T. C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİK OLMAYAN KOORDİNATLARDA YOL İNTEGRALLERİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

HATİCE BUDAK

Diyarbakır - 1987

Büyük bir özveride bulunarak yüksek lisans yöneticiliğimi üstlenen, çalışmalarımı yönlendiren, bu çalışmanın ortaya çıkmasında değerli bilgi ve görüşleri ile bana yol gösteren ve her aşamada yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Doç.Dr. Nuri Ünal'a

Çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nün değerli öğretim üyeleri Sayın Doç.Dr. Zülküf Gülsün'e, Sayın Doç.Dr. Ali Yılmaz'a Sayın Doç.Dr. Mahmut Aydınol'a, Sayın Yard.Doç.Dr. Z.Ziya Öztürk'e ve Mesai arkadaşlarıma saygılarımla teşekürlerimi sunarım.

İ Ç İ N D E K İ L E R

BÖLÜM : 1

G İ R İ Ş

Kuantum Mekaniği, Klasik Fiziğin doğayı tanımlamadaki yetersizliği sonucu doğmuş ve beraberinde klasik fizik ile bağlaştırılması mümkün olmayan yeni kavramlar getirmiştir. Ortaya çıkan bu yeni kavramların klasik bir karşılığı aranmış ancak bir çok güçlükle karşılaşılmıştır. Ayrıca klasik mekanikteki hareket denkleminin, kuantum mekaniksel karşılığı aranmış ve bu ilişkinin bulunması araştırmalara neden olmuştur. Bu araştırmalarda çeşitli yöntemler kullanılmıştır. Kullanılan bu yöntemlerden biri de yol integrali yöntemidir.

Yüz yılımızın ikinci yarısında geliştirilen yol integrali yöntemine Feynman'ın yol integrali yaklaşımı temel olarak düşünülmüştür.

Feynman'ın yol integrali formülasyonunda dik koordinatlardan başlama zorunluluğu vardır ve dik koordinatlarda yol integrali klasik hareket denklemlerini veren klasik Lagrangien cinsinden formüle edilir. Fakat eğrisel koordinatlar kullanıldığında Lagrangien yeni kuantum mekaniksel terimlere sahip olmaktadır. Bu nedenle iyi bir yaklaşım yapmak amacıyla, bu çalışmamızda eğrisel koordinatlarda yol integrali formülasyonunu çıkaracağız ve tam çözülebilir fiziksel sistemlere uygulayacağız.

Herhangi bir anda parçacığın konumunu t zamanının fonksiyonu bir x koordinatıyla belirleyebiliriz.

Eğer parçacık t_a başlangıç anında x_a noktasından başlar ve t_b zamanında x_b noktasına giderse basitçe şunu söyleyebiliriz. Bizim $x(t)$ fonksiyonumuz $x(t_a) = x_a$ ve $x(t_b) = x_b$ özelliğine sahip olur. Kuantum mekaniğinde t_a anında x_a noktasından yola çıkan parçacık klasik hareketin izin verdiği nokta dışındaki noktalara da gidebilir. Onun için kuantum mekaniğinin cevaplandırması gereken soru şudur? t_a anında x_a noktasında bulunan parçacığın t_b anında x_b noktasında bulunma olasılığı nedir? Bu olasılığın genliğine "kernel" denir ve bu $K(x_b,t_b,x_a,t_a)$ ile gösterilir. Bütün yörüngeler toplam genliğe eşit ağırlıkla fakat farklı fazlarda katkıda bulunurlar ve her katkının fazı S klasik eylem olmak üzere $i/\hbar S$ ile orantılıdır. Bütün eylemler eşit olasılık genliğiyle meydana gelir ve bu olasılık genliğini $\phi[x(t)]$ ile gösteririz. Bu durum klasik mekanikle çelişki oluşturur. Çünkü klasik mekanikte a'dan b'ye giden yanlızca bir tane belirli ve özel bir yol vardır. Bu yol S eylemini minimum kılan yoldur ve "klasik yol" olarak adlandırılır.

t_a anında x_a noktasından t_b anında x_b noktasına gidiş olasılığı K(b,a) genliğinin mutlak karesine eşittir.

$$P(b,a) = |K(b,a)|^2 \tag{1-1}$$

Bu genlik her bir yörüngeden gelen $\phi[x(t)]$ olasılık genliğinin toplamına eşittir.

$$K(b,a) = \sum_{\substack{\text{a'dan b'ye giden} \\ \text{bütün yollar üzerinden}}} \phi[x(t)] \tag{1-2}$$

Ayrıca $\phi[x(t)]$ fonksiyonumuz $e^{i/\hbar S}$ fazıyla orantılıdır. Buna göre

$$\phi[x(t)] = \text{Sabit } e^{i/\hbar S\, x(t)} \tag{1-3}$$

olarak yazılır.

Yollar üzerinden toplamayı tanımlarken zaman aralığını N eşit parçaya böleriz ve bu alt aralıkların uzunluğu $(t_b-t_a)/N=\varepsilon$ olur. Bu bize t_a ve t_b değerleri arasında aralıklarla yerleşmiş

t_j değerlerinin bir kümesini verir. Her bir t_j zamanında özel x_j noktasını seçip bütün noktalarla bağlantılı bir yörünge oluştururuz. N-1 ve 1 arasında j için x_j nin bütün değerleri üzerinden bir çarpım integrali alınarak (bağımsız olasılıkların çarpımına göre) bütün yollar üzerinden bir toplama tanımlayabiliriz.

$$K(b,a) \sim \int\int \cdots\cdots \int \phi[x(t)]\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} \qquad (1\text{-}4)$$

x_o ve x_N üzerinden integral alamıyoruz. Çünkü: bunlar değeri baştan belirlenmiş x_a ve x_b noktalarıdır. Yolların toplamı bütün küçük zaman aralıklarına ayrılmış x_j noktaları üzerinden alınan bir integraldir. Buna göre lim$\varepsilon \to o$ giderken alırız.

$$K(b,a) = \lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{A} \int\int \cdots \int e^{i/\hbar S[b,a]} \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \frac{dx_3}{A} \quad \frac{dx_{N-1}}{A} \qquad (1\text{-}5)$$

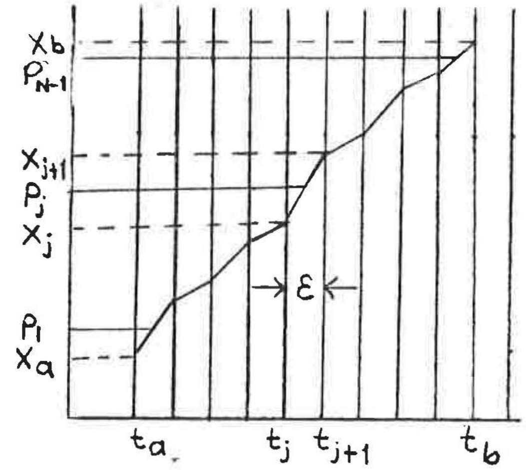
Burada $A = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}$ normalizasyon çarpanıdır ve sisteme göre değişmektedir.

$$K(x_a,t_a;x_b,t_b) = \lim_{\substack{\varepsilon \to o \\ N \to \infty}} \int \frac{dx_1}{A} \int \frac{dx_2}{A} \int \frac{dx_3}{A} \cdots\cdots \int \frac{dx_{N-1}}{A}$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}S(x_b x_N,\varepsilon) + \frac{i}{\hbar}S(x_N x_{N-1},\varepsilon) \cdots \frac{i}{\hbar}S(x_1,x_a,\varepsilon)} \qquad (1\text{-}6)$$

$$K(x_a,t_a;x_b,t_b) = \lim_{\substack{\varepsilon \to o \\ N \to \infty}} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N} dx_j\, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1} S(x_j x_{j-1},\varepsilon)} \qquad (1\text{-}7)$$

Böylece dik koordinatta yol integralini formüle etmiş oluruz.



$$N\varepsilon = t_b - t_a$$

$$\varepsilon = t_{j+1} - t_j$$

$$t_0 = t_a \qquad t_N = t_b$$

$$x_0 = x_a \qquad x_N = x_b$$

$$P_1 = \frac{x_1 - x_0}{\varepsilon} \qquad P_2 = \frac{x_N - x_{N-1}}{\varepsilon}$$

Şekil - 1 Yörüngeler üzerinden toplama limit gibi tanımlanır. Bu toplama çok küçük ε zaman aralıklarına ayrılmış N tane x koordinatlarıyla tanımlanan yollar üzerinden alınan bir integraldir. Momentumlar ise iki koordinat arasındaki orta noktalarda tanımlanır.

BÖLÜM : 2

KÜRESEL KOORDİNATLARDA YOL İNTEGRALLERİ

bir sistemin hareketini Lagrangien ve Hamiltonien ile belirleriz. Kernelin bir yol integrali ile tanımlandığı kuantum mekaniginde elde ettiğimiz (1-7) denklemi sisteminin Lagrangien'i üzerine kuruludur. Geçtiğimiz yıllarda Hamiltonien yol integrali üzerinde daha fazla çaba harcandı ve bunun Lagrangien yol integrali ile eşitliği sadece dik koordinatlarda gösterildi. Klasik mekanikte, Hamilton hareket denklemleri kanonik dönüşümler altında değişmemektedir. Kuantum mekaniğinde ise böyle bir değişmezlik için hiç bir genel kanıt yoktur. Bu nedenle Hamilton formülasyonunun geçerliliği bilinmemektedir.

çoğu fiziksel sistemler belli dönüşümler altında değişmezler, Böyle sistemlerle ilgilenirken genellikle koordinat dönüşümü yapılır. Örneğin dönmeler altında değişmeyen sistemlerde problemi küresel koordinatlarda çözmek dahauygundur. Bu işlemle genel olarak sistemin hareketi tek boyutta etkin bir potansiyelde harekete indirgemebilmektedir. Dik koordinatlardan küresel koordinatlara böyle bir dönüşümün yol integralinde de mümkün olup olmayacağını sormak doğaldır. Bu sorunun cevabı oldukça önemlidir. Çünkü genel olarak küresel koordinatlarda yol integralini nasıl yazacağımızın genel bir reçetesi yoktur. Açıklığa kavuşturmamız gereken ikinci soru, Lagrangien ve Hamiltonien arasındaki eşitliğin kanonik dönüşümler altında sürdürülüp sürdürülmeyeceği ve sürdürülürse nasıl sürdürüleceğidir.

Bu soruları açıklığa kavuştırmak için, bu bölümde küresel koordinatlarda Lagrangien yol integralini çıkaracağız. Bir sonraki bölümde ise çıkaracağımız hamilton yol integrali ile lagrangien integrali arasındaki eşitliğin kanonik dönüşümler altında sürdürüldüğünü göstereceğiz.

Küresel simetrik bir $V(|\vec{x}|)$ potansiyelinde m kütleli tek parçacığa karşı gelen eylemin genel biçimi

$$S(\vec{x},t) = \int_{t'}^{t''} dt\left[\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(|\vec{x}|)\right] \tag{2-1}$$

yi inceliyerek başlayalım. Bu eylemin parçalı biçimini,

$$S = \sum_{j=1}^{N}\left[m\frac{(\vec{x}_j-\vec{x}_{j-1})^2}{2\varepsilon} - \varepsilon V(|\vec{x}_j|)\right] \tag{2-2}$$

olarak yazabiliriz. Genel küresel koordinatları (r,θ,φ) yi kullanarak $(x_j\ x_{j-1})^2$'i hesaplayalım. Bunu

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

$$(x_j-x_{j-1})^2 = \left[(r_j-r_{j-1})^2 + r_j r_{j-1}(\theta_j-\theta_{j-1})^2 + r_j r_{j-1}\sin\theta_j\sin\theta_{j-1}(\varphi_j-\varphi_{j-1})^2\right]$$

$$\left\{r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1}\left[1-\frac{(\theta_j-\theta_{j-1})^2}{2}\right] - 2r_j r_{j-1}\sin\theta_j\right.$$

$$\sin\theta_{j-1}\left[1-\frac{(\varphi_j-\varphi_{j-1})}{2} - 1\right]$$

$$\cos(\theta_j-\theta_{j-1}) = 1 - \frac{(\theta_j-\theta_{j-1})^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$= \left\{r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1}\left[\cos\theta_j\cos\theta_{j-1} + \sin\theta_j\sin\theta_{j-1}\cos(\varphi_j-\varphi_{j-1})\right]\right.$$

$$(x_j-x_{j-1})^2 = r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1}\cos\Theta_{j,j-1}$$

olarak yazarız. Burada Θ_j x_j ve x_{j-1} arasındaki açıdır. (θ_j,φ_j) ve $(\theta_{j-1}\varphi_{j-1})$ açıları aracılığıyla

$$\cos\Theta_{j,j-1} = \cos\theta_j\cos\theta_{j-1} + \sin\theta_j\sin\theta_{j-1}\cos(\varphi_j-\varphi_{j-1}) \tag{2-4}$$

temsil edilir. Bunun sonucunu kullanarak eylemin küresel koordinattaki ifadesini yazabiliriz.

$$S=\{\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)-\varepsilon V(r_j)-[\frac{m}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{N}r_j r_{j-1}\cos\Theta_{jj-1}] \qquad (2\text{-}5)$$

Daha sonra bunu Denk (1-7)'de yerine yazarak kernel'i yeniden yazalım.

$$K(x'',t''\mid x',t')=A_N\int\cdots\int\exp\{\frac{i}{\hbar}\sum[\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)]$$

$$-\frac{m}{\varepsilon}r_j r_{j-1}x\cos\Theta_{jj-1}-\varepsilon V(r_j)\}\prod_{j=1}^{N-1}(r_j^2\sin\theta_j dr_j d\theta_j d\varphi_j) \qquad (2\text{-}6)$$

Buradaki ikinci üstel terimi küresel harmonikler içeren bir seriye açabiliriz. Bunun için

$$\exp(u\cos\Theta_{j,j-1})=4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2u}}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}I_{l+1/2}(u)Y_{ln}^{*}(\theta_j\varphi_j)Y_{ln}(\theta_{j-1}\varphi_{j-1}) \qquad (2\text{-}7)$$

açılım bağıntısını kullanacağız. Burada $I_{l+1/2}(U)$ sanal değişkenli Bessel fonksiyonudur.

$$\exp\left[\left(\frac{mr_i r_{i-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)\cos\Theta_{j,j-1}\right]=(4\pi)\left(\frac{i\pi\hbar\varepsilon}{2mr_1r_0}\right)^{1/2}I_{l_1+1/2}\left(\frac{mr_1r_0}{i\hbar\varepsilon}\right)Y_{l_1n_1}(\theta_1,\varphi_1)Y_{l_1n_1}(\theta_0,\varphi_0)$$

$$(4\pi)\left(\frac{i\pi\hbar\varepsilon}{2mr_2r_1}\right)^{1/2}I_{l_2+1/2}\left(\frac{mr_2r_1}{i\hbar\varepsilon}\right)Y_{l_2n_2}(\theta_2\varphi_2)Y_{l_2n_2}(\theta_1,\varphi_1)$$

$$\vdots$$

$$(4\pi)\left(\frac{i\pi\hbar\varepsilon}{2mr_Nr_{N-1}}\right)^{1/2}I_{l_N+1/2}\left(\frac{mr_Nr_{N-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)Y_{l_Nn_N}(\theta_N,\varphi_N)Y_{l_Nn_N}(\theta_{N-1}\varphi_{N-1})$$

$$\prod_{j=1}^{N-1}\sin\theta_j\, d\theta_j d\varphi_j=\sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1\sin\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2\cdots\sin\theta_{N-1}d\theta_{N-1}d\varphi_{N-1}$$

$$K(x'',t''\,|\,x',t') = A_N \int\cdots\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum \frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)-\varepsilon V(r_j)\right\}$$

$$(4\pi)\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{i\pi\hbar\varepsilon}{2mr_jr_{j-1}}\right)^{1/2} I_{l+1/2}\left(\frac{mr_jr_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)\prod_{j=1}^{N-1} r_j^2 dr_j \iint\cdots\int$$

$$Y^*_{l_1n_1}(\theta_1,\varphi_1)\,Y_{l_1n_1}(\theta_0,\varphi_0)\,Y^*_{l_2n_2}(\theta_2,\varphi_2)\,Y_{l_2n_2}(\theta_1,\varphi_1)\cdots$$

$$Y^*_{l_Nn_N}(\theta_N,\varphi_N)\,Y_{l_Nn_N}(\theta_{N-1},\varphi_{N-1})\,\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1\,\sin\theta_2$$

$$d\theta_2\,d\varphi_2\cdots\cdots\sin\theta_{N-1}\,d\theta_{N-1}\,d\varphi_{N-1}$$

Ayrıca küresel harmonikler arasındaki şu diklik bağıntısını göz önüne alarak θ_j ve φ_j ler üzerinden integral alabiliriz.

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; Y^*_{ln}(\theta,\varphi)\,Y_{l'n'}(\theta,\varphi)\,\sin\theta = \delta_{ll'}\,\delta_{nn'} \tag{2-8}$$

Bu integralden N-1 tane δ fonksiyonu elde ederiz.

$$\int_0^{\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1\; Y^*_{l_1n_1}(\theta_1,\varphi_1)\,Y_{l_2n_2}(\theta_1,\varphi_1)\sin\theta_1 = \delta_{l_1l_2}\,\delta_{n_1n_2}$$

$$\int_0^{\pi} d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2\; Y^*_{l_2n_2}(\theta_2,\varphi_2)\,Y_{l_3n_3}(\theta_2,\varphi_2)\sin\theta_2 = \delta_{l_1l_2}\,\delta_{n_2n_3}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^{\pi} d\theta_{N-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_{N-1}\; Y_{l_{N-1}n_{N-1}}(\theta_{N-1},\varphi_{N-1})\,Y_{l_Nn_N}(\theta_{N-1},\varphi_{N-1}) = \delta_{l_{N-1}}\delta_{l_N}\,\delta_{n_{N-1}n_N}$$

Sonuçta küresel koordinattaki kerneli

$$K_N(x'',t'',x',t') = K_N\,(r'',\theta'',\varphi'',t''\,|\,r',\theta',\varphi',t')$$

$$= A_N\int\cdots\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)-\varepsilon V(r_j)\right]\right\}(4\pi)^N$$

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{i\pi\hbar\varepsilon}{2mr_jr_{j-1}}\right)^{1/2} I_{l+1/2}\left(\frac{mr_jr_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)\prod_{j=1}^{N-1} r_j^2 dr_j\, Y_{l_1n_1}(\theta_0,\varphi_0)\,Y_{l_Nn_N}(\theta_N,\varphi_N) \tag{2-9}$$

biçiminde yazarız. r'ye bağlı kısımları ayırarak radyal kerneli yazmamız mümkündür. Buna göre

$$R_l = \left[\frac{i\pi\varepsilon\hbar}{2m r_j r_{j-1}}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)-\varepsilon V(r_j)\right\}\right] I_{l+1/2}\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right) \quad (2\text{-}9)$$

olmak üzere

$$K_l(r'',t'',r',t') = \lim_{N\to\infty}(4\pi)^N A_N \int \prod_{j=1}^{N} R_l(r_j r_{j-1}) \prod_{j=1}^{N-1} r_j^2 dr_j \quad (2\text{-}10)$$

radyal kerneldir. A_N sabiti genel olarak

$$A_N = \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}\right)^{3N/2} \quad (2\text{-}11)$$

ile verilir. Bu işlemle simetrik potansiyeller için küresel koordinatlarda kerneli tek boyutta harekete indirgedik. Açıkça görüldüğü gibi radyal kernel potansiyellerin yapısına bağlıdır.

İki boyuttaki yol integralini, üç boyutta küresel koordinatlardaki yol integrali genel ifadesinde $\theta_j = \pi/2$ koyarak kestirebiliriz.

$$\cos\Theta_{j,j-1} = \cos\theta_j\cos\theta_{j-1} + \sin\theta_j\sin\theta_{j-1}\cos(\varphi_j-\varphi_{j-1})$$

$$\cos\Theta_{j,j-1} = \cos(\varphi_j-\varphi_{j-1})$$

Buna göre eylemi

$$S = \left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)-\varepsilon V(r_j)-\left[\frac{m}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{N} r_j r_{j-1}\cos(\varphi_j-\varphi_{j-1})\right]\right\} \quad (2\text{-}12)$$

yazabiliriz.

$$\exp(z\cos\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k I_k(-z)\exp(ik\varphi) \quad (2\text{-}13)$$

açılımını ve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\{ i\varphi(k-m)\} d\varphi = \delta_{km} \qquad (2\text{-}14)$$

diklik bağıntısını kullanarak φ_j üzerinden integralleri kolayca alabiliriz. İki boyutta hacim elemanı $r_j dr_j\ d\varphi_j$ dir.

$$K(x'',t''|x',t') = B_N \int\cdots\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)-\varepsilon V(r_j)\right\}$$

$$\prod_{j=1}^{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k I_{k_j}\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)\exp[ik_j(\varphi_j-\varphi_{j-1})]\prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j d\varphi_j$$

$$=B_N\prod_{j=1}^{N}\int\cdots\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)-\varepsilon V(r_j)\right\}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k I_{k_j}\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)\prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j \exp[ik(\varphi_j-\varphi_{j-1})]\prod_{j=1}^{N-1} d\varphi_j$$

Açısal kısmın integralini alalım.

$$\prod_{j=1}^{N}\int\int\cdots\int e^{ik_j(\varphi_j-\varphi_{j-1})}\prod_{j=1}^{N-1}d\varphi_j = \int\int\cdots\int e^{ik_1(\varphi_1-\varphi_0)}\,e^{ik_2(\varphi_2-\varphi_1)}\cdots$$

$$e^{ik_N(\varphi_N-\varphi_{N-1})}\,d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_{N-1}$$

$$=\int\int\cdots\int e^{ik_1\varphi_0}\,e^{i(k_1-k_2)\varphi_1}\cdots$$

$$e^{ik_N\varphi_N}\,d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_{N-1}$$

$$\int_0^{2\pi}\exp\{i(k_1-k_2)\varphi_1\, d\varphi_1 = 2\pi\,\delta_{k_1k_2}$$

$$\int_0^{2\pi}\exp\{i(k_2-k_3)\varphi_2\, d\varphi_2 = 2\pi\,\delta_{k_2k_3}$$

.

.

.

$$\int_0^{2\pi}\exp\{i(k_{N-1}-k_N)\varphi_{N-1}\, d\varphi_{N-1} = 2\pi\,\delta_{k_N k_{N-1}}$$

$$K(x'',t''|x',t') = K(r'',\varphi''|r',\varphi')$$

$$= B_N \int \cdots \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} \frac{m(r_j^2+r_{j-1}^2)}{2\varepsilon} - \varepsilon V(r_j)\right.$$

$$(2\pi)^{N-1}\sum_{k_j=-\infty}^{\infty}(-1)^k I_k\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)\prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j\, e^{ik(\varphi_N-\varphi_0)} \qquad (2\text{-}15)$$

Sonuçta kernel ifadesini

$$K(r'',\varphi''|r',\varphi') = \sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^k K_l(r'',r',T)\, e^{ik(\varphi''-\varphi')} \qquad (2\text{-}16)$$

yazarız. Her zaman olduğu gibi K_l radyal kerneldir. Açık ifadesi

$$K_l = \lim_{N\to\infty}(2\pi)^{N-1} B_N \int \prod_{j=1}^{N} R_l(r_j, r_{j-1}) \prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j \qquad (2\text{-}17)$$

ve R_l ise;

$$R_l = \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2) - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_j)\right] I_l\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right) \qquad (2\text{-}18)$$

dir. Problemin boyutu değiştiğinden normalizasyon çarpanı

$$B_N = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^N \qquad (2\text{-}19)$$

olarak değişir. Denk (2-16) yanlızca koordinata bağlı bir potansiyel için küresel koordinatta kerneli temsil eder. 2 ve 3 boyutta bulduğumuz (2-10) ve (2-17) denklemlerindeki radyal kernel ifadelerini

$$K_l(r'',r',T) = (r'r'')^{1-d/2}\left[\frac{m}{i\hbar\varepsilon}\right]^N \int\int \prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j$$

$$\prod_{j=1}^{N} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2) - \frac{i\varepsilon V}{\hbar}\right] I_\nu(l)\left[\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right] \qquad (2\text{-}20)$$

genel biçimde yazabiliriz.

$$\nu(l) = \begin{cases} d=3 & l+\frac{1}{2} \\ d=2 & l \end{cases} \qquad (2\text{-}21)$$

değerlerini alır. Bu kernel modife edilmiş eylem tarafından karekterize edilebilir. Bunu görebilmek için $I_\nu(l)$'in asimtotik ifadesini kullanabiliriz.

$$I\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{2\pi u}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{u}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\left\{\nu^2 - \frac{1}{4}\right\}\frac{\varepsilon}{u} + O(\varepsilon^2)\right) \qquad (2\text{-}22)$$

Bu asimtotik ifadeyi Denk (2-20) de yerine yazalım.

$$K_l(r'',r',T) = (r'r'')^{1-d/2}\left(\frac{m}{i\hbar\varepsilon}\right)^N \iint \prod_{j=1}^{N-1} r_j\, dr_j$$

$$\prod_{j=1}^{N} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \frac{i\varepsilon V}{\hbar}\right]\left(\frac{\varepsilon i\hbar}{2\pi m r_j r_{j-1}}\right)^{1/2}$$

$$\exp\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon} - \frac{1}{2}\left\{\nu^2 - \frac{1}{4}\right\}\frac{i\hbar\varepsilon}{m r_j r_{j-1}}\right)$$

$$K_l(r'',r',T) = (r'r'')^{1-d/2}\left(\frac{m}{i\hbar\varepsilon}\right)^N \iint \prod_{j=1}^{N-1} r_j\, dr_j \prod_{j=1}^{N} \exp\Big[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2$$

$$- 2r_j r_{j-1}) - \frac{i\varepsilon V}{\hbar} - \frac{1}{2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{i\hbar\varepsilon}{m r_j r_{j-1}}\Big]\left(\frac{i\varepsilon\hbar}{2m\pi r_j r_{j-1}}\right)$$

$$= (r'r'')^{1-d/2}\left(\frac{m}{i\varepsilon\hbar}\right)^N \int \cdots \int r_1\, dr_1\, r_2\, dr_2 \cdots r_{N-1}\, dr_{N-1}$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_1 - r_0)^2 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_1) - \frac{1}{2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{m r_1 r_0}\right)\right]\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{2\pi m r_1 r_0}\right)^{1/2}$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_2 - r_1)^2 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_2) - \frac{1}{2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{m r_2 r_1}\right)\right]\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{2\pi m r_2 r_1}\right)^{1/2}$$

$$\vdots$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_N - r_{N-1})^2 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_N) - \frac{1}{2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{m r_N r_{N-1}}\right)\right]\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{2\pi m r_N r_{N-1}}\right)^{1/2}$$

$$r_0 = r' \quad r_N r''$$

$$=(r'r'')^{1-d/2}\left(\frac{m}{i\hbar\varepsilon}\right)^{N}\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{2\pi m}\right)^{N/2}\left(\frac{1}{r'r''}\right)^{1/2}\int\cdots\int r_1 dr_1\cdots r_{N-1}dr_{N-1}$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_1-r_0)^2-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_1)-\frac{1}{2}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mr_1r_0}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_2-r_1)^2-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_2)-\frac{1}{2}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mr_2r_1}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_N-r_{N-1})^2-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_N)-\frac{1}{2}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mr_Nr_{N-1}}\right)\right]$$

$$\left(\frac{1}{r_1}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{r_2r_1}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{r_3r_2}\right)^{1/2}\cdots\cdots\left(\frac{1}{r_{N-1}}\right)^{1/2}$$

$$=(r'r'')^{1/2-d/2}\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}\right)^{N/2}\int\cdots\cdots\int\frac{r_1dr_1r_2dr_2\cdots r_{N-1}dr_{N-1}}{r_1r_2\cdots\cdots r_{N-1}}$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_1-r_0)^2-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_1)-\frac{1}{2}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mr_1r_0}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_2-r_1)^2-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_2)-\frac{1}{2}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mr_2r_1}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_N-r_{N-1})^2-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(r_N)-\frac{1}{2}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mr_Nr_{N-1}}\right)\right]$$

Bu işlemle radyal kerneli yeniden ifade ederiz.

$$K_1(r'',r',T)=(r'r'')^{1/2-d/2}\left[\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right]^{N/2}\int\int\prod_{j=1}^{N-1}dr_j$$

$$\prod_{j=1}^{N}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j-r_{j-1})^2-\frac{i\varepsilon V}{\hbar}-\frac{i\hbar\varepsilon}{2mr_jr_{j-1}}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\right]\qquad(2\text{-}23)$$

$\lim \varepsilon\to 0$ da

$$K_1(r'',r',T)=\lim_{\varepsilon\to 0}(r'r'')^{1/2-d/2}\left[\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right]^{N/2}\int\cdots\int\prod_{j=1}^{N-1}dr_j$$

$$\prod_{j=1}^{N}\exp\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left\{\frac{m}{2}\frac{(r_j-r_{j-1})^2}{\varepsilon^2}-V(r_j)-\frac{1}{2}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mr_jr_{j-1}}\right)\right\}$$

$$= (r',r'')^{1/2-d/2} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2} \int \cdots \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j$$

$$\exp \frac{i}{\hbar}\int dt \left[\frac{m}{2}\dot{r}^2 - V(r) - \frac{1}{2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{i\hbar\varepsilon}{m r_j r_{j-1}}\right]$$

$$K_1(r'',r',T) = (r'r'')^{1/2-d/2}\int D[r(t)]\exp[(i/\hbar)\int L(r,\dot{r},t)dt] \qquad (2\text{-}24)$$

elde ederiz. Burada $L(r,\dot{r},t)$

$$L(r,\dot{r},t) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{\hbar^2\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)}{2mr^2} - V(r) \qquad (2\text{-}25)$$

ile verilen etkin radyal Lagrangiendir. d Boyutta yazdığımız kerneli (2-11)'i göz önünde bulundurarak d = 3 ve d = 2 için daha önce yazdığımız radyal kernelinin ifadelerini sağladığını görmek mümkündür. Bunun için d = 3 için Denk (2-10)'u kullanırız.

$$K_1(r'',t'',r',t') = \lim_{N\to\infty}(4\pi)^N\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}\right)^{\frac{3N}{2}}\left(\frac{i\pi\varepsilon\hbar}{2m}\right)^{N/2}\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{r_j r_{j-1}}\right)^{1/2}$$

$$\exp \frac{i}{\hbar}\left\{\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2) - \varepsilon V(r_j)\right\}\Big]\, I_{l+1/2}\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)\prod_{j=1}^{N-1} r_j^2 dr_j$$

$$= \lim_{N\to\infty}(4\pi)^N(2\pi)^{-3N/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{N/2}\left(\frac{m}{i\varepsilon\hbar}\right)^N\left(\frac{1}{r_0 r_N}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{r_1^2 r_2^2\cdots r_{N-1}^2}\right)^{1/2}$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m}{2\varepsilon}(r_1^2+r_0^2) - \varepsilon V(r_1)\right)\right\} I_{l+1/2}\left(\frac{m r_1 r_0}{i\hbar\varepsilon}\right)$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m}{2\varepsilon}(r_2^2+r_1^2) - \varepsilon V(r_2)\right)\right\} I_{l+1/2}\left(\frac{m r_1 r_2}{i\hbar\varepsilon}\right)$$

.

.

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m}{2\varepsilon}(r_{N-1}^2+r_N^2) - \varepsilon V(r_N)\right)\right\} I_{l+1/2}\left(\frac{m r_N r_{N-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)$$

$$r_1^2 dr_1\, r_2^2 dr_2 \cdots\cdots r_{N-1}^2 dr_{N-1}$$

$$K_1(r'',t'',r',t') = \left(\frac{m}{i\hbar\varepsilon}\right)^N (r'r'')^{-1/2}\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m}{2\varepsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \varepsilon V(r_j)\right\} I_{l+1/2}\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right)\prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j \qquad (2\text{-}26)$$

Bu da Denk (2-20) de d = 3 alındığında elde edilen ifadenin aynısıdır.

Aynı işlemi d = 2 için yapalım. Bunun için Denk (2-17)'yi kullanırız.

$$K_1 = \lim_{N\to\infty} (2\pi)^{N-1} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}\right)^N \int \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(r_j)\right\}$$

$$\cdot I_l\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right) \prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j$$

$$= \lim_{N\to\infty} (2\pi)^{N-1} (2\pi)^{-N} \left(\frac{m}{i\varepsilon\hbar}\right)^N \int \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(r_j)\right\}$$

$$I_l\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right) \prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j$$

$$K_1(r'',t'',r',t') = (2\pi)^{-1} \left(\frac{m}{i\varepsilon\hbar}\right)^N \int \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(r_j)\right\}$$

$$I_l\left(\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\varepsilon}\right) \prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j \qquad (2\text{-}27)$$

Denk (2-20) de d = 2 koyduğumuzda $(2\pi)^{-1}$ dışında aynı ifadeyi bulmuş oluruz.

BÖLÜM : 3

KÜRESEL KOORDİNATLARDA YOL İNTEGRALİ HAMİLTONİEN BİÇİMİ

Küresel koordinatlarda yol integralini çıkarırken sistemin Lagrangien ile çalıştık. Daha önce de işaret edildiği gibi Klasik Mekanikte Poisson parantezleri ile tanımlanan Hamilton hareket denklemleri Kanonik dönüşümler altında değişmemektedir. Ayrıca Poisson parantezleri ile kuantum Heisenberg denklemleri arasında kuvvetli bir ilişki vardır.O nedenle yol integrallerinin kanonik dönüşümler altında nasıl değiştiğinin araştırılması önemli bir problemdir. Bunu anlamak için en iyi başlanılacak yer Hamiltoniyen yol integralidir. Daha önce de söylediğimiz gibi Hamiltoniyen integralinin kanonik dönüşümler altında aynı kaldığının genel bir kanıtı yoktur. Bu nedenle Hamiltonien integralinin çıkarılması dikkate değer bir durumdur. Genel olarak beklenen şudur. Klasikden farklı olarak uygun bir etkin Hamiltonien seçilirse, küresel koordinatlarda Hamiltonien yol integrali istenen bir kerneli verebilir. Burada açıklığa kavuşturmak istediğimiz durum Lagrangien ve Hamiltonien intagralleri arasındaki eşitliğin kanonik nokta dönüşümleri altında sürdürülüp sürdürülmiyeceğidir.

Merkezi V(r) potansiyeli etkisinde hareket eden m kütleli bir parçacığın dik koordinattaki yol integraliyle başlıyalım.

$$K(\vec{r}_b,\vec{r}_a,\tau) = \int \prod_{j=1}^{N} dr_j \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^{\tau} L(r,\dot{r})dt\right] \tag{3-1}$$

Buradaki Lagrangien ile sistemin Hamiltoniyeni arası ilgi şöyledir.

$$H=\sum_j p_j\dot{q}_j - L = \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m} + V(r_j)$$

$$L=\sum_{j=1}^{3} p_j\dot{q}_j - \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m} - V(r) = p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z} - \left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}\right) - V \tag{3-2}$$

Küresel koordinatlara iki adımda geçeceğiz. İlk olarak x-y düzleminde $\rho\in(0,\infty)$ ve $\varphi\in(0,2\pi)$ kutupsal koordinatları aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi \\
y &= \rho\sin\varphi
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}3)
$$

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\dot{x}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\theta - 2\dot{\rho}\rho\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$$

$$\dot{y}^2 = \dot{\rho}^2\sin^2\theta + 2\dot{\rho}\rho\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \longrightarrow \dot{x} = \frac{P_x}{m} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \longrightarrow \dot{y} = \frac{P_y}{m} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$P_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \longrightarrow \dot{\rho} = \frac{P_\rho}{m}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{m\rho^2}$$

$$P_x = P_\rho\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\rho}P_\varphi$$

$$P_y = P_\rho\sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{\rho}P_\varphi$$

$$P_z = P_z$$

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P_\rho^2 + \frac{P_\varphi^2}{\rho^2} + P_z^2$$

Bu tip dönüşümlere kanonik dönüşümler denir. Eğer Jacobien 1 ise klasik hareket denklemleri bu dönüşümler altında aynı kalır.

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial P_x}{\partial \rho} & \frac{\partial P_y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial P_x}{\partial \varphi} & \frac{\partial P_y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial P_\rho} & \frac{\partial y}{\partial P_\rho} & \frac{\partial P_x}{\partial P_\rho} & \frac{\partial P_y}{\partial P_\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial P_\varphi} & \frac{\partial y}{\partial P_\varphi} & \frac{\partial P_x}{\partial P_\varphi} & \frac{\partial P_y}{\partial P_\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 1$$

$$A=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

$$B=\begin{vmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial \rho} & \frac{\partial P_y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial P_x}{\partial \varphi} & \frac{\partial P_y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m\dot{\varphi}\sin\varphi & m\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -m(\dot{\rho}\sin\varphi+\rho\dot{\varphi}\cos\varphi) & m(\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi) \end{vmatrix} = m^2\rho\dot{\varphi}^2$$

$$C=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial P_\rho} & \frac{\partial y}{\partial P_\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial P_\varphi} & \frac{\partial y}{\partial P_\varphi} \end{vmatrix} = 0 \quad D=\begin{vmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial P_\rho} & \frac{\partial P_y}{\partial P_\rho} \\ \frac{\partial P_x}{\partial P_\varphi} & \frac{\partial P_y}{\partial P_\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}$$

Jacobiyeni 1 buluruz. Buna göre birlikte dönüşen tüm koordinat ve momentumların hacim elemanı hiç değişmiyecektir. Yukarıdaki kernel'de ise N tane koordinat ve N + 1 tane momentum vardır. Onun için ilk N koordinat ve N momentumun Jacobiyeni 1'dir, dolayısıyle hacim elemanları değişmez. Fazlalık N+1 momentum integralleri ise kendi Jacobiyenleri olan yukarıdaki ifadedeki D Jacobiyenin N+1 noktadaki değeri olan $D_{N+1} = D_b$ kadar değişirler. $D_b = 1/\rho_b$ olduğundan yeni koordinatlarda bunların hacim elemanında ρ_b^{-1} vardır. Böylece tüm kernel

$$K(\vec{r}_a,\vec{r}_b;\tau) = \frac{\rho_b^{-1}}{(2\pi)^3}\int \prod_{j=1}^{N} d\rho\, d\varphi\, dz \prod_{j=1}^{N+1} dP_\rho\, dP_\varphi\, dP_z$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^\tau dt\left[P_\rho\dot{\rho}+P_\varphi\dot{\varphi}+P_z\dot{z}-\frac{1}{2m}\left(P_\rho^2+\frac{P_\varphi^2}{\rho^2}+P_z^2\right)-V(r)\right]\right\} \tag{3-5}$$

haline gelir. Kernel için $\vec{r}_a$ ve $\vec{r}_b$ noktalarına göre simetrik bir ifade elde etmek için ρ faktörünü

$$\rho_b^{-1} = (\rho_a\rho_b)^{-1/2}\,(\rho_b/\rho_a)^{-1/2}$$

$$= (\rho_a\rho_b)^{-1/2}\exp \ln (\rho_b/\rho_a)^{-1/2}$$

$$= (\rho_a\rho_b)^{-1/2}\exp\left[i\int_0^\tau dt\,(i\dot{\rho}/2\rho)\right]$$

olarak yeniden yazarız. Bunu denk. (3-5) yerine yazalım.

$$K(\vec{r}_a,\vec{r}_b,\tau) = \frac{(\rho_a\rho_b)^{-1/2}}{(2\pi)^3}\int \prod_{j=1}^{N} d\rho\, d\varphi\, dz \prod_{j=1}^{N+1} dP_\rho\, dP_\varphi\, dP_z \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^\tau dt\, \frac{i\dot{\rho}}{2\rho}\hbar\right.$$

$$\left.\left[P_\rho\dot{\rho}+P_\varphi\dot{\varphi}+P_z\dot{z}-\frac{1}{2m}\left(P_\rho^2+\frac{P_\varphi^2}{\rho^2}+P_z^2\right)-V(r)\right]\right\} \tag{3-6}$$

daha sonra P_ρ 'yı $P_\rho \longrightarrow P_\rho - i\hbar/2\rho$ ile dönüştürürsek denklem aşağıdaki şekli alır.

$$K(\vec{r}_a,\vec{r}_b;\tau) = \frac{(\rho_a\rho_b)^{-1/2}}{(2\pi)^3}\int \prod_{j=1}^{N} d\rho\, d\varphi\, dz \prod_{j=1}^{N+1} dP_\rho\, dP_\varphi\, dP_z$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^\tau dt\left[P_\rho\dot{\rho}+P_\varphi\dot{\varphi}+P_z\dot{z}-\frac{1}{2}\left(P_\rho^2+\frac{P_\varphi^2-\hbar^2/4}{\rho^2}+P_z^2\right)\right.\right. \tag{3-7}$$

$$\left.\left.+\frac{i\hbar P_\rho}{2m\rho}-V(r)\right]\right\}$$

Bu katkı r_a ve r_b noktalarını aynı anda etkilemez r_a için ρ_a^{-1} katkısını $\rho_a^{-1} = (\rho_a \rho_b)^{-1/2} \exp(\frac{i}{\hbar}\int_0^{\tau} dt \frac{i\rho}{2\rho}\hbar)$ simetrikleştirmesiyle elde ederiz. Bu bize aşağıdaki bağıntıyı verir:

$$K(\vec{r}_a,\vec{r}_b;\tau) = \frac{(\rho_a \rho_b)^{-1/2}}{(2\pi)^3} \int \prod_{j=1}^{N} d\rho\, d\varphi\, dz \prod_{j=1}^{N+1} dP_\rho\, dP_\varphi\, dP_z$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt \left[P_\rho \dot{\rho} + P_\varphi \dot{\varphi} + P_z \dot{z} - \frac{1}{2m}\left(P_\rho^2 + \frac{P_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4}}{\rho^2} + P_z^2\right) - \frac{i\hbar P_\rho}{2m\rho} \right] - V(r) \right\} \qquad (3\text{-}8)$$

Fakat böyle bir terimin varlığı $\dot{\rho}$ hızındaki bir kayma anlamına gelir.

$$\rho_j - \rho_{j-1} \longrightarrow \rho_j - \rho_{j-1} \mp \frac{i\varepsilon\hbar}{2m\rho_j}$$

Bu durum $\varepsilon \to 0$ limitinde ortadan kalkar. Bu denklemin Green fonksiyonu

$$K(\vec{r}_a,\vec{r}_b;\tau) = \frac{(\rho_a \rho_b)^{-1/2}}{(2\pi)^3} \int_0^{\tau} \prod_{j=1}^{N} d\rho\, d\varphi\, dz \prod_{j=1}^{N+1} dP_\rho\, dP_\varphi\, dP_z$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau} dt \left[P_\rho \dot{\rho} + P_\varphi \dot{\varphi} + P_z \dot{z} \right] - \frac{1}{2m}\left(P_\rho^2 + \frac{P_\varphi^2 - \frac{\hbar^2}{4}}{\rho^2} + P_z^2\right) - V(r) \right] \right\} \qquad (3\text{-}9)$$

olarak yazılabilir. Denk (3-1)'de Wick dönmesi olarak bilinen $t \to it$ ve $\vec{r} \to i\vec{r}$ analitik uzatması ile istersek (3-7) ve (3-8) ifadelerindeki sanal terimlerden kurtulabiliriz.

Küresel koordinatlara dönüşümü tamamlamak için;

$$\rho = r\sin\theta$$

$$z = r\cos\theta$$

ile tanımlanan ρ, z den $r\in(0,\infty)$ ve $\theta\in(0,\pi)$'ye geçeceğiz. Önceki gibi aynı şekilde sonuçlanan Jacobien r_b^{-1} veya r_a^{-1}'i simetrikleştirerek Hamilton yol integralinin küresel koordinatlardaki şeklini elde ederiz.

$$K(\vec{r}_a,\vec{r}_b;\tau)=\frac{1}{(2\pi)^3}(r_a^2 r_b^2 \sin\theta_a \sin\theta_b)^{-1/2}\int\prod_{j=1}^{N} dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\prod_{j=1}^{N+1} dP_r\,dP_\theta\,dP_\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^\tau dt\left[P_r\dot{r}+P_\theta\dot{\theta}+P_\varphi\dot{\varphi}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2m}\left(P_r^2+\frac{P_\theta^2-\hbar^2/4}{r^2}+\frac{P_\varphi^2-\hbar^2/4}{r^2\sin^2\theta}\right)-V(r)\right]\right\} \tag{3-10}$$

Denk (3-10)'u kullanarak iki boyutlu kernel ifadesini aşağıdaki gibi yazarız. Basitlik olsun diye $m=1$ ve $\hbar=1$ olarak alabiliriz.

$$K(r_b\theta_b,r_a,\theta_a;\,T)=(r_a r_b)^{-1/2}\int\frac{DP_r}{(2\pi)}D_r\int\frac{DP_\theta}{(2\pi)}D_\theta \tag{3-11}$$

$$\exp\left\{i\int_0^\tau dt\left[P_r\dot{r}+P_\theta\dot{\theta}-\frac{1}{2}\left(P_r^2+\frac{P_\theta^2-1/4}{r^2}\right)-V(r)\right]\right\}$$

P_θ, θ ve P_r'ler üzerinden integral alarak sadece r'ye bağlı olan radyal kerneli elde edebiliriz. Bu durumda toplam kerneli şu biçimde ayırarak

$$K(b,a,\,T)=(r_a r_b)^{-1/2}\int\frac{DP_r}{(2\pi)}D_r\exp\left\{i\int_0^\tau\left[P_r\dot{r}-\frac{P_r^2}{2}-V(r)\right]dt\right\}$$

$$\int\frac{DP_\theta}{(2\pi)}D_\theta\exp\left\{i\int_0^\tau\left[P_\theta\dot{\theta}-\frac{P_\theta^2-1/4}{2r^2}\right]dt\right\}$$

$$=K_1(r_b,r_a,T)\,K_2(r_b;r_a,\theta_b,\theta_a;T) \tag{3-12}$$

iki kernelin çarpımı şekilde yazabiliriz. K_2'nin açık ifadesi

$$K_2(r;\theta_b,\theta_a;T)=\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{N+1}\frac{dP_\theta^j}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{N}d\theta_j\exp\left[i\sum_{j=1}^{N+1}P_\theta^j(\theta_j-\theta_{j-1})\right. \tag{3-13}$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{N+1}\frac{(P_\theta^{j2}-1/4)}{2r_j r_{j-1}}\right]$$

olur.

$$\sum_{j=1}^{N+1} P_\theta^j(\theta_j-\theta_{j-1}) = P_\theta^1(\theta_1-\theta_a) + P_\theta^2(\theta_2-\theta_1) + \cdots P_\theta^N(\theta_N-\theta_{N-1}) + P_\theta^{N+1}(\theta_b-\theta_N)$$

$$= P_\theta^1\theta_1 - P_\theta^1\theta_a + P_\theta^2\theta_2 - P_\theta^2\theta_1 + \cdots + P_\theta^N\theta_N - P_\theta^N\theta_{N-1} + P_\theta^{N+1}\theta_b - P_\theta^{N+1}\theta_N$$

$$= (P_\theta^2 - P_\theta^1)\theta_1 - P_\theta^1\theta_a \cdots\cdots - (P_\theta^{N+1} - P_\theta^N)\theta_N + P_\theta^{N+1}\theta_b$$

$$= [P_\theta^{N+1}\theta_b - (P_\theta^{N+1} - P_\theta^N)\theta_N \cdots - (P_\theta^2 - P_\theta^1)\theta_1 - P_\theta^1\theta_a]$$

Bütün θ lar $[0,2\pi]$ arasında integre edilir. Ek'te tartıştığımız $\theta_b = 2\pi$ den yansımış yolların analitiksel uzanımını düşünerek Denk (3-13)'u

$$K_2(r;\theta_b,\theta_a;T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \prod_{j=1}^{N+1} \frac{dP_\theta^j}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N} d\theta_j$$

$$\exp\{i[P_\theta^{N+1}(\theta_b+2\pi m) - (P_\theta^{N+1} - P_\theta^N)\theta^N \cdots$$

$$(P_\theta^2 - P_\theta^1)\theta^1 - P_\theta^1\theta_a] - i\varepsilon \sum_{j=1}^{N+1} \frac{(P_\theta^{j2} - 1/4)}{r_j r_{j-1}}\} \qquad (3\text{-}14)$$

şeklinde yazarız.Daha sonra $d\theta_j$ integralinden N tane δ fonksiyonu elde ederiz.

$$\delta(P_\theta^N - P_\theta^{N-1})\,\delta(P_\theta^{N-1} - P_\theta^N)\cdots\cdots\delta(P_\theta^1 - P_\theta^2) \qquad (3\text{-}15)$$

Bu N tane δ fonksiyonu hep aynı P_θ'yı verir.

$$K_2(r,\theta_b,\theta_a;T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{dP_\theta}{(2\pi)} \exp\{iP_\theta(\theta_b+2\pi m-\theta_a) - \frac{i}{2}(P_\theta^2 - \frac{1}{4})\sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int dP_\theta \exp\{-\frac{i}{2}(\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}})[P_\theta^2 - \frac{2P_\theta(\theta_b+2\pi m-\theta_a)}{\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}} - \frac{1}{4}]\}$$

Şimdi P_θ'ların integralini alabiliriz.

$$\int dP_\theta \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\right)\left[P_\theta^2 - \frac{2P_\theta(\theta_b + 2\pi m - \theta_a)}{\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}\right]\right\} \tag{3-16}$$

son yazdığımız integral Gaussiyen integrali biçimindedir. Gausiyen integraller için

$$\int dq\left[\exp(\alpha q^2 + \beta q)\right] = \left(\frac{\pi}{-\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \tag{3-17}$$

eşitliği vardır. Burada $\alpha = -\frac{i}{2}\left(\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\right)$ ve $\beta = i(\theta_b + 2\pi m + \theta_a)$ alırız. Buna göre integralin sonucu

$$K_2(r,\theta_b,\theta_a;T) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\frac{i}{2}\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}\right]^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i\pi\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2\pi} + m\right)^2}{-\frac{1}{2\pi}\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}\right\} \exp\left[\frac{i}{2}\left(\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\right)\frac{1}{4}\right] \tag{3-18}$$

olur. Ayrıca

$$\tau = -\frac{1}{2\pi}\left(\sum_j \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\right), \quad z = \frac{(\theta_b - \theta_a)}{2\pi}$$

değişken değiştirmesiyle $\theta_3\ (z,\tau)$ fonksiyonu biçiminde yazarız.

$$\frac{1}{2\pi}\theta_3(z,\tau) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-i\tau}\right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\pi \frac{(m+z)^2}{\tau}\right\}$$

$\theta_3(z,\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi bir başka $\theta_3\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$ fonksiyonuyla tanımlıdır.

$$\theta_3(z,\tau) = \theta_3\left(\frac{z}{\tau}, \frac{1}{\tau}\right) \exp\left[-i\pi \frac{z}{\tau} z\right]\left(\frac{1}{\tau}\right)^{1/2} \tag{3-19}$$

(3-19) eşitliğini kullanarak $K_2(r,\theta_b,\theta_a;\ T)$ yi yeniden yazalım.

$$K_2 = \frac{1}{2\pi}\,\theta_3\left(-\frac{\theta_b - \theta_a}{\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}, \frac{2\pi}{\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}\right) \exp\left[-i\pi \frac{(\theta_b - \theta_a)}{-2\pi \sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}\right]\left(\frac{2\pi}{i\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i}{2}\sum \frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\right)\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{i\sum\frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}\right)^{1/2} \exp\left[i\pi\frac{(\theta_b-\theta_a)^2}{2\pi\sum\frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}\right] \exp\left(\frac{i}{2}\sum\frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\right)\frac{1}{4}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{i\sum\frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{2}m^2\left(\sum\frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\right) + im(\theta_b-\theta_a) + i\pi\frac{(\theta_b-\theta_a)^2}{2\pi\sum\frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}}\right\}$$

$$K_2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\theta_b-\theta_a)]\exp\left[-i\frac{m^2}{2}\sum\frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\right]\exp\left[\frac{i}{2}\sum\frac{\varepsilon}{r_j r_{j-1}}\frac{1}{4}\right] \qquad (3\text{-}20)$$

Son olarak bulduğumuz ifadeyi toplam kernelde yerine yazalım ve P_r leri integre edelim.

$$K(b,a;T) = \frac{1}{2\pi}(r_b r_a)^{-1/2}\int Dr \int \frac{DP_r}{(2\pi)} \exp\left\{i\int dt\left[P_r\dot{r} - \frac{P_r^2}{2} - V(r)\right]\right\}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left[im(\theta_b-\theta_a) - \frac{i}{2}\int_0^T dt\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}\right] \qquad (3\text{-}21)$$

P_r^j leri integre etmeden önce seriye açalım.

$$\int\prod_{j=1}^{N+1} dP_r^j \exp\sum_{j=1}^{N+1} i\varepsilon\left[P_r^j\frac{(r_j-r_{j-1})}{\varepsilon} - \frac{P_r^{j2}}{2} - V(r_j)\right] \qquad (3\text{-}22)$$

$$= \int dP_r^1\, dP_r^2 \cdots dP_r^{N+1} \exp\left\{i\varepsilon\left[P_r^1\frac{(r_1-r_0)}{\varepsilon} - \frac{P_r^{12}}{2} - V(r_1)\right]\right\}$$

$$\cdot \exp\left\{i\varepsilon\left[P_r^2\frac{(r_2-r_1)}{\varepsilon} - \frac{P_r^{22}}{2} - V(r_2)\right]\right\} \cdots \exp\left\{i\varepsilon\left[P_r^{N+1}\frac{(r_{N+1}-r_N)}{\varepsilon} - \frac{P_r^{N+1\,2}}{2} - V(r)\right]\right\}$$

Görüldüğü gibi her bir integral bir Gaussyen integraldir. Gaussiyen integralinin sonucunu kullanarak

$$K(b,a;T) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[im(\theta_b-\theta_a)](r_a r_b)^{-1/2}\left(\frac{1}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N+1}{2}}$$

$$\int Dr \exp\left\{i\sum_{j=1}^{N}\varepsilon\left[\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{(m^2-1/4)}{2r^2} - V(r)\right]\right\} \qquad (3\text{-}23)$$

yazarız. Burada radyal kernel

$$K_m = (r_a r_b)^{-1/2} \int \prod_{j=1}^{N} dr_j \exp\left\{ i \int dt \left[\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{(m^2 - 1/4)}{2r^2} - V(r) \right] \right\} \qquad (3\text{-}24)$$

dir ve Denk (2-24) ile uyum içindedir.

Şimdi Bessel fonksiyonunun asimtotik ifadesini kullanarak modife edilmiş eylem tarafından kerneli karekterize edebiliriz. Bunun için Bessel fonksiyonunun asimtotik ifadesinin

$$I_m(u/\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2\pi u}\right)^{1/2} \exp\left[(u/\varepsilon) - (m^2 - 1/4)\frac{\varepsilon}{2u} + o(\varepsilon^2) \right] \qquad (3\text{-}25)$$

olduğunu hatırlayarak, toplam kerneli

$$K(r_b, \theta_b; r_a, \theta_a; T) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\theta_b - \theta_a)] \int \prod_{j=1}^{N} r_j dr_j$$

$$I_m\left(\frac{r_j r_{j-1}}{i\varepsilon}\right) \exp\left[i \sum_j \left(\frac{1}{2\varepsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \varepsilon V(r_j) \right) \right] \qquad (3\text{-}16)$$

son şekliyle yazarız. Bunun radyal kısmı daha önce Lagrangien yol integralinden elde ettiğimiz Denk (2-27) deki radyal kernelin aynısıdır. Böylece küresel koordinatlarda Hamilton yol integraliyle Lagrangien yol integrali arasındaki eşitliği göstermiş oluruz.

Böylece yol integrali ister Hamilton biçiminde isterse Lagrangien biçimde olsun; radyal kerneli yazarak sistemin hareketini etkin bir potansiyelde harekete indirgeyebileceğimizi gösterdik. Bu sonuçların yardımıyla Denk (2-25) te elde ettiğimiz etkin radyal Lagrangien'de ν' yü uygun bir şekilde tanımlayarak ters kare potansiyel tarafından tedirgenmiş bir salıngan için radyal kerneli düzenleyebiliriz.

BÖLÜM : 4

$1/X^2$ POTANSİYELİ TARAFINDAN TEDİRGENMİŞ HARMONİK SALINGANIN ÇÖZÜMÜ

g şiddetinin ters kare potansiyeli tarafından tedirgenmiş $w^2(t)$ frekanslı izotropik salıngan için, potansiyel

$$V(r) = \frac{1}{2} m w^2(t) r^2 + g/r^2 \tag{4-1}$$

olarak verilir. Daha önce de söylediğimiz gibi, Bessel fonksiyonunun ν mertebesi için uygun değerler vererek etkin radyal Lagrangienin ters kare teriminde g/r^2 terimi soğrulanabilir. Etkin radyal Lagrangien

$$L(r,r,t) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{\hbar^2(\nu^2 - \frac{1}{4})}{2mr^2} - V(r)$$

$$\lambda^2 = \nu^2 + 2mg/\hbar^2$$

olduğunu hatırlayarak Harmonik salıngan için Lagrangieni aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$L(r,r,t) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{\hbar^2}{2mr^2}(\lambda^2 - 2mg/\hbar^2 - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{2} m w^2 r^2 + g/r^2)$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{\hbar^2}{2mr^2}(\lambda^2 - 1/4) - \frac{1}{2} m w^2 r^2 \tag{4-2}$$

Eylem ise;

$$S = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{m(r_j - r_{j-1})}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon\hbar^2}{2m r_j r_{j-1}}(\lambda^2 - 1/4) - \frac{1}{2} m w_j^2 r_j^2 \right] \tag{4-3}$$

olur. Bunu Denk (2-24) te yerine yazarak

$$K_1(r'',r',T) = (r'r'')^{1/2-d/2} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2} \int\int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{N} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j - r_{j-1})^2 - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m r_j r_{j-1}}(\lambda^2 - 1/4) - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_j^2 r_j^2 \right]$$

$$= (r' r'')^{1/2 - d/2} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon} \right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j$$

$$\prod_{j=1}^{N} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \frac{im}{\hbar\varepsilon} r_j r_{j-1} - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m r_j r_{j-1}}(\lambda^2 - 1/4) - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_j^2 r_j^2 \right] \qquad (4\text{-}4)$$

radyal kernelin basit formunu elde ederiz. Daha sonra r_j leri açarak kerneli daha açık bir şekilde yazarız.

$$K_1(r'', r', T) = (r' r'')^{1/2 - d/2} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon} \right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_1^2 + r_0^2) - \frac{im}{\hbar\varepsilon} r_1 r_0 - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m r_1 r_0}(\lambda^2 - 1/4) - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_1^2 r_1^2 \right]$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_2^2 + r_1^2) - \frac{im}{\hbar\varepsilon} r_2 r_1 - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m r_2 r_1}(\lambda^2 - 1/4 - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_2^2 r_2^2 \right]$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_3^2 + r_2^2) - \frac{im}{\hbar\varepsilon} r_3 r_2 - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m r_3 r_2}(\lambda^2 - 1/4) - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_3^2 r_3^2 \right]$$

$$\vdots$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_N^2 + r_{N-1}^2) - \frac{im}{\hbar\varepsilon} r_N r_{N-1} - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m r_N r_{N-1}}(\lambda^2 - 1/4) - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_{N-1}^2 r_{N-1}^2 \right]$$

$$K_1(r'', r', T) = \lim_{N \to \infty} (r' r'')^{1/2 - d/2} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon} \right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_0^2 + 2r_1^2 + 2r_2^2 \cdots \cdot 2r_{N-1}^2 + r_N^2) - \frac{im}{\hbar\varepsilon} r_1 r_0 \right.$$

$$- \frac{i\hbar\varepsilon}{2m r_1 r_0}(\lambda^2 - 1/4) - \frac{im}{\hbar\varepsilon} r_2 r_1 - \frac{i\hbar\varepsilon}{2m r_2 r_1}(\lambda^2 - 1/4) \cdots$$

$$\cdots - \frac{im}{\hbar\varepsilon} r_N r_{N-1} - \frac{i\hbar\varepsilon}{2m r_N r_{N-1}}(\lambda^2 - 1/4) - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_1^2 r_1^2$$

$$\left. \cdots\cdots - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_{N-1}^2 r_{N-1}^2 \right.$$

$$I(u/\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2\pi u} \right)^{1/2} \exp\left(u/\varepsilon - \frac{1}{2}\{\lambda^2 - 1/4\}\frac{\varepsilon}{u} + O(\varepsilon^2) \right) \qquad (4\text{-}5)$$

her zaman olduğu gibi Bessel fonksiyonunun asimtotik ifadesini kullanabiliriz.

$$\frac{u}{\varepsilon} = -\frac{im}{\varepsilon\hbar} r_j r_{j-1}$$

$$I_\lambda\left(-\frac{im}{\varepsilon\hbar} r_j r_{j-1}\right) = \left(\frac{i\varepsilon\hbar}{2\pi m r_j r_{j-1}}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{im}{\varepsilon\hbar} r_j r_{j-1} - \frac{1}{2}\left\{\lambda^2 - 1/4\right\}\frac{i\varepsilon\hbar}{m r_j r_{j-1}}\right]$$

$$K_1(r'',r',T) = \lim_{N\to\infty} (r'r'')^{1/2-d/2} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j$$

$$\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_0^2 + r_N^2)\right] \exp\left[\frac{im}{\hbar\varepsilon}(r_1^2 + r_2^2 + \cdots r_{N-1}^2)\right.$$

$$\left. - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_1^2 r_1^2 - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_2^2 r_2^2 \cdots - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m w_{N-1}^2 r_{N-1}^2\right]$$

$$\left(\frac{2\pi m r_0 r_1}{i\varepsilon\hbar}\right)^{1/2}\left(\frac{i\varepsilon\hbar}{2\pi m r_0 r_1}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{im r_0 r_1}{\varepsilon\hbar} - \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1/4)\frac{im}{\varepsilon\hbar} r_0 r_1\right]$$

$$\left(\frac{2\pi m r_1 r_2}{i\varepsilon\hbar}\right)^{1/2}\left(\frac{i\varepsilon\hbar}{2\pi m r_1 r_2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{im r_1 r_2}{\varepsilon\hbar} - \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1/4)\frac{im}{\varepsilon\hbar} r_1 r_2\right]$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{2\pi m r_{N-1} r_N}{i\varepsilon\hbar}\right)^{1/2}\left(\frac{i\varepsilon\hbar}{2\pi m r_N r_{N-1}}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{im r_{N-1} r_N}{\varepsilon\hbar} - \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1/4)\frac{im}{\varepsilon\hbar} r_{N-1} r_N\right]$$

$$K_1(r'',r',T) = \lim_{N\to\infty} (r'r'')^{1/2-d/2} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2}\left(\frac{2\pi m}{i\varepsilon\hbar}\right)^{N/2} (r_0 r_N)^{1/2}$$

$$\int r_1 dr_1\, r_2 dr_2 \cdots r_{N-1} dr_{N-1} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_0^2 + r_N^2)\right]$$

$$\exp\left[\frac{im}{\hbar\varepsilon}(r_1^2 + r_2^2 \cdots r_{N-1}^2) - \frac{i\varepsilon}{2\hbar} m (r_1^2 w_1^2 + r_2^2 w_2^2 + \cdots r_{N-1}^2 w_{N-1}^2\right]$$

$$I_\lambda\left(-\frac{im}{\hbar\varepsilon} r_1 r_0\right) I_\lambda\left(-\frac{im}{\hbar\varepsilon} r_1 r_2\right) \cdots I_\lambda\left(-\frac{im}{\hbar\varepsilon} r_{N-1} r_N\right)$$

$r_0 = r' \quad r_N = r''$

$$K_1(r'',r',T) = \lim (r'r'')^{1-d/2} \left(\frac{m}{i\hbar\varepsilon}\right)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(r_0^2 + r_N^2)\right]$$

$$\exp\left[\frac{im}{\hbar\varepsilon}(r_1^2 + r_2^2 + \cdots r_{N-1}^2) - \frac{i\varepsilon m}{2\hbar}(r_1^2 w_1^2 + r_2^2 w_2^2 \cdots r_{N-1}^2 w_{N-1}^2)\right]$$

$$I_\lambda\left(-\frac{im}{\hbar\varepsilon} r_1 r_0\right) I_\lambda\left(-\frac{im}{\hbar\varepsilon} r_1 r_2\right) \cdots I_\lambda\left(-\frac{im}{\hbar\varepsilon} r_{N-1} r_N\right) \quad (4\text{-}6)$$

$$\alpha_j = \beta(1 - w_j^2\varepsilon^2/2) \qquad \beta = m/\hbar\varepsilon$$

niceliklerini tanımlayarak, radyal kerneli;

$$K_1(r'',r',T) = \lim_{N\to\infty} (r'r'')^{1-d/2}(-i\beta)^N \int \prod_{j=1}^{N-1} r_j dr_j \exp \frac{i\beta}{2}(r'^2 + r''^2)$$

$$\exp[i(\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \cdots \alpha_{N-1} r_{N-1}^2)]$$

$$I_\lambda(-i\beta r_1 r_0)\, I_\lambda(-i\beta r_1 r_2)\cdots I_\lambda(-i\beta r_{N-1} r_N) \qquad (4\text{-}7)$$

olarak yazarız. Bu integrali

$$\int_0^\infty \exp(i\alpha x^2)\, I_\nu(-ibx)\, I_\nu(-icx)\, x\,dx =$$
$$\frac{1}{2\alpha}\exp\left[-\frac{i}{4\alpha}(b^2+c^2)\right] I_\nu(-ibc/2\alpha) \qquad (4\text{-}8)$$
$$Re(\alpha)>0 \quad Re(\nu)>-1$$

eşitliğini kullanarak alabiliriz.

$$K_1(r'',r',T) = \lim_{N\to\infty} (r'r'')^{1-d/2}(-i\beta)^N \int r_1 dr_1\, r_2 dr_2 \cdots r_{N-1} dr_{N-1}$$

$$\exp\left[\frac{i\beta}{2}(r'^2 + r''^2)\right] \exp[i(\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 \cdots \alpha_{N-1} r_{N-1}^2)]$$

$$I_\lambda(-i\beta r_0 r_1)\, I_\lambda(-i\beta r_1 r_2)\cdots I_\lambda(-i\beta r_{N-1} r_N)$$

$$K_1(r'',t''\, r',t') = \lim_{N\to\infty} (r'r'')^{1-d/2}(-i\beta)^N \exp[i\beta(r'^2 + r''^2)] \int r_1 dr_1 \cdots$$
$$r_{N-1} dr_{N-1} \exp[i(\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 \cdots \alpha_{N-1} r_{N-1}^2)]$$
$$I_\lambda(-i\beta r_1 r_0)\, I_\lambda(-i\beta r_2 r_1)\cdots I_\lambda(-i\beta r_{N-1} r_N) \qquad (4\text{-}9)$$

Bütün r leri (4-8)'i kullanarak integre edelim.

r_1 için
$$\int r_1 dr_1 \exp(i\alpha_1 r_1^2)\, I(-i\beta r_0 r_1)\, I_\lambda(-i\beta r_1 r_2) =$$

$$\frac{i}{2\alpha_1}\exp\left[-\frac{i}{4\alpha_1}\{(\beta r_0)^2 + (\beta r_2)^2\}\right] I_\lambda\left(-\frac{i\beta r_0 \beta r_2}{2\alpha_1}\right)$$

$$= \frac{i}{2\alpha_1}\left[\exp\left(-\frac{i}{4\alpha_1}\beta^2 r_0^2\right)\right] \exp\left(-\frac{i}{4\alpha_1}\beta^2 r_2^2\right) I_\lambda\left(-\frac{i\beta^2 r_0 r_2}{2\alpha_1}\right)$$

r_2 için
$$\int r_2 dr_2 \exp(i\alpha_2 r_2^2) \exp\left(-\frac{i}{4\alpha_1}\beta^2 r_2^2\right) I_\lambda\left(-i\beta^2 \frac{2 r_0 r_2}{2\alpha_1}\right) I_\lambda(-i\beta r_2 r_3) =$$

$$= \frac{i}{2\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)} \exp\left\{-\frac{i}{4\left(\alpha - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\left[\left(\frac{\beta^2 r_0}{2\alpha_1}\right)^2 + (\beta r_3)^2\right]\right\} I_\lambda\left[\frac{-i\,\frac{\beta^3 r_0 r_3}{2\alpha_1}}{2\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right]$$

$$= \frac{i}{2\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)} \exp\left[-\frac{i}{4\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\left(\frac{\beta^4 r_0^2}{4\alpha_1^2}\right)\right] \exp\left[-\frac{i\beta^2 r_3^2}{4\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right] I_\lambda\left(-\frac{i\beta^3 r_0 r_3}{4\alpha_1\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)$$

r_3 için
$$\int r_3 dr_3 \exp\left\{i\left[\alpha_3 - \frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)}\right]\right\} r_3^2 I_\lambda\left[-\frac{i\beta^3 r_0 r_3}{2\alpha_1^2\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right] I_\lambda(-i\beta r_3 r_4)$$

$$= \frac{i}{2\left[\alpha_3 - \frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right]} \exp\left\{-\frac{i\beta^6 r_0^2}{4\alpha_1^2\, 4\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right) 4\left(\alpha_3 - \frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)}\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{i\beta^2 r_4^2}{4\left(\alpha_3 - \frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)}\right\} I\left(-\frac{\beta^4 r_0 r_4}{4\alpha_1(\alpha_2 - \beta^2/4\alpha_1)}\right) \Big/ 2\left[\alpha_3 - \frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right]$$

r_{N-1} için
$$\int r_{N-1} dr_{N-1} \exp\left[i\left(\alpha_{N-1} - \frac{\beta^2}{4\left(\alpha_{N-1} - \frac{\beta^2}{4(\alpha_{N-1}\cdots}\right.}\right)\right] r_{N-1}^2$$

$$I\left(-i\frac{\beta^{N-1} r_0 r_{N-1}}{2\alpha_1 2\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right) 2\left(\alpha_3 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)\cdots 2\left(\alpha_{N-1} - \frac{\beta^2}{4\alpha - \cdots}\right.}\right) I_\lambda(-i\beta r_{N-1} r_N)$$

$$= \frac{i}{2\left(\alpha_{N-1} - \frac{\beta^2}{4(\alpha_{N-2} - \beta^2\cdots}\right)} \exp\left[-\frac{i}{4\left(\alpha_{N-1} - \frac{\beta^2}{4(\alpha_{N-2}\cdots}\right)}\left(\frac{\beta^{2N-2} r_0^2}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)^2\cdots}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{r_N^2}{4\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{4(\alpha_{N2}\cdots}\right.}\right] I\left[-i\frac{\beta^{N-1}\beta r_0 r_N}{2\alpha_1 2\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)\cdots 2\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{4\alpha_{N-2}}\right.}\right]$$

$$K(r'',r',T) = (r'r'')^{1-d/2}(-i\beta)^N\exp\left[\frac{i\beta}{2}(r'^2+r''^2)\right]\frac{i}{2\alpha_1}\exp\left(-\frac{i}{4\alpha_1}\beta^2 r'^2\right)$$

$$\frac{i}{2\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\exp\left[-\frac{i\beta^4 r'^2}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right]\left[\frac{i}{2\left[\alpha_3-\frac{\beta^2}{\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right]}\right]$$

$$\exp\left[-\frac{i\beta^6 r'^2}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)^2 4\left(\alpha_3-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)}\right]\cdots$$

$$\frac{i}{2\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_{N-2}-\frac{\beta^2}{4(\alpha_{N-3}}\cdots\right.}\right.}\exp\left[-\frac{i\beta^{2N-2}r'^2}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)^2\cdots 4\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{\cdots}\right.}\right]$$

$$\exp\left[-\frac{ir''^2\beta^2}{4\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{4(\alpha_{N-2}\cdots}\right.}\right] I_\lambda\left[-i\frac{\beta^N r'r''}{2^{N-1}\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)\cdots}\right]$$

$$= (r'r'')^{1-d/2}(-i\beta)^N\frac{i^{N-1}}{2^{N-1}\alpha_1\left(\alpha_1-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)\left(\alpha_3-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)\cdots\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{4(\alpha_{N-2}\cdots}\right.}$$

$$\exp\left\{i\left[\frac{\beta^2}{2}-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}-\frac{\beta^4}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}-\frac{\beta^6}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)4\left(\alpha_3-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots\right\}r'^2\exp i\left\{\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_{N-1}-\beta^2\cdots\right.}\right\}r''^2\, I_\lambda\left[-i\frac{\beta^N r'r''}{2^{N-1}\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)\cdots}\right.$$

$$K(r'',t''\,r',t') = -i(r'r'')^{1-d/2}\frac{\beta^N}{2^{N-1}\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)\left(\alpha_3-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right.}\cdots\right.}$$

$$\exp\left\{i\left[\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}-\frac{\beta^4}{4\left(\alpha_1-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)4\alpha_1^2}-\frac{\beta^6}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)^2 4\left(\alpha_3-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)}\right.\right.$$

$$\cdots - \frac{\beta^{2N-2}}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)^2 4\left(\alpha_3-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)\cdots 4\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{4(\alpha_{N-2}-\beta^2}\right.}\Big]\Big\} r''$$

$$\exp\left\{ i\left[\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{4(\alpha_{N-2}\cdots}\right.}\right]\right\} r''^2 I_\lambda\left[-\frac{i\beta^N r' r''}{2^{N-1}\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)\left(\alpha_3-\cdots\right.}\right]$$

(4-9) denklemini aşağıdaki sabitleri tanımlayarak

$$a_N = \beta \prod_{j=1}^{N-1} (\beta/2\gamma_j) \qquad (4\text{-}10a)$$

$$p_N = \frac{1}{2}\beta - \sum (\beta_j^2/4\gamma_j) \qquad (4\text{-}10b)$$

$$q_N = \frac{1}{2}\beta - (\beta^2/4\gamma_{N-1}) \qquad (4\text{-}10c)$$

$$K(r'',t''\ r't') = \lim_{N\to\infty} (-i)(r'r'')^{1-d/2} a_N \left[(ip_N r''^2 + iq_N r'^2)\right]$$

$$I_\lambda(-ia_N r'r'') \qquad (4\text{-}11)$$

yazarız. Ayrıca katsayılar

$$\gamma_1 = \alpha_1 \qquad \gamma_j = \alpha_j - \beta^2/4\gamma_{j-1} \qquad j \geqslant 2 \qquad (4\text{-}12a)$$

$$\beta_1 = \beta \qquad \beta_j = \beta \prod_{k=1}^{j-1} (\beta/2\gamma_k) \qquad j \geqslant 2 \qquad (4\text{-}12b)$$

ilişkisini sağlarlar.

$$a_N = \beta \prod_{j=1}^{N-1}\left(\frac{\beta}{2\gamma_j}\right) = \beta\left[\frac{\beta}{2\gamma_1}\,\frac{\beta}{2\gamma_2}\,\frac{\beta}{2\gamma_3}\cdots\cdots\frac{\beta}{2\gamma_{N-1}}\right]$$

$$= \frac{\beta^N}{2^{N-1}\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)\left(\alpha_3-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4}\right)}\right)\cdots}$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 \qquad \gamma_2 = \alpha_2 - \frac{\beta^2}{4\alpha_2} \qquad \gamma_3 = \alpha_3 - \frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}$$

$$\beta_1 = \beta \qquad \beta_j = \beta\prod_{k=1}^{j-1}\left(\frac{\beta}{2\gamma_k}\right) \qquad \beta_2 = \beta\frac{\beta}{2\gamma_1} = \beta\frac{\beta}{2\alpha_1}$$

$$\beta=\beta\frac{\beta}{2\gamma_1}\,\frac{\beta}{2\gamma_2}=\frac{\beta^3}{4\alpha_1\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{\alpha_1}\right)}$$

$$p_N=\frac{\beta}{2}-\sum\left(\beta_j^2/4\gamma_j\right)=\frac{\beta}{2}-\left\{\frac{\beta_1^2}{4\gamma_1}+\frac{\beta_2^2}{4\gamma_2}+\cdots+\frac{\beta_{N-1}^2}{4\gamma_{N-1}}\right\}$$

$$=\frac{\beta}{2}-\left\{\frac{\beta^2}{4\alpha_1}+\frac{\beta^4}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}+\frac{\beta^6}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)^2 4\left(\alpha_3-\frac{\beta^2}{2\left(\alpha-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)}\right.$$

$$\cdots\frac{\left(\beta^{N-1}\right)^2}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)^2 4\left(\alpha_3-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_2-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}\right)}\right)^2\cdots 4\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_{N-1}-\beta^2\cdots\right.}\right.}$$

$$=\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^2}{4\alpha_1}-\frac{\beta^4}{4\alpha_1^2 4\left(\alpha_2-\beta^2/4\alpha_1\right)}\cdots$$

$$q_N=\frac{1}{2}\beta-\left(\frac{\beta^2}{4\gamma_{N-1}}\right)=\frac{\beta^2}{2}-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_{N-1}-\frac{\beta^2}{4\left(\alpha_{N-2}-\cdots\right.}\right.}$$

böylece kernelin elde edilmesi meselesi a_N p_N ve q_N'nin N olarak düzenlenmesine indirgenir. İlk önce

$$Q_{j+1}/\,Q_j=2\gamma_j/\beta \qquad (4\text{-}13)$$

ilişkisi ile tanımlanan yeni bir niceliği tanımlarız.Bu eşitlik şunu ima eder.

$$Q_{j+1}=Q_1\prod_{k=1}^{j}\left(2\gamma_k/\beta\right) \qquad (4\text{-}14)$$

$$\alpha_j=\beta\left(1-w_j^2\varepsilon^2/2\right)\quad \beta=\frac{m}{\hbar\varepsilon}\quad \gamma_j=\alpha_j-\beta^2/4\gamma_{j-1}$$

$$Q_{j+1}=Q_j\left(2\gamma_j/\beta\right)=\frac{2}{\beta}Q_j\left(\alpha_j-\beta^2/4\gamma_{j-1}\right)$$

$$=\frac{2}{\beta}Q_j\alpha_j-Q_j\frac{\beta}{2\gamma_{j-1}}=\frac{2}{\beta}Q_j\beta\left(1-w^2\varepsilon^2/2\right)-Q_j\frac{Q_{j-1}}{Q_j}$$

$$\left(Q_{j+1}-2Q_j+Q_{j-1}\right)/\varepsilon^2=-w_j^2Q_j \qquad (4\text{-}15)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\varepsilon} = \dot{Q}_j \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Q_j - Q_{j-1}}{\varepsilon} = \dot{Q}_{j-1}$$

$$\ddot{Q} = \frac{\dot{Q}_j - \dot{Q}_{j-1}}{\varepsilon} = \frac{Q_{j+1} - Q_j - Q_j + Q_{j-1}}{\varepsilon^2} \quad \frac{Q_{j+1} - 2Q_j + Q_{j-1}}{\varepsilon^2}$$

$$\ddot{Q} + w^2(t)\, Q = 0 \tag{4-16}$$

Diferansiyel denklemine indirgenir. Daha sonra Q(t) çözümlerinin sağlaması gereken ek koşulları çıkarırız. (4-14) 'de j = 1 alırsak

$$Q_2 = (2\gamma_1/\beta)Q_1 \tag{4-17}$$

elde ederiz. $Q_j = Q(t'+j\varepsilon)$, j = 1,2 ... olduğunu hatırlayarak Q'da bir güç serisinde Q_1 ve Q_2'yi açarız. $\varepsilon \to 0$ limitinde eşit ε güçlerinin kıyaslanmasıyla gerekli olan şu koşula gideriz.

$$Q(t') = Q_0 = 0 \tag{4-18}$$

$$Q_1 = Q(t'+\varepsilon) = Q(t') + \varepsilon\dot{Q}(t') + \ldots$$

$$Q_2 = Q(t'+2\ ) = Q(t') + 2\varepsilon\dot{Q}(t') + \ldots$$

$$Q_{j+1} = Q_1 \prod_{k=1}^{j} (2\gamma_k/\beta)$$

$$Q_{N+1} = Q_1 \prod_{k=1}^{N-1} (2\gamma_k/\beta)$$

$$a_N = \beta Q_1/Q_N \tag{4-19}$$

$$Q_1 = Q(t'+\varepsilon) = Q(t') + \varepsilon\dot{Q}(t') + \frac{\varepsilon^2}{2!}\ddot{Q}(t')$$

$$Q_1 = Q_0 + \varepsilon\,\dot{Q}_0 + 0\,(\varepsilon^2) \tag{4-20}$$

$$Q_0 = Q\,(t') = 0$$

koşulunu göz önüne alırsak

$$a_N = \frac{m}{\hbar}\,\frac{\dot{Q}(t')}{Q(t'')} \tag{4-21}$$

olur.

$$\beta_j = \beta \prod_{k=1}^{j-1} (\beta/2\gamma_k)$$

$$\frac{Q_j}{Q_1} = \prod_{k=1}^{j-1} (2\gamma_k/\beta)$$

$$\beta_j/\beta = \frac{Q_1}{Q_j} \tag{4-22}$$

$$p_N = \frac{1}{2}\beta - \sum_{j=1}^{N-1}(\beta_j^2/4\gamma_j) = \frac{\beta}{2} - \sum_{j=1}^{N-1}\beta_j\,\frac{\beta_j}{4\gamma_j}$$

$$= \frac{\beta}{2} - \sum_{j=1}^{N-1}\beta\prod_{k=1}^{j-1}\frac{\beta}{2\gamma_k}\,\frac{\beta_j}{4\gamma_j}$$

$$= \frac{\beta}{2} - \sum_{j=1}^{N-1}\frac{Q_1}{Q_j}\,\frac{\beta}{2\gamma_j}\,\frac{\beta_j}{2}$$

$$= \frac{\beta}{2} - \sum_{j=1}^{N-1}\frac{Q_1}{Q_{j+1}}\,\frac{\beta}{2}\prod_{k=1}^{j-1}\frac{\beta}{2\gamma_k}$$

$$= \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{Q_1^2}{Q_j\,Q_{j+1}}$$

$$p_N = \frac{\beta}{2}\left[1 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{Q_1^2}{Q_j Q_{j+1}}\right]$$

$$\lim_{N\to\infty} p_N = \frac{m\dot{Q}'}{2\hbar Q''} \tag{4-23}$$

son olarak q_N'i yazalım.

$$q_N = \frac{\beta}{2} - \left(\frac{\beta^2}{4\gamma_{N-1}}\right) ; \quad \frac{Q_{N-1}}{Q_N} = \frac{\beta}{2\gamma_{N-1}}$$

$$q_N = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{2\gamma_{N-1}}\right) = \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{Q_{N-1}}{Q_N}\right)$$

$$= \frac{m}{2\hbar\varepsilon}\left(\frac{Q_N - Q_{N-1}}{Q_N}\right)$$

$$\frac{m}{2\hbar}\left(\frac{Q_N - Q_{N-1}}{\varepsilon}\right)\frac{1}{Q_N}$$

$$\lim_{N\to\infty} q_N = \frac{m\dot{Q}''}{2\hbar Q'} \tag{4-24}$$

Katsayılar aracılığıyla tanımladığımız a_N, p_N ve q_N nicelik-lerini Denk (4-11) de yerine koyduğumuzda, 1,2 ve 3 boyutlu sis-temler için radyal krnel ifadelerini genel bir biçimde

$$K_l(r'',t''\ r',t') = \frac{m}{i\hbar}(r'r'')^{1-d/2}\frac{\dot{Q}'}{Q''}\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\left\{\frac{\dot{Q}'}{Q''}r''^2 + \frac{\dot{Q}''}{Q''}r'^2\right\}\right]$$
$$I_{\lambda d}\left[-\frac{im\dot{Q}'}{\hbar Q''}r'r''\right] \tag{4-25}$$

olarak yazarız. d sembolü sistemin boyutluluğunu gösterir. 3,2 ve 1 boyutlu problemler için λ_d sabitleri

$$\lambda_d^2 = \begin{cases} (l+\frac{1}{2})^2 + 2mg^2/\hbar & d=3 \\ l^2 + 2mg^2/\hbar^2 & d=2 \\ (2mg/\hbar^2) + 1/4 & d=1 \end{cases} \tag{4-26}$$

değerlerini alır. Denk (4-25), bir boyutlu sistem için ters kare potansiyeli tarafından tedirgenmiş ve yarı çizgi üzerinde harekete sınırlanmış harmonik salıngana karşı gelir. w yi sabit olarak aldığımızda yukarıdaki sonuçların özel bir durumunu elde ederiz.

$$\ddot{Q} + w^2(t)\, Q = 0$$

Diferansiyel denklemin çözümü;

$$Q(t') = Q_0 = 0$$

koşulu ile

$$Q(t) = \mathrm{Sin}\, w(t-t') \tag{4-27}$$

olur. Q'nun bu çözümünü göz önüne alarak Denk (4-25)'in açık ifadesini

$$K_1 = (r'r'')^{1-d/2} \left[\frac{-imw}{\hbar \sin w(t''-t')}\right] \exp\left[\frac{imw}{2\hbar}(r'^2+r''^2)\cot w(t''-t')\right]$$

$$I_{\lambda(l)}\left[-\frac{ir'r''mw}{\hbar \sin w(t''-t')}\right] \tag{4-28}$$

elde ederiz.

BÖLÜM : 5

S O N U Ç

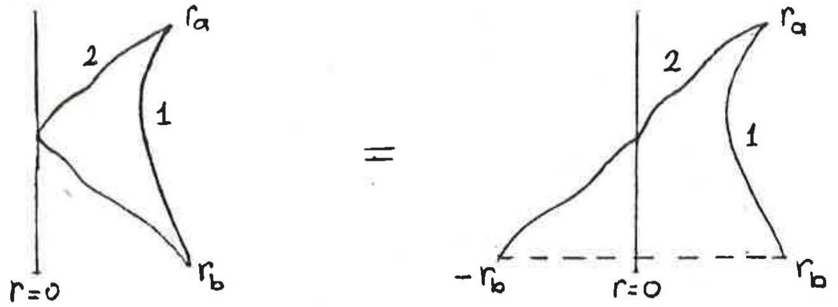
Bu çalışmada Feynman'ın yol integrali formülasyonundan hareketle küresel koordinatlarda yol integralini formüle ettik. Daha sonra değişik durumlarda açısal integrasyonun nasıl yapıldığını tartıştık ve sistemin hareketinin tek boyutta radyal kernele nasıl indirgendiğini inceledik.

Küresel koordinatlardaki Lagrangien yol integrali ile Hamiltonien yol integralinin eşitliklerini gösterdik. Bunu gösterirken yol integrallerine kuantum mekaniksel katkıların Lagrangien ve Hamiltonien biçimlerinde ne olduklarını ve nasıl türetildiklerini tartıştık.

Bulduğumuz radyal yol integralleri, harmonik salıngan, düzgün bir magnetik alanda hareket eden yüklü parçacık, Hidrojen atomu ve Coulomb potansiyeli için tam olarak çözülebilmektedir. Biz burada sadece $1/x^2$ potansiyeli tarafından tedirgenmiş harmonik salıngan için yol integrallerini çözdük. ve buna göre harmonik salıngana indirgenebilen yukarıda saydığımız potansiyeller için de radyal yol integrallerinin çözülebileceğini söyleyebiliriz.

EKLER : YANSIMIŞ YOLLARIN ANALİTİKSEL UZATIMI

r uzayında

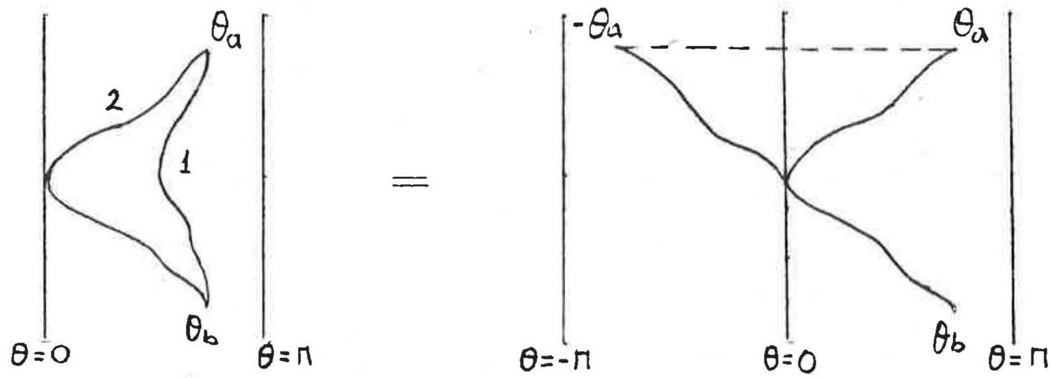


Kuantum mekaniğinde parçacık r_a dan r_b ye giderken her iki yoldan da gidebilir. r_b nin $r = o$ da ki yansımışı olan $-r_b$ ile negatif bölgeye geçebiliriz ve ikinci yol için asimtotik kernel kullanırız. Çünkü r_b sıfır ise K sıfır olmak zorundadır.

$$\frac{1}{2}\left[K(r_a,r_b;T) - K(r_a-r_b;T)\right]$$

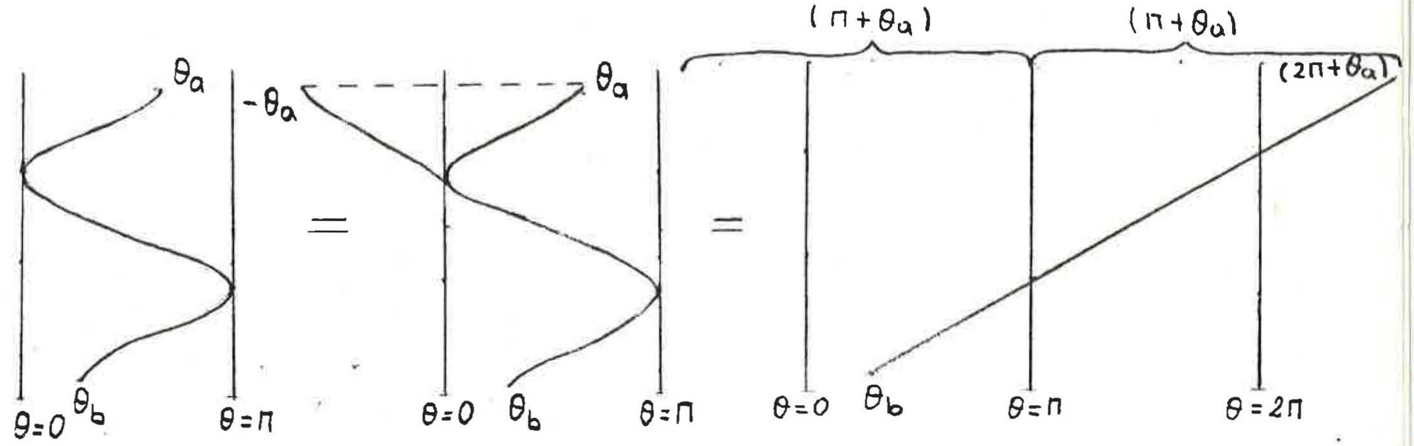
θ uzayında

θ lar $[0,2\pi]$ arasında tanımlıdır. $\theta = 0,\pi$ olduğunda K sıfır olmalıdır. Dalga fonksiyonunun sınırlarda sıfır olduğu gibi, θ_a nın yansımış $-\theta_a$ dır ve $K(\theta_a,\theta_b;T)$ bir yansımayla

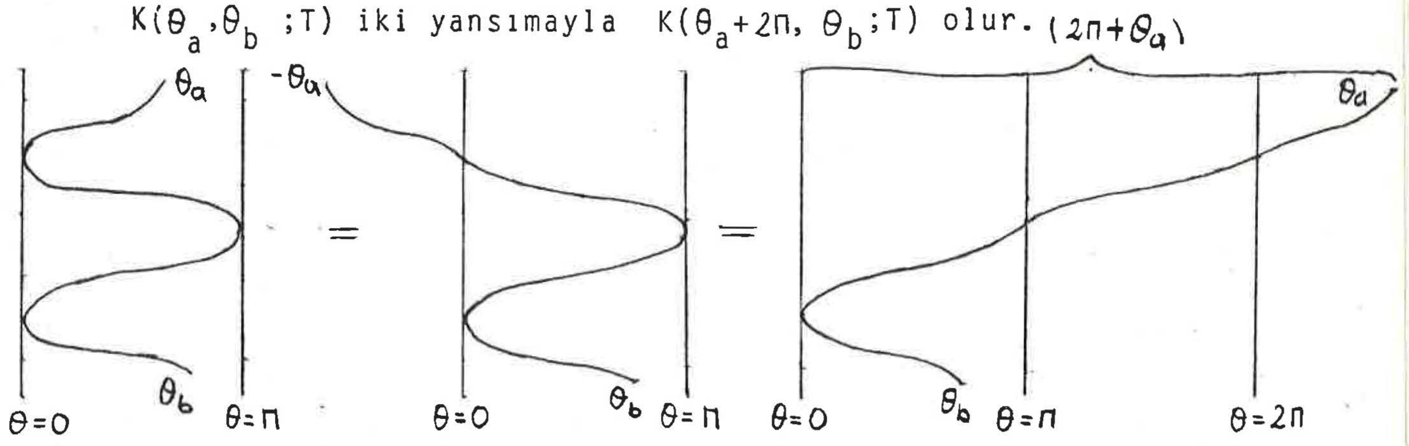


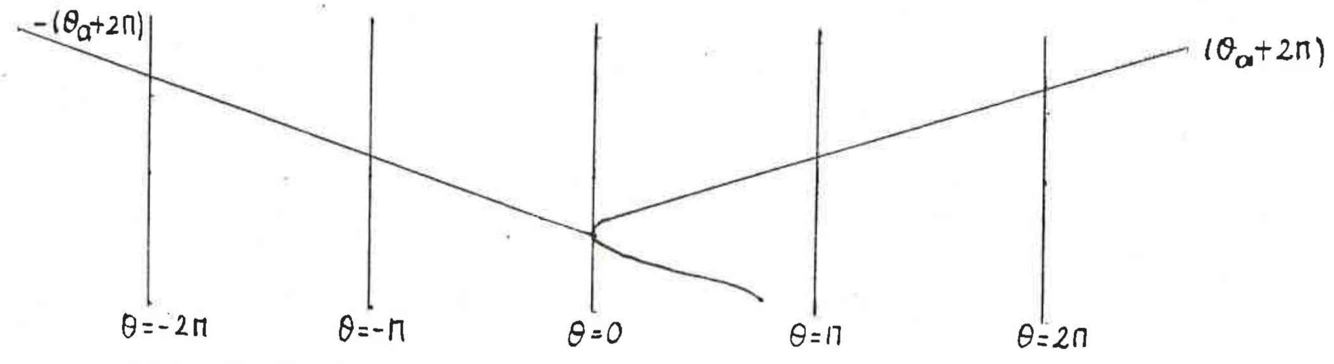
$$\frac{1}{2}\left[K(\theta_a,\theta_b;T) - K(-\theta_a,\theta_b;T)\right]$$

olur. Aynı düşünceyle 2 ve 3 yansımaya bakalım.



$K(\theta_a, \theta_b\ ;T)$ iki yansımayla $K(\theta_a+2\pi,\ \theta_b;T)$ olur.





$K(\theta_a, \theta_b;T)$ 3 yansımayla

$$\frac{1}{2}\left[K(\theta_a + 2\pi),\ \theta_b;T) - K(-(\theta_a + 2\pi),\ \theta_b;\ T)\right]$$

olur. K'nın m defa yansımasıyla θ_a ve $\theta_b \in [-\infty,+\infty]$ aralığında tanımlanır.

$$K(\theta_a,\theta_b;T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[K\,(\theta_a + 2\Pi m, \theta_b;T) - K(-(\theta_a + 2\Pi m), \theta_b;T) \right]$$

Böylece integral sınırlarımızı $-\infty$ ile $+\infty$ olarak alabiliriz Herbir yansıma bir kuantum sayısına karşı gelir.

K A Y N A K L A R

1- R.P. Feynman and A.R Hibbs, Quantum Mekaniks and Path Integrals (Mc Graw-Hill,New York, 1965).

2- D.C. KHANDEKAR and S.V. LAWANDE, Feynman Path Integrals: Some Exact Results and Applıcatıons

3- Herbert Goldstin, Classical Mecaniks, Second Edition (Addiso-Wesley, N.Y. 1980),

4- I.H.Duru and N.Unal, On the Path Integrals in Spherical Coordinates,(ICSU nunber: 02; PACS number: 03,65.Db).

5- W.Langguth[a] and A.Inomata, Remarks on the Hamiltonian Path Integral in Polar Coordinates (J.Math, Phys. 20(3) March 1979).

6- I.S. Gradshteyn and I.M.Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, London, 1980).