T. C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JACOBİ'NİN GÖSTERGELERLE İLGİLİ TEOREMİ VE KARŞITI

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

VEYSEL BUTAKIN

Diyarbakır - 1987

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma, jürimiz tarafından, Matematik Bilimdalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan ....

Üye ....

Üye ....

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ... / ... / 1987

Müdür

Doç. Dr. Turhan ÖZDEN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

C.G. JACOBİ kapalı küresel bir eğrinin teğetler göstergesi birim küre yüzeyini eş alan iki parçaya ayırdığını göstermiştir.

Bu çalışmada, JACOBİ'nin yukarda ifadesi bulunan teoreminin karşıtı olarak şu sorunun cevabı aranmıştır "Acaba kapalı bir uzay eğrisine bağlı olan ve göstergeleri birim küre yüzeyini eş alan iki parçaya ayıran başka doğrultular var mıdır?"

Çalışmamız iki bölümden oluşmuştur.

1. Bölüm: Çalışmamızda GAUSS-BONNET integral formülünden faydalanacağımız cihetle, bu formülün birim küre yüzeyi için bir ispatı birinci bölümü oluşturmaktadır.

2. Bölüm: Bu bölümde ise çalışmamızın esasını teşkil eden ve yukarda ifadesi bulunan sorunun cevabı aranmıştır. Sonuç olarak " Kapalı bir küresel eğrisinin oskülatör düzleminde yatan ve eğriye sıkı surette bağlı olan her vektörün küresel göstergesi birim küre yüzeyini iki eşit parçaya ayıracağı " gösterilmiştir.

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmanın gerçekleşmesinde yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Atıf İPEKÇİOĞLU'na ve Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. H. İlhan TUTALAR'a içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Veysel Butakın

Çalışmamızda, GAUSS-BONNET integral formülünden faydalanacağımız cihetle, bu formülün birim küre yüzeyi için bir ispatı ile işe başlayacağız.

[K] ile göstereceğimiz birim küresi üzerinde çizilmiş $A_1A_2A_3$ üçgeninin alanı; A_i $(i=1,2,3)$ ler üçgenin mütekabil köşelerindeki iç açılar olmak üzere,

$$T_3 = -\pi + \sum_{i=1}^{3} A_i \qquad (1.1)$$

ile bellidir.

Benzer tarzda, aynı küre üzerine çizilmiş olan ve konveks olması gerekmeyen n kenarlı bir poligonun alanının bu poligonu üçgenlere ayırmakla gösterileceği gibi, A_i ler yine mütekabil köşelerdeki iç açılar olmak üzere,

$$T_n = -(n-2)\pi + \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (1.2)$$

olacağı aşikârdır.

Eğer, poligonun köşelerindeki $\alpha_i = \pi - A_i$ ile gösterilen dış açılar göz önüne alınırsa,

$$T_n = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \qquad (1.3)$$

olur.

[K] üzerinde C^2 sınıfından, köşe noktalarına haiz olmadığı gibi, basit irtibatlı bir bölgeyi de sınırladığı kabul edilen ve kürenin merkezine izafe edilmişvektörel denklemi, kendi yay parametresi olan, σ 'ya göre verilmiş;

$$\Gamma: \ \vec{r} = \vec{r}(\sigma) \ ; \ \vec{r}^{\,2} = (d\vec{r}/d\sigma)^2 = 1 \qquad (1.4)$$

kapalı eğrisini düşünelim.

Bu eğriyi n kenarlı bir poligonun limiti olarak dügönürsek, bu takdirde çevrelediği bölgenin alanı; T_n alanının limiti olur ki; bu zaman α_i açıları, birbirine komşu noktalardaki, eğriye teğet, büyük daireler arasındaki açılardır.

O halde, Γ nın sınırladığı F alanı, $d\psi$ açı elementi, birbirine komşu iki noktadaki bu eğrinin teğet büyük daireleri arasındaki açıyı göstermek üzere,

$$F = 2\pi - \oint_{\Gamma} d\varphi \tag{1.5}$$

olur ki; bu formül kapalı küresel eğriler için GAUSS-BONNET integral formülüdür.

Bu formülü kullanışlı hale sokmak için; $d\varphi$ açı elementinin hesaplanması gerekir. Bunun için, Γ eğrisine, parametrenin bir σ değerine karşılık gelen bir P noktasında teğet büyük dairenin düzlemine, $\vec{r} = \vec{r}\,(\sigma)$ ve $\vec{r}_\sigma = dr/d\sigma$ vektörleri ile bir sağ sistem teşkil edecek tarzda, kürenin merkezinden çıkılan birim normal vektör,

$$\vec{y} = \vec{y}\,(\lambda) = \vec{r} \wedge \vec{r}_\sigma \tag{1.6}$$

ile belli olup, P noktası Γ eğrisini çizdiğinde, bu vektörün ucu da birim küresinde Γ_d gibi bir eğri çizecektir ki; bu eğriye Γ eğrisinin dual eğrisi denir. Dual eğrinin tarifinden bu eğrilerden birinin, diğerinin dual eğrisi olacağı anlaşılır buradan

$$d\psi = |\, d\vec{y}\,| = d\lambda \tag{1.7}$$

olur. (1.6) dan

$$|\,dy\,| = d\,(\,\vec{r} \wedge d\vec{r}/d\sigma\,)$$

$$|\,dy\,| = d\vec{r}/d\sigma \wedge d\vec{r}/d\sigma \;+ r_\sigma \wedge d^2r/d\sigma^2$$

$$|\,dy\,| = |\,r_\sigma \wedge r_{\sigma\sigma}\,| \cdot d\sigma$$

olacak ve ayrıca $\vec{r}$ ile $\vec{r}_{\sigma\sigma}$ sırası ile, Γ ya dik ve asal normal doğrultularda olacaklarından; $\vec{r} \wedge \vec{r}_{\sigma\sigma}$ vektörü ($-\vec{r}_{\sigma}$) vektörünün doğrultu ve yönünde olacaktır. Burada r teğet birim vektörünün dolanım yönü, eğrisi daima teğetin solunda kalacak tarzda seçilmiştir. O halde,

$$|\vec{r} \wedge \vec{r}_{\sigma\sigma}| = (\vec{r} \wedge \vec{r}_{\sigma\sigma}).(-\vec{r}_{\sigma})$$

olacak ve dolayısıyla

$$d\varphi = | d\vec{y} | = (\vec{r}, \vec{r}_{\sigma}, \vec{r}_{\sigma\sigma}).d\sigma \qquad (1.8)$$

elde edilecektir.

$(\vec{r}, \vec{r}_{\sigma}, \vec{r}_{\sigma\sigma}) = \rho_g$ miktarı Γ eğrisinin jeodezik eğriliği olup; buna göre (2.5) formülü

$$F = 2\pi - \oint_{\Gamma} \rho_g . d\sigma \quad ; \quad \rho_g = (\vec{r}, \vec{r}_{\sigma}, \vec{r}_{\sigma\sigma}) \qquad (1.9)$$

nihai şeklini alacaktır.

Bu bölümde şu sorunun cevabını arayarak JACOBİ'nin teoreminin karşıtını ifade edeceğiz."Acaba asal normalden başka kapalı bir uzay eğrisine sıkı surette bağlı ve küresel göstergeleri birim küre yüzeyini eş alan iki parçaya ayıran başka doğrultular var mıdır?"

Bu gibi doğrultular için, a_i $(i=1,2,3)$ ler sabit olmak üzere,

$$\vec{r} = a_1\vec{t} + a_2\vec{n} + a_3\vec{b} \qquad (\ni a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1) \quad (2.1)$$

olacaktır. $\vec{\omega} = \tau\vec{t} + \chi\vec{b}$ eğrinin DARBOUX vektörünü göstermek ve

$$\vec{r}_s = d\vec{r}/ds \;,\; \vec{r}_\sigma = d\vec{r}/d\sigma \text{ ve } ds/d\sigma = 1/|\vec{r}_s|$$

olmak üzere,

$$\vec{r}_\sigma = \vec{r}_s(ds/d\sigma) \;,\; \vec{r}_{\sigma\sigma} = \vec{r}_{ss}(ds/d\sigma)^2 + \vec{r}_s(d^2s/d\sigma^2) \quad (2.2)$$

olacaktır. Ayrıca

$$\vec{r}_s = \vec{\omega}\wedge\vec{r} \quad , \quad \vec{r}_{ss} = \vec{\omega}_s\wedge\vec{r} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$$

veya bu açılarak, $\vec{r}_{ss} = \vec{\omega}_s\wedge\vec{r} + (\vec{\omega}.\vec{r}) - (\vec{\omega}^2)\vec{r}$ olduğu göz önüne alınarak, (1.9) dan aranılan doğrultular için toplam jeodezik eğriliğin sıfır ettiği yazılacak olursa,

$$0 = \oint_r (\vec{r}, \vec{r}_\sigma, \vec{r}_{\sigma\sigma}).d\sigma$$

$$= \oint_C (\vec{\omega}.\vec{r}).ds + \oint_C (1/(\vec{\omega}\wedge\vec{r})^2).(\vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\omega}_s).ds$$

elde edilir ki; burada $\vec{\omega}_s = d\vec{\omega}/ds$ dir. Burada karşımıza;

$$I_1 = \oint_C (\vec{\omega}.\vec{r})\,ds$$

$$I_2 = \oint_C (1/(\vec{\omega}\wedge\vec{r})^2)(\vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\omega}_s).\,ds$$

gibi iki integral çıkar.

Göz önüne alınan kapalı eğrinin teğetler göstergesinin toplam burulması

$$\oint_C d\,\mathrm{Arctg}\,\xi = 0 \qquad (\ni \ \xi = \tau/\chi \text{ harmonik eğriliktir.})$$

olacaktır.

C eğrisinin uzunluğunu ℓ kabul edersek, ξ yi $\xi(0)$ yapan değer s = 0 olarak alındığında, bu integralin değeri

$$\mathrm{Arctg}\,\xi(\ell) - \mathrm{Arctg}\,\xi(0) = 0 \tag{2.3}$$

olacaktır. Buraya diferansiyel hesabın birinci ortalama değer teoremi uygulanacak olursa,

$$[\xi(\ell) - \xi(0)].\ \xi'(\theta_1\ell)/[1+\xi^2(\theta_1\ell)] = 0$$

$0 \leq \theta_1 \leq 1$;, $(') = d/ds$ elde edilir.

$\forall\, \theta_1 \in [0,1]$ için bu bağıntının var olması için veya bir başka deyişle, bu bağıntının eğriden bağımsız olması için

$$\xi(\ell) = \xi(0) \tag{2.4}$$

olması gerektiği anlaşılmakla, aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

SONUÇ : 2.1 :

ℓ uzunluğundaki kapalı bir uzay eğrisinin harmonik eğriliği ℓ peryotlu bir fonksiyondur.

SONUÇ : 2.2 :

Genel helis eğrisi açık bir uzay eğrisidir.

Diğer taraftan I_2 integrali,

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_C d\,\mathrm{Arctg}\,[((a_2^2 + a_3^2)/a_2)\xi(s) - (a_1a_3)/a_2] \\ &= \mathrm{Arctg}\,[((a_2^2+a_3^2)/a_2)\xi(\ell) - (a_1a_3)/a_2] \\ &\quad - \mathrm{Arctg}\,[((a_2^2+a_3^2)/a_2)\xi(0) - (a_1a_3)/a_2] \end{aligned}$$

olup buraya diferansiyel hesabın birinci ortalama değer teoremi uygulanırsa, $0 \leq \theta_2 \leq 1$ olmak üzere, Sonuç 2.1 den de yararlanarak,

$$I_2 = (a_2^2+a_3^2)^2(\xi(\ell)-\xi(0)).\xi'(\theta_2\ell)/(a_2^2+((a_2^2+a_3^2)\xi(\theta_2\ell)-a_1a_3)^2)$$
$$= 0$$

elde edilir. Geriye,

$$\oint_C (\vec{\omega}.\vec{r})ds = a_1\oint_C \tau \cdot ds + a_3 \oint_C \chi \cdot ds$$

yani I_1 integrali kalır. Genel olarak yukarıdaki ifadeyi sıfır yapan vektörler,

$$\Omega = \vec{t}\oint_C \tau \cdot ds + \vec{b}\oint_C \chi \cdot ds \tag{2.5}$$

vektörüne dik düzlemde bulunurlar. Bu ifadenin özdeş olarak sıfır etmesi ancak $a_1 = a_3 = 0$; $a_2 = 1$ ile mümkündür.

Eğer eğrimiz küresel kapalı bir eğri ise, $\oint \tau \cdot ds = 0$ olur. Dolayısı ile a_1 keyfi kalır. Bu gibi eğriler için, göstergeleri birim küre yüzeyini eş alan iki parçaya ayıran doğrultular $a_3=0$ şartına uygundur. Buradan JACOBİ'nin teoreminin karşıtı olarak şu teorem elde edilir.

TEOREM : 3.1 :

Kapalı küresel eğrilerin oskülatör düzlemlerinde bulunan ve eğriye sıkı surette bağlı bulunan her doğrunun küresel göstergesi birim küre yüzeyini eş alan iki parçaya ayırır.

LİTERATÜR :

1.) Avakumoviç. V.G. Sirpska Akad. Nauk, Sbornik Radova, 1951 VII, pp. 101-108.

2.) Fenchel W. Tohoku Math. J. 1954 XXXIX, pp. 94-97.

SUMMARY :

In this paper, we have searched the corresponding theorems of Jacobi for a closed space curve.

Theorem of Jacobi states that spherical image of tangents of a closed spherical curve devides the unit sphere into two equal area.

As a result we obtained that for closed space curves the only direction whose spherical image devides the unit sphere into two equal area is the direction of normal. And for all the closed spherical curves, spherical image of every direction in oscülatör plane of this curves devides the unit sphere into two equal area.

Morover, we showed that the harmonic curvature of a space curve has the same period with the curvature and the torsion. Hence a closed space curve can not be a general helix.