

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ NÜKLEER ENERJİ ENSTİTÜSÜ

**KESİKLİ ORDİNATLAR YÖNTEMİNDE GAUSS-CHEBYSHEV
KUADRATÜRÜ İLE IŞIN-ETKİSİNİN ARAŞTIRILMASI**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

DOKTORA TEZİ

Yük. Müh. Semiha SAĞLAM

(No. 302910005012)

104265

104265

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Temmuz 2000

Tezin Savunulduğu Tarih : 5 Aralık 2000

Tez Danışmanı : Doç. Dr. M. Akif ATALAY *M. Akif Atalay 12.01.2001*

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Fahir BORAK (B.Ü.) *F. Borak 12.01.2001*

Prof. Dr. Vural ALTIN (B.Ü.) *V. Altın*

Prof. Dr. Hasbi YAVUZ (İ.T.Ü.) *H. Yavuz 12.01.2001*

Prof. Dr. H. Atilla ÖZGENER (İ.T.Ü.)

OCAK 2001

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Kesikli Ordinatlarda Yönteminin ayrılmaz bir parçası gibi görünen ışın-etkisi problemini giderecek bir yaklaşım sunulmuş; konu, örnek problemler ile test edilerek, sonuçlar tartışılmış ve böylece, ilerideki ışın-etkisi problemlerinde güvenle kullanılabilen bir yöntem geliştirilmeye çalışılmıştır.

Çalışmayı veren, çalışma sırasında yardım ve önerilerini esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. M.Akif ATALAY'a çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince, her konudaki anlayış ve desteklerinden ötürü İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Hasbi YAVUZ, Prof. Dr. A. Beril TUĞRUL ve tüm NEE personeline de teşekkür ederim.

Ayrıca, çalıştığım kurum olan İÜ Fen Fak. Fizik Bölümü Başkanı Prof. Dr. Çetin ARIKAN'a çalışma süresince gösterdiği anlayıştan, Fizikçi Ali KARAMAN'a da bilgisayar desteklerinden dolayı teşekkürlerimi belirtmek isterim. Fizik bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Şehsuvar ZEBİTAY'a ve özellikle Prof. Dr. Emine RIZAOĞLU'na da yol gösterici eleştiri ve önerilerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Bunlardan başka, tüm çalışma boyunca mânevi kuvvet aldığım, şu anda yanımda bulunmayanlar da dahil, çok sevdiğim üç "varlığa" şükran ve sevgilerimi sunarım.

Ocak 2001

Semiha SAĞLAM

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. TEORİ	6
2.1. Nötron Transport Denklemi	6
2.1.1. Çeşitli Geometrilere Transport Denklemi	8
2.1.2. Sınır Koşulları	13
2.1.3. Transport Denklemine Çözüm Yöntemleri	16
2.1.3.1. Enerji Değişkeni-Çok Grup Yöntemi	19
2.1.3.2. Açıl Değişkenin Kesikleştirilmesi	20
2.2. Kesikli Ordinatlarda Yöntemi (S_N)	22
2.2.1. Düzlem Geometride S_N Yöntemi	23
2.2.1.1. İzotropik Saçılma	23
2.2.1.2. Anizotropik Saçılma	25
2.2.1.3. Uzaysal Kesikleştirme ve Kesikli Ordinatlarda Denklemlerinin Çözümü	27
2.2.2. Eğrisel Geometride S_N Yöntemi	29
2.2.3. S_N Yöntemine Uygulanmasında Karşılaşılan Problemler ve Işın Etkisi	34
2.2.4. Işın Etkisini Giderme Yolları	37
BÖLÜM 3. S_N YÖNTEMİ İÇİN KUADRATÜR TÜRLERİ VE GAUSS-CHEBYSHEV KUADRATÜRÜNÜN YÖNTEME UYARLANMASI	39
3.1. S_N Kodları İçin Açıl Kuadratür ve Kuadratür Türleri	39
3.2. Chebyshev Polinomları ve Gauss-Chebyshev Kuadratürü	44
3.3. Gauss-Chebyshev Kuadratürünün S_N Yöntemine Uyarlanması	48
3.3.1. İki Boyutlu Kartezyen Geometri İçin Türetim	48
3.3.2. İki Boyutlu Silindirik Geometri İçin Türetim	53
BÖLÜM 4. BİLGİSAYAR KODU TWOTRAN-II, TANITIMI VE YENİDEN DÜZENLENMESİ	56
4.1. Kodun Tanıtımı	56
4.2. Teori	59
4.3. Kodda Gerçekleştirilen Düzenlemeler	63

BÖLÜM 5. BENCHMARK PROBLEMLERİ VE SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ	68
BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER	76
KAYNAKLAR	80
EKLER	
EK A GAUSS-LEGENDRE ve GAUSS-CHEBYSHEV KUADRATÜRLERİ İLE ELDE EDİLEN AKI DAĞILIMLARI	86
EK B KÜRESEL HARMONİKLER	121
EK C LEGENDRE POLİNOMLARI	123
EK D ASSOCIATED LEGENDRE FONKSİYONLARI	124
EK E MATHEMATICA PROGRAMI İLE HESAPLANAN f_{lmn} DEĞERLERİ	125
ÖZGEÇMİŞ	128



KISALTMALAR

İ.T.Ü.	: İstanbul Teknik Üniversitesi
İ.Ü.	: İstanbul Üniversitesi
S_N	: Kesiklikli Ordinatlara Yöntemi
P_N	: Küresel Harmoniklere Açılım Yöntemi
DP_N	: Double P _N Approximation
DNTM	: Discrete Nodal Transport Method
LWR	: Light Water Reactor
Dk.	: Denklem
PC	: Kişisel Bilgisayar
SAS	: Işın-Etkisini Gidermek İçin İleri Sürülen Uzay-Açı Sentez Çalışması
TWOTRAN-II	: An Interfaced, Exportable Version of the TWOTRAN Code for Two-Dimensional Transport
ANISN	: One Dimensional Discrete Ordinates Transport Code with Anisotropic Scattering
DOT	: Two-Dimensional Code for Radiation Shielding
FENT	: Finite Element Solutions in Two-Dimensional Neutron Transport
THREETRAN	: A Program to Solve Multigroup Discrete Ordinates Transport Equation in Three Dimensional Geometry
TORT	: Three Dimensional Discrete Ordinates Neutron/Photon Transport Code

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1. Gauss-Chebyshev kuadratür seti	46
Tablo 3.2. Örnek problem geometrileri ve akış terimi	49
Tablo 4.1. Alan ve hacim elemanları	62
Tablo 4.2. TWOTRAN-II kodunda kullanılan program ve karşılık gelen problem değişkenleri	67
Tablo 5.1. Örnek problem verileri (Problem 1)	69



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1.	Kartezyen koordinatlar. 9
Şekil 2.2.	Genel silindirik koordinatlar. 11
Şekil 2.3.	Küresel koordinatlar. 13
Şekil 2.4.	X değişkenine ait aralıklar 27
Şekil 2.5.	Nötronun akış yönüne bağlı olarak doğrultuların değişimi. 29
Şekil 2.6.	(-1,+1) aralığının N=4 parçaya bölünüşü (S_4 yaklaşımı). 30
Şekil 2.7.	Tipik iki boyutlu uzaysal ağ hücresi. 33
Şekil 2.8.	S_N yaklaşımının derecelerine göre akı dağılımı. 36
Şekil 3.1.	Tam simetrik S_6 düzenlemesi. 42
Şekil 3.2.	Simetrik olmayan S_6 düzenlemesi. 43
Şekil 4.1.	Twotran-II akış diyagramı. 58
Şekil 4.2.	İterasyon noktaları. 65
Şekil 5.1.	(x-y) düzlem geometride örnek problem. 68
Şekil 5.2.	Uzaysal kesikleştirme 69
Şekil 5.3.	(r-z) geometride örnek problem. 71
Şekil 5.4.	Örnek problem 2. 73
Şekil A.1.	(x-y) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi (Gauss-Legendre)- Problem 1. 87
Şekil A.2.	(x-y) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi (Gauss-Legendre) – Problem 1. 88
Şekil A.3.	(x-y) geometride S_2 yaklaşımı (Gauss-Legendre) – Problem 1. 89
Şekil A.4.	(x-y) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi (Gauss-Chebyshev) – Problem 1. 90
Şekil A.5.	(x-y) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi (Gauss-Chebyshev) – Problem 1. 91
Şekil A.6.	(x-y) geometride S_2 yaklaşımı (Gauss-Chebyshev) – Problem 1. 92
Şekil A.7.	(x-y) geometride S_2 yaklaşımı [9]. 93
Şekil A.8.	(x-y) geometride Twotran-II ve Fent kodlarının S_4 Yaklaşımı için karşılaştırılması – Problem 1. 94
Şekil A.9.	(r-z) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi (Gauss-Legendre) – Problem 1. 95
Şekil A.10.	(r-z) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi (Gauss-Legendre) – Problem 1. 96
Şekil A.11.	(r-z) geometride S_2 yaklaşımı (Gauss-Legendre) – Problem 1. 97
Şekil A.12.	(r-z) geometride skaler akının üst sınır boyunca değişimi (Gauss-Legendre) – Problem 1. 98
Şekil A.13.	(r-z) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi (Gauss-Chebyshev) – Problem 1. 99
Şekil A.14.	(r-z) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi (Gauss-Chebyshev) – Problem 1. 100
Şekil A.15.	(r-z) geometride S_2 yaklaşımı (Gauss-Chebyshev) – Problem 1. 101

Şekil A.16.	(r-z) geometride skaler akının üst sınır boyunca değişimi (Gauss-Chebyshev) – Problem 1.	102
Şekil A.17.	(r-z) geometride iki kuadratürün S_4 yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır) – Problem 1.	103
Şekil A.18.	(r-z) geometride iki kuadratürün S_{10} yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır) – Problem 1.	104
Şekil A.19.	(r-z) geometride iki kuadratürün S_{14} yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır) – Problem 1.	105
Şekil A.20.	(x-y) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi (Gauss-Legendre) – Problem 2.	106
Şekil A.21.	(x-y) geometride skaler akının sol sınır boyuna değişimi (Gauss-Legendre) – Problem 2.	107
Şekil A.22.	(x-y) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi (Gauss-Chebyshev) – Problem 2.	108
Şekil A.23.	(x-y) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi (Gauss-Chebyshev) – Problem 2.	109
Şekil A.24.	(x-y) geometride iki kuadratürün S_4 yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır) – Problem 2.	110
Şekil A.25.	(x-y) geometride iki kuadratürün S_6 yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır) – Problem 2.	111
Şekil A.26.	(x-y) geometride iki kuadratürün S_{14} yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır) – Problem 2.	112
Şekil A.27.	(x-y) geometride Twotran-II ve Fent kodlarının S_4 yaklaşımlarının karşılaştırılması – Problem 2.	113
Şekil A.28.	(r-z) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi (Gauss-Legendre) – Problem 2.	114
Şekil A.29.	(r-z) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi (Gauss-Legendre) – Problem 2.	115
Şekil A.30.	(r-z) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi (Gauss-Chebyshev) – Problem 2.	116
Şekil A.31.	(r-z) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi (Gauss-Chebyshev) – Problem 2.	117
Şekil A.32.	(r-z) geometride iki kuadratürün S_4 yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır) – Problem 2.	118
Şekil A.33.	(r-z) geometride iki kuadratürün S_6 yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır) – Problem 2.	119
Şekil A.34.	(r-z) geometride iki kuadratürün S_{14} yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır) – Problem 2.	120
Şekil B.1.	Küresel harmonikleri tanımlamak için koordinat sistemi.	122

SEMBOL LİSTESİ

ϕ	: Yönsel Akı
Σ_t	: Makroskopik toplam etkin kesit
Σ_s	: Makroskopik saçılma etkin kesiti
Σ_f	: Makroskopik fisyon etkin kesiti
Σ_a	: Makroskopik yutulma etkin kesiti
Q	: Yönsel kaynak
v	: Fisyon başına üretilen nötron sayısı
χ	: dE enerji aralığında üretilen nötronla, açığa çıkan nötronun oranı
$\vec{\Omega}$: Nötronun çarpışma öncesi hareket doğrultusu vektörü
$\vec{\Omega}'$: Nötronun çarpışma sonrası hareket doğrultusu vektörü
\vec{r}	: Uzaysal konum vektörü
\hat{n}	: \vec{r} pozisyonuna dik doğrultudaki birim vektör
μ, η ve ξ	: nötron hareket doğrultuları
μ_0	: $\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'$ olarak tanımlanan nötron hareket doğrultusu
c	: Σ_s / Σ_t olarak tanımlanan oran katsayısı
dV	: Gözönüne alınan birim hacim elemanı
$d\Omega$: Katı açı
dE	: Gözönüne alınan enerji aralığı
Δ	: Uzaysal kesikleştirmede x doğrultusundaki aralık
Δr	: Uzaysal kesikleştirmede r doğrultusundaki aralık
Δz	: Uzaysal kesikleştirmede z doğrultusundaki aralık
P_n	: Legendre polinomları
R_n^k	: Assosye Legendre polinomları
δ_{ko}	: Kronecker delta
$\tilde{\phi}_n$: Küresel harmonikler türünden açılmış açısız (yönsel) akı momenti
\tilde{Q}_n	: Küresel harmonikler türünden açılmış homojen olmayan kaynak momenti
N_{nij}	: Gözönüne alınan birim hücre içinde akının ortalama değeri
NM	: Toplam moment sayısı
G	: Toplam enerji grubu sayısı
α	: Açısız kuplaj sabiti
A	: i doğrultusunda gözönüne alınan yüzey alanı
B	: j doğrultusunda gözönüne alınan yüzey alanı
V	: Hacim
T_n	: Chebyshev polinomları
w	: Ağırlık faktörü
S	: Skaler kaynak
M	: Chebyshev polinomları açılım derecesi
L	: Legendre polinomları açılım derecesi
N	: Kuadratür derecesi veya toplam kuadratür noktaları sayısı

KESİKLİ ORDİNATLAR YÖNTEMİNDE GAUSS-CHEBYSHEV KUADRATÜRÜ İLE IŞIN-ETKİSİNİN ARAŞTIRILMASI

ÖZET

Nükleer reaktör fiziğinin temel problemi, verilen bir sistemde (reaktör kalbi gibi) nötron dağılımının bulunmasıdır. Bu nokta, reaktörde oluşan farklı nükleer reaksiyonların oluşum hızlarının belirlenmesi açısından önemlidir. Nötron dağılımının bulunması için reaktör içindeki nötron transportu ele alınır. Nötron transportunu ya da bir başka deyişle, nötron davranışlarının gerçek tasvirini veren bağıntı, nötron üretimi ile kayıpları arasındaki matematiksel dengeyi gösteren nötron transport denklemdir.

Nükleer reaktörlerin dizayn ve analizinde transport denkleminin çözümü önemli rol oynar. Fakat bu denklemin çözümü, basitleştirilmiş model problemler hariç, çok zordur. Çünkü denklem yedi değişkenli integro-diferansiyel bir forma sahiptir. Ayrıca, çözümü zorlaştıran başka faktörler de mevcuttur; etkin kesitlerin enerjiye bağlı olmaları ve reaktörde kullanılan malzemenin geometrik tanzimi gibi. Bundan dolayı, nötron transport denklemi uygun sınır koşullarıyla birlikte (zamana bağlı problemlerde başlangıç koşulu da dahil), genellikle deterministik transport kodlarıyla çözülür.

Bu çalışmanın asıl konusunu oluşturan Kesikli Ordinatlara Yöntemi, S_N , önemli deterministik analiz yöntemlerinden birisidir. Yöntem, transport teorisinin en temel yaklaşımlarındandır ve transport kodlarında yaygın biçimde kullanılmaktadır. Yöntemde, açısal değişken için belirli doğrultular (ordinatlar) seçilir ve yönsel akı bu doğrultular için belirlenir. Denkleminde görülen türev ve integral terimleri, genellikle sonlu fark teknikleri ve nümerik integrasyon şemaları (örnek: Standart Gauss kuadratürleri) kullanılarak uygun bir kesikli formda yazılır. Böylece, bilgisayar çözümüne uygun bir cebirsel denklem setine ulaşılmış olur. Bundan sonra, sözkonusu set standart nümerik algoritmalar kullanılarak bilgisayarda çözülebilir.

Transport denklemini çözmede, yöntemin birçok avantajları olmasına karşın, uygulamada bazen istenmeyen problemlerle karşılaşmaktadır; ışın-etkisi gibi. Yöntemin ayrılmaz bir parçası gibi görünen ışın-etkisi, iki veya üç boyutlu geometrilerde izole kaynak kullanan ve küçük saçılma değerine sahip problemlerdeki skaler akıda ortaya çıkan anormal dalgalanmalardır. Işın-etkisi problemini azaltabilmek ya da tümüyle giderebilmek amacıyla birçok çalışma ileri sürülmektedir. Sorunun çözümü için en basit yol, S_N yönteminin derecesini (doğrultu sayısını) arttırmaktır. Fakat, genelde bu gerçekleştiğinde, osilasyonlar büyümeye başlar ve fiziksel olanlarla karıştırılabilir. Son yıllarda, ışın-etkisi bozulmalarını oldukça azaltan ya da tümüyle gideren yaklaşımların türetimi konusunda dikkate değer bir çaba sarf edilmektedir.

Bu çalışmada ışın-etkisi bozulmalarını azaltmak için, S_N transport kodlarında sıkça rastlanılan Gauss-Legendre kuadratürü yerine, Gauss-Chebyshev kuadratürünün yöntem uyarlanması ele alınmaktadır. Konu, kartezyen ve silindirik geometrilere, izotropik ve anizotropik saçılma için incelenmiştir. Çalışmanın amacı, Gauss-Chebyshev kuadratürünün ışın-etkisi karşısındaki davranışını gözlemek ve Gauss-Legendre kuadratürüne alternatif olarak kullanılabilme olasılığını tartışmaktır. Bu nedenle, çok tanınan iki boyutlu S_N kodlarından biri olan TWOTRAN-II seçilir ve iki kuadratürü kıyaslamak amacıyla, önce Gauss-Chebyshev kuadratürü için yoğun bir şekilde modifiye edilmiş haliyle, sonra da Gauss-Legendre kuadratürü için orijinal haliyle çalıştırılır.

Gauss-Chebyshev kuadratür setinin hesaplama özelliklerini göstermek üzere, $(x-y)$ kartezyen geometride verilmiş bir model problem (problem 1), çok tanınan bir Benchmark problemi, test problemi olarak seçilir. Problemden, üniform izotropik bir kaynak, kare şeklindeki bir ortamın sol-alt köşesinde yer almaktadır. Sınır koşulları olarak, ortamın sol ve alt kenarlarında yansıtıcı sınır sağ ve üst kenarlarında ise vakum sınır olduğu varsayılmıştır. Kod, önce Gauss-Legendre, sonra da Gauss-Chebyshev kuadratürü ile çalıştırılmış ve skaler akı dağılımı, sözkonusu problem için bulunmuştur. Bundan sonra, problem 1'deki vakum yerine yansıtıcı sınır yerleştirilmiş; böylece oluşan problem 2, bir başka test problemi olarak ele alınmıştır. Bu problem de, iki kuadratürle önceki gibi incelenmiştir. Sonra, problemler silindirik geometriye uyarlanmış ve kuadratürlerin bu geometrideki davranışları da ışın-etkisi açısından değerlendirilmiştir. Çalışmada, programda bulunanın dışında, yakınsamayı hızlandırmak için hiçbir iterasyon hızlandırıcı teknik kullanılmamıştır.

Çalışmanın sonunda, iki kuadratürle dört çeşit problemde elde edilen tüm sonuçlar, birbirleriyle ve literatürdeki verilerle kıyaslanarak Gauss-Chebyshev kuadratürünün, özellikle silindirik geometride, Gauss-Legendre kuadratüründen daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca ele alınan problemin türüne göre, Gauss-Legendre kuadratürünün kartezyen geometri için, Gauss-Chebyshev kuadratürünün ise silindirik geometri için önerilebileceği görülmüştür. Zaten, günümüzde birçok S_N kodunda, farklı yaklaşımların değişik avantajlarını kullanan melez (hybrid) tekniklere oldukça sık rastlanılmaktadır.

Gauss-Chebyshev kuadratürünün bir başka önemli özelliği de, bir S_N yaklaşımında tüm doğrultular (veya noktalar) için aynı kuadratür ağırlıkları kullanmasıdır. Bu özellik, bilgisayar hafıza ve çalışma zamanı bakımından, hesaplamalarda önemli bir avantaj sağlamaktadır.

INVESTIGATION OF RAY-EFFECT DISTORTIONS BY GAUSS-CHEBYSHEV QUADRATURE IN DISCRETE ORDINATES METHOD

SUMMARY

The main problem of reactor physics is the determination of neutron distribution in a system; such as a nuclear core. This is important because of the evaluation of different nuclear reaction rates. To determine the distribution of neutrons, the process of neutron transport is investigated. The neutron transport, or stated another way, the real behaviour of neutrons is given by the neutron transport equation which states a mathematical balance on the physical production and losses of particles.

In nuclear reactor design and analysis, the solution of the transport equation plays an important role. However, it is very difficult to solve this equation except for simple model problems, since it has an integro-differential form with seven variables. Other factors have also an effect complicating the solution such as complex energy dependence of cross sections and the geometrical arrangement of the materials in the core etc. Therefore the neutron transport equation, together with the boundary conditions (and initial condition, if required), is solved usually by deterministic transport codes.

The Discrete Ordinates Method, S_N , that is the main subject of this study is one of the important deterministic methods. The method is straightforward and widely used in transport calculations. In this method, a set of discrete directions (or ordinates) for $\bar{\Omega}$ is chosen and the directional fluxes are evaluated for these directions. The derivatives and integrals appearing in the transport equation must be replaced by a corresponding discrete representation by using finite difference techniques and numerical integration schemes (i.e. standard Gauss quadratures). In this way, one gets a set of algebraic equations which are suitable for computation. Then, this set can be solved by using standard numerical algorithms on a computer.

Although the method has some advantages to solve the transport equation, sometimes some deleterious numerical problems has been met, such as ray-effect. The ray-effect distortions that plague the method are anomalous ripples that appear in the scalar flux for problems with isolated sources and low scattering ratios in two or three dimensional geometries. Several remedies for eliminating or mitigating the ray-effect problem have been proposed. It seems that the practical remedy for the ray-effect is to increase the order of S_N method (the number of directions). In general, when this is done, the oscillations become higher and they can be confused with physical ones. In recent years, considerable effort has been expanded in deriving approaches that eliminate or strongly mitigate the ray-effect distortions.

In this study for the mitigation of the ray-effect distortions, the Gauss-Chebyshev quadrature set is replaced by the Gauss-Legendre quadrature set that one frequently encounters in S_N transport codes. Therefore, this quadrature set is examined in cartesian and cylindrical geometries for the isotropic and anisotropic scattering. The aim of the study is to observe the behaviour of the Gauss-Chebyshev quadrature versus the ray-effect and to discuss the possibility of using that quadrature as an alternative to Gauss-Legendre quadrature. For this purpose, one of the well-known two dimensional S_N codes, TWOTRAN-II, is chosen and run in the heavily modified form for the Gauss-Chebyshev quadrature and also used in original form for the Gauss-Legendre quadrature, for comparison.

To demonstrate the computational characteristics of the Gauss-Chebyshev quadrature set, a model problem given in (x-y) cartesian geometry (problem 1), a well-known Benchmark problem, is chosen as a test problem. In this problem, there is a flat isotropic source at the left-bottom corner of a square region. The boundary conditions are given as reflective on the bottom and the left sides and vacuum on the top and the right sides of the region. The code has been executed first by the Gauss-Legendre, later by the Gauss-Chebyshev quadrature sets and the distribution of the scalar flux has been evaluated for the problem. After that, the vacuum boundaries of problem 1 have been replaced by reflected boundaries and then, problem 2 as a new test problem has been taken into account. This problem has also be examined by two quadratures in a similar way. Then, these problems have been adapted to cylindrical geometry and the behaviour of these two quadratures in that geometry have also been examined according to the ray-effect. In this study, except for the method in the original program, no acceleration technique is used to speed up convergence.

At the end of the study, by comparing all the results obtained by two quadratures for four kinds of problems by each other and by those given in the literature, we concluded that the Gauss-Chebyshev quadrature is more effective, especially in cylindrical geometries, than the Gauss-Legendre quadrature. Also, according to the kind of considered problem, the Gauss-Legendre quadrature for cartesian geometry and the Gauss-Chebyshev quadrature for cylindrical geometry can be recommended. As a matter of fact, nowadays in most S_N codes, some hybrid techniques which use the advantages of different approximations can frequently be encountered.

Another important characteristic of the Gauss-Chebyshev quadrature is that it uses the same quadrature weights for all directions (or points) on a given S_N approximation. This provides an advantage in computing from the point of view of computer memory and run time.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Nükleer reaktör teorisinin temel problemi, reaktör içindeki nötron dağılımının bulunmasıdır. Bu nokta, reaktörde oluşan değişik nükleer reaksiyonların oluşum hızlarının belirlenmesi açısından gereklidir. Nötron dağılımının belirlenmesi için reaktör içindeki nötron transportu ele alınır. Bir ortam içinde, nötronların ortam çekirdekleriyle yaptıkları çarpışmalar; bunun sonucunda yutulmaları ya da ortamdaki dışarı kaçmaları incelenir [1]. Kısacası nötronik davranışın gerçek tasviri, transport teorisinin konusunu oluşturmaktadır. Diğer bir deyişle transport teorisine, nötronların reaktör içindeki dağılımlarını uzay, enerji, doğrultu ve zaman değişkenlerine bağlı olarak inceler [2].

Birçok reaktör çalışması, nötronların davranışını difüzyon yaklaşımı ile ele alır. Gerçekten de nötronlar, yoğunluğun fazla olduğu bir bölgeden yoğunluğun az olduğu bir başka bölgeye difüzyon eğilimindedir. Ancak, reaktör içindeki nötron transportunu difüzyon yaklaşımı ile ele almak bazı problemlerde beklenen hassasiyetle sonuç almayı imkânsız kılar. Örneğin, reaktör sınırlarında ve kuvvetli yutucu malzemenin bulunduğu yakıt, kontrol çubukları veya reaktör zırhlarında nötronların davranışı transport teorisine ile incelenmelidir [3]. Ayrıca nötron transportu, diğer difüzyon olaylarından (termal difüzyon veya gaz moleküllerinin difüzyonu gibi), farklı özellik taşır. Örneğin gaz moleküllerinin difüzyonunda, difüzyon parçacıkları çok sık çarpışmalar yaparlar ve gelişigüzel doğrultularda giderek zigzag yörüngeler çizerler. Oysa nötronların ortam çekirdekleriyle etkileşmelerinde etkin kesitler oldukça küçüktür (10^{-24} cm²). Bir başka deyişle, nötronlar çarpışma yapmadan uzun mesafe katederler [1-3].

Bununla beraber difüzyon teori, çözümünü daha basit olduğundan, reaktör analizlerinde çok sık kullanılır. Ancak burada iki önemli sınırlama sözkonusudur. Birincisi, reaktör içinde nötronların göç sırasında yalnızca saçılma reaksiyonuna uğramaları (ortamın zayıf yutucu, kuvvetli saçıcı olarak kabul edilmesi); ikincisi, nötron göçünün ortamın sınırları ve arakesitlerinden uzakta ele alınması. Bu aksaklıkları gidermek üzere, difüzyon denklemine uygun “transport düzeltmeleri” eklenerek kullanım alanı genişletilmiştir [1-4]. Ayrıca, difüzyon teoriye dayalı bilgisayar kodları ucuz olduklarından (daha az bilgisayar zamanına ve hafızasına gereksinimleri vardır) pratikte, reaktör analizlerinde yoğun olarak kullanılmaktadırlar.

Difüzyon teori, bu avantajlarına rağmen, nötron akısında büyük değişimler (gradient) mevcut olduğunda iyi bir tanım vermediğinden, her problemde yeterince hassas sonuçlara ulaşamaz [5]. Akıdaki bu değişimler,

- 1) termal reaktörlerde kontrol çubukları yakınında,
- 2) hızlı reaktörlerde tabandaki örtü (blanket) de çok etkilidir. Ayrıca difüzyon teori ile zırlama ve derin nüfuz etme (deep penetration) problemlerinde de başarılı sonuçlar alınamaz.

Tüm bu sorunlar, reaktör içindeki nötron transportunun gerçek tanımını yapacak, difüzyon teorisinin geçerli olmadığı bölgelerde de hassas sonuçlar verecek başka bir denkleme başvurmamızı gerektirir. Nötronların davranışlarını ayrıntılı olarak veren bu temel denklem, yüzyıl kadar önce ortaya atılan gazların kinetik teorisinden alınıp, nötron davranışlarına uyarlanmış olan Boltzmann Transport denklemdir. Yedi bağımsız değişken içeren bu lineer denklem, aslında nötron üretimiyle kaybı arasında bir denge denklemdir [6,7,8]. Nötron-nötron etkileşmesinin, nötron-çekirdek etkileşmeleri yanında tamamıyla ihmal edilebilir olması karşısında lineer formda oluşan integrodiferensiyel formdaki nötron transport denklemin çözümü, oldukça basitleştirilmiş model problemler için dahi çok zordur.

Önceleri, nükleer reaktörlerin ilk ortaya çıktıkları 1940’lı yıllarla 1960’lı yıllar arasında, transport denkleminin çözümü için birçok analitik yöntem ileri

sürülmüştür; Weiner-Hopf tekniği, tekil özfonksiyonlar açılımı gibi [9]. Sonraları ise, tümü ideal geometriler için düşünülmüş olan bu tekniklerin yerini, bilgisayarların ve uygulamalı matematiğin de gelişimiyle gerçek geometrilere uygun çalışmalar almıştır. Günümüzde ilerleyen teknolojiye paralel, bilgisayar çözüm mantığına uygun, hızlı nümerik yöntemler geliştirilmiş, bilgisayar kodları oluşturulmuştur [10]. Bu yöntemlerin bir kısmı deterministik (Küresel Harmonikler Açılımı (P_N), Discrete Ordinates Yöntemi (S_N) [9-11]); bir kısmı ise olasılık teorisine dayanmaktadır (Monte Carlo Yöntemi). Deterministik yöntemler genellikle uzaysal ve/veya açısal değişkenin kesikleştirilmesi (discretization) ve fonksiyon açılımına başvururlar.

Bunlardan konumuz olan Kesikli Ordinatlar Yöntemi (Discrete Ordinates Method), transport denkleminde görülen değişkenleri (örneğin $\phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ ifadesinde r, E, Ω ve t), seçilen bir takım kesikli (discrete) doğrultularda discrete noktalarla belirtir (r_j, E_j, Ω_k, t_n gibi). Türevler, sonlu fark tekniklerinden biriyle [12], integral terimi de nümerik integrasyon şemalarıyla verilerek, integrodiferansiyel formdaki transport denklemi, bir cebirsel denklem setine dönüştürülür [13,14]. Yöntem, böylece problemi bilgisayar çözüm mantığına uygun hâle getirdiğinden transport uygulamalarında çok sık kullanılmaktadır.

Buna karşılık Kesikli Ordinatlar (S_N) Yöntemiyle elde edilen sonuçlarda, özellikle açısal değişkende, kullanılan kesikleştirme şemalarına bağlı olarak ışın-etkisi (ray-effect) denilen akı anormallikleri (doğru olmayan, gerçeğe uymayan skaler akı şekilleri) görülmektedir. Lokalize ve izole kaynak kullanıldığında, saçılmanın çok küçük olduğu ortamlarda ortaya çıkan bu sorunun çözümü için en kısa yol, yöntemin derecesini (discrete doğrultu sayısını) arttırmaktır [15]. Bu durumda da fiziksel gerçeğe ters düşen akı osilasyonları devam edebilmektedir [16].

Son yıllarda, bu çalışmanın da temel problemlerinden olan, ışın-etkisi'ni tümüyle giderebilmek ya da oldukça azaltabilmek için çeşitli yaklaşımlar ileri sürülmektedir. Bu çalışmalar yaklaşık üç ayrı sınıfta toplanabilirler:

1) İlk olarak S.Kaplan tarafından ileri sürülen uzay-açı sentez (SAS) şeması [17,18]. Kaplan bu uygulamada, belirli doğrultuların seçimi yerine açısız ağ (mesh) şebekesinde parçacıkvari deneme fonksiyonu (piecewise constant trial function) kullanmıştır.

2) Transport denkleminin çift parite (even-parity) formunu kullanan ve sonuçta S_N benzeri denklemler veren yaklaşımlar. Burada Kaplan'ın fikrinden hareketle yeni bir yaklaşım geliştiren Natelson'un çalışması ile, Miller, Briggs ve arkadaşlarının yaklaşımları sayılabilir [19,20].

3) (x,y) geometrisinde yazılmış S_N denklemlerine yapay (fictitious) kaynak terimleri ekleyerek, denklemleri ışın-etkisinin görülmediği küresel harmonikler veya benzeri denklemlere dönüştüren yaklaşımlar [18,21]. Bu uygulamalarda ışın-etkisi oldukça azalmasına rağmen, yapay kaynak teriminden dolayı, kaynak üzerindeki iterasyonun yavaşladığı görülmektedir. Ayrıca pahalı olan yöntem yerine, daha sonraları, melez (hybrid) $S_N \rightarrow P_{N-1}$ yöntemi geliştirilmiştir [15]. Bu çalışmaların tümü, ışın-etkisi'ni dikkate değer biçimde azaltmakta fakat tamamen giderememektedir.

Bunlardan başka, günümüzde bilgisayarlar ve veri transfer tekniklerindeki gelişmelere paralel olarak, bu alanda çok çeşitli çalışmalar ortaya çıkmıştır. Özellikle de, farklı yöntemlerin beraberliğinden oluşan karma yapılar önem kazanmış durumdadır. Böylece farklı yöntemlerin tamamlayıcı özelliklerinden yararlanılmakta ve oldukça başarılı sonuçlara ulaşılmaktadır [51].

Işın-etkisi'ni giderme çalışmalarında gözlenen önemli bir nokta da, probleme uygun kuadratür setinin geliştirilmesidir [22]. S_N kodlarında genellikle kullanılmakta olan, standart Gauss kuadratürlerinden Gauss-Legendre kuadratür setidir [23-24]. Ayrıca değişik S_N çalışmalarında, değişik özellikleri olan ve ele aldığı geometri için başarılı sayılabilecek sonuçlar veren değişik setlerle karşılaşılmaktadır; Gauss-Walsh kuadratür seti [25], tam simetrik kuadratür setleri gibi. Özetle, günümüzde her geometriye uyarlanabilecek, optimal sonuçlar üreten, az bilgisayar hafıza ve zamanı gerektiren, kısacası maliyeti ucuz olan kuadratür setleri geliştirme çabalarının sürmekte olduğu söylenebilir.

Bu çalışmanın konusunu, Kesikli Ordinatlar Yöntemi ve yöntemin sonuçlarında gözlenen ışın-etkisi problemi oluşturmaktadır. Işın-etkisini azaltıcı yaklaşım olarak da, seçeceğimiz geometriye uygun, Gauss-Legendre gibi (-1,+1) aralığında tanımlanmış Gauss-Chebyshev kuadratürünün [26], transport denklemine uyarlanması verilecektir. Uygulama, iyi bilinen bir örnek problem üzerinde test edilerek, kuadratürün ışın-etkisi karşısındaki davranışı incelenecektir. Bu amaçla, iki boyutlu geometriler için geliştirilmiş bilgisayar kodu, TWOTRAN-II [27] ele alınacak; kod hem bünyesindeki Gauss-Legendre kuadratürü ile, hem de yapısına uyarladığımız Gauss-Chebyshev kuadratürü ile çalıştırılarak, sonuçları karşılaştırılacaktır. Sonuçların değerlendirilmesi ile, Gauss-Chebyshev kuadratürünün, özellikle silindirik geometride ve daha sonra diğer genel geometrilerde, Gauss-Legendre kuadratürüne ne ölçüde bir alternatif seçenek olabileceği tartışılacaktır. Bu çalışmada kuadratürün etkisini tam olarak belirleyebilmek için, kodun bünyesinde bulunan hızlandırma tekniği dışında ek olarak iterasyon hızlandırıcı hiçbir yaklaşım kullanılmayacaktır.

Çalışma altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde konunun teorisine girilecek; nötron transport denklemi verilecek ve çözüm yöntemlerinden kısaca sözedildikten sonra, asıl konumuz olan S_N yöntemi ayrıntılı olarak tanıtılacaktır. Sonraki alt bölümde ise, S_N yöntemi sonuçlarında gözlenen ışın-etkisi problemi verilecektir. Bölüm 3 de, kuadratür setleri tanıtılacak ve Gauss-Chebyshev kuadratürünün transport denklemine uyarlanması gösterilecektir. Bölüm 4, bilgisayar kodunun ayrıntılı tanıtımı ve amaç doğrultusunda yeniden düzenlenmesinden; Bölüm 5 ise Benchmark problemlerinin tanıtımı ve elde edilen sonuçlardan oluşacaktır. Son bölümde de elde edilen sonuçlar üzerinde genel bir tartışma ve konu hakkında öneriler yer alacaktır.

BÖLÜM 2

TEORİ

2.1. Nötron Transport Denklemi

Boltzmann denkleminin lineer formu olan nötron transport denklemi, birtakım varsayımların ışığı altında elde edilir. Nötronlar elektriksel bakımdan nötr tanecikler olduklarından, denklemde elektrik alanlarla ilgili herhangi bir terim yoktur. Ayrıca, nötronlar klasik nokta parçacık olarak kabul edilirler; yalnızca \vec{r} konum ve \vec{v} hız (dolayısıyla momentum) vektörleriyle belirtilebilirler [9]. Nötronlar, nötr noktalar kabul edildiklerinden ve iki çarpışma arasında uzun mesafe katettiklerinden, doğrusal hareket ettikleri ve Newton'un hareket yasalarına uydukları kabul edilir. Bu hareketleri sırasında yalnızca ortam çekirdekleriyle çarpışmalar yaparlar; nötron-nötron etkileşmesi ihmal edilir [1]. Bundan başka nötron transport denklemi, nötron yoğunluğunun (veya akısının) ortalama davranışlarıyla ilgilenir; nötronlara ait istatistiksel dalgalanmaları ihmal eder.

Gerçekte nötronlar bir spine ve magnetik momente sahiptirler. Yalnızca parçacık olarak davranmaz; Heisenberg'in belirsizlik ilkesine göre dalga karakteri de taşırlar [29]. (Bu etkiler denklemde açıkça yer almaz; yalnızca nötron-ortam çekirdekleri etkileşmelerindeki etkin kesit değerlerinde saklıdır. Gerektiğinde bu amaçla saçılma etkin kesitlerinde küçük düzeltmeler yapılabilir [13]).

Yukarıda sıralanan varsayımların ışığında, nötron transport denklemi, uzayda ele alınan birim hacim elemanındaki nötron üretimi veya kazancı ile kayıpları

arasında lineer bir denge denklemi olarak tanımlanır [1-4]. Uygun seçilen sınır koşullarıyla birlikte, eğer problem zamana bağlı ise, başlangıç koşulunu da ele alarak, doğal parçacık transportunun fiziğini en iyi belirten bu denklem, integrodiferansiyel formdadır ve açık ifadesi aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) + \sum_t (\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \\ \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \int_0^\infty dE' \sum_s (\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) + \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \\ \int_0^\infty dE' v(E') \sum_f (\vec{r}, E') \phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) + Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada kullanılan etkin kesitler akıdan bağımsızdır. Ancak bazı özel durumlarda (xenon zehirlenmesi, sıcaklıkla geri besleme olayı, yakıtın ilk yanma sırasındaki olaylar) sabitler akıya bağlı alınırlar [11].

Denklem yukarıda görüldüğü gibi üçü uzaysal değişken, bir enerji veya hız değişkeni, iki hareket doğrultusunu belirten değişken ve bir de zaman değişkeni olmak üzere yedi bağımsız değişken içerir. Denklem (2.1) deki gibi, zaman değişkenini gözönüne alan transport denklemi daha çok, reaktör dinamiğini ilgilendirir. Oysa pratikte, kararlı-hal (steady-state) reaktör fiziğinde, bu çalışmada olduğu gibi, zamandan bağımsız transport denklemi kullanılır [8]. Böylece bir değişken azaltılmış olmasına rağmen, denklem gene de oldukça karmaşık yapıdadır.

İntegro-diferansiyel formdaki denklemin çözümü basit bir geometri sözkonusu olsa dahi çok zordur. Çünkü, denklem yedi bağımsız değişken içermektedir ve kullanılan etkin kesitler nötron enerjisine sıkıca bağlıdır. Ayrıca reaktörde değişik geometriler, değişik malzemeler sözkonusudur. Bir reaktör fizikçisinin görevi, denkleme basitleştirici işlemler uygulayarak, gerçekten uzaklaşmadan kolay ve ucuz, bilgisayarlara uygun çözüm yöntemleri bulmaktır.

Genel işlem, bağımsız değişkenlerin, uzaysal, açısal ve enerji değişkenlerinin kesikleştirme işlemidir. Bu amaçla transport denklemindeki bağımsız değişkenler

kesikleştirilerek, denklem bilgisayar çözüm mantığına uygun bir cebirsel denklem setine dönüştürülür.

Enerji değişkeninin kesikleştirilmesi bizi çok gruplu nötron transport çalışmasına götürür. Bu aşamada, grup etkin kesitlerini belirlemek reaktör fiziğinin en önemli adımı olup, çeşitli homojenizasyon işlemleri spektrum hesabı çerçevesinde uygulanır. Diğer yandan, uzaysal kesikleştirme için de çeşitli yöntemler mevcuttur. Başlıcaları sonlu farklar, sonlu elemanlar veya nodal yöntemlerdir [10,27,30,31]. Bizi bu aşamada en çok ilgilendiren nokta açısız kesikleştirme işlemidir. Denklem açısız kesikleştirilmesi ya Kesikli Ordinatlarda Yöntemi (Discrete Ordinates Method-S_N), ya da Fonksiyon Açılımı Yöntemi (P_N) ile gerçekleştirilir. Bu amaçla geliştirilmiş birçok deterministik transport kodları mevcuttur [27,31].

2.1.1. Çeşitli Geometrilere Transport Denklemi

Denklem (2.1) ile verilen transport bağıntısında yer alan önemli terimlerden biri, $v\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ ile belirtilen akış terimi (streaming term) dir. Bu terim, parçacığın $\vec{\Omega}$ hareket doğrultusundaki bir s patikası boyunca, açısız akının değişimini gösterir. Terim, problem geometrisine bağlı olarak değişik koordinat sistemleri için yazılabilir. Deterministik transport kodlarında üç koordinat sistemi de kullanılmaktadır.

1. Kartezyen Koordinatlar : Üç boyutlu kartezyen koordinat sisteminde uzaysal bir noktanın (x,y,z) koordinatlarıyla verildiğini biliyoruz. Burada nötronun $\vec{\Omega}$ hareket doğrultusu vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır (Şekil 2.1).

$$\vec{\Omega} \equiv \hat{e}_x \Omega_x + \hat{e}_y \Omega_y + \hat{e}_z \Omega_z \quad (2.3)$$

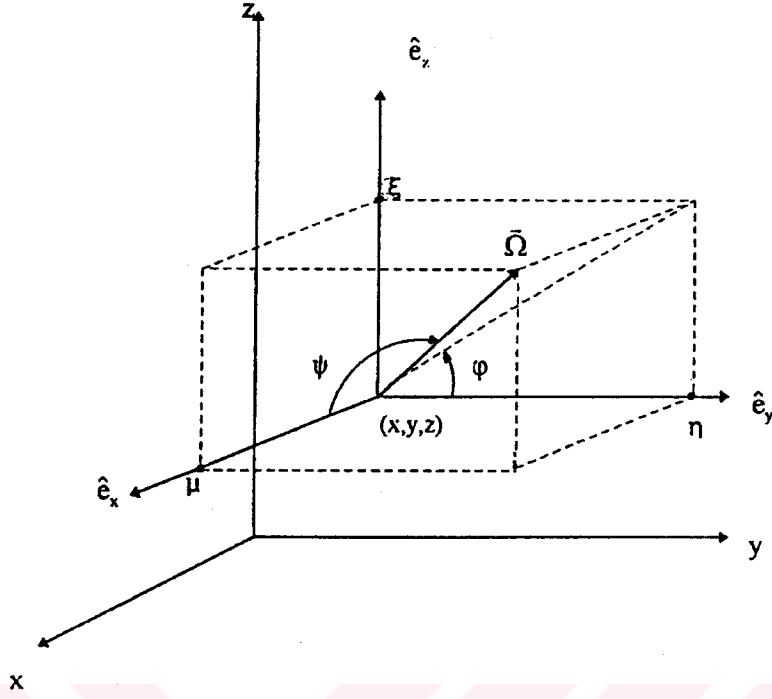
Burada,

$$\Omega_x \equiv \hat{e}_x \cdot \vec{\Omega} = \text{Cos}\psi \equiv \mu$$

$$\Omega_y \equiv \hat{e}_y \cdot \vec{\Omega} = \text{Sin}\psi \text{Cos}\varphi = \sqrt{1 - \mu^2} \text{Cos}\varphi \equiv \eta$$

$$\Omega_z \equiv \hat{e}_z \cdot \vec{\Omega} = \text{Sin}\psi \text{Sin}\varphi = \sqrt{1 - \mu^2} \text{Sin}\varphi \equiv \xi$$

ve, $d\vec{\Omega} = d\mu d\varphi$ dir.



Şekil 2.1. Kartezyen koordinatlar.

Ayrıca, $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}$ divergence operatörü genel olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} = \frac{d}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{d\mu}{ds} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{d\varphi}{ds} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.4)$$

kartezyen koordinatlarda $\frac{dx}{ds} = \mu$, $\frac{dy}{ds} = \eta$, $\frac{dz}{ds} = \xi$, ve $\frac{d\mu}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0$ olarak verilmektedir. Buna göre bu tür geometride akış terimi (streaming term) aşağıdaki gibi verilir:

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi = \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} + \xi \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.5)$$

Burada $\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \phi(x, y, z, E, \mu, \varphi)$ dir.

(x,y) iki boyutlu kartezyen geometri için, açılal akının z bağımlılığı sözkonusu olmadığından akış terimi,

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla}\phi = \mu \frac{\partial\phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2.6)$$

halini alır. Burada $\phi = \phi(x, y, E, \mu, \eta)$ dir.

Bir boyutlu kartezyen geometri içinse, y ve z doğrultuları sözkonusu olmadığından ifade,

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla}\phi = \mu \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (2.7)$$

şekline dönüşür. Burada $\phi = \phi(x, E, \mu, \eta)$ dir.

Birçok bir boyutlu dilim şeklindeki geometrilerde, azimütal açı simetrisi sözkonusu olduğundan akı yalnızca x,E ve μ 'nün fonksiyonu olacaktır.

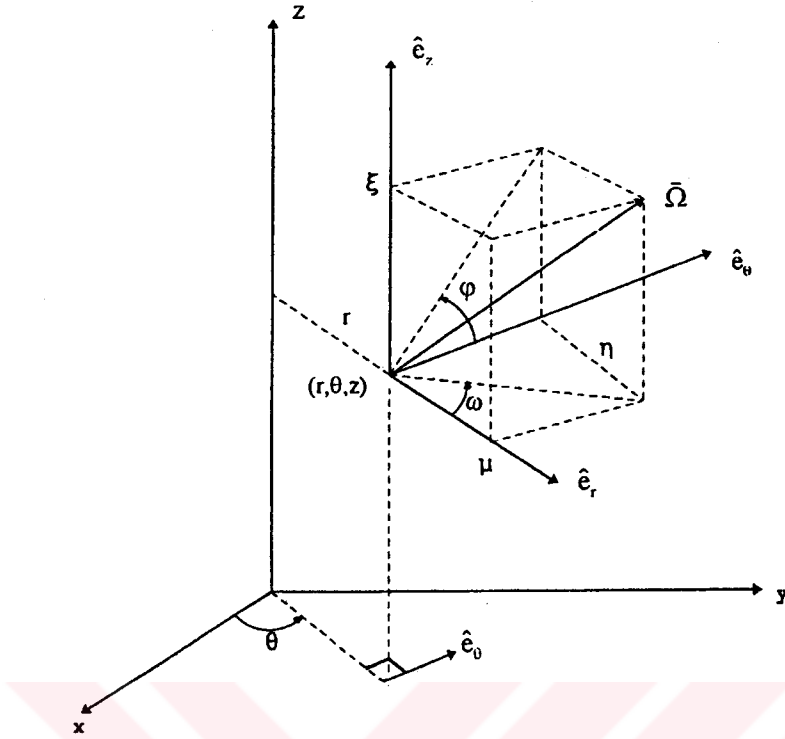
2. Silindirik Koordinatlar : Üç boyutlu silindirik koordinatlar (Şekil 2.2) de görülmektedir. Bu sistemde bir noktanın (r,θ,z) koordinatlarıyla ve $\bar{\Omega}$ vektörünün aşağıdaki gibi tanımlandığını biliyoruz. (Burada η-ξ düzlemi ele alınmış ve (r,θ)daki silindirik yüzeye tanjant olarak seçilmiştir.)

$$\bar{\Omega} = \hat{e}_r \Omega_r + \hat{e}_\theta \Omega_\theta + \hat{e}_z \Omega_z \quad (2.8)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \Omega_r &\equiv \hat{e}_r \cdot \bar{\Omega} = \sqrt{1-\xi^2} \cos\omega \equiv \mu \\ \Omega_\theta &\equiv \hat{e}_\theta \cdot \bar{\Omega} = \sqrt{1-\xi^2} \sin\omega \equiv \eta \\ \Omega_z &\equiv \hat{e}_z \cdot \bar{\Omega} \equiv \xi \end{aligned}$$

ve, $d\bar{\Omega} = d\xi d\omega$ dir.



Şekil 2.2. Silindirik koordinatlar.

Divergence operatörü $\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla}$ aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} = \frac{d}{ds} = \frac{dr}{ds} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\theta}{ds} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{d\xi}{ds} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{d\omega}{ds} \frac{\partial}{\partial \omega} \quad (2.9)$$

Silindirik koordinatlarda $\frac{dr}{ds} = \mu$, $\frac{d\theta}{ds} = \frac{\eta}{r}$, $\frac{dz}{ds} = \xi$, $\frac{d\xi}{ds} = 0$ ve $\frac{d\omega}{ds} = -\frac{\eta}{r}$

olduğuna göre akış terimi de aşağıdaki gibi verilir.

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \phi = \frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\phi)}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta\phi)}{\partial \omega} + \xi \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.10)$$

Burada $\phi = \phi(r, \theta, z, E, \xi, \omega)$ dır.

İki boyutlu silindirik geometri içinse iki ayrı geometri tanımlanabilir. 1) Sonlu silindirik geometri (r,z), 2) Düzlemsel silindirik geometri (r,θ) [5].

(r,z) iki boyutlu silindirik geometride, bir uzaysal nokta (r,z) koordinatlarıyla tanımlanır ve akış terimi,

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla}\phi = \frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta\phi)}{\partial \omega} + \xi \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.11)$$

olarak verilir. Burada $\phi = \phi(r, z, E, \xi, \omega)$ veya $\phi(r, z, E, \mu, \varphi)$ dir.

(r,θ) iki boyutlu silindirik geometride ise bir uzaysal nokta (r,θ) koordinatlarıyla tanımlanır ve akış terimi,

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla}\phi = \frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\phi)}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta\phi)}{\partial \omega} \quad (2.12)$$

şeklini alır. Burada $\phi = \phi(r, \theta, E, \xi, \omega)$ veya $\phi(r, \theta, E, \mu, \varphi)$ dir.

Bir boyutlu silindirik geometri durumunda ise akış terimi aşağıda görülen şekle dönüşür. Burada bir uzaysal nokta yalnızca r ile tanımlanmaktadır.

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla}\phi = \frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta\phi)}{\partial \omega} \quad (2.13)$$

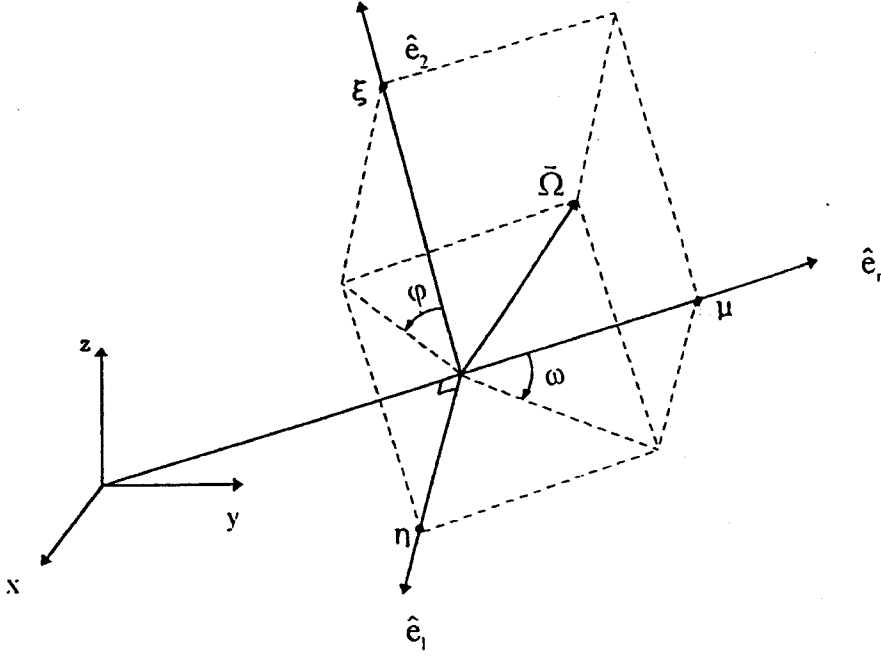
Burada $\phi = \phi(r, E, \xi, \omega)$ veya $\phi(r, E, \mu, \varphi)$ dir.

3. Küresel Koordinatlar: Deterministik transport kodlarında, küresel koordinat olarak yalnızca bir boyutlu geometri ele alınmaktadır. İki boyutlu küresel geometriler için de geliştirilmiş özel amaçlı bilgisayar kodları bulunmasına rağmen kullanım alanları sınırlıdır [32].

Bir boyutlu küresel geometride akış terimi (Şekil 2.3),

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial \mu} \frac{d\mu}{ds} \quad (2.14)$$

olarak yazılır.



Şekil 2.3. Küresel koordinatlar.

Bu geometri için, $\frac{dr}{ds} = \mu$ ve $\frac{d\mu}{ds} = (1-\mu^2)/r$ gözönüne alınarak yukarıdaki ifade,

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \phi = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial(r^2 \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial[(1-\mu^2)\phi]}{\partial \mu} \quad (2.15)$$

olarak yazılır.

2.1.2. Sınır Koşulları

Nötron transport denklemi, bilindiği gibi, sonlu bir uzay parçasında (burada etkin kesitlerin, uzaysal konum ve parçacık enerjisinin bir fonksiyonu olarak bilinmekte oldukları varsayılmaktadır) nötron transportunu tanımlayan bir temel denklemdir. Denklemin, modellenen fizik sisteme göre çözümünü gerçekleştirebilmek için, sözkonusu bölgenin sınırlarında nötron açısallık yoğunluğunun (veya akısının), uygun sınır koşullarıyla belirlenmesi gerekir. Nötron transport denkleminin çözümünde baş vurulan belli başlı sınır koşulları şöyle sıralanabilir:

1. Sistem yüzeyine gelen nötron akısı verilir. \hat{n} , yüzeydeki bir \hat{r} pozisyonuna dik doğrultuda alınan birim vektör olmak üzere,

$$\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = \phi_0, \quad \hat{n} \cdot \vec{\Omega} < 0 \text{ için}$$

yazılır. Bu koşul gerçek sınır koşulunu oluşturur. (Yukarıdaki ϕ_0 sabit bir akı değerini göstermektedir.)

2. Sözkonusu bölgeye herhangi bir dış kaynaktan gelen nötron da yoksa, bu yüzeye genel olarak serbest yüzey (free surface) ya da vakum denir. Buna göre vakum sınır şartı,

$$\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = 0, \quad \hat{n} \cdot \vec{\Omega} < 0 \text{ için}$$

olarak verilir. Gerçekte vakum sınır koşulu ideal bir durumdur. Çünkü, pratikte bir sistemi çevresindeki ortamdan tamamen izole etme olanağı yoktur. Sistemi terk eden parçacıklar, genellikle sisteme geri dönme olasılığına sahiptirler. Eğer parçacıkların sisteme geri dönebilme olasılıkları ihmal edilebilir derecelerdeyse, ya da sınırlar gözönüne alınan birim hacimden çok uzakta iseler, vakum sınır koşulu uygun bir koşuldur. Örnek olarak, vakum sınır koşulu, reaktör zırhlarının en dış yüzeyinde iyi bir uygulama alanı bulur. [13,14]

3. Yukarıdaki verilen temel koşullardan başka, deterministik transport kodlarında yaygın olarak kullanılan bazı sınır koşullarından daha söz edilebilir: a) Yansıtıcı sınır koşulu, b) Beyaz sınır koşulu, c) Peryodik sınır koşulu, d) Küresel orijinli sınır koşulu, e) Silindirik orijinli sınır koşulu, f) Albedo sınır koşulu gibi [5,27]

4. Ayrıca, açısal değişkenin kesikleştirme işlemine dayanan iki önemli yöntemde, S_N ve P_N , kullanılmakta olan Marshak ve Mark sınır koşullarından söz açılabilir.

a) Marshak sınır koşulu

$$\int_0^1 P_i(\mu) \phi(0, \mu) d\mu = \int_0^1 P_i(-\mu) \phi(a, -\mu) d\mu = 0$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, N \quad (N \text{ tek sayı})$$

Bu koşul, özellikle P_N yönteminde kullanılan bir koşuldur.

b) Mark sınır koşulu

$$\phi(0, \mu_1) = 0 \quad \mu_1 > 0 \text{ için}$$

$$\phi(a, \mu_1) = 0 \quad \mu_1 > 0 \text{ için}$$

Sözkonusu koşul, özellikle S_N yönteminde tercih edilen bir koşuldur. Yukarıdaki koşullar, a kalınlığında bir dilim geometri için verilmiştir.

Deterministik transport kodlarında yaygın olarak kullanıldığını belirttiğimiz ve çalışmanın belkemiğini oluşturan TWOTRAN-II de sözkonusu olan sınır koşulları, aşağıda kısaca tanıtılmaktadır.

1. Vakum Sınır Koşulu : Bu koşul, yukarıda tanıtıldığı gibi, her doğrultu için gözönüne alınan bölge sınırında açısız akının sıfır olması demektir.

2. Yansıtıcı Sınır Koşulu : Bu koşul genellikle analiz edilen sistemin simetri düzlemine uygulanır. Yansıtıcı sınırdan gelen akı, giden akıya eşittir.

$$\phi_{\text{gelen}}(-\mu, \eta) = \phi_{\text{giden}}(\mu, \eta), \quad \mu > 0$$

Yansıtıcı sınır genellikle, silindirik geometride radyal eksen boyunca geçerlidir. Ayrıca silindirik hücre hesaplarında, hücrenin dış radyal yüzeyinde uygulanır.

3. Beyaz Sınır Koşulu : Sınırlardan gelen açısız akı değerleri aynı sabit değere eşit alınır. Bu değer, sınırlardan akıp giden akının ortalama değeridir. Sonuçta sınırlardan geçen net parçacık akışı sıfırdır. Buna göre,

$$\phi_{\text{gelen}} = \frac{\sum_m w_m \mu_m \phi(\mu_m, \eta_m)_{\text{giden}}}{\sum_m w_m \mu_m}$$

dır [27]. Bu koşul silindirik geometrilerdeki hücre hesaplarında önemlidir.

4. Periyodik Sınır Koşulu : Bu koşula göre, bir sınırdan gelen açısai akı, karşı sınırdan giden akıya eşittir. Koşul, daha çok j doğrultusundaki tepe ve taban sınırlarına uygulanır. Örneğin tabandan gelen akı, tepeden giden akıya, buna karşılık tepeden gelen akı da tabandan gidene eşittir.

Bu koşul kartezyen koordinatlara veya (r,z) ve (r,θ,z) koordinatlarıyla verilen silindirik geometrilere uygun bir koşuldur.

5. Sınır Kaynakları : Gözönüne alınan problem bölgesine her doğrultuda gelen açısai akı belirlenmelidir; tepe, taban, sağ kenar gibi. Sözkonusu bölgeye doğru olan bu akışlar bir kaynak olarak yorumlanabilir. Örneğin, sağ sınırdaki bir kaynaktan gelen parçacıkların sayısı aşağıdaki ifadeyle verilir [27].

$$\text{Parçacık sayısı} = \sum_{m,j} w_m \mu_m QR_{mj} A_{\Gamma+1/2,j}$$

Burada QR_{mj} , sağ kenardaki kaynağı göstermektedir.

2.1.3. Transport Denklemine Çözüm Yöntemleri

Nükleer reaktörlerin dizayn ve analizinde, Boltzmann transport denkleminin çözümü önemli rol oynar. Fakat, integrodiferansiyel formdaki denklemin çözümü, basitleştirilmiş model problemler için dahi çok zordur. Çünkü denklem, daha önce de belirtildiği gibi, yedi bağımsız değişken içermekte ve denklemde yer alan etkin kesitler, hem nötron enerjisine hem de uzaysal konuma bağlı bulunmaktadır. Bundan başka, reaktörlerde çeşitli geometriler ve çeşitli malzemeler sözkonusu olabilir. Denklem, sayılan nedenlerden kaynaklanan kompleks yapısı, araştırmacıları, bilgisayar ağırlıklı nümerik çözüm yöntemleri aramaya yöneltmiştir. Günümüzde uygulamalı matematik ve bilgisayarlardaki gelişmeler, oldukça karmaşık ve üniform olmayan yapılara uygun, uzun hesaplamaları kolaylaştıran ve hızlandıran birçok nümerik yöntemin ortaya atılmasına neden olmuştur [13]. Bu çalışmalarda amaç, bilgisayar çözüm mantığına uygun, en az hafıza ve zaman gerektiren, dolayısıyla maliyeti en az olan, gerçeğe en yakın ve hassas sonuçlar verebilen yaklaşım teknikleri geliştirmektir. Bu teknikler genelde iki sınıfa ayrılırlar:

A. Deterministik yöntemler, B. Olasılık kavramına dayanan yöntemler

A. Deterministik gruba giren nümerik yöntemler, lineer Boltzmann denklemini uygun sınır koşullarıyla birlikte (eğer problem zamana bağlıysa, başlangıç koşulu da dahil), kesikleştirerek -discretization- çözerler. Problemin türüne göre, transport denkleminde yer alan bağımsız değişkenler, enerji değişkeni, açısal değişken ve uzaysal değişkenler tek tek ele alınırlar.

Enerji değişkeninin kesikleştirilmesi bizi, reaktör analizi problemlerinde önemli bir yeri olan çok gruplu nötron transport çalışmasına götürür. Konu, daha sonraki alt bölümde ayrıca ele alınacaktır.

Açısal değişkenin kesikleştirilmesi alanındaysa iki önemli teknikten sözedilir:

1. Küresel Harmonikler Yöntemi (P_N), 2. Kesikli Ordinatlarda Yöntemi (S_N)

P_N yöntemi, transport problemlerinde yıllardır kullanıldığı halde, özellikle iki veya üç boyutlu geometriler için denklem sayısı arttığından, günümüzdeki akı hesaplama algoritmaları için pratik bir yöntem sayılmaz.

Oysa, bu çalışmanın da konusunu oluşturan S_N yöntemi, integrodiferansiyel formdaki kompleks transport denklemini, bilgisayar hesaplama mantığına uygun bir cebirsel denklem setine dönüştürdüğünden, P_N yöntemine göre daha pratik ve maliyet olarak daha ucuz bir yöntemdir. Her iki yöntemden de daha sonra ayrıntılı olarak sözedilecektir.

Transport denkleminin kesikleştirilmesindeki son adım, uzaysal değişkenlere göre gerçekleştirilen kesikleştirme işlemidir. Klasik nümerik yaklaşım yöntemleri, sonlu farklar, sonlu elemanlar ve nodal yöntemler, transport teorisinde kullanılan uzaysal kesikleştirme yöntemlerini oluştururlar. Sonlu farklar diferansiyel ifadelerin kesikleştirilmesinde kullanılmakla birlikte, transport teorisinde ve S_N yöntemine has Diamond, Ağırlıklı Diamond, Lineer Süreksizlik gibi yöntemler, [27,50,52] uzaysal kesikleştirmede kullanılır. Özellikle $\leq 2mfp$ ortalama serbest yol boyutlarındaki ağ

şebekeleri için uygun olan diamond yöntemi, TWOTRAN-II kodunun da tercih ettiği bir uzaysal kesikleştirme tekniğidir [5,27].

Bilindiği gibi, büyük bir reaktör ortamında nötron dağılımını hassas olarak belirleyebilmek için çok sayıda ağ noktasını (mesh point) gözönüne almak gerekir. Bu da hesaplama maliyetini oldukça arttıran bir etkidir. Günümüzde bu amaçla nodal yöntemler geliştirilmiştir. Kullanılan ağ şebekesinde her homogen bölge bir düğüm (node) olarak kabul edilir ve buradaki ortalama akı tanımlanır. Bu yöntemlerin ilki 1964 yılında FLARE modeli ile ortaya çıkmıştır [28]. LWR lerde özellikle reflektör analizlerinde sıkça kullanılan geliştirilmiş nodal difüzyon yöntemler[33], günümüzde difüzyon teoride olduğu kadar başarılı olmamasına karşın transport teoriye de uyarlanmaya başlanmış ve bu tür nodal- S_N beraberliğinden oluşan karma yöntemler oldukça önem kazanmıştır. Bunların başlıcaları, Discrete Nodal Transport Method (DNTM), TWOTRAN Nodal Method gibi çalışmalardır [28,63].

B. Olasılık kavramı üzerine kurulu bilinen en önemli yöntem Monte-Carlo yöntemidir [13,34,70]. Monte-Carlo yöntemi, hem deterministik, hem istatistik problemleri çözmeye kullanılan, olasılık teorisine dayalı bir nümerik çözüm yöntemidir. Yöntem, karmaşık geometrilere, özellikle belirli fizik sınır koşullarına gereksinimi olan diğer yöntemlerin kullanılmadığı geometrilere, ancak birkaç mfp boyutlarındaki sistemlere, kontrol elemanlarına ve rezonanstan kaçma olasılık hesaplarına uygundur [11]. Monte-Carlo yöntemi, karmaşık geometrilere başarılı olduğu halde, nötronları tek tek izlediğinden ve yaşadıkları olayları rastgele sayılarla (random number) belirttiğinden dolayı, istatistiksel olmayan yöntemlere göre daha az hassas sonuçlar verir. Hassasiyeti arttırmak için izlenen parçacık sayısı artırılır; bu da daha büyük bilgisayar hafızası ve zamanı demektir.

2.1.3.1. Enerji Değişkeni - Çok Grup Yöntemi

Reaktörde nötron enerji bölgesi 0.01 eV'den 10 MeV'e kadar uzandığından, bu geniş aralık birçok gruplara ya da aralıklara bölünebilir. Her grup içinde etkin kesitlerin sabit oldukları varsayılır.

ΔE_g sözkonusu G adet enerji aralığını belirtmek üzere Boltzmann transport denklemini aşağıdaki gibi yazılır :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega}) + \sum_{t,g}(\bar{r}, \bar{\Omega}) \phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega}) = \\ \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} d\bar{\Omega}' \sum_{q' \rightarrow g}(\bar{r}, \bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega}) \phi_{g'}(\bar{r}, \bar{\Omega}') + Q_g(\bar{r}, \bar{\Omega}') \end{aligned} \quad (2.16)$$

$g=1,2,\dots,G$

Burada

$$\phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega}) = \int_{\Delta E_g} \phi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) dE \quad (2.17)$$

Yukarıdaki bağıntı ile verilen g. gruba ait akı, artık parçacık dağılımını göstermez; ΔE_g aralığındaki toplam parçacık akısını belirtir. Bundan dolayı integral yerine, basit bir toplam olarak belirtilebilir [5].

Bu yöntemin başarısı, her grup için ortalama enerjiye göre tanımlanacak olan ortalama etkin kesit değerinin doğruluğuna bağlıdır.

Etkin kesitler aşağıdaki bağıntıyla verilirler :

$$\sum_{t,g} = \frac{\int_{\Delta E_g} \sum_t \phi dE}{\int_{\Delta E_g} \phi dE} \quad (2.18)$$

Sonuçta transport denklemini, G adet denklemden oluşan bir sete dönüştürülmüş olur. Bu setin çözümü için iteratif yöntemler kullanılır. İterasyon mantığına göre, kaynak terimi biliniyor farzedilerek(2.17)denklemini önce bir grup için

çözülür; yeni kaynak ele alınarak işlem tekrarlanır [11]. İşlemi aşağıdaki gibi belirtmek mümkündür:

$$L_g \phi_g^{k+1} = \sum_{g'=1}^G \sum_{g' \rightarrow g} (\bar{r}, \bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega}) \phi_{g'}^k (\bar{r}, \bar{\Omega}') + Q_g (\bar{r}, \bar{\Omega}) \quad (2.19)$$

Burada $k=0,1,2,\dots$ iterasyon sayısını göstermektedir.

Başlangıç tahmini ϕ_g^0 , $g=1,2,\dots,G$ alınarak denklemler ϕ_g^1 , $g=1,2,\dots,G$ için çözülür. ϕ nin bu yeni değeri ile yukarıdaki denklemin sağ yanı yeniden oluşturulur. Böylece ϕ_g^2 bulunur. İşlem yakınsama sağlanana kadar devam eder.

2.1.3.2. Açısal Değişkenin Kesikleştirilmesi

Açısal değişkenin kesikleştirilmesini konu alan iki önemli teknikten, Küresel Harmonikler Yöntemi ve Kesikli Ordinatlara Yöntemi, önceki alt bölümde kısaca sözedilmişti. Çalışmanın konusunu oluşturan Kesikli Ordinatlara Yöntemi (S_N), ayrıca ele alınacağından, burada transport hesaplarında sıklıkla kullanılmakta olan Küresel Harmonikler Yöntemi, ana hatları ile tanıtılacaktır.

Küresel Harmonikler Yöntemi veya kısaca P_N , transport denkleminin nümerik çözümü için sıkça başvurulmuş önemli bir yöntemdir [5,35]. Yöntemin esası, açısal değişkeni içeren tüm fonksiyonların (yönsel akı, yönsel kaynak ve saçılma etkin kesiti) küresel harmonikler (Ek. A) türünden açılımlarını vermektir. Tek boyutlu problemlerde, küresel harmonikler olarak Legendre polinomları (Ek. B) kullanılır. Ortogonal olan bu fonksiyonların özelliklerinden yararlanılarak elde edilen denklem seti sonsuz sayıda olabilir. Bu set, bir yerde kesilerek analitik ya da nümerik olarak çözülür.

Yöntemi tanımlamak için Boltzmann transport denkleminin çok gruplu formunu ele alalım [5]:

$$\begin{aligned}
& \bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla}_g \phi(\bar{r}, \bar{\Omega}) + \sum_{t,g}(\bar{r}) \phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega}) \\
& = \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^{NM} (2l+1) \sum_{s,g' \rightarrow g}(\bar{r}) R_n(\bar{\Omega}) \tilde{\phi}_{n,g'}(\bar{r}) + \sum_{n=1}^{NM} (2l+1) R_n(\bar{\Omega}) Q_{n,g}(\bar{r}) \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Burada kaynak, homojen olmayan bir kaynaktır ve küresel harmonikler türünden açılımı verilmiştir.

NM, açılım derecesi L'ye göre küresel harmoniklerin sayısıdır.

$\tilde{\phi}_{n,g}(\bar{r})$, küresel harmoniklere göre açısal akı momenti,

$Q_{n,g}(\bar{r})$, açısal homojen olmayan kaynak momentidir.

Denklemin sol yanında görülen açısal akı da aşağıda verildiği gibi küresel harmonikler türünden açılabilir;

$$\phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega}) = \sum_{n=1}^{NM} (2l+1) R_n(\bar{\Omega}) \tilde{\phi}_{n,g}(\bar{r}) \quad (2.21)$$

Akı değerini, yukarıdaki (2.20) numaralı denklemde yerine koyarak ve $R_n(\bar{\Omega})$ küresel harmoniklerin ortogonal olma özelliklerini gözönüne alarak denklem,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{NM} (2l+1) R_n(\bar{\Omega}) \left[\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \tilde{\phi}_{n,g}(\bar{r}) + \sum_{t,g}(\bar{r}) \tilde{\phi}_{n,g}(\bar{r}) \right. \\
& \left. - \sum_{g'=1}^G \sum_{s,g' \rightarrow g}(\bar{r}) \tilde{\phi}_{n,g'}(\bar{r}) - \tilde{Q}_{n,g}(\bar{r}) \right] = 0 \quad (2.22)
\end{aligned}$$

halini alır. Burada $1 \leq m \leq NM$ 'dir.

Yukarıdaki denklemden anlaşıldığı gibi, P_N yönteminde, üç boyutlu geometriler için yedi akı momenti gerekir. Bir boyutlu dilim geometriler için bile, üç moment sözkonusudur. Bu da, akı hesaplama algoritmaları için pratik bir yol değildir; çünkü denklem sayısı çok artmaktadır. Dolayısıyla çözüm için gereken bilgisayar hafıza ve çalışma zamanı da paralel olarak artar. Bununla beraber P_N yönteminin iki önemli özelliği, yöntemin transport hesaplarında yıllardır

kullanılmasına neden olmuştur. 1. P_N yönteminde, S_N 'de karşılaşılan ışın-etkisi problemi görülmemektedir. Bu özellik, problemi gidermede zaman zaman iki yöntemin birarada kullanımına neden olmaktadır. 2. P_1 yöntemi, reaktör hesaplamalarında transport kodlarına göre maliyeti oldukça düşük olduğundan dolayı çok kullanılan difüzyon yaklaşımının geliştirilmiş halini oluşturmaktadır.

2.2. Kesikli Ordinatlarda Yöntemi (S_N)

Kesikli Ordinatlarda Yöntemi (Discrete Ordinates Method- S_N), ilk kez yıldız atmosferlerdeki radyasyon transferi problemlerini çözmek üzere kullanılmıştır [13]. Yöntemde, discrete ordinates (veya rays) diye adlandırılan seçilmiş belirli doğrultularda açılmal akının bulunması amaçlanır. Doğrultuların seçimi rastgele değildir, bazı koşulları sağlamalıdır; fiziksel ortamın simetrilerinin korunması gibi. Ayrıca, denklemdeki türevler sonlu fark teknikleriyle, integral terimi ise Gauss kuadrantlarıyla [24] belirtilir. Sonuçta, bilgisayar hesaplama mantığına çok uygun bir cebirsel denklem seti ortaya çıkar. Bu denklemler, standard nümerik algoritmalarla bilgisayarlarda çözümlenir.

Bilgisayarlara uygun, az hafızaya gereksinim duyan, bu nedenle de nötron transport problemlerinde giderek daha sık kullanılan sözkonusu yöntemin ilk hali B. Carlson [36,37] tarafından ortaya konmuştur. Günümüzde yöntemin oldukça geliştirilmiş şekli kullanılmaktadır [11,13].

İlerideki alt bölümde, S_N yöntemi ile türetilen denklemler değişik geometrilere ele alınacak, denklemlerin çözüm mantığı üzerinde durulacak, daha sonra da yöntemin sonuçlarında gözlenen ışın-etkisi problemi tanıtılarak, giderme yolları incelenecektir.

2.2.1. Düzlem Geometride S_N Yöntemi

2.2.1.1. İzotropik Saçılma

Önce temel geometrilerden olan, dilim şeklindeki bir ortamı gözönüne alalım. Türetmeleri basitleştirmek, notasyon kargaşasından kurtulmak için, aşağıda görülen hesaplar bir gruplu transport denklemi için verilmiştir.

İzotropik saçılma ve genelleştirilmiş kaynak terimleriyle bir gruplu transport denklemi aşağıdaki gibi yazılır [13].

$$\mu \frac{\partial \phi(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x) \phi(x, \mu) = \frac{c(x) \Sigma(x)}{2} \int_{-1}^{+1} \phi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu) \quad (2.23)$$

Burada $\mu = \cos \theta$ dir.

Yukarıdaki integral terimi, Gauss kuadratür formüllerinden uygun olan birini kullanarak [23,24],

$$\int_{-1}^{+1} \phi(x, \mu') d\mu' \equiv \sum_{i=1}^N w_i \phi(x, \mu_i) \quad (2.24)$$

şeklinde verilir. Burada w_i , seçilen kuadratüre ait ağırlık faktörüdür. Böylece integral teriminden arındırılmış transport denklemi, seçilen her doğrultu için ayrı ayrı yazılabilir. Denklem sonuçta,

$$\mu_j \frac{\partial \phi(x, \mu_j)}{\partial x} + \Sigma(x) \phi(x, \mu_j) = \frac{c(x) \Sigma(x)}{2} \sum_{i=1}^N w_i \phi(x, \mu_i) + Q(x, \mu_j) \quad (2.25)$$

haline girer. Burada $j=1,2,\dots, N$ dir.

Birinci dereceden diferansiyel denklemler içeren bu denklem seti çözüme daha uygun haldedir. Diferansiyel terimler, sonlu fark teknikleriyle belirtilerek ve problem geometrisine uygun sınır koşullarını uygulayarak çözümler.

(2.24) bağıntısı ile tanımlanan kuadratür ifadesindeki μ ve w değerleri gelişigüzel değerler değildir. Seçimlerinde gözönüne alınacak noktalar aşağıdaki gibi özetlenebilir [13] :

1) Tüm i değerleri için $w_i > 0$ 'dır.

2) Seçilen doğrultular ve ağırlık faktörleri, $\mu=0$ civarında simetriktirler. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mu_i &= -\mu_{N+1-i} \\ &, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \\ w_i &= w_{N+1-i} \end{aligned}$$

dır. Böylece çözümün, gözönüne alınan dilim geometride pozitif ya da negatif bölgede aranması, sonuçlar açısından bir fark yaratmayacaktır. N 'in çift sayı olmasının bir avantajı da, yansıtıcı sınır koşulunun rahatça uygulanabilmesidir. Bu durumda $x=a$ kalınlığında bir dilim için:

$$x = 0 \text{ da} \quad \phi(x, \mu_i) = \phi_i(x) \quad \text{olarak,}$$

$$\phi_i(0) = \phi_{N+1-i}(0), \quad i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$x=a$ da,

$$\phi_i(a) = 0, \quad i = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N$$

olacaktır.

3) Eğer $\phi(x, \mu)$ derecesi küçük bir polinomsa (2.24) ile verilen kuadratür bağıntısındaki integral tam değerini verecektir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N w_i \mu_i^n &= \frac{2}{n+1}, & \text{çift } n\text{'ler için} \\ \sum_{i=1}^N w_i \mu_i^n &= 0, & \text{tek } n\text{'ler için} \end{aligned}$$

2.2.1.2. Anizotropik Saçılma

Anizotropik saçılma durumunda, bir gruplu transport denklemi, düzlem geometride mesafeler mfp (ortalama serbest yol) alınarak aşağıdaki gibi verilir [13];

$$\mu \frac{\partial \phi(x, \mu)}{\partial x} + \phi(x, \mu) = c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} f(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}) \phi(x, \mu') d\mu' \quad (2.26)$$

Burada açılal akı ve kaynak, ϕ azimütal açıdan bağımsız alınmıştır.

Denklemdaki $f(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega})$ saçılma fonksiyonunun, Legendre polinomları türünden açılımı aşağıdaki gibidir.

$$f(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}) = f(\mu_o) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\mu_o) \quad (2.27)$$

Burada $\bar{\Omega}, \bar{\Omega}' = \mu_o$ ve $\bar{\Omega}, \bar{\Omega}'$ doğrultuları, nötronun çarpışma öncesi ve sonrası doğrultularını göstermektedir.

Polinomlar aşağıda görüldüğü gibi ortogonaldirler:

$$f_l = 2\pi \int_{-1}^{+1} f(\mu_o) P_l(\mu_o) d\mu_o \quad (2.28)$$

$$f_o = 2\pi \int_{-1}^{+1} f(\mu_o) d\mu_o = 1 \quad (2.29)$$

ile verilen normalizasyon koşulunu gözönüne alarak, Legendre polinomlarının toplamı teoremini kullanarak,

$$P_l(\mu_o) = P_l(\mu)P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu)P_l^m(\mu') \text{Cos}m(\varphi - \varphi') \quad (2.30)$$

yazılır. Buradaki φ ve φ' azimütal açılarıdır. μ ve μ' doğrultuları da bu açılara ait kosinüs doğrultularını verir. $P_l^m(\mu)$, asosye Legendre polinomlarını belirtir.

İfadeyi, denklem (2.27) de koyup, sonucu denklem (2.26) da yerleştirerek, ϕ' üzerinden integral alındığında $\text{Cosm}(\phi - \phi')$ terimi kaybolur. Sonuçta denklem,

$$\mu \frac{\partial \phi(x, \mu)}{\partial x} + \phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\mu) \int_{-1}^{+1} \phi(x, \mu') P_l(\mu') d\mu' + Q(x, \mu) \quad (2.31)$$

haline girer.

Denklemdaki açılmal akı ve kaynak terimi de Legendre polinomları türünden aşağıdaki gibi açılabilir:

$$\phi(x, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2_{m+1}}{4\pi} \phi_m(x) P_m(\mu) \quad (2.32)$$

$$Q(x, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2_{m+1}}{4\pi} Q_m(x) P_m(\mu) \quad (2.33)$$

Polinomların ortogonal olmalarından,

$$\phi_m(x) = \int \phi(x, \mu) P_m(\mu) d\bar{\Omega} = 2\pi \int_{-1}^{+1} \phi(x, \mu) P_m(\mu) d\mu$$

ve benzer şekilde,

$$Q_m(x) = 2\pi \int_{-1}^{+1} Q(x, \mu) P_m(\mu) d\mu$$

bağıntıları elde edilir. Sonuçta (2.31) ile verilen denklem, kuadratür bağıntısını da gözönüne alarak,

$$\mu_j \frac{\partial \phi(x, \mu_j)}{\partial x} + \phi(x, \mu_j) = \frac{c}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\mu) \sum_{i=1}^N w_i P_l(\mu_i) \phi(x, \mu_i) + Q(x, \mu_j) \quad (2.34)$$

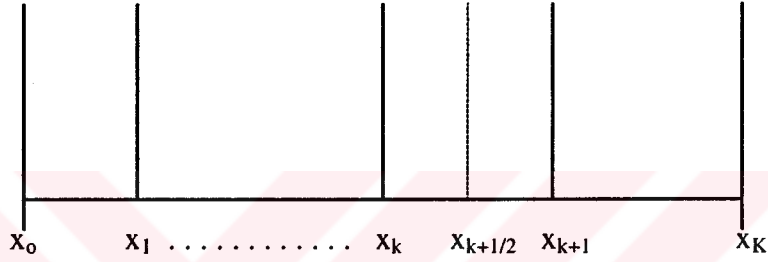
şeklinde yazılabilir. Burada $c = \sum_s / \sum_t$ 'dır.

(\sum_s saçılma etkin kesiti, \sum_t toplam etkin kesiti)

2.2.1.3. Uzaysal Kesikleştirme ve Kesikli Ordinatlarda Denklemlerin Çözümü

Yöntemin çözüm mantığını anlayabilmek için, (2.25) bağıntısı ile düzlem geometride verilen bir gruplu transport denklemini ele alalım:

Önce, uzaysal değişken x in belirli (discrete) değerlerinden oluşan bir uzaysal ağ şebekesi tasarlayalım (Şekil 2.4). Burada $k=0,1,2,\dots,K$ ve sistemin sol yandaki sınır değeri x_0 , sağ yandaki de x_K 'dir. Etkin kesitler şebeke hücrelerinde sabit olarak alınmışlardır.



Şekil 2.4. x değişkenine ait aralıklar.

Transport denklemindeki türev terimleri sonlu fark teknikleriyle aşağıdaki gibi yazılabilir [13].

$$\left. \frac{\partial \phi(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x=x_{k+1/2}} \cong \frac{\phi(x_{k+1}, \mu_j) - \phi(x_k, \mu_j)}{x_{k+1} - x_k} \quad (2.35)$$

Burada $x_{k+1/2} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$ dir.

(2.25) denkleminin ya da (2.34) denkleminin sağ yanını genel bir tanımla $q(x, \mu_j)$ olarak gösterirsek, denklem aşağıdaki şekle girer.

$$\mu_j \frac{\phi(x_{k+1}, \mu_j) - \phi(x_k, \mu_j)}{x_{k+1} - x_k} + \sum(x_{k+1/2}, \mu_j) \phi(x_{k+1}, \mu_j) = q(x_{k+1/2}, \mu_j) \quad (2.36)$$

$\phi(x_{k+1/2}, \mu_j)$ için ortalama değer alınarak denklem,

$$\mu_j \frac{\phi(x_{k+1}, \mu_j) - \phi(x_k, \mu_j)}{x_{k+1} - x_k} + \Sigma(x_{k+1/2}) \left[\frac{\phi(x_{k+1}, \mu_j) + \phi(x_k, \mu_j)}{2} \right] = q(x_{k+1/2}, \mu_j) \quad (2.37)$$

şekline dönüşür.

Yukarıda görülen nötron transport denklemi ifadesi bilgisayar çözümüne uygun formdadır. Çözüm iteratif yöntemlerle gerçekleştirilir. Yöntemin üstünlüğü, daha karmaşık geometrilere ve iki boyutlu problemlere de uygulanabilir olmasıdır.

İterasyon için, $\Delta = x_{k+1} - x_k$ tanımını yaparak ve $q(x, \mu_j)$ değerini bilinen kabul ederek işleme başlanır. q değeri (2.37) bağıntısında konarak, denklem $\phi(x_{k+1}, \mu_j)$ için aşağıdaki gibi çözülür [9,13].

$$\phi(x_{k+1}, \mu_j) = \frac{1 - \Sigma\Delta / 2\mu_j}{1 + \Sigma\Delta / 2\mu_j} \phi(x_k, \mu_j) + q \frac{\Delta}{\mu_j (1 + \Sigma\Delta / 2\mu_j)} \quad (2.38)$$

$\mu_j > 0$ için

Ya da,

$$\phi(x_k, \mu_j) = \frac{1 + \Sigma\Delta / 2\mu_j}{1 - \Sigma\Delta / 2\mu_j} \phi(x_{k+1}, \mu_j) - q \frac{\Delta}{\mu_j (1 - \Sigma\Delta / 2\mu_j)} \quad (2.39)$$

$\mu_j < 0$ için

Yukarıdaki (2.38) denklemi (2.37) de konarak $\phi(x_k, \mu_j)$ bulunur. Bu değerle (2.38) den $\phi(x_{k+1}, \mu_j)$ elde edilir. Bulunan akı değerleri, asıl denklemde yerleştirilerek yeni bir q değeri hesaplanır. Olay böyle devam eder.

Sınır koşullarına gelince;

1) İki sınırdaki da vakum söz konusu ise,

$$\phi(x_0, \mu_j) = 0, \quad \mu_j > 0 \text{ için}$$

Bu durumda hesaba $\phi(x_0, \mu_j) = 0$ alınarak başlanır. x eksenini k artan değerleriyle taranarak akılar hesaplanıp sağa doğru gidilir.

$$\phi(x_K, \mu_j) = 0, \quad \mu_j < 0 \text{ için}$$

Bu durumda $\phi(x_K, \mu_j) = 0$ alınarak başlanır ve k azalan değerleriyle x eksenine sola doğru taranır. Akıların hesabı sol sınıra ulaşana kadar devam eder.

2) $x=x_K$ da yansıtıcı sınır sözkonusu ise,

$$\phi(x_K, \mu_j) = \phi(x_K, -\mu_j) \text{ dir.}$$

3) Her iki sınırdaki da, $x=x_0$ ve $x=x_K$, yansıtıcı sınır geçerli ise, seçilen aralıkların $\frac{1}{2}N$ adedini almak yeterlidir. Bu durumda örneğin n .problem için, $x=x_0$ 'daki sınır koşulu,

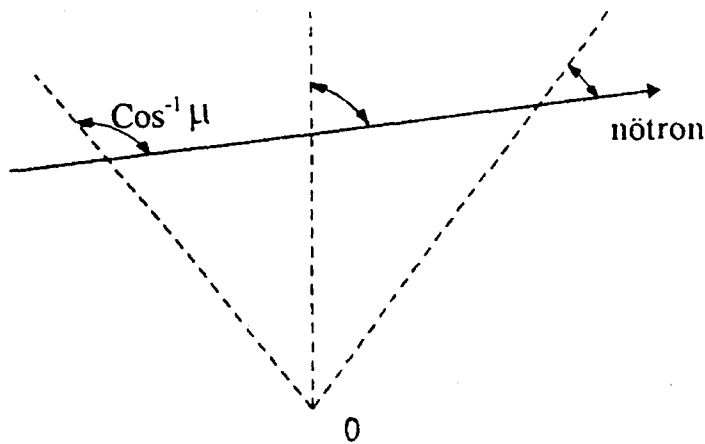
$$\phi(x_0, \mu_j) = \delta_{jn} \text{ olacaktır.}$$

Burada δ_{jn} Kronecker Deltasıdır [13].

İterasyon işleminde, yukarıdaki modelden de anlaşıldığı gibi, hareket ya da süpürme yönü, daima nötronun hareket yönündedir. Nötron hareket yönüne zıt doğrultuda hesaplar yürütülemez. Bu durumda denklemler kararlı olmayacaktır [9].

2.2.2. Eğrisel Geometride S_N Yöntemi

Bu geometride, düzlem geometriden farklı bir durum sözkonusudur. Burada nötronun açısal koordinatları, hiçbir çarpışma olayı gerçekleşmese de, akış doğrultusuna bağlı olarak sürekli değişmektedir (Şekil 2.5).



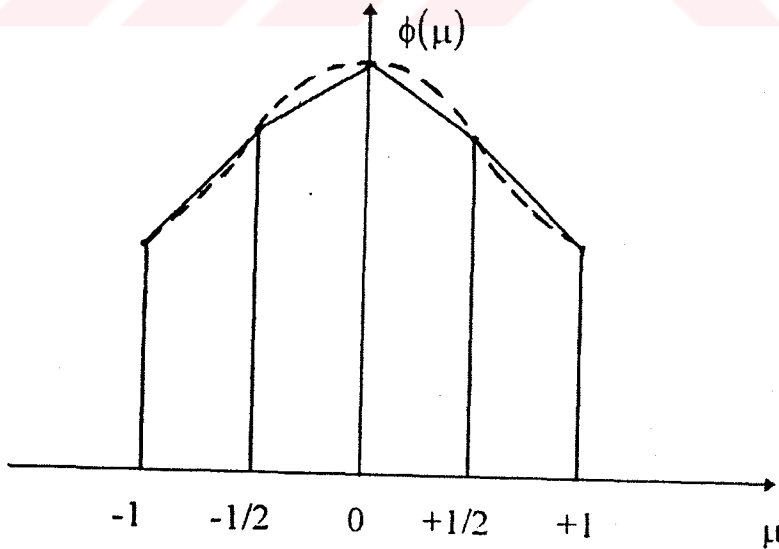
Şekil 2.5. Nötronun akış yönüne bağlı olarak doğrultuların değişimi

Bu tür geometrilere iki problem sözkonusu olmuştur:

1. Azimütal simetri olmadığından, saçılma teriminde görülen Legendre polinomlarının toplamı teoreminden ortaya çıkan küresel harmoniklere ait terimlerin yokedilememesi,

2. Transport denklemindeki açılal değişkene ait türevin ne tür bir yaklaşımla çözülebileceği.

İkinci problemi halletmek üzere değişik fikirler ileri sürölmüştür. Bunlardan çoğu açılal akı ile μ arasındaki karmaşık ilişkileri içermektedir. Bu konuda B. Carlson tarafından oldukça basit bir çözüml ortaya konmuştur [36]. Esası, $(-1,+1)$ μ aralığını N parçaya bölerek ve bunlara ait her noktayı $\mu_{n+1/2} = -1 + \frac{2n}{N}$ şeklinde belirleyerek, bu noktalar arasında ϕ nin doğrusal değiştiğini (şekil 2.6) varsaymaya dayanmaktadır [13,37]. Carlson ve arkadaşları, bu çalışmalarında S ile parçaları (segment), N ile de parça sayısını göstererek, bu uygulamaya S_N yaklaşımı adını vermişlerdir.



şekil 2.6. $(-1,+1)$ aralığının $N=4$ parçaya bölünüşü (S_4 yaklaşımı).

Günümüzde, Carlson'un ileri sürdüğü modelin geliştirilmiş hâli kullanılmaktadır. Burada artık N 'ler parçaları değil, $\Omega \cdot \hat{r} = \mu$ (veya $\text{Cos}\theta = \mu$)

olarak tanımlanan doğrultuları göstermektedir. Bununla beraber, yöntemi ilk uygulayanların anısına, Discrete Ordinates Yönteminin bu yeni şekline de S_N yöntemi denilmektedir [9,11] (Günümüzde ilk uygulama kullanılmadığından, S_N yöntemi dendiğinde artık bu yeni form anlaşılmaktadır).

Önceki bölümde, S_N yöntemini tanıtmak amacı ile transport denkleminin en basit formunu (zamandan bağımsız, tek gruplu ve tek boyutlu) kullanmış, temel kavramları öyle vermiştik. Şimdi ise bu çalışmayı yakından ilgilendiren geometrilerden biri, silindirik geometride yöntemin işleyişini ele almak istiyoruz. Bu nedenle Boltzmann transport denkleminin çok gruplu formuna dönüp, probleme daha gerçekçi yaklaşıyoruz.

Saçılma ve homojen olmayan kaynak terimleriyle birlikte, çok gruplu transport denkleminin S_N formunu aşağıdaki gibi yazmak mümkündür [5]:

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega}) \right]_{\bar{\Omega}_m} + \sum_{t,g}(\bar{r}) \phi_{m,g}(\bar{r}) &= \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^{NM} (2l+1) \sum_{s,g' \rightarrow g}^l(\bar{r}) R_n(\bar{\Omega}_m) \tilde{\phi}_{n,g}(\bar{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^{NM} (2l+1) R_n(\bar{\Omega}_m) \tilde{Q}_{n,g}(\bar{r}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$m=1,2,\dots,M$

Burada,

NM açılımda kullanılan küresel harmoniğin sayısı (S_N yönteminin temel yaklaşımlarından biri kaynak teriminin küresel harmonikler türünden açılımıdır),

$\tilde{\phi}_{n,g}(\bar{r})$, küresel harmonik açılmal akı momenti,

$\tilde{Q}_{n,g}(\bar{r})$, homojen olmayan açılmal kaynak momenti,

$\phi_{m,g}(\bar{r})$, ortalama açılmal akı. Bu büyüklük aşağıdaki gibi verilir:

$$\phi_{m,g}(\bar{r}) \equiv \frac{1}{w_m} \int_{\bar{\Omega}_m} d\bar{\Omega} \phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega})$$

Burada w_m ağırlık faktörüdür. Çünkü her bir $\bar{\Omega}_m$ discrete doğrultu (bileşenleri μ_m, η_m, ξ_m), yüzey alanı w_m olan birim kürenin yüzeyinde bir nokta olarak gösterilir.

Discrete doğrultu kosinüsleri ve ağırlıkları birlikte bir kuadratür seti oluşturmaktadırlar.

Daha önce, iki boyutlu (r,z) silindirik geometride akış terimi (2.11) ile verilmişti.

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \phi = \frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta\phi)}{\partial \omega} + \xi \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.11)$$

Yukarıda sözedilen tüm tanımlar gözönüne alınarak (2.40) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mu \left\{ \frac{\partial[r\phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega})]}{\partial r} - \frac{\partial[\eta\phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega})]}{\partial \omega} + \xi_r \frac{\partial \phi_g(\bar{r}, \bar{\Omega})}{\partial z} \right\} + r \sum_{t,g}(\bar{r}) \phi_{m,g}(\bar{r}) = r S_{m,g}(\bar{r}) \quad (2.41)$$

Burada kaynak terimi kapalı olarak, $S_{m,g}(\bar{r})$ şeklinde gösterilmiştir.

Yukarıdaki denklemde büyük parantez içinde görülen akış terimini oluşturan ifadeler tek tek türetilerek, uzaysal değişkenlere ait türevlerde açısız akı her bir açısız aralıkta sabit kabul edilerek, denklemin S_N formu, örneğin silindirik (r,z) geometri için, kuadratür fikrini de kullanarak, aşağıdaki şekle dönüşür:

$$w_m \mu_m \frac{\partial[r\phi_{m,g}(\bar{r})]}{\partial r} + \alpha_{m+1/2} \phi_{m+1/2,g}(\bar{r}) - \alpha_{m-1/2} \phi_{m-1/2,g}(\bar{r}) + w_m \xi_m \frac{\partial[r\phi_{m,g}(\bar{r})]}{\partial z} + w_m r \sum_{t,g}(\bar{r}) \phi_{m,g}(\bar{r}) = w_m r S_{m,g}(\bar{r}) \quad (2.42)$$

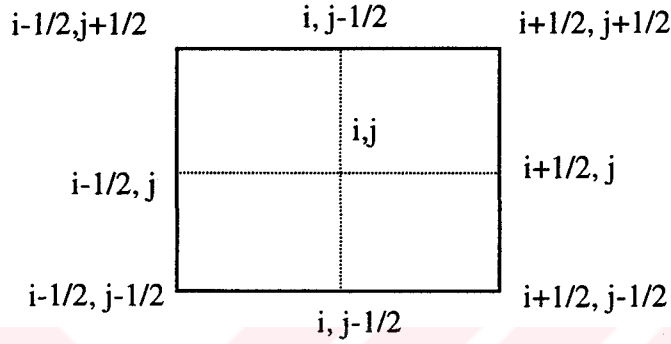
Özetle, S_N yönteminin açısız kesikleştirme işlemi için uyguladıkları şöyle sıralanabilir:

1. Akış teriminin özel geometri için türetilmesi,
2. Belirli doğrultu ve ağırlıkların seçimi; transport operatörünün bu doğrultular için yazılması,
3. S_N yönteminin temel yaklaşımı olan, kaynak teriminin açısız akının küresel harmonikleri türünden oluşturulması.

Son adım olarak, uzaysal kesikleştirme işlemine kısaca değineceğiz. Bu amaçla uzaysal ağ hücrelerini oluşturabilmek için r boyutunun I aralığı, z boyutunun da J aralığa bölündüğünü varsayalım (Şekil 2.7). Burada,

$$r_{i-1/2} < r < r_{i+1/2} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$z_{j-1/2} < z < z_{j+1/2} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, J$$



Şekil 2.7. Tipik iki boyutlu uzaysal ağ hücresi

Şekilde (i, j) hücresinin genişliği $\Delta r_i \equiv r_{i+1/2} - r_{i-1/2}$, yüksekliği de $\Delta z_j \equiv z_{j+1/2} - z_{j-1/2}$ olarak seçilmiştir.

Bu tanımlardan hareketle, çok gruplu S_N transport denkleminin tam discretize halini elde edebilmek için (2.42) denklemini diferansiyel silindirik hacim $2\pi r dr dz$ ile çarpılıp, (i, j) hücresi üzerinden integre ederek, herbir terim tek tek türetilerek sonuçta aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\begin{aligned}
 & w_m \mu_m (A_{i+1/2} \phi_{i+1/2, j, k, m, g} - A_{i-1/2} \phi_{i-1/2, j, k, m, g}) \Delta H_{jk} \\
 & + (A_{i+1/2} - A_{i-1/2}) (\alpha_{m+1/2} \phi_{i, j, k, m+1/2, g} - \alpha_{m-1/2} \phi_{i, j, k, m-1/2, g}) \Delta H_{jk} \\
 & + w_m \eta_m \Delta B_{ik} (\phi_{i, j+1/2, k, m, g} - \phi_{i, j-1/2, k, m, g}) \\
 & + w_m \xi_m \Delta C_{ij} (\phi_{i, j, k+1/2, m, g} - \phi_{i, j, k-1/2, m, g}) \\
 & + w_m \sum_{t, i, j, k, g} \phi_{i, j, k, m, g} v_{i, j, k} = w_m S_{i, j, k, m, g} v_{i, j, k} \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

$$g=1, 2, \dots, G; \quad m=1, 2, \dots, M; \quad i=1, 2, \dots, I; \quad j=1, 2, \dots, J; \quad k=1, 2, \dots, K$$

Burada,

$A_{i \neq j/2,j}$, i doğrultusundaki hücre yüzey alanı,

$V_{i,j,k}$, hücre hacmidir.

Yüzey alanları ve $\Delta H_{jk}, \Delta B_{ik}, \Delta C_{ij}$ katsayıları ile hücre hacimleri seçilen geometrilere göre tablolar halinde bulunabilir [5].

Yöntemin hassasiyeti için özetle şunlardan sözedilebilir:

1. Saçılmanın etkin olduğu problemlerde (reaktör özdeğer problemleri gibi), S_N yöntemi küresel harmonikler yönteminden çok daha hassas sonuçlar verir. Ayrıca yöntem, transport denkleminin doğal sınır koşullarının uygulanmasına, küresel harmonikler yönteminden daha uygundur.

2. Buna karşılık, düşük saçılma ve yüksek oranda yutulmanın sözkonusu olduğu problemlerde veya vakum bölgelerinde (zırhlama problemlerinde olduğu gibi), yöntemin hassasiyeti ışın-etkisi [38] denilen problemten dolayı iyi değildir.

2.2.3. S_N Yönteminin Uygulanmasında Karşılaşılan Problemler ve Işın-Etkisi

Önceki bölümde de değinildiği gibi, S_N yöntemi, nötron transport denkleminin deterministik nümerik çözümlerinin eldesinde yaygın olarak kullanılmakta olan bir tekniktir. Yöntem, günümüzde proton ve elektron gibi yüklü tanecik transportunda da artan başarıyla uygulanmaktadır [39]. Yöntemin bu derece başarılı ve popüler olmasının nedeni, sahip olduğu avantajlardır: Kullandığı ağ şemalarıyla integro-diferansiyel formdaki transport denklemini, bilgisayarların işlem mantığına uygun cebirsel denklem setine dönüştürmesi; çözüm için az bilgisayar zamanı ve hafızasına gereksinimi oluşu; dolayısıyla maliyetin düşük oluşu gibi. Yöntemin ilk ortaya atıldığı 1950'li yıllarda bu özelliği daha da önem taşımaktaydı; çünkü o günlerdeki bilgisayarlar sınırlı hafıza ve hıza sahiptiler. Günümüzdeki modern hesaplama olanakları, bilgisayarlardaki büyük gelişmeler ise yöntemin

gücünün daha da artmasına neden oldu. Yöntem tüm bu üstünlüklerine rağmen, günümüzde hâlâ elde edilen sonuçların güvenilirliğini etkileyen bazı sorunlara sahiptir. Söz konusu sorunlar şöyle sıralanabilirler:

1. Nümerik yaklaşımın özünden gelen bir hata, sayısal değerlerin birkaç basamaktan sonra yuvarlatılmasıdır. Bu tür basit hatalar, iterasyon işlemi ile fazla büyümeden halledilir. Ayrıca nümerik hataları azaltmak için genel bir kural da iterasyonun nötron akış doğrultusu boyunca devam etmesidir. ($\mu > 0$ için x_k 'den x_{k+1} 'e doğru; $\mu < 0$ için x_{k+1} 'den x_k 'ya doğru).

2. Optikçe kalın bölgeler (optically thick region) kullanıldığında, nötronların bir enerji grubu içinde çok sayıda çarpışma gerçekleştirdikleri ortamlarda, bir başka deyişle zayıf yutucu ortamlarda, saçılma kaynak terimine ait iterasyonun çok yavaşladığı görülür. Sorunun giderilmesi için bazı hızlandırıcı yöntemler geliştirilmiştir (Coarse mesh rebalance, synthetic acceleration methods gibi [9, 16,62,67]).

3. Önceki alt bölümde (2.38) ve (2.39) ile verilen denklemlere dikkat edilince, hem $\mu > 0$ hem de $\mu < 0$ için, denklemlerin sağ yanlarındaki akı katsayılarının birden küçük oldukları görülür. Bunun yanında Δ değeri, $|2\mu_j|/\Sigma$ ile kıyaslandığında yeterince büyük ve q değeri de küçükse, negatif akı değerleri elde edilmektedir. Bu değerler, hem fiziksel hem nümerik olarak istenmeyen sonuçlardır. Negatif akıdan kaçınmak için, gözönüne alınan ağ sistemine ait hücrenin boyutları Δ , yeterince küçük seçilmelidir [13].

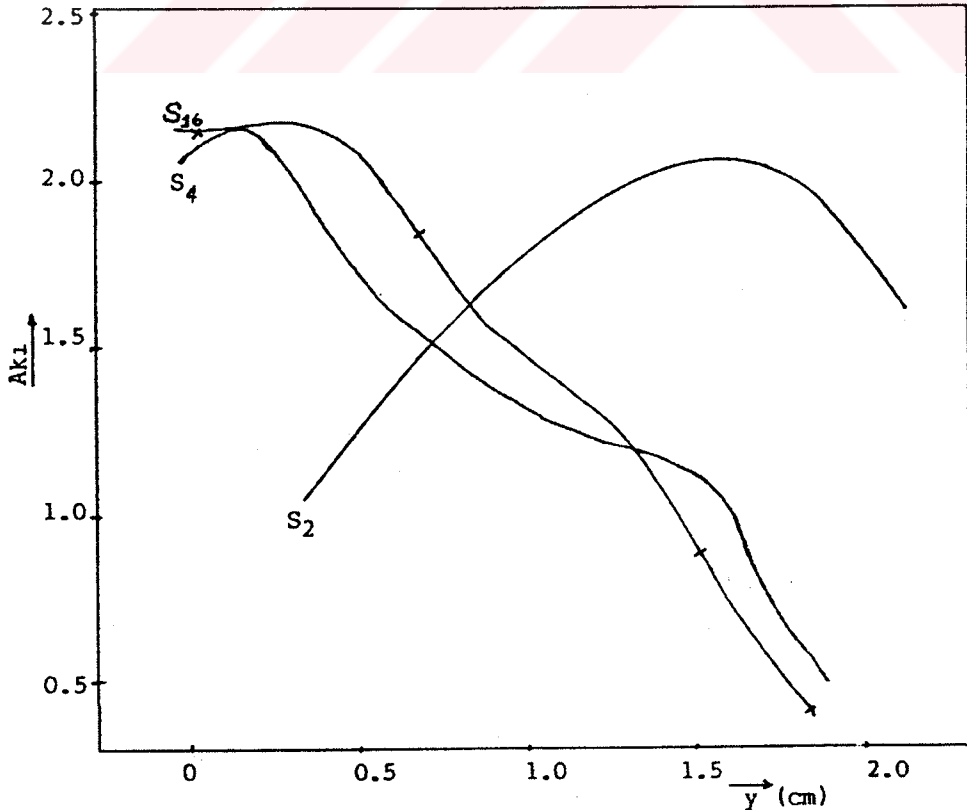
4. Yöntemin kullanıldığı uzaysal kesikleştirme şemalarına bağlı olarak ortaya çıkan nümerik difüzyon. Sorun, kullanılan şemaya bağlı olarak değişiklik gösteren bir nümerik dispersiyon olayıdır. Sorunu gidermek için, streaming ray yöntemi, sonlu fark S_N teknikleri [39] gibi teknikler kullanılmaktadır.

5. Giderilmesi daha kolay olan bu sorunlardan başka, ışın-etkisi denilen önemli bir sorun sözkonusudur. Açısal kesikleştirme sonucu ortaya çıkan, lokalize

kaynak kullanıldığında ve saçılmanın çok küçük olduğu durumlarda etkili olan bu olay, akı dağılımında anormallikler olarak kendini gösterir [9,15]. Sorunun çözümü için en basit yol S_N yönteminin derecesini arttırmaktır (N sayısını büyütmek).

Örnek bir problem için, S_2 ve daha yüksek derecede S_N yaklaşımlarına ait sonuçlar aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 2.8) [9]. Buradan anlaşıldığı gibi S_2 yaklaşımı sonuçları gerçeği yansıtmamaktadır. N sayısı büyüdükçe, dağılımın gerçeğe yaklaştığı gözlenir. Fakat bu durum, beklendiği gibi, daha büyük bilgisayar hafızası ve çalışma zamanı gerektirmektedir. Ayrıca, fiziksel olaya ters başka olaylar da kendini göstermeye başlar, osilasyonların arttığı ve genliklerinin büyüdüğü gözlenir [15].

S_N hesaplarının ayrılmaz bir parçası gibi görünen ışın-etkisi'ni tümüyle giderebilmek ya da oldukça azaltabilmek için çeşitli yöntemler ortaya atılmaktadır. Sonraki bölümde, bu tür çarelerden ayrıntılı olarak sözedilecektir. Bununla beraber sorun hâlâ güncelliğini korumakta, tatmin edici sonuçlar verecek, maliyeti az olan gelişmeleri beklemektedir.



Şekil 2.8. S_N yaklaşımının derecelerine göre akı dağılımı.

2.2.4. Işın-Etkisi'ni Giderme Çareleri

Son yıllarda S_N yöntemi üzerindeki çalışmalar, ışın-etkisi'ni tümüyle gidermek ya da oldukça azaltmak için değişik yöntemler geliştirmek konusunda yoğunlaşmıştır [38]. Bu amaçla çeşitli yaklaşımlar ileri sürülmektedir (Quadrupol P_N yaklaşımı ve açısız sonlu eleman kullanımı gibi [9,16]). Sonlu eleman çalışmalarında farklı uygulamalar görülmektedir. Bir kısım araştırmacı, açısız değişkene S_N tekniği, uzaysal değişkene de sonlu eleman yöntemi uygularken, diğer bir kısım da açısız değişken için sonlu eleman yaklaşımını, x-y değişkenlerine de sonlu eleman veya S_N yöntemlerini kullanmışlardır [18]. Daha sonraki çalışmalar çift-parite transport denkleminin çözümü üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalarla ışın-etkisi oldukça azaltılmış; ayrıca hiperbolik olan nötron transport denklemi, eliptik kısmi diferansiyel denklem setine dönüşmüştür [15].

Yöntemlerin tümü problemi oldukça azaltmalarına karşılık tümüyle yok edemezler. Bundan dolayı son çalışmalar, bu tür akı anormalliklerinin görülmediği küresel harmonikler yöntemini yeniden gündeme getirmiştir. S_N yönteminin hesapları kolaylaştıran ve bilgisayarlara çok uygun olan ağ şemaları ve iterasyon işlemleri saklı kalarak, P_N yöntemini uygulamak tercih edilen bir yol olmuştur. Birçok araştırmacı, x-y geometrisinde yazılmış S_N denklemlere yapay (fictitious) kaynak terimleri ekleyerek, denklemleri küresel harmonikler veya benzeri denklemlere dönüştürmüşlerdir [21,40]. Günümüzde bu tür $S_N \rightarrow P_{N-1}$ transformasyonu için yeni bilgisayar kodları geliştirilmiştir. Fakat bu uygulamada "yapay kaynak" teriminden dolayı, kaynak üzerindeki iterasyon oldukça yavaşlamaktadır. Ayrıca yöntem, harcadığı bilgisayar zamanı ve hafızası bakımından, oldukça pahalı bir yöntemdir. Bu nedenle melez-hibrit (hybrid) S_N - P_{N-1} yöntemi ortaya atılmıştır [15]. Burada S_N algoritması korunarak, ışın-etkisi'ni azaltacak biçimde modifiye yapay kaynaklar kullanılmıştır.

Ayrıca, son zamanlarda geliştirilen S_N - Monte Carlo hibrit yöntemi [39], bilgisayar hafızasında fazla bir artışa neden olmamasıyla da ışın-etkisi'ni azaltmada başarılı bulunmuştur. Yöntemde herbir iterasyon adımında rastgele seçilen açısız

doğrultular ele alınmaktadır. Bu tür hibrit yöntemin bir kısmında da respons matrisleri kullanılmıştır. Sonuçta ışın-etkisi'nin minimum düzeyde kaldığı gözlenmiştir.

Bundan başka, çarpışma olasılığına dayalı integral transport yöntemi kodları ortaya atılmış; yöntem sonuçlarının ışın-etkisi'nden oldukça arınmış oldukları görülmüştür. Bu çalışmalar isotropik saçılma için gerçekleştirilmiştir. Lineer anizotropik saçılma için de yöntem geliştirilmektedir.

Işın-etkisi'ni azaltma ya da tümden giderme çalışmaları günümüzde de devam etmekte, her yeni bilgisayar kodu ile yeni yaklaşımlar ortaya çıkmaktadır.

Bölüm 3'de, ışın-etkisi'ni azaltma çaresi olarak, bu çalışmanın konusunu oluşturan, yıllardır kullanılan Gauss-Legendre kuadratürü yerine Gauss-Chebyshev kuadratürünün nötron transport denklemine uyarlanışından ve sonuçların literatürdekilerle karşılaştırılmasından sözedilecektir.

BÖLÜM 3

S_N YÖNTEMİ İÇİN KUADRATÜR TÜRLERİ VE GAUSS-CHEBYSHEV KUADRATÜRÜNÜN YÖNTEME UYARLANMASI

3.1. S_N Kodları İçin Açısal Kuadratür ve Kuadratür Türleri

S_N yönteminde, bilindiği gibi, açısal akı, $\bar{\Omega}_m$ kesikli doğrultularda uygun ortalamalarla belirtilmektedir. Söz konusu doğrultular, yüzey alanı w_m olan birim küre yüzeyinde birer nokta olarak gösterilirler. Burada w_m ağırlıkları belirtmektedir. Açıkça görüldüğü gibi, ağırlıkların toplamı birim kürenin yüzey alanına eşit olmalıdır. N , kesikli doğrultuların toplamını göstermek üzere,

$$\sum_{m=1}^N w_m = 1 \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Kesikli doğrultular ve ağırlıklar birlikte bir kuadratür seti oluştururlar.

Günümüzde, S_N kodlarına uygun kuadratür setini geliştirmek üzere birçok çalışmalar yapılmaktadır. İki ayrı S_N çalışmasında tüm veriler aynı olsa dahi, iki farklı kuadratür uygulayarak, farklı sonuçlara ulaşılmaktadır [5]. Bazı problemler için fark çok küçük olmasına rağmen, bazen de ihmal edilemeyecek kadar büyük ve önemlidir. Bundan da anlaşılacağı gibi, kuadratür setlerinin seçiminde dikkat edilecek bazı noktalar vardır [14]. Bunlar:

1. Projeksiyon invaryans: Fiziksel ortamın yönleminden bağımsız olarak, kuadratür seti değişmez (invariant) olmalıdır. Bir boyutlu dilim şeklindeki geometrilere x eksenini etrafındaki dönmeden dolayı azimütal simetri söz konusudur. Bundan dolayı $\mu=0$ civarında kesikli doğrultular simetrik olmalıdır. Bu, fiziksel olarak parçacıkların soldan sağa hareketiyle ($\mu>0$), sağdan sola hareketlerinin ($\mu<0$) aynı kabul edilmesi demektir.

Buna karşılık, örneğin radyasyon zırlama problemlerinde $\mu=1$ civarında, açısal akı bir tepe değerine ulaşır. Bu durumda simetrik olmayan kuadratür setleri kullanmak daha doğrudur.

2. Skaler akının pozitifliği: Açısal akının sıfıncı momenti, skaler akı, aşağıdaki gibi verilir ve daima pozitiftir.

$$\phi(x) = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu \phi(x, \mu) \equiv 2\pi \sum_{m=1}^N w_m \phi(x, \mu_m) \quad (3.2)$$

Burada $w_m > 0$ seçilerek, akının daima pozitif olması sağlanmış olur.

3. Açısal İntegralin Türetilmesi: Akının birçok momentleri ve kaynak terimi, minimum doğrultu ve ağırlıkla türetilmelidir.

Yukarıdakilerden başka, kuadratür seti seçilirken yalnızca belirli doğrultuların sayısına ve konumuna değil, mekanik integrasyon işlemlerine (trapezoidal kural, Simpson integrasyon kuralı veya Gauss integrasyon şeması [23, 41]) uygun olup olmadığına da bakılmalıdır.

S_N hesaplarında yıllardır Gauss-Legendre kuadratür seti uygulanmaktadır [5,12]. Set, $-1 \leq \mu \leq 1$ integrasyon aralığında oluşmuştur. Burada N ile $(-1, +1)$ aralığında μ 'nün kesikli değerleri (ya da kuadratür noktaları) belirtilir ve $(2N-1)$ dereceli bir polinoma karşılıktır.

Derecesi $(2N-1)$ olan $g_{2N-1}(\mu)$ gibi bir polinom,

$$g_{2N-1}(\mu) = a_0 + a_1\mu + \dots + a_{N-1}\mu^{N-1} + \dots + a_{2N-1}\mu^{2N-1} \quad (3.3)$$

şeklinde belirtilir. Söz konusu polinom ayrıca N noktalı Gauss kuadraturüne göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} g_{2N-1}(\mu) d\mu = \sum_{m=1}^N w_m g_{2N-1}(\mu_m) \quad (3.4)$$

Burada w_m ler Gauss kuadratur ağırlıklarıdır.

(3.3) ile verilen polinom ifadesini, yukarıdaki kuadratur bağıntısında koyarak, integrasyon işlemi yardımı ile w_m ağırlık değerleri için aşağıdaki eşzamanlı denklemler elde edilir:

$$1 = \sum_{m=1}^N w_m$$

$$0 = \sum_{m=1}^N w_m \mu_m$$

$$\frac{1}{3} = \sum_{m=1}^N w_m \mu_m^2$$

·
·
·

$$\frac{1}{2N} [1 - (-1)^N] = \sum_{m=1}^N w_m \mu_m^{N-1}$$

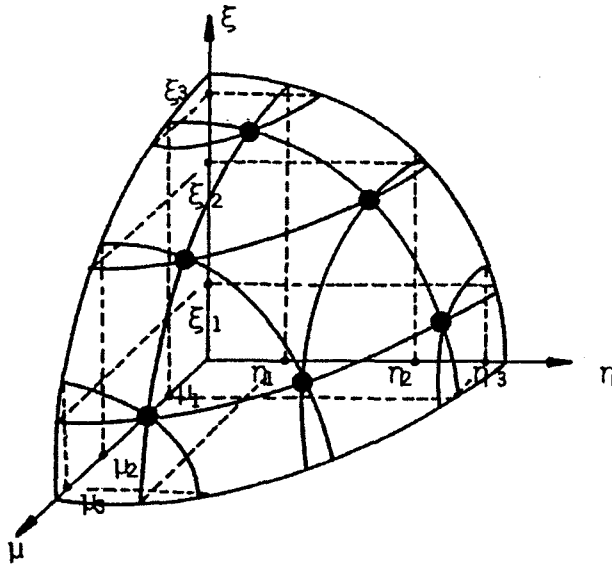
Problemin türüne göre verilen N ve μ_m değerleri için, w_m ağırlıkları bu denklem setinden kolaylıkla hesaplanabilir [5,12,24].

S_N çalışmalarında Gauss-Legendre'den başka, problem geometrisine göre geliştirilmiş değişik türlerde kuadratur setleri de kullanılmaktadır. Özellikle ince dilim şeklindeki geometrilere ara yüzeydeki simetriyi gözönüne alan Gauss-Double Legendre (DP_N) [65], üç boyutlu kartezyen koordinatlarda tam simetrik kuadratürler, açısız akının anizotropik olduğu durumlarda asimetrik çapraz kuadratürler (asymmetric biased quadrature) gibi [24,41].

Bununla beraber, bir boyutlu düzlem geometriler için dahi optimum sonuç veren, “en iyi” denilebilecek bir kuadratür seti henüz sözkonusu değildir. Üç boyutlu küresel ve silindirik geometrilerde bu nokta daha da önem kazanmaktadır. Bu geometrilerde aşağıdaki durumlardan biri veya daha fazlası sağlanmalıdır.

$$\sum_{m=1}^N w_m \mu_m = 0, \quad \sum_{m=1}^N w_m \eta_m = 0, \quad \sum_{m=1}^N w_m \xi_m = 0$$

Hesaplamalarda dikkat edilecek önemli noktalardan biri, invaryans ilkesine göre, seçilen ağ şebekesinin hesap yönünün model problemin geometrik oryantasyonuna bağlı olmaması, sistemin simetrilerinin korunmasıdır. Örneğin üç boyutlu (x,y,z) bir paralelyüzlü düşünürsek, cismin bir A yüzündeki herhangi bir noktada açılmal akı, A yüzeyinin pozitif X eksenine dik ya da arakesit konumunda oluşuna bağlı olmamalıdır. Bir başka deyişle $\mu=0$ a göre $-\mu_m$ ve $+\mu_m$, aynı genliklere sahip olmalıdır. Aynı şekilde η_m ve ξ_m de, orijinlerine göre antisimetrik olmalıdırlar. Üç boyutlu kartezyen geometrilerde kuadratür setleri seçilirken, μ_m , η_m ve ξ_m de setlerin aynı olmasına ve herbir setin orijine göre simetrik olmasına dikkat edilir. Bu tür setlere tam simetrik kuadratür setleri denir. Tam simetrik S_N kuadratürlerinde N adet doğrultu ya da N değişik seviye sözkonusudur. Tam simetri koşulundan, örneğin $N=6$ olduğunda, μ değerleri, $\mp\mu_1, \mp\mu_2, \mp\mu_3$ olacaktır. Aynı şey η ve ξ ler için de geçerlidir. Bundan dolayı kuadratür noktaları için, birim kürenin bir oktanını (octant) kullanmak yeterlidir (Şekil 3.1).



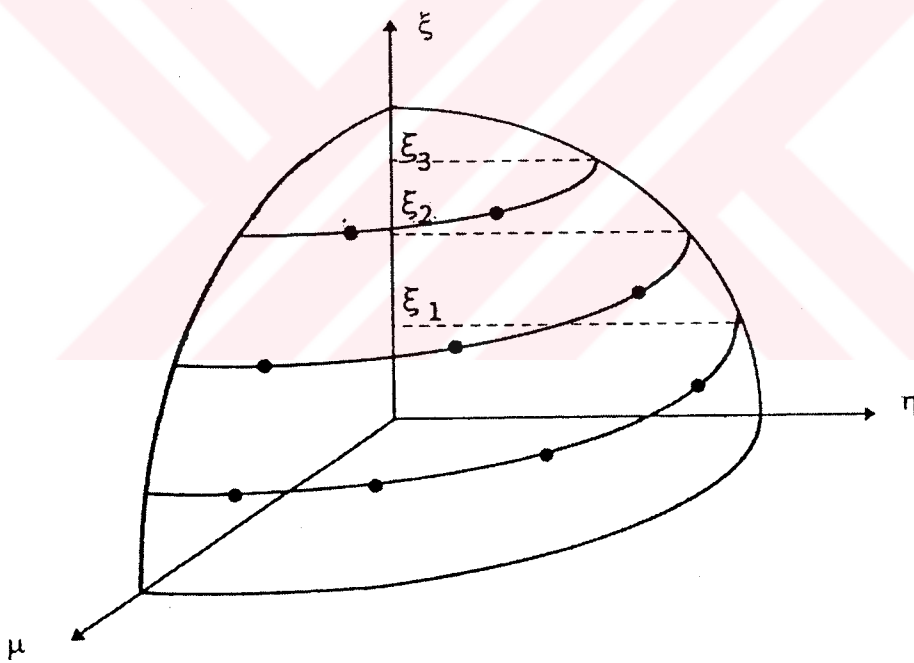
Şekil 3.1. Tam simetrik S_6 düzenlenmesi.

Kuadratr noktaları, oktan üzerinde $N/2$ seviyesinde yer alabilir [5]. Bu seviyeleri i, j, k indisleriyle göstererek,

$$\mu_i^2 + \mu_j^2 + \mu_k^2 = 1 \text{ yazılabilir.}$$

Burada $i=1,2,\dots,N/2, j=1,2,\dots,N/2-i+1$ dir.

Bir boyutlu silindirik geometriyi gözönüne aldığımızda ise, sistemin iç simetrilerinden yararlanarak, yalnızca $(\mu>0, \eta>0, \xi>0)$ ve $(\mu<0, \eta>0, \xi>0)$ oktanları ele alınabilir. Burada tam simetri koşulu aranmaz. Örneğin, kuadratr noktaları ξ seviyeleri üzerine dizilmişlerdir (Şekil 3.2). Bu geometride daha çok Gauss-Chebyshev kuadratrleri kullanılmaktadır [24,26]. Chebyshev kuadratrde verilen bir ξ seviyesinde, kuadratr ağırlıkları tüm noktalar için aynıdır. (Bir sonraki alt bölümde, Gauss-Chebyshev kuadratrü hakkında daha ayrıntılı bilgi verilecektir.)



Şekil 3.2 Simetrik olmayan S_6 düzenlemesi.

İki boyutlu (r,z) silindirik geometride ise, birim kürenin dört oktanı veya yarıküre gözönüne alınır. Burada $\eta>0$ dır. Bu geometride genel olarak, kuadratr setleri tam simetrik çift-moment setlerinden seçilir.

İki boyutlu (x,y) geometride akı ξ 'de simetriktir. Burada yalnızca birim kürenin $\xi > 0$ yarıküresi kullanılır.

Yukarıdaki kısa açıklamalardan da anlaşıldığı gibi, tüm koşullara uygun, optimal sonuç verecek bir kuadratür seti henüz mevcut değildir. Değişik geometriler ve verilen geometriye göre değişik problem türleri, değişik kuadratür setlerine ihtiyaç duyar. Aynı problem için bir kuadratür seti, bir başkasına göre çok daha iyi sonuçlar verebilir. Uygun kuadratür setinin seçimi biraz da, araştırmacının fiziksel görüş ve deneyimine bağlı bir olgudur.

3.2. Chebyshev Polinomları ve Gauss-Chebyshev Kuadratürü

Chebyshev polinomları, $T_n(x)$, bilinen en eski ortogonal polinomlardandır [26,42]. Burada n , negatif olmayan bir sabit sayı, $x = \cos\theta$ ve $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere polinom,

$$T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır. Görüldüğü gibi θ açısı 0 dan π ye doğru artarken, x de +1 den -1 e doğru değişmektedir.

Aşağıda verilen, bilinen trigonometrik eşitliklerden yararlanılarak,

$$n=0 \quad \text{için} \quad \cos\theta=1 \quad \text{veya} \quad T_0=1,$$

$$n=1 \quad \text{için} \quad \cos\theta=x \quad \text{veya} \quad T_1=x$$

olarak bulunur. Diğer polinomları bulmak için, aşağıdaki (3.6.) numaralı rekürans bağıntısı [24,43,44] kullanılır.

$$T_n = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2} \quad , \quad n \geq 2 \quad (3.6)$$

Sonuçta Chebyshev polinomları,

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = x$$

$$T_2 = 2x^2 - 1$$

$$T_3 = 4x^3 - 3x \quad (3.7)$$

$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

olarak sıralanırlar.

Chebyshev polinomlarının kökleri $(-1, +1)$ aralığında reeldir ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Ortogonal polinomlardan olduklarını belirttiğimiz Chebyshev polinomlarının ortogonalite bağıntıları, $w(x)$ ağırlık fonksiyonu $\left(w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ olmak üzere aşağıdaki gibi verilir:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = 0, \quad n \neq m \quad (3.9)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [T_n(x)]^2 dx = c(n) \neq 0$$

Gauss-Chebyshev kuadratürü de, Chebyshev polinomlarının sözkonusu ortogonalite özelliğinden yararlanılarak geliştirilmiştir [44] ve aşağıda görüldüğü gibi tanımlanmaktadır.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} F(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i F(x_i) \quad (3.10)$$

Kuadratur, yalnızca $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} F(x) dx$ türünde değil, $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$ türündeki integral hesaplarında da optimal sonuçlar vermekte, bu nedenle nümerik integrasyon hesaplarında sıkça kullanılmaktadır. [45]

Yukarıdaki (3.10) numaralı bağıntı, daha uygun formda aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} F(x) dx = \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \sum_{i=0}^n w_i F(x_i) \quad (3.11)$$

Verilen bir n değeri için Chebyshev polinomlarının köklerinin ve kuadratur ağırlıklarının hesabı, yukarıdaki bağıntıdan yararlanılarak gerçekleştirilebilir.

Aşağıdaki tabloda, Gauss- Chebyshev kuadratur ağırlıkları ve köklerinin, n değerine göre sıralanışı, S_{16} yaklaşımına kadar verilmektedir.

Tablo 3.1. Gauss- Chebyshev Kuadratur Seti

Kökler (x_i)		Ağırlık Faktörleri (w_i)
$\pm 0.707 106 781$	(S_2 yaklaşımı)	1.570796327
$\pm 0.382 683 432$	(S_4 yaklaşımı)	0.785398163
$\pm 0.923 879 532$		
$\pm 0.258 819 045$	(S_6 yaklaşımı)	0.523598775
$\pm 0.707 106 781$		
$\pm 0.965 925 826$		
$\pm 0.195 090 322$	(S_8 yaklaşımı)	0.392699081
$\pm 0.555 570 233$		
$\pm 0.831 469 612$		
$\pm 0.980 785 280$		

± 0.156 434 465 (S₁₀ yaklaşımı) 0.314159265

± 0.453 990 499

± 0.707 106 781

± 0.891 006 524

± 0.987 688 340

± 0.130 526 192 (S₁₂ yaklaşımı) 0.261799387

± 0.382 683 432

± 0.608 761 429

± 0.793 353 340

± 0.923 879 532

± 0.991 444 861

± 0.111 964 476 (S₁₄ yaklaşımı) 0.224399475

± 0.330 279 062

± 0.532 032 076

± 0.707 106 781

± 0.846 724 199

± 0.943 883 330

± 0.993 712 210

± 0.098 017 140 (S₁₆ yaklaşımı) 0.196349540

± 0.290 284 677

± 0.471 396 736

± 0.634 393 284

± 0.773 010 453

± 0.881 921 264

± 0.956 940 335

± 0.995 184 726

Yukarıdaki tablo incelendiğinde, Gauss-Chebyshev kuadratüründe her S_N yaklaşımı için farklı olan eşit ağırlıkların kullanıldığı görülür. Kuadratür bu özelliğinden dolayı, daha az veri ile çözümlere ulaşmakta, bir başka deyişle daha az bilgisayar hafızası ve zamanına gereksinimi olmaktadır. Bu özellik, iki veya daha çok boyutlu problemlerde oldukça önemli bir avantaj sağlamaktadır.

3.3. Gauss-Chebyshev Kuadratürünün S_N Yöntemine Uyarlanması

3.3.1. İki Boyutlu Kartezyen Geometri İçin Türetim

Bu çalışmanın amacı, S_N kodlarında yaygın olarak kullanılan Gauss-Legendre kuadratürü yerine, aynı aralıkta tanımlı olan Gauss-Chebyshev kuadratürünün nötron transport denkleminde uyarlanması ve sözkonusu kuadratürün ışın-etkisi karşısındaki davranışı incelenerek, alternatif bir yaklaşım geliştirilmesidir. Bu amaçla önce, zamandan bağımsız nötron transport denkleminin genel ifadesi yazılır:

$$\begin{aligned} [\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} + \Sigma_s(\bar{r}, E)] \phi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) = \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\bar{r}, E' \rightarrow E, \bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega}) \phi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') \\ + Q(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Buradaki Q terimi, seçilen probleme göre, fisyon kaynağı ve homogen olmayan diğer kaynakları kapsamaktadır.

Denkleminde görülen akış terimi $(\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \phi)$, aşağıdaki tabloda örnek problem geometrileri için ayrıntılı olarak verilmiştir. Tablodaki geometrilerde yönsel akının ϕ rotasyon açısına göre simetrik oluşu gözönüne alınmıştır. Burada,

$$\mu = \cos \theta,$$

$$\eta = (1 - \mu^2)^{1/2} \cos \varphi$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tablo 3.2. Örnek problem geometrileri ve akış terimi [27]

Geometri	ϕ ve	değişkenleri	Akış terimi
Kartezyen	$\phi(x, y, \mu, \eta)$	$\mu = \bar{e}_x \cdot \bar{\Omega}$ $\eta = \bar{e}_y \cdot \bar{\Omega}$	$\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y}$
Silindirik	$\phi(r, z, \mu, \varphi)$	$\mu = \bar{e}_r \cdot \bar{\Omega}$ $\eta = \bar{e}_z \cdot \bar{\Omega}$ $\xi = -\bar{e}_\theta \cdot \bar{\Omega}$ $\mu = (1 - \eta^2)^{1/2} \cos \omega$ $\xi = (1 - \eta^2)^{1/2} \sin \omega$	$\frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\xi\phi)}{\partial \omega} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial z}$

Önce, en temel geometri olan kartezyen geometri ele alınıp, (x-y) gibi iki boyut için nötron transport denklemi (Dk.3.12) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, E, \mu, \eta) + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, E, \mu, \eta) + \sum_t(x, y, E) \phi(x, y, E, \mu, \eta) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^\infty dE' \sum_s(x, y, E' \rightarrow E, \bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega}) \phi(x, y, E', \mu', \varphi') + Q(x, y, E, \mu, \eta) \quad (3.13)$$

Burada \sum_s saçılma transfer terimi, Legendre polinomları türünden açılarak,

$$\sum_s(x, y, E' \rightarrow E, \bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{sl}(x, y, E' \rightarrow E) P_l(\bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega}) \quad (3.14)$$

ve sözkonusu açılım yukarıdaki denklem (3.13)'de yerine konarak,

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sum_t(x, y, E) \phi(x, y, E, \mu, \eta) = 2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^\pi d\varphi' \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^\infty dE' \sum_{sl}(x, y, E' \rightarrow E) P_l(\bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega}) \phi(x, y, E', \mu', \varphi') + Q(x, y, E, \mu, \eta) \quad (3.15)$$

elde edilir. Bu denklemde $\bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega} = \mu_0$ eşitliği gözönüne alınarak $P_l(\bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega}) = P_l(\mu_0)$ yazılabilir. Çünkü özel durumlar (sistemin hareket ediyor olması ya da tek kristalden ibaret olması gibi) dışında, saçılma fonksiyonu \sum_s yalnızca μ_0 a bağlıdır [13].

Legendre polinomlarının toplamı teoreminden hareketle,

$$P_l(\mu_0) = \sum_{m=0}^l \left[\frac{(2-\delta_{m0})(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \text{Cos}[m(\varphi-\varphi')] \quad (3.16)$$

veya,

$$P_l(\mu_0) = P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \text{Cos}[m(\varphi-\varphi')] \quad (3.17)$$

yazılır. Burada,

$$\mu_0 = \mu\mu' + (1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2} \text{Cos}(\varphi-\varphi') \quad (3.18)$$

ve

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad \text{dır.}$$

Yukarıdaki ifadelerin ışığında Dk.(3.15), aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sum_l (x, y, E) \phi(x, y, E, \mu, \eta) = \\ & 2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^{\infty} dE' \sum_{sl} (x, y, E' \rightarrow E) \\ & \left\{ \sum_{m=0}^l \left[\frac{(2-\delta_{m0})(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \text{Cos}[m(\varphi-\varphi')] \right\} \phi(x, y, E', \mu', \varphi') \\ & + Q(x, y, E, \mu, \eta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Bundan sonra yönsel akı, çalışmanın amacı doğrultusunda Chebyshev polinomlarına [46] açılır,

$$\phi(x, y, E, \mu, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K \frac{\phi_{nk}(x, y, E) T_n(\mu) \text{Cos} k \varphi}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (3.20)$$

ve trigonometrik fonksiyonlarla Chebyshev polinomlarının aşağıda verilen ortogonalite özelliklerinden yararlanılarak,

$$\int_0^{2\pi} \text{Cos}k\varphi \text{Cos}k'\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & k \neq k' \\ \pi, & k = k' \neq 0 \\ 2\pi, & k = k' = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(\mu)T_{n'}(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu = \begin{cases} 0, & n \neq n' \\ \frac{\pi}{2}, & n = n' \neq 0 \\ \pi, & n = n' = 0 \end{cases}$$

açılım momenti bulunur.

$$\phi_{nk}(x, y, E) = \frac{2}{D_{nk}} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^\pi d\varphi \phi(x, y, E, \mu, \varphi) T_n(\mu) \text{Cos}k\varphi \quad (3.21)$$

Burada D_{nk} , yukarıdaki ortogonalite bağıntılarından yararlanılarak aşağıda verilen eşitlikle hesaplanabilir.

$$D_{nk} = \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{T_n^2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^\pi d\varphi \text{Cos}^2k\varphi$$

Sonra, Dk. (3.20) ile verilen yönsel akının açılım ifadesi, Dk.(3.19) da yerine konarak nötron transport denklemi için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sum_t \phi &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{m=0}^l \left[\frac{(2-\delta_{m0})(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_l^m(\mu) \int_0^\infty dE' \sum_{s(x,y,E' \rightarrow E)} \\ &\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K \phi_{nk}(x, y, E') \int_0^\pi d\varphi' \text{Cos}[m(\varphi - \varphi')] \text{Cos}k\varphi' \\ &\int_{-1}^{+1} d\mu' \frac{P_l^m(\mu') T_n(\mu')}{\sqrt{1-\mu'^2}} + Q \end{aligned} \quad (3.22)$$

Burada,

$$f_{lmn} = \int_{-1}^{+1} \frac{P_l^m(\mu') T_n(\mu')}{\sqrt{1-\mu'^2}} d\mu'$$

alınarak modifiye kod için MATHEMATICA programı ile hesaplatılmış ve sonuçlar Ek E'de tablo halinde sunulmuştur.

Ayrıca,

$I_{mk} = 2 \int_0^\pi \text{Cos}[m(\varphi - \varphi')] \text{Cos}k\varphi \, d\varphi'$ tanımı yapılarak, ifade aşağıdaki gibi açılmıştır:

$$I_{mk} = 2 \int_0^\pi (\text{Cos}m\varphi \text{Cos}m\varphi' + \text{Sin}m\varphi \text{Sin}m\varphi') \text{Cos}k\varphi' \, d\varphi'$$

Yukarıdaki ifade için, TWOTRAN-II koduna göre, yönsel akının φ açısına göre simetrik oluşu gözönüne alınarak, φ açısının tek fonksiyonları elimine edilmiş ve aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir:

$$I_{mk} = 2 \int_0^\pi (\text{Cos}m\varphi \text{Cos}m\varphi') \text{Cos}k\varphi' \, d\varphi'$$

Sonuçta Dk.(3.22), bir gruplu teoriye uygun olarak, anizotropik saçılma için aşağıdaki gibi yazılmıştır:

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sum_t \phi = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{m=0}^l \left[\frac{(2-\delta_{m0})(l-m)!}{(l+m)!} \right] \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K \phi_{nk}(x, y) \sum_{s,l} (x, y) P_l^m(\mu) f_{lmn} I_{mk} + Q \quad (3.23)$$

Bilindiği gibi denklem, $l=0$ için izotropik saçılma durumuna indirgenmektedir. Buna göre, bir gruplu nötron transport denklemi, izotropik saçılma için aşağıdaki şekle dönüşmüş olur.

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sum_t \phi = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K \phi_{nk}(x, y) I_{ok} \sum_{so} (x, y) f_{oon} + Q \quad (3.24)$$

Şimdi, yukarıda geliştirilen ifadeleri, tezin amacı doğrultusunda kesikli formda yazalım:

Bu nedenle Dk. (3.21)'i tekrar ele alalım.

$$\phi_{nk}(x, y) = \frac{2}{D_{nk}} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^\pi d\varphi \phi(x, y, \mu, \varphi) T_n(\mu) \text{Cos}k\varphi$$

Bu ifade, Kesikli Ordinatlar Yöntemi'ne göre tezin konusu olan Gauss-Chebyhev kuadratürü kullanılarak aşağıdaki toplam ifadesiyle belirtilebilir.

$$\phi_{nk}(x, y) = \frac{2}{D_{nk}} \sum_{j=1}^{MT} w_j \sqrt{1-\mu_j^2} T_n(\mu_j) \text{Cos}k\varphi_j \phi(x, y, \mu_j, \varphi_j) \quad (3.25)$$

veya $\frac{2}{D_{nk}} = E_{nk}$ tanımı yapılarak,

Sonuçta, Dk. (3.23) ile verilen nötron transport denklemi, açısız değişkenlerine göre kesikli formda (Discrete Ordinates form) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mu_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \Sigma_t \phi_i = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{m=0}^l \left[\frac{(2-\delta_{m0})(l-m)!}{(l+m)!} \right] \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K \Sigma_s P_l^m(\mu_i) f_{lmn}$$

$$E_{nk} I_{(mk)_i} \sum_{j=1}^{MT} w_j \sqrt{1-\mu_j^2} T_n(\mu_j) \text{Cos}k\phi_j \phi_j + Q_i \quad (3.26)$$

3.3.2. İki Boyutlu Silindirik Geometri İçin Türetim

İki boyutlu silindirik geometri için izlenen yol, özetle, aşağıda görüldüğü gibidir:

Önce, (r-z) silindirik geometri için akış terimi yazılır.

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \phi = \frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta\phi)}{\partial \omega} + \xi \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.27)$$

Buna göre nötron transport denklemi, her terimi r ile çarpılarak, kesikli formda aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\mu \left\{ \frac{\partial [r\phi(\bar{r}, \bar{\Omega})]}{\partial r} - \frac{\partial [\eta\phi(\bar{r}, \bar{\Omega})]}{\partial \omega} + \xi r \frac{\partial \phi(\bar{r}, \bar{\Omega})}{\partial z} \right\} + r \Sigma_t(\bar{r}) \phi_i(\bar{r}) = r S_i(\bar{r}) \quad (3.28)$$

Burada, daha önceki gibi, bir gruplu teori esas alınmış ve denklemin sağ yanında yer alan kaynak terimi kapalı yazılarak kısaca $S_i(\bar{r})$ olarak gösterilmiştir.

Ayrıca, ortalama açısız akı

$$\phi_i(\bar{r}) \equiv \frac{1}{w_i} \int_{\bar{\Omega}_i} d\bar{\Omega} \phi(\bar{r}, \bar{\Omega}) \quad (3.29)$$

olarak tanımlanmaktadır [5,27].

Daha sonra, akış terimine ait terimler tek tek kuadratur anlayışına göre oluşturulurlar. Bunun için de denklem (3.30) ile belirtilen tanım gözönüne alınmıştır [5].

$$[\bar{\Omega} \cdot \bar{\nabla} \phi(\bar{r}, \bar{\Omega})] \equiv \int_{\bar{\Omega}_i} d\bar{\Omega} [\bar{\Omega} \cdot \nabla \phi(\bar{r}, \bar{\Omega})] \quad (3.30)$$

$$\int_{\bar{\Omega}_i} d\bar{\Omega} \mu \frac{\partial [r\phi_i(\bar{r}, \bar{\Omega})]}{\partial r} \equiv w_i \mu_i \frac{\partial [r\phi_i(\bar{r})]}{\partial r} \quad (3.31a)$$

$$\int_{\bar{\Omega}_i} d\bar{\Omega} \xi_r \frac{\partial \phi(\bar{r}, \bar{\Omega})}{\partial z} \equiv w_i \mu_i \frac{\partial [r\phi_i(\bar{r})]}{\partial z} \quad (3.31b)$$

$$\int_{\bar{\Omega}_i} d\bar{\Omega} \frac{\partial [\eta\phi(\bar{r}, \bar{\Omega})]}{\partial \omega} = \alpha_{i+1/2} \phi_{i+1/2}(\bar{r}) - \alpha_{i-1/2} \phi_{i-1/2}(\bar{r}) \quad (3.31c)$$

Yukarıda verilen (3.31a), (3.31b) ve (3.31c) eşitlikleri esas denklemde, Dk. (3.28), yerlerine konarak denklem, (r-z) silindirik geometri için kesikli formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} w_i \mu_i \frac{\partial [r\phi_i(\bar{r})]}{\partial r} + \alpha_{i+1/2} \phi_{i-1/2}(\bar{r}) - \alpha_{i-1/2} \phi_{i-1/2}(\bar{r}) \\ + w_i \xi_i \frac{\partial [r\phi_i(\bar{r})]}{\partial z} + w_i r \sum_t (\bar{r}) \phi_i(\bar{r}) = w_i r S_i(\bar{r}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Burada, $\alpha_{i\pm 1/2}$ terimi açılmalı sabiti olarak bilinmektedir ve,

$$\alpha_{i\pm 1/2} = \alpha_{i-1/2} - w_i \mu_i \quad (3.33)$$

bağıntısı ile verilir [5,27].

Türetilen Dk. (3.32), görüldüğü gibi, iki boyutlu (r-z) silindirik geometri için transport denkleminin genel ifadesini vermektedir. Burada, denklemin sağ yanını oluşturan tüm kaynak ifadesi S içinde saklıdır. Bir başka deyişle S, ele alınan problemin türüne bağlı olarak, saçılma kaynağı, fisyon kaynağı ve homogen olmayan diğer kaynak ifadelerinin toplamı olabilir. Daha sonra, çalışmanın amacı doğrultusunda, denklemdeki akı ve kaynak ifadeleri uygun bir polinom türünden açılıp, denklem, özel olarak sözkonusu problem için oluşturulabilir. (Önceki alt bölümde, (x-y) kartezyen geometri için Chebyshev polinomlarına açıldığı gibi)

Yukarıda geliştirilen denklemler, Dk. (3.26) ve (3.32), bundan sonra, problemin boyutları gözönüne alınarak uzaysal kesikleştirme işlemine tabi tutulabilir. Bu işlem için uzaysal değişkene ait türev terimleri, genellikle sonlu farklar tekniklerinden uygun biri (forward difference, backward difference, central difference-diamond techniques [11,43]) seçilerek halledilir. Böylece, başlangıçta integro-diferansiyel formda olduğundan sözettiğimiz nötron transport denklemi, bilgisayar çözüm mantığına uygun bir diferansiyel denklem setine dönüştürülmüş olur. Söz konusu set, probleme uygun sınır koşulları da uygulanarak, bilgisayarlarda çözülür [47].

Çalışmanın belkemiğini oluşturan, Gauss-Legendre kuadratüründen Gauss-Chebyshev kuadratürüne geçişte, hiç şüphesiz önemli bir nokta da, Bölüm 2'de ayrıntılı olarak sözedilen sınır koşullarının, kullanılacak kuadratür setine göre yeniden belirlenmesidir. Hatırlanacağı üzere, S_N yönteminin karakterine uygun olarak sınır koşullarının ifadesinde kuadratür noktaları yer almaktadır. Yeni sete geçildiğinde, yeni kuadratür noktaları eski kuadratür noktalarıyla yer değiştirir. Örneğin, vakum sınır koşulu,

$$\phi(x_s, \mu_j) = 0, \quad \mu_j > 0, \quad i=1,2,\dots,N$$

idi. Burada, x_s sınır noktası, $\mu_j > 0$ nötronların sınıra geliş doğrultusu ve N kuadratür derecesidir. Sınır koşullarının düzenlenmesinde μ_j 'ler, yeni kuadratür set noktaları olarak değiştirilir. Diğer sınır koşullarında da (yansıtıcı, beyaz, periodik sınır koşulları gibi) benzer şekilde bir uygulama sözkonusu olacaktır.

Yukarıda görülen işlemler, Bölüm 5'de verilen örnek problem geometrileri ve koşulları gözönüne alınarak yürütülmüştür. Elde edilen sonuçlardan Bölüm 5 ve Bölüm 6'da ayrıntılı olarak sözedilmektedir.

BÖLÜM 4

BİLGİSAYAR KODU TWOTRAN-II : TANITIMI ve YENİDEN DÜZENLENMESİ

4.1. Kodun Tanıtımı

Bu çalışmayı yürüttüğümüz TWOTRAN-II kodu [27], iki boyutlu (x-y) kartezyen, iki boyutlu (r-z) ve (r- θ) silindirik geometrileri inceleyebilen bir bilgisayar programıdır. Program, seçilen problemin türüne göre vakum, yansıtıcı, periyodik, beyaz sınır koşullarını kullanarak, homojen ve homojen olmayan, zamandan bağımsız, çok gruplu transport problemlerini çözebilir.

Kod ilk kez Los Alamos, Argonne National Laboratory'de CDC-7600 türü bilgisayar için geliştirilmiş, sonra CDC-6600 türüne uyarlanmıştır. Daha sonra, IBM-360/195 türü bilgisayarlar için yeniden düzenlenmiştir.

Programda çözüm yöntemi olarak, açısal değişken için, Kesikli Ordinatlara Yaklaşımı (S_N) kullanılır. Program, grup içindeki standart iç ve kaynak üzerindeki dış iterasyonları yapar. Gerektiğinde iterasyon hızlandırıcı teknik olarak kaba-ağ yeniden dengeleme (coarse-mesh rebalancing) yöntemini [16,48,51] kullanır. Bu teknik için gerekli ağ şebekesi, problemin S_N ağ şebekesinden ayrı tutulup depolanmıştır. Kaynaklar, akılar, etkin kesitler ve S_N sabitleri için standart arabirim girişi (interface input) dosyaları okutulabilir; ya da ilgili altprogramlarla söz konusu değerler hesaplatılabilir.

Programda aşağıdaki noktalara dikkat edilmiştir: Seçilen geometrilere ait doğrultular, x ve r 'ler i doğrultusunda, y , θ ve z 'ler j doğrultusunda yönlendirilmişlerdir. Ayrıca, katı aılar 2π birimleri türünden ölçülmüş; μ doğrultuları uzaysal değişkenden bağımsız kabul edilmiştir. Etkin kesit değerleri, her uzaysal hücre içinde sabit alınmıştır. TWOTRAN-II programı, probleme gerekli olan etkin kesit değerlerini, ya FIDO formatı ile hazırlanmış olan standart dosya ISOTXS'den okuma, ya da Los Alamos formatı ile doğrudan girdi olarak alma seçeneklerine sahiptir.

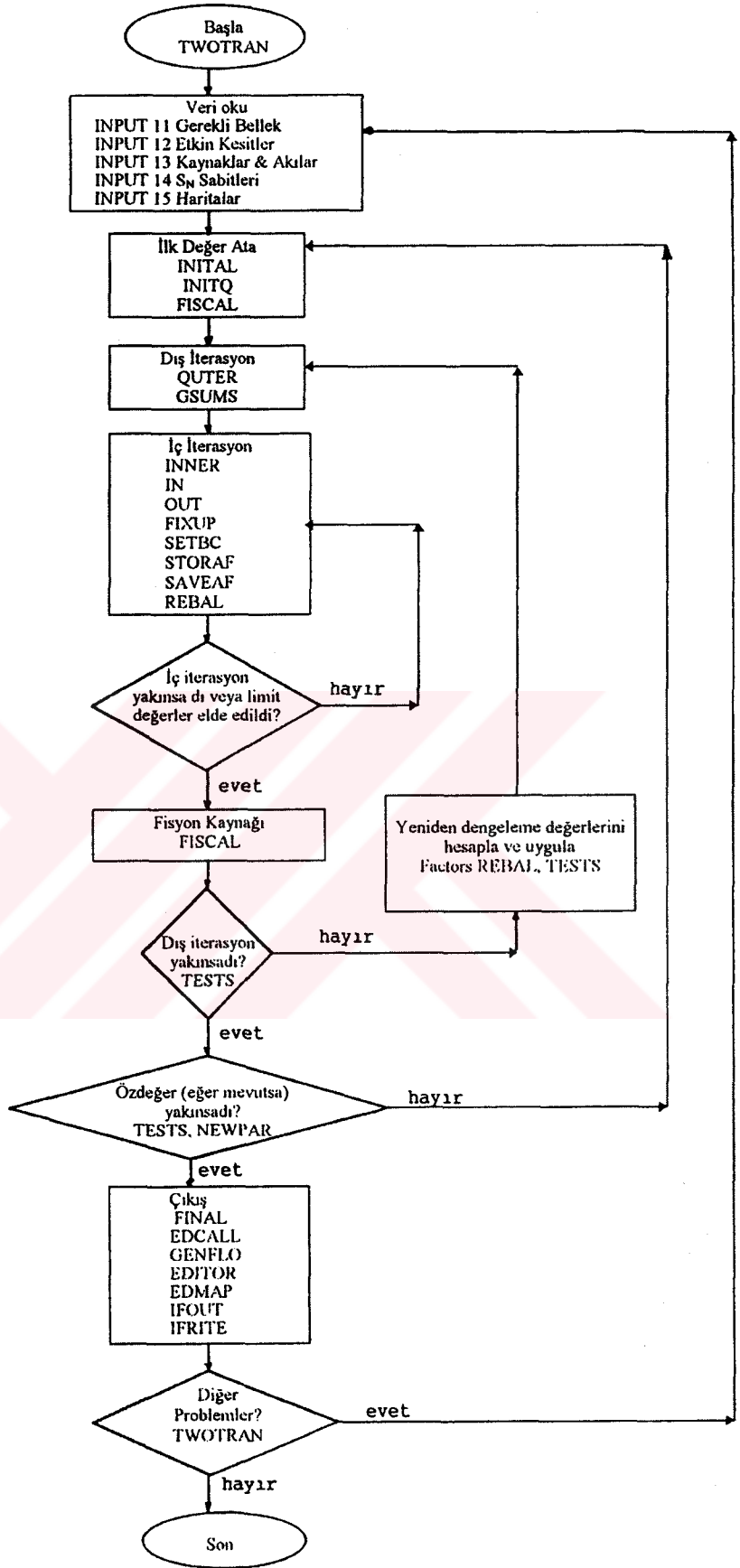
Ayrıca programda, malzemeye ait ağ şebekesi (material mesh) ile iterasyon hızlandırma tekniği olarak kullanılan kaba ağ yeniden dengeleme yönteminin ağ şebekesi, problemin türüne göre birbiriyle uyumlu olarak da düşünülebilir; ayrı ayrı da ele alınabilir. Bunlara ait işlemler ve geometrik izimler MAPPER altprogramı ile halledilmektedir.

TWOTRAN-II'de istenirse, anizotropik dağılmış kaynaklar, ya da ele alınan sistemin alt, üst ve sağ sınırlarındaki sınır akıları belirlenebilir.

TWOTRAN-II'yi diğer programlardan, DOT serisi gibi [5], ayıran bir özellik de, programın iterasyona başlarken sıfır ağırlıklı doğrultular kullanmasıdır. Bilindiği gibi sıfır ağırlıklı doğrultular, standart kuadratür setlerindeki özel başlangıç doğrultularına karşılıktır. Böyle zel başlangıç doğrultuları kullanan kodlar, diğerlerine göre daha fazla veri içermektedirler. Oysa TWOTRAN-II, sıfır ağırlıklı doğrultular kullanarak daha az sayıda veri ile çözüme gider [27].

Programın sonunda, giriş ve çıkış akı değerleri, hesaplanan final akılar, etkin kesitler, fisyon hızları, programa giriş ve programda hesaplanan çıkış kaynak değerleri ve kullanılmışsa kaba-ağ dengeleme değerleri tablolar halinde verilebilir. Söz konusu değerlerin yazdırılışı, belirli edit seçeneklerini veren sabitlerle gerçekleştirilir.

Yukarıda sözedilen işlemler, TWOTRAN-II akış diyagramında ayrıntılı olarak gösterilmiştir (şekil 4.1.)



Şekil 4.1 TWOTRAN-II akış diyagramı

4.2. Teori

Programda zamandan bağımsız transport denklemi, analitik formda aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\bar{\Omega}\phi) + \Sigma_t \phi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) &= \iiint dE' d\Omega' \phi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') \Sigma_s(E' \rightarrow E, \bar{\Omega}' \cdot \bar{\Omega}) \\ &+ \chi(E) \iiint dE' d\Omega' \phi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') \nu \Sigma_f \frac{(E')}{4\pi} + Q(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Burada,

ϕ : yönsel akı

Σ_t : toplam etkin kesiti

Σ_s : saçılma etkin kesiti

Σ_f : fisyon etkin kesiti

Yukarıda sıralanan büyüklükler, gerçekte r bağımlıdırlar. Fakat denklem basitleştirilerek yazılmış olduğundan gösterilmemişlerdir.

Programda saçılma transfer terimi, Legendre polinomları türünden açılarak,

$$\begin{aligned} \iint d\Omega' \phi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu_0) &= \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2\pi} \Sigma_{sn}(E' \rightarrow E) \sum_{k=0}^n R_n^k(\mu, \varphi) \int_{-1}^1 d\mu' \\ &\int_0^\pi d\varphi' R_n^k(\mu', \varphi') \phi \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılmıştır. Buradaki R_n^k fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$R_n^k = \left[\frac{(2 - \delta_{k0})(n-k)!}{(n+k)!} \right]^{1/2} P_n^k(\mu) \cos k\varphi \quad (4.3)$$

Bağıntıda görülen δ_{k0} , Kronecker deltadır ve $k=0$ için 1 değerini almaktadır. R_n^k fonksiyonları assosye Legendre polinomları olarak bilinir.

Programda yönsel akı da Legendre polinomları türünden, aşağıda görüldüğü gibi açılmıştır.

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{k=0}^n R_n^k \phi_n^k \quad (4.4)$$

Yukarıda sıralanan bağıntıları gözönüne alarak ve çok gruplu yaklaşıma göre E enerji bölgesini ΔE_g aralıklarına ($g=1, 2, \dots, 6$) bölerek, (4.1) numaralı denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\bar{\Omega} \phi_g) + \sum_{ig} \phi_g = & \sum_{h=1}^G \sum_{n=0}^N (2n+1) \sum_{S_{nh} \rightarrow g} \sum_{k=0}^n R_n^k \phi_{nh}^k \\ & + \chi_g \sum_{h=1}^G v \sum_{gh} \phi_{0h}^0 + \sum_{n=0}^N (2n+1) \sum_{k=0}^N R_n^k Q_{ng}^k \end{aligned} \quad (4.5)$$

Denklemin sağ yanında yer alan ϕ_{nh}^k terimi,

$$\phi_{nh}^k = \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{\pi} d\varphi R_n^k(\mu, \varphi) \phi_n / 2\pi \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Yukarıda sözedilen her enerji grubu için, denklemdeki integral ifadesi kuadratür yaklaşımı ile,

$$N_{nhij}^k = \sum_{m=1}^{MT} w_m R_n^k(\mu_m, \varphi_m) N_{hijm} \quad (4.7)$$

şeklinde verilebilir [27].

Denklem (4.5)'i sonlu farklar tekniğine göre düzenlemek için, r (veya x) doğrultusu IT aralığa, θ (veya y veya z) doğrultusu JT aralığa ve açılal değişkene ait doğrultular da MT aralığa bölünmüştür.

$$\begin{aligned}
 r_{i-1/2} < r_i < r_{i+1/2} & \quad i=1,2,\dots,IT \\
 \theta_{j-1/2} < \theta_j < \theta_{j+1/2} & \quad j=1,2,\dots,JT \\
 \Omega_{m-1/2} < \Omega_m < \Omega_{m+1/2} & \quad i=1,2,\dots,MT
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Daha sonra, programın amacı doğrultusunda transport denklemini kesikli formda yazmak üzere, (4.5) numaralı denklem kapalı formda yazılıp, her terim ($dVd\Omega$) birim hücre hacmi ile çarpılıp, birim hücre üzerinden integre edilir. Böylece tüm geometriler için genelleştirilmiş, kesikli formdaki transport denklemi aşağıda görülen şekle dönüşmüş olur.

$$\begin{aligned}
 w_m \mu_m (A_{i+1/2,j} N_{i+1/2,j,m} - A_{i-1/2,j} N_{i-1/2,j,m}) \\
 + (A_{i+1/2,j} - A_{i-1/2,j}) (\alpha_{m+1/2} N_{i,j,m+1/2} - \alpha_{m-1/2} N_{i,j,m-1/2}) \\
 + w_m \eta_m (B_{i,j+1/2} N_{i,j+1/2,m} - B_{i,j-1/2} N_{i,j-1/2,m}) \\
 + \sum_i w_m V_{ij} N_{ijm} = w_m V_{ij} S_{ijm}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Burada,

$$V_{ij} = \iiint_{ij} dV = \iint_{ij} dA dB, \quad \text{hacmi,}$$

$$A_{i+1/2,j} = \int_j dA_{i+1/2} \quad \text{i doğrultusundaki yüzey alanını,}$$

$$B_{i,j+1/2} = \int_i dB_{j+1/2} \quad \text{j doğrultusundaki yüzey alanını,}$$

$$w_m = \iint_m d\Omega \quad \text{kuadratür ağırlıklarını belirtmektedir.}$$

α katsayıları da aşağıdaki eşitlik yardımı ile hesaplanabilir:

$$\alpha_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2} = -w_m \mu_m \tag{4.10}$$

Yukarıda verilen A, B ve V değerleri, programda incelenebilen değişik geometriler için aşağıdaki tabloda gösterilmiştir (Tablo 4.1).

Tablo 4.1. Alan ve Hacim Elemanları

Geometri	dV	dA	dB	$A_{i+1/2,j}$	$B_{i,1/2+j}$	V_{ij}	$\frac{A_{i+1/2,j} - A_{i-1/2,j}}{V_{ij}}$	$\frac{A_{i+1/2,j} + A_{i-1/2,j}}{V_{ij}}$	$\frac{B_{i,j+1/2} + B_{i,j-1/2}}{V_{ij}}$
(x,y)	dx dy	dy	dx	Δy_j	Δx_i	$\Delta x_i \Delta y_j$	0	$2/\Delta x_i$	$2/\Delta y_j$
(r,θ)	r dθ dr	r dθ	dr	$2\pi r_{i+1/2} \Delta \theta_j$	Δr_i	$2\pi \bar{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_j$	$1/\bar{r}$	$2/\Delta r_i$	$2/2\pi \bar{r} \Delta \theta_j$
(r,z)	$2\pi r dr dz$	$2\pi r dz$	$2\pi r dr$	$2\pi r_{i+1/2} \Delta x_j$	$2\pi \bar{r}_i \Delta r_i$	$2\pi \bar{r}_i \Delta r_i \Delta z_j$	$1/\bar{r}$	$2/\Delta r_i$	$2/\Delta z_j$

$$\bar{r} = (r_{i+1/2} + r_{i-1/2}) / 2$$

(4.9) numaralı denklemin sağ yanında yer alan S_{ijm} (veya herhangi bir g enerjisi grubu için S_{gijm}) kaynak terimi, aşağıda görülen terimlerin toplamıdır.

$$(SS)_{gijm} = (\text{saçılma kaynağı})_{gijm} = \sum_{h=1}^G \sum_{n=0}^N (2n+1) \sum_{S_{nh} \rightarrow g} \sum_{k=0}^N R_{nm}^k N_{nhij}^k \quad (4.10)$$

$$(FS)_{gijm} = (\text{filyon kaynağı})_{gijm} = \chi_g \sum_{h=1}^G v \sum_{fn} N_{ohij}^0 \quad (4.11)$$

$$(IS)_{gijm} = (\text{homojen olmayan kaynak})_{gijm} = \sum_{n=0}^N (2n+1) \sum_{k=0}^n R_{nm}^k \quad (4.12)$$

Yukarıdaki bağıntıları gözönüne alarak ve indisleri ihmal ederek, herhangi bir g enerji grubu için (4.9) numaralı denklem daha basit formda,

$$\begin{aligned} & \mu(A_{i+1/2} N_{i+1/2} - A_{i-1/2} N_{i-1/2}) + (A_{i+1/2} - A_{i-1/2})(\alpha_{m+1/2} N_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2} N_{m-1/2}) / w \\ & + \eta B(N_{j+1/2} - N_{j-1/2}) + \sum_t V N = V S = V(SS + FS + IS) \quad (4.13) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntıda B katsayısı j 'den bağımsız kabul edilmiştir.

Yukarıdaki sonuç denklem (Dk. 4.13), MT adet açışal doğrultu için, IT x JT sayıda uzaysal hücre kullanılarak, G enerji grubu göz önüne alınarak, vakum, yansıtıcı, beyaz veya periyodik sınır koşullarından uygun olanların seçilip uygulandığı örnek geometriler için çözülebilir.

4.3. Kodda Gerçekleştirilen Düzenlemeler

Çalışmanın amacı doğrultusunda kodda oluşturulacak düzeltmeler için bizi özellikle iki bölüm ilgilendirmektedir; INPUT14 altında yer alan SNCON, IFINSN ve PNGEN altprogramları ve GRIND22 altında yer alan OUTER, INNER, IN, OUT, FIXUP, SETBC altprogramları. Sözkonusu bölümler ve ilgili altprogramlardaki düzenleme işlemleri aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. S_N sabitlerinin veri olarak girilmesi veya hesaplanması

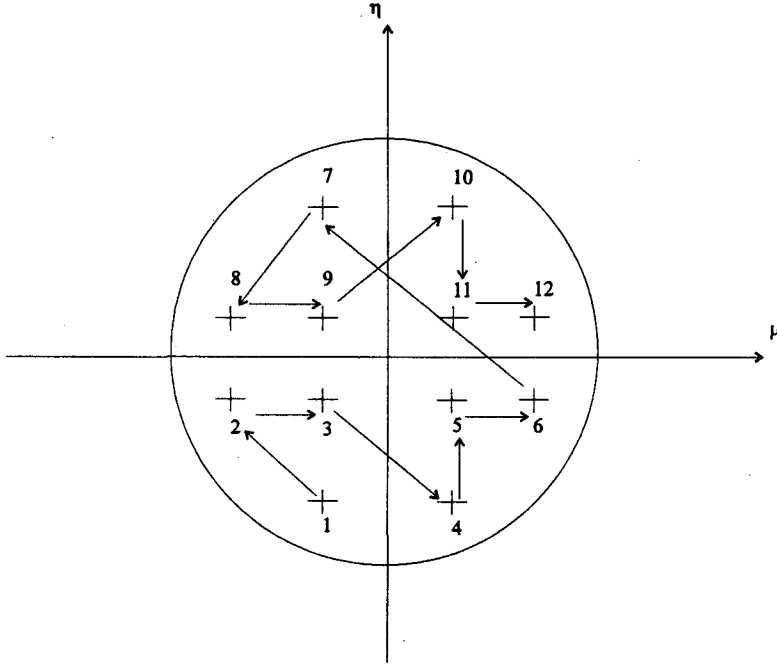
Orjinal kodda kullanılan Gauss-Legendre kuadratür setine ait sabitler yerine, çalışmada önerilen Gauss-Chebyshev kuadratür sabitlerinin koda yerleştirilmesi amacı ile SNCON ve PNGEN adlı altprogramlar ele alınmıştır. Önce, Chebyshev polinomlarının (Dk.3.6) hesabı için PNGEN altprogramı yeniden yazılmış ve altprogram SNCON, Gauss-Chebyshev kuadratür sabitlerini (Tablo 3.1) ele alacak şekilde düzenlenmiştir.

2. Sınır koşullarının ele alınan model geometrilere göre düzenlenmesi

Bu düzenleme, özellikle SETBC adlı altprogramı ilgilendirmektedir. Sözkonusu altprogram vakum, beyaz, yansıtıcı, periyodik sınır koşullarını uygulamaya koyabilir. Çalışmada incelediğimiz iki Benchmark problemi ve silindirik geometrideki uyarlamalarında, Bölüm 5’de ayrıntılı olarak anlatılacağı gibi, yansıtıcı ve vakum sınır koşulları ele alınmış; sonuçlar literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

3. İterasyonların yeniden düzenlenmesi

Gauss-Chebyshev kuadratürü uyarlanmış S_N denklemlerinin koda uygulanması, bu çok önemli konu, OUTER, INNER, IN ve OUT adlı altprogramlarda ele alınmaktadır. Sözkonusu altprogramlarda, özellikle IN ve OUT da, standart iç ve dış iterasyonlar gerçekleştirilir. Kısaca belirtilirse, iterasyon önce $\mu < 0$, $\eta < 0$ kuadrantı ele alınarak (Şekil 4.2.), $J=JT$ den başlar ve herbir J seviyesi için sağ sınırdan ($I=IT$) den itibaren $IT-1$, $IT-2$, ..., 1 ’e doğru giderek devam eder. Her I değerinde ise tüm M değerleri için toplam akı ve kaynak hesapları, Bölüm 3.1 ve 3.2’deki türetilmelere göre gerçekleştirilir. Şekildeki ok doğrultuları, M değerleri için izlenen yolu belirtmektedir. İncelenen problemin türüne göre, sınırlara ulaşıldığında kaba-ağ şebekesine ait sınır akış değerleri (boundary flow) de hesaplanır. Bu arada, negatif akı değerleri elde edilirse, FIXUP altprogramı devreye girerek bölgesel olarak akıyı sıfırlar ve iterasyonu tekrar başlatır. Eğer istenirse, iterasyon sırasında elde edilen akı değerleri SAVEAF ve STORAF altprogramlarıyla depolanır.



Şekil 4.2. İterasyon noktaları

4. Çalışmada incelenmek istenen skaler akı değerlerinin ayrıca yazdırılması

Bu konu INNER altprogramında ele alınmış, böylece farklı S_N yaklaşımlarındaki akı dağılımının incelenmesi sağlanmıştır.

Yukarıda sıralanan amaçlar doğrultusunda ele alınan ve yeniden düzenlenen alt programların işlevleri de kısaca şöyle verilebilir:

SNCON Altprogramı: Gauss-Chebyshev kadraturüne ait S_N sabitlerini, S_2 'den S_{16} 'ya kadar farklı yaklaşım dereceleri için verir.

PNGEN Altprogramı: Chebyshev polinomlarını rekürsiyon bağıntısına göre üretir.

SETBC Altprogramı: Farklı sınır koşullarını, belli seçenek parametreleriyle verir ve sınırlardaki kısmi akışları hesaplar.

OUTER Altprogramı: Belli bir gruba ait kaynağı hesaplar; kaba ağ dengeleme verilerini ve gruba ait toplam bilgiyi oluşturur.

INNER Altprogramı: Gruba ait toplam kaynağı oluşturur; SETBC, IN ve OUT altprogramlarını çağırarak uzay-açı iterasyonlarını yönetir. Eğer programda istenirse SAVEAS ve STORAF adlı altprogramları çağırarak, açısız akı (yönel akı) değerlerini depolar. Ayrıca REBAL altprogramı tarafından hesaplanmış olan tekrar dengeleme (rebalance) faktörlerini uygular ve iç iterasyon hatalarını hesaplar.

IN Altprogramı: Örnek problem geometrisinde ele alınan herbir J seviyesinde, tüm I ve M değerleri için, sol sınıra doğru iterasyonu (inward sweeps) gerçekleştirir ve sınırdaki kısmi akışları hesaplar.

OUT Altprogramı: Örnek problem geometrisinde ele alınan herbir J seviyesinde tüm I ve M değerleri için, sağ sınıra doğru iterasyonu (outward sweeps) gerçekleştirir ve sınırdaki kısmi akışları hesaplar.

Aşağıdaki tabloda söz edilen altprogramlarda adı geçen program değişkenleri ile onlara karşılık gelen problem değişkenleri gösterilmiştir (Tablo 4.2).

Tablo 4.2. TWOTRAN-II kodunda kullanılan program ve karşılık gelen problem değişkenleri

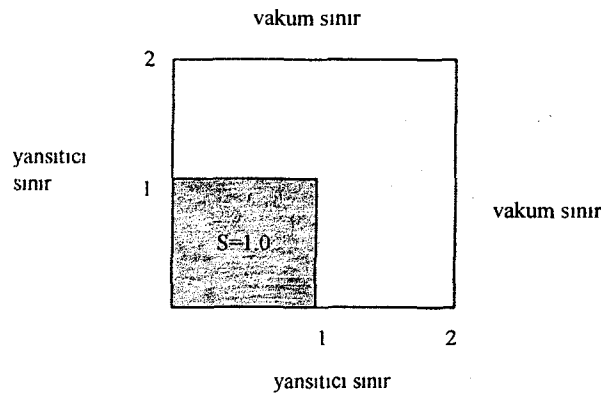
Program Değişkenleri	Problem Değişkenleri
1. C(ROW, NUCLIDE)	$\sum_a, \nu \sum_f, \sum_t, \sum_{snh \rightarrow g}$
2. Q(N,I,J)	Q_{ngij}^k
3. FLUX(N,I,J)	N_{nhij}^k
4. FISSA(I,J)	FS_{gijm} / χ_g
5. WGT (M)	w_m
6. COSMU (M)	μ_m
7. COSETA (M)	η_m
8. WMU (M)	$w_m \mu_m$
9. WETA (M)	$w_m \eta_m$
10. AL1 (M)	$\alpha_{m+1/2} / w_m$
11. AL2 (M)	$\alpha_{m-1/2} / w_m$
12. P1 (N,M)	$R_{nm}^j \quad \mu < 0, \eta < 0$
13. P2 (N,M)	$R_{nm}^j \quad \mu > 0, \eta < 0$
14. P3 (N,M)	$R_{nm}^j \quad \mu < 0, \eta > 0$
15. P4 (N,M)	$R_{nm}^j \quad \mu > 0, \eta > 0$
16. F (K,L)	f_{kl}
17. BRI (J,M)	$N_{i+1/2,j,m}$ at column i, $\eta < 0$
18. BR2 (J,M)	$N_{i+1/2,j,m}$ at column i, $\eta > 0$
19. BTI (I,M)	$N_{i,j+1/2,m}$ at row j, $\mu < 0$
20. BT2 (I,M)	$N_{i,j+1/2,m}$ at row j, $\mu > 0$
21. ALFL (N,I)	$N_{i,j,m+1/2}$ for η level N, row j
22. CTOT (I,J)	$A5(I) * \sum_{ij}$

BÖLÜM 5

BENCHMARK PROBLEMLERİ ve SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Önceki bölümlerde belirtildiği gibi, son yıllarda S_N yöntemi ile ilgili çalışmalar, yöntemin ayrılmaz bir parçası gibi görünen ışın-etkisi [15,18,71] üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmada da, söz edilen amaç doğrultusunda, Gauss-Chebyshev kuadratürü S_N yöntemine uyarlanarak, ışın-etkisi karşısındaki davranışı incelenmiştir. Aşağıda ayrıntılı olarak tanıtılan ve ışın-etkisi çalışmalarında yaygın olarak kullanılan bir Benchmark problemi [18, 38, 49], çalışma için test problemi olarak seçilmiştir (Problem 1). Daha sonra, problem 1'deki vakum sınır koşulu yerine yansıtıcı sınır koşulu yerleştirilerek ve $\Sigma_t = 1.0$ alınarak Problem 2 oluşturulmuştur.

Problem 1, (x-y) kartezyen geometride kare şeklinde bir ortamdır (Şekil 5.1). Kare şeklinde, izotropik bir kaynak da, şekilde görüldüğü gibi, ortamın sol alt köşesinde bulunmaktadır. Ortamın sol ve alt sınırına yansıtıcı sınır koşulu uygulanmış; sağ ve üst sınırda ise vakum sınır yer almıştır. Bu probleme ait veriler Tablo 5.1'de görülmektedir.

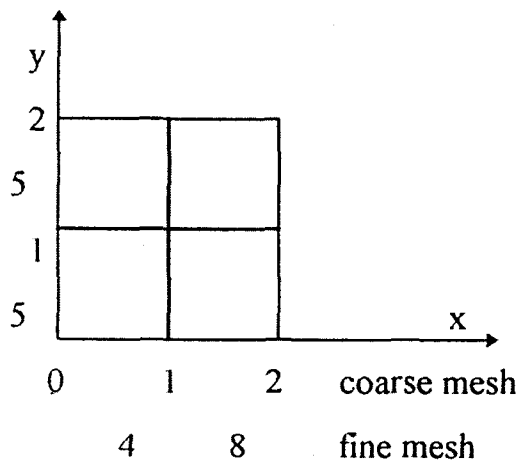


Şekil 5.1. (x-y) kartezyen geometride örnek problem (problem 1)

Tablo 5.1 Örnek problem verileri (problem 1)

Etkin kesitler	
Σ_a	0.25
$\nu\Sigma_f$	0.0
Σ_t	0.75
Σ_s	0.50

Problemde, çözüm yöntemi olarak, açısal değişken için Kesikli Ordinatlarda Yöntemi sonlu farklar formunda (central difference-diamond form) kullanılmıştır [5,27,50,69]. Akı hesabında başvurulan standart iç ve dış iterasyon çevrimleri, kaba-ağ yeniden dengeleme tekniği (coarse-mesh rebalancing technique [16, 48, 51]) ile hızlandırılmaktadır. Hesaplamalar sonucu negatif akı değerleri elde edilir ise, bölgesel olarak sıfırlanarak iterasyona devam edilmektedir. Uzaysal kesikleştirme için de, örnek problem alanı x doğrultusunda 12, y doğrultusunda 10 aralığa bölünerek, tüm hesaplar toplam 120 uzaysal hücre (fine mesh) için gerçekleştirilmiştir. Kaba-ağ yeniden dengeleme tekniği içinse, her iki doğrultuda 2 birim hücre gözönüne alınarak, toplam 4 hücre (coarse mesh) kullanılmıştır (Şekil 5.2). Yukarıdaki Tablo 5.1’de verilen etkin kesit değerleri, sözkonusu her birim hücre içinde sabit kabul edilmiştir.



Şekil 5.2. Uzaysal kesikleştirme

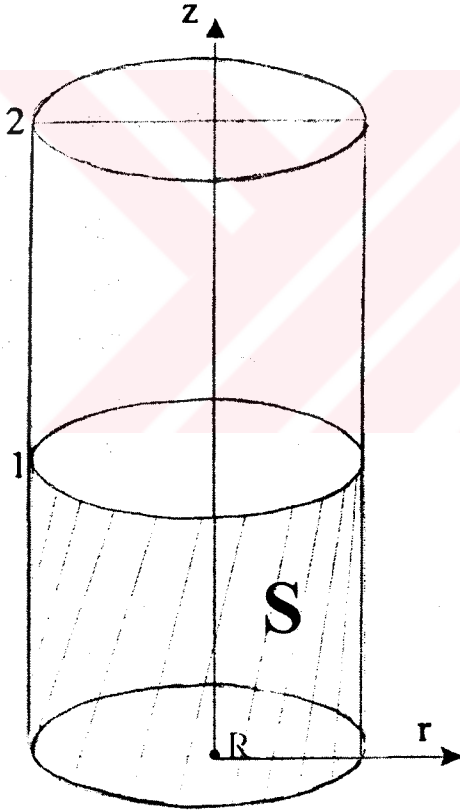
Çalışmada amaç, Gauss-Chebyshev kuadratürünün, özellikle problemin etkili olduğu eğrisel geometrilerdeki davranışını araştırmak, diğer geometriler için de S_N çalışmalarında sıklıkla kullanılan Gauss-Legendre kuadratürüne [27,72] alternatif bir seçenek olup olamayacağını tartışmaktır. Bu nedenle bölüm 4’de tanıtılan bilgisayar kodu TWOTRAN-II ele alınmıştır. Kod önce, yukarıdaki örnek problem verileriyle bünyesindeki Gauss-Legendre kuadratürü değiştirilmeden çalıştırılmış; skaler akınının sağ sınır (vakum) ve sol sınır (yansıtıcı sınır) boyunca değişimi incelenmiştir (Şekil A.1 ve A.2). Sonra, çalışmanın amacı doğrultusunda ilgili altprogramlar yeniden ele alınıp düzenlenerek, Gauss-Chebyshev kuadratürü uyarlanmış haliyle kod, aynı problem verileri için tekrar koşulmuştur. Elde edilen sonuçlarla akı dağılımı, yukarıda söz edildiği şekilde değerlendirilmiştir (Şekil A.4 ve A.5).

Grafikler incelendiğinde, her iki kuadratürle de elde edilen sol sınıra ait eğrilerin gerçekçi bir dağılım gösterdikleri görülür. Çünkü, problemde sol sınıra yansıtıcı sınır koşulu uygulanmıştır. Bilindiği gibi bu tür sınırdaki akıyla, ortama gelen doğrultudaki akıyla, ortamdaki giden (yüzeyle paralel eksene göre ayna simetrisine sahip olan) doğrultudaki akı değerleri eşittir. Sağ sınır (vakum) boyunca elde edilen eğrilerde ise, farklı kuadratür etkileri açıkça görülmekte; aynı S_N yaklaşımları için farklı dağılım eğrileri elde edilmektedir. Bilindiği üzere, kuadratürler arasındaki bu fark, bazen önemsiz olmakta, bazen ise ciddi boyutlara varmaktadır. İki kuadratürü kıyaslamak amacıyla söz konusu grafikler tekrar ele alınıp incelendiğinde, düşük dereceli S_N yaklaşımlarına ait dağılımlarda bozulmalar gözlenmiştir. Özellikle S_2 yaklaşımının, literatürdeki bilgilere de uygun olarak [9,38], gerçeği yansıtmaktan uzak bulunduğu görülmüştür (Şekil A.3, A.6 ve A.7). Çünkü, S_2 yaklaşımında ele alınan doğrultu sayısı, gözönüne alınan problem alanındaki sürekli akı dağılımını tasvir etmeye yeterli değildir. Buna karşılık, S_N derecesi büyüdükçe (doğrultu sayısı arttıkça) beklenildiği gibi, elde edilen dağılım hâlâ bazı bozulmalar göstermeye devam etse de, daha gerçekçi olmaktadır. Bu gözlem de, literatürdeki verilerle uyum içinde bulunmaktadır [15,38].

Bunlardan başka, Gauss-Legendre kuadratürü ve ona ne ölçüde alternatif bir seçenek olabileceğini araştırdığımız Gauss-Chebyshev kuadratürü ile elde edilen S_4

yaklaşımına ait eğriler, bu alanda hayli tanınan FENT kodu [18] ve literatürde yer alan diğer çalışma eğrileriyle kıyaslanmıştır (Şekil A.8). Şekilden görüldüğü gibi, Gauss-Chebyshev eğrisi oldukça iyi konumda bulunmakta ve literatür eğrileriyle paralellik göstermektedir.

Işın-etkisi, özellikle eğrisel geometrilerde ve iki veya üç boyutlu problemlerde kendini gösteren bir bozulma olduğundan, çalışmada eğrisel geometriye ayrı bir önem verilmiştir. Bu nedenle, (x-y) kartezyen geometride tanıtılan örnek problem (Pr.1), analogi ile (r-z) iki boyutlu silindirik geometriye uyarlanmıştır (Şekil 5.3). Tablo 5.1'deki veriler bu geometri için de geçerlidir.



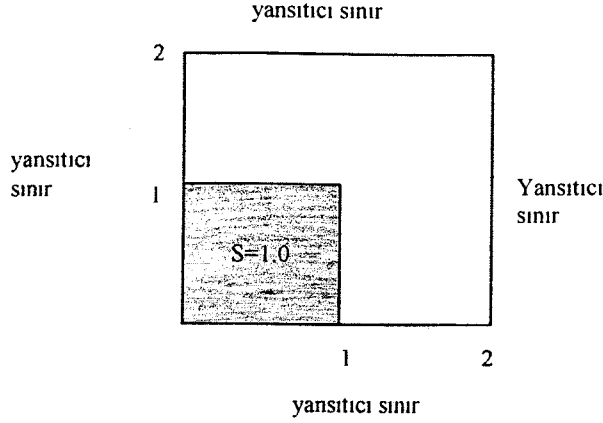
Şekil 5.3. (r-z) geometride örnek problem

TWOTRAN –II, yukarıdaki geometri için de (x-y) geometride söz edildiği gibi, önce bünyesindeki Gauss-Legendre kuadratürü, sonra Gauss-Chebyshev kuadratürü ile

koşulmuş ve sonuçlar önceki gibi grafiklerle değerlendirilmiştir (Şekil A.9, A.10, A.11 ve A.13, A.14, A.15). Çalışmada ileri sürülen kuadratürün etkisini tam olarak belirleyebilmek için kod, bünyesindeki hızlandırma tekniği (kaba-ağ yeniden dengeleme yöntemi) dışında, ek olarak iterasyon hızlandırıcı tekniklerden [52, 53, 54,62,67] hiçbiri kullanılmadan çalıştırılmıştır. Elde edilen eğrilerin tümü, lineer anizotropik saçılmaya ait sonuçları göstermektedir. Çalışma ayrıca, izotropik ve kuadratik saçılma için de tekrarlanmış; fakat saçılma derecesinin, ışın-etkisi üzerinde kayda değer bir değişikliğe neden olmadığı gözlenmiştir. Bundan dolayı da çalışmada konu üzerinde fazla durulamamıştır. Ayrıca, literatürde de bu konu hakkında dikkate değer bir veriye rastlanmamıştır.

Çalışma sonucu elde edilen eğrilerden görüldüğü gibi, bu geometri için de, her iki kuadratürle elde edilen düşük dereceli S_N yaklaşımlarındaki ışın-etkisi hayli belirgindir. (Şekiller A.9, A.11, A.13, A.15). N büyüdükçe, literatürde yer alan çalışmalarda da gözlendiği gibi [15, 18, 55], eğriler gerçeğe yaklaşmakta; fakat bazı bozulmalar hâlâ devam etmektedir. Bu çalışmada büyük dereceli S_N yaklaşımlarındaki bozulmalar, eğrilerin tepe değerlerinde düşme ve etek kısımlarında açılma veya yükselme olarak gözlenmiştir. Kısacası, eğriler basıklaşmaktadır. Buna karşılık, Gauss Chebyshev eğrileri basıklaşmalarına rağmen anormal dalgalanmalardan oldukça arınmış durumda bulunmaktadır. Aşağıdaki şekiller, (Şekil A.17, A.18 ve A.19) iki kuadratürün karşılaştırılmasını vermekte; özellikle Şekil A.18 ve A.19'da Gauss-Chebyshev kuadratür eğrilerinin ışın-etkisinden arınmış, oldukça başarılı eğriler oldukları görülmektedir. Şekil A.12 ve A.16'da da, her iki kuadratürün üst sınır (vakum) boyunca akı dağılımı yer almaktadır. Burada da Gauss-Chebyshev kuadratürü ile elde edilen S_{14} yaklaşımının oldukça başarılı olduğu söylenebilir. Söz konusu eğrilerin tümü, literatürde yer alan benzer çalışma eğrileriyle uyum içinde bulunmaktadır [15].

Çalışmanın ikinci bölümünde, Şekil 5.1 ile verilen problem 1'de sağ ve üst sınırlara uygulanan vakum sınır koşulu, yansıtıcı sınır koşulu ile değiştirilerek ve $\Sigma_t=1.0$ alınarak problem 2 oluşturulmuştur (Şekil 5.4).



Şekil 5.4. örnek problem 2

Tablo 5.1'de görülen problem 1'e ait veriler, Σ_t hariç aynen korunarak ve uzaysal kesikleştirme için aynı yol izlenerek, problem 2 de yukarıdakine benzer şekilde incelenmiştir: Kısacası, kod önce Gauss-Legendre kuadratürü ile çalıştırılmış ve akı dağılımı, önceki problemde olduğu gibi gözlenmiştir (Şekil A.20 ve A.21). Sonra kod, Gauss-Chebyshev kuadratürü uyarlanmış haliyle aynı problem için koşulmuş ve akı dağılımı benzer şekilde değerlendirilmiştir (Şekil A.22 ve A.23). Ayrıca, A.24, A.25 ve A.26 numaralı şekiller, problem 2 için, her iki kuadratürün farklı S_N yaklaşımlarının karşılaştırılmasını göstermek üzere çizilmişlerdir.

Eğriler incelendiğinde, daha önceki problem sonuçlarına benzer şekilde, S_N derecesi büyüdükçe eğrilerin tepe değerlerinde düşme ve etek kısımlarında yükselme görülmüştür. Fakat, yüksek dereceli S_N yaklaşımlarında, örnek S_{14} yaklaşımı, Gauss-Chebyshev kuadratür eğrileri, Gauss-Legendre eğrilerine kıyasla tepe değerleri küçülmesine rağmen ışın-etkisinden oldukça arınmış bulunmaktadır. İki kuadratür arasındaki fark, özellikle Şekil A.25 ve A.26'da net olarak görülmektedir. Şekil A.27 ise, her iki kuadratüre ait S_4 yaklaşımlarının, FENT kodu ve literatürde yer alan aynı problem verileri ile elde edilmiş diğer çalışmalara ait [18,21] eğrilerle kıyaslamasını vermektedir. Buna göre, Gauss-Chebyshev kuadratürüne ait eğrinin, Gauss-Legendre kuadratür eğrisine göre, daha başarılı konumda olduğu söylenebilir.

Bundan sonra, problem 2, önceki çalışmaya benzer şekilde analogi ile $(r-z)$ iki boyutlu silindirik geometriye uyarlanmıştır. $(x-y)$ iki boyutlu Kartezyen geometride söz edilen problem verileri, bu geometri için de geçerlidir. TWOTRAN-II bilgisayar kodu, bu geometri için de yukarıda sözedildiği gibi, önce Gauss-Legendre kuadratürü ile çalıştırılmış; Şekil A.28 ve A.29 elde edilmiştir. Kod sonra, Gauss-Chebyshev kuadratürü ile çalıştırılarak, elde edilen verilerle Şekil A.30 ve A.31 oluşturulmuştur. Aşağıdaki şekiller (Şekil A.32, A.33 ve A.34) ise, farklı S_N yaklaşımları için, gene iki kuadratürün karşılaştırılmasını vermektedir.

Sözkonusu eğriler incelendiğinde, öncekilere benzer sonuçlara varılır: Şekil 5.32 ve 5.34'den açıkça görüldüğü gibi, her iki kuadratürde de S_N derecesi büyürken, eğrilerin tepe değerleri düşmekte; etek kısımları ise yükselmektedir. Kısacası, eğrilerde basıklaşma sözkonusudur. Ayrıca, Gauss-Legendre kuadratürü yüksek dereceli S_N yaklaşımında, örnek S_{14} eğrisi, osilasyonları hatırlatan bozulmalar mevcuttur. Buna karşılık, Gauss-Chebyshev eğrileri gene oldukça başarılıdır. Çünkü eğriler basıklaşmalarına rağmen, ışın-etkisi bakımından daha iyi konumda bulunmaktadır.

Sonuç olarak, Gauss-Chebyshev kuadratürünün Gauss-Legendre kuadratürüne alternatif olup olamayacağı tartışması, iki kuadratürün aynı S_N yaklaşımlarının tek tek karşılaştırılmasıyla sonuçlandırılabilir. Bu amaçla oluşturulan Şekil A.17, A.18 ve A.19 problem 1 hakkında; Şekil A.24, A.25, A.32, A.33 ve A.34 de problem 2 hakkında oldukça net bilgiler vermektedir. Sözkonusu eğrilerin tümünde ortak olan, Gauss-Chebyshev kuadratürüne ait yüksek dereceli S_N eğrilerinin ışın-etkisi'nden oldukça arınmış durumda bulunmalarıdır. Söz edilen durum, $(r-z)$ geometrilerine ait eğrilerde daha belirgindir. Bu sonuçlar da, Gauss-Chebyshev kuadratürünün bazı durumlarda Gauss-Legendre kuadratür sonuçları ile uyusabildiğini, bazı durumlarda ise birbirlerini tamamlar nitelikte olduklarını göstermektedir.

Bu bölümde sözedilen tüm şekiller Ek A'da sırasıyla sunulmuştur.

Yukarıda ayrıntılı olarak sözedilen çalışmanın tümü, İTÜ-Nükleer Enerji Enstitüsünde Linux işletim sistemi altında kişisel bilgisayarlar (PC) kullanılarak gerçekleştirilmiştir.



BÖLÜM 6

TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Günümüzde Kesikli Ordinatlara Yöntemi, S_N , ile ilgili çalışmalar, önceki bölümlerde değinildiği gibi, yöntemin kullandığı ağ şemalarına bağlı olarak ortaya çıkan ve ayrılmaz bir parçası gibi görünen ışın-etkisi'ni, tümüyle giderebilmek ya da azaltabilmek için çeşitli teknikler geliştirmek üzerinde yoğunlaşmıştır. Özellikle, iki veya üç boyutlu geometrilere, izole kaynak ve küçük saçılma değerine sahip ortamlarda gözlenen bu olay, akı dağılımında anormal dalgalanmalar olarak ortaya çıkar. Söz konusu ortamlarda yöntemin tamamen yanlış sonuçlar verdiği de görülür; S_2 yaklaşımı gibi. Sorunun çözümü için en basit yol, daha önce de vurgulandığı gibi, S_N yaklaşımının derecesini (doğrultu sayısını) arttırmaktır. Fakat, probleme bağlı olarak, bu durumda dahi akı osilasyonları kendini göstermeye devam edebilmektedir [7,15,38]. Ayrıca bu çözüm, bilgisayar hafıza gereksiniminin ve hesaplama zamanının, dolayısıyla maliyetin de artışı demektir. (Maliyet, kullanılan doğrultu sayısının, yaklaşık olarak, karesiyle artmaktadır [38].)

Işın-etkisi'ni tümüyle giderebilmek ya da azaltabilmek amacı ile ortaya atılan çalışmalar, son yıllarda hayli artmış olmasına rağmen, sorun hâlâ güncelliğini korumaktadır. Her yeni çalışmada, ışın-etkisi problemini oldukça çözümleyen ve maliyeti azaltmaya çalışan çeşitli öneriler ileri sürülmektedir [56,57,66]. Günümüzde büyük hafızalı süper bilgisayarların gelişmekte oluşu, ışın-etkisi'ni gidermede daha karmaşık ve uzun hesapları içeren kodların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Söz konusu çalışmalarda esas, temel kriterleri sağlayan en güçlü ve etkili şemayı ortaya koyabilmektir. Bu alandaki çalışmaların önemli bir kısmı da, S_N kodlarına uygun kuadratur setini geliştirmek üzerinde yoğunlaşmıştır [58,64]. Çünkü, değişik

geometriler ve verilen bir geometriye göre değişik problem türleri, başarılı sonuçlara ulaşmada, farklı kuadratur setleri gerektirmektedir [5].

Bu çalışmada da S_N yöntemini esas alan deterministik transport kodlarında yaygın olarak kullanılmakta olan Gauss-Legendre kuadraturü yerine, Gauss-Chebyshev kuadraturünün yöntemine uyarlanması ele alınmıştır. Sözkonusu kuadraturün etkisi, önce iyi bilinen bir Benchmark problemi (problem 1 [49]) ile iki boyutlu kartezyen geometride test edilmiş; sonra problem, iki boyutlu silindirik geometriye uyarlanmıştır. Her iki geometriye ait, Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadraturleri ile elde edilen akı dağılımları sağ ve sol sınır boyunca incelenmiştir. İkinci bölümde, problem 2 ele alınmış ve kartezyen geometride tanımlanmış olan problem, gene silindirik geometriye de uyarlanarak, sonuçlar problem 1'dekine benzer şekilde grafiklerle değerlendirilmiştir. Her iki probleme ait eğriler, silindirik geometri uyarlamalarına ait olanlar da dahil, Bölüm 5'de ayrıntılı olarak tanıtılmıştır. Sözkonusu eğriler, hem S_N derecelerine, hem de kuadratur türlerine göre gerçekleştirilen incelemeleri göstermektedir.

İncelemeler sonucunda, her iki kuadraturle de elde edilen S_2 dağılımının, literatür bilgilerine de uygun olarak, gerçekçi olmadığı gözlenmiştir. Çünkü, S_2 yaklaşımında kullanılan doğrultu sayısı, gözönüne alınan problem alanındaki gerçek sürekli akı dağılımını tasvir etmeye yeterli değildir. Buna karşılık, S_N derecesi büyüdükçe (doğrultu sayısı arttıkça), beklenildiği gibi, elde edilen dağılım daha gerçekçi olmaktadır. Fakat probleme bağlı olarak, bazı bozulmaların da hâlâ devam ettiği görülmektedir. Bu çalışmada, yüksek dereceli S_N yaklaşımları ile elde edilen eğrilerin tümünde ortak olarak gözlenen bozulma, tepe değerlerinin düşmesi, etek kısımlarının ise yükselmesi, kısacası eğrilerin basıklaşması şeklinde olmuştur. Ayrıca, Gauss-Legendre eğrilerindeki dalgalanmalar devam etmektedir. Özellikle problem 1'e ait S_{14} eğrilerinde söz konusu bozulmalar dikkat çekicidir. Buna karşılık, Gauss-Chebyshev kuadratur eğrileri anormal dalgalanmalardan oldukça arınmış durumdadır. Her iki problemde de Gauss-Chebyshev kuadraturü ile elde edilen S_{14} eğrileri, bu bakımdan oldukça başarılı gözükmektedirler.

Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadratürleri ile gerçekleştirdiğimiz bu çalışmanın sonuçları, yukarıda kısaca sözedilen incelemelerden başka, literatürde yer alan tanınmış bir kodun sonuçlarıyla da karşılaştırılmıştır. Burada, FENT kodu [21] kullanılarak, aynı problem verileri için üç ayrı yöntemle elde edilmiş eğriler ele alınmaktadır. Sözkonusu karşılaştırmada, Gauss-Chebyshev kuadratürü ile elde edilen eğrinin (S_4 eğrisi), Gauss-Legendre eğrisine kıyasla, daha iyi konumda bulunduğu özellikle problem 1'de (Şekil A.8) literatür değerlerine oldukça yakın bir aralığa düştüğü görülmektedir.

Sonuç olarak, çalışmada ileri sürülen Gauss-Chebyshev kuadratürünün, önceki bölümde de vurgulandığı gibi, bazı durumlarda Gauss-Legendre kuadratürü ile uyuşabildiği, buna karşılık, silindirik geometri ve yüksek dereceli S_N yaklaşımları gibi bazı durumlarda daha başarılı sayılabilecek sonuçlar verdiği kanısına varılmıştır.

Çalışmanın sonunda, ilerideki araştırmalara için de şunlar önerilebilir:

1) Bu çalışmada, kullandığımız bilgisayar kodu TWOTRAN-II yalnızca S_2 - S_{16} arasındaki yaklaşımları ele aldığından, daha yüksek dereceli yaklaşımları deneme olanağımız olmamıştır. Çünkü kod, orijinal haliyle Gauss-Legendre kuadratürü için geliştirilmiştir; bu durumda da doğrultu sayısının fazlaca artması büyük bir maliyet sorunu doğuracağından, kodda daha yüksek dereceli yaklaşımları denemeye gerek duyulmadığını düşünmekteyiz. Oysa, tezde ileri sürdüğümüz Gauss-Chebyshev kuadratürü her S_N yaklaşımı için farklı bir değere sahip olan, eşit ağırlıklı doğrultular kullanmaktadır. Bu özellik, herhangi bir S_N yaklaşımında daha az veriyle çözüme gidebilmeyi sağlar. Bu da, nümerik transport kodlarında önemle üzerinde durulan, uzun akı ve kaynak hesaplarındaki bilgisayar hafıza ve çalışma zamanından tasarruf demektir. Kuadratürün sözkonusu özelliği gözönüne alınarak, ilerideki çalışmalarda S_{16} dan daha büyük yaklaşımlar da denenip kuadratürün etkinliği araştırılabilir.

2) İki boyutlu transport problemleri için, örnek olarak TWOTRAN-II ile çalışıldığında, kartezyen geometrilerde Gauss-Legendre, silindirik geometrilerde ise

daha başarılı görünen Gauss-Chebyshev kuadratürü tercih edilebilir. Günümüzde de birçok S_N kodunda, ışın-etkisi'ni azaltmak amacı ile farklı yaklaşımları birarada kullanan melez (hybrid) yapılara sıkça rastlanmaktadır [15,39]. Böylece, farklı yaklaşımların birbirlerini tamamlayan veya diğerine göre daha başarılı görünen yönlerinden net olarak yararlanılabilmektedir.

3) Bir başka çalışmada da, Gauss-Chebyshev kuadratürünün daha gerçekçi olan üç boyutlu geometrilerdeki davranışı incelenebilir. Günümüzde, üç boyutlu geometriler için geliştirilmiş bilgisayar kodları sayılıdır (THREETRAN [59], TORT [60], [68,73]). Söz konusu çalışma için, yukarıda anılan kodlar temin edilerek, Gauss-Chebyshev kuadratürüne göre yeniden düzenlenip çalıştırılabilir. Sonuçlar gene Benchmark problemleriyle test edilerek, kuadratürün ışın-etkisi karşısındaki davranışı araştırılabilir. Burada üç boyutla çalışıldığı halde, kuadratürün eşit ağırlıklı doğrultular kullanma özelliğinden dolayı maliyet sorunu yaratmayacağı düşüncesindeyiz.

KAYNAKLAR

- [1] **Duderstadt, J.J. and Hamilton, L.J.**, 1976. Nuclear Reactor Analysis, John Wiley and Sons. Inc.
- [2] **Soodak, H.**, (Editör), 1962. Reactor Handbook, second ed., Volume III, Part A-Physics, Interscience Publ.
- [3] **Lamarsh, J.R.**, 1972. Introduction to Nuclear Reactor Theory, Addison-Wesley Publ. Comp., New York.
- [4] **Zweifel, P.F.**, 1973. Reactor Physics, Mc Graw-Hill Book Comp.
- [5] **O'dell, R.D. and Alcouffe, R.E.**, 1987. Transport Calculations for Nuclear Analysis: Theory and Guidelines for Effective Use of Transport Codes, *Los Alamos National Lab. Report, LA-10983*, New Mexico.
- [6] **Lamarsh, J.R.**, 1983. Introduction to Nuclear Engineering, Addison-Wesley Publ. Comp., California.
- [7] **Lewis, E.E.**, 1977. Nuclear Power Reactor Safety, A Wiley-Interscience Publ.
- [8] **Kallfelz, J.M. and Karam, R.A.**, 1975. Advanced Reactors: Physics, Design and Economics, Pergamon Press, Great Britain.
- [9] **Lewis, E.E. and Miller, W.F. Jr.**, 1984. Computational Methods of Neutron Transport, John Wiley and Sons, Publ., New Mexico.
- [10] **Alcouffe, R.E., Larsen, E.W., Miller, W.F. Jr. and Wienke, B.R.**, 1979. Computational Efficiency of Numerical Methods for the Multigroup Discrete Ordinates Neutron Transport Equations: The Slab Geometry Case, *Nucl. Sci. Eng.*, **71**, 111-127.
- [11] **Clark, M. and Hansen, K.F.**, 1964. Numerical Methods of Reactor Analysis, Academic Press, New York.
- [12] **Curtis, F.G. and Wheatley, P.O.**, 1983. Applied Numerical Analysis, Addison Wesley Publ. Comp., III. Edition.
- [13] **Bell, G.I. and Glasstone, S.**, 1970. Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Reinhold Comp., New York.

- [14] **Duderstadt, J.J. and Martin, W.R.**, 1979. *Transport Theory*, John Wiley and Sons Publ.
- [15] **Miller, W.F.Jr. and Reed, Wm. H.**, 1977. Ray-Effect Mitigation Methods for Two Dimensional Neutron Transport Theory, *Nucl.Sci.Eng.*, **62**, 391-411.
- [16] **Nakamura, Sh.**, 1972. New Formulation and Coarse-Mesh Acceleration for Two-Dimensional DSN and P_N Methods, *Seminar on Numerical Reactor Calc.*, International Atomic Energy Agency, Vienna.
- [17] **Kaplan, S.**, 1968. *Nucl. Sci. Eng.*, **34**, 76-85.
- [18] **Briggs, L.L., Miller W.F.Jr. and Lewis, E.E.**, 1975. Ray-Effect Mitigation in Discrete Ordinate Like Angular Finite Element Approximations in Neutron Transport, *Nucl. Sti. Eng.*, **57**, 205-217.
- [19] **Natelson, M.**, 1971. Variational Derivation of Discrete Ordinate-Like Approximations, *Nucl.Sci.Eng.*, **43**, 131-144.
- [20] **Miller, W.F.Jr., Lewis, E.E. and Rossow, E.C.**, 1973. The Application of Phase-Space Finite Elements to the Two-Dimensional Neutron Transport Equation in x-y Geometry *Nucl.Sci.Eng.*, **52**, 12-22.
- [21] **Blomquist, R.N. and Lewis, E.E.**, 1980. A Rigorous Treatment of Transverse Buckling Effects in Two Dimensional Neutron Transport Computations, *Nucl. Sci.Eng.*, **73**, 125-139.
- [22] **Sullivan, R.E., Lynn, U.A. and Dahsoong, Y.**, 1971. Reduction of the Ray-Effect in Discrete Ordinates Calculations, *Nucl.Sci.Eng.*, **43**, 108.
- [23] **Keast, P. and Fairweather, G.**, 1986. *Numerical Integration-Recent Developments, Software and Applications*, D. Reidel Publ. Comp., Halifax.
- [24] **Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O.**, 1969. *Applied Numerical Methods*, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [25] **Seed, T.J. and Albrecht, R.W.**, 1976. Application of Walsh Function to Neutron Transport Problems-II. Analysis, *Nucl. Sci. Eng.*, **60**, 346-356.
- [26] **Mathews, J.H.**, 1992. *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice-Hall International Inc.
- [27] **Lathrop, K.D. and Brinkley, F.W.**, 1973. TWOTRAN-II: An Interfaced Exportable Version of the Twotran Code for Two-Dimensional Transport, *Los Alamos Scientific Lab Report*, LA-4848-MS, Los Alamos, New Mexico.

- [28] **Lawrence, R.D.**, 1986. Progress in Nodal Methods for the Solution of the Neutron Diffusion and Transport Equations, *Progress in Nuclear Energy*, Vol.17, 271-301.
- [29] **Greenspan, H., Kelber, C.N. and Okrent, D.**, 1979. Computing Methods in Reactor Physics, Gordon and Breach Sci. Publ.
- [30] **Reed, Wm. H. and Lathrop, K.D.**, 1970. Truncation Error Analysis of Finite Difference Approximations to the Transport Equation, *Nucl. Sci. Eng.*, **41**, 237-248.
- [31] **Engle, W.W.Jr.**, 1967. ANISN: A One Dimensional Discrete Ordinates Transport Code with Anisotropic Scattering, K-1693, *Oak Ridge National Lab. Report*, Oak Ridge, Tennessee.
- [32] **Lathrop, K.D. and Brinkley, F.W.Jr.**, 1970. TWOTRAN SPHERE: A Fortran Program to Solve the Multigroup Transport Equation in Two Dimensional Spherical Geometry, *Los Alamos Scientific Lab. Report*, LA-4567.
- [33] **Noh, J.M. and Cho, N.Z.**, 1994. A New Approach of Analytic Basis Function Expansion to Neutron Diffusion Nodal Calculation, *Nucl. Sci. Eng.*, **116**, 165-180.
- [34] **Spanier, J.**, 1999. Monte Carlo Methods for Flux Expansion Solutions of Transport Problems, *Nucl.Sci.Eng.*, **133**, 73-79.
- [35] **Fletcher, J.K.**, 1983. The Solution of the Multigroup Neutron Transport Using Equation Spherical Harmonics, *Nucl.Sci.Eng.* **84**, 33-46.
- [36] **Carlson, B.G.**, 1976. A Method of Characteristics and Other Improvements in Solution Methods for the Transport Equation, *Nucl.Sci.Eng.*, **61**, 408-425.
- [37] **Carlson, B.G.**, 1955. Solution of the Transport Equation by S_N Approximations, *Los Alamos Scientific Lab. Report*, LA-1891.
- [38] **Lathrop, K.D.**, 1971. Remedies for Ray-Effect, *Nucl.Sci.Eng.*, **45**, 255-268.
- [39] **Monahan, S.P. and Filippone, W.L.**, 1991. An Internal S_N Method for Large-Memory Supercomputers, *Nucl.Sci.Eng.*, **107**, 201-216.
- [40] **Lathrop, K.D.**, 1971. Elimination of Ray-Effects by Converting Discrete Ordinate Equations to Spherical Harmonic-Like Equations, *Proc.Conf.New Developments in Reactor Math. And Appl.*
- [41] **Arfken, G.**, 1985. *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, third ed., Orlando, Florida.

- [42] **Stoer, J. and Bulirsch, R.**, 1993. Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag Inc., New York.
- [43] **Cheney, E.W. and Kincaid, D.**, 1980. Numerical Mathematics and Computing, Brooks/Cole Publ. Comp., California.
- [44] **Gautschi, W.**, 1990. Computational Aspects of Orthogonal Polynomials: Orthogonal Polynomials-Theory and Practice, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherland.
- [45] **Ciarlet, P.G. and Lions, J.L.**, 1992. Handbook of Numerical Analysis, Volume 1, North-Holland Publ.
- [46] **Cardona, A.V. and Vilhena, M.T.**, 1994. A Solution of the Linear Transport Equation Using Chebyshev Polynomials and Laplace Transform, *Kerntechnik*, **59**, No.6., 278-281.
- [47] **Sirovich, L.**, 1988. Introduction to Applied Mathematics, Springer-Verlag Publ., New York.
- [48] **Nakamura, S.**, 1978. Computational Methods in Engineering and Science, Academic Press., chp. 8.
- [49] **Gelbard, E.M.**, 1972. Benchmark Problem S-AL, *Argonne Code Center Benchmark Problem Book*, ANL-7416, Suppl. 1, Argonne National Lab.
- [50] **Arkuszewski, J.J.**, 1972. Rigorous Analysis of the Diamond Approximation for the Neutron Transport Equation, IAES-SM-154/5.
- [51] **Anghel, V.N.P.**, 1987. Coarse-Mesh Diffusion Acceleration Technique for Transport Calculations, *Nucl.Sci.Eng.*, **97**, 249-256.
- [52] **Azmy, Y.Y.**, 1993. Cell-Centered Imposed Diffusion Synthetic Acceleration for Weighted Difference Transport Methods, *Nucl.Sci.Eng.*, **115**, 265-272.
- [53] **Mathews, K., Sjoden, G. and Minor, B.**, 1994. Exponential Characteristic Spatial Quadrature for Discrete Ordinates Radiation Transport in Slab Geometry, *Nucl.Sci.Eng.*, **118**, 24-37.
- [54] **Morel, J.E. and McGhee, J.M.**, 1994. A Fission-Source Acceleration Technique for Time-Dependent Even-Parity S_N Calculations, *Nucl.Sci.Eng.*, **116**, 73-85.
- [55] **Haghighat, A.**, 1991. Angular Parallelization of a Curvilinear S_N Transport Theory Method, *Nucl.Sci.Eng.*, **108**, p.267.

- [56] **Yavuz, M. and Larsen, E.W.**, 1992. Iterative Methods for Solving x-y Geometry S_N Problems on Parallel Architecture Computers, *Nucl.Sci.Eng.*, **112**, 32-42.
- [57] **Dorr, M.R. and Still, C.H.**, 1996. Concurrent Source Iteration in the Solution of Three-Dimensional Multigroup Discrete Ordinates Neutron Transport Equations, *Nucl.Sci.Eng.*, **122**, 287-308.
- [58] **Miller, W.F.Jr.**, 1991. An Analysis of the Finite Differenced, Even Parity Discrete Ordinates Equations in Slab Geometry, *Nucl.Sci.Eng.*, **108**, 247-266.
- [59] **Lathrop, K.D.**, 1976. THREETRAN: A Program to Solve Multigroup Discrete Ordinates Transport Equation in Three Dimensional Geometry, *Los Alamos Scientific Lab. Report*, LA-6333.
- [60] **Rhoades, W.A. and Childs, R.L.**, 1991. TORT: A Three Dimensional Discrete Ordinates Neutron/Photon Transport Code, *Nucl.Sci.Eng.*, **107**, 397.
- [61] **DeHart, M.D., Pevey, R.E. and Parish, T.A.**, 1994. An Extended Step Characteristic Method for Solving the Transport Equation in General Geometries, *Nucl.Sci.Eng.*, **118**, 79-90.
- [62] **Wareing, T.A. Walters, W.F. and Morel, J.E.**, 1994. Diffusion Accelerated Solution of the Two Dimensional x-y S_N Equations with Linear-Bilinear Nodal Differencing, *Nucl.Sci.Eng.* **118**, 122-126.
- [63] **Wu, Y., Zhongsheng X. and Fischer, U.**, 1999. A Discrete Ordinates Nodal Method for One Dimensional Neutron Transport Calculation in Curvilinear Geometries, *Nucl.Sci.Eng.*, **133**, 350-357.
- [64] **Bal, G. and Xavier, W.**, 1997. Discrete Ordinates Methods in x-y Geometry with Spatially Varying Angular Discretization, *Nucl.Sci.Eng.*, **127**, 169-181.
- [65] **Khouaja, H., Edwards, D.R. and Tsoufanidis, N.**, 1997. Spherical Harmonics-Finite Element Treatment of Neutron Transport in Cylindrical Geometry, *Ann.Nucl.Energy*, Vol.24, 515-531.
- [66] **Noh, T., Miller, W.F.Jr. and Morel, J.E.**, 1996. The Even-Parity and Simplified Even Parity Transport Equations in Two-Dimensional x-y Geometry, *Nucl.Sci.Eng.*, **123**, 38-56.
- [67] **Zika, M.R. and Adams, M.L.**, 2000. Transport Synthetic Acceleration for Long-Characteristic Assembly-Level Transport Problems, *Nucl.Sci.Eng.*, **134**, 135-158.
- [68] **Baker, R.S. and Koch, K.R.**, 1998. An S_N Algorithm for the Massively Parallel CM-200 Computer, *Nucl.Sci.Eng.*, **128**, 312-320.

- [69] **Lathrop, K.D.**, 2000. A Comparison of Angular Difference Schemes for One-Dimensional Spherical Geometry S_N Equations, *Nucl.Sci.Eng.*, **134**, 239-264.
- [70] **Booth, T.E.**, 1998. Monte Carlo Estimates of Transport Solutions to the Isotropic Slab Problem, *Nucl.Sci.Eng.*, **130**, 374-385.
- [71] **Mathews, K.A.**, 1999. On the Propagation of Rays in Discrete Ordinates, *Nucl.Sci.Eng.*, **132**, 155-180.
- [72] **Kornreich, D.E. and Ganapol, B.D.**, 1997. The Suite of Analytical Benchmarks for Neutral Particle Transport in Infinite Isotropically Scattering Media, *Nucl.Sci. Eng.*, **125**, 24-50.
- [73] **Khromov, V., Kryuchhov, E., Tikhomirov, G., Concharov, L. and Kondakov, V.**, 1995. Probabilistic Method of Discrete Ordinates in a Neutron Transport Problem, *Nucl.Sci.Eng.*, **121**, 264-276.

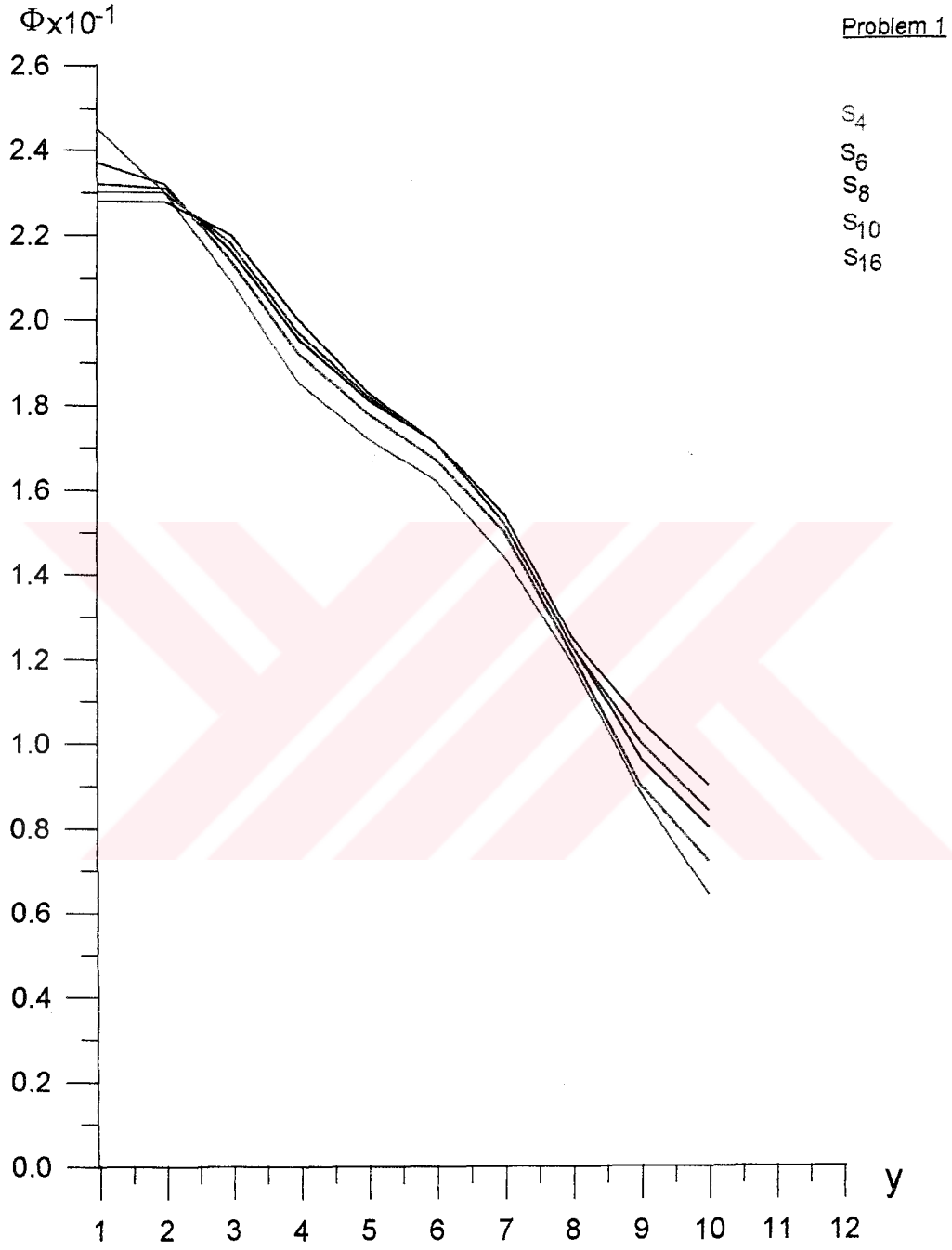


EK A

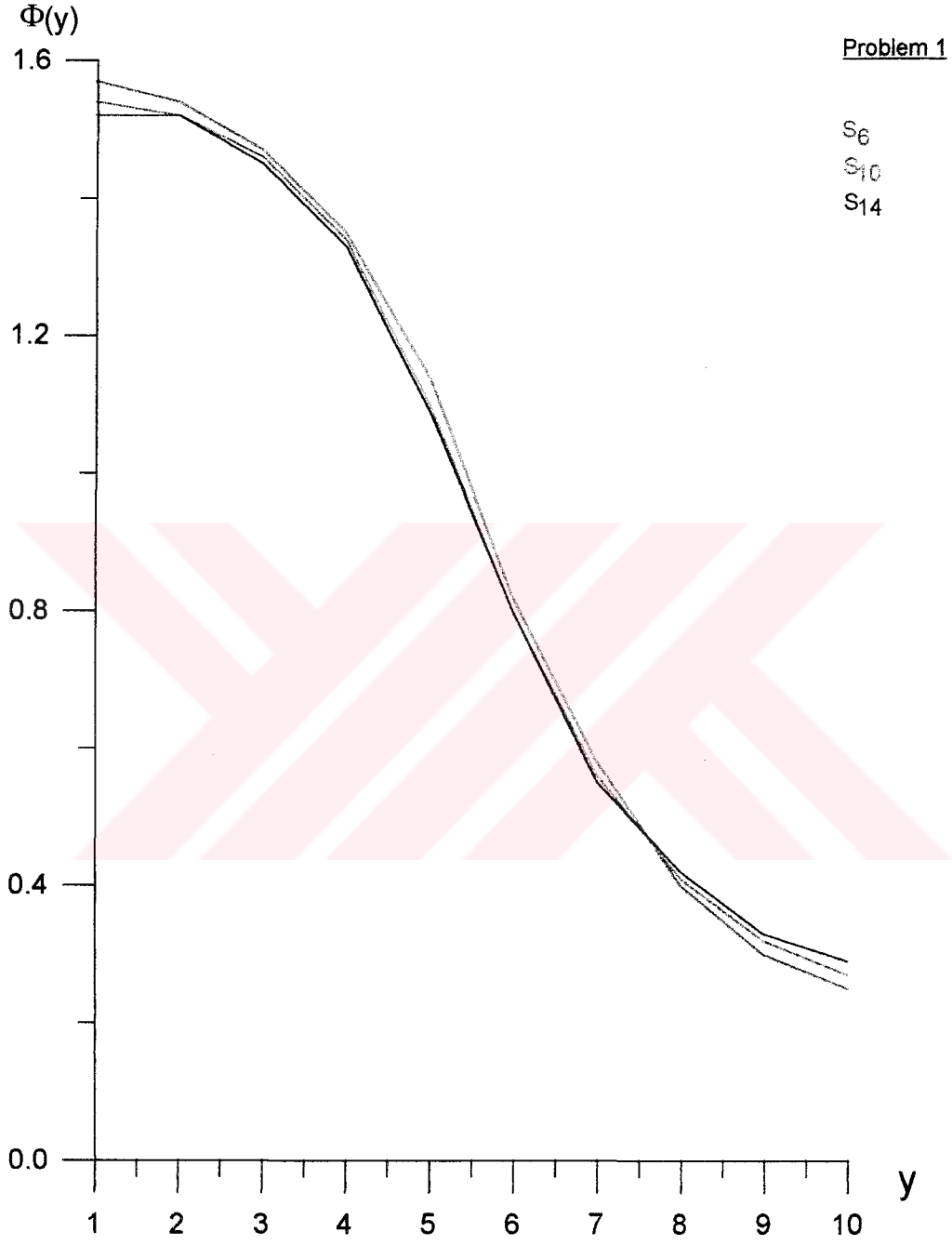
GAUSS –LEGENDRE ve GAUSS-CHEBYSHEV KUADRATÜRLERİ İLE ELDE EDİLEN AKI DAĞILIMLARI

Bu bölümde, tezin aslını oluşturan ve Bölüm 5’de ayrıntılı olarak tanıtılan şekiller yer almaktadır. Söz konusu şekiller, çalışmada ele alınan dört ayrı Benchmark problemindeki farklı sınırlar boyunca iki farklı kuadratürle (Gauss-Legendre ve Gauss-Chebyshev kuadratürleri) elde edilen akı dağılımlarını, bu iki kuadratürün aynı dereceli S_N yaklaşımlarının karşılaştırılmalarını ve sözkonusu kuadratürlere ait örnek bir çalışmanın (S_4 eğrisi) literatürde yer alan tanınmış bir başka koda ait (FENT kodu) üç önemli yaklaşımla elde edilmiş eğrilerle karşılaştırılmalarını kapsamaktadır.

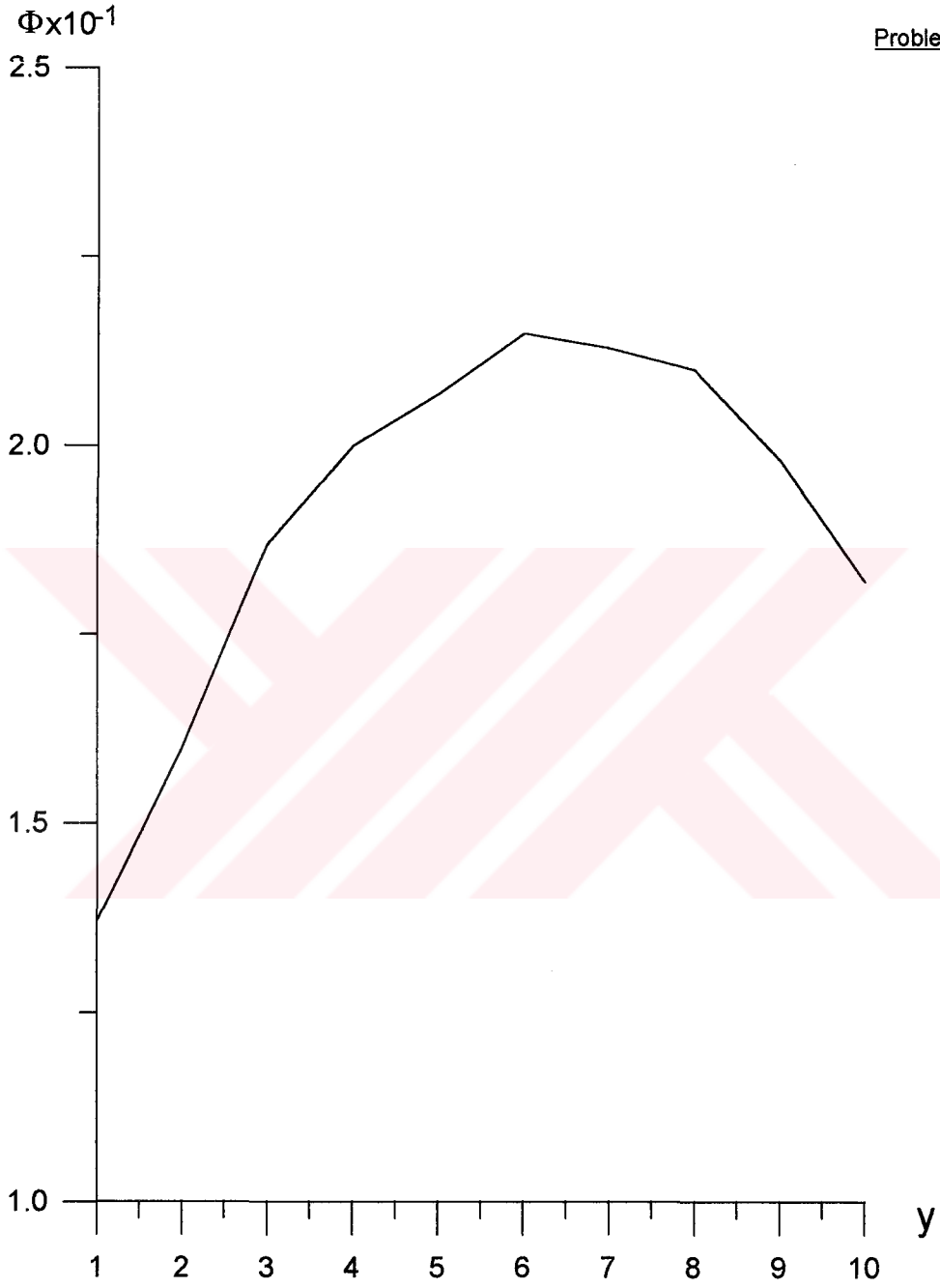




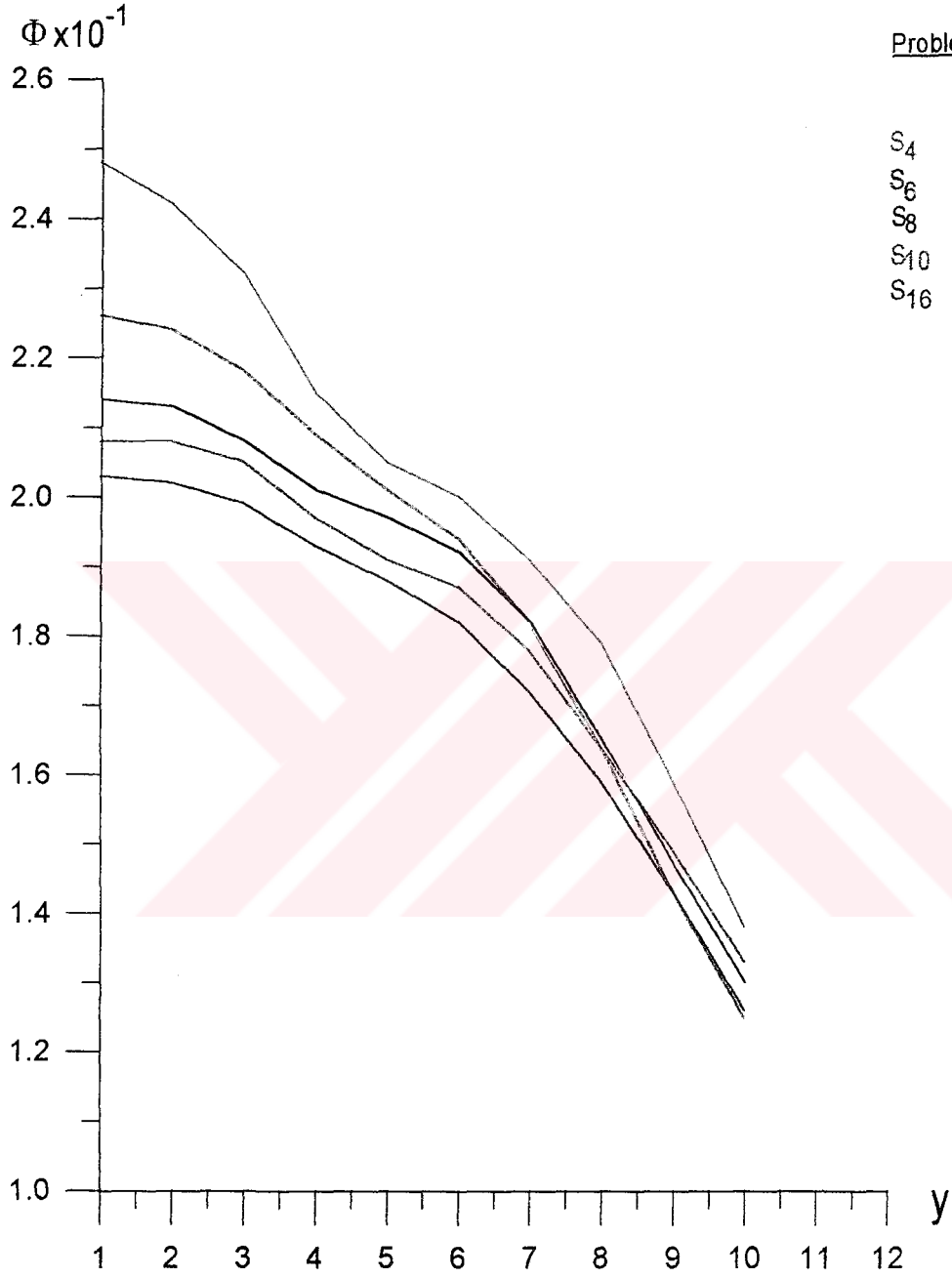
Şekil A.1. (x-y) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi
(Gauss - Legendre)



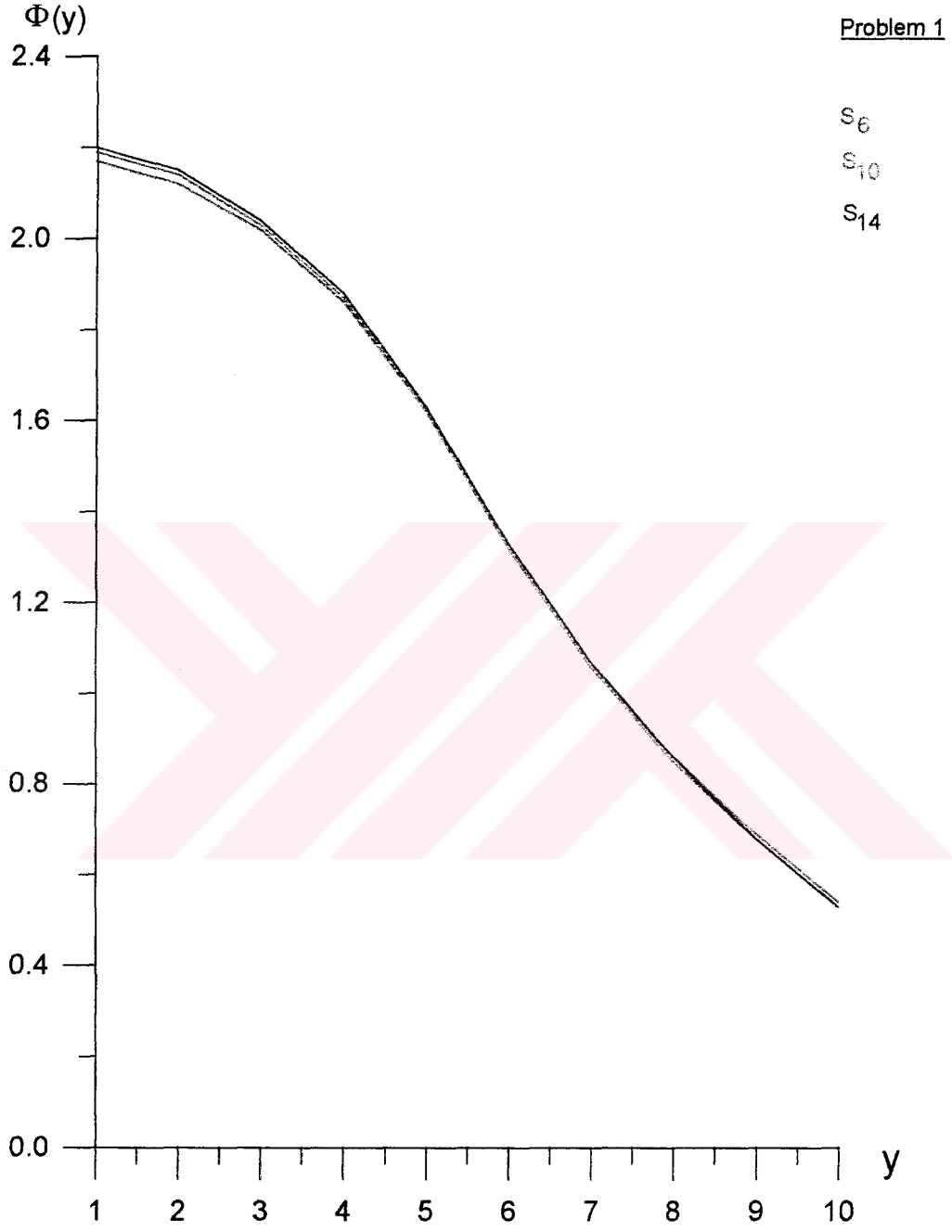
Şekil A.2. (x-y) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi
(Gauss - Legendre)



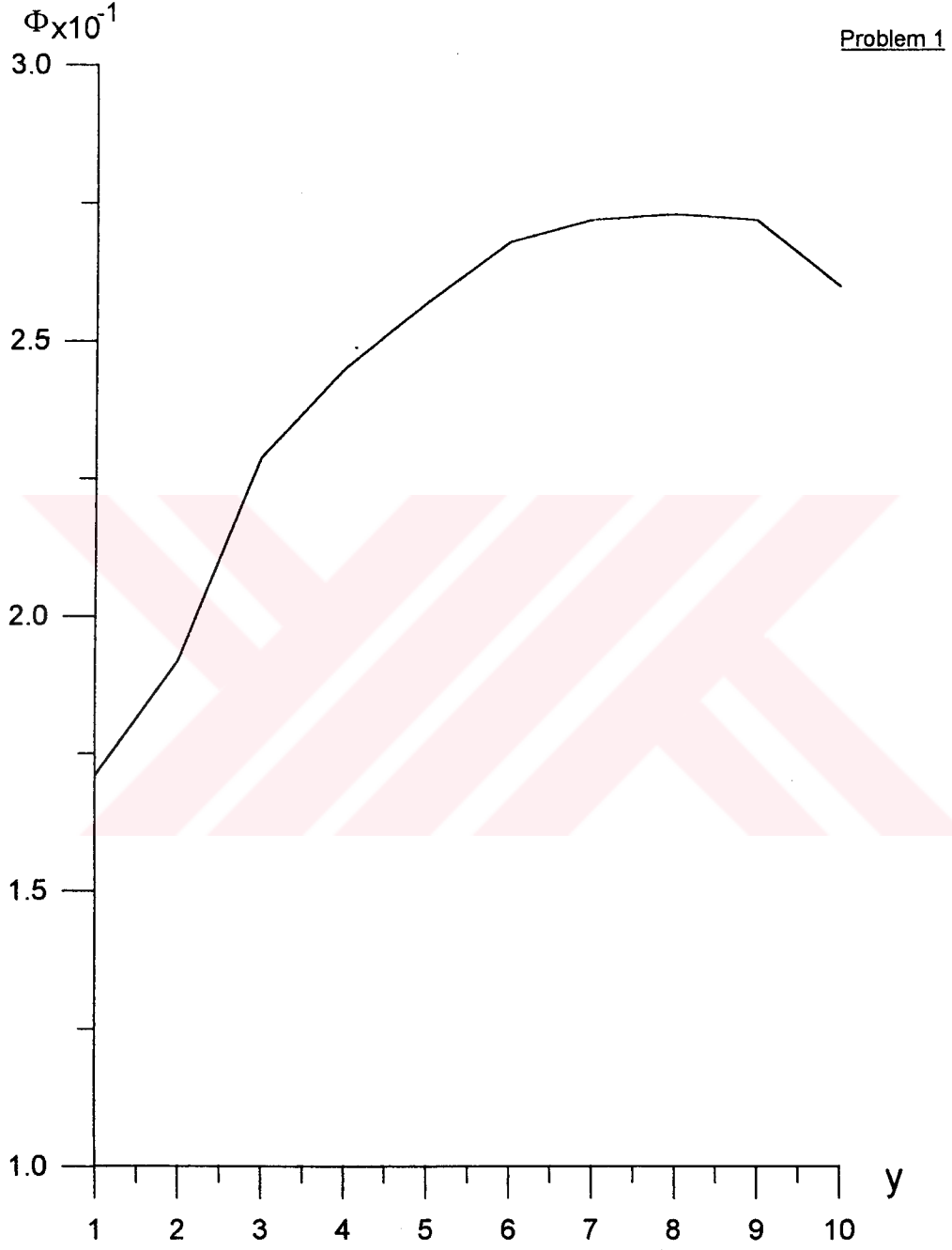
Şekil A.3. (x-y) geometride S_2 yaklaşımı (Gauss - Legendre)



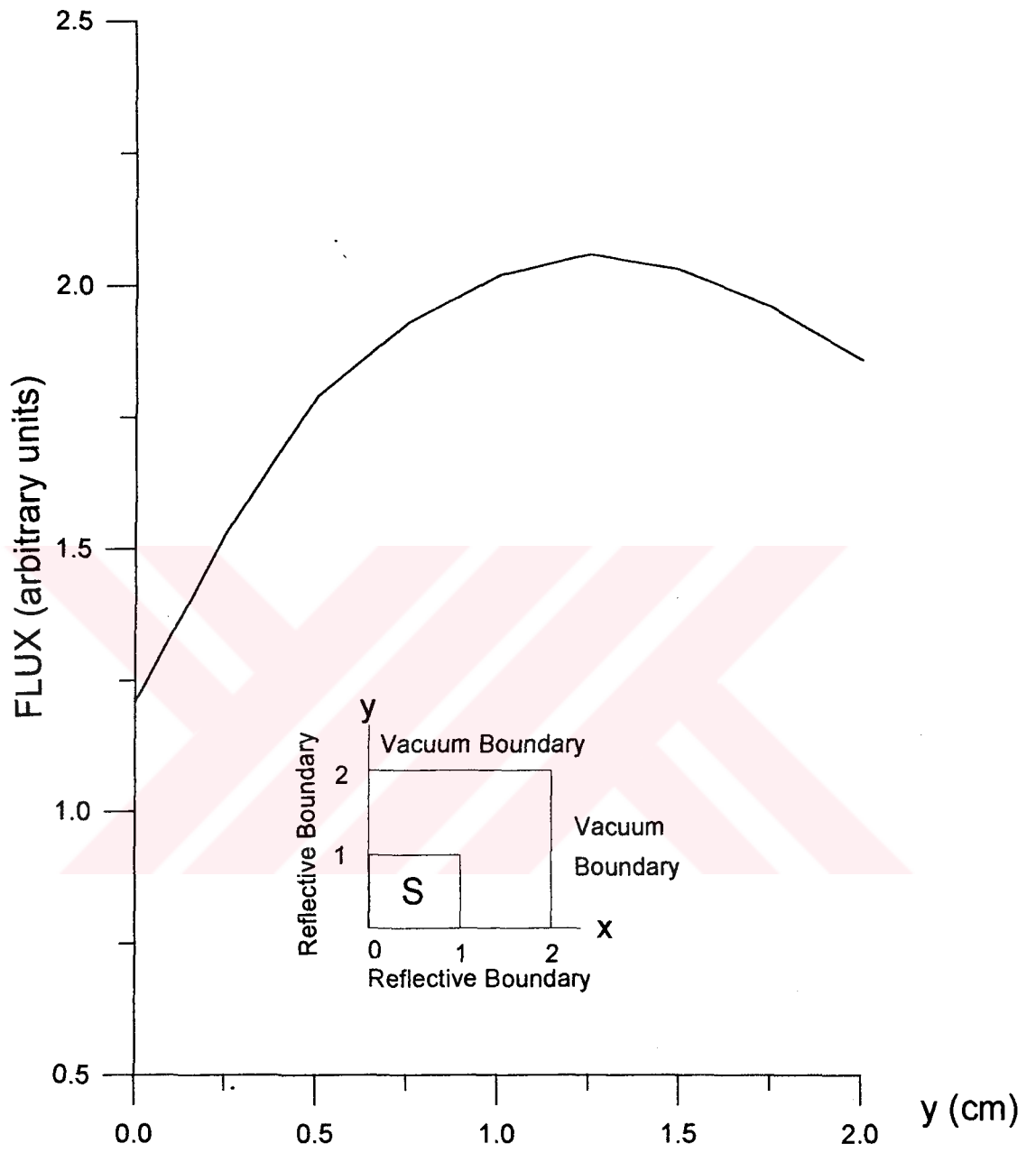
Şekil A.4. (x-y) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi
(Gauss - Chebyshev)



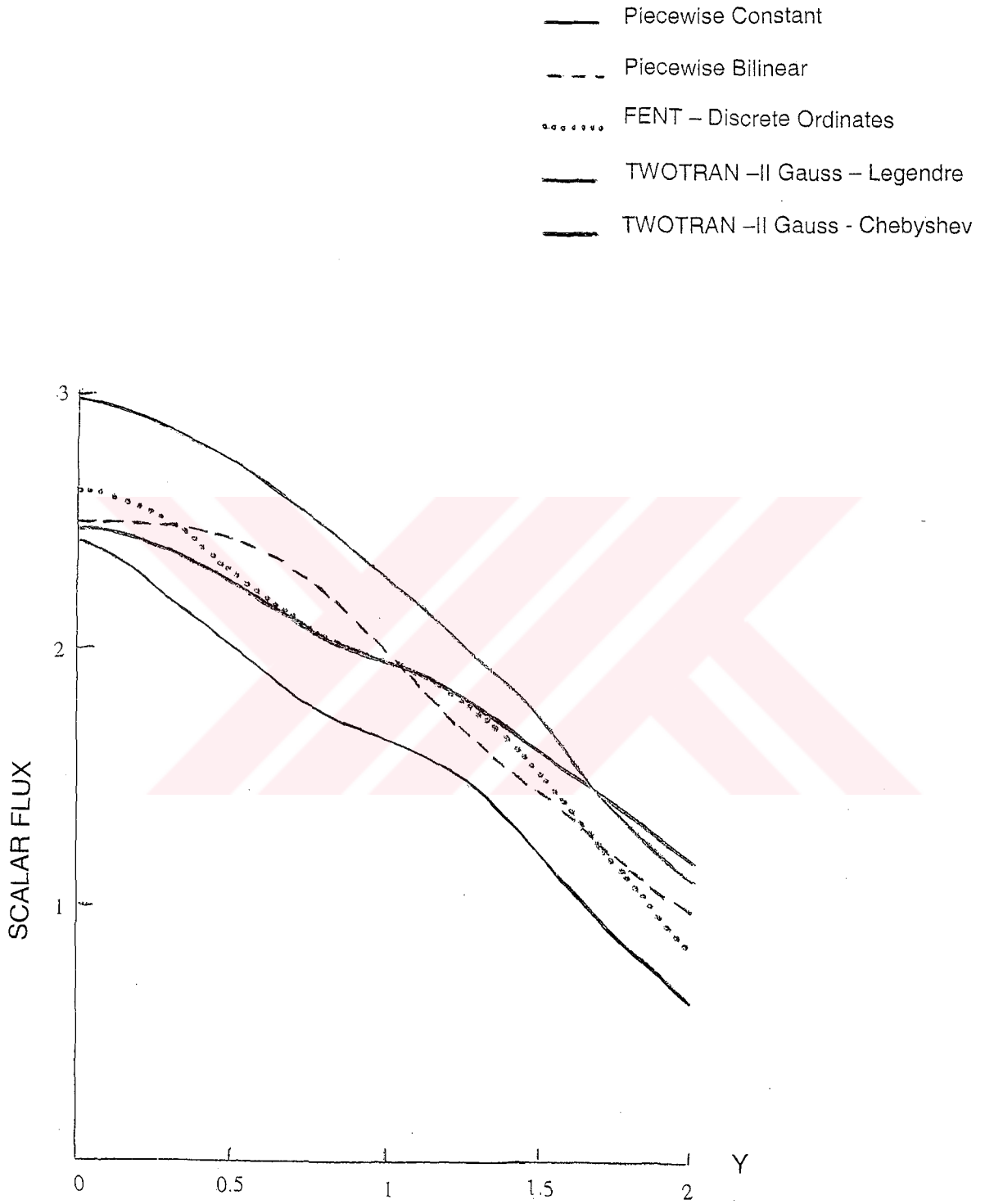
Şekil A.5. (x-y) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi
(Gauss - Chebyshev)



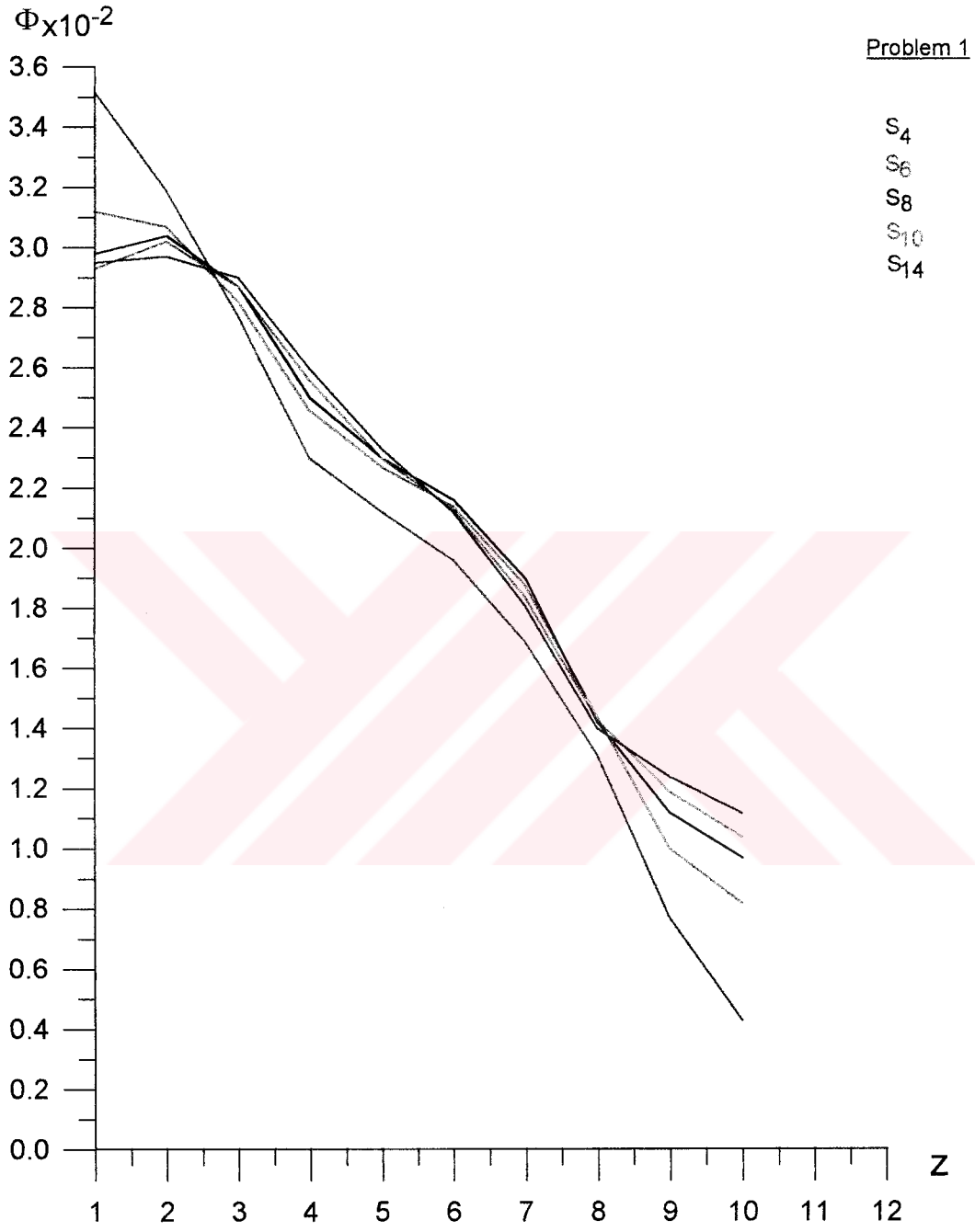
Şekil A.6. (x-y) geometride s_2 yaklaşımı (Gauss - Chebyshev)



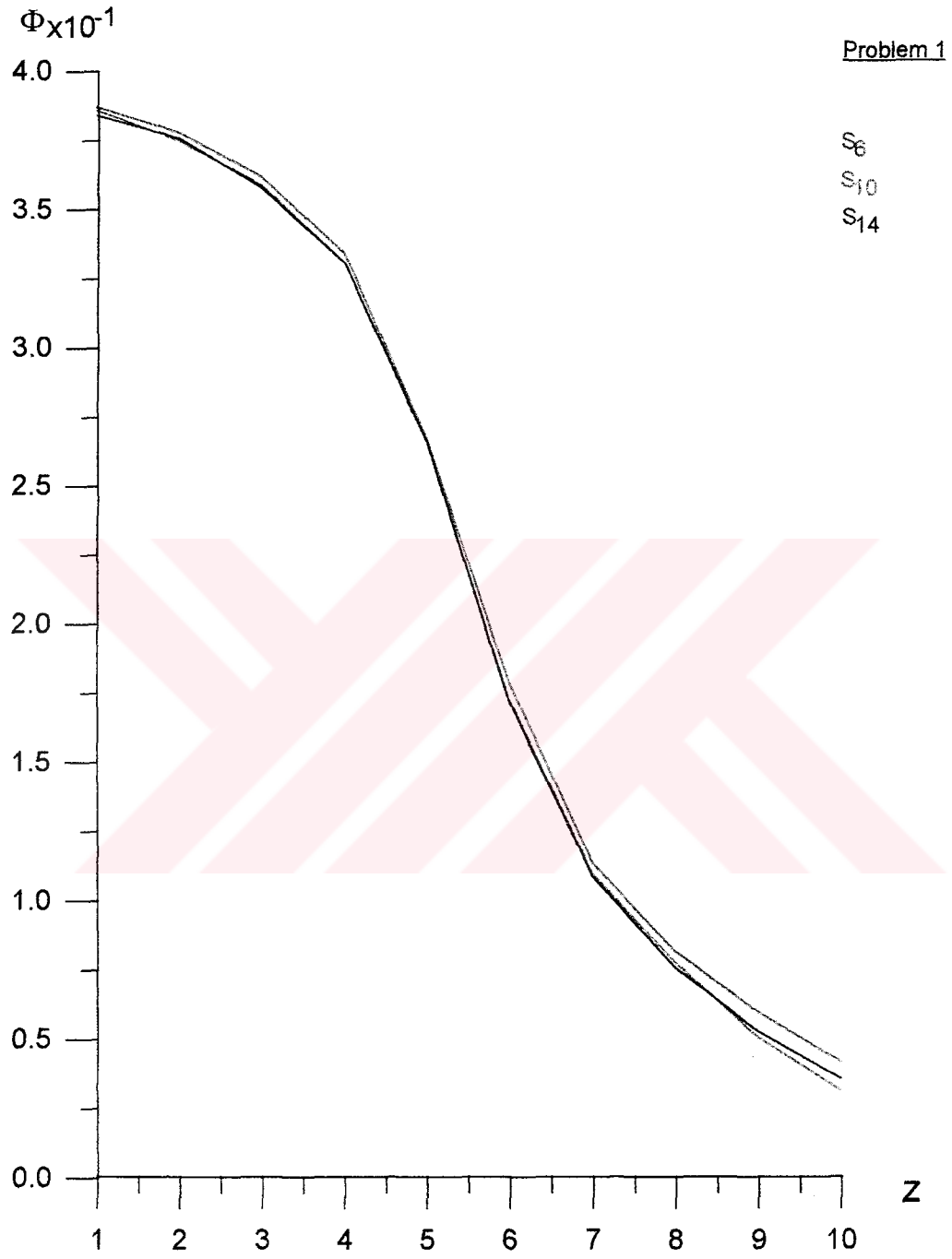
Şekil A.7. (x-y) geometride S_2 yaklaşımı [9]



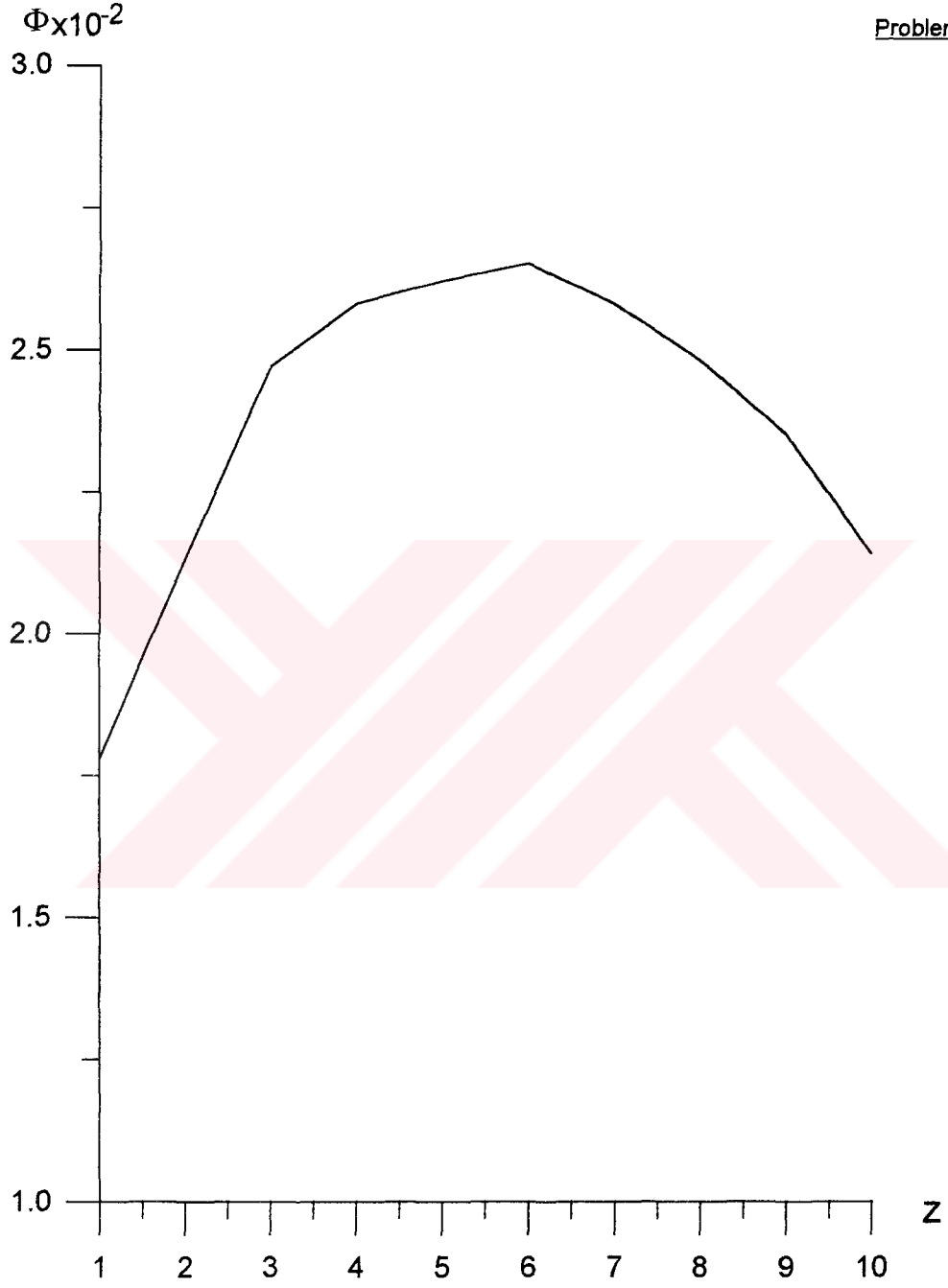
Şekil A.8. (x-y) geometride TWOTRAN II ve FENT kodlarının S_4 yaklaşımı için karşılaştırılması (Problem 1) [18]



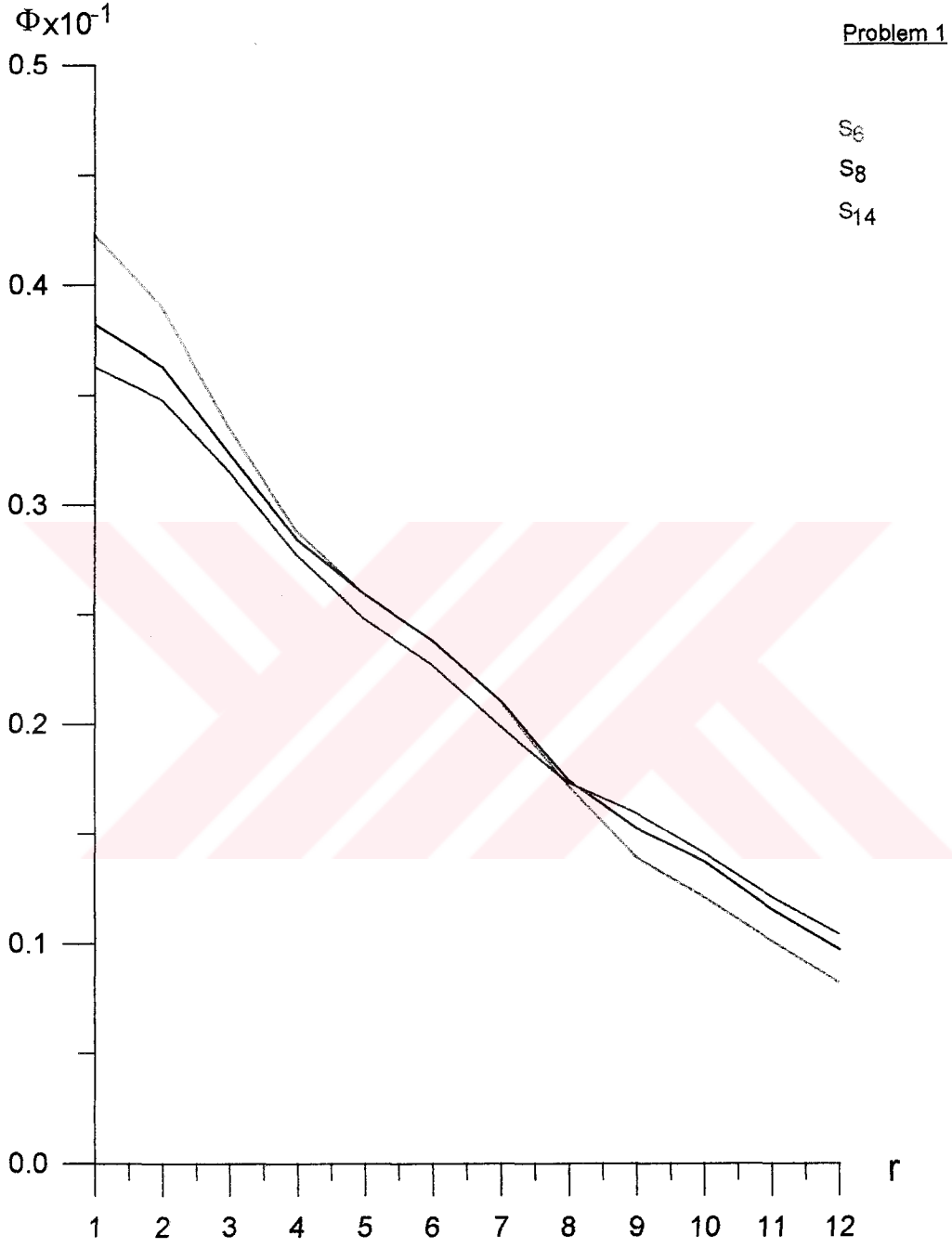
Şekil A.9 . (r-z) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi
(Gauss - Legendre)



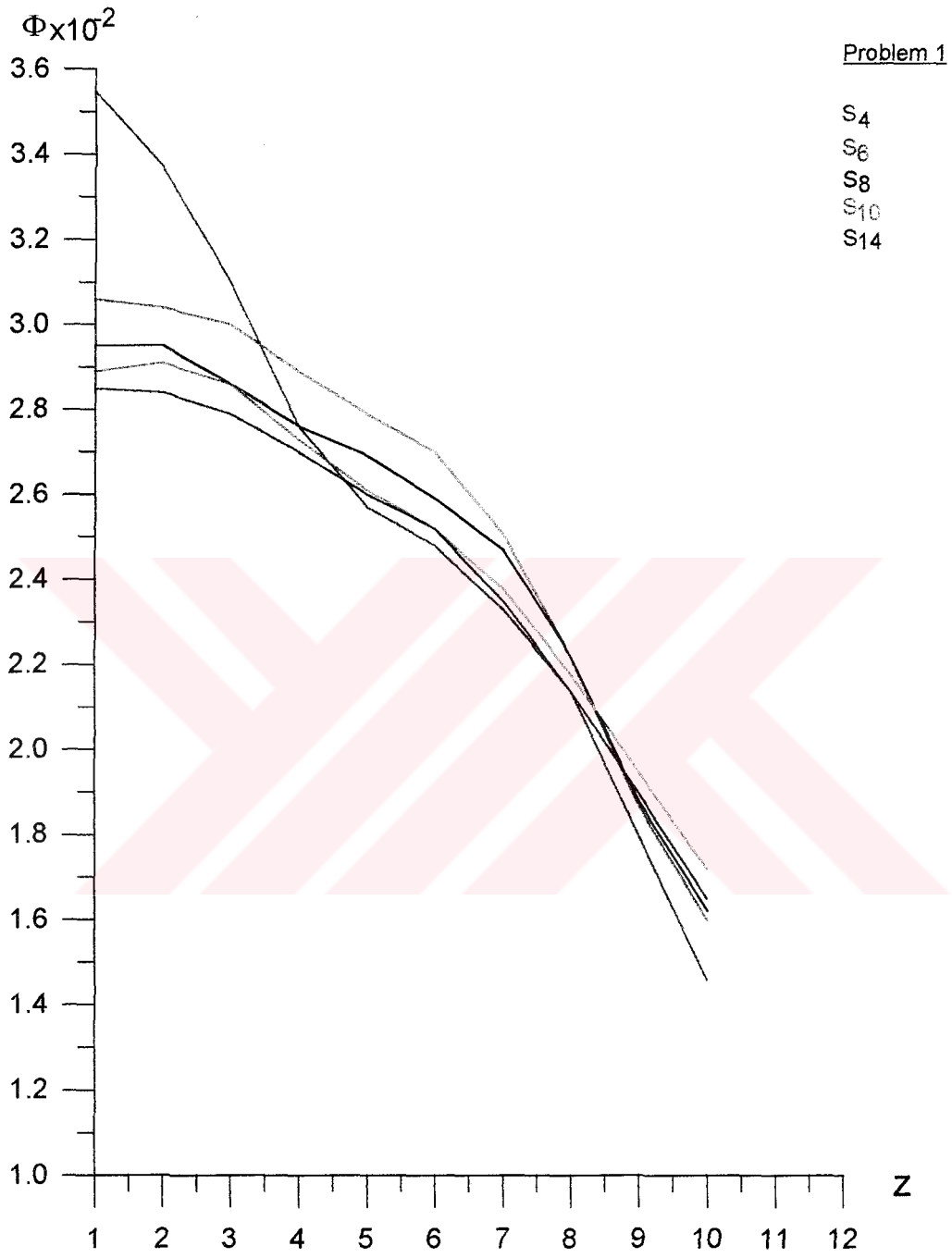
Şekil A.10. (r-z) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi
(Gauss - Legendre)



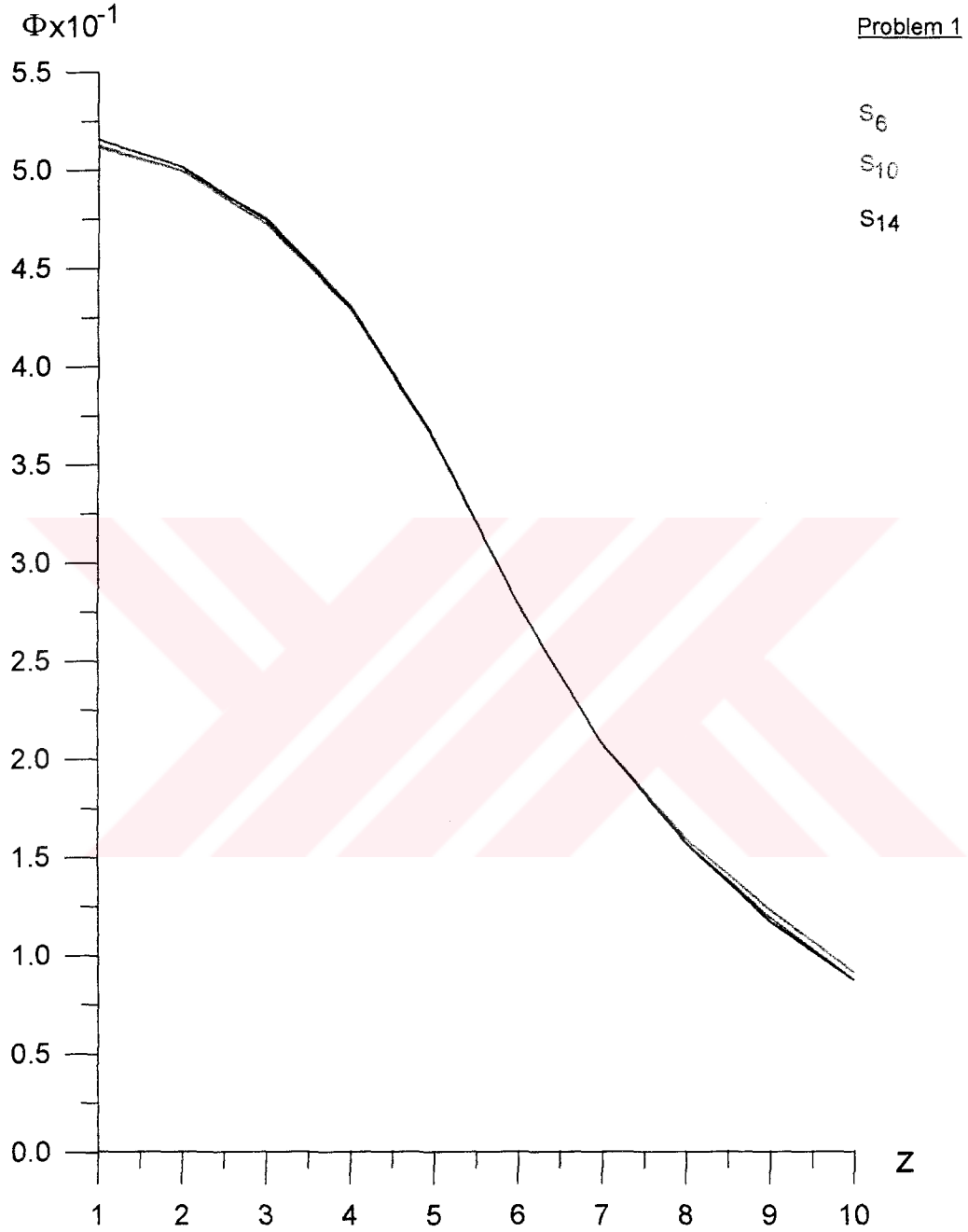
Şekil A.11. (r-z) geometride S_2 yaklaşımı (Gauss - Legendre)



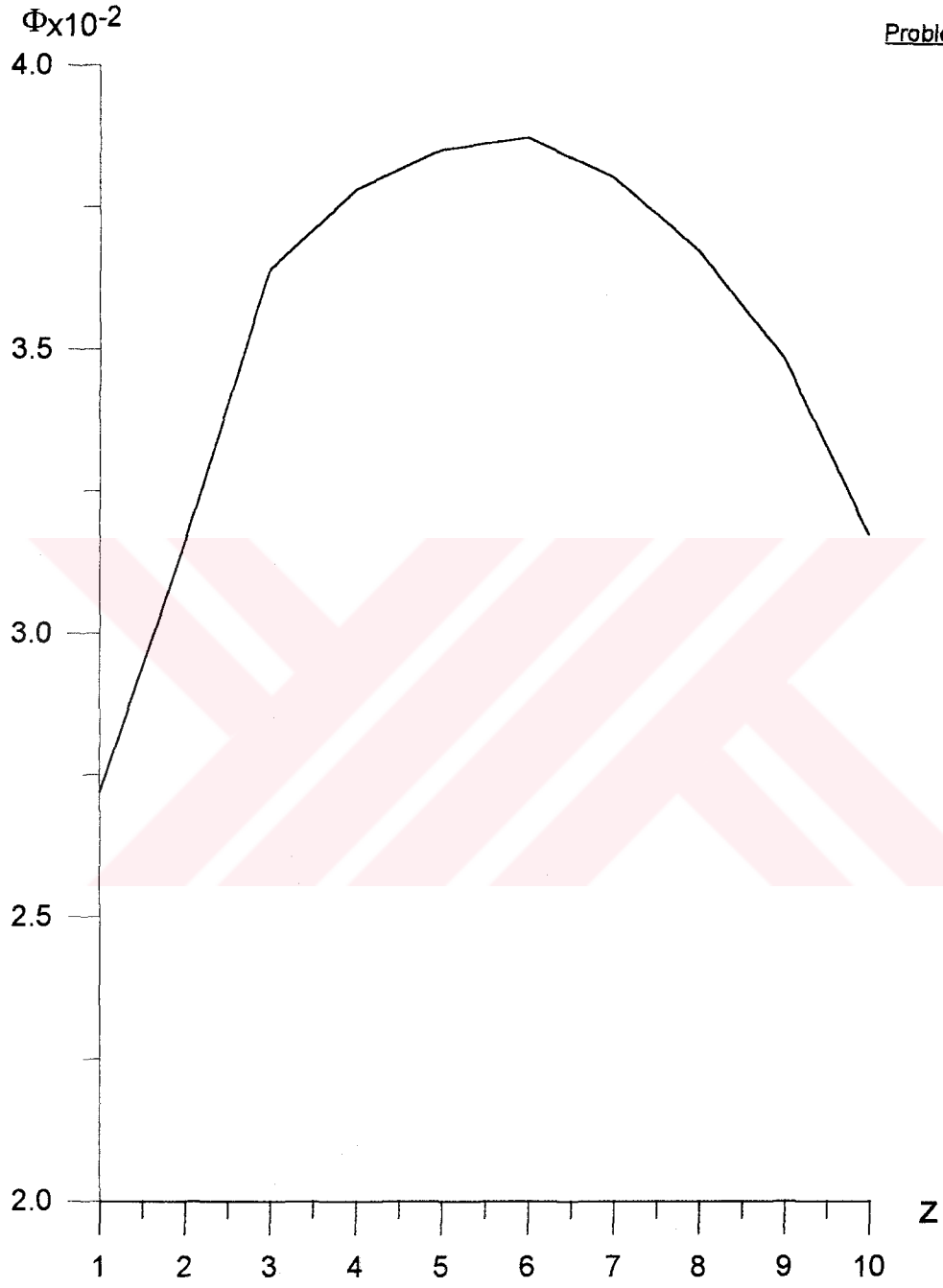
Şekil A.12. (r-z) geometride skaler akının üst sınır boyunca değişimi
(Gauss - Legendre)



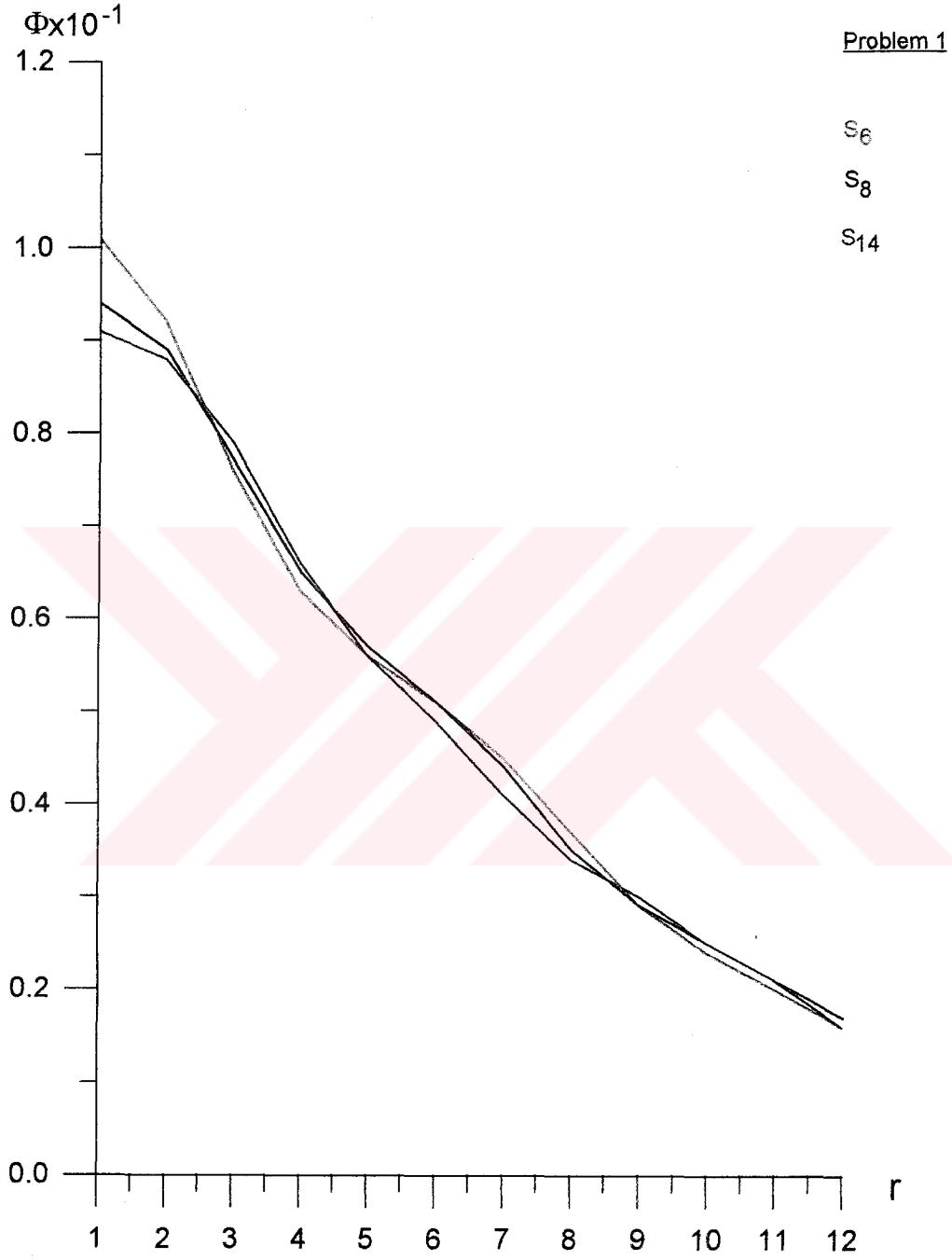
Şekil A.13. (r-z) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi
(Gauss - Chebyshev)



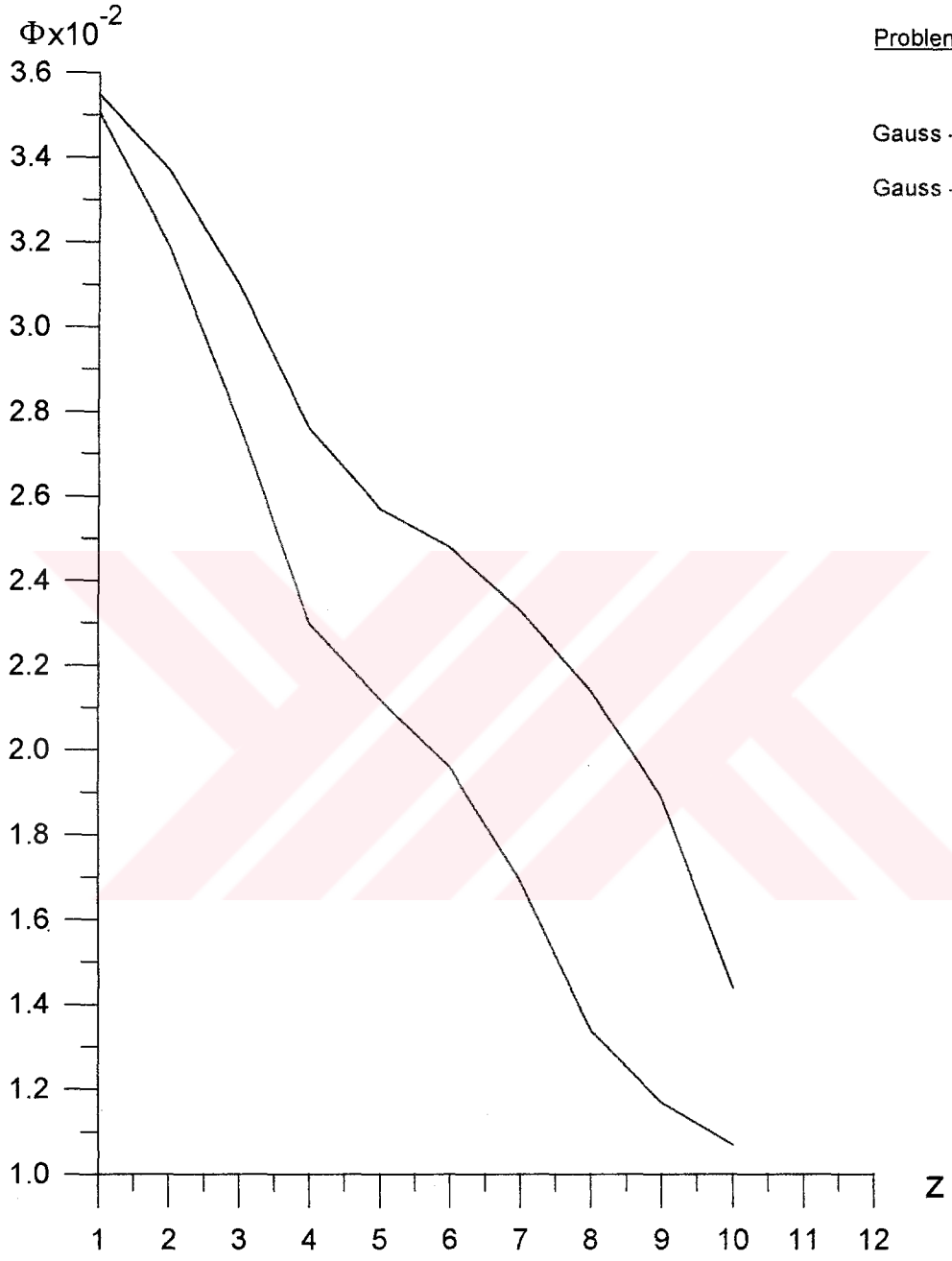
Şekil A.14. (r-z) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi
(Gauss - Chebyshev)



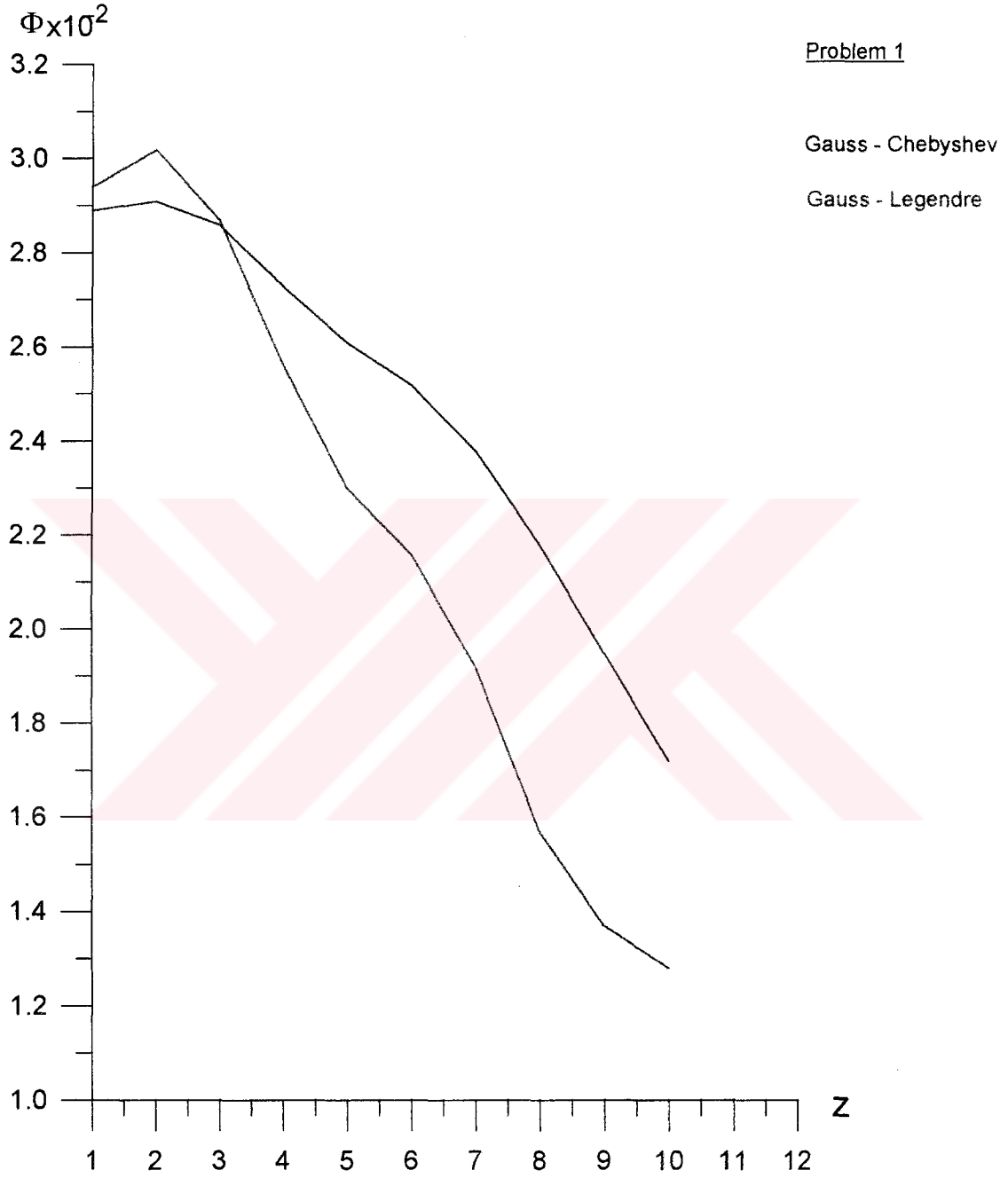
Şekil A.15. (r-z) geometride S_2 yaklaşımı (Gauss - Chebyshev)



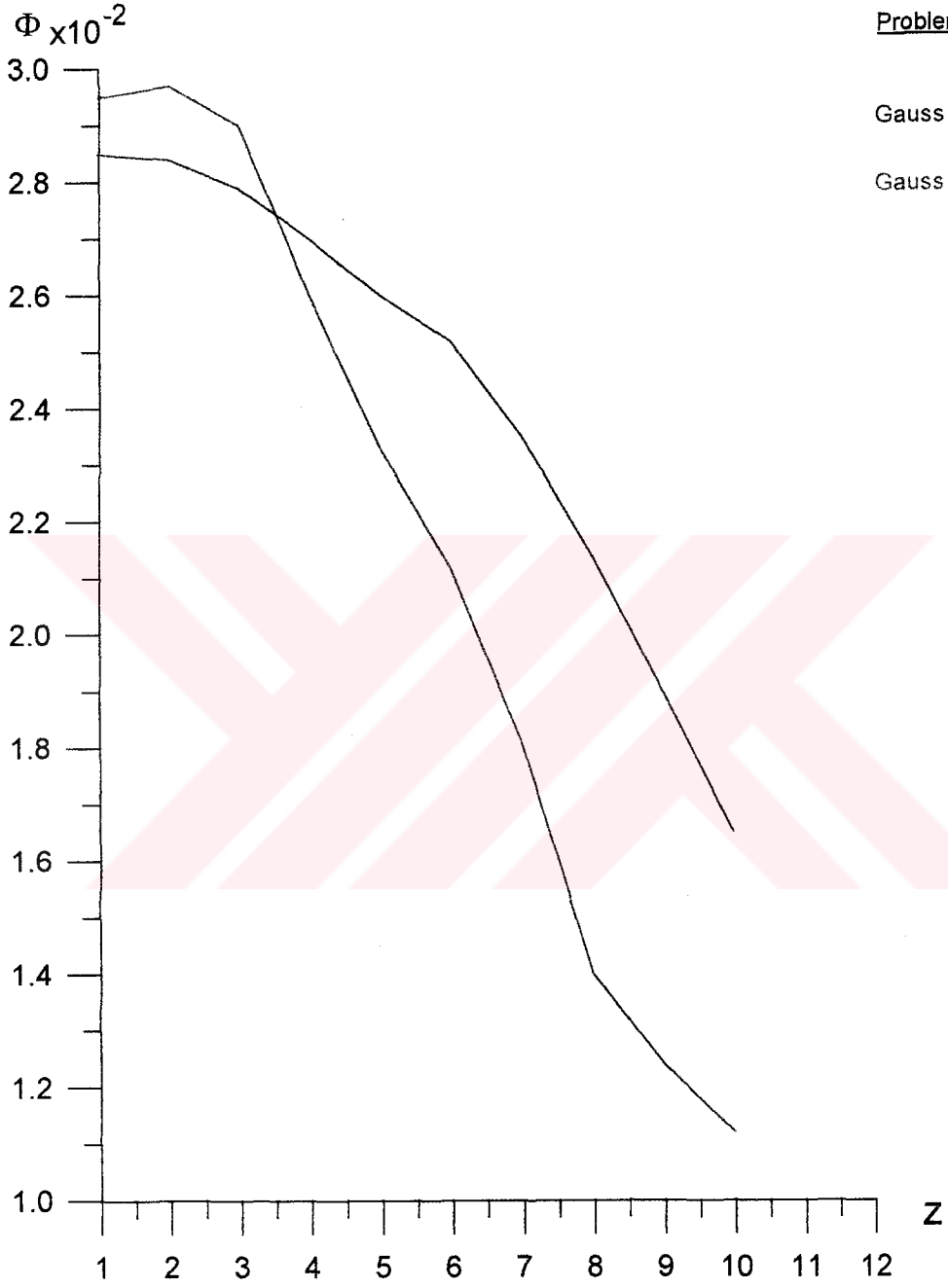
Şekil A.16. (r-z) geometride skaler akının üst sınır boyunca değişimi
(Gauss - Chebyshev)



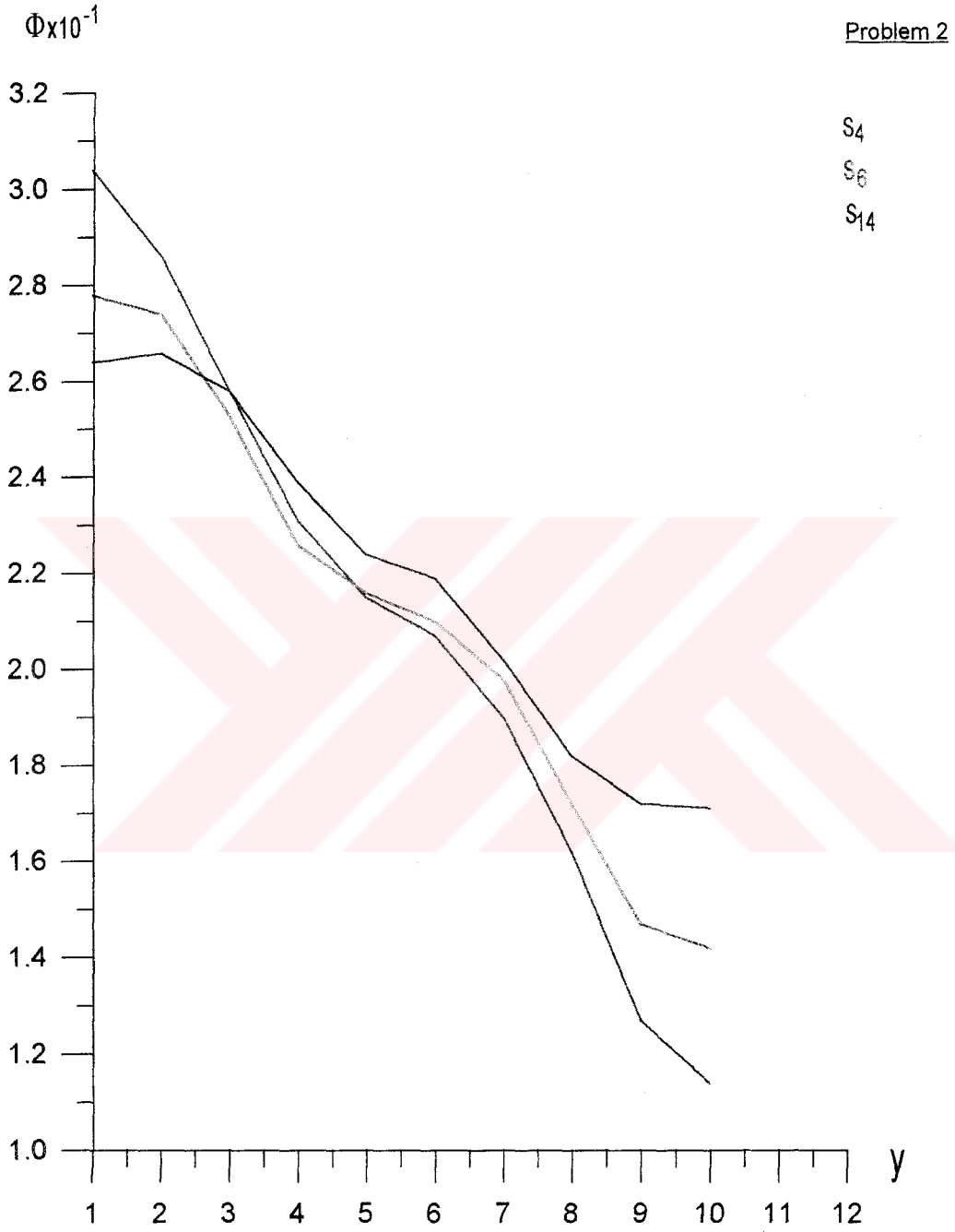
Şekil A.17. (r-z) geometride iki kuadraturün S_4 yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır)



Şekil A.18. (r-z) geometride iki kuadratürün S_{10} yaklaşımlarının karşılaştırılması
(sağ sınır)

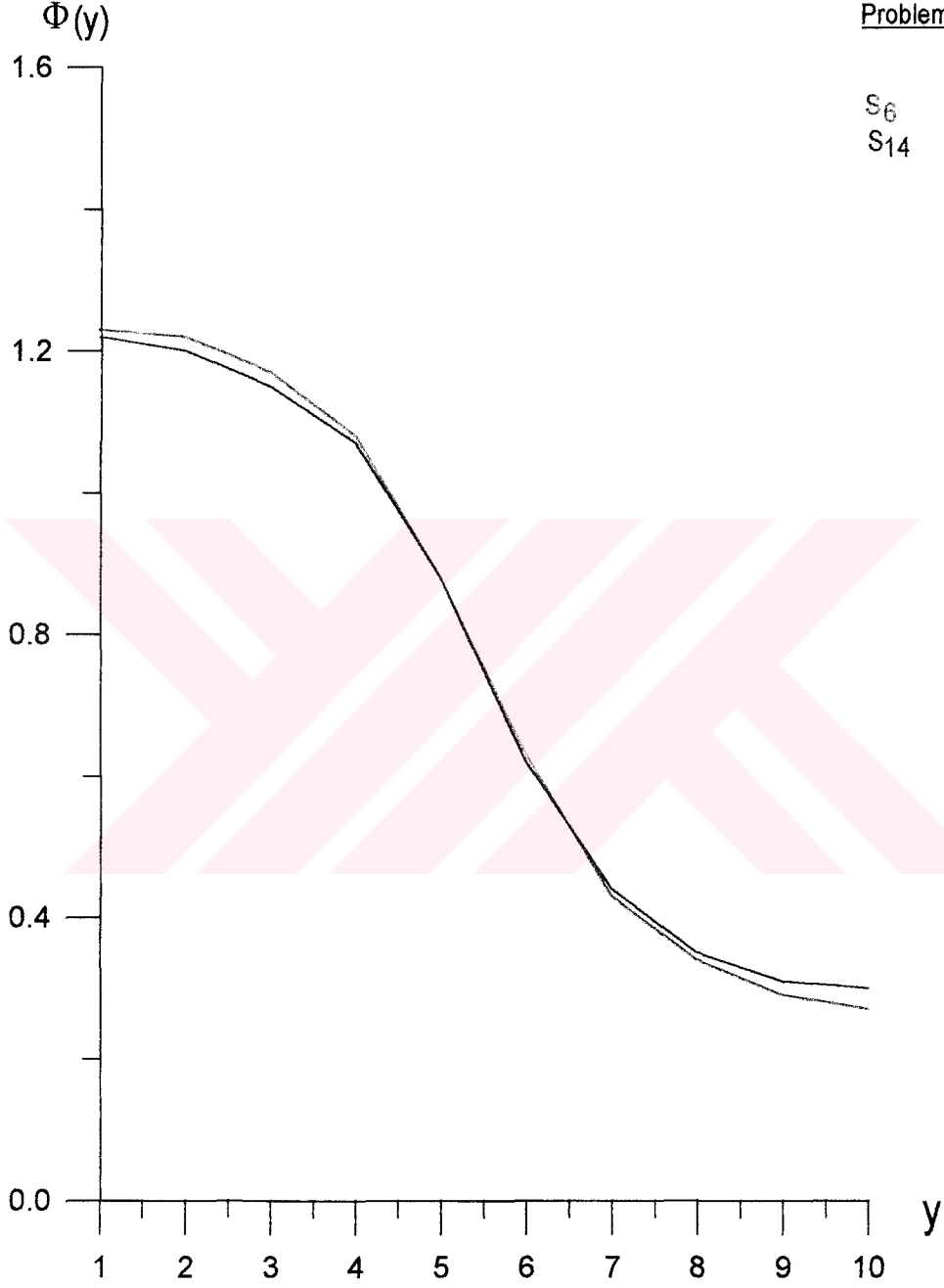


ŞekilA.19. (r-z) geometride iki kuadratürün S_{14} yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır)

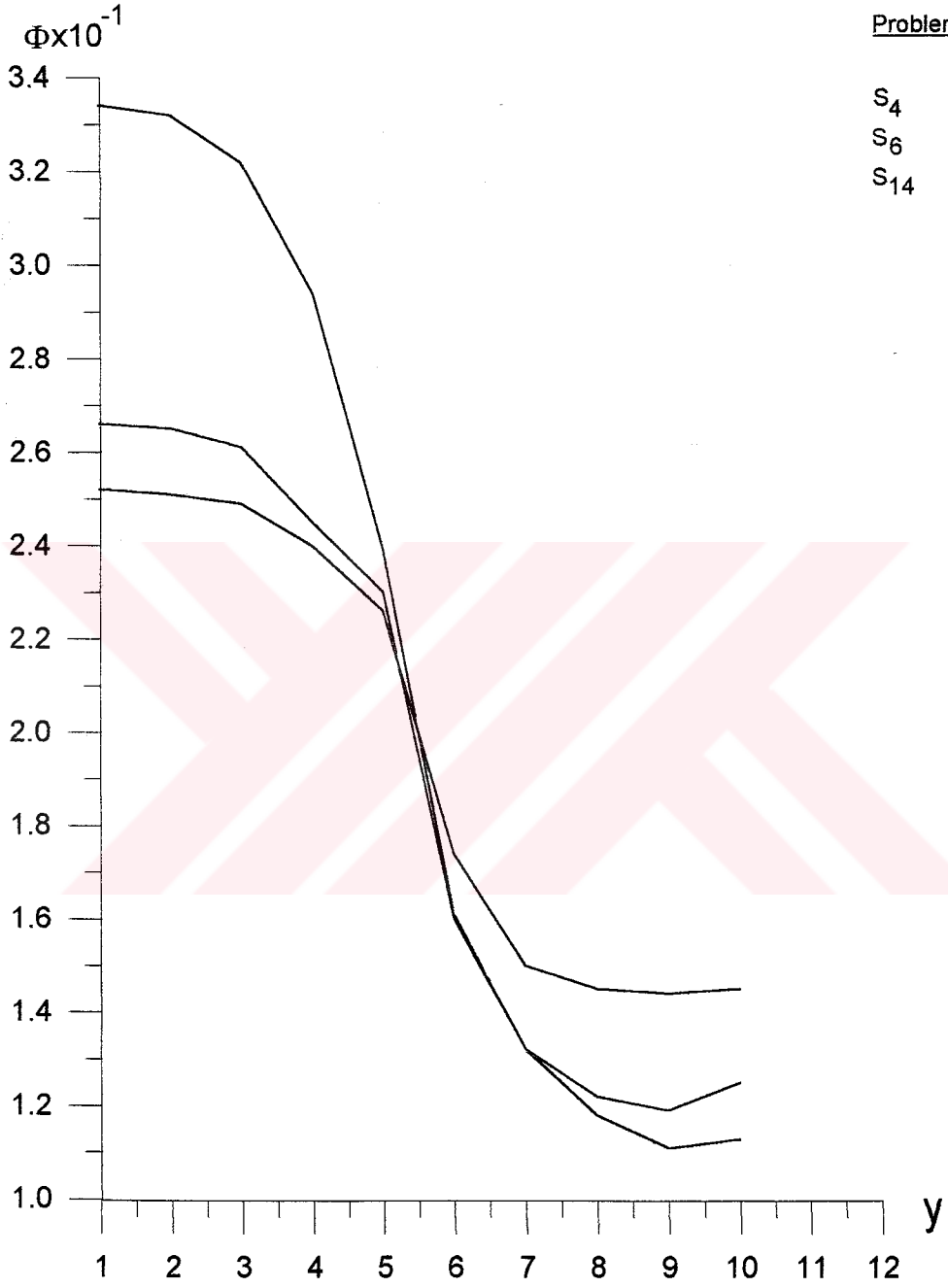


Şekil A.20. (x-y) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi
(Gauss - Legendre)

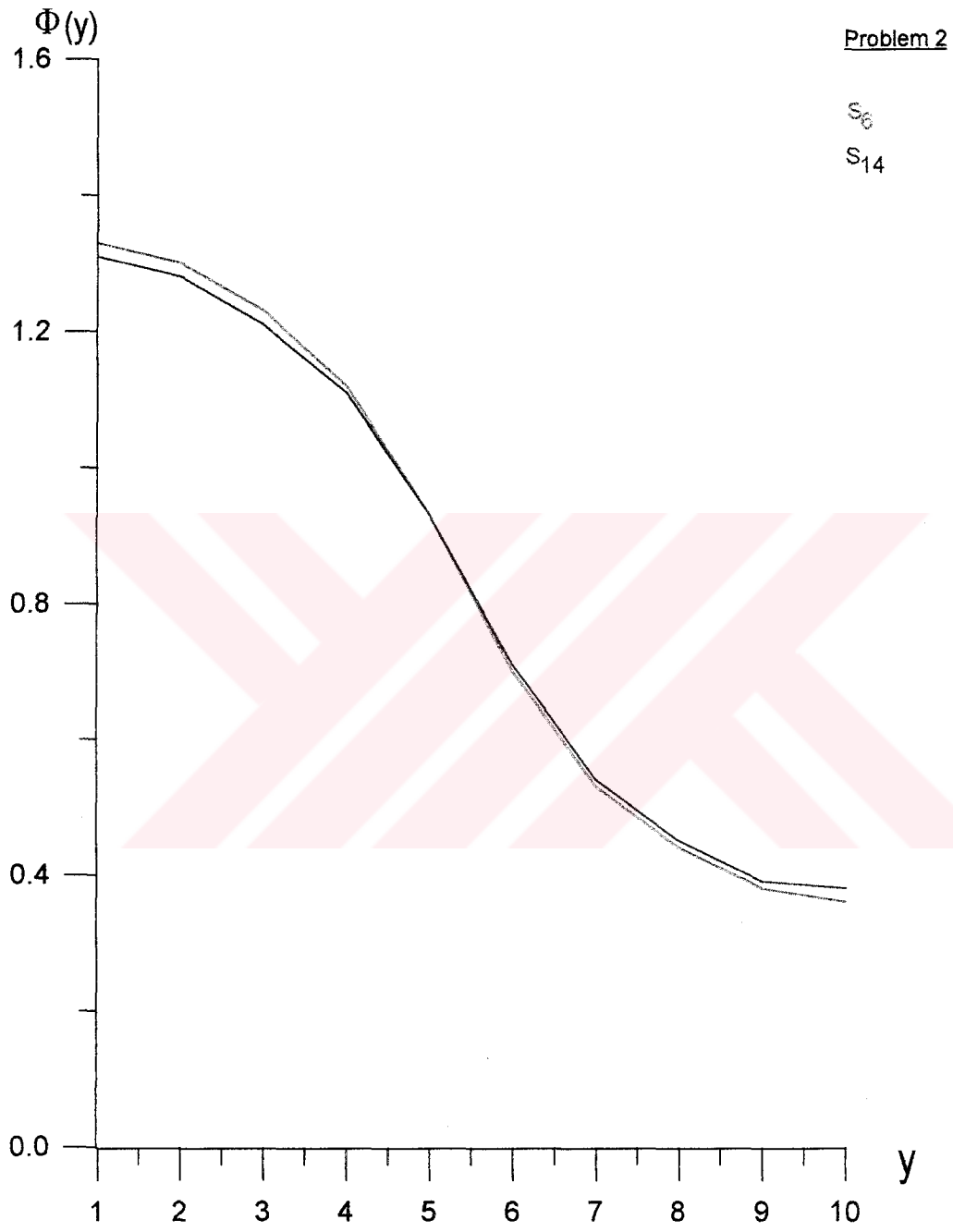
Problem 2



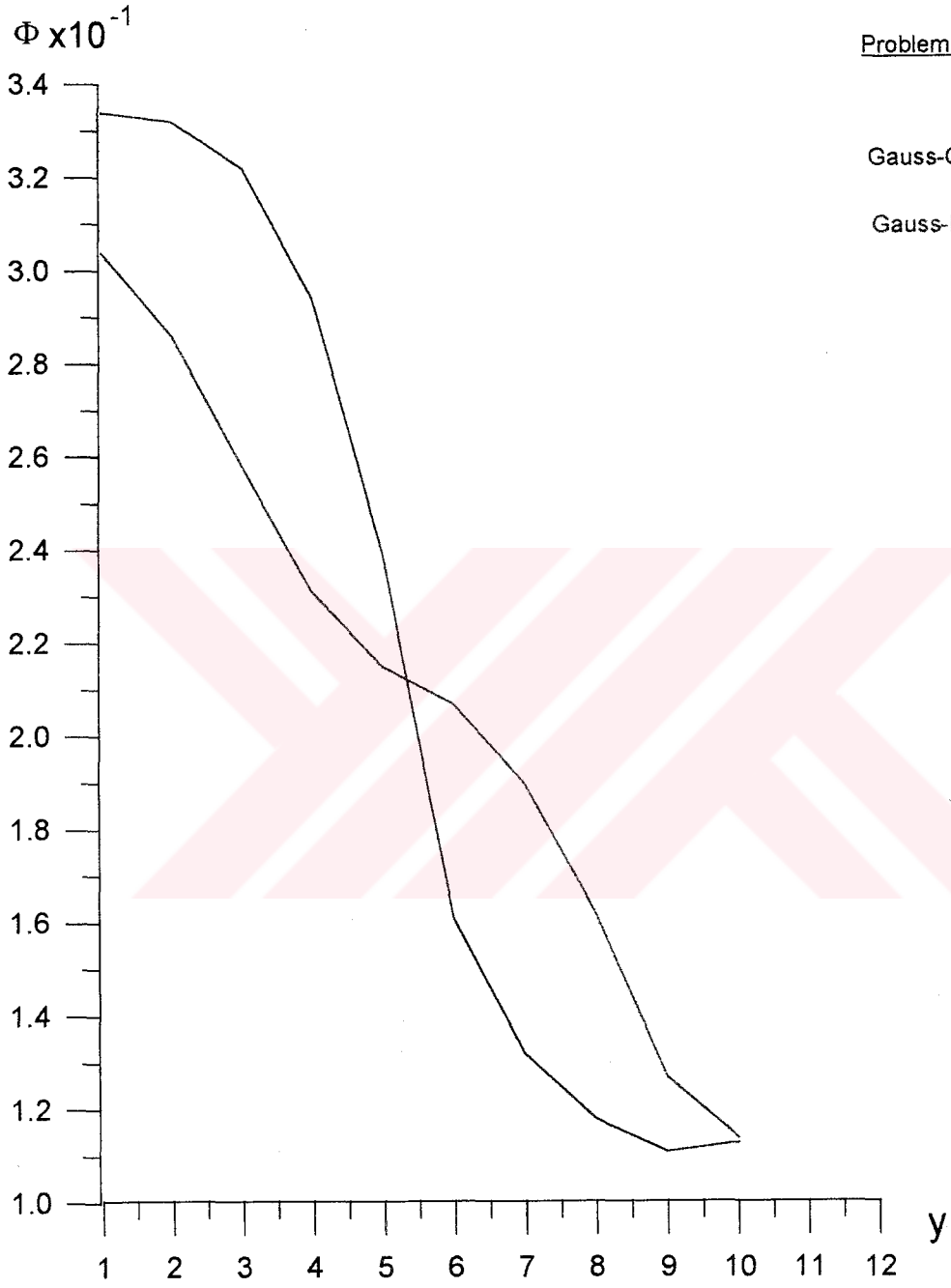
Şekil A.21. (x-y) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi
(Gauss - Legendre)



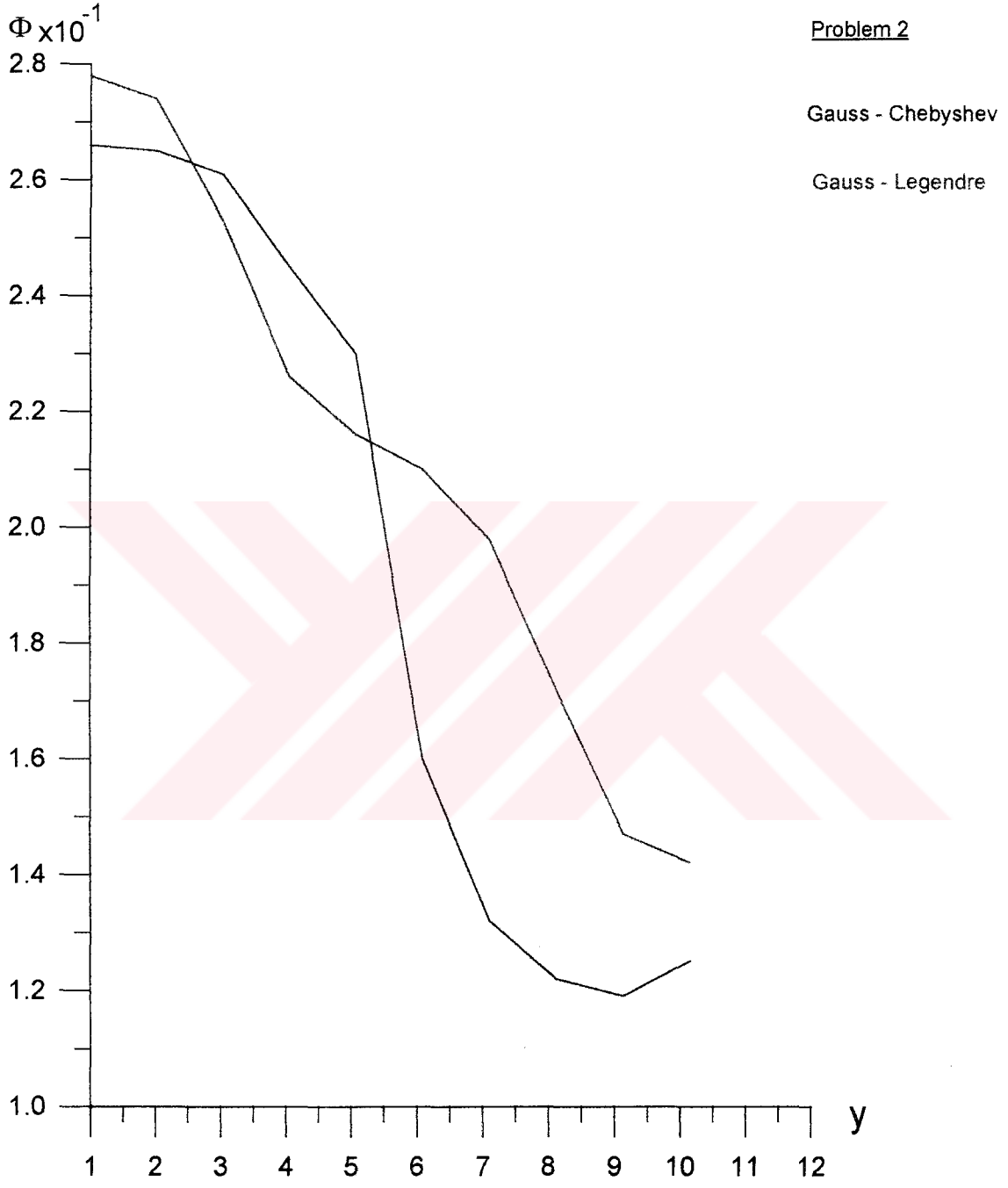
Şekil A.22. (x-y) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi
(Gauss - Chebyshev)



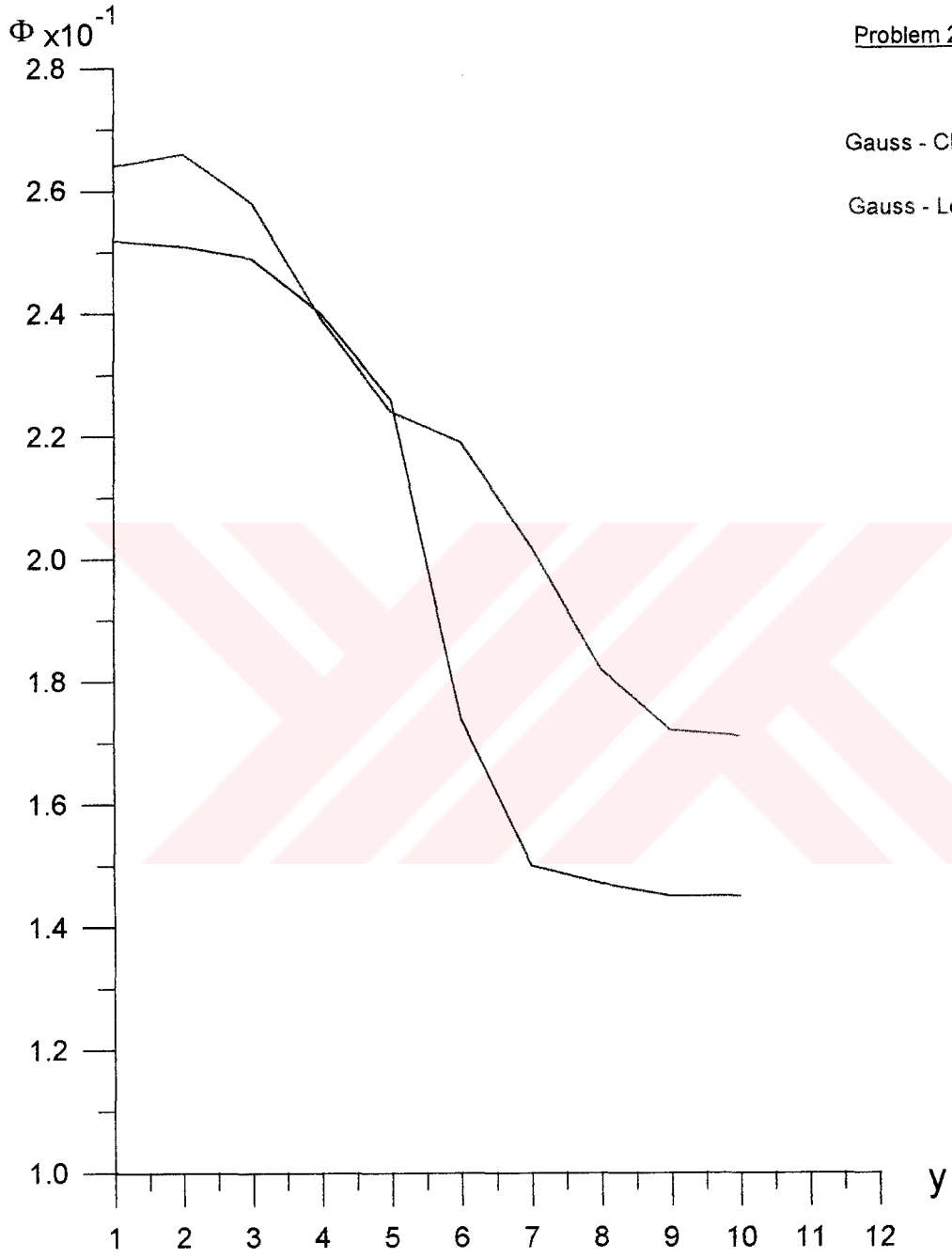
Şekil A.23. (x-y) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi
(Gauss - Chebyshev)



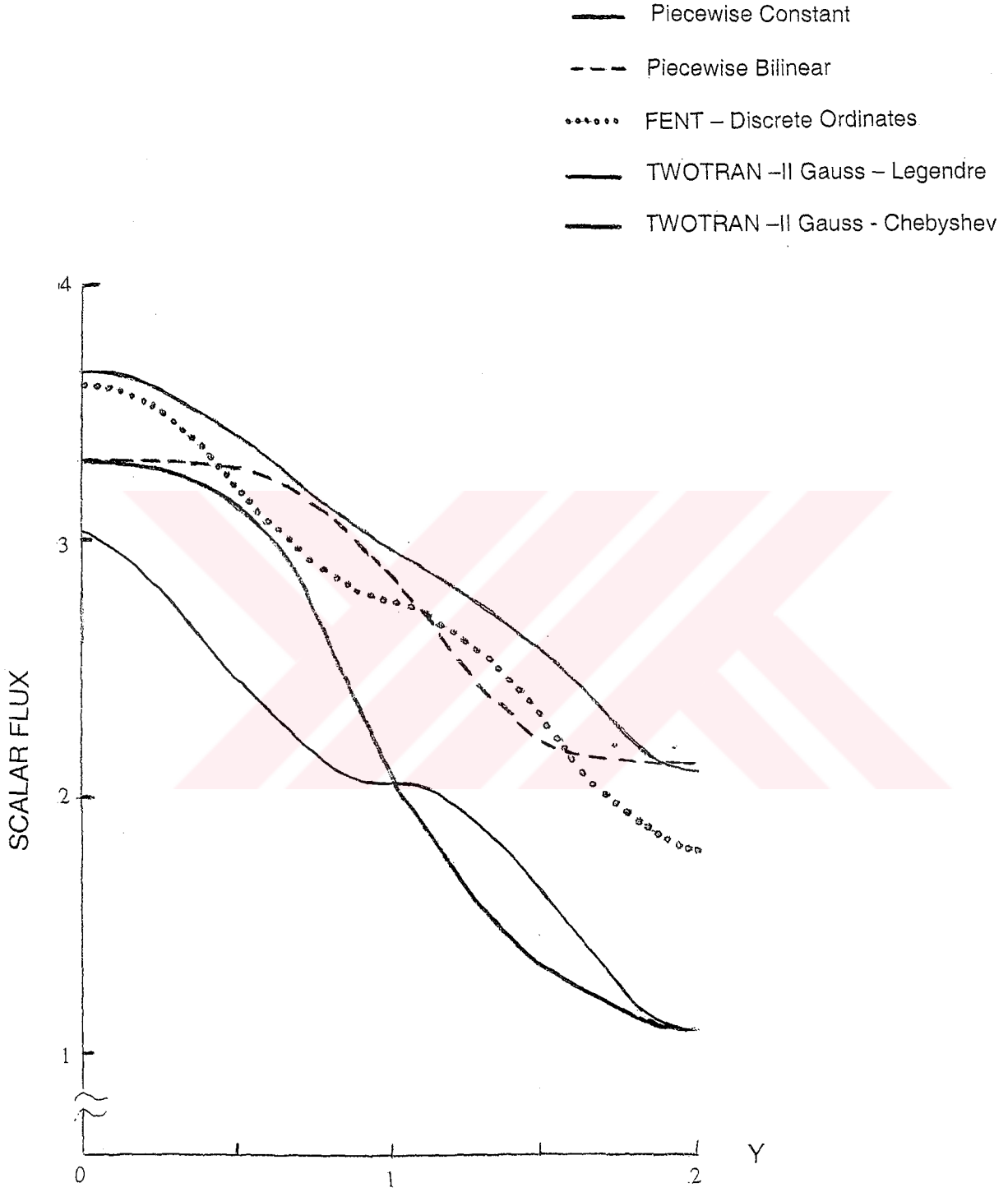
Şekil A.24. (x-y) geometride iki kuadratürün s_4 yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır)



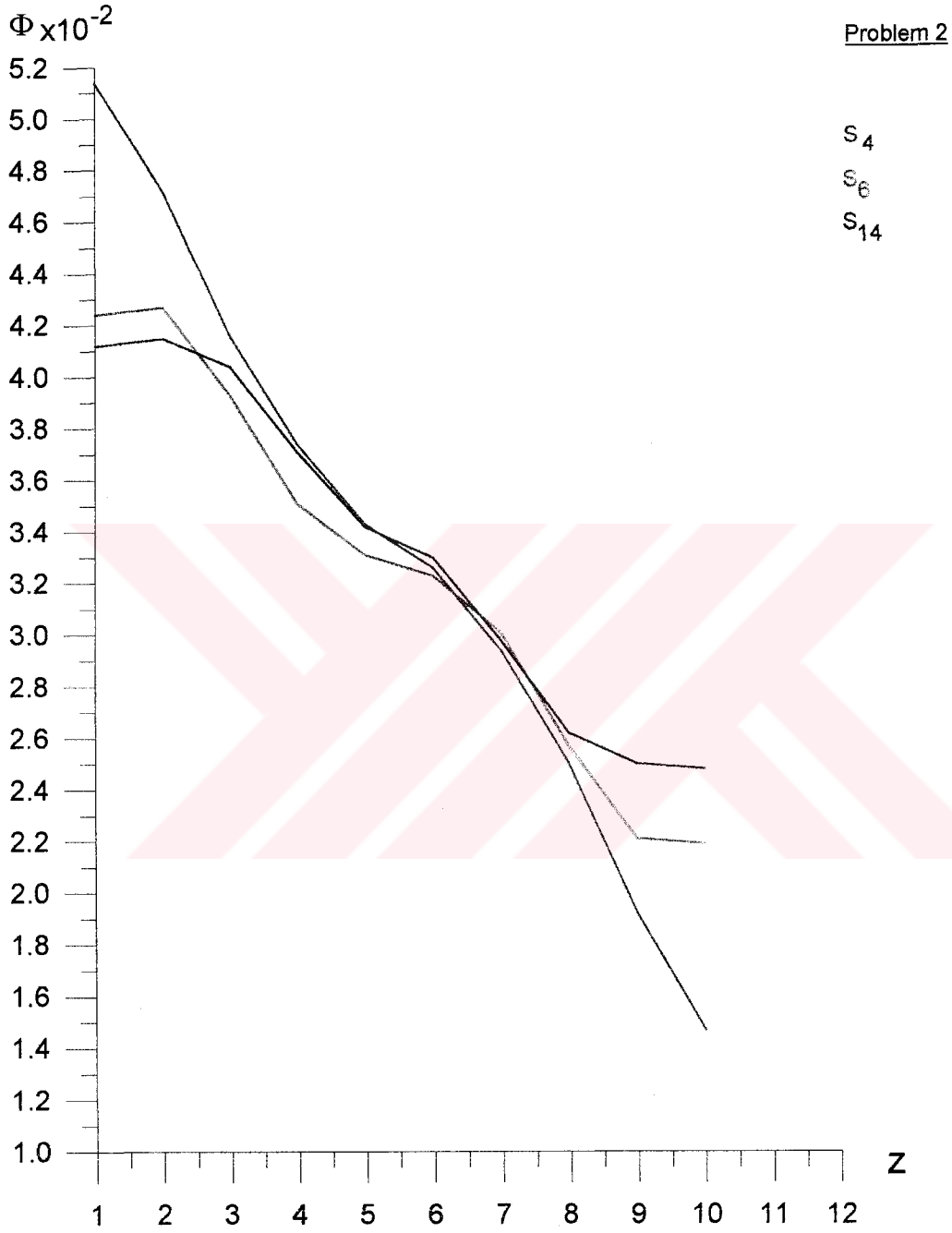
Şekil A.25. (x-y) geometride iki kuadraturün S_8 yaklaşımlarının karşılaştırılması
(sağ sınır)



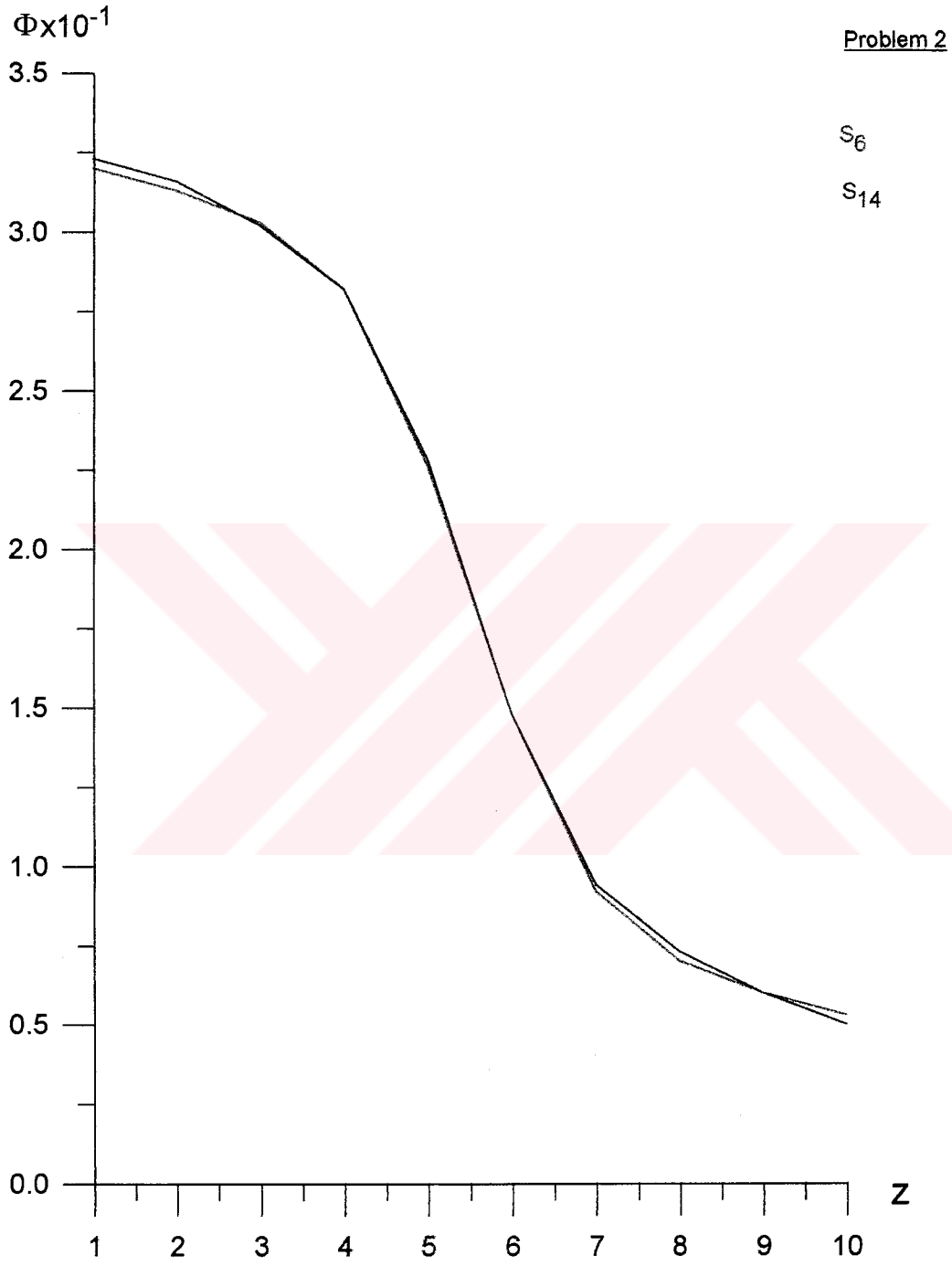
Şekil A.26. (x-y) geometride iki kuadraturün S_{14} yaklaşımlarının karşılaştırılması
(sağ sınır)



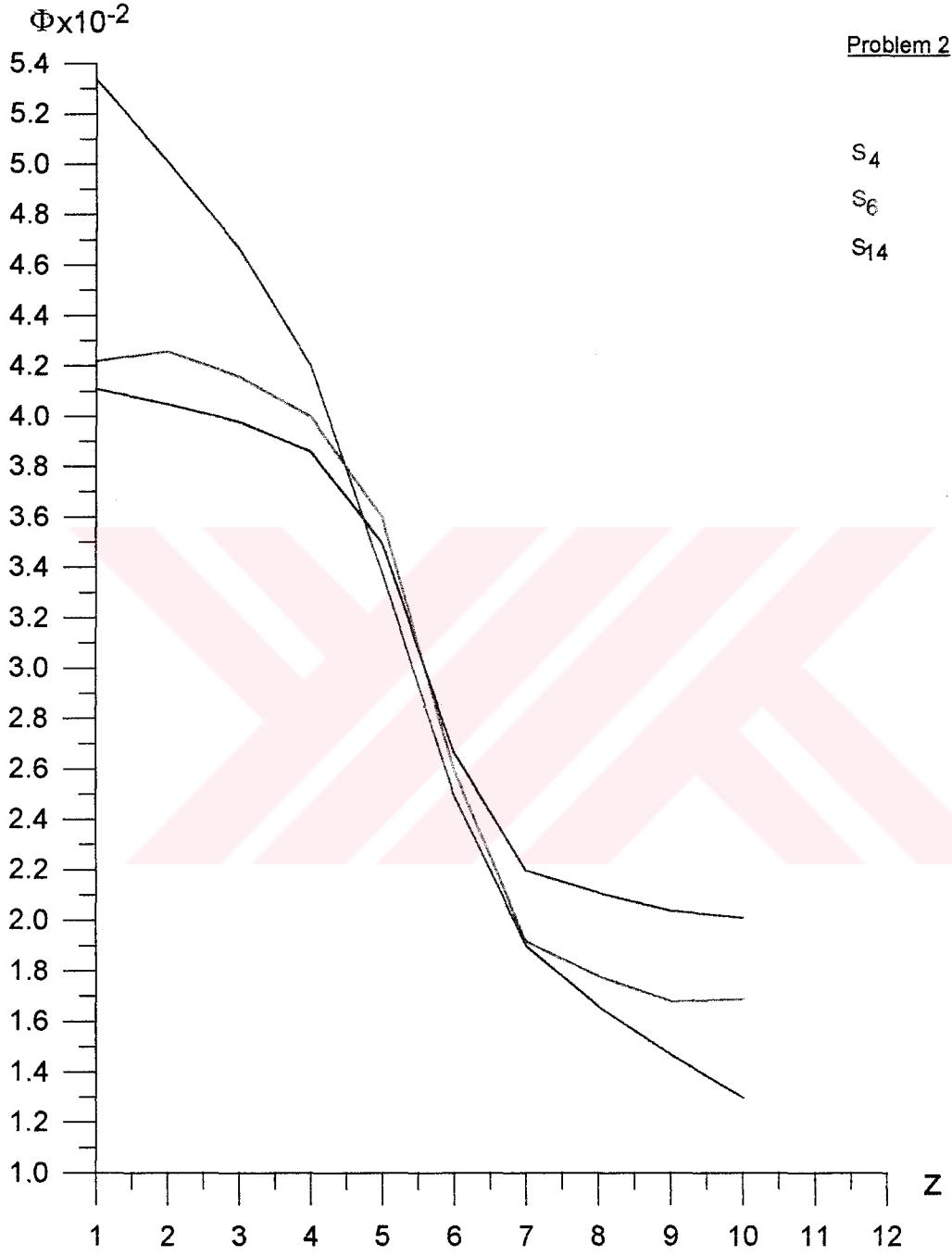
Şekil A.27. (x-y) geometride TWOTRAN II ve FENT kodlarının S_4 yaklaşımı için karşılaştırılması (Problem 2) [18]



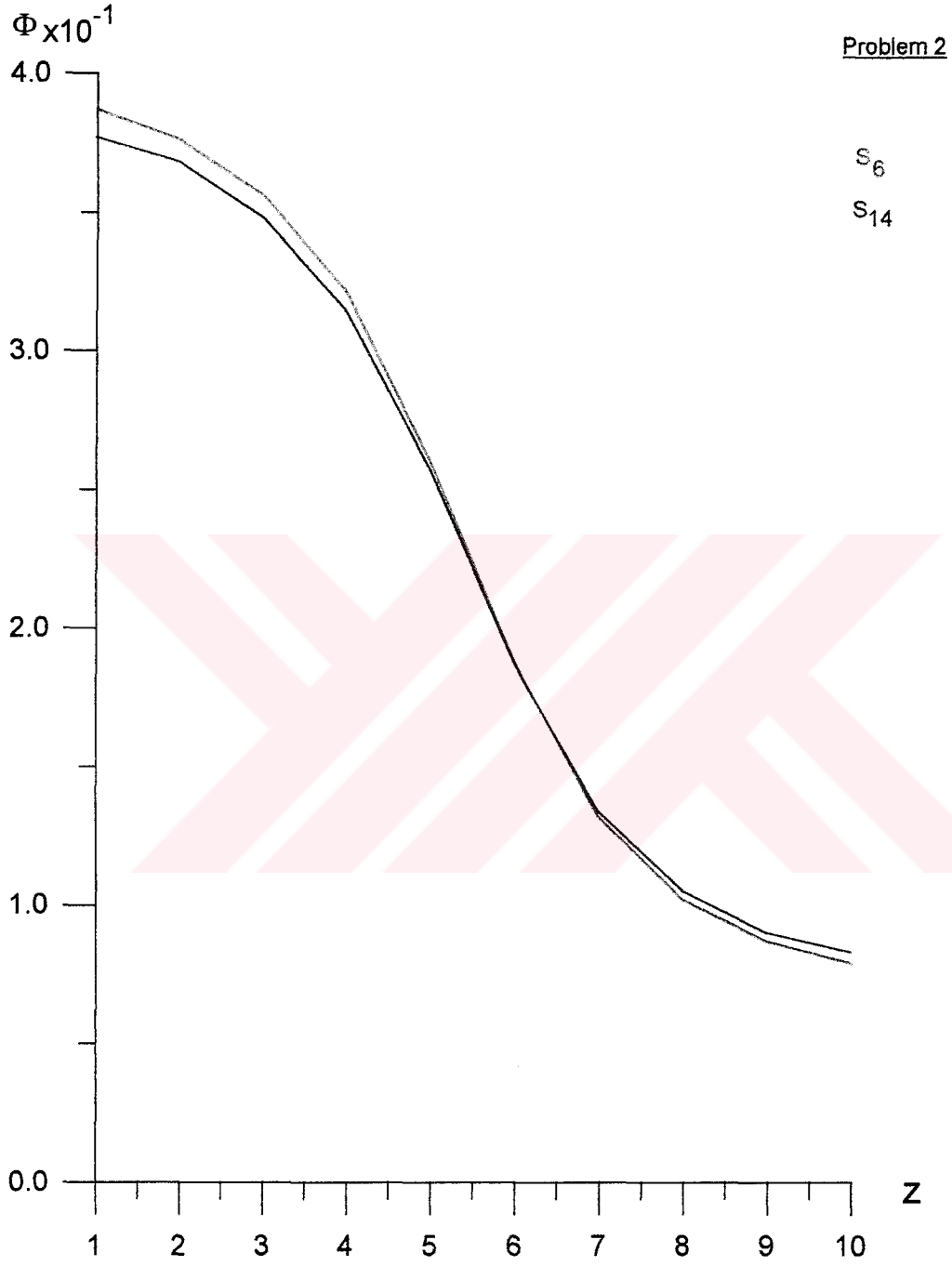
Şekil A.28. (r-z) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi
(Gauss - Legendre)



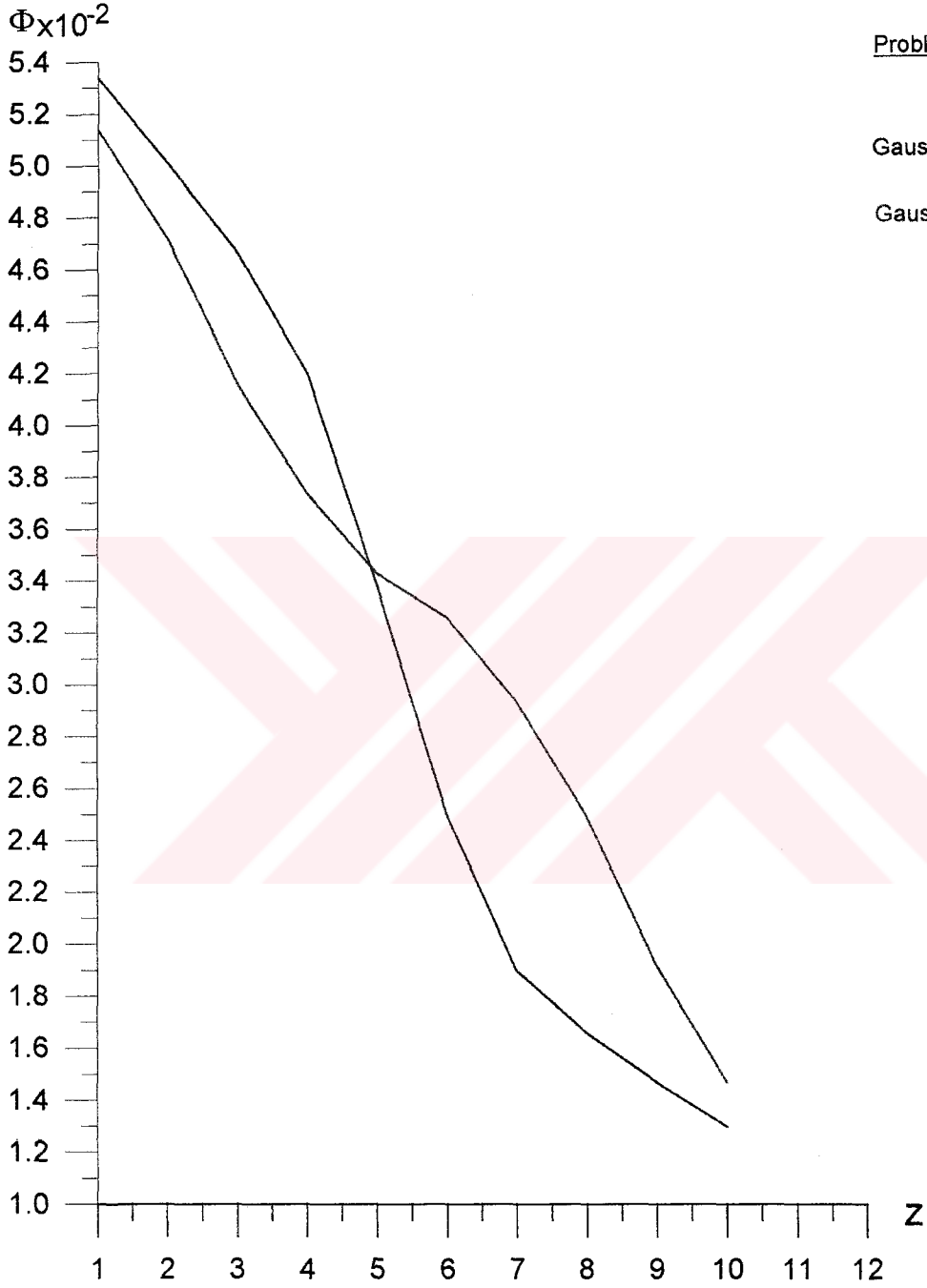
Şekil A.29. (r-z) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi
(Gauss - Legendre)



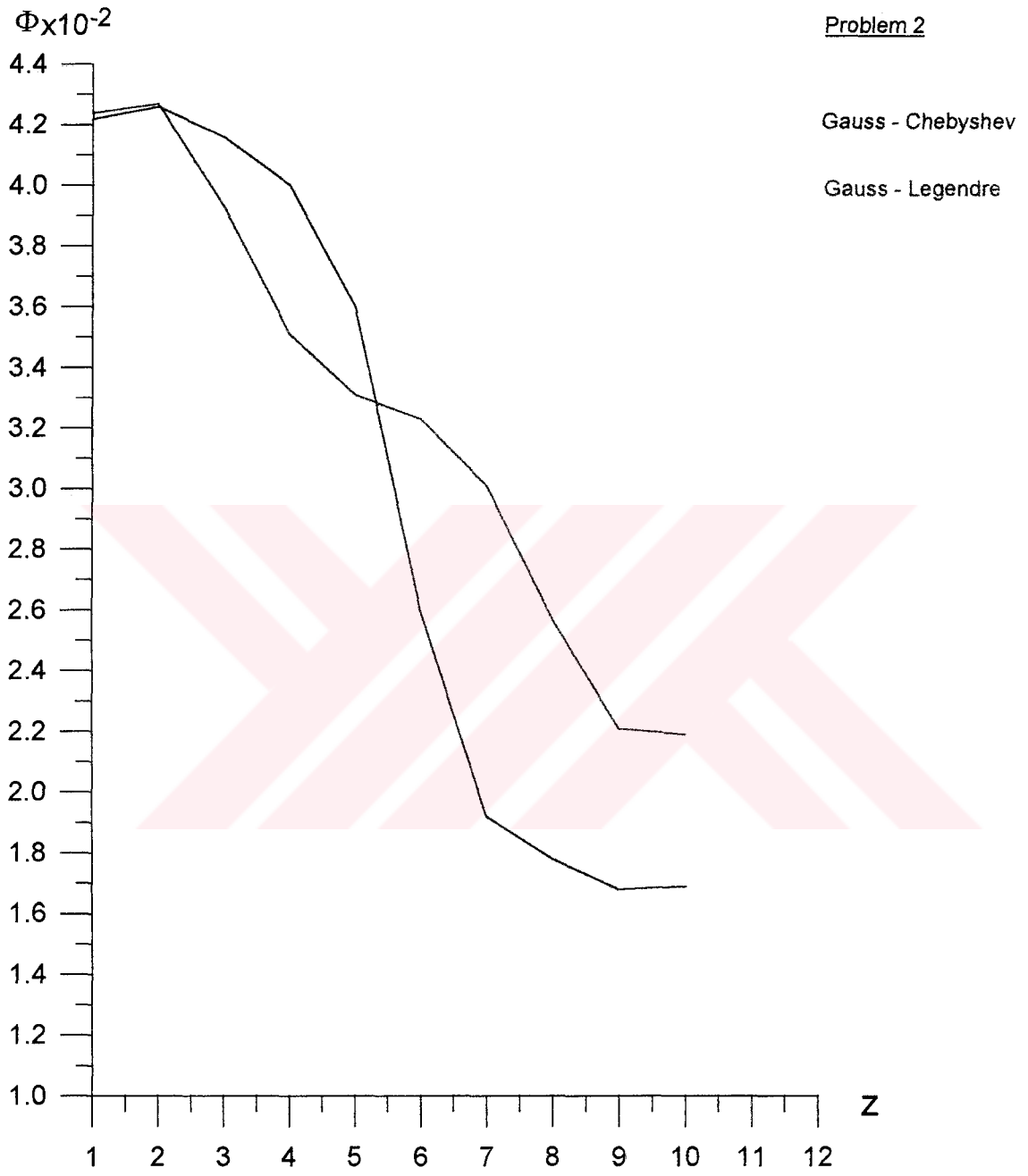
Şekil A.30. (r-z) geometride skaler akının sağ sınır boyunca değişimi
(Gauss - Chebyshev)



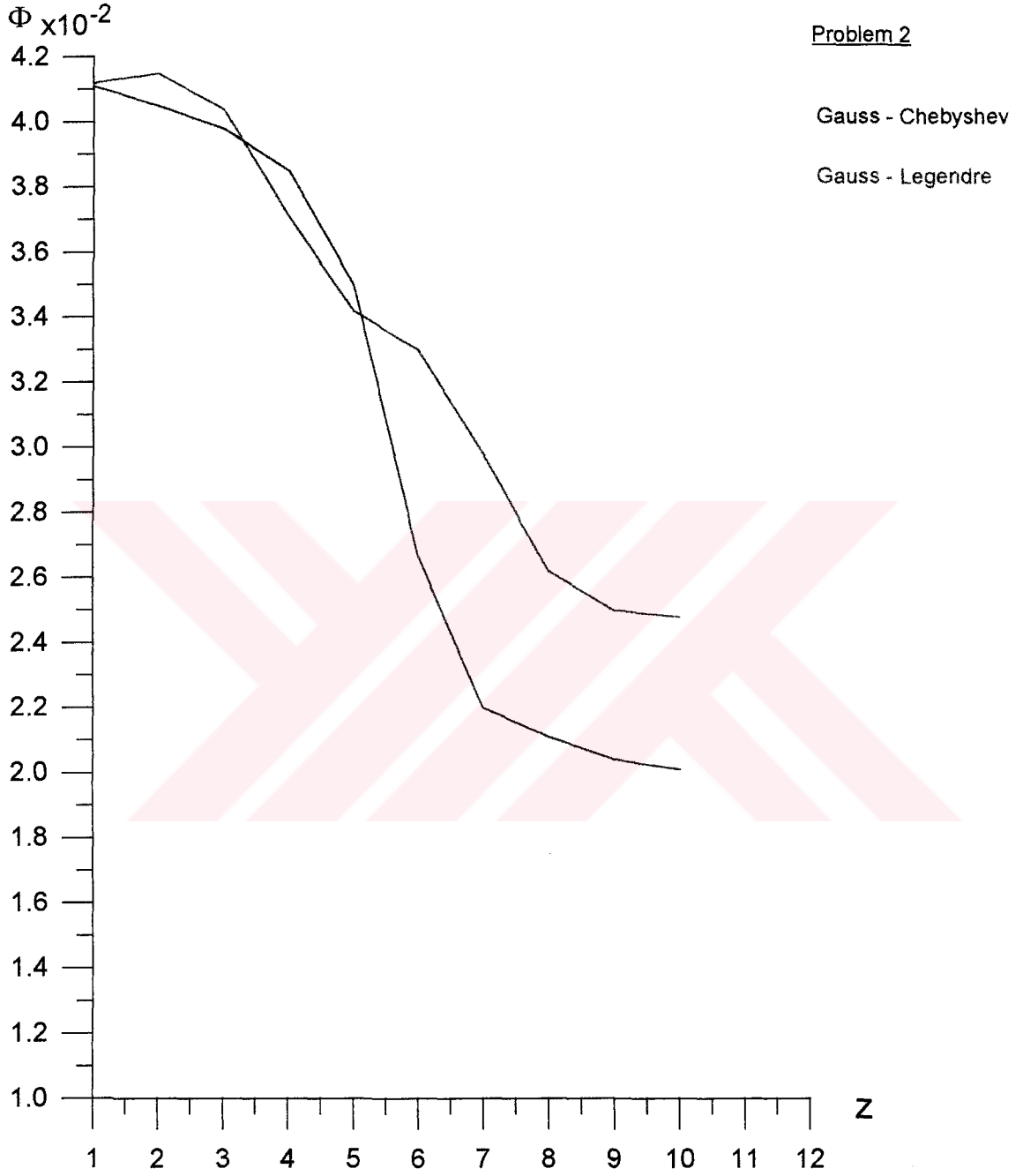
Şekil A.31. (r-z) geometride skaler akının sol sınır boyunca değişimi
(Gauss - Chebyshev)



Şekil A.32. (r-z) geometride iki kuadratürün s_4 yaklaşımlarının karşılaştırılması
(sağ sınır)



Şekil A.33. (r-z) geometride iki kuadraturün S_6 yaklaşımlarının karşılaştırılması
(sağ sınır)



Şekil A.34. (r-z) geometride iki kuadratürün s_{14} yaklaşımlarının karşılaştırılması (sağ sınır)

EK B

KÜRESEL HARMONİKLER

Normalize küresel harmonikler aşağıdaki gibi tanımlanırlar [9]:

$$Y_{lm}(\vec{\Omega}) = C_{lm}^{1/2} P_l^m(\mu) e^{i\omega m} \quad (\text{B.1})$$

Burada,

$$C_{lm} \equiv \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \quad \text{ve} \quad \mu \equiv \text{Cos}\theta \quad \text{dir (Şekil A.1).}$$

Açıkça görüldüğü gibi $Y_{lm}(\vec{\Omega})$ ifadesinin kompleks konjügesi aşağıdaki gibi verilir:

$$Y_{l,-m}(\vec{\Omega}) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vec{\Omega}) \quad (\text{B.2})$$

Küresel harmonikler aşağıda verilen ortonormal koşulu sağlarlar:

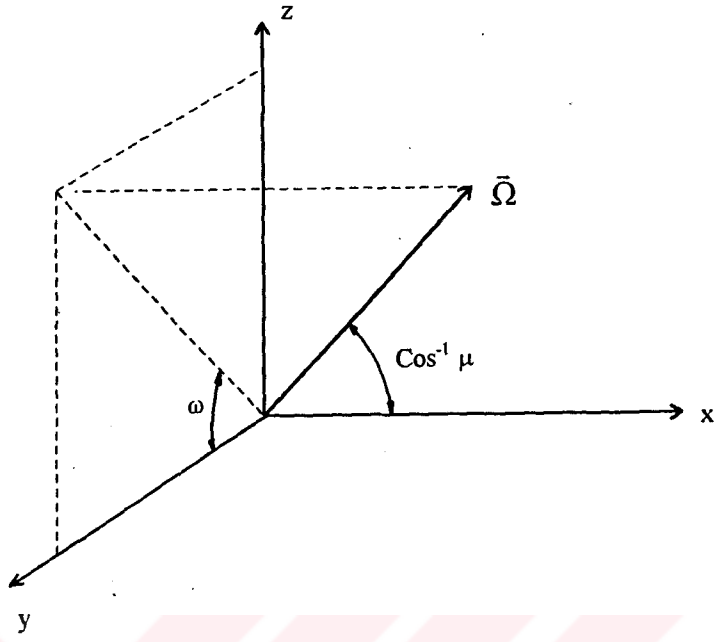
$$\int d\vec{\Omega} Y_{lm}(\vec{\Omega}) Y_{l'm'}^*(\vec{\Omega}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Yukarıdaki bağıntıda görülen $Y_{lm}(\vec{\Omega})$ aşağıda verildiği gibi reel, sinüs ve kosinüs serilerine ayrılabilir:

$$Y_{lm}(\vec{\Omega}) = Y_{lm}^e(\vec{\Omega}) + i Y_{lm}^o(\vec{\Omega})$$

$$Y_{lm}^e(\vec{\Omega}) = C_{lm}^{1/2} P_l^m(\mu) \text{Cos}(m\omega) \quad (\text{B.3})$$

$$Y_{lm}^o(\vec{\Omega}) = C_{lm}^{1/2} P_l^m(\mu) \text{Sin}(m\omega)$$



Şekil B.1. Küresel harmonikleri tanımlamak için koordinat sistemi.

EK C

LEGENDRE POLİNOMLARI

Legendre polinomları, $(-1, +1)$ aralığında tanımlanmış, aşağıdaki bağıntılarla verilen ortogonal polinomlardır.

$$P_0(x)=1$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (X^2 - 1)^n, \quad n=1,2,\dots \quad (C.1)$$

Ortogonalite özellikleri (C.2) eşitliği ile verilir.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1} \quad (C.2)$$

Burada δ_{mn} Kronecker deltadır ve aşağıdaki gibi tanımlanır [13, 27].

$$\delta_{mn} \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Legendre polinomlarının genel recurrence bağıntısı [24],

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} xP_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad (C.3)$$

olarak verilir. Buna göre,

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2} (3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2} (5x^3-3x)$$

olarak hesaplanır.

EK D

ASSOCIATED LEGENDRE FONKSİYONLARI

Associated Legendre fonksiyonu, $P_l^m(x)$, aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \quad (D.1)$$

Burada görüldüğü gibi, $P_l^0(x) = P_l(x)$ dir. $P_l(x)$ de, (B.2) bağıntısı ile Ek B.'de verilmişti. Buna göre,

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (D.2)$$

yazılabilir.

Yukarıdaki eşitlik, ayrıca $|m| \leq l$ olmak üzere,

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^m(x) \quad (D.3)$$

olarak da tanımlanabilmektedir [13, 41]

Associated Legendre fonksiyonlarının ortogonalite özelliği,

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (D.4)$$

bağıntısı ile verilir.

EK E

MATHEMATICA PROGRAMI İLE HESAPLANAN f_{lmn} SONUÇLARI

```
f1 := N[Integrate[(LegendreP[l, m, x] * ChebyshevT[n, x]) / Sqrt[1 - x^2], {x, -1, 1}]]
```

```
f2 := NIntegrate[(LegendreP[l, m, x] * ChebyshevT[n, x]) / Sqrt[1 - x^2], {x, -1, 1}]
```

```
Do[If[f1 != 0, Print["l=", l, " m=", m, " n=", n, " f1=", f1, " f2=", f2]],  
{l, 0, 10}, {m, 0, 1}, {n, 0, 10}]
```

l=0	m=0	n=0	f1=3.14159	f2=3.14159
l=1	m=0	n=1	f1=1.5708	f2=1.5708
l=1	m=1	n=0	f1=-2.	f2=-2.
l=1	m=1	n=2	f1=0.666667	f2=0.666667
l=1	m=1	n=4	f1=0.133333	f2=0.133333
l=1	m=1	n=6	f1=0.0571429	f2=0.0571429
l=1	m=1	n=8	f1=0.031746	f2=0.031746
l=1	m=1	n=10	f1=0.020202	f2=0.020202
l=2	m=0	n=0	f1=0.785398	f2=0.785398
l=2	m=0	n=2	f1=1.1781	f2=1.1781
l=2	m=1	n=1	f1=-2.	f2=-2.
l=2	m=1	n=3	f1=1.2	f2=1.2
l=2	m=1	n=5	f1=0.285714	f2=0.285714
l=2	m=1	n=7	f1=0.133333	f2=0.133333
l=2	m=1	n=9	f1=0.0779221	f2=0.0779221
l=2	m=2	n=0	f1=4.71239	f2=4.71239
l=2	m=2	n=2	f1=-2.35619	f2=-2.35619
l=3	m=0	n=1	f1=0.589049	f2=0.589049
l=3	m=0	n=3	f1=0.981748	f2=0.981748
l=3	m=1	n=0	f1=-2.	f2=-2.
l=3	m=1	n=2	f1=-2.	f2=-2.

l=3	m=1	n=4	f1=1.65714	f2=1.65714
l=3	m=1	n=6	f1=0.438095	f2=0.438095
l=3	m=1	n=8	f1=0.21645	f2=0.21645
l=3	m=1	n=10	f1=0.131202	f2=0.131202
l=3	m=2	n=1	f1=5.89049	f2=5.89049
l=3	m=2	n=3	f1=-5.89049	f2=-5.89049
l=3	m=3	n=0	f1=-20.	f2=-20.
l=3	m=3	n=2	f1=12.	f2=12.
l=3	m=3	n=4	f1=-1.71429	f2=-1.71429
l=3	m=3	n=6	f1=-0.190476	f2=-0.190476
l=3	m=3	n=8	f1=-0.0519481	f2=-0.0519481

apt3.nb

l=3	m=3	n=10	f1=-0.01998	f2=-0.01998
l=4	m=0	n=0	f1=0.441786	f2=0.441786
l=4	m=0	n=2	f1=0.490874	f2=0.490874
l=4	m=0	n=4	f1=0.859029	f2=0.859029
l=4	m=1	n=1	f1=-2.	f2=-2.
l=4	m=1	n=3	f1=-2.	f2=-2.
l=4	m=1	n=5	f1=2.06349	f2=2.06349
l=4	m=1	n=7	f1=0.585859	f2=0.585859
l=4	m=1	n=9	f1=0.301698	f2=0.301698
l=4	m=2	n=0	f1=8.83573	f2=8.83573
l=4	m=2	n=2	f1=5.89049	f2=5.89049
l=4	m=2	n=4	f1=-10.3084	f2=-10.3084
l=4	m=3	n=1	f1=-28.	f2=-28.
l=4	m=3	n=3	f1=36.	f2=36.
l=4	m=3	n=5	f1=-6.66667	f2=-6.66667
l=4	m=3	n=7	f1=-0.848485	f2=-0.848485
l=4	m=3	n=9	f1=-0.251748	f2=-0.251748
l=4	m=4	n=0	f1=123.7	f2=123.7
l=4	m=4	n=2	f1=-82.4668	f2=-82.4668

l=4	m=4	n=4	f1=20.6167	f2=3.8254421120×10 ¹⁷³²
l=5	m=0	n=1	f1=0.368155	f2=0.368155
l=5	m=0	n=3	f1=0.429515	f2=0.429515
l=5	m=0	n=5	f1=0.773126	f2=0.773126
l=5	m=1	n=0	f1=-2.	f2=-2.
l=5	m=1	n=2	f1=-2.	f2=-2.
l=5	m=1	n=4	f1=-2.	f2=-2.
l=5	m=1	n=6	f1=2.4329	f2=2.4329
l=5	m=1	n=8	f1=0.727939	f2=0.727939
l=5	m=1	n=10	f1=0.386946	f2=0.386946
l=5	m=2	n=1	f1=10.3084	f2=10.3084
l=5	m=2	n=3	f1=5.15418	f2=5.15418
l=5	m=2	n=5	f1=-15.4625	f2=-15.4625
l=5	m=3	n=0	f1=-56.	f2=-56.
l=5	m=3	n=2	f1=-24.	f2=-24.
l=5	m=3	n=4	f1=72.	f2=72.
l=5	m=3	n=6	f1=-16.2424	f2=-16.2424

ÖZGEÇMİŞ

Bu tezin yazarı İstanbul'da doğdu. İlköğrenim ve ortaöğrenimini İstanbul'da Fatih Kız Lisesi'nde tamamladı. İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nde geçen yüksek öğrenim yıllarının ardından, Fizikçi olarak mezun oldu. Kısa bir süre İstanbul Vefa Lisesi'nde vekil öğretmenlik yaptıktan sonra, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü'nde asistan olarak çalışmaya başladı. Daha sonra, Boğaziçi Üniversitesi, Nükleer Enerji Bölümü'nde M.Sc. çalışmasına devam ederek Nükleer Yüksek Mühendisi ünvanıyla mezun oldu.

Halen, İstanbul Teknik Üniversitesi, Nükleer Enerji Enstitüsü'nde Ph.D. öğrencisi olup, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Nükleer Fizik Anabilim Dalı'ndaki görevine devam etmektedir.

Ocak 2001

Semiha SAĞLAM

ÖZGEÇMİŞ

Bu tezin yazarı İstanbul'da doğdu. İlköğrenim ve ortaöğrenimini İstanbul'da Fatih Kız Lisesi'nde tamamladı. İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nde geçen yüksek öğrenim yıllarının ardından, Fizikçi olarak mezun oldu. Kısa bir süre İstanbul Vefa Lisesi'nde vekil öğretmenlik yaptıktan sonra, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü'nde asistan olarak çalışmaya başladı. Daha sonra, Boğaziçi Üniversitesi, Nükleer Enerji Bölümü'nde M.Sc. çalışmasına devam ederek Nükleer Yüksek Mühendisi ünvanıyla mezun oldu.

Halen, İstanbul Teknik Üniversitesi, Nükleer Enerji Enstitüsü'nde Ph.D. öğrencisi olup, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Nükleer Fizik Anabilim Dalı'ndaki görevine devam etmektedir.

Ocak 2001

Semiha SAĞLAM