\theta}) \left[\psi\left(\frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} + \frac{(x-x_2)}{4v}\right) + \psi\left(\frac{3}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} - \frac{(x-x_2)}{4v}\right) - \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} + \frac{(x-x_2)}{4v}\right) - \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{re^{i\theta}}{4v} - \frac{(x-x_2)}{4v}\right) \right] \quad (3.62)$$

eşitliğine ulaşmak olanaklıdır. Böylece, bu altbölümde, AKATA'nın bir kesiminin belirtik ama tümlev gösterilim altında yapısı üretilmiş olmaktadır.

3.2 İraksak Toplamdzili Üreteç İşlevi Belirleyişi: $G(z, u, v)$

$$G(z, u, v) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (2k)! P_{2k}(x, x_1, x_2) z^{2k} = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t} \cosh(vuzt)}{\cosh(vzt)} \quad (3.63)$$

Burada, daha önce u 'nun belirtik olarak gösterilen x 'e olan bağımlılığı, daha yalın anlatımlarla çalışabilmek için, gösterilmemektedir. Bu tümlev gösterim tanımında $u = (x - x_2)/(x_1 - x_2)$ ve $v = x_1 - x_2$ tanımlarıyla verilen u ve v büyüklükleri, ilk aşama inceleyişlerimiz süresince gerçel değerli öngörülen x , x_1 , x_2 değişken ve değiştirgelerine bağlı olduklarından, gerçeldir. Salt üreteç işlevi oluşturumu için gündeme getirilen z değiştirgesi ise, olabildiğince özelsiz tutulmak istendiğinden, karmaşık değerli olarak öngörülmektedir. t tümlev değişkeni olarak kullanılmakta ve gerçel olarak öngörülmektedir. Ama, aslında, onu da karmaşık değerli olarak öngörüp üzerindeki tümlevin karmaşık düzlem üzerinde başlangıç $((0,0))$ konumundan çıkan ve aslında eksisiz gerçel yarı eksen olan ışın boyunca gerçekleştirildiğini düşünmekte yarar bulunmaktadır. Bu yoldan, ilerideki inceleyişlerimizde, t üzerinde karmaşık düzlemde çevirge üzerinde tümlevlere odaklanabiliş olanaklı olacaktır.

3.2.1 Sanal z değerleri için çözümleyiş

İnceleyişlerimizi, z 'nin özelsizliğinde gerçekleştirmek yerine, ışınlar üzerinde bulunduğu durumlara ayırarak irdeleyiş gerçekleştirmekte yarar bulunmaktadır. Bu bağlamda, z 'nin eksisiz yarı sanal eksen üzerinde bulunduğu (bu bir ışın demektir) durumla inceleyişlerimize başlamakta yarar bulunmaktadır. Böylece, özelsizde $z \equiv \xi + i\eta$ anlatımıyla verilen bu değiştirge için $\Re(z) \equiv \xi = 0$ ve sonuçta, $z = i\eta$ yazılabilir. Bu ise (3.63) eşitliği yerine

$$G(i\eta, u, v) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (2k)! P_{2k}(x) z^{2k} = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t} \cos(vu\eta t)}{\cos(v\eta t)} \quad (3.64)$$

yazılabilişine olanak sağlar. Bu yeni eşitliklerin en sağındaki tümlevin tümlevleneni, t sonsuza giderken, tümlevlenebilen biçimde söner. Dolayısıyla, tümlev sonsuzda tümlevlenebilir türdendir. Ancak, t gerçel değerler olarak 0'dan sonsuza giderken, paydadaki \cos işlevi devirli olarak sıfırlanır. Bu, t üzerinde sıfırlanış değerleri, aslında, tümlevlenenin yalın ucay (ing: pole) tekillikleridir. Bu tekillik konumları t_k 'larla simgelenecek olursa aşağıdaki tanım eşitlikleri yazılabilir.

$$t_k \equiv \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{v\eta}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.65)$$

(3.64)'teki tümlev bu ucay tekillikleri nedeniyle iraksar. Oysaki, amacımız, iraksak bir toplamdizinin yakınsak bir tümlev eşdeğerini yaratmaktır. Ucay tekillikleri nedeniyle bu eylem gerçekleştirilememiş olmaktadır. Bunun nedeni de $(2k)!$ çarpımının tümlev

gösteriliminde çevirge olarak eksisiz yarı gerçel ekseni olan ışının alınmış oluşudur ve bu ışın, üzerinde, sayılabilir sonsuz sayıda ucay içermektedir. Bu nedenle, $(2k)!$ 'nin tümlev gösterilimi için başka bir ışın çevirge olarak kullanılmalıdır. Bu amaçla, aşağıdaki çok daha özelsiz bir ışın çevirge üzerinde bir tümlev gösterilimine gitmekte yarar bulunmaktadır.

$$(2k)! = s \int_0^{\infty} dt (st)^{2k} e^{-st} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.66)$$

Burada, s ile yapısı belirtik olarak aşağıda verilen bir karmaşık değiştirge simgelenmekte olup karmaşık boyu 1 olarak öngörülmektedir.

$$s \equiv e^{i\sigma}, \quad -\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2} \quad (3.67)$$

Burada, (3.66)'daki tümlevin yakınsayıp varoluşu, bu değiştirgenin gerçel kesiminin artı ve, dolayısıyla, çembencil konaçlardaki (ing: coordinate) saat yönündeki açısının $-\pi/2$ ile $\pi/2$ arasında oluşunu gerektirmektedir.

(3.66)'nın (3.63)'te, $z = i\eta$ ile birlikte, kullanımını aşağıdaki eşitliğin yazılışına olanak sağlar.

$$G(i\eta, u, v) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (2k)! (-1)^k P_{2k}(x, x_1, x_2) \eta^{2k} = s \int_0^{\infty} dt e^{-st} \frac{\cos(vu\eta st)}{\cos(v\eta st)} \quad (3.68)$$

İnceleyişleri yalınlaştırım için, \cos işlevinin değişken imi değişimi altında değişmez oluşunu kullanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \cos(vu\eta st) &= \cos(|vu\eta| st) = \cos(-|vu\eta| st), \\ \cos(v\eta st) &= \cos(|v\eta| st) = \cos(-|v\eta| st) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Burada, aç durumuna göre irdeleyiş istediğimiz karmaşık s değiştirgesi ile eksisiz değerli t değişkeni, bilinçli olarak imsiz değer alımından dışlanmışır. Bu, ikişer eşitlikten oluşun eşitliklerden, birinciler, birinci-ikinci, ikinci-birinci, ikinciler olarak ortaya çıkan dört değişik yapıda eşitlik seçiminden salt imsiz değerleri alan seçenek gözönüne alınarak, aşağıdaki bileşik işlevli eşitliklere geçilebilir.

$$\frac{\cos(vu\eta st)}{\cos(v\eta st)} = \frac{\cos(|vu\eta| st)}{\cos(|v\eta| st)} = e^{\varphi(t)} \frac{1 + e^{\varphi_2(t)}}{1 + e^{\varphi_3(t)}} \quad (3.70)$$

Bunların (3.68)'de kullanımıyla aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$G(i\eta, u, v) = (\cos(\sigma) + i \sin(\sigma)) \int_0^{\infty} dt e^{-(\cos(\sigma) + i \sin(\sigma))t + \varphi_1(t)} \frac{1 + e^{\varphi_2(t)}}{1 + e^{\varphi_3(t)}} \quad (3.71)$$

Burada gözüken yeni işlevlerin tanımları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &\equiv (|vu\eta| - |v\eta|)(\sin \sigma - i \cos \sigma)t, \\ \varphi_2(t) &\equiv 2(i|vu\eta| \cos \sigma - |vu\eta| \sin \sigma)t, \\ \varphi_3(t) &\equiv 2(i|v\eta| \cos \sigma - |v\eta| \sin \sigma)t\end{aligned}\quad (3.72)$$

Bunlar üretilirken σ açısının artı olduğu öngörülmüştür.

(3.71)'de tümlevdeki oran, t sonsuza götürüldüğünde, üstel anlatımların sıfıra gidişi nedeniyle, 1'e gider ve bu nedenle sonludur. Üstel anlatımın de, t sonsuza giderken, sönüşü ya da sıfıra gidişi, tümlevin yakınsayabilişi açısından, gereklidir. Bunun için ise üstelin, t ile orantılı olan, üssündeki katsayının gerçel kesiminin eksi kalışı gereklidir. Yukarıdaki eşitliklerden çıkarılabileceği üzere, aşağıdaki eşitsizliğin geçerli oluşu gereklidir.

$$-\cos \sigma + (|vu\eta| - |v\eta|) \sin \sigma < 0 \quad (3.73)$$

Eğer burada $|vu\eta| - |v\eta| > 0$ olduğu öngörülürse (3.73)'ten aşağıdaki eşitsizliğe geçilebilir.

$$\tan \sigma < \frac{1}{|vu\eta| - |v\eta|} \quad (3.74)$$

Bu eşitsizlik, σ 'nın artı oluş öngörümünden dolayı, sağ yanındaki oranın paydasındaki anlatımın artı oluşu durumunda çözüm üretebilir ve, bu durumda, σ 'nın değişim aralığı en geniş olarak $(0, \tan^{-1}(1/|vu\eta| - |v\eta|))$ olabilir. Burada, 0'ın dışlanması nedeni $\sigma = 0$ durumunda ışın üzerinde ucay tekilliklerinin bulunuşudur. Böylece, bu durumda, kıyı değerlerden olabildiğince uzak kalışın yolu olarak aşağıdaki seçimin en uygun olacağını akıla getirmektedir.

$$\sigma = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{|vu\eta| - |v\eta|} \right) \quad (3.75)$$

$|vu\eta| - |v\eta| = 0$ eşitliğinin geçerli olduğu durum $u = 1$ durumuna karşılık gelir ve bu durumda odaktaki ıraksak toplamızının ilki dışındaki tüm anlatımları, derecesi artı bütünsayı olan AKATA çokterimlilerinin tümünün sıfırlanışından dolayı sıfırlanır. Bu yüzden, bu durumu burada ayrıca irdeleyişe gerek yoktur.

$|vu\eta| - |v\eta| < 0$ eşitsizliğinin geçerli olduğu durumda (3.73) eşitsizliğinin sol yanı, $\sigma > 0$ öngörümü altında, hep eksi kalır. Öteki bir deyişle, σ 'nın, $(0, \pi/2)$ aralığındaki,

tüm değerleri (3.73) eşitsizliğini sağlar. Bu durumda, uç değerlerden olabildiğince uzak kalmak için σ değerinin $\pi/4$ olarak seçilişi uygundur.

Yukarıdaki irdeleyişi, en azından σ açısından bütünleştirebilmek için, $\sigma < 0$ öngörümü altında inceleyişleri de gündeme getirmek gerekir. Bu öngörüm altında (3.71) yerine aşağıdaki eşitliği yazarak yola çıkılabilir.

$$G(i\eta, u, v) = (\cos(\sigma) + i \sin(\sigma)) \int_0^{\infty} dt e^{-(\cos(\sigma) + i \sin(\sigma))t + \bar{\varphi}_1(t)} \frac{1 + e^{\bar{\varphi}_2(t)}}{1 + e^{\bar{\varphi}_3(t)}} \quad (3.76)$$

Buradaki yeni işlevler aşağıdaki eşitliklerle tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(t) &\equiv (|v\eta| - |vu\eta|) (\sin \sigma - i \cos \sigma) t, \\ \bar{\varphi}_2(t) &\equiv 2(-i|vu\eta| \cos \sigma + |vu\eta| \sin \sigma) t, \\ \bar{\varphi}_3(t) &\equiv 2(-i|v\eta| \cos \sigma + |v\eta| \sin \sigma) t \end{aligned} \quad (3.77)$$

Bu yeni durumda, (3.73)'ün yerini aşağıdaki eşitsizlik alır.

$$-\cos \sigma + (|v\eta| - |vu\eta|) \sin \sigma < 0 \quad (3.78)$$

Bu eşitsizlik, $|v\eta| - |vu\eta| > 0$ oluşu durumunda, σ 'nın $(-\pi/2, 0)$ aralığındaki tüm değerleri için sağlanır. Buradaki, kıyı değerlerden olabildiğince uzak kalabilmek için, σ değerinin $-\pi/4$ olarak seçilişi uygundur.

Öte yandan, $|v\eta| - |vu\eta| < 0$ durumunda, çözüm için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\tan \sigma > \frac{1}{|v\eta| - |vu\eta|} \quad (3.79)$$

Bunun anlamı, σ 'nın $(\tan^{-1} 1 / |v\eta| - |vu\eta|, 0)$ aralığında bulunuşunun gerekliliğidir. Burada da, kıyı değerlerden olabildiğince uzak kalabilmek için, σ değerinin aşağıdaki biçimde seçilişi uygundur.

$$\sigma = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{|v\eta| - |vu\eta|} \right) \quad (3.80)$$

Buraya dek yansıtılan inceleyişlerde salıkverilen özel σ değerleri, deyim yerindeyse, birer “olmazsa olmaz” değerlerdir. Duruma göre, geçerli değerlerden başkaları da seçilebilir. Bu nedenle, bu ana dek anlatılanlardan ulaşılan vargılar aşağıdaki bağıntılarla verilecek ve bununla yetinilecektir.

$$\sigma \in \begin{cases} \left(-\tan^{-1} \left(\frac{1}{|vu\eta| - |v\eta|} \right), \tan^{-1} \left(\frac{1}{|vu\eta| - |v\eta|} \right) \right), & |vu\eta| - |v\eta| < 0 \\ \left(-\tan^{-1} \left(\frac{1}{|vu\eta| - |v\eta|} \right), \tan^{-1} \left(\frac{1}{|vu\eta| - |v\eta|} \right) \right), & |vu\eta| - |v\eta| > 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

3.2.2 Özelsiz z değerleri için çözümleyiş

(3.63)'te z özelsiz bir değiştirge olarak düşünöldüğünden, z 'nin bu durumu için de çözümleyiş gerçekleştirmek gerekir. (3.63)'te z değişkeni \cosh işlevlerinin değişkenlerinde çarpan olarak görünmektedir. \cosh işlevinin değişkeninin im değişimi altında değişmez kalışı, z 'nin gerçel kesiminin eksisiz olduğu durumlarla ilgilenişin yerinde olacağı anlamına gelir. Ucaycıl konaçlarda z için aşıağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$z = r_z e^{i\theta_z}, \quad 0 < r_z < \infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_z < \frac{\pi}{2} \quad (3.82)$$

Burada, θ_z açısının tanım bölgesinin kısıtlanması, z için karmaşık düzlemdeki tanım bölgesinin gerçel kesimi eksisiz olan sayıların örttüğü yarı düzlem olarak seçildiği anlamına gelmektedir ki, bu da yukarıdaki ilgileniş öngörümüyle tutarlıdır.

Yukarıdaki η ile simgelenen gerçel büyüklük, aslında $r_z \sin \theta_z$ dir. İnceleyişlerde η , imsiz değerleriyle, çözümleyişe girmektedir ve bu durum, σ açısının tanım bölgelerinde bakışım (ing: symmetry) olarak özünü göstermektedir. Bu yüzden, burada da, θ_z 'nin salt $[0, \pi/2]$ aralığındaki değerleri için çözümleyişini gerçekleştirmeni yerinde bir tutumdur.

Bu kesimdeki çözümleyişini gerçekleştirmek için (3.63) yerine aşıağıdaki eşitliği yazarak yola çıkılabilir.

$$G(z, u, v) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (2k)! P_{2k}(x, x_1, x_2) z^{2k} = s_1 s_2 \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-s_1 s_2 t} \cosh(v u s_1 s_2 z t)}{\cosh(v s_1 s_2 z t)} \quad (3.83)$$

Burada, bir tek s değiştirgesi yerine s_1 ve s_2 ile simgelenen iki karmaşık değerli değiştirgenin kullanımı bilinçli olarak ve çözümleyişini yalınlaştırmak amaçlı olarak gündeme getirilmektedir. s_1 ve s_2 karmaşık boyları 1 olan değiştirgeler olup belirtik anlatımları aşıağıda verilmektedir.

$$s_j \equiv e^{i\sigma_j}, \quad j = 1, 2, \quad -\frac{\pi}{2} < \sigma_1 + \sigma_2 < \frac{\pi}{2} \quad (3.84)$$

Burada, σ_2 'yi, $s_2 z$ çarpımını arı sanal yapıya büründürecek biçimde seçmek olanaklıdır. Bu amaçla aşıağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$s_2 z = i\eta, \quad \sigma_2 + \theta_z = \frac{\pi}{2} \quad (3.85)$$

Bunlar gerçekleştirilecek olursa, θ_z 'nin dar açı olarak öngörölüşünden dolayı, σ_2 de bir dar açı olarak ortaya çıkar. Bu durumda, s_1 yerine de s yazılacak olursa, (3.83) eşitliği

(3.68) eşitliğine dönüşür. Bundan sonrası, bütünüyle, (3.68) sonrası çözümleyişle örtüşür. Bu nedenle, burada, yinelenişine gerek duyulmamaktadır.

3.2.3 Tümlerlerin belirlenişi

(3.71)'de ve (3.76)'da görünen tümlerlerin belirlenimi için önce aşağıdaki karmaşık değer de alabilen, iki değişirgeli tümlerin belirlenişi çözümleyişin odağına alınabilir.

$$\mathcal{G}(\kappa_1, \kappa_2) \equiv \int_0^\infty dt \frac{e^{-\kappa_1 t}}{1 + e^{-\kappa_2 t}}, \quad \Re(\kappa_1) > 0, \quad \Re(\kappa_2) > 0 \quad (3.86)$$

Orancıl yapıdan yararlanarak toplamdizicil belirleyiş yoluna gidilecek olursa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\kappa_1, \kappa_2) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \int_0^\infty dt e^{-(\kappa_1 + j\kappa_2)t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\kappa_2 j + \kappa_1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\kappa_2 j + \kappa_1} - \frac{1}{2\kappa_2 j + \kappa_2 + \kappa_1} \right) \\ &= \frac{1}{4\kappa_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\left(j + \frac{\kappa_1}{2\kappa_2}\right) \left(j + \frac{1}{2} + \frac{\kappa_1}{2\kappa_2}\right)} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Burada elde edilen son anlatım ψ (digamma) işleviyle yakından ilintilidir. Bunu göstermek ve \mathcal{G} işlevini ψ işlevi türünden anlatılabilmek için önce, z , karmaşık değerli de olsa, sonlu bir değer olmak koşulu altında aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\psi(z) \equiv -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right) \quad (3.88)$$

Buradan,

$$\psi(z_1) - \psi(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z_2} - \frac{1}{n+z_1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1 - z_2}{(n+z_2)(n+z_1)} \quad (3.89)$$

arasonucuna ulaşılabilir. Buradan da, aşağıdaki eşitliğin yazımına geçilebilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\kappa_1, \kappa_2) &\equiv \int_0^\infty dt \frac{e^{-\kappa_1 t}}{1 + e^{-\kappa_2 t}} = \frac{1}{2\kappa_2} \left[\psi\left(\frac{\kappa_1}{2\kappa_2} + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\kappa_1}{2\kappa_2}\right) \right], \\ \Re(\kappa_1) &> 0, \quad \Re(\kappa_2) > 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

Böylece, bir tümlerin çözümcül olarak belirlenişi sağlanmış olmaktadır. Bu arasonucun (3.71) ve izleyen tanımlardan oluşan yapıda kullanımı aşağıdaki sonucun yazılabilmesine olanak sağlar.

$$G(i\eta, u, v) = \frac{1}{2\kappa_2} \left[\psi\left(\frac{\kappa_1}{2\kappa_2} + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\kappa_1}{2\kappa_2}\right) + \psi\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_3}{2\kappa_2} + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_3}{2\kappa_2}\right) \right] \quad (3.91)$$

Ancak, bunun geçerli olabilmesi için κ ların aşağıdaki eşitliklerle tanımlanıyor olması gerekir.

$$\begin{aligned}\kappa_1 &\equiv \cos \sigma + i \sin \sigma - (|vu\eta| - |v\eta|) (\sin \sigma - i \cos \sigma), \\ \kappa_2 &\equiv -2 (i|v\eta| \cos \sigma - |v\eta| \sin \sigma), \\ \kappa_3 &\equiv -2 (i|vu\eta| \cos \sigma - |vu\eta| \sin \sigma)\end{aligned}\quad (3.92)$$

3.2.4 İki konumlu AKATA'nın geçerliliği

Bu altkesimde, inceleyişlere (3.61)'deki ikinci eşitlik yeniden yazılarak başlanacaktır.

$$F_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k)}(x_1) \widehat{J}(x_1, x_2)^k 1_f = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k)}(x_1) P_{2k}(u, v) \quad (3.93)$$

Burada, önceden kullanılan simgeleştirimler biraz değiştirilmiş ve böylece hem daha çağrıştırmacı hem de özüyle çok daha uyumlu duruma getirilmişlerdir. Bu bağlamda, yeni simgeleştirimlerin belirtik tanımları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}\widehat{J}(x_1, x_2) g(x) &\equiv \int_{x_1}^x d\xi_1 \int_{x_2}^{\xi_1} d\xi_2 g(\xi_2), \\ P_{2k}(u, v) &\equiv \frac{1}{(2k)!} \left\{ \frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \left(\frac{\cosh(vuz)}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0}, \\ u &\equiv \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad v \equiv x_1 - x_2\end{aligned}\quad (3.94)$$

Buradaki $P_{2k}(u, v)$ yerine yazılabilecek olan anlatım, (3.28)'in her iki yanını z 'ye göre $(2k)$ kez türevlenip z yerine 0 yerleştirilerek elde edilmiştir.

(3.94)'te verilen $P_{2k}(u, v)$ tanımının sağındaki anlatımda görünen $1/\cosh(vz)$ ile $\cosh(vuz)$ 'nin çarpımı üzerindeki $(2k)$ ncü türev, Leibniz kuralına göre, yeniden yazılır ve sıfırlanan toplamcıl anlatımlar dile getirilmezse, aşağıdaki eşitliklere ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}P_{2k}(u, v) &= \frac{1}{(2k)!} \sum_{j=0}^k \binom{2k}{2j} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \left\{ \frac{d^{2k-2j} \cosh(vuz)}{dz^{2k-2j}} \right\}_{z=0} \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{(vu)^{2k-2j}}{(2j)!(2k-2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (3.95)$$

Burada en altta görünen anlatım (3.93)'te kullanılırsa, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k f^{(2k)}(x_1) \frac{(vu)^{2k-2j}}{(2j)!(2k-2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0}, \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} f^{(2k)}(x_1) \frac{(vu)^{2k-2j}}{(2j)!(2k-2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0}, \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k+2j)}(x_1) \frac{(vu)^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}\quad (3.96)$$

Burada, f ile ilgili toplamı biraz olsun yalınlaştırmak olanaklıdır. Bu bağlamda aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k+2j)}(x_1) \frac{(vu)^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k+2j)}(x_1) \frac{(x-x_2)^{2k}}{(2k)!} \\ &= \frac{1}{2} f^{(2j)}(x+x_1-x_2) + \frac{1}{2} f^{(2j)}(x_1+x_2-x) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Bunun geçerli olabilmesi için, f işlevinin, bağımsız değişkeninin $(x+x_1-x_2)$ ve (x_1+x_2-x) değerlerinde çözümcül oluşu gereklidir.

(3.97) eşitliğinin (3.96)'da kullanımını aşağıdaki eşitliğin yazılışına olanak sağlar.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left[f^{(2j)}(x+x_1-x_2) + f^{(2j)}(x_1+x_2-x) \right] \end{aligned} \quad (3.98)$$

Artık, (3.60)'taki ikinci eşitliğe odaklanılacaktır. Bu doğrultuda aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k+1)}(x_2) \widehat{\mathcal{F}}_{2k+1}(x; x_1, \dots, x_{2k+1}) 1_f \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k+1)}(x_2) \int_{x_1}^x d\xi \widehat{J}(x_2, x_1)^k 1_f \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k+1)}(x_2) \int_{x_1}^x d\xi P_{2k} \left(\frac{\xi - x_1}{x_2 - x_1}, x_2 - x_1 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k+1)}(x_2) (-v) \int_0^{1-u} dv P_{2k}(v, -v) \end{aligned} \quad (3.99)$$

Burada, f 'nin $(2k+1)$ 'inci türevinin çarptığı tümlevli anlatım bir çokterimlidir ve derecesi $(2k+1)$ olup bir tek işlev simgeler. Bu çokterimlinin P_{2k+1} ile simgelenişi yerinde bir eylemdir. Bu çokterimli için işe yarar bir anlatım elde etmek amacıyla, (3.28) eşitliği yeniden yazılacaktır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k}(u, v) z^{2k} = \frac{\cosh(vuz)}{\cosh(vz)} \quad (3.100)$$

Bu eşitlikte, her iki yanda, u yerine v , v yerine $-v$ yerleştirildikten sonra ele geçen eşitliğin her iki yanının v 'a göre $[0, 1-u]$ aralığı üzerinde tümlevli alınıp oluşan

eşitliğin her iki yanını $-vz$ ile çarpılacak olursa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} (-v) \int_0^{1-u} dv P_{2k}(v, -v) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} P_{2k+1}(u, v) \\
&= (-vz) \int_0^{1-u} dv \frac{\cosh(vvz)}{\cosh(vz)} \\
&= -\frac{\sinh(v(1-u)z)}{\cosh(vz)} \tag{3.101}
\end{aligned}$$

Burada, \cosh işlevinin, değişkeninin im değişimi altında korunur oluşu kullanılmıştır.

Bu eşitlik yalın olarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} P_{2k+1}(u, v) = -\frac{\sinh(v(1-u)z)}{\cosh(vz)} \tag{3.102}$$

anlatımında yeniden yazılırsa, $P_{2k+1}(u, v)$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$P_{2k+1}(u, v) = -\frac{1}{(2k+1)!} \left\{ \frac{d^{2k+1}}{dz^{2k+1}} \left(\frac{\sinh(v(1-u)z)}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \tag{3.103}$$

Burada, z 'ye göre $(2k+1)$. türevi alınan oranı, $1/\cosh(vz)$ ile $\sinh(v(1-u)z)$ işlevlerinin çarpımı olarak düşünüp Leibniz kuralından yararlanılır ve sıfırlanan toplamcıl anlatımlar gösterilmeden sonuç yazılmak istenirse aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
P_{2k+1}(u, v) &= -\frac{1}{(2k+1)!} \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} \left\{ \frac{d^j}{dz^j} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\
&\quad \times \left\{ \frac{d^{2k+1-j}}{dz^{2k+1-j}} (\sinh(v(1-u)z)) \right\}_{z=0} \\
&= -\frac{1}{(2k+1)!} \sum_{j=0}^k \binom{2k+1}{2j} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\
&\quad \times \left\{ \frac{d^{2k+1-2j}}{dz^{2k+1-2j}} (\sinh(v(1-u)z)) \right\}_{z=0} \\
&= -\sum_{j=0}^k \frac{v^{2k+1-2j} (1-u)^{2k+1-2j}}{(2j)!(2k+1-2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\
&= \sum_{j=0}^k \frac{(x-x_1)^{2k+1-2j}}{(2j)!(2k+1-2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \tag{3.104}
\end{aligned}$$

Bu yazılanlar yeniden aşağıdaki yapıda yazılabilir.

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k+1)}(x_2) P_{2k+1}(u, v) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k f^{(2k+1)}(x_2) \frac{(x-x_1)^{2k+1-2j}}{(2j)!(2k+1-2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} f^{(2k+1)}(x_2) \frac{(x-x_1)^{2k+1-2j}}{(2j)!(2k+1-2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \sum_{k=0}^{\infty} f^{(2k+2j+1)}(x_2) \frac{(x-x_1)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\
&\quad \times \frac{1}{2} \left[f^{(2j)}(x-v) - f^{(2j)}(x_1+x_2-x) \right] \tag{3.105}
\end{aligned}$$

Ara eşitlikleri dışlayarak yazacak olursak bu eşitlik aşağıdaki yapıya bürünür.

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\
&\quad \times \frac{1}{2} \left[f^{(2j)}(x-x_1+x_2) - f^{(2j)}(x_1+x_2-x) \right] \tag{3.106}
\end{aligned}$$

(3.98) ve (3.106) aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak sağlar.

$$\begin{aligned}
F_1(x) + F_2(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\
&\quad \times \frac{1}{2} \left[f^{(2j)}(x+x_1-x_2) + f^{(2j)}(x-x_1+x_2) \right] \tag{3.107}
\end{aligned}$$

Buradan ilerleyebilmek için en sağdaki köşeli ayıraçlar arasındaki anlatımdaki işlevleri $(x_1 - x_2)$ 'nin doğalsayı üslüleri türünden toplam dizilere açmakta yarar bulunmaktadır.

Bu yapılırsa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
F_1(x) + F_2(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{2k}}{(2k)!} f^{(2j+2k)}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{v^{2k-2j}}{(2k-2j)!} f^{(2k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!} v^{2k} \sum_j^k \binom{2k}{2j} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(z)} \right) \right\}_{z=0} \\
&\quad \times \left\{ \frac{d^{2k-2j}}{dz^{2k-2j}} (\cosh(z)) \right\}_{z=0} \tag{3.108}
\end{aligned}$$

Buradaki sonlu toplam aslında biri $1/\cosh(z)$ ötekisi $\cosh(z)$ olan iki işlevin çarpımının Leibniz kuralınca yazılan $(2k)$. türevinin $z = 0$ 'daki değeridir. Öteki bir

deyişle aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \sum_j^k \binom{2k}{2j} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(z)} \right) \right\}_{z=0} \left\{ \frac{d^{2k-2j}}{dz^{2k-2j}} (\cosh(z)) \right\}_{z=0} \\ &= \left\{ \frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \left(\frac{\cosh(z)}{\cosh z} \right) \right\}_{z=0} = \left\{ \frac{d^{2k}}{dz^{2k}} (1) \right\}_{z=0} = \delta_{k,0} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Bu sonucun (3.108)'de kullanımı ulaşmak istediğimiz aşağıdaki vargıya g3t3r3r.

$$F_1(x) + F_2(x) = f(x) \quad (3.110)$$

B3ylece, 2 Konumlu AKATA'nın odaktaki $f(x)$ işlevini g3sterdiği kanıtlanmış olmaktadır. Ancak, bunun tam anlamıyla ge3erli olabilişi i3in $f(x)$ işlevinin, yukarıdaki kanıtlayışta g3r3nen anlatımlarında, bağlı olduğu anlatımların her birinin işlevin karmaşık d3zlemde, 33z3m3c3l olduğu b3lge i3erisinde oluşu gerekmektedir.

Konumları n sayıda ayrık konum 3zerinde 3evrimcil devirli olarak gezinen bir yerleşimde olan AKATA i3in de, buradaki 33z3mleyişten esinlenen, inceleyişler ger3ekleştirilebilir.



4. UCAYCIL TEKİLLİKLERİN AKATA YAKINSAKLIĞINA ETKİSİ

Bu bölümde ucaycıl tekilliklerin AKATA'nın yakınsaklık özellikleri üzerindeki etkisi incelenecektir. AKATA yeni bir Taylor toplamdizi açılımı olarak benimsense de, değişik düğüm konumları kullanımından dolayı, Taylor toplamdizi açılımından ayrılmaktadır. Açılımın yakınsaklığı ve geçerliliğiyle ilgili ayrıntılandırmalar aşağıda verilmekte olup elde edilen bulgular türlü çizim ve çizelgeler ile desteklenmiştir.

4.1 Ucaycıl Tekillikli İşlevler

Bu ana dek ele alınan işlevler tüm sonlu bölgelerde çözümcül olan işlevlerdi ve iraksayış durumu ile karşı karşıya kalınmamıştı. Bu andan başlayarak amacımız tekillikler ile, özellikle ucaycıl tekilliklerle, uğraşmak olacaktır. Bu doğrultuda iki işlevin oranı biçiminde yazılan, ucaycıl tekillikleri olan, $f(z)$ işlevini gözönüne alırsak; $n(z)$ ile $d(z)$ birer çokterimli olmak üzere,

$$f(z) \equiv \frac{n(z)}{d(z)} \quad (4.1)$$

eşitliği bir orancıl (ing: rational) işlev tanımlar. Ancak, burada orancılık bir anlamda kısıtlayış demektir. Bundan belli ölçüde kurtulmak amacıyla, $n(z)$ 'nin çokterimlilik ötesinde bir "bütünüşlev (ing: entire function)" olduğu; $d(z)$ 'ninse, z_1, \dots, z_N konumlarında, sırasıyla, m_1, \dots, m_N katlılıkta sıfırları olan bir işlevi betimlediği öngörülebilir. Güçlük çekmeksizin ayırđına varılabileceği gibi, pay ve paydada çokterimlilik durumu bu öngörümde bir özel altyapı konumuna düşer. Bu durumda, bu öngörümü bir özelsizleştirim olarak nitelendirmek olanaklıdır.

$d(z)$ 'nin bir çokterimli olduğu düşünülecek olursa, (4.1) yerine aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$f(z) \equiv \left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{j,k}}{(z-z_j)^k} \right) n(z) \quad (4.2)$$

Burada çoklu ucaycıl konumların ya da tekilliklerin varolabilişine karşın inceleyişler tek bir ucaycıl tekilliği olan işlevler üzerinden yapılacaktır. Bunun ötesinde paydaki işlev olan $n(z)$, değeri her yerde 1 olan değişmez bir işlev olarak ele alınacaktır.

Bu aşamada aşağıdaki işlevi gözönüne alalım.

$$f(x) \equiv \frac{1}{(x-x_p)} = -\frac{1}{x_p} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{x_p}} \right) \quad (4.3)$$

Burada x ve x_p 'nin gerçel değerli olduğu öngörülmektedir. Bu işlev, uzamcıl (ing: geometric) bir toplamdizi açılımı üretir ve gerçel eksen üzerinde, $x \in (-x_p, x_p)$ değerleri için yakınsar. Bu işlevin türevleri için de eş yakınsayıştan söz etmek olanaklıdır.

Ardışık türevleyişlerle, aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu göstermek olanaklıdır.

$$f^{(2j)}(x) = \frac{(2j)!}{(x-x_p)^{2j+1}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Buradan, (3.97)'de görünen türevlerin değerlerine aşağıdaki bağıntılarla geçilebilir.

$$f^{(2j)}(x+x_1-x_2) = \frac{(2j)!}{(x+x_1-x_2-x_p)^{2j+1}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

$$f^{(2j)}(x_1+x_2-x) = \frac{(2j)!}{(x_1+x_2-x-x_p)^{2j+1}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

(4.5)'teki toplamdizinin yakınsayıışı için x 'in imsiz değerinin $(x_1-x_2-x_p)$ 'nin imsiz değerinden küçük kalışı gerekir. Öte yandan, (4.6)'daki toplamdizinin yakınsayıışı için de x 'in imsiz değerinin $(x_1+x_2-x_p)$ 'nin imsiz değerinden küçük kalışı gerekir. Böylece, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} -|x_1-x_2-x_p| < x < |x_1-x_2-x_p|, \\ -|x_1+x_2-x_p| < x < |x_1+x_2-x_p| \end{aligned} \quad (4.7)$$

Buradan da $f^{(2j)}(x+x_1-x_2) + f^{(2j)}(x_1+x_2-x)$ işlevinin x 'in eksi olmayan bütünsayı üslüleri türünden yazılan toplamdizisinin yakınsayıışı için

$$x_B \equiv \min(|x_1-x_2-x_p|, |x_1+x_2-x_p|) \quad (4.8)$$

olmak üzere $-x_B < x < x_B$ kısıtının geçerli olacağı yargısına varılır. Bu kısıtı gerçeklemeyen x değerleri için yakınsayıış iraksayıışa dönüşecektir.

Bu an için durum gözlemi amacı ile (4.5) ve (4.6) eşitlikleri (3.98)'de kullanılırsa aşağıdaki eşitliğe ulaşılabilir.

$$\begin{aligned} F_1(x; x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \\ &\times \left[\frac{(2j)!}{(x+x_1-x_2-x_p)^{2j+1}} + \frac{(2j)!}{(x_1+x_2-x-x_p)^{2j+1}} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Cauchy çevirge tümlevlerinden bilindiği üzere aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\left| \left\{ \frac{d^{2j}}{dz^{2j}} \left(\frac{1}{\cosh(vz)} \right) \right\}_{z=0} \right| \leq \frac{B(2j)!}{\rho^{2j}} \quad (4.10)$$

Burada B Cauchy çevirge tümlevinde çevirge üzerinde üst kıyı olarak belirlenebilen, gerçel ve artı bir değişmez değerini simgelemekte olup ρ artı değerli bir değıştirge olarak $1/\cosh vz$ işlevinin z bağımsız değışkenine göre yakınsaklık yarıçapından küçük bir değeri göstermektedir.

Yakınsayış bu andan başlayarak bir başka açıdan incelenecektir. Bu amaçla, önce (3.1)'e odaklanalım. Eğer $x \geq x_2 \geq x_1$ öngörümüyle yola çıkılacak olursa, $x_2 - x_1 \geq 0$ olacağından

$$\begin{aligned} \widehat{J}(x_1, x_2) 1_f &= \int_{x_1}^x d\xi_1 \int_{x_2}^{\xi_1} d\xi_2 1_f \\ &= \int_{x_1}^x d\xi_1 (\xi_1 - x_2) \leq \int_{x_1}^x d\xi_1 (\xi_1 - x_1) = \frac{1}{2}(x - x_1)^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten aşağıdaki bağıntıya geçilebilir.

$$\begin{aligned} \widehat{J}^2(x_1, x_2) 1_f &= \int_{x_1}^x d\xi_1 \int_{x_2}^{\xi_1} d\xi_2 \left\{ \frac{1}{2} (\xi_2 - x_1)^2 \right\} \leq \int_{x_1}^x d\xi_1 \int_{x_1}^{\xi_1} d\xi_2 \left\{ \frac{1}{2} (\xi_2 - x_1)^2 \right\} \\ &\leq \frac{1}{4!} (x - x_1)^4 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Bunun özelsizleştirmisi, yine $x \geq x_2 \geq x_1$ için, ara işlemleri vermeksizin, aşağıdaki eşitsizliğe götürür.

$$\widehat{J}^k(x_1, x_2) 1_f \leq \frac{1}{(2k)!} (x - x_1)^{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Bunun (3.2)'de kullanımı, $x \geq x_2 \geq x_1$ için

$$P_{2k}(x; x_1, x_2) \leq \frac{1}{(2k)!} (x - x_1)^{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

eşitsizliğine ulaştırır.

Eğer (3.60)'taki ilk eşitliğe odaklanırsak, $x \geq x_2 \geq x_1$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|F_1(x; x_1, x_2)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| f^{(2j)}(x_1) \right| |P_{2j}(x; x_1, x_2)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|f^{(2j)}(x_1)|}{(2j)!} (x - x_1)^{2j} \quad (4.15)$$

Bu durumlarda f işlevi ile ilgili

$$f(x) \equiv \frac{1}{x - x_p}, \quad \frac{f^{(2j)}(x)}{(2j)!} = \frac{1}{(x - x_p)^{2j+1}} \quad (4.16)$$

eşitlikleri yazılabileceğinden (4.15) yerine, yine yukarıdaki $x \geq x_2 \geq x_1$ durumu için geçerli kalan

$$|F_1(x; x_1, x_2)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-x_1)^{2j}}{|x_1-x_p|^{2j+1}} \quad (4.17)$$

eşitsizliğine ulaşılabilir. Burada sağdaki toplam dizinin yakınsayabilmesi için

$$\frac{(x-x_1)^2}{|x_1-x_p|^2} \leq 1 \quad (4.18)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Bu eşitsizlikten x 'in bir ikinci derece çokterimlisinin kökleri arasında kalışının gerekliliğini çıkarmak ve

$$\begin{aligned} x^2 - 2x_1x + x_1^2 - (x_1^2 - 2x_1x_p + x_p^2) &\leq 0 \implies x^2 - 2x_1x + (2x_1x_p - x_p^2) \leq 0 \\ \implies (x-x_p)(x-2x_1+x_p) &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

eşitsizliklerini yazmak olanaklıdır. Son eşitsizlikte görünen ikinci derece çokterimlisinin kökleri x_p ve $2x_1 - x_p$ 'dir. $x_1 \geq x_p$ olmak koşuluyla, ilk kök ikincisinden büyük olamaz ve çokterimlinin eksi olabilişi için x 'in $x_p \leq x \leq 2x_1 - x_p$ eşitsizliğini sağlayışı gerekir. $x_1 < x_p$ durumunda, bu köklerin sırası değişir ve ikinci kök birinciden büyük olamaz duruma gelir. Böyle olunca da hemen yukarıda yazı içinde verilen eşitsizlik $2x_1 - x_p \leq x \leq x_p$ eşitsizliğine dönüşür. $x_1 > x_p$ için oluşturulmuş olan $x_p \leq x \leq 2x_1 - x_p$ eşitsizliğinden

$$x_p - x_2 \leq x - x_2 \leq 2x_1 - x_2 - x_p \quad (4.20)$$

yazılabilir. $x - x_2 \geq 0$ oluşu gerektiğinden (4.20)

$$2x_1 - x_2 - x_p \geq 0 \quad x_p - x_2 \leq 0 \quad (4.21)$$

koşullarını gerekli kılar.

4.2 Büyültke Üzerinden Yakınsayış İnceleyişleri

Bu andan başlayarak yakınsaklık inceleyişleri büyültke (ing: majorant) üzerinden sürdürülecektir. Bu amaçla, F_1 işlevindeki toplam dizinin yakınsayışına odaklanılacaktır. F_1 'in taban $f(x)$ işlevi, x_p gerçel değerler alabilen bir değişirge olmak üzere, $f(x) \equiv 1/(x-x_p)$ eşitliğiyle tanımlanacaktır. Ayrıca, yine $x \geq x_2 \geq x_1 \geq x_p$ sıralanışına odaklanılacaktır. Bu bağlamda, (3.60) ve (4.4) birleştirilecek olursa aşağıdaki eşitlik

yazılabilir.

$$F_1(x; x_1, x_2, x_p) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{(x_1 - x_p)^{2j+1}} P_{2j}(x; x_1, x_2) \quad (4.22)$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki toplamın toplananının paydasındaki $2j + 1$ üslü anlatım, $x \geq x_2 \geq x_1$ öngörümünden dolayı, eksisiz (ing: nonnegative) niteliktedir. Öte yandan, $x \geq x_2 \geq x_1$ öngörümü de $P_{2j}(x; x_1, x_2)$ çokterimlisinin eksi olmazlığını güvence altına alır. Bu nedenle (4.22)'deki toplamdizinin toplananları eksisiz büyüklüklerdir. Onları, bir biçimde büyülterek bir büyültke oluşturulabilir. Bu amaçla, (4.14)'ü gözönünde bulundurarak aşağıdaki tanım yapılabilir.

$$B_1(x; x_1, x_2, x_p) = \frac{1}{(x_1 - x_p)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x - x_1}{x_1 - x_p} \right)^{2j} \quad (4.23)$$

Bu, büyültke olarak düşünülebilir ve onun toplananları eş bir tabanın ikiyle bölünebilen bütünsayı üslüleridir. Büyültkenin toplamdizisinin yakınsadığı x değerlerinde $F_1(x; x_1, x_2, x_p)$ işlevinin toplamdizisi de yakınsar. Büyültke toplamdizisinin yakınsayışı için o toplamdizi toplananlarındaki üslülerin tabanının, 1'den küçük kalışı gerekir. Ama o taban 1'e ne düzeyde yaklaşırsa, o düzeyde yavaş bir yakınsayış elde edilir. Tabanın alacağı en yüksek değer 1 değil de, ondan küçük ama artı olan, sözgelimi ρ ile simgelenen bir değer olarak öngörülürse, ρ küçüldükçe yakınsaklık tezleşir, yani toplamdiziden yeterince ama az sayıda anlatım alarak yaklaşıtırm gerçekleştirilir. $1/\rho$ değerine “yakınsayış tezliği” adı verilebilir. Tüm bu anlatılanların sonunda, x için aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_p} \leq \frac{x - x_1}{x_1 - x_p} \leq \rho \quad (4.24)$$

$$x_2 \leq x \leq x_1 + \rho(x_1 - x_p) \quad (4.25)$$

Son eşitsizlik, “ x_p, x_1 'den ne düzeyde küçükse, x 'in $1/\rho$ yakınsayış tezlikli yakınsayış aralığı da o düzeyde büyük olur” anlamındadır. $x - x_2 > 0$ koşulundan dolayı aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir.

$$x_1 + \rho(x_1 - x_p) - x_2 > 0 \quad (4.26)$$

$$x_1 > \frac{x_2 + \rho x_p}{1 + \rho} \quad (4.27)$$

Sonuçta, x_p öyle seçilmelidir ki, x_1, x_2 ile x_p 'nin $1, \rho$ ağırlıklı ortalanışından büyük olmalıdır.

Eğer, x için yakınsayış aralığı $[x_2, x_2 + \ell_x]$ olarak tanımlanacak olursa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\ell_x \equiv x_1 - x_2 + \rho(x_1 - x_p), \quad x_p = x_1 - \frac{\ell_x + x_2 - x_1}{\rho} \quad (4.28)$$

Son eşitlik, $1/\rho$ yakınsayış tezliğinde, x yakınsayış aralığının uzunlaştırımı için x_p 'nin, gerçel sayı eksenü üzerinde, x_1 'den sola doğru ötelenişini gerektirir. Öteki bir deyişle, ucay (x_p) konumu yakınsayış aralığı uzunluğu için çok önemli bir belirleyicidir.

$x \geq x_2 \geq x_1$ durumu için (4.13) ve (4.14) aşağıdaki yapılara kavuşur.

$$\hat{J}^k(x_1, x_2) 1_f \geq \frac{1}{(2k)!} (x - x_2)^{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

$$P_{2k}(x; x_1, x_2) \geq \frac{1}{(2k)!} (x - x_2)^{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

Bunlar bizi (4.23)'teki gibi bir toplamdizi yapısına götürür; öyle ki, bu toplamdizinin her toplamcıl anlatımı F_1 'in karşılık gelen anlatımından küçüktür.

$$K_1(x; x_1, x_2, x_p) = \frac{1}{(x_1 - x_p)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_p} \right)^{2j} \quad (4.31)$$

Bu işlev anlatım anlatım F_1 'den küçük olduğundan buna küçültke (ing: Minorant) adı verilebilir. Bunun ıraksadığı tüm x değerleri için F_1 de ıraksar. Bu işlevin toplamdizinin ıraksayış koşulu

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_p} \geq 1 \quad (4.32)$$

ile verilir. Bunun x 'i yalın olarak içeren koşulu

$$x \geq x_1 + x_2 - x_p \quad (4.33)$$

eşitsizliğidir. Bu eşitsizlikte (4.28)'in eşitliğinden yararlanılırsa

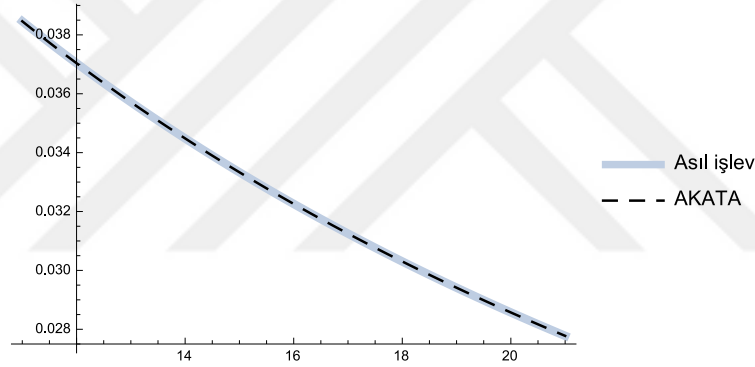
$$x \geq x_2 + \frac{\ell_x + x_2 - x_1}{\rho} \quad (4.34)$$

ve buradan da ıraksayış için $\left[x_2 + \frac{\ell_x + x_2 - x_1}{\rho}, \infty \right)$ yarı sonsuz aralığı elde edilir. Buradan, yakınsayışın bittiği yer ile ıraksayışın başladığı konum arasındaki aralıkta yakınsayış ya da ıraksayışın belirsiz kaldığı görülür. Bu da beklenen bir olgudur.

4.3 Sayısal Uygulamalar

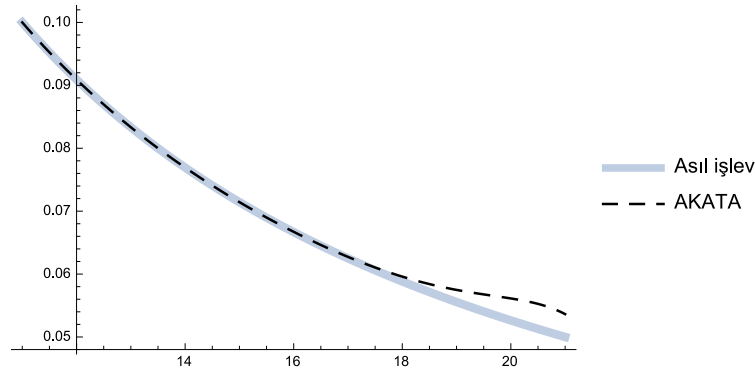
Bu bölümde bir kesim uygulama sonuçları verilecektir. Bu uygulamalarda ele alınan işlevler orancıl işlevler olup, payında değeri her yerde 1 olan değişmez işlev, paydasında ise ucaycıl konumunda sıfırı olan birinci dereceden bir çokterimli bulunmaktadır. Uygulamalar önceki bölümlerde verilen çizim ve bu çizimle ilgili elde edilen yapılar üzerine kurulmuştur. Bu bölümdeki tüm uygulamalar yakınsaklık yarıçapı ρ $1/2$ seçilerek gerçekleştirilmiştir. Çizimler elde edilirken AKATA açılımının ilk 10 anlatımı kullanılmıştır. Çizimlerde kesikli eğriler yaklaşık işlevi gösterirken, kalın eğriler asıl işlevi betimlemektedir.

İlk çizim $x_p = -15$, öteki bir deyişle $1/(x + 15)$ işlevi için elde edilmiştir. Bu çizimde $x_1 = 10$ ve $x_2 = 11$ olarak seçilmiş olup, x için aralık uzunluğu ℓ_x 10 olarak alınmıştır. Dolayısıyla, x 'in yakınsaklık aralığı çizimde görülebileceği üzere $[11, 21]$ 'dir.



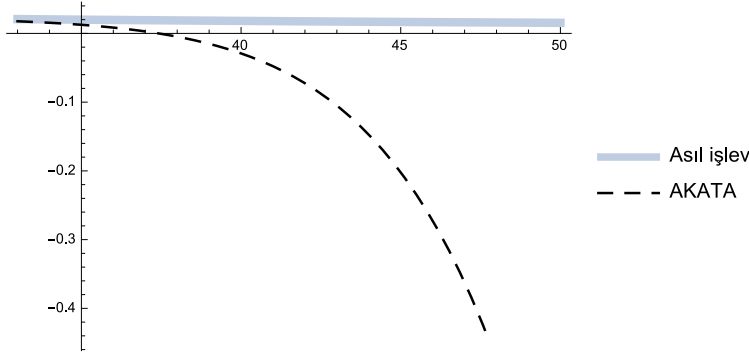
Şekil 4.1 : $x_p = -15, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 10$

Yukarıdaki çizimdeki x_1, x_2 ve ℓ_x değerlerine bağlı kalarak, sapışı gözlemleyebilmek için x_p değeri sağa kaydırılıp 1 olarak alınmış ve $1/(x - 1)$ işlevi için aşağıdaki çizim elde edilmiştir.



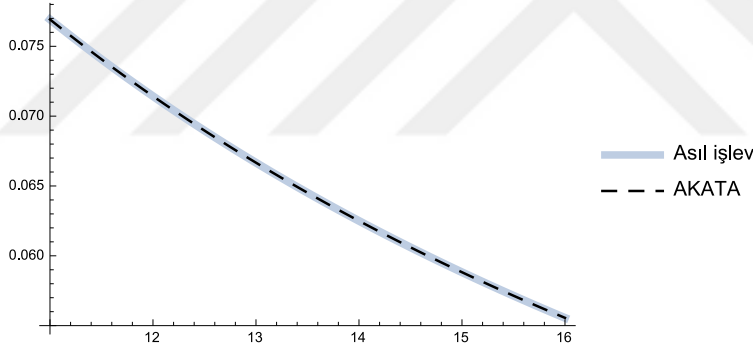
Şekil 4.2 : $x_p = 1, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 10$

Aşağıdaki çizim, ıraksayışı gözlemleyebilmek için $1/(x + 15)$ işlevini $[33, 50]$ aralığında çizdirerek elde edilmiştir.



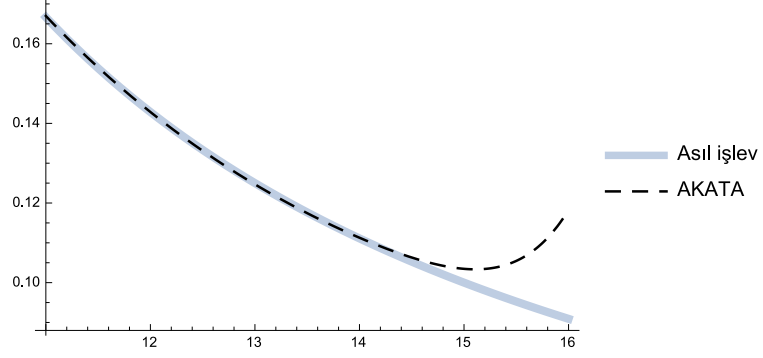
Şekil 4.3 : $x_p = -15, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 10$

Aşağıdaki çizim $x_p = -2$, öteki bir deyişle $1/(x + 2)$ işlevi için, elde edilmiştir. Bu çizimde $x_1 = 10$ ve $x_2 = 11$ olarak seçilmiş olup, x için aralık uzunluğu $\ell_x = 5$ olarak alınmıştır. Dolayısıyla x 'in yakınsaklık aralığı çizimde görülebileceği üzere $[11, 16]$ 'dir.



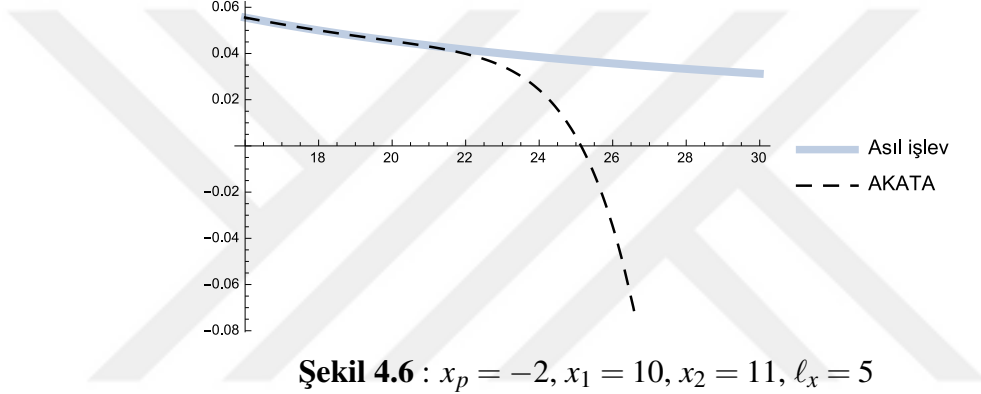
Şekil 4.4 : $x_p = -2, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 5$

Yukarıdaki çizimdeki x_1, x_2 ve ℓ_x değerlerine bağlı kalarak, sapışı gözlemleyebilmek için x_p değeri sağa kaydırılıp 5 olarak alınmış ve $1/(x - 5)$ işlevi için aşağıdaki çizim elde edilmiştir.



Şekil 4.5 : $x_p = 5, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 5$

Aşağıdaki çizim, ırsayışı gözlemleyebilmek için $1/(x + 2)$ işlevini $[16, 30]$ aralığında çizdirerek elde edilmiştir.



Şekil 4.6 : $x_p = -2, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 5$

Çıplak göz gözlemleri bazı durumlarda işlev davranışlarını en ince ayrıntılarıyla veremeyebilir. Bu durumda çizelgelerin kullanımı gözlemleyiş için çok daha iyi olabilmektedir.

İlk üç çizelge (Çizelge 4.1, 4.2, 4.3) Çizim 4.1 ve 4.2'yi destekleyecek bilgileri içerecek biçimde oluşturulmuştur. Beş ayrı x değeri için erek işlev değerleri ve bu işlevin AKATA ile oluşturulmuş yaklaşık işlev değerleri çizelgeye işlenmiş olup, her çizelge yalnızca tek bir işleve odaklanmaktadır.

Çizelge 4.1 : $1/(x + 15)$ için AKATA ve erek işlev değerleri.

x	$1/(x + 15)$	AKATA
12	0.03703703703703703	0.03703703703703706
14	0.03448275862068966	0.03448275862358785
16	0.03225806451612903	0.0322580646731505
18	0.03030303030303030	0.03030302100251332
20	0.02857142857142857	0.02857118161379826

Çizelge 4.2 : $1/(x+7)$ için AKATA ve erek işlev değerleri

x	$1/(x+7)$	AKATA
12	0.05263157894736842	0.05263157894737015
14	0.04761904761904762	0.04761904787346256
16	0.04347826086956522	0.04347828731252655
18	0.04	0.03999997048622637
20	0.03703703703703703	0.03702892097657892

Çizelge 4.3 : $1/(x-1)$ için AKATA ve erek işlev değerleri

x	$1/(x-1)$	AKATA
12	0.0909090909090909	0.09090909091111111
14	0.07692307692307693	0.07692339760257755
16	0.06666666666666666	0.06671327561470259
18	0.05882352941176471	0.05959453101896436
20	0.05263157894736842	0.05612689366139465

Son üç çizelge (Çizelge 4.4, 4.5, 4.6) Çizim 4.4 ve 4.5'i destekleyecek bilgileri içerecek biçimde oluşturulmuştur. Üç ayrı x değeri için erek işlev değerleri ve bu işlevin AKATA ile oluşturulmuş yaklaşık işlev değerleri çizelgeye işlenmiş olup, her çizelge yalnızca tek bir işleve odaklanmaktadır.

Çizelge 4.4 : $1/(x+2)$ için AKATA ve erek işlev değerleri

x	$1/(x+2)$	AKATA
11	0.07692307692307693	0.07692311638619329
13.5	0.06451612903225806	0.06451610309465517
16	0.05555555555555555	0.05555728630755036

Çizelge 4.5 : $1/(x-2)$ için AKATA ve erek işlev değerleri

x	$1/(x-2)$	AKATA
11	0.11111111111111111	0.1111137833168551
13.5	0.0869565217391404	0.0869548011935184
16	0.07142857142857142	0.07160202828275209

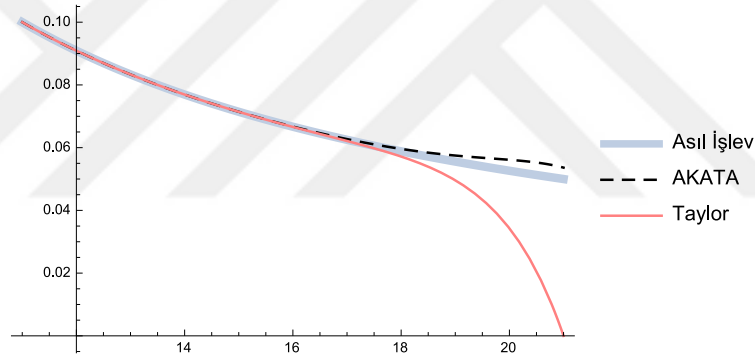
Çizelge 4.6 : $1/(x-5)$ için AKATA ve erek işlev değerleri

x	$1/(x-5)$	AKATA
11	0.16666666666666667	0.1669815114172975
13.5	0.1176470588235294	0.1174483349234264
16	0.0909090909090909	0.1182606202171925

Bu çizelgelerden ulaşılan vargılar aşağıdaki biçimde sırasaylandırılmaktadır:

1. x_p x aralığına yaklaştıkça, ilk sapış aralığının sağ ucunda görünür ve yavaş yavaş aynı aralığın sol ucuna doğru yayılır.
2. Bu durum yaklaştırım sürdürdükçe sürer ve sapış aralığının sol ucuna ulaştıktan sonra, yanılığının aralığın sol ucunda en küçük oluşuna karşın, AKATA gösterilimi yanılıklı sonuçlar verir.
3. Bu gözlemler AKATA yaklaştırımının kesilme düzeyinden ve bilgisayar ortamının çalışma duyarlılığından etkilenebilir.

Aşağıdaki çizim ise $1/(x-1)$ işlevi için Çizim (4.2)'ye ek olarak Taylor yönteminin de ince çizgiyle gözüktüğü yapıda yeniden çizdirilerek elde edilmiştir. Burada Taylor toplamdizi açılımı için açılım konumu AKATA ile tutarlı oluşu açısından 11 olarak alınmış ve her iki yöntem için de ilk 10 anlatım alınarak yaklaşımlar elde edilmiştir.



Şekil 4.7 : $x_p = 1, x_1 = 10, x_2 = 11, \ell_x = 10$

Taylor açılımıyla karşılaştırmayı gözlemleyebilmek için aşağıdaki üç çizelge oluşturulmuştur. Her bir çizelgede tek bir işleve odaklanılmış olup çizelgeye her iki yöntem için elde edilen bağıl yanılı (ing: relative error) değerleri işlenmiştir.

Çizelge 4.7 : $1/(x+15)$ için AKATA ve Taylor yöntemi bağıl yanılğı değerleri

x	AKATA	Taylor Yöntemi
12	5.66704×10^{-16}	7.0838×10^{-15}
14	8.40477×10^{-11}	4.18292×10^{-10}
16	4.86767×10^{-9}	6.91778×10^{-8}
18	3.06917×10^{-7}	2.001×10^{-6}
20	8.64352×10^{-6}	2.46997×10^{-5}

Çizelge 4.8 : $1/(x+7)$ için AKATA ve Taylor yöntemi bağıl yanılğı değerleri

x	AKATA	Taylor Yöntemi
12	3.295×10^{-14}	2.80075×10^{-13}
14	5.34271×10^{-9}	1.65382×10^{-8}
16	6.08188×10^{-7}	2.73511×10^{-6}
18	7.37844×10^{-7}	7.91144×10^{-5}
20	2.19134×10^{-4}	9.76563×10^{-4}

Çizelge 4.9 : $1/(x-1)$ için AKATA ve Taylor yöntemi bağıl yanılğı değerleri

x	AKATA	Taylor Yöntemi
12	2.22222×10^{-11}	$1. \times 10^{-10}$
14	4.16883×10^{-6}	5.9049×10^{-6}
16	6.99134×10^{-4}	9.76563×10^{-4}
18	1.3107×10^{-2}	2.82475×10^{-2}
20	6.6411×10^{-2}	3.48678×10^{-1}

5. KARMAŞIK DÜZLEMDE AKATA YAKINSAKLIK İNCELEYİŞLERİ

5.1 AKATA Tümler Katsayıları Tanımlayışları

AKATA, sayılabilir sonsuz sayıda toplamcıl anlatımın toplamı olarak yazılabilen bir yapıdadır. Bunun için, önce,

$$\widehat{J}_k g(z) = \int_{z_k}^z d\zeta_k g(\zeta_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1)$$

eşitlikleriyle verilen tümler işleçlerini, sonra da, bunların sonlu sayıda çarpan içeren ve aşağıdaki tanımlayışlarla verilen çarpımlarını gündeme getirmek yeterlidir.

$$\widehat{I}_k g(z) = \widehat{J}_1 \widehat{J}_2 \cdots \widehat{J}_k g(z) \equiv \left[\prod_{j=1}^k \widehat{J}_j \right] g(z), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Bu eşitliklerde, $g(z)$, $f(z)$ 'nin içinde bulunduğu işlev uzayından alınan herhangi bir işlevi simgelemektedir.

Son eşitlikteki sonlu çarpımda, “bir işleçler çarpımının alt kuyusu üst kuyusundan büyükse o çarpım birim işleç alınır” uylaşımının (ing: convention) geçerli olduğu öngörülmektedir.

AKATA'nın önceki bölümlerde verilen bağıntılandırımı çerçevesinde aşağıdaki eşitlikte verildiği gibi yazılabileceği bilinen bir gerçektir.

$$f(z) = \sum_{j=0}^k f^{(j)}(z_{j+1}) \widehat{I}_j 1_f + \widehat{I}_{k+1} f^{(k+1)}(z), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Burada (j) yapısındaki üstsimge, j bütünsayısı kertesindeki (ing: order) türevi anlatmaktadır. 1_f ise birim (değeri 1 olan) değişmez işlevi simgelemektedir.

(5.3)'teki sonlu toplamdan geriye kalan anlatım $k \rightarrow \infty$ için sifıra giderse (5.3) yerine aşağıdaki eşitlik de yazılabilir.

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(z_{j+1}) \widehat{I}_j 1_f \quad (5.4)$$

Bu eşitlikle verilen gösterilime “Ayrışik Konumlarda Artan Türevler Açılımı” adını vermiş ve bunun için “AKATA” kısaltımını kullanmıştık.

5.2 AKATA Tümlöv Katsayılarının Saptırım Açılımları ve Kıyılıandırılmalar

Bir önceki bölümde anımsatılan AKATA bağıntılılandırımındaki katsayılarda 1_f ile simgelenen değışmez işlevin, (5.2)'de verilen, \widehat{I}_k işleci altındaki görüntülerinin belirleniş AKATA'nın en önemli bileşeni olmak durumundadır.

(5.2)'den bir bakışta ayırđına varılabileceğı gibi, \widehat{I}_0 , uylaşım gereğı, \widehat{I} ile simgeleyebileceğimiz birim işlece özdeştir. Bir işlevin, böylesine yalın yapıdaki işlecin altındaki görüntüsü özüne eşit olduğından bu görüntünün belirleniş son derece yalındır.

Yine (5.2)'den yola çıkarak, ama bu kez (5.1)'den de yararlanarak, aşığıdaki eşitlikleri yazmak olanaklıdır.

$$\widehat{I}_1 1_f = \widehat{J}_1 1_f = \int_{z_1}^z d\zeta_1 = z - z_1 \quad (5.5)$$

(5.4)'ten ve buradan tez olarak ayırđına varılabilen olgu, $\widehat{I}_0 1_f$ ile $\widehat{I}_1 1_f$ tümlövleyiş sonucu elde edilen anlatımların, z 'nin, sırasıyla 0. ve 1. dereceden, çokterimlili oluşudur. Ancak, bu çokterimlilik olgusu salt bu iki görüntüye özgü değıldir. Tüm $\widehat{I}_k 1_f$ görüntüleri için geçerlidir. Uzbilimcil tümevarım (ing: mathematical induction) yoluyla kanıtlanabileceğı gibi $\widehat{I}_k 1_f$ 'nin tümlövleyişler sonrası elde edilen anlatımı, z 'nin k . dereceden bir çokterimlisidir. Bu durumda, AKATA taban işlevleri olarak adlandırılabilir $\widehat{I}_k 1_f$ 'ler, z 'nin çokterimlili oluşunun yanısıra, özyineli ardışık tümlövleyişlerle belirlenebilirler ve bu eylemler kağıt üstünde de elyordamıyla, bilgisayar ortamlarında betikleyiş ya da buyrukdizileyişle gerçekleştirilebilir. Ancak, elde edilecek anlatımlardan, salt bakışla, yakınsayış olgusu üzerinde vargılar üretmek yalın bir olgu değıldir. Bu yüzden bunların belirleniş için uzbilimcil yöntemlerden yararlanarak, yakınsayış kanıtlayışında yalınlaştırıcı yöntemler oluşturmamak olanaklıdır. Bu doğırultuda, saptırım açılımlarından yararlanmak, belki de ilk anımsanacak olgulardan birisidir.

Saptırım açılımı olayına odaklanabilmek için, önce, aşığıda tanımları verilen AKATA çokterimlilieri gündeme getirilebilir.

$$s_k(z) \equiv \widehat{I}_k 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Burada, ingilizce SNADE kısaltımını çağrıştırmak için s simgesi kullanılmış olup bu AKATA çokterimlilerinin açılım konumlarına bağımlılığı, yalınlık sağlamak amacıyla, belirtik olarak gösterilmemektedir.

Saptırım açılımını etkili biçimde gerçekleştirebilmek için z_1, z_2, \dots konumlarının z_c ile simgelenen ve tanımını bizim isteklerimize göre ama anlamlı olarak yapılan bir ‘‘Özek Konumu’’ çevresinde belli bir (küçük oluşunda yakınsayışı olumlulaştırın) teker içinde yerleştğini düşünelim. Aslında, bu her zaman düşünülecek bir olgudur ama, konumların tümünün, erekteki (ing: target) işlevin tek bir Taylor yakınsayış tekeri içinde kalışına özen göstermek gerekir. Yoksa, AKATA yakınsaklık bölgesinin saptanışında güçlüklerle, ya da güçlüklerin de ötesinde, olanaksızlıklarla yüzleşilebilir. Bu durumda, aşağıdaki tanımlar yazılabilir.

$$\widehat{J}_c g(z) = \int_{z_c}^z d\zeta_c g(\zeta_c), \quad \widehat{J}_{k,c} g(z) = \int_{z_c}^{z_k} d\zeta_c g(\zeta_c), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Bu tanım, (5.1)’in aşağıdaki biçimde yeniden yazılışına olanak sağlar.

$$\widehat{J}_k g(z) = \widehat{J}_c g(z) - \widehat{J}_{k,c} g(z), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

Buradan da,

$$\widehat{I}_k 1_f = \left[\left(\widehat{J}_c - \widehat{J}_{1,c} \right) \times \dots \times \left(\widehat{J}_c - \widehat{J}_{k,c} \right) \right] 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

yazımına geçilebilir.

z ’nin özekten (z_c) yeterince uzakta oluşu durumunda bir işlevin $\widehat{J}_{k,c}$ altındaki görüntüsünün \widehat{J}_c altındaki görüntüsüne göre karmaşık boyca küçük kalacağını görmek hiç de güç değildir. Bu yüzden, $\widehat{J}_{k,c}$ bir saptırım işleci olarak düşünülebilir ve ε bir saptırım değıştirgesi olmak üzere, aşağıdaki saptırımlı işleçler

$$\widehat{I}_k(\varepsilon) 1_f = \left[\left(\widehat{J}_c - \varepsilon \widehat{J}_{1,c} \right) \times \dots \times \left(\widehat{J}_c - \varepsilon \widehat{J}_{k,c} \right) \right] 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

ve buradan da aşağıdaki saptırımlı AKATA çokterimlileri tanımlanabilir.

$$\widetilde{s}_k(z, \varepsilon) \equiv \left[\left(\widehat{J}_c - \varepsilon \widehat{J}_{1,c} \right) \times \dots \times \left(\widehat{J}_c - \varepsilon \widehat{J}_{k,c} \right) \right] 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Buradaki $\widetilde{s}_k(x, \varepsilon)$ çokterimlisi, ε ’a göre k . derecedendir. Bu yüzden,

$$\widetilde{s}_k(z, \varepsilon) = \sum_{k_1=0}^k \widetilde{s}_{k,k_1}(z) \varepsilon^{k_1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

$$\tilde{s}_{k,k_1}(z) \equiv \frac{1}{k_1!} \left(\frac{\partial^{k_1} \tilde{s}_k(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^{k_1}} \right)_{\varepsilon=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, k \quad (5.13)$$

yazılabilir. Böylece, $\tilde{s}_k(z, \varepsilon)$ çokterimlisinin belirlenişi $\tilde{s}_{k,k_1}(z)$ çokterimlilerinin belirlenişine dönüştürülmüş olur.

Önce, (5.13)'teki eşitliğin $k_1 = 0$ için olanını kullanarak $\tilde{s}_{k,0}(z)$ 'in belirlenişine odaklanabiliriz. Bu durumda,

$$\tilde{s}_{k,0}(z) \equiv \tilde{s}_k(z, 0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

yazılabilir. Bu (5.11)'in $\varepsilon = 0$ için yapısıyla bütünleştirilirse aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\tilde{s}_{k,0}(z) \equiv \hat{J}_c^k 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

Burada, 1_f 'nin \hat{J}_c^k altındaki görüntüsü ardışık tümlevleyişlerle, yalın bir biçimde, belirlenebilir ve sonuçta aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\tilde{s}_{k,0}(z) = \frac{(z - z_c)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

$(z - z_c)$ 'nin karmaşık boyunun R ile kısılandırılmış oluşu, buradan, aşağıdaki kısılandırmaya götürür.

$$|\tilde{s}_{k,0}(z)| \leq \frac{R^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.17)$$

Bir sonraki adımda, (5.13)'teki eşitliğin $k_1 = 1$ için olanını kullanarak, $\tilde{s}_{k,1}(z)$ 'in belirlenişine odaklanabiliriz. Bu durumda,

$$\tilde{s}_{k,1}(z) \equiv \left(\frac{\partial \tilde{s}_k(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.18)$$

yazılabilir. Burada, sağ yandaki anlatımın belirtik anlatımını elde etmek için (5.11)'in her iki yanının ε 'a göre türevini alıp ele geçen anlatımda $\varepsilon = 0$ yerleştirmek yeterlidir. Bu amaçla, (5.11)'in sağ yanındaki anlatımı önce çarpım simgesi altında yazmakta yarar bulunmaktadır.

$$\tilde{s}_k(z, \varepsilon) \equiv \left[\prod_{\ell=0}^{k-1} \left(\hat{J}_c - \varepsilon \hat{J}_{\ell+1,c} \right) \right] 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.19)$$

Bu eşitliğin her iki yanının ε 'a göre türevi alınırsa, özenli bir bakış aşağıdaki eşitliğin yazılabileceğini gösterir.

$$\frac{\partial \tilde{s}_k(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = - \sum_{\ell=0}^{k-1} \left\{ \left[\prod_{\ell_1=0}^{\ell-1} \left(\hat{J}_c - \varepsilon \hat{J}_{\ell_1+1,c} \right) \right] \hat{J}_{\ell+1,c} \left[\prod_{\ell_2=0}^{k-\ell-2} \left(\hat{J}_c - \varepsilon \hat{J}_{\ell+\ell_2+2,c} \right) \right] \right\} \times 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.20)$$

Burada $\varepsilon = 0$ yerleştirilirse, aşağıdaki eşitliğe ulaşılabilir.

$$\left(\frac{\partial \tilde{s}_k(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = - \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \widehat{J}_c^\ell \widehat{J}_{\ell+1, c} \widehat{J}_c^{k-\ell-1} \right] 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

Bu ise aşağıdaki arasonuca götürür.

$$\tilde{s}_{k,1}(z) = - \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \widehat{J}_c^\ell \widehat{J}_{\ell+1, c} \widehat{J}_c^{k-\ell-1} \right] 1_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

Bu eşitlikte, $\widehat{J}_{\ell+1, c}$ işleci altındaki görüntü z' 'den bağımsızdır. Öteki bir deyişle, değişmez niteliktedir. Bu nedenle, (5.22) yerine, herhangi bir özelsizlik yitimine neden olmaksızın, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\tilde{s}_{k,1}(z) = - \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\widehat{J}_c^\ell 1_f \right) \left(\widehat{J}_{\ell+1, c} \widehat{J}_c^{k-\ell-1} 1_f \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

Burada gözükten iki anlatım için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\widehat{J}_c^\ell 1_f = \frac{(z - z_c)^\ell}{\ell!} \quad (5.24)$$

$$\widehat{J}_{\ell+1, c} \widehat{J}_c^{k-\ell-1} 1_f = \int_{z_c}^{z_{\ell+1}} d\zeta \frac{(\zeta - z_c)^{k-\ell-1}}{(k-\ell-1)!} = \frac{(z_{\ell+1} - z_c)^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \quad (5.25)$$

Bunları kullanarak (5.23) aşağıdaki yapıya büründürülebilir.

$$\tilde{s}_{k,1}(z) = - \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{(z - z_c)^\ell}{\ell!} \frac{(z_{\ell+1} - z_c)^{k-\ell}}{(k-\ell)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

Eğer,

$$|z_1 - z_c| \geq |z_2 - z_c| \geq \dots \geq |z_m - z_c| \geq \dots \quad (5.27)$$

öngörümü yapılacak olursa, (5.26)'dan, aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_{k,1}(z)| &\leq \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{|z - z_c|^\ell}{\ell!} \frac{|z_{\ell+1} - z_c|^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \leq \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{|z - z_c|^\ell}{\ell!} \frac{|z_1 - z_c|^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \\ &= \frac{(|z - z_c| + |z_1 - z_c|)^k}{k!} - \frac{(|z - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ &\leq \frac{(|z - z_c| + |z_1 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.28)$$

Burada, en sondaki yataysıradaki anlatımda kötümserlik daha da büyütülmüştür. Ama, buna karşın anlatım, özellikle toplam dizilerde kullanım açısından, çok daha yalınlaştırılmıştır. Bundan sonra da, eğer, yalınlık, işlemlerimizi daha etkinleştirecekse, ona karşılık gelen yüksek kötümserlik yeğlenecektir.

(5.28)'den, salt ilk yataysıradan yola çıkarak, aşağıdaki kıyılendirim sonucuna ulaşılabilir.

$$|\tilde{s}_{k,1}(z)| \leq \frac{(R + |z_1 - z_c|)^k}{k!} - \frac{R^k}{k!} \leq \frac{(R + |z_1 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.29)$$

Bir sonraki adımda, (5.13)'teki eşitliğin $k_1 = 2$ için olanını kullanarak $\tilde{s}_{k,2}(z)$ 'nin belirlenişine odaklanabiliriz. Bu durumda,

$$\tilde{s}_{k,2}(z) \equiv \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \tilde{s}_k(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right)_{\varepsilon=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

yazılabilir. Burada, sağ yandaki anlatımın belirtik anlatımını elde etmek için (5.19)'un her iki yanının ε 'a göre iki kez ardışık türevini alıp ele geçen anlatımda $\varepsilon = 0$ yerleştirmek sonra da ele geçen anlatımı 2'ye bölmek yeterlidir. Bu yapırsa, aşağıdaki eşitliğe ulaşılabilir.

$$\tilde{s}_{k,2}(z) = \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=0}^{k-\ell_1-1} \left(\widehat{J}_c^{\ell_1} 1_f \right) \left(\widehat{J}_{\ell_1+1,c} \widehat{J}_c^{\ell_2} 1_f \right) \left(\widehat{J}_{\ell_1+\ell_2+2,c} \widehat{J}_c^{k-\ell_1-\ell_2-2} 1_f \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

Bu anlatım elde edilirken, yukarıda sözedilen işlemler sonrasında, değişmez nitelikli görüntüleri ayırıştırmak amacıyla, gerekli iki konuma 1_f yerleştirmeyi de gerçekleştirilmiştir.

(5.31)'de sıradan ayıraçlar arasındaki görüntülerin belirtik anlatımları kullanılacak olursa, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|\tilde{s}_{k,2}(z)| \leq \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=0}^{k-\ell_1-1} \frac{|z - z_c|^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{|z_{\ell_1+1} - z_c|^{\ell_2+1}}{(\ell_2 + 1)!} \frac{|z_{\ell_1+\ell_2+2} - z_c|^{k-\ell_1-\ell_2-1}}{(k - \ell_1 - \ell_2 - 1)!} \quad (5.32)$$

Bu eşitliği daha uygun yapıya büründürmek için ℓ_2 üzerindeki toplamda ℓ_2 yerine $\ell_2 - 1$ yerleştirilecek olursa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$|\tilde{s}_{k,2}(z)| \leq \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=1}^{k-\ell_1} \frac{|z - z_c|^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{|z_{\ell_1+1} - z_c|^{\ell_2}}{\ell_2!} \frac{|z_{\ell_1+\ell_2+1} - z_c|^{k-\ell_1-\ell_2}}{(k - \ell_1 - \ell_2)!} \quad (5.33)$$

Bu eşitsizlikte de, $|z_{\ell_1+\ell_2+1} - z_c|$ yerine, onun alabileceği en büyük değer olan, $|z_{\ell_1+2} - z_c|$ yerleştirilecek olursa; sağ yan daha da büyütülmüş olur ve aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|\tilde{s}_{k,2}(z)| \leq \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=1}^{k-\ell_1} \frac{|z - z_c|^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{|z_{\ell_1+1} - z_c|^{\ell_2}}{\ell_2!} \frac{|z_{\ell_1+2} - z_c|^{k-\ell_1-\ell_2}}{(k - \ell_1 - \ell_2)!} \quad (5.34)$$

Bu eşitsizliğin sağ yanındaki ikinci toplamda, toplam $\ell_2 = 1$ yerine $\ell_2 = 0$ 'dan başlanacak olursa, eşitsizliğin sağ yanı büyütülmüş olur. Bu ise, (5.34) yerine aşağıdaki eşitsizliğin yazılabileceği anlamına gelir.

$$|\tilde{s}_{k,2}(z)| \leq \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=0}^{k-\ell_1} \frac{|z-z_c|^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{|z_{\ell_1+1}-z_c|^{\ell_2}}{\ell_2!} \frac{|z_{\ell_1+2}-z_c|^{k-\ell_1-\ell_2}}{(k-\ell_1-\ell_2)!} \quad (5.35)$$

Burada, ℓ_2 üzerindeki toplamda, ikiterimli (ing: binomial) toplamı kuralından yararlanırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$|\tilde{s}_{k,2}(z)| \leq \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \frac{|z-z_c|^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{(|z_{\ell_1+1}-z_c| + |z_{\ell_1+2}-z_c|)^{k-\ell_1}}{(k-\ell_1)!} \quad (5.36)$$

Bu eşitsizlikte de, $|z_{\ell_1+1}-z_c| + |z_{\ell_1+2}-z_c|$ yerine onun en büyük değeri olan $|z_1-z_c| + |z_2-z_c|$ yerleştirilirse, sağ yan daha da büyütülmüş olur ve ele geçen toplam çok yalın bir anlatımla belirtik olarak yazılabilir.

$$|\tilde{s}_{k,2}(z)| \leq \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \frac{|z-z_c|^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{(|z_1-z_c| + |z_2-z_c|)^{k-\ell_1}}{(k-\ell_1)!} \quad (5.37)$$

Bu eşitsizliğin sağ yanındaki toplam bir ikiterimli toplamı olduğundan indirgenebilir ve böylece aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılabilir.

$$|\tilde{s}_{k,2}(z)| \leq \frac{(|z-z_c| + |z_1-z_c| + |z_2-z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

Buradan, güçlük çekmeden, aşağıdaki kıyılandırım yapısına erişilebilir.

$$|\tilde{s}_{k,2}(z)| \leq \frac{(R + |z_1-z_c| + |z_2-z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

Özelsizliğe erişebilmek için bir adım daha atmak üzere, (5.32)'deki bağıntılandırımın biraz daha özelsizleştirilmişini üretim yoluna gidebilir ve sonuçta aşağıdaki eşitsizliğe erişebiliriz.

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_{k,3}(z)| &\leq \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=0}^{k-\ell_1-1} \sum_{\ell_3=0}^{k-\ell_1-\ell_2-2} \frac{|z-z_c|^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{|z_{\ell_1+1}-z_c|^{\ell_2+1}}{(\ell_2+1)!} \frac{|z_{\ell_1+\ell_2+2}-z_c|^{\ell_3+1}}{(\ell_3+1)!} \\ &\times \frac{|z_{\ell_1+\ell_2+\ell_3+3}-z_c|^{k-\ell_1-\ell_2-\ell_3-2}}{(k-\ell_1-\ell_2-\ell_3-2)!} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Burada, ℓ_2 ve ℓ_3 yerine, sırasıyla, $\ell_2 - 1$ ve $\ell_3 - 1$ yerleştirilecek olursa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılabilir.

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_{k,3}(z)| &\leq \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=1}^{k-\ell_1} \sum_{\ell_3=1}^{k-\ell_1-\ell_2-1} \frac{|z-z_c|^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{|z_{\ell_1+1}-z_c|^{\ell_2}}{\ell_2!} \frac{|z_{\ell_1+\ell_2+1}-z_c|^{\ell_3}}{\ell_3!} \\ &\times \frac{|z_{\ell_1+\ell_2+\ell_3+1}-z_c|^{k-\ell_1-\ell_2-\ell_3}}{(k-\ell_1-\ell_2-\ell_3)!} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Burada, $|z_{\ell_1+1} - z_c|$, $|z_{\ell_1+\ell_2+1} - z_c|$, $|z_{\ell_1+\ell_2+\ell_3+2} - z_c|$ 'nin yerine onların en büyük değerleri olan, sırasıyla, $|z_1 - z_c|$, $|z_2 - z_c|$, $|z_3 - z_c|$ yerleştirilecek olursa, sağ yandaki anlatım büyütülmüş olur. Böylece,

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_{k,3}(z)| &\leq \sum_{\ell_1=0}^{k-1} \sum_{\ell_2=1}^{k-\ell_1} \sum_{\ell_3=1}^{k-\ell_1-\ell_2-1} \frac{|z - z_c|^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{|z_1 - z_c|^{\ell_2}}{\ell_2!} \frac{|z_2 - z_c|^{\ell_3}}{\ell_3!} \\ &\quad \times \frac{|z_3 - z_c|^{k-\ell_1-\ell_2-\ell_3}}{(k - \ell_1 - \ell_2 - \ell_3)!} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Bu eşitsizliğin sağ yanı bir üçterimli toplamcıl açılımdır (ing: trinomial additive expansion). Bu yüzden aşağıdaki biçimde tıkız (ing: compact) olarak yazılabilir.

$$|\tilde{s}_{k,3}(z)| \leq \frac{(|z - z_c| + |z_1 - z_c| + |z_2 - z_c| + |z_3 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.43)$$

Buradan, güçlük çekmeden, aşağıdaki kısılandırmaya da geçilebilir.

$$|\tilde{s}_{k,3}(z)| \leq \frac{(R + |z_1 - z_c| + |z_2 - z_c| + |z_3 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.44)$$

Buraya dek olan inceleyişlerden çıkarımlarla son iki sonucu özelsizleştirmek olanaklıdır. Bu bağlamda aşağıdaki bağıntılar verilebilir.

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_{k,\ell}(z)| &\leq \frac{(|z - z_c| + |z_1 - z_c| + |z_2 - z_c| + \dots + |z_\ell - z_c|)^k}{k!}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_{k,\ell}(z)| &\leq \frac{(R + |z_1 - z_c| + |z_2 - z_c| + \dots + |z_\ell - z_c|)^k}{k!}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (5.46)$$

Bu eşitsizliklerin sağ yanlarını, ℓ 'e değil, ℓ 'in alabileceği en büyük değer olan k 'ye dek toplamlar içerecek biçimde büyüterek, daha kötümser ama buna karşın ℓ 'den bağımsız anlatımlar elde edilebilir ve aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_{k,\ell}(z)| &\leq \frac{(|z - z_c| + |z_1 - z_c| + |z_2 - z_c| + \dots + |z_k - z_c|)^k}{k!}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_{k,\ell}(z)| &\leq \frac{(R + |z_1 - z_c| + |z_2 - z_c| + \dots + |z_k - z_c|)^k}{k!}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (5.48)$$

Bunları da, bu kez k 'dan bağımsız kılarak, daha kötümserleştirmek ve daha yalın kullanılabilir duruma getirmek olanaklıdır. Böylece aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$|\tilde{s}_{k,\ell}(z)| \leq \frac{\left(|z - z_c| + \sum_{m=1}^{\infty} |z_m - z_c|\right)^k}{k!},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \ell = 0, 1, 2, \dots, k \quad (5.49)$$

$$|\tilde{s}_{k,\ell}(z)| \leq \frac{\left(R + \sum_{m=1}^{\infty} |z_m - z_c|\right)^k}{k!},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \ell = 0, 1, 2, \dots, k \quad (5.50)$$

5.3 Yuvalandırımı Konum Tekerleri ve AKATA Tümler Katsayılarının Bütüneyaygın Kıyılılandırımı

Eşitlik niteliği de taşıyabilen (5.49) ve (5.50) sırasayılı eşitsizliklerdeki, aslında bir toplamdizi olan, sonsuz toplam yakınsamadıkça, ne (5.49) ne de (5.50) işe yarar bir durumda olamaz. Önceki bölümde, $|z_m - z_c|$ 'lerin, m büyüdükçe yerleşimini genişletmeyen bir dizi oluşturduğu öngörülmüştü. Ancak, bu öngörüm, (5.49) ve (5.50)'deki o sonsuz toplamın yakınsayışı için yeterli değildir. Bu öngörüm geçerli de olsa, o sonsuz toplam yakınsamayabilir. Yakınsayış için ek bir öngörüm gereksinim bulunmaktadır. Bu bölümde bu öngörüm aşağıdaki eşitliklerin tümünün gerçekleşmesi olarak ileri sürülecektir.

$$|z_m - z_c| = \alpha_m |z_1 - z_c|, \quad \alpha_1 \equiv 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.51)$$

Burada, tanım gereği tüm, α_m 'ler artı gerçel sayılar olarak öngörülmekte olup, yine tanım gereği, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, dizisinin, altsırasayı büyüdükçe büyümeyen ve tümünün toplamı sonlu kalan nitelikte öğelerden oluştuğu da ayrıca öngörülmelidir. Bu öngörüm altında, (5.51) aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$\sum_{m=1}^{\infty} |z_m - z_c| = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m\right) |z_1 - z_c|, \quad \alpha_1 \equiv 1 \quad (5.52)$$

Yakınsayışla ilgili biraz görüş oluşturabilmek için aşağıdaki bir kaç durumu dile getirmek yeterlidir.

1. C gerçel bir değişmez olmak üzere, $\alpha_m = C$ durumu, yakınsak bir sonsuz toplam değil sonsuz değer üretir.

2. C bir gerçel değişmez olmak üzere, $\alpha_m = C/m$ durumu da, yakınsak bir sonsuz toplam değil sonsuz değer üretir.
3. C bir gerçel değişmez olmak üzere, $\alpha_m = C/m^2$ durumu yakınsak bir sonsuz toplam ve dolayısıyla sonlu bir sayı üretir.
4. C ve ν gerçel birer değiştirge olmak üzere, $\alpha_m = C/m^\nu$ durumu, ancak $\nu > 1$ için, yakınsak bir sonsuz toplam ve dolayısıyla sonlu bir sayı üretir. Öteki durumlarda yakınsayış söz konusu değildir, sonsuz değerli toplam elde edilir.

Yakınsayış durumu için

$$\alpha \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \quad (5.53)$$

tanımı yapılacak olursa, (5.49) ve (5.50), aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$|\tilde{s}_{k,\ell}(z)| \leq \frac{(|z - z_c| + \alpha |z_1 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \ell = 0, 1, 2, \dots, k \quad (5.54)$$

$$|\tilde{s}_{k,\ell}(z)| \leq \frac{(R + \alpha |z_1 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \ell = 0, 1, 2, \dots, k \quad (5.55)$$

Böylece, AKATA tümlevcil katsayılarının saptırım açılımlarının en yalın durumları elde edilmiş olur.

Artık, biraz daha öteye gidilebilir ve (5.12)'den aşağıdaki eşitsizliğe geçilebilir.

$$|\tilde{s}_k(z, \varepsilon)| = \sum_{k_1=0}^k |\tilde{s}_{k,k_1}(z)| |\varepsilon|^{k_1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.56)$$

Bu eşitsizlikte (5.54) ve (5.55)'ten yararlanılacak olursa aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$|\tilde{s}_k(z, \varepsilon)| \leq \left(\sum_{\ell=0}^k |\varepsilon|^\ell \right) \frac{(|z - z_c| + \alpha |z_1 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \ell = 0, 1, 2, \dots, k \quad (5.57)$$

$$|\tilde{s}_k(z, \varepsilon)| \leq \left(\sum_{\ell=0}^k |\varepsilon|^\ell \right) \frac{(R + \alpha |z_1 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \ell = 0, 1, 2, \dots, k \quad (5.58)$$

Bunlarda, $\varepsilon = 1$ alınacak olursa, saptırılmamış AKATA Tümlevcil Katsayıları için aşağıdaki eşitsizliklere geçilebilir.

$$|s_k(z)| \leq (k+1) \frac{(|z - z_c| + \alpha |z_1 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.59)$$

$$|s_k(z)| \leq (k+1) \frac{(R + \alpha |z_1 - z_c|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.60)$$

Bunlar, saptırım olayından bağımsız olduklarından, “bütüne yaygın” kıyılılandırılmalar olarak nitelendirilmektedirler.

5.4 Erek İşlevinin Türevlerinin Kıyılılandırımı

Bu bölüme (5.4)’e yeniden odaklanarak başlanacaktır. (5.4)’ten, $\widehat{I}_j 1_f$ yerine $s_j(z)$, j yerine de k yerleştirilerek, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|f(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f^{(k)}(z_{k+1})| |s_k(z)| \quad (5.61)$$

Burada, sağ yandaki sonsuz toplamı kıyılılandırmak gerekmektedir. Toplamdaki toplananın çarpanlarından ikincisi önceki bölümlerde kıyılılandırılmıştır ve erek işlevi ile ilgili değildir. Buna karşın, birinci çarpan erek işleviyle ilgilidir ve bu an için kıyılılandırılmamış durumdadır. Bu bölümde onun kıyılılandırımı gerçekleştirilecektir.

Önceki kesimlerde, $f(z)$ ’nin içinde yakınsadığı bir tekerden sözedilmiş ve yarıçapı R ile özeği ise z_c ile simgelenmişti. Bunun ötesinde konumların bu teker içinde yerleşik olduğu ve özeğe yakın bir toplanış gösterdiği de düşünülmüştü. z_{k+1} de bu konumlardan biri olup erek işlevinin bir başka yakınsayış tekeri içinde yerleşik olmalıdır. Öyle ki, tekerin özeği z_{k+1} olsun ve bu iç teker asıl yakınsayış tekerine içten teğet olsun. Bu durumda, bu iç tekerin yarıçapının $R - (z_{k+1} - z_c)$ oluşu gerekecektir. Bu ise, Karmaşık Çözümleyiş’ten (ing: Complex Analysis) bilindiği üzere, aşağıdaki eşitsizlik ile yazılabilir.

$$\left| f^{(k)}(z_{k+1}) \right| \leq \frac{k! M_k}{(R - (z_{k+1} - z_c))^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.62)$$

Burada, M_k yukarıda sözü edilen z_{k+1} yarıçaplı tekerin çevre çemberi üzerinde $f(z)$ ’nin karmaşık boyunun alabileceği en büyük değeri simgelemektedir. Bu değer $f(z)$ ’nin z_c özekli asıl yakınsayış tekerinin çevre çemberi üzerindeki en büyük karmaşık boy değerini aşamaz. Bu değer M ile simgelenirse

$$\left| f^{(k)}(z_{k+1}) \right| \leq \frac{k! M}{(R - (z_{k+1} - z_c))^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.63)$$

yazılabilir. Bunlar, erek işlevinin AKATA türev değerlerinin kıyılılandırım bağıntılarıdır.

(5.63)'te sağ yandaki anlatımın paydasında z_{k+1} yerine z_1 yerleştirerek sağ yanı daha büyötmek, ama bunun karşılığını salt üstte bırakmak olanaklıdır. Böylece, (5.63) yerine, aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\left| f^{(k)}(z_{k+1}) \right| \leq \frac{k!M}{(R - (z_1 - z_c))^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.64)$$

Bu yapı, z için yakınsayış bölgesi saptayışında, (5.63)'ten çok daha yalın bir inceleyişe izin verecek niteliktedir.

5.5 AKATA'nın Yakınsayışı

(5.59) ve (5.63)'ün (5.61)'de kullanımını aşağıdaki eşitsizliğin yazımına olanak verir.

$$|f(z)| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{|z - z_c| + \alpha |z_1 - z_c|}{R - (z_1 - z_c)} \right)^k \quad (5.65)$$

Burada sağ yanda uzamcıl bir toplamdizinin türevini içeren bir anlatım bulunmaktadır. Bu toplamdizinin yakınsayışı için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır.

$$\frac{|z - z_c| + \alpha |z_1 - z_c|}{R - (z_1 - z_c)} < 1 \quad (5.66)$$

Bu

$$|z - z_c| < R - (1 + \alpha) |z_1 - z_c| \quad (5.67)$$

anlamına gelir. Böylece, AKATA için yakınsaklık tekeri saptanmış olur. Bu durumda, elde edilen bulgular aşağıda sırasayılı bir biçimde verilmektedir.

1. z_c özekli ve R yarıçaplı Taylor toplamdizisi yakınsayış çemberi AKATA kullanımını durumunda daralacaktır.
2. AKATA yakınsaklık çember daralışı, AKATA konumları z_c özeğinden uzaklaştıkça yükselir. Ancak, burada önemli olan sonlu sayıda konumun değil sonsuz sayıda konumun özekten uzaklaşımıdır.
3. Yukarıdaki öngörömlerde konumların aynı çember üzerinde bulunabilişine izin verilmektedir. Ancak, böyle bir çok konumlu çember üzerindeki konum sayısının sonlu kaldığı durumlarda, daralışıla ilgili yukarıdaki yorumlar geçerli kalacak olmakla birlikte, çemberdeki konum sayısı sonsuz olursa yorum değıştirilmelidir.

4. 3'teki altbölümcüde sözü edilen çokkonumlu çemberlerle ilgili en ilginç ve uygulamacı durum AKATA konumlarının sonlu sayıda konumun devirli ve çevrimci (ing: periodic and cyclic) olarak AKATA konumu oluşudur. Belirtik olarak yazmak gerekirse bu durumda, N artı bir bütünsayı olmak üzere, aşağıdaki tanımlayışlar geçerlidir.

$$z_{j+N(k-1)} \equiv \tilde{z}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.68)$$

Burada yinelenen taban konumlar \tilde{z} 'lerle simgelenmektedir. Yakınsaklık çözümleyişleri, bu durumlarda da, buradakileri andıran biçimlerde, gerçekleştirilebilir.

5. Burada salt AKATA'nın yakınsayıışına odaklanılmakta, çokterimlili yapıdaki kalan anlatımının küçülüş çözümleyişine odaklanılmamaktadır.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tek değişkenli işlevler çeşitli yöntemler yardımıyla gösterilebilir ve her bir yöntem belli bir bileşenden başlayan ardışık sonlu toplamcıl kesimler oluşturularak elde edilen sonlu anlatımlar ile erekteki işleve yaklaştırm yöntemini olarak kullanılabilir. Bu yöntemler arasında en bilinen ve yaygın kullanılanı Taylor toplamdizi açılımlarıdır.

Bu çalışmada, yakın zamanda Metin Demirap ve topluluğunun gerçekleştirmiş olduğu inceleyişler sonucunda elde edilen ve Taylor toplamdizileri ile yakından ilgili olan “Ayrışık Konumlarda Artan Türevler Açılımı (AKATA)” olarak adlandırılan yönteme odaklanılmıştır. Bu yöntem, bir anlamda, Taylor toplamdizilerinin özelsizleştirimi olarak öngörölmüş ve salt bir bağımsız değişkene bağımlı işlevlerin toplamdizi gösterilimlerinde kullanılmıştır. Tabanda Türev-Tümlev özdeşliğine dayanan bu yöntemde, Taylor toplamdizi açılımından değişik olarak her bir konuma değişik bir türev değeri eşlik etmektedir. Öteki bir söylemle, AKATA, “türevin tümlevi özdeşliğinin” tek değişkenli işlevin değişik konumlarda açılımında kullanımı ile oluşturulmuştur. Savda, yöntemle ilgili elde edilen bulgular, ve de, öneriler aşağıda sırasaylandırılmıştır.

- Yöntem ile ilgili ilk olarak bağıntılandırılmalar gerçekleştirilmiş ve bu bulgular üzerinde yöntemin kuramcıl yapısı oluşturulmuştur.
- AKATA, sayılabilir sonsuzlukta düğüm konumu içeren bir yapı olarak öngörölmüş olsa da bu çalışmada düğüm konumlarının iki değer arasında ardışık devirli olarak sonsuz kez yinelendiği $(x_1x_2x_1x_2\dots)$ çizeme odaklanılmıştır. Bu yapıdaki AKATA “İki Konumlu AKATA” olarak adlandırılmış ve bütün inceleyişler bu çizem üzerinde gerçekleştirilmiştir.
- İlk olarak AKATA taban çokterimlilerinin belirtik anlatımları ve bağıntılar elde edilmiştir. Bu çokterimlilerin İsviçre Çakısı ile ilişkili olduğu gözlenmiştir.

- Çokterimliler elde edildikten sonra yöntemin yakınsaklık inceleyişleri gerçekleştirilmiş ve İki Konumlu AKATA açılımının geçerli olduğu ve erekteki işlevi gösterdiği kanıtlanmıştır.
- Bu bulgulardan sonra, tekillik içeren işlevlerde yöntemin nasıl çalıştığı görülmek istenmiş ve özel olarak ucaycıl tekilliği olan orancıl işlevler ele alınmıştır. Elde edilen kuramcıl yapılardan yararlanarak yöntemin yakınsaklık bölgeleri saptanmış ve sayıcıl uygulamalarla desteklenmiştir.
- Bu uygulamalar salt AKATA ve erek işlev karşılaştırımı ile kısıtlı kalmamış, yöntemin Taylor toplamdizi açılımlarıyla da karşılaştırımı gerçekleştirilmiştir.
- Daha sonra gerçellikten karmaşıklığa geçişe odaklanılmış ve karmaşık düzlemde yakınsayış inceleyişleri de gerçekleştirilmiştir.
- Sonluda (sonlu bölge içinde) yerleşik düğüm konumlu AKATA'da yakınsaklık bölgesinin Taylor toplamdizisinininki ile eş olduğu gösterilmiştir. Ancak, sonlu düğüm konumlarının her birinin yakınsaklık bölgesi içinde kalışının gerekliliği de gösterilmiştir.
- Öteki bir önemli bulgu da, sonsuz yineleyişli düğüm konumlarının sayısının birden çok oluşu durumunda yakınsaklık bölgesinin Taylor toplamdizisi bölgesinden çok değişik yapı göstermek durumunda oluşu olarak ortaya çıkarılmıştır. Bu yapının saptanışı ve incelenişinin, ayrı ve kapsamlı bir inceleyişle gerçekleştirilebileceği anlaşılmış ve bu konu sav ardı çalışma olarak tasarlanmış olup önçalışmalar da başlatılmıştır. Savda konum sayısı 2 olan kesim verilmiş olmakla birlikte 2'den büyük olan kesimler ayrı ve değişik inceleyişler gerektirmekte olduğundan bu olguya daha çok değinilmemiştir.
- Burada, yakınsayış bölgesi saptayışında yöntembilimcilik açısından en doğru yolu belirlenışı ile ilgili karşılaşılan sorunların saptırımı açılımı yardımıyla üstesinden gelinmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Thomas, G.B. ve Finney, R.L.** (1996). Calculus and Analytical Geometry, *Addison Wesley Publishing Company* ISBN 0-201-53174-7.
- [2] **Demiralp, M.** (2005). Convergence issues in the Gaussian weighted multidimensional fluctuation expansion for the univariate numerical integration, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 4(4), 486, ISO 690.
- [3] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2009). The application of the fluctuation expansion with extended basis set to numerical integration, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 8(5), 205-212.
- [4] **Baykara, N.A., Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2011). The fluctuationlessness approach to the numerical integration of functions with a single variable by integrating taylor expansion with explicit remainder term, *J. Math. Chem.*, 49(2):393-406.
- [5] **Baykara, N.A., Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2009). Fluctuationless univariate integration through taylor expansion with remainder by using oscillatory function basis sets, *In AIP Proceedings for the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2009)*, 1168(1), 428-431.
- [6] **Gürvit, E., Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2009). Taylor series expansion with the fluctuation freely approximated remainder over highly oscillatory basis functions, *In AIP Proceedings for the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2009)*, 1168(1), 432-435.
- [7] **Tuna, S., Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2009). Taylor series based integration with the fluctuation freely approximated remainder over gauss wave type basis functions, *In AIP Proceedings for the International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE 2009)*, 1504(1), 800-803.
- [8] **Baykara, N.A., Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2010). Extended fluctuationlessness theorem and its application to numerical approximation via taylor series, *In Proceedings for the 1st IEEEAM Conference on Applied Computer Science (ACS)*, 317-323.
- [9] **Demiralp, M.** (2005). A new fluctuation expansion based method for the univariate numerical integration under gaussian weights, *In Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (MATH'08)*, ISBN:960-8457-39-4, 68-73.

- [10] **Gürvit, E., Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2009). Numerical integration of bivariate functions over a non rectangular area by using fluctuationlessness theorem, *In Proceedings for the WSEAS Conference on the 2nd Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE'09)*, 8(5), 193-198.
- [11] **Estes, R. H. ve E. R. Lancaster** (1966). Two-point Taylor Series Expansions.
- [12] **Xuli, H.** (2003). Multi-node higher order expansions of a function, *Journal of Approximation Theory*, 124(2), 242-253.
- [13] **López, J.L. ve Nico, M.T.** (2002). Two-point Taylor expansions of analytic functions, *Studies in Applied Mathematics*, 109(4), 297-311.
- [14] **López, J.L. ve Nico, M.T.** (2004). Multi-point Taylor expansions of analytic functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, 356(11), 4323-4342.
- [15] **Demiralp, M.** (2014). Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) for Univariate Functions: Conceptuality and formulation, *AIP Conference Proceedings*, 1648(1), 160004.
- [16] **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2014). Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) for Univariate Functions: Polynomial Recursions, Remainder Bounds and the Convergence, *AIP Conference Proceedings*, 1648(1), 160005.
- [17] **Baykara, N.A. ve Gürvit, E.** (2014). Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) for Univariate Functions: Univariate Numerical Integration, *AIP Conference Proceedings*, 1648(1), 160006.
- [18] **Gürvit, E. ve Baykara, N.A.** (2014). Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) for Univariate Functions: Node Optimization via Partial Fluctuation Suppression, *AIP Conference Proceedings*, 1648(1), 160007.
- [19] **Tunga, B.** (2015). Separate Multinode Ascending Derivatives Expansion (Demiralp's SMADE): Basis Polynomials, *AIP Conference Proceedings*, 1702(1), 170011.
- [20] **Tunga, B.** (2015). Separate Multinode Ascending Derivatives Expansion (Demiralp's SMADE): Basis Polynomials, *AIP Conference Proceedings*, 1702(1), 170011.
- [21] **Bodur, D. ve Demiralp, M.** (2015). Two Very Specific Cases for Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE), *AIP Conference Proceedings*, 1702(1), 170006.
- [22] **Bodur, D. ve Demiralp, M.** (2017). Certain Implementative Applications of Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE), *AIP Conference Proceedings*, 1798(1), 020028.

- [23] **Bodur, D. ve Demiralp, M.** (2017). Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) on a Sequence of Nodes Alternating Between Two Values, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2017)*, 346-356.
- [24] **Bodur, D. ve Demiralp, M.** (2018). Influence of a Simple Pole on the Convergence of Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) on a Sequence of Nodes Alternating Between 2 Values, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(17), 7333-7350.
- [25] **Ciarlet, P.G. ve Raviart, P.A.** (1972). General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with applications to finite element methods, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 46(3), 177-199.
- [26] **Werner, W.** (1984). Polynomial Interpolation: Lagrange versus newton, *Mathematics of Computation*, 205-217.
- [27] **Url-1** <http://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny/SwissKnifePolynomials>, Alındığı tarih : 21.10.2019.
- [28] **Abdulle, A. ve Vilmart, G.** (2013). PIROCK: A swiss-knife partitioned implicit–explicit orthogonal Runge–Kutta Chebyshev integrator for stiff diffusion–advection–reaction problems with or without noise *Journal of Computational Physics*, 242, 869-888.



ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Derya BODUR

Doğum Tarihi ve Yeri: 28/04/1987 İstanbul

E-Posta: deryabodur1@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2011, Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü
- **Y. Lisans:** 2014, İstanbul Teknik Üniversitesi, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı.

MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER:

- 2014 yılında İ.T.Ü. Bilişim Enstitüsü Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı yüksek lisansını tamamladı.
- 2012-2020 yılları arasında İ.T.Ü. Bilişim Enstitüsü'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı.

DOKTORA SAVINDAN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Bodur, D.,** Demiralp, M. 2015. Two very specific cases for separate node ascending derivatives expansion (SNADE), *AIP Conference Proceedings*, 1702, 170006.
- **Bodur, D.,** Demiralp, M. 2016. Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) as a Univariate Function Representation, *I.J. Math. and Comput. Meth.*, 195-200.
- **Bodur, D.,** Demiralp, M. 2017. Certain implementative applications of Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE), *AIP Conference Proceedings*, 1798, 020028.
- **Bodur, D.,** Demiralp, M. 2017. Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) on a sequence of nodes alternating between two values, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE 2017*, 2, 346-356.
- **Bodur, D.,** Demiralp, M. 2018. Influence of a simple pole on the convergence of Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) on a sequence of nodes alternating between 2 values, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(17), 7333-7350.

- **Bodur, D.**, Demiralp, M. 2018. Separate Node Ascending Derivatives Expansion (SNADE) on complex plane, *ICNPAA World Congress 2018: Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences*, 2046, 020009.

ÖTEKİ YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Bodur, D.**, Demiralp, M. 2012. Probabilistic Evolution Approach to First Order Explicit Ordinary Differential Equations for Two Unknown Case, *Advances in Systems Theory, Signal Processing and Computational Science, Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation*, 203-207.
- **Bodur, D.**, Demiralp, M. 2012. Perturbative Approach to High Dimensional Model Representation (HDMR) Under Nonproduct Type Weight and Over Orthogonal Geometry, *AIP Proceedings for the 10th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2012)*, 1479, 1994-1999.
- **Bodur, D.**, Demiralp, M. 2013. Product type weights generated by a single nonproduct type weight function in high dimensional model representation (HDMR), *The proceedings of the 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 2013)*, 2, 265-272.
- **Bodur, D.**, Demiralp, M. 2013. Second Degree Rectangular Eigenproblems of Cubic Multiway Arrays, *The Proceedings of the WSEAS 13th International Conference on System Theory and Scientific Computation (ISTASC'13)*, 66-69.
- **Bodur, D.**, Demiralp, M. 2013. High Dimensional Model Representation Under an Integral Operator Weight with a Product Type Kernel of Univariate Factors, *The Proceedings of the WSEAS 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG'13)*, 146-150.
- **Bodur, D.** 2018. High dimensional model representation (HDMR) under nonproduct type weight, *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)*, 9(2), 141-151.