T. C.
DİCLE ÜNİVERTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BOŞLUK KUTUPLANMASINA YÜKSEK BASAMAKTAN KATKILAR

(DOKTORA TEZİ)

İrfan AÇIKGÖZ

DİYARBAKIR - 1991

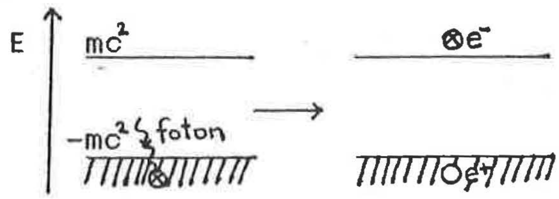
T E Ş E K K Ü R

Her konuda sürekli yardımcı ve yol gösterici olan ve bu çalışmada tartışmalarıyla ve geniş tecrübesiyle bu zor problemin kotarılmasında etkin olan danışmanım sayın Prof. Nuri Ünal'a ve görüşebildiğimiz her ortamda problemin çeşitli yönleri ile ilgili aydınlatıcı bilgilerinden faydalandığım sayın Prof. A.Orhan Barut'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İ Ç İ N D E K İ L E R

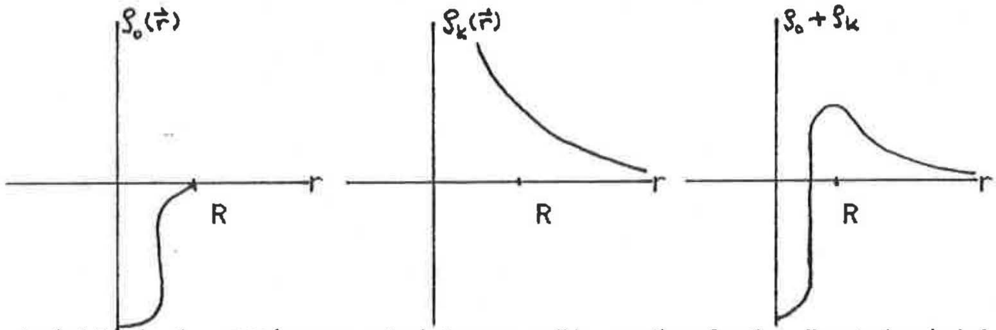
1. G İ R İ Ş

Kuantum Mekaniğinde, dış alandaki bir parçacığın bütün fiziksel süreç boyunca etkileşmesi gözönüne alınır. Bu anlamda Kuantum Mekaniği pertürbatif değildir. Kuantumelektrodinamiğinde (KED) , önce dış alan ihmal edilir ve parçacığın öz-alanı ile etkileşmesi özgür elektron-foton etkileşmesi olarak basamak basamak renormalizasyon yapılarak hesaplanır. Dolayısıyla KED pertürbatiftir. Bu çalışmada, Kuantum Mekaniği ve KED birlikte gözönüne alınarak parçacığın hem öz-alan ve hem de dış alanla etkileşmesi dikkate alınmıştır. KED'de en fazla ıraksak terim olan Boşluk Kutuplanmasını (BK), daha iyi anlayabilmek için Dirac Boşluk Kuramından biraz söz etmek yerinde olacaktır. Elektron başlangıçta pozitif enerjili bir durumda ise Dirac (tek-elektron) kuramına göre başka bir parçacıkla çarpışarak negatif enerjili bir duruma geçiş yapabilir ve enerji verebilir. Elektronların Pauli dışarlama ilkesine uyduğunu kabul edersek, olası tüm negatif enerjili durumları dolduran ve sonsuz bir elektron denizinden oluşan fiziksel olarak gözlenebilir bir boşlugun oldugunu kabul edebiliriz. Zamandan bağımsız bir elektromagnetik alanda bulunan pozitif enerjili bir elektronu düşünelim. Bu alan klasik bir alan olarak gözönüne alınırsa tek-elektron ve boşluk kuramının sonuçları aynı olur. Fakat pratikte bazı farklılıklar görülür: 1. Boşluğa bir alan uygulanırsa,boşluk kuramına göre, "dolu elektron durumlarının denizi", bu alandaki elektronlar için tüm negatif-enerjili durumlar dolacak şekilde boşluk kendini yeniden düzenler (vacuum fluctuation). Genelde bu düzenleme, denizin yük yoğunluğunda bir değişikliğe neden olur ve sonuçta ortaya çıkan " Boşluk Kutuplanması", boşlukta bulunan gerçek bir potansiyele ek bir potansiyel olarak etkir. 2. Gerçek bir elektronun kuantumlu bir elektromagnetik alanla virtüel etkileşmeleri dikkate alınırsa, elektronun dış bir klasik alanla etkileşmesi olayı da değişikliğe uğrar. "Işınımsal düzeltmeler" (radiative corrections) adı verilen bu düzeltme, elektronun negatif-enerjili bir durumda olduğu ara durumları da içerir .Dirac Boşluk Kuramı, çift üretimini bir



Şekil 1.1. Boşluk kuramında bir fotonla çift üretimi.

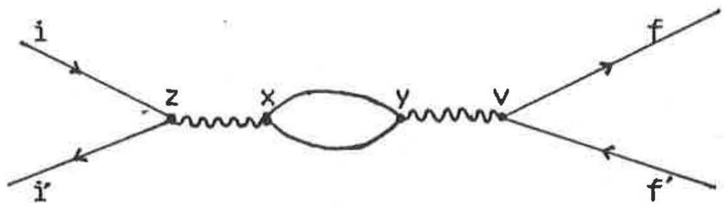
parçacığın negatif-enerjili durumdan pozitif-enerjili duruma uyarılması olarak görür. Fakat bu kuram, parçacıkları ve karşıt-parçacıkları simetrik olmayan bir yolla incelediği için tatmin edici değildir. Özgür parçacık bosluğu ile karşılaştırıldığında bir potansiyelinin varlığındaki boşluk, elektrostatik potansiyel negatifse pozitif yüklü ve pozitifse negatif yüklüdür. Yani bosluğa bir potansiyel uygulanırsa boşluk kutuplanır. BK, bir parçacığın hissettiği etkin potansiyeli düzenler. Bu olayı başka bir açıdan da açıklamak olasıdır. Boşluğun elektron yükünün tanımı ve iki yük etkileşmesi üzerindeki etkisini düşünelim. Pozitif-enerjili bir elektron, negatif-enerji denizindeki elektronları elektrostatik olarak iter. Böylece yakınındaki boşluğun kutuplanmasına neden olur. Boşluğa göre ölçülen elektron yük yoğunluğu artı $\rho_k(\vec{r})$ kutuplanmış boşluk Şek.1.2'de gösterilmiştir[1]. Uygulanan bir makroskopik alan tarafından veya çok büyük bir uzaklıktan bir test yükü tarafından görülen elektron yükü "fiziksel" yük olan $\int d^3r\, [\rho_o(\vec{r}) + \rho_k(\vec{r})] = e$'dir. Bununla birlikte $r_o < R$ uzaklıklarında etkili olan bir test yükü için



Şekil 1.2. BK'nın elektron yük yoğunluğu üzerindeki etkisi. ρ_o "çıplak" elektronun yük yoğunluğu, ve ρ_k de virtüel elektron- pozitron çiftlerinin indüklenmiş kutuplanma " bulutunun" yük yoğunluğudur.

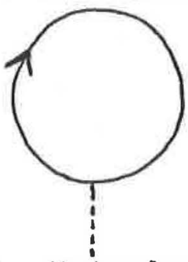
görülen yük, $r_o \longrightarrow 0$ iken $|e_o| > |e|$ olmak üzere, $\int d^3r\, \rho_o(\vec{r}) = e_o$ "çıplak" yük oluncaya dek negatiftir. Bu olay Hidrojen atomunun enerji spektrumunda gözlenir. Elektronik S-düzeyleri, açısal momentumu $l = 0$ olanlara göre daha da düşer, çünkü $l = 0$ dalga fonksiyonları elektronları protonlara yaklaştırır. BK'nın bu etkisi Lamb Kaymasını (LK) bir miktar azaltır.

Yukarıda anlatılan kuantum mekaniksel görüşler altında BK, Feynman diyagramlarında kapalı bir halka olarak gözükür (Şek.1.3).Bu kapalı halkadan gelen katkıya fotonun ikinci-basamaktan öz-enerji kısmı adı da verilir [1].



Şekil 1.3. BK için Feynman diyagramı.

Dış bir Coulomb alanında hareket eden yüklü bir parçacık için şu ışınımsal düzeltmeler dikkate alınmalıdır: Kendiliğinden Yayınma (Spontaneous Emission), Lamb Kayması(Lamb Shift), Boşluk Kutuplanması(Vacuum Polarization),Anormal Magnetik Moment ve Saçılmaya Işınımsal Düzeltmeler.



Şekil 1.4. Bir Coulomb alanı etkileşme gösterimi kullanılarak kutuplanma potansiyeli için Feynman diyagramı.

Boşluk Kutuplanması (BK), Kuantum Elektrodinamiğinde (KED) hem pratik ve hem de kavramsal açıdan önemli bir olaydır.Çünkü pertürbasyon kuramında en fazla ıraksak olan terimdir. Bir Coulomb alanında BK'nın yük yoğunluğundan ileri gelen potansiyel değisimi(Uehling potansiyeli) hesaplanabilir ve bunun beklenen değeri ile BK'dan kaynaklanan enerji kaymaları elde edilebilir. Göresel Coulomb dalga fonksiyonları ile hesaplar ilk kez Wichmann ve Kroll [2] tarafından yapılmıştır. Daha sonra bu hesaplar başkaları tarafından sürdürülmüştür [3-5]. Ayrıca bu hesaplar, sayısal olarak sonuçlar yüksek Z değerlerine genişletilerek [6-8] ve çekirdeğin yük yoğunluğunu da içerecek şekilde yapılmıştır [9]. BK, bir kuantum sisteminin ışınımsal öz-enerji etkilerinden ileri gelen n-düzeyindeki ΔE_n genel enerji kaymasının bir bölümüdür. LK´na öz-enerji katkısından sonra en büyük katkı BK´dan gelir. Birinci basamak (Uehling) katkısı için herhangi bir potansiyelde düzeltilmiş BK katkısı bilinmektedir [3,10]. Uehling potansiyeli nedeniyle olusan enerji kaymaları [11] ve süper ağır elektronik atomlar için [12,13] sonuçlar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu bağlamda, BK´nın net etkisi 1S durumunun bağlanmasını arttırmaktır diyebiliriz. Bunu basit olarak söyle açıklamak mümkündür: Yüklü bir çekirdeğin yakınındaki virtüel bir elektron çekirdeğe doğru çekilme eğiliminde iken virtüel bir pozitron itilme eğilimi gösterir. Bu durum çekirdek yükünün perdelenmesi (screening) ile sonuçlanır. Coulomb potansiyelindeki Ze terimi (çekirdek yükü) uzak bir elektron tarafından görülen yüktür ve bu perdelenmeyi zaten içerir. Böylece, çekirdeğe oldukça yaklaşan bir elektron, Ze´ den daha büyük bir etkin yük görür ve çekirdeğe daha kuvvetli bir sekilde bağlanır. Çekirdeğe en fazla yaklaşma olasılıkları daha fazla olduğundan sadece S durumları büyük miktarda etkilenirler.

Şekil 1.5. Perdelenme olayının gösterimi.

Genel ifadelerde -1/5 olarak gözüken BK, Hidrojen ve Döteryumda LK'na -27 MHz'lik bir katkı yapar [14].

Baslangıçta sözünü ettiğimiz Öz-alan Kuantumelektrodinamiğinden kısaca sözetmek yerinde olacaktır. Öz-enerji formülasyonunun başlıca yeni görünüşü renormalizasyonun yapılmasında ortaya çıkar. KED'de elektronun öz-alanı önce özgür elektron-foton etkileşmesi olarak ifade edilir ve sonra sonsuzlukları ortadan kaldırmak için karşı terimler eklenir. Öz-alan KED'de, öz alan başlangıçta ihmal edilmez ve dış alanlar sözkonusu olduğunda bu öz-enerjinin sadece gözlenebilir kısmı alınır [15]. Çiftlenimli Maxwell-Dirac denklemlerinden A potansiyelinin elenmesiyle elde edilen çizgisel olmayan integro - diferansiyel denklem pertürbasyondan ziyade iterasyonla çözülür. Enerji kayması karmaldır; sanal kısım Kendiliğinden Yayınmayı verir. Hem öz-enerji ve hem de BK terimi bu enerji kayması ifadesinden (gerçel kısım) elde edilebilir, renormalizasyon terimlerini de içeren tüm sonuçlar sonludur [16].

Bu çalışmada, Öz-alan KED'de BK ifadesinden yola çıkılmıştır. Hidrojen Coulomb-Dirac dalga fonksiyonları kullanılarak Dirac-Coulomb probleminin Green fonksiyonu alınarak indüklenmiş yük yoğunluğu elde edilmiş ve bunun beklenen değerinden BK için enerji kayması hesaplanmıştır. Bu yapılırken, pertürbasyon kuramı kullanılmaksızın Wichmann ve Kroll'un bu konudaki klasik makalesi izlenerek, N.Ünal ve A.O.Barut' un çalışmasına [17] benzer bir yolla fakat değisik bir yöntemle, BK'na $\alpha(Z\alpha)^4$ ve $\alpha(Z\alpha)^5$ basamaklarından katkılar hesaplanmıştır. Kaynak [17]'de Mellin ve ters-Mellin dönüşüm yöntemi izlenerek S durumları için $-(29/144)(4\alpha/3\pi)Z\alpha(Z\alpha/N_n)^3$ elde edilmiştir. Standart KED'de bu değer $-(29/145).(4\alpha/3\pi)Z\alpha(Z\alpha/n)^3$'dir. Bu çalışmada, bu dönüşümlerden çok, konflüent hipergeometrik fonksiyonların karmal uzaydaki bir integral gösterimi kullanılmıstır.

2. BİR COULOMB ALANINDA $\alpha(Z\alpha)^4$ BASAMAĞINDAN BOŞLUK KUTUPLANMASI ENERJİ KAYMASI

Birinci bölümde sözünü ettiğimiz Öz-alan KED formalizminin verdiği enerji kayması genel ifadesi

$$\Delta E_n = \frac{e^2}{2}\int d\vec{x}\, \bar{\psi}_n(\vec{x})\gamma_\mu \psi_n(\vec{x})\, P\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\int d\vec{y}\, \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2+i\epsilon}\sum_s \bar{\psi}_s(\vec{y})\gamma^\mu \psi_s(\vec{y}) -$$

$$-\frac{e^2}{2}\sum_s\int d\vec{x}\, d\vec{y}\, \bar{\psi}_n(\vec{x})\gamma_\mu \psi_s(\vec{x})\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\bar{\psi}_s(\vec{y})\gamma^\mu\psi_n(\vec{y})\left[\frac{1}{E_s-E_n-k}-\frac{1}{E_s-E_n+k}\right] -$$

$$-\frac{e^2}{2}\sum_{s\,(s<n)}\int d\vec{x}\, d\vec{y}\, \bar{\psi}_n(\vec{x})\gamma_\mu\psi_s(\vec{x})\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\bar{\psi}_s(\vec{y})\gamma^\mu\psi_n(\vec{y})\frac{i\pi}{2k}\delta(E_s-E_n-k). \tag{2.1}$$

şeklindedir ($c=\hbar=1$). Burada ψ_n sabit düzeydir ve ifadenin sağ tarafı tüm ayrık ve sürekli ψ_s durumları üzerinden toplanacaktır. (2.1)'deki birinci terim BK, ikinci terim öz-enerji (LK) ve üçüncü terim de kendiliğinden yayınma katkısına karşılık gelir. Biz bu çalışmada sadece ilk terimi değerlendireceğiz:

$$\Delta E_n^{BK} = \frac{e^2}{2}\sum_s\int d\vec{x}\, d\vec{y}\, \bar{\psi}_n(\vec{x})\gamma_\mu\psi_n(\vec{x})\bar{\psi}_s(\vec{y})\gamma^\mu\psi_s(\vec{y})\, P\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\cdot\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2+i\epsilon}. \tag{2.2}$$

Coulomb dalga fonksiyonları şu şekilde yazılır[17]:

$$\psi_{j_n,m_n} = \begin{bmatrix} \frac{i}{r}G^{(+)}_{j_n}\varphi^{(+)}_{j_n,m_n}\theta(-K_n) + \frac{i}{r}G^{(-)}_{j_n}\varphi^{(-)}_{j_n,m_n}\theta(K_n) \\ \\ \frac{1}{r}F^{(+)}_{j_n}\varphi^{(-)}_{j_n,m_n}\theta(-K_n) + \frac{1}{r}F^{(-)}_{j_n}\varphi^{(+)}_{j_n}\theta(K_n)\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Burada $\varphi^{(+)}_{j_n,m_n} = \begin{bmatrix}\left(\frac{j_n+m_n}{2j_n}\right)^{1/2} Y^{m_n-1/2}_{j_n-1/2} \\ \left(\frac{j_n-m_n}{2j_n}\right)^{1/2} Y^{m_n+1/2}_{j_n-1/2}\end{bmatrix}$, $\varphi^{(-)}_{j_n,m_n} = \begin{bmatrix}\left(\frac{j_n+1-m_n}{2(j_n+1)}\right)^{1/2} Y^{m_n-1/2}_{j_n+1/2} \\ -\left(\frac{j_n+1+m_n}{2(j_n+1)}\right)^{1/2} Y^{m_n+1/2}_{j_n+1/2}\end{bmatrix}$ ve $K_n = |j_n+1/2|$'dir.

(2.2)´deki akımın çarpımı

$$\bar{\psi}_n(\vec{x})\gamma_\mu\psi_n(\vec{x})\,\bar{\psi}_s(\vec{y})\gamma^\mu\psi_s(\vec{y})=\psi_n^\dagger(\vec{x})\psi_n(\vec{x})\,\psi_s^\dagger(\vec{y})\psi_s(\vec{y})-\psi_n^\dagger(\vec{x})\vec{\alpha}\psi_n(\vec{x})\,\psi_s^\dagger(\vec{y})\vec{\alpha}\psi_s(\vec{y}). \qquad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Birinci terim, "elektrik" kısım ve ikinci terim de "magnetik" kısım olarak düşünülebilir. Küresel simetri nedeniyle, S durumlarında magnetik kısmın katkısı sıfırdır. Küresel harmoniklere açılımı kullanırsak

$$\int d\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}=(4\pi)^2\sum_{l,m} j_l(kx)\, j_l(ky)\, Y^*_{lm}(\hat{x})\, Y_{lm}(\hat{y}) \qquad (2.5)$$

buluruz. Şimdi açısal integraller kolayca hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} I_n=\int d\hat{x}\,\psi_n^\dagger(\vec{x})\psi_n(\vec{x})Y^*_{lm}(\hat{x})=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\Big\{&\Big[|G^{(+)}_{j_n}|^2\theta(-K_n)+|F^{(-)}_{j_n}|^2\theta(K_n)\Big]\cdot\Big[\frac{j_n+m_n}{2j_n}<j_n-1/2,m_n-1/2,\\ &,l,m|j_n-1/2,m_n-1/2>+\frac{j_n-m_n}{2j_n}<j_n-1/2,m_n+1/2,l,m|j_n-1/2,m_n+1/2>\Big]<j_n-1/2,0,l,0|j_n-1/2,0>+\\ &+\Big[|G^{(+)}_{j_n}|^2\theta(K_n)+|F^{(+)}_{j_n}|^2\theta(-K_n)\Big]\Big[\frac{j_n+1-m_n}{2(j_n+1)}<j_n+1/2,m_n-1/2,l,m|j_n+1/2,m_n-1/2>+\\ &+\frac{j_n+1+m_n}{2(j_n+1)}<j_n+1/2,m_n+1/2,l,m|j_n+1/2,m_n+1/2>\Big]<j_n+1/2,0,l,0|j_n+1/2,0>\Big\} \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Benzer olarak $\int d\hat{r}'\psi_s^\dagger(\vec{r}')\psi_s(\vec{r}')Y_{lm}(\hat{r}')$´nin sonucunu bulmak için (2.6)´da n yerine s ve x yerine r' yazmak yeterlidir. j_n = 1/2 ve m_n=1/2 (l=0, m=0) için

$$I_n=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\Big[|G^{(-)}_{j_n}|^2\theta(K_n)+|F^{(+)}_{j_n}|^2\theta(-K_n)\Big]. \qquad (2.7)$$

elde edilir. I_s terimini m_s üzerinden $-j_s$´ten $+j_s$´e kadar toplarsak

$$I_s=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\Big\{\Big[|G^{(+)}_{j_s}|^2+|F^{(+)}_{j_s}|^2\Big]\theta(-K_s)+\Big[|G^{(-)}_{j_s}|^2+|F^{(-)}_{j_s}|^2\Big]\theta(K_s)\Big\}. \qquad (2.8)$$

buluruz. O zaman (2.6)

$$\Delta E_n^{BK}=\frac{e^2}{4\pi}\sum_{j_s}(2j_s+1)\int dr\,dr'\,V_\ell(r,r')\left[|G_{j_n}^{(-)}|^2\theta(K_n)+|F_{j_n}^{(+)}|^2\theta(-K_n)\right]\left\{\left[|G_{j_s}^{(+)}|^2+|F_{j_s}^{(+)}|^2\right]\theta(-K_s)+\right. \qquad (2.9)$$

$$\left.+\left[|G_{j_s}^{(-)}|^2+|F_{j_s}^{(-)}|^2\right]\theta(K_s)\right\}.$$

'e dönüşür. Bu ifadedeki $V_\ell(r,r')$ potansiyeli

$$V_\ell(r,r')=\frac{2}{\pi}r^2r'^2\int_0^\infty j_\ell(kr)\,j_\ell(kr')\,dk$$

$$=\frac{r^2r'^2}{2\ell+1}\cdot\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}. \qquad (2.10)$$

şeklindedir. Ayrık dalga fonksiyonları şu şekilde verilir:

$$f_n(r)=\left[\frac{\Gamma(2\gamma_n+n_r+1)}{4N_n(N_n-K_n)n_r!}\right]^{1/2}\cdot\frac{(2P_N)^{3/2}(2P_Nr)^{\gamma_n-1}\,e^{-P_Nr}\sqrt{1+E_n/m}}{\Gamma(2\gamma_n+1)}\left[(N_n-K_n)\phi(-n_r,2\gamma_n+1;2P_Nr)+\right.$$

$$\left.+n_r\phi(1-n_r,2\gamma_n+1;2P_Nr)\right],$$

$$g_n(r)=\left[\frac{\Gamma(2\gamma_n+n_r+1)}{4N_n(N_n-K_n)n_r!}\right]\cdot\frac{(2P_N)^{3/2}(2P_Nr)^{\gamma_n-1}\,e^{-P_Nr}\sqrt{1-E_n/m}}{\Gamma(2\gamma_n+1)}\left[(N_n-K_n)\phi(-n_r,2\gamma_n+1;2P_Nr)+\right.$$

$$\left.+n_r\phi(1-n_r,2\gamma_n+1;2P_Nr)\right]. \qquad (2.11)$$

Burada $\gamma_n=\sqrt{K_n^2-\gamma^2}=\sqrt{K_n^2-(Z\alpha)^2}$, $n_r=n-|K_n|$, $N_n=[n^2-2n_r(|K_n|-\gamma_n)]^{1/2}$ ve $P_N=(1-E_n^2/m^2)^{1/2}$ dir. Eğer $n_r=1,2,\ldots$ ise her iki hipergeometrik fonksiyon polinomlara indirgenebilir, fakat $n_r=0,1,2,\ldots$ ise sadece birisi polinom haline getirilebilir. Ayrıca

$$n_r=0,1,2,\ldots\,,K_n<0 \text{ ise } ;[K_n=-(j_n+1/2)=-1]$$

$$n_r=1,2,\ldots\,,K_n>0 \text{ ise } ;[K_n=+(j_n+1/2)=+1] \qquad (2.12)$$

olduğunu belirtmeliyiz. Yukarıda verilen hipergeometrik fonksiyonlar

$$\phi(1-n_r,2\gamma_n+1;2P_Nr)=\sum_{n_1}\frac{\Gamma(1+n_1-n_r)\cdot\Gamma(2\gamma_n+1)(2P_Nr)^{n_1}}{\Gamma(1-n_r)\,\Gamma(2\gamma_n+n_1+1)\,n_1!},$$

$$=\sum_{n_2}\frac{\Gamma(n_2-n_r)\,\Gamma(2\gamma_n+1)(2P_Nr)^{n_2}}{\Gamma(-n_r)\,\Gamma(2\gamma_n+1+n_2)\,n_2!}. \qquad (2.13)$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilirler. O zaman

$$\frac{|f_n|^2+|g_n|^2}{2}=\frac{\Gamma(2\gamma_n+n_r+1)(2\rho_N)^3\, e^{-2\rho_N r}}{4N_n(N_n-K_n)n_r!}\sum_{n_1,n_2}\frac{\Gamma(n_1-n_r)\,\Gamma(n_2-n_r)\,(2\rho_N)^{n_1+n_2+2\gamma_n-2}}{\Gamma^2(-n_r)\,\Gamma(2\gamma_n+n_1+1)\,\Gamma(2\gamma_n+n_2+1)\,n_1!\,n_2!}\times$$

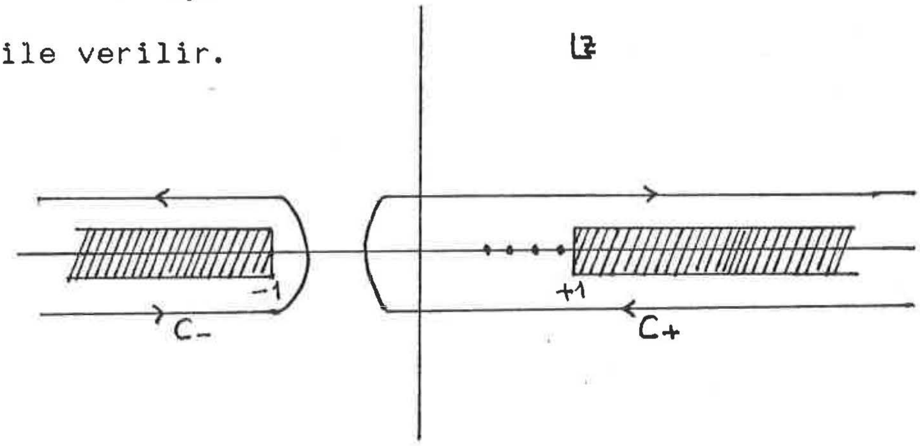
$$\times\left\{\frac{(N_n-K_n)^2}{n_r^2}(n_1-n_r)(n_2-n_r)+n_r^2-2(N_n-K_n)\,E_n/m\right\} \tag{2.14}$$

bulunur.

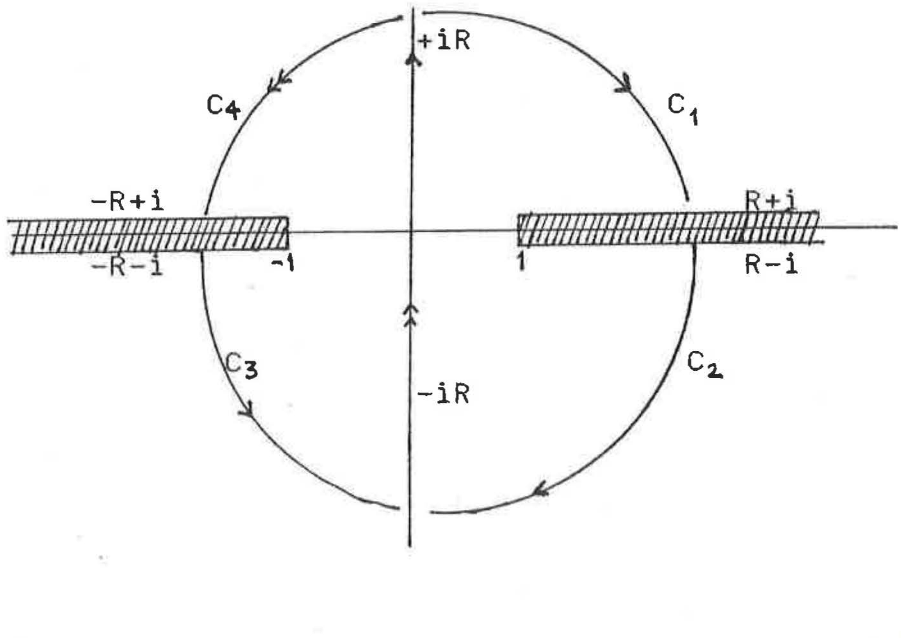
BK´nın genel teriminde tüm durumlar üzerinden toplam alıyoruz. Bu toplam, Dirac-Coulomb probleminin Green fonksiyonu cinsinden yazılabilir. O halde tüm pozitif ve negatif enerjiler üzerinden yük yoğunluğunun toplamı

$$\frac{1}{2}\Big[\sum\!\!\!\!\!\!\int_{E_s>0}-\sum\!\!\!\!\!\!\int_{E_s<0}\Big](|f_s|^2+|g_s|^2)=\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{C_+}+\int_{C_-}\Big)dz\,\dot{I}_z\,K(r,r';z). \tag{2.15}$$

ile verilir.



Sekil 2.1. z-integrasyon eğrileri.



Şekil 2.2. z-integrasyonu için düzeltilmiş (deformed) eğriler.

Dirac-Coulomb probleminin Green fonksiyonu

$$K(r_<,r_>;z)=\frac{1}{k(z)}\begin{bmatrix}\omega_1^{(2)}(r_>;z)\\ \omega_2^{(2)}(r_>;z)\end{bmatrix}\cdot\left[\omega_1^{(1)}(r_<;z)\ ,\ \omega_2^{(1)}(r_<;z)\right]. \qquad (2.16)$$

dir. Burada $w^{(1)}(r_<;z)$ ve $w^{(2)}(r_>;z)$ sırasiyla sistemin başlangıçta (orijinde) ve sonsuzdaki düzenli çözümleri olup

$$\omega_{\substack{1\\2}}^{(1)}(r_<;z)=(2rc)^{\gamma}e^{irc}\Big[(\varkappa-\tfrac{iZ\alpha}{c})\begin{pmatrix}i\sqrt{z+1}\\ \sqrt{z-1}\end{pmatrix}\Phi(\gamma-i\nu,2\gamma+1;-2icr_<)+$$
$$+\begin{pmatrix}i\sqrt{z+1}\\ -\sqrt{z-1}\end{pmatrix}(\gamma-i\nu)\Phi(\gamma-i\nu+1,2\gamma+1;-2icr_<)\Big],$$

$$\omega_{\substack{1\\2}}^{(2)}(r_>;z)=(2rc)^{\gamma}e^{ir_>c}\Big[(\varkappa-\tfrac{iZ\alpha}{c})\begin{pmatrix}i\sqrt{z+1}\\ \sqrt{z-1}\end{pmatrix}\chi(\gamma-i\nu,2\gamma+1;-2ir_>c)+$$
$$+\begin{pmatrix}i\sqrt{z+1}\\ -\sqrt{z-1}\end{pmatrix}(\gamma-i\nu)\chi(\gamma-i\nu+1,2\gamma+1;-2icr_>)\Big]. \qquad (2.17)$$

ile verilirler. k(z) normalizasyon faktörüdür ve,

$$k(z)=-2c(\varkappa-\frac{iZ\alpha}{c})\frac{\Gamma(-\gamma-i\nu)\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(-2\gamma)\Gamma(\gamma-i\nu)}\,e^{\frac{i\pi}{2}(2\gamma+1)}. \qquad (2.18)$$

şeklinde verilir, ve $c=\sqrt{z^2-1}$ ´dir. (2.17)´de görülen Φ ve χ konflüent hipergeometrik fonksiyonlarının (KHF) integral gösterimi

$$\Phi(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 dt\, e^{zt}\,t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1},$$

$$\chi(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\gamma)}\int_0^\infty dt\, e^{-zt}\,t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}. \qquad (2.19)$$

şeklindedir. Burada

$$\mathrm{I}_z K(r_<,r_>;z)=\frac{1}{k(z)}\left(\omega_1^{(1)}\omega_1^{(2)}+\omega_2^{(1)}\omega_2^{(2)}\right). \qquad (2.20)$$

yazılabilir. Bu ifadeyi hesaplamak için $w_1^{(1)}w_1^{(2)}$ ve $w_2^{(1)}w_2^{(2)}$ çarpımlarını bulur ve adı geçen KHF´ların integral gösterimlerini yerlerine yazarız. Bu işlemler yapılır ve k(z)´ye bölünürse

$$\frac{\dot{I}_z K(r';z)}{k(z)}=\frac{\Gamma(-2\gamma)\Gamma(\gamma-i\nu)\,e^{-\frac{i\pi}{2}(2\gamma+1)}(2r'c)^{2\gamma}\cdot e^{2icr'}(-2)}{-2c(\varkappa-iZ\alpha/c)\,\Gamma(-\gamma-i\nu)\Gamma(2\gamma+1)}\Big\{(\varkappa-\frac{iZ\alpha}{c})^2\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-i\nu)\Gamma(\gamma+i\nu+1)}\times$$

$$\times\int_0^1 dt\,e^{zt}t^{\gamma-i\nu-1}(1-t)^{\gamma+i\nu}\frac{\Gamma(-\gamma-i\nu)}{\Gamma(\gamma-i\nu)\Gamma(-2\gamma)}\int_0^\infty dt'\,e^{-zt'}t'^{\gamma-i\nu-1}(1+t')^{\gamma+i\nu}+z(\varkappa-\frac{iZ\alpha}{c})(\gamma-i\nu)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-i\nu)\Gamma(\gamma+i\nu+1)}\int_0^1 dt\,e^{zt}t^{\gamma-i\nu-1}(1-t)^{\gamma+i\nu}\frac{\Gamma(-\gamma-i\nu+1)}{\Gamma(\gamma-i\nu+1)\Gamma(-2\gamma)}\int_0^\infty dt'\,e^{-zt'}t'^{\gamma-i\nu}(1+t')^{\gamma+i\nu+1}+z(\varkappa-\frac{iZ\alpha}{c})\times$$

$$\times(\gamma-i\nu)\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-i\nu+1)\Gamma(\gamma+i\nu)}\int_0^1 dt\,e^{zt}t^{\gamma-i\nu}(1-t)^{\gamma+i\nu+1}\frac{\Gamma(-\gamma-i\nu)}{\Gamma(\gamma-i\nu)\Gamma(-2\gamma)}\int_0^\infty dt'\,e^{-zt'}t'^{\gamma-i\nu-1}(1+t')^{\gamma+i\nu}+ \qquad (2.21)$$

$$+\frac{(\gamma-i\nu)^2\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-i\nu+1)\Gamma(\gamma+i\nu)}\int_0^1 dt\,e^{zt}t^{\gamma-i\nu}(1-t)^{\gamma+i\nu-1}\frac{\Gamma(-\gamma-i\nu+1)}{\Gamma(\gamma-i\nu+1)\Gamma(-2\gamma)}\int_0^\infty dt'\,e^{-zt'}t'^{\gamma-i\nu}(1+t')^{\gamma+i\nu-1}\Big\}.$$

elde edilir, veya

$$J_1=\int_0^\infty\int_0^1 dt\,dt'\,e^{z(t-t')}t^{\gamma-i\nu-1}(1-t)^{\gamma+i\nu}t'^{\gamma-i\nu-1}(1+t')^{\gamma+i\nu},$$

$$J_2=\int_0^1\int_0^\infty dt\,dt'\,e^{z(t-t')}t^{\gamma-i\nu-1}(1-t)^{\gamma+i\nu}t'^{\gamma-i\nu}(1+t')^{\gamma+i\nu+1},$$

$$J_3=\int_0^1\int_0^\infty dt\,dt'\,e^{z(t-t')}t^{\gamma-i\nu}(1-t)^{\gamma+i\nu+1}t'^{\gamma-i\nu-1}(1+t')^{\gamma+i\nu-1},\quad J_4=\int_0^1\int_0^\infty dt\,dt'\,e^{z(t-t')}\times t^{\gamma-i\nu}(1-t)^{\gamma+i\nu-1}t'^{\gamma-i\nu}(1+t')^{\gamma+i\nu-1}. \qquad (2.22)$$

tanımlarını yaparsak, daha sade olarak

$$\frac{\dot{I}_z K(r';z)}{k(z)}=\frac{i^{2\gamma+1}(2r'c)^{2\gamma}e^{2ir'c}}{c}\Big\{\varkappa\Big(\frac{-J_1}{\Gamma(\gamma-i\nu)\Gamma(\gamma+i\nu+1)}+\frac{J_4}{\Gamma(\gamma+i\nu)\Gamma(\gamma-i\nu+1)}\Big)+$$

$$+\frac{iZ\alpha}{c}\Big(\frac{J_1}{\Gamma(\gamma-i\nu)\Gamma(\gamma+i\nu+1)}+\frac{J_4}{\Gamma(\gamma+i\nu)\Gamma(\gamma-i\nu+1)}\Big)+z\frac{J_3-J_2}{\Gamma(\gamma-i\nu)\Gamma(\gamma+i\nu)}\Big\}.$$

buluruz. K-toplaması yapılırsa, simetri nedeniyle köşeli parantez içinde bulunan K ile orantılı terim sıfır olur ve sonuçta

$$\frac{\dot{I}_z K(r';z)}{k(z)}=i(-2ir'c)^{2\gamma}e^{2ir'c}\Big\{\frac{iZ\alpha}{c}\Big(\frac{J_1}{\Gamma(\gamma-i\nu)\Gamma(\gamma+i\nu+1)}+\frac{J_4}{\Gamma(\gamma+i\nu)\Gamma(\gamma-i\nu+1)}\Big)+$$

$$+z\frac{J_3-J_2}{\Gamma(\gamma-i\nu)\Gamma(\gamma+i\nu)}\Big\}. \qquad (2.23)$$

elde edilir. Tüm s-durumları üzerinden toplam,

$$\sum_S(2J_s+1)\big[|f_s|^2+|g_s|^2\big]=-2\sum_{\varkappa=1}^{\infty}|\varkappa|\Big(\int_{C+}+\int_{C-}\Big)\frac{dz}{2\pi i}\Big[\int_0^1 dt\,t^{\alpha-1}(1-t)^{2\gamma-\alpha}\int_0^\infty dt'\,t'^{\alpha'-1}(1+t')^{2\gamma-\alpha'}\times$$

$$\times T_{\alpha\alpha'}\frac{i(-2icr')^{2\gamma}}{cr'^2}e^{2ic(1-t+t')r'}\Big]. \qquad (2.24)$$

ifadesini verir. Burada $T_{\alpha\alpha'}$

$$T_{\alpha\alpha'}=\frac{iZ\alpha}{c}\left(\frac{\delta_{\alpha,\gamma-i\nu}\,\delta_{\alpha',\gamma-i\nu}+\delta_{\alpha,\gamma-i\nu+1}\,\delta_{\alpha',\gamma-i\nu+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\gamma-\alpha'+1)}\right)-$$
$$-z\left[\frac{\delta_{\alpha,\gamma-i\nu}\,\delta_{\alpha',\gamma-i\nu+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\gamma-\alpha'+1)}-\frac{\delta_{\alpha,\gamma-i\nu+1}\,\delta_{\alpha',\gamma-i\nu}}{\Gamma(\alpha')\Gamma(2\gamma-\alpha+1)}\right]. \qquad (2.25)$$

şeklinde tanımlanmıştır. O halde, tüm bu işlemlerden sonra ΔE_n^{BK} genel ifadesi

$$\Delta E_n^{BK}=\alpha\sum_{\kappa=1}^{\infty}2|\kappa|\sum_{n_1,n_2}\frac{\Gamma(n_1-n_r)\Gamma(n_2-n_r)\Gamma(2\gamma_n+n_r+1)\left\{(N_n-\kappa_n)\left[\frac{2E_n}{m}+(N_n-\kappa_n)(n_1-n_r)(n_2-n_r)\right]+n_r^2\right\}}{\Gamma^2(-n_r)\Gamma(2\gamma_n+n_1+1)\Gamma(2\gamma_n+n_2+1)\,n_1!\,n_2!\,2N_n(N_n-\kappa_n)\,n_r!}\times$$
$$\times\left(\int_{C_+}+\int_{C_-}\right)\frac{dz}{2\pi i}\cdot\frac{i}{c}\cdot T_{\alpha\alpha'}\int_0^1 dt\,t^{\alpha-1}(1-t)^{2\gamma-\alpha}\int_0^\infty dt'\,t'^{\alpha'-1}(1+t')^{2\gamma-\alpha'}\times$$
$$\times\left[\int_0^\infty r^2dr\int_0^\infty r'^2dr'\frac{(2P_N)^3\,e^{-2P_Nr}}{r'^2}(-2icr')^{2\gamma}\,e^{2ic(1-t+t')r'}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}\cdot\frac{(2P_Nr)^{n_1+n_2+2\gamma_n-2}}{2\ell+1}\right]. \qquad (2.26)$$

'ye dönüşür. Bu aşamada r ve r' üzerinden integral almak durumundayız. Bunun için önce r ve r''ye bağlı terimleri ayırır ve bunu R olarak tanımlarsak, sonra da r değişkeninden uygun bir yolla $(P_N r)$ değişkenine geçersek

$$R=\frac{(-2ic)^{2\gamma}}{2\ell+1}\left\{(2P_N)^{\ell+1}\int_0^\infty d(2P_Nr)\,(2P_Nr)^{2\gamma_n+n_1+n_2-\ell-1}\,e^{-2P_Nr}\int_0^r dr'\,r'^{2\gamma+\ell}\,e^{2ic(1-t+t')r'}+\right.$$
$$\left.+(2P_N)^{-\ell}\int_0^\infty d(2P_Nr)(2P_Nr)^{2\gamma_n+n_1+n_2+\ell}\,e^{-2P_Nr}\int_r^\infty dr'\,r'^{2\gamma-\ell-1}\,e^{2ic(1-t+t')r'}\right\} \qquad (2.27)$$

buluruz. Tam olmayan (incomplete) gama fonksiyonu asağıdaki gibi tanımlanır:

$$\gamma(a,x)=\int_0^x e^{-t}\,t^{a-1}\,dt \quad ,\ (\mathrm{Re}\ a>0)$$
$$\Gamma(a,x)=\int_x^\infty e^{-t}\,t^{a-1}\,dt. \qquad (2.28)$$

O zaman, $a=-2i(1-t+t')$ ve $y=acr'$ olmak üzere

$$R=\frac{(-2ic)^{2\gamma}}{2\ell+1}\left\{(2P_N)^{\ell+1}(ac)^{-2\gamma-\ell-1}\int_0^\infty d(2P_Nr)(2P_Nr)^{2\gamma_n+n_1+n_2-\ell-1}\,e^{-2P_Nr}\,\gamma(2\gamma+\ell+1,acr)+\right.$$

$$+(2P_N)^{-\ell}(ac)^{-2\gamma+\ell}\int_0^\infty d(2P_N r)(2P_N r)^{2\gamma_n+n_1+n_2+\ell}\, e^{-2P_N r}\,\Gamma(2\gamma-\ell, acr)\Big\}. \qquad (2.29)$$

bulunur. Aşağıdaki bağıntılar [18] kullanılarak r üzerinden integral kolayca alınabilir:

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\beta x}\gamma(\nu,\alpha x)dx = \frac{\alpha^\nu\Gamma(\mu+\nu)}{\nu(\alpha+\beta)^{\mu+\nu}}\,{}_2F_1(1,\mu+\nu,\nu+1;\frac{\alpha}{\alpha+\beta}), \qquad (2.30)$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\beta x}\Gamma(\nu,\alpha x)dx = \frac{\alpha^\nu\Gamma(\mu+\nu)}{\mu(\alpha+\beta)^{\mu+\nu}}\,{}_2F_1(1,\mu+\nu,\mu+1;\frac{\beta}{\beta+1}).$$

$$R=\frac{(-2ic)^{2\gamma}}{2\ell+1}\Big\{\frac{\Gamma(2\gamma_n+n_1+n_2+2\gamma+1)}{(1+ac/2P_N)^{2\gamma_n+n_1+n_2+2\gamma+1}}\Big[\frac{(2P_N)^{-2\gamma}}{2\gamma+\ell+1}\,{}_2F_1(1,2\gamma_n+2\gamma+n_1+n_2+1,2\gamma+\ell+2;\frac{ac}{2P_N+ac})+$$

$$+\frac{(2P_N)^{-2\gamma}}{2\gamma_n+n_1+n_2+\ell+1}\,{}_2F_1(1,2\gamma_n+2\gamma+n_1+n_2+1,2\gamma_n+n_1+n_2+\ell+2;\frac{2P_N}{2P_N+ac})\Big]\Big\}. \qquad (2.31)$$

Şimdi $\tau = 2\gamma_n + 2\gamma + n_1 + n_2 + 1$ ve $y' = c/2P_N$ kısaltmalarını yaparsak R için

$$R=\frac{(-2ic)^{2\gamma}}{2\ell+1}\cdot\frac{\Gamma(\tau)(2P_N)^{-2\gamma}}{(1+ay')^{\tau}}\Big[\frac{1}{2\gamma+\ell+1}\,{}_2F_1(1,\tau,2\gamma+\ell+2;\frac{ay'}{1+ay'})+$$

$$+\frac{1}{\tau-2\gamma-\ell}\,{}_2F_1(1,\tau,\tau-2\gamma+\ell+1;\frac{1}{1+ay'})\Big]. \qquad (2.32)$$

yazarız. KHF' ların

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = (1-z)^{-\beta}\,{}_2F_1(\beta,\gamma-\alpha,\gamma;\frac{z}{z-1}) \qquad (2.33)$$

şeklindeki dönüşüm bağıntısını kullanarak

$$R=\frac{(-2ic)^{2\gamma}\Gamma(\tau)(2P_N)^{-2\gamma}}{2\ell+1}\Big[\frac{1}{2\gamma+\ell+1}\,{}_2F_1(\tau,2\gamma+\ell+1,2\gamma+\ell+2;-ay)+$$

$$+\frac{(ay)^{-\tau}}{\tau-2\gamma-\ell}\,{}_2F_1(\tau,\tau-2\gamma+\ell,\tau-2\gamma+\ell+1;-\frac{1}{ay})\Big].$$

yazabiliriz. ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ 'nin aşağıda verilen başka bir integral gösterimini kullanacak olursak, Mellin dönüşümü kullanmaksızın sonuca gidebiliriz:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dt}{2\pi i} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\gamma+t)} (-z)^{t} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \qquad (2.34)$$

Bu ifadede $|\arg(-z)| < \pi$'dir ve integral alma yolu, $\Gamma(\alpha+t)$ ve $\Gamma(\beta+t)$ fonksiyonlarının kutupları integrasyon yolunun soluna ve $\Gamma(-t)$ fonksiyonunun kutupları da aynı yolun sağına düşecek şekilde seçilir.

Yukarıdaki tanımdan

$$R = \frac{(-2i)^{2\gamma}}{2l+1} \left[\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dv}{2\pi i} \cdot \frac{\Gamma(\tau+v)\Gamma(2\gamma+l+1+v)\Gamma(-v)}{(2\gamma+l+v+1)\Gamma(2\gamma+l+v+1)} (ay)^{v+2\gamma}\, a^{-2\gamma} + \right.$$

$$\left. + \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dv}{2\pi i} \cdot \frac{\Gamma(\tau+v)\cdot\Gamma(-v)}{\tau-2\gamma+l+v} (ay)^{2\gamma-v-\tau} \right] \qquad (2.35)$$

elde edilir. Köşeli parantez içindeki birinci terim için $v \longrightarrow -2\gamma-w$ ve ikinci terim için de $v \longrightarrow 2\gamma-\tau+w$ değişken değiştirmesi yaparsak R için sonuçta

$$R = \frac{1}{2l+1} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \cdot \frac{\Gamma(2\gamma+\omega)\Gamma(\tau-2\gamma-\omega)}{(l+1-\omega)(\omega+l)(-2i)^{\omega}} \cdot \frac{1}{(1-t+t')^{2\gamma+\omega}} \cdot y^{-\omega}. \qquad (2.36)$$

buluruz. Tekrar genel enerji kayması ifadesine dönersek son bulduklarımızla birlikte

$$\Delta E_n^{BK} = \alpha \sum_{K=1}^{\infty} 2|K| \sum_{n_1,n_2} A_{n_1,n_2} \left[\int_{C_+} + \int_{C_-} \right] \frac{dz}{2\pi i}\, i\, \frac{I_{\alpha\alpha'}}{c} \int_0^1 dt\, t^{\alpha-1} (1-t)^{2\gamma-\alpha} \int_0^{\infty} dt'\, t'^{\alpha'-1} (1+t')^{2\gamma-\alpha'} \times$$

$$\times \frac{1}{2l+1} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\Gamma(2\gamma+\omega)\Gamma(\tau-2\gamma-\omega)\, y^{-\omega}}{(l+1-\omega)(\omega+l)(-2i)^{\omega}(1-t+t')^{2\gamma+\omega}}. \qquad (2.37)$$

yazarız. Burada,

$$A_{n_1,n_2}=2\frac{\Gamma(n_1-n_r)\cdot\Gamma(n_2-n_r)\cdot\{+(N_n-K_n)(n_1-n_r)(n_2-n_r)/n_r^2+n_r^2-2(N_n-K_n)E_n/m\}}{\Gamma^2(-n_r)\cdot\Gamma(2\gamma_n+n_1+1)\cdot\Gamma(2\gamma_n+n_2+1)\cdot n_1!\cdot n_2!\cdot 4(N_n-K_n)\cdot N_n\cdot n_r!}$$

'dir. (2.37) ifadesinde $\tau-2\gamma-w=0$ yazarak, $w=\tau-2\gamma=2\gamma_n+n_1+n_2+1$ buluruz. $\gamma_n=1$, $n_1=0$ ve $n_2=0$ alırsak birinci kutup için $w_0=3$ elde ederiz. Sonradan daha rahat görülebileceği gibi $\Gamma(\tau-2\gamma-w)$ ´nın kutupları, $(Z\alpha)$´nın kuvvet serisini verir. Böylece $(Z\alpha)$ açılımı için $w=w_0+\eta$, $\eta=0,1,2,\ldots\ldots$ şeklinde genel ve oldukça önemli bir bağıntı elde ettik. Örneğin $\eta=0$ ilk basamağı, $\eta=1$ ikinci basamağı v.b. verir. $l=0$ (S-dalgaları) için (2.37) şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\Delta E_n^{BK}=\alpha\frac{i(-2i)^{-3}}{y^3(-2)(3)}\sum_{K=1}^{\infty}2|K|A_{0,0}\left[\int_{C_+}+\int_{C_-}\right]\frac{dz}{2\pi i}\left\{\int_0^1 dt\, t^{\alpha-1}(1-t)^{2\gamma-\alpha}\int_0^{\infty}dt'\, t'^{\alpha'-1}(1+t')^{2\gamma-\alpha'}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{c}T_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(2\gamma+3)}{(1-t+t')^{2\gamma+3}}\right\}. \qquad (2.38)$$

$\gamma=|K|$ $(Z\alpha \ll 1)$ yaklaşıklığında (2.38) şu hale gelir:

$$\Delta E_n^{BK}=\alpha\frac{i(-2i)^{-3}}{(-6)y^3}\sum_{K=1}^{\infty}2|K|A_{0,0}\left[\int_{C_+}+\int_{C_-}\right]\frac{dz}{2\pi i}\left\{\int_0^1 dt\int_0^{\infty}dt'\, t^{\alpha-1}(1-t)^{2K-\alpha}t'^{\alpha'-1}(1+t')^{2K-\alpha'}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{c}\cdot\frac{\Gamma(2K+3)}{(1-t+t')^{2K+3}}\cdot T_{\alpha\alpha'}\right\}. \qquad (2.39)$$

Sıra K-toplamasını yapmaya geldi. Bu işi kolaylaştırmak için K-toplamasında içerilen terimlerin tümü için

$$S_K=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{2|K|\,\Gamma(2K+3)}{(1-t+t')^{2K+3}}t^{\alpha-1}(1-t)^{2K-\alpha}t'^{\alpha'-1}(1+t')^{2K-\alpha'}T_{\alpha\alpha'}. \qquad (2.40)$$

tanımını yapalım. O zaman, $\theta=t(1-t)t'(1+t')/(1-t+t')^2$ olmak üzere

$$S_K=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{2|K|\Gamma(2K+3)\theta^K}{(1-t+t')^3}\left\{\frac{iZ\alpha}{c}\left[\frac{t^{-1-i\nu}(1-t)^{i\nu}t'^{-1-i\nu}(1+t')^{i\nu}+t^{-i\nu}(1-t)^{i\nu-1}t'^{-i\nu}(1+t')^{i\nu-1}}{\Gamma(K)\Gamma(K+1)}\right]-\right.$$

$$\left.-z\,\frac{t^{-1-i\nu}(1-t)^{i\nu}t'^{-i\nu}(1+t')^{i\nu-1}-t^{-i\nu}(1-t)^{i\nu-1}t'^{-1-i\nu}(1+t')^{i\nu}}{\Gamma(K)\Gamma(K)}\right\}. \quad (2.41)$$

yazabiliriz. (2.41)'deki toplamı,

$$S_K^{(1)}=2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{K.\Gamma(2K+3)}{(K)\ (K+1)}\theta^K=2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{K.(2K+2)!\theta^K}{(K-1)!.K!}$$ ve

$$S_K^{(2)}=2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{K.\Gamma(2K+3)}{\Gamma(K)\Gamma(K)}\theta^K=2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(K-1+1).(2K+2)!}{(K-1)!.(K-1)!}\theta^K$$ şeklinde iki parçaya ayırmak mümkündür. K'ya göre seriye açılıp ilk birkaç terime bakılırsa bu toplamların KHF cinsinden yazılabileceği kolayca görülür. Bu işlemin ayrıntıları EK.1'de verilmistir. Böylece $S_K^{(1)}$ ve $S_K^{(2)}$ için

$$S_K^{(1)}=2.4!\,\theta.(1-4\theta)^{-5/2}.{}_2F_1(-2,5/2,1;4\theta/(4\theta-1)),$$
$$S_K^{(2)}=S_K^{(1)}+2.6!.\theta.(1-4\theta)^{-7/2}.{}_2F_1(-2,7/2,2;4\theta/(4\theta-1)). \quad (2.42)$$

bulunur. Bunları S_K'de yerlerine bırakırsak

$$S=\frac{2t(1-t)t'(1+t')}{(1-t+t')^5}\,t^{\alpha-1-\beta}.t'^{\alpha'-1-\beta}(1-t)^{\beta-\alpha}.(1+t')^{\beta-\alpha'}.$$

$$\cdot\left\{4!\cdot\left[\frac{iZ\alpha}{c}(\delta_{\alpha=\alpha',\beta-i\nu}+\delta_{\alpha=\alpha',\beta-i\nu+1})-\right.\right.$$

$$\left.-z(\delta_{\substack{\alpha=\beta-i\nu,\\ \alpha'=\alpha+1}}-\delta_{\substack{\alpha=\beta-i\nu+1,\\ \alpha'=\alpha-1}})\right](1-4\theta)^{-5/2}{}_2F_1(-2,5/2,1;\frac{4\theta}{4\theta-1})-$$

$$\left.-6!.\theta.z(\delta_{\alpha=\alpha'-1,\beta-i\nu}-\delta_{\alpha=\alpha'+1,\beta-i\nu+1})(1-4\theta)^{-7/2}{}_2F_1(-2,7/2,2;\frac{4\theta}{4\theta-1})\right\}. \quad (2.43)$$

elde ederiz. Şimdi de

$$\mathbb{t}=t^{\alpha-\beta}\ t'^{\alpha'-\beta}(1-t)^{\beta-\alpha+1}(1+t')^{\beta-\alpha'+1}/(1-t+t')^5,$$

$$T_1^{\alpha\alpha'}=4!.\{iZ\alpha/c(\delta_{\alpha=\alpha',\beta-i\nu}+\delta_{\alpha=\alpha',\beta-i\nu+1})-$$

$$-z(\delta_{\alpha=\alpha'-1,\beta-i\nu}-\delta_{\alpha=\alpha'+1,\beta-i\nu+1})\},$$

$$T_2^{\alpha\alpha'}=-z.6!.(\delta_{\alpha=\alpha'-1,\beta-i\nu}-\delta_{\alpha=\alpha'+1,\beta-i\nu+1}). \tag{2.44}$$

tanımlarını yapar ve (2.43)´deki KHF´ları kuvvet serisine açarsak

$$S_K=t^{\alpha-\beta}t'^{\alpha'-\beta}(1-t)^{\beta-\alpha+1}(1+t')^{\beta-\alpha'+1}T_1^{\alpha\alpha'}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\varrho^5}-\frac{15}{2}\cdot\frac{(1-t+t')^2}{\varrho^7}+\right.$$
$$\left.+\frac{35}{4}\cdot\frac{(1-t+t')^4}{\varrho^9}\right]+t^{\alpha-\beta+1}(1-t)^{\beta-\alpha+2}(1+t')^{\beta-\alpha'+2}t'^{\alpha'-\beta+1}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\varrho^7}-\right.$$
$$\left.-\frac{7}{2}\cdot\frac{(1-t+t')^2}{\varrho^9}+\frac{21}{4}\cdot\frac{(1-t+t')^4}{\varrho^{11}}\right]. \tag{2.45}$$

buluruz. Burada $\varrho=1-t+t'-2tt'$ ´dir.

Böylelikle t ve t' üzerinden integral alabilecek duruma geldik. Bunu yerine getirebilmek için öncelikle şu tanımları yapmak yararlı olacaktır:

$$(K,L,M)_{\alpha\alpha'}=\int_0^1 dt\int_0^\infty dt'\,\frac{t^{\alpha-\beta}\,t'^{\alpha'-\beta}(1-t)^{\beta-\alpha+1}(1+t')^{\beta-\alpha'+1}}{(1-t+t')^5}\cdot\left(\frac{1-t+t'}{\varrho}\right)^{5,7,9}, \tag{2.46.a}$$

$$(N,P,R)_{\alpha\alpha'}=\int_0^1 dt\int_0^\infty dt'\,\frac{t^{\alpha-\beta+1}\,t'^{\alpha'-\beta+1}(1-t)^{\beta-\alpha+2}(1+t')^{\beta-\alpha'+2}}{(1-t+t')^7}\cdot\left(\frac{1-t+t'}{\varrho}\right)^{7,9,11}. \tag{2.46.b}$$

Şimdi $(K,L,M,N,P,R)_{\alpha\alpha'}$ terimlerini açık olarak hesaplamalıyız:

$$K_{\alpha\alpha'}=\sum_m(5)_m 2^m\frac{\Gamma(\alpha-\beta+m+1)\Gamma(\beta-\alpha+2)}{\Gamma(m+3)}\int_0^\infty dt'\,\frac{t'^{\alpha'-\beta+m}\left(1-\frac{1}{1+t'}\right)^{\beta-\alpha-m-1}}{(1+t')^{\alpha'-\beta+m+4}}\times$$
$$\times{}_2F_1(-2,\alpha-\beta+m+1,m+3;-1/t').$$

Son satırdaki $_2F_1$ fonksiyonu seriye açılırsa

$$K_{\alpha\alpha'}=\sum_m (5)_m 2^m \frac{\Gamma(\alpha-\beta+m+1)\Gamma(3)\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(2-\alpha+\beta)}{\Gamma(3)\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(m+3)}\int_0^1 dt' \frac{t'^{\alpha'-\alpha-1}}{(1+t')^{\alpha'-\alpha+3}}\times$$

$$\times\left[1+\frac{2(\alpha-\beta+m+1)}{m+3}\frac{1}{t'}+\frac{(\alpha-\beta+m+1)(\alpha-\beta+m+2)}{(m+3)(m+4)}\frac{1}{t'^2}\right].$$

bulunur. Ayrıca

$$_2F_1(a,b,c;x)\doteq\sum_m \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)\cdot\Gamma(c+m)}\cdot\frac{x^m}{m}.$$

olduğundan[18]

$$K_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(2-\alpha+\beta)}{\Gamma(3)}\left\{A_{\alpha\alpha'}\,{}_2F_1(5,1+\alpha-\beta,3;2)+2B_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(2+\alpha-\beta)\Gamma(3)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(4)}\times\right.$$

$$\left.\times\,{}_2F_1(5,2+\alpha-\beta,4;2)+C_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(3+\alpha-\beta)\Gamma(3)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(5)}\,{}_2F_1(5,3+\alpha-\beta,5;2)\right\}.$$

yazılabilir. Burada

$$A_{\alpha\alpha'}=\int_\epsilon^\infty dt'\frac{t'^{\alpha'-\alpha-1}}{(1+t')^{\alpha'-\alpha-3}},\quad B_{\alpha\alpha'}=\int_\epsilon^\infty dt'\frac{t'^{\alpha'-\alpha-2}}{(1+t')^{\alpha'-\alpha-3}},\quad C_{\alpha\alpha'}=\int_\epsilon^\infty dt'\frac{t'^{\alpha'-\alpha-3}}{(1+t')^{\alpha'-\alpha-3}}.$$

'dir. Aynı yöntemle $(L,M,N,P,R)_{\alpha\alpha'}$ ifadeleri de hesaplanabilir ve sonuçlar toplu halde

$$K_{\alpha\alpha'}=(-1)^{\beta-\alpha}\Gamma(2+\beta-\alpha)\left\{-A_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(3)}\,{}_2F_1(-2,1+\alpha-\beta,3;2)+\right.$$

$$\left.+B_{\alpha\alpha'}\frac{2\Gamma(2+\alpha-\beta)}{\Gamma(4)}\,{}_2F_1(-1,2+\alpha-\beta,4;2)-C_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(3+\alpha-\beta)}{\Gamma(5)}\,{}_2F_1(0,3+\alpha-\beta,5;2)\right\} \qquad (2.47.a)$$

$$L_{\alpha\alpha'}=(-1)^{\beta-\alpha}\Gamma(2+\beta-\alpha)\Big\{-A_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(3)}{}_2F_1(-4,1+\alpha-\beta,3;2)+ \tag{2.47.b}$$
$$+B_{\alpha\alpha'}\frac{2\Gamma(2+\alpha-\beta)}{\Gamma(4)}{}_2F_1(-3,2+\alpha-\beta,4;2)-C_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(3+\alpha-\beta)}{\Gamma(5)}{}_2F_1(-2,3+\alpha-\beta,5;2)\Big\},$$

$$M_{\alpha\alpha'}=(-1)^{\beta-\alpha}\Gamma(2+\beta-\alpha)\Big\{-A_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(3)}{}_2F_1(-6,1+\alpha-\beta,3;2)+B_{\alpha\alpha'}\frac{2\Gamma(2+\alpha-\beta)}{\Gamma(4)}\times$$
$$\times{}_2F_1(-5,2+\alpha-\beta,4;2)-C_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(3+\alpha-\beta)}{\Gamma(5)}{}_2F_1(-4,3+\alpha-\beta,5;2)\Big\}, \tag{2.47.c}$$

$$N_{\alpha\alpha'}=(-1)^{\beta-\alpha}\Gamma(3+\beta-\alpha)\Big\{A_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(2+\alpha-\beta)}{\Gamma(5)}{}_2F_1(-2,\alpha-\beta+2,5;2)-B_{\alpha\alpha'}\frac{2\Gamma(3+\alpha-\beta)}{\Gamma(6)}\times$$
$$\times{}_2F_1(-1,\alpha-\beta+3,6;2)+C_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(4+\alpha-\beta)}{\Gamma(7)}{}_2F_1(0,\alpha-\beta+4,7;2)\Big\}, \tag{2.47.d}$$

$$P_{\alpha\alpha'}=(-1)^{\beta-\alpha}\Gamma(3+\beta-\alpha)\Big\{A_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(2+\alpha-\beta)}{\Gamma(5)}{}_2F_1(-4,\alpha-\beta+2,5;2)-B_{\alpha\alpha'}\frac{2\Gamma(3+\alpha-\beta)}{\Gamma(6)}\times$$
$$\times{}_2F_1(-3,\alpha-\beta+3,6;2)+C_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(4+\alpha-\beta)}{\Gamma(7)}{}_2F_1(-7,\alpha-\beta+4,7;2)\Big\}, \tag{2.47.e}$$

$$R_{\alpha\alpha'}=(-1)^{\beta-\alpha}\Gamma(3+\beta-\alpha)\Big\{A_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(2+\alpha-\beta)}{\Gamma(5)}{}_2F_1(-6,\alpha-\beta+2,5;2)-B_{\alpha\alpha'}\frac{2\Gamma(3+\alpha-\beta)}{\Gamma(6)}\times$$
$$\times{}_2F_1(-5,\alpha-\beta+3,6;2)+C_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(4+\alpha-\beta)}{\Gamma(7)}{}_2F_1(-4,\alpha-\beta+4,7;2)\Big\}. \tag{2.47.f}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerdeki KHF´lar açılırsa $u=\beta-\alpha$ olmak üzere

$$K_{\alpha\alpha'}=(-1)^{u}\Gamma(2+u)\Big\{\frac{A_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(3)}\Big[-\frac{4}{3}\Gamma(2-u)-\frac{1}{3}\Gamma(3-u)\Big]+\frac{2B_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(4)}\Big[\Gamma(2-u)-\frac{\Gamma(3-u)}{2}\Big]-$$
$$-\frac{C_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(5)}\Gamma(3-u)\Big\}, \tag{2.48.a}$$

$$L_{\alpha\alpha'}=(-1)^{u}\Gamma(2+u)\Big\{\frac{A_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(3)}\Big[-\Gamma(1-u)+\frac{8}{3}\Gamma(2-u)-2\Gamma(3-u)+\frac{8}{15}\Gamma(4-u)-\frac{2}{45}\Gamma(5-u)\Big]+$$
$$+\frac{2B_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(4)}\Big[\Gamma(2-u)-\frac{3}{2}\Gamma(3-u)+\frac{3}{5}\Gamma(4-u)-\frac{\Gamma(5-u)}{15}\Big]-\frac{C_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(5)}\Big[\frac{\Gamma(3-u)}{1}- \tag{2.48.b}$$
$$-\frac{4}{5}\Gamma(4-u)+\frac{2}{15}\Gamma(5-u)\Big]\Big\},$$

$$M_{\alpha\alpha'}=(-1)^u\Gamma(2+u)\Big\{\frac{A_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(3)}-\Gamma(1-u)+4\Gamma(2-u)-5\Gamma(3-u)+\frac{8}{3}\Gamma(4-u)-\frac{2}{3}\Gamma(5-u)+\frac{8}{105}\Gamma(6-u)-\frac{\Gamma(7-u)}{5.7.9}\Big]+$$
$$+\frac{2B_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(4)}\Big[\Gamma(2-u)-\frac{5}{2}\Gamma(3-u)+2\Gamma(4-u)-\frac{2}{3}\Gamma(5-u)+\frac{2}{21}\Gamma(6-u)-\frac{\Gamma(7-u)}{5.6.7}\Big]-$$
$$-\frac{C_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(5}\Big[\Gamma(3-u)-\frac{8}{5}\Gamma(4-u)+\frac{4}{5}\Gamma(5-u)-\frac{16}{3.5.7}\Gamma(6-u)+\frac{\Gamma(7-u)}{3.5.7}\Big]\Big\}, \tag{2.48.c}$$

$$N_{\alpha\alpha'}=(-1)^u\Gamma(3+u)\Big\{\frac{A_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(5)}\Big[\Gamma(2-u)-\frac{4}{5}\Gamma(3-u)+\frac{2}{15}\Gamma(4-u)\Big]-\frac{2B_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(6)}\Big[\Gamma(3-u)-\frac{\Gamma(4-u)}{3}\Big]+$$
$$+C_{\alpha\alpha'}\Gamma(4-u)/\Gamma(7)\Big\}, \tag{2.48.d}$$

$$P_{\alpha\alpha'}=(-1)^u\Gamma(3+u)\Big\{\frac{A_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(5)}\Big[\Gamma(2-u)-\frac{8}{5}\Gamma(3-u)+\frac{4}{5}\Gamma(4-u)-\frac{16}{3.5.7}\Gamma(5-u)+\frac{\Gamma(6-u)}{3.5.7}\Big]-\frac{2B_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(6)}\times$$
$$\times\Big[\Gamma(3-u)-\Gamma(4-u)+\frac{2}{7}\Gamma(5-u)-\frac{\Gamma(6-u)}{42}\Big]+\frac{C_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(7)}\Big[\Gamma(4-u)-\frac{4}{7}\Gamma(5-u)+\frac{\Gamma(6-u)}{14}\Big]\Big\}, \tag{2.48.e}$$

$$R_{\alpha\alpha'}=(-1)^u\Gamma(3+u)\Big\{\frac{A_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(5)}\Big[\Gamma(2-u)-\frac{12}{5}\Gamma(3-u)+2\Gamma(4-u)-\frac{16}{3.7}\Gamma(5-u)+\frac{\Gamma(6-u)}{7}-\frac{4}{5.7.9}\Gamma(7-u)+$$
$$+\frac{2}{3.7.9.25}\Gamma(8-u)\Big]-\frac{2B_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(6)}\Big[\Gamma(3-u)-\frac{5}{3}\Gamma(4-u)+\frac{20}{21}\Gamma(5-u)-\frac{5}{21}\Gamma(6-u)+$$
$$+\frac{5}{3.7.9}\Gamma(7-u)-\frac{\Gamma(8-u)}{3.5.7.9}\Big]+\frac{C_{\alpha\alpha'}}{\Gamma(7)}\Big[\Gamma(4-u)-\frac{8}{7}\Gamma(5-u)+\frac{3}{7}\Gamma(6-u)-$$
$$-\frac{4}{63}\Gamma(7-u)+\frac{\Gamma(8-u)}{5.7.9}\Big]\Big\}. \tag{2.48.f}$$

bulunur. Bu ifadelerde görülen $A_{\alpha\alpha'}$, $B_{\alpha\alpha'}$ ve $C_{\alpha\alpha'}$ katsayılarını şu şekilde hesaplıyoruz:

$$A_{\alpha\alpha'}=\int_{\epsilon}^{\infty}dt'\,t'^{\alpha'-\alpha-1}\frac{1}{(1+t')^{\alpha'-\alpha+3}}=\frac{1}{3\epsilon^3}\,{}_2F_1(\alpha'-\alpha+3,3,4;-1/\epsilon), \tag{2.49.a}$$

$$B_{\alpha\alpha'}=\int_{\epsilon}^{\infty}dt'\,t'^{\alpha'-\alpha-2}\frac{1}{(1+t')^{\alpha'-\alpha+3}}=\frac{1}{4\epsilon^4}\,{}_2F_1(\alpha'-\alpha+3,4,5;-1/\epsilon), \tag{2.49.b}$$

$$C_{\alpha\alpha'}=\int_{\epsilon}^{\infty}dt'\,t'^{\alpha'-\alpha-3}\frac{1}{(1+t')^{\alpha'-\alpha-3}}=\frac{1}{5\epsilon^5}\,{}_2F_1(\alpha'-\alpha+3,5,6;-1/\epsilon). \tag{2.49.c}$$

Veya KHF´ların başka bir gösterimini kullanarak

$$A_{\alpha\alpha'}=\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dv}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\alpha'-\alpha+3+v)\cdot\Gamma(-v)}{(3+v)\Gamma(\alpha'-\alpha+3)\,\epsilon^{v+3}}, \tag{2.49.á}$$

$$B_{\alpha\alpha'}=\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dv}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\alpha'-\alpha+3+v)\Gamma(-v)}{(4+v)\Gamma(\alpha'-\alpha+3)\,\epsilon^{v+4}}, \tag{2.49.b́}$$

$$C_{\alpha\alpha'}=\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dv}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\alpha'-\alpha+3+v)\Gamma(-v)}{(5+v)\Gamma(\alpha'-\alpha+3)\,\epsilon^{5+v}}. \tag{2.49.ć}$$

yazabiliriz. Bu katsayılar için gözönüne alınması gereken üç durum vardır:

i) $\alpha = \alpha'$ ise

$$A_{\alpha\alpha} = -3/2, \quad B_{\alpha\alpha} = 5/2, \quad C_{\alpha\alpha} = -7/2, \tag{2.50.a}$$

ii) $\alpha = \alpha' - 1$ ise

$$A_{\alpha,\alpha+1} = -1/3, \quad B_{\alpha,\alpha+1} = -11/6, \quad C_{\alpha,\alpha+1} = 13/3, \tag{2.50.b}$$

iii) $\alpha = \alpha' + 1$ ise

$$A_{\alpha,\alpha-1} = 1, \quad B_{\alpha,\alpha-1} = -1, \quad C_{\alpha,\alpha-1} = 1. \tag{2.50.c}$$

Bu katsayıların ayrıntılı hesabı EK.3` te verilmiştir. Bulduğumuz değerleri (2.48.a,b,c,d,e,f) ifadelerinde yerlerine yazarsak

$$K_{\alpha\alpha} = (-1)^u \Gamma(2+u)\left[\frac{3}{4}\Gamma(1-u) - \frac{1}{6}\Gamma(2-u) - \frac{1}{48}\Gamma(3-u)\right],$$

$$L_{\alpha\alpha} = (-1)^u \Gamma(2+u)\left[\frac{3}{4}\Gamma(1-u) - \frac{7}{6}\Gamma(2-u) + \frac{19}{48}\Gamma(3-u) - \frac{\Gamma(4-u)}{60} - \frac{\Gamma(5-u)}{360}\right],$$

$$M_{\alpha\alpha} = (-1)^u \Gamma(2+u)\left[\frac{3}{4}\Gamma(1-u) - \frac{13}{6}\Gamma(2-u) + \frac{87}{48}\Gamma(3-u) - \frac{17}{30}\Gamma(4-u) + \frac{11}{180}\Gamma(5-u) - \right.$$
$$\left. - \frac{\Gamma(7-u)}{12.15.28}\right],$$

$$K_{\alpha,\alpha+1} = (-1)^u \Gamma(2+u)\left[-\frac{\Gamma(1-u)}{6} - \frac{7}{18}\Gamma(2-u) + \frac{5}{72}\Gamma(3-u)\right],$$

$$L_{\alpha,\alpha+1} = (-1)^u \Gamma(2+u)\left[-\frac{\Gamma(1-u)}{6} - \frac{\Gamma(2-u)}{6} + \frac{29}{72}\Gamma(3-u) - \frac{2}{15}\Gamma(4-u) - \frac{\Gamma(5-u)}{12.45}\right],$$

$$M_{\alpha,\alpha+1} = (-1)^u \Gamma(2+u)\left[-\frac{\Gamma(1-u)}{6} + \frac{\Gamma(2-u)}{18} + \frac{37}{72}\Gamma(3-u) - \frac{22}{45}\Gamma(4-u) + \frac{41}{270}\Gamma(5-u) - \right.$$
$$\left. - \frac{17}{15.63}\Gamma(6-u) + \frac{\Gamma(7-u)}{24.63}\right],$$

$$K_{\alpha,\alpha-1} = (-1)^u \Gamma(2+u)\left[-\frac{\Gamma(1-u)}{2} + \frac{\Gamma(2-u)}{3} - \frac{\Gamma(3-u)}{24}\right],$$

$$L_{\alpha,\alpha-1} = (-1)^u \Gamma(2+u)\left[-\frac{\Gamma(1-u)}{2} + \Gamma(2-u) - \frac{13}{24}\Gamma(3-u) + \frac{\Gamma(4-u)}{10} - \frac{\Gamma(5-u)}{12.15}\right],$$

$$M_{\alpha,\alpha-1} = (-1)^u \Gamma(2+u)\left[\frac{-\Gamma(1-u)}{2} + \frac{5}{3}\Gamma(2-u) - \frac{41}{24}\Gamma(3-u) + \frac{11}{15}\Gamma(4-u) - \frac{13}{90}\Gamma(5-u) + \frac{4}{21.15}\Gamma(6-u) - \frac{\Gamma(7-u)}{36.70}\right],$$

$$N_{\alpha,\alpha+1} = (-1)^u \Gamma(3+u)\left[\frac{\Gamma(2-u)}{72} + \frac{7}{360}\Gamma(3-u) - \frac{\Gamma(4-u)}{12.36}\right],$$

$$P_{\alpha,\alpha+1}=(-1)^{u}\Gamma(3+u)\left[\frac{\Gamma(2-u)}{72}+\frac{\Gamma(3-u)}{120}-\frac{29}{24.90}\Gamma(4-u)+\frac{\Gamma(5-u)}{5.63}-\Gamma(6-u)/84.72\right],$$

$$R_{\alpha,\alpha+1}=(-1)^{u}\Gamma(3+u)\left[\frac{\Gamma(2-u)}{72}-\frac{\Gamma(3-u)}{360}-\frac{37}{36.60}\Gamma(4-u)+\frac{11}{21.45}\Gamma(5-u)-\frac{41}{72.210}\Gamma(6-u)+\right.$$
$$\left.+\frac{17}{18.60.63}\Gamma(7-u)-\frac{\Gamma(8-u)}{12.63.180}\right],$$

$$N_{\alpha,\alpha-1}=(-1)^{u}\Gamma(3+u)\left[\frac{\Gamma(2-u)}{24}-\frac{\Gamma(3-u)}{60}+\frac{\Gamma(4-u)}{720}\right],$$

$$P_{\alpha,\alpha-1}=(-1)^{u}\Gamma(3+u)\left[\frac{\Gamma(2-u)}{24}-\frac{\Gamma(3-u)}{20}+\frac{13}{24.30}\Gamma(4-u)-\frac{\Gamma(5-u)}{420}+\frac{\Gamma(6-u)}{84.120}\right],$$

$$R_{\alpha,\alpha-1}=(-1)^{u}\Gamma(3+u)\left[\frac{\Gamma(2-u)}{24}-\frac{\Gamma(3-u)}{12}+\frac{41}{720}\Gamma(4-u)-\frac{11}{630}\Gamma(5-u)+\frac{13}{60.84}\Gamma(6-u)-\right.$$
$$\left.-\Gamma(7-u)/9.15.42+\Gamma(8-u)/60.60.63\right].$$

buluruz. $T_1^{\alpha\alpha'}$ ve $T_2^{\alpha\alpha'}$ diye tanımladığımız terimlerde bulunan delta sembollerini hatırlarsak $\alpha=\alpha'=\beta-i\nu$, $\alpha=\alpha'=\beta-i\nu+1$, $\alpha=\alpha'-1=\beta-i\nu$ ve $\alpha=\alpha'+1=\beta-i\nu+1$ için $(KLMNPR)_{\alpha\alpha'}$'yi bulmamız gerektiğini kolayca görürüz. O zaman,

a) $\alpha=\alpha'=\beta-i\nu$ $(u=i\nu)$;

$$K_{\alpha\alpha}=(-1)^{i\nu}\Gamma(2+i\nu)\left[\frac{3}{4}\Gamma(1-i\nu)-\frac{1}{6}\Gamma(2-i\nu)-\frac{1}{48}\Gamma(3-i\nu)\right], \qquad (2.51.a)$$

$$L_{\alpha\alpha}=(-1)^{i\nu}\Gamma(2+i\nu)\left[\frac{3}{4}\Gamma(1-i\nu)-\frac{7}{6}\Gamma(2-i\nu)+\frac{19}{48}\Gamma(3-i\nu)-\frac{\Gamma(4-i\nu)}{60}-\frac{\Gamma(5-i\nu)}{360}\right], \qquad (2.51.b)$$

$$M_{\alpha\alpha}=(-1)^{i\nu}\Gamma(2+i\nu)\left[\frac{3}{4}\Gamma(1-i\nu)-\frac{13}{6}\Gamma(2-i\nu)+\frac{87}{48}\Gamma(3-i\nu)-\frac{17}{30}\Gamma(4-i\nu)+\right.$$
$$\left.+\frac{11}{180}\Gamma(5-i\nu)-\Gamma(7-i\nu)/12.15.28\right], \qquad (2.51.c)$$

b) $\alpha=\alpha'=\beta-i\nu+1$ $(u=i\nu-1)$;

$$K_{\alpha\alpha}=(-1)^{i\nu}\Gamma(1+i\nu)\left[-\frac{3}{4}\Gamma(2-i\nu)+\frac{\Gamma(3-i\nu)}{6}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{48}\right], \qquad (2.51.d)$$

$$L_{\alpha\alpha}=(-1)^{i\nu}\Gamma(1+i\nu)\left[-\frac{3}{4}\Gamma(2-i\nu)+\frac{7}{6}\Gamma(3-i\nu)-\frac{19}{48}\Gamma(4-i\nu)+\frac{\Gamma(5-i\nu)}{60}+\frac{\Gamma(6-i\nu)}{360}\right], \qquad (2.51.e)$$

$$M_{\alpha\alpha}=(-1)^{i\nu}\Gamma(1+i\nu)\left[-\frac{3}{4}\Gamma(2-i\nu)+\frac{13}{6}\Gamma(3-i\nu)-\frac{87}{48}\Gamma(4-i\nu)+\frac{17}{30}\Gamma(5-i\nu)-\right.$$
$$\left.-\frac{11}{180}\Gamma(6-i\nu)+\Gamma(8-i\nu)/12.15.28\right], \qquad (2.51.f)$$

c) $\alpha=\alpha'-1=\beta-i\nu$ ($u=i\nu$);

$$K_{\alpha,\alpha+1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(2+i\nu)\left[-\frac{\Gamma(1-i\nu)}{6}-\frac{7}{18}\Gamma(2-i\nu)+\frac{5}{72}\Gamma(3-i\nu)\right], \quad (2.51.g)$$

$$L_{\alpha,\alpha+1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(2+i\nu)\left[-\frac{\Gamma(1-i\nu)}{6}-\frac{\Gamma(2-i\nu)}{6}+\frac{29}{72}\Gamma(3-i\nu)-\frac{2}{15}\Gamma(4-i\nu)-\right.$$
$$\left.-\Gamma(5-i\nu)/12.45\right], \quad (2.51.h)$$

$$M_{\alpha,\alpha+1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(2+i\nu)\left[-\frac{\Gamma(1-i\nu)}{6}+\frac{\Gamma(2-i\nu)}{18}+\frac{37}{72}\Gamma(3-i\nu)-\frac{22}{45}\Gamma(4-i\nu)+\frac{41}{270}\Gamma(5-i\nu)-\right.$$
$$\left.-17\Gamma(6-i\nu)/15.63+\Gamma(7-i\nu)/24.63\right], \quad (2.51.i)$$

$$N_{\alpha,\alpha+1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(3+i\nu)\left[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{72}+\frac{7}{360}\Gamma(3-i\nu)-\frac{\Gamma(4-i\nu)}{12.36}\right], \quad (2.51.j)$$

$$P_{\alpha,\alpha+1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(3+i\nu)\left[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{72}+\frac{\Gamma(3-i\nu)}{720}-\frac{29}{24.90}\Gamma(4-i\nu)+\frac{\Gamma(5-i\nu)}{5.63}-\Gamma(6-i\nu)/72.84\right], \quad (2.51.k)$$

$$R_{\alpha,\alpha+1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(3+i\nu)\left[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{72}-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{360}-\frac{37}{36.60}\Gamma(4-i\nu)+\frac{11}{45.21}\Gamma(5-i\nu)-\right.$$
$$\left.-\frac{41}{72.210}\Gamma(6-i\nu)+\frac{17}{18.60.63}\Gamma(7-i\nu)-\frac{\Gamma(8-i\nu)}{12.63.180}\right], \quad (2.51.l)$$

d) $\alpha=\alpha'+1=\beta-i\nu+1$ ($u=1-i\nu$);

$$K_{\alpha,\alpha-1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(1+i\nu)\left[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{2}-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{3}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{24}\right], \quad (2.51.m)$$

$$L_{\alpha,\alpha-1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(1+i\nu)\left[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{2}-\Gamma(3-i\nu)+\frac{13}{24}\Gamma(4-i\nu)-\frac{\Gamma(5-i\nu)}{10}+\right.$$
$$\left.+\Gamma(6-i\nu)/12.15\right], \quad (2.51.n)$$

$$M_{\alpha,\alpha-1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(1+i\nu)\left[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{2}-\frac{5}{3}\Gamma(3-i\nu)+\frac{41}{24}\Gamma(4-i\nu)-\frac{11}{15}\Gamma(5-i\nu)+\right.$$
$$\left.+\frac{13}{90}\Gamma(6-i\nu)-\frac{4}{21.15}\Gamma(7-i\nu)+\frac{\Gamma(8-i\nu)}{36.70}\right], \quad (2.51.o)$$

$$N_{\alpha,\alpha-1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(2+i\nu)\left[-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{24}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{60}-\frac{\Gamma(5-i\nu)}{720}\right], \quad (2.51.p)$$

$$P_{\alpha,\alpha-1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(2+i\nu)\Big[-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{24}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{20}-\frac{13}{24.30}\Gamma(5-i\nu)+\frac{\Gamma(6-i\nu)}{420}-\Gamma(7-i\nu)/84.120\Big], \qquad (2.51.r)$$

$$R_{\alpha,\alpha-1}=(-1)^{i\nu}\Gamma(2+i\nu)\Big[-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{24}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{12}-\frac{41}{720}\Gamma(5-i\nu)+\frac{11}{630}\Gamma(6-i\nu)-$$
$$-\frac{13}{60.84}\Gamma(7-i\nu)+\Gamma(8-i\nu)/9.15.42-\frac{\Gamma(9-i\nu)}{60.60.63}\Big]. \qquad (2.51.s)$$

(2.45) ifadesini $(K,L,M,N,P,R)_{\alpha\alpha'}$ cinsinden yeniden yazarsak

$$S=T_1^{\alpha\alpha'}\Big[\frac{3K_{\alpha\alpha'}}{4}-\frac{15L_{\alpha\alpha'}}{2}+\frac{35M_{\alpha\alpha'}}{4}\Big]+T_2^{\alpha\alpha'}\Big[\frac{N_{\alpha\alpha'}}{4}-\frac{7P_{\alpha\alpha'}}{2}+\frac{21R_{\alpha\alpha'}}{4}\Big]. \qquad (2.52)$$

buluruz. (2.51.a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, r, s) ifadelerini (2.52)'de yerlerine yazarsak ve $Z\alpha$ ile orantılı toplama $S^{(1)}$ ve z ile orantılı toplama da $S^{(2)}$ dersek

$$S^{(1)}=\frac{4!\cdot(-1)^{i\nu}\,i\,Z\alpha}{2c}\Big\{\frac{3\Gamma(2+i\nu)}{2}\Big[\frac{3}{4}\Gamma(1-i\nu)-\frac{\Gamma(2-i\nu)}{6}-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{48}\Big]+\frac{3\Gamma(1+i\nu)}{2}\times$$
$$\times\Big[-\frac{3}{4}\Gamma(2-i\nu)+\frac{\Gamma(3-i\nu)}{6}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{48}\Big]-15\Gamma(2+i\nu)\Big[\frac{3}{4}\Gamma(1-i\nu)-\frac{7}{6}\Gamma(2-i\nu)-$$
$$-\frac{7}{6}\Gamma(2-i\nu)+\frac{19}{48}\Gamma(3-i\nu)-\frac{\Gamma(4-i\nu)}{60}-\frac{\Gamma(5-i\nu)}{360}\Big]-15\Gamma(1+i\nu)\Big[-\frac{3}{4}\Gamma(2-i\nu)+$$
$$+\frac{7}{6}\Gamma(3-i\nu)-\frac{19}{48}\Gamma(4-i\nu)+\frac{\Gamma(5-i\nu)}{60}+\frac{\Gamma(6-i\nu)}{360}\Big]+\frac{35}{2}\Gamma(2+i\nu)\Big[\frac{3}{4}\Gamma(1-i\nu)-$$
$$-\frac{13}{6}\Gamma(2-i\nu)+\frac{87}{48}\Gamma(3-i\nu)-\frac{17}{30}\Gamma(4-i\nu)+\frac{11}{180}\Gamma(5-i\nu)-\frac{\Gamma(7-i\nu)}{12.15.28}\Big]+\frac{35}{2}\times$$
$$\times\Big[-\frac{3}{4}\Gamma(2-i\nu)+\frac{13}{6}\Gamma(3-i\nu)-\frac{87}{48}\Gamma(4-i\nu)+\frac{17}{30}\Gamma(5-i\nu)-$$
$$-11\Gamma(6-i\nu)/180+\Gamma(8-i\nu)/12.15.28\Big]\Big\}, \qquad (2.53)$$

ve

$$S^{(2)}=-z\frac{(-1)^{i\nu}}{2}\Big\{4!\Big[\Big[\frac{3\Gamma(2+i\nu)}{2}\Big[-\frac{\Gamma(1-i\nu)}{6}-\frac{7}{18}\Gamma(2-i\nu)+\frac{5}{72}\Gamma(3-i\nu)\Big]-\frac{3}{2}\Gamma(1+i\nu)\Big[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{2}-$$
$$-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{3}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{24}\Big]-15\Gamma(2+i\nu)\Big[-\frac{\Gamma(1-i\nu)}{6}-\frac{\Gamma(2-i\nu)}{6}+\frac{29}{72}\Gamma(3-i\nu)-\frac{2}{15}\Gamma(4-i\nu)+$$
$$+\frac{\Gamma(5-i\nu)}{12.45}\Big]+15\Gamma(1+i\nu)\Big[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{2}-\Gamma(3-i\nu)+\frac{13}{24}\Gamma(4-i\nu)-\frac{\Gamma(5-i\nu)}{10}+\frac{\Gamma(6-i\nu)}{12.15}\Big]+$$
$$+\frac{35}{2}\Gamma(2+i\nu)\Big[-\frac{\Gamma(1-i\nu)}{6}+\frac{\Gamma(2-i\nu)}{18}+\frac{37}{72}\Gamma(3-i\nu)-\frac{22}{45}\Gamma(4-i\nu)+\frac{41}{270}\Gamma(5-i\nu)-$$

$$
-\frac{17}{15.63}\Gamma(6-i\nu)+\frac{\Gamma(7-i\nu)}{63.24}]-\frac{35}{2}\Gamma(1+i\nu)[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{2}-\frac{5}{3}\Gamma(3-i\nu)+\frac{41}{24}\Gamma(4-i\nu)-
$$

$$
-\frac{11}{15}\Gamma(5-i\nu)+\frac{13}{90}\Gamma(6-i\nu)-\frac{4}{21.15}\Gamma(7-i\nu)+\frac{\Gamma(8-i\nu)}{36.70}]]+6!\,[[\frac{\Gamma(3+i\nu)}{2}[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{72}+
$$

$$
+\frac{7}{360}\Gamma(3-i\nu)-\frac{\Gamma(4-i\nu)}{12.36}]-\frac{\Gamma(2+i\nu)}{2}[-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{24}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{60}-\frac{\Gamma(5-i\nu)}{720}]-7\Gamma(3+i\nu)[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{72}+
$$

$$
+\frac{\Gamma(3-i\nu)}{120}-\frac{29}{24.90}\Gamma(4-i\nu)+\frac{\Gamma(5-i\nu)}{5.63}-\frac{\Gamma(6-i\nu)}{72.84}]+7\Gamma(2+i\nu)[-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{24}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{20}-
$$

$$
-\frac{13}{24.30}\Gamma(5-i\nu)+\frac{\Gamma(6-i\nu)}{420}-\frac{\Gamma(7-i\nu)}{84.120}]+\frac{21}{2}\Gamma(3+i\nu)[\frac{\Gamma(2-i\nu)}{72}-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{360}-\frac{37}{36.60}\Gamma(4-i\nu)+
$$

$$
+\frac{11}{45.21}\Gamma(5-i\nu)-\frac{41}{72.210}\Gamma(6-i\nu)+\frac{17}{63.60.18}\Gamma(7-i\nu)-\frac{\Gamma(8-i\nu)}{12.63.180}]-\frac{21}{2}\Gamma(2+i\nu)\times
$$

$$
\times[-\frac{\Gamma(3-i\nu)}{24}+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{12}-\frac{41}{720}\Gamma(5-i\nu)+\frac{11}{630}\Gamma(6-i\nu)-\frac{13}{60.84}\Gamma(7-i\nu)+\Gamma(8-i\nu)/9.15.42-
$$

$$
-\Gamma(9-i\nu)/60.60.63]]\Big\} \tag{2.54}
$$

elde ederiz. $Z\alpha$ ile orantılı terimlerde $\nu = 0$ alırsak ve z ile orantılı terimlerde gama fonksiyonlarını açıp [EK. 2] sadece ν'ye göre birinci basamaktan terimleri alırsak

$$
S^{(1)} = 0.0138.iZ\alpha/c, \tag{2.55}
$$

ve

$$
S^{(2)} = 36.0252i\nu\,(-1)^{i\nu}\,z. \tag{2.56}
$$

buluruz. O halde

$$
\Delta E_n^{BK} = -\frac{\alpha}{6}A_{0,0}(Z\alpha/N_n)^3\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dz}{2\pi i}\cdot\frac{1}{(z^2-1)^2}\cdot[0.0138\frac{iZ\alpha}{\sqrt{z^2-1}}+
$$

$$
+36.0252i\frac{Z\alpha}{\sqrt{z^2-1}}z^2] \tag{2.57}
$$

$A_{0,0}$ katsayısı $n_1=0$, $n_2=0$, $\gamma_n=1$, $n_r=0$ ve $E_n/m\approx 1$ alınarak

$$
A_{0,0}=\frac{2(N_n-K_n)}{\Gamma^2(3)4(N_n-K_n)N_n},\quad (1S_{1/2} \text{ için } K_n=-1,\ n=1,\ N_n=n)
$$

olarak bulunabilir. Bu katsayıyı $1S_{1/2}$ durumu için hesaplarsak 1/8 buluruz. Son olarak enerji integrallerini hesaplıyoruz:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dz}{2\pi i}\,\frac{1}{(z^2-1)^{5/2}}=-\frac{2i}{3\pi}\,,$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dz}{2\pi i}\cdot\frac{z^2}{(z^2-1)^{5/2}}=\frac{i}{3\pi}\,. \tag{2.58}$$

Enerji integrali sonuçlarını ve A_{00} değerlerini (2.57) ´de yerine yazarsak $(1S_{1/2})$ için

$$\Delta E_n^{BK}=\frac{4\alpha}{3\pi}(0{,}18748)\,Z\alpha\left(\frac{Z\alpha}{N_n}\right)^3 . \tag{2.59}$$

elde ederiz. (2.59) sonucu, [17]´de verilenin 1.074188 ´de biridir. Görüldüğü gibi iki sonuç birbirine oldukça yakındır. Standart KED´nin verdiği sonucun bizim bulduğumuz değere oranı ise 1.06678´dir.

3. BİR COULOMB ALANINDA $\alpha(Z\alpha)^5$ BASAMAĞINDAN BOŞLUK KUTUPLANMASI ENERJİ KAYMASI

2. Bölümde BK için elde ettiğimiz genel ifade

$$\Delta E_n^{BK} = \alpha \sum_{K=1}^{\infty} 2|K| \sum_{n_1,n_2} A_{n_1,n_2} \left[\int_{C_+} + \int_{C_-}\right] \frac{dz}{2\pi i}\, i\, \frac{T_{\alpha\alpha'}}{c} \int_0^1 dt\, t^{\alpha-1}(1-t)^{2\gamma-\alpha} \times$$
$$\times \int_0^{\infty} dt'\, t'^{\alpha'-1}(1+t')^{2\gamma-\alpha'} \frac{1}{2\ell+1} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{\Gamma(2\gamma+w)\Gamma(\tau-2\gamma-w)\, y^{-w}}{(\ell+1-w)(w+\ell)(-2i)^{w}(1-t+t')^{2\gamma+w}} \quad (3.1)$$

şeklindeydi. $\gamma_n = 1$, $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ alarak birinci kutup için $w_0 = 3$ bulmuş ve $\alpha(Z\alpha)^4$ basamağından BK enerji kaymasını elde etmiştik. $w = w_0 + \eta$ $(\eta = 0, 1, 2, ..)$ ifadesine göre $\eta = 1$ dolayısıyla $w_1 = 3+1 = 4$ alarak bir sonraki kutubun verdiği katkıyı bu bölümde hesaplayacağız. Bir önceki bölümde kullandığımız yöntemle s-dalgaları için bir sonraki basamaktan katkının kolayca hesaplandığını göreceğiz. $l=0$ ve $w_1=4$ için (3.1) ifadesi $\gamma = |K|$ yaklaşıklığında

$$\Delta E_n^{BK} = \frac{\alpha A_{00}}{(-3)(4)(-2i)^4} \sum_{K=1}^{\infty} 2|K| \left\{ \left[\int_{C_+} + \int_{C_-}\right] \frac{dz}{2\pi i} \frac{i}{c} \int_0^1 dt \int_0^{\infty} dt'\, t^{\alpha-1}(1-t)^{2K-\alpha}\, t'^{\alpha'-1}(1+t')^{2K-\alpha'} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\Gamma(2K+4)\, y^{-4}}{(1-t+t')^{2K+4}} \right\}. \quad (3.2)$$

'ye dönüşür.

$$S_K = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2K\,\Gamma(2K+4)}{(1-t+t')^{2K+4}} t^{\alpha-1}(1-t)^{2K-\alpha}\, t'^{\alpha'-1}(1+t')^{2K-\alpha'} \left\{ \frac{iZ\alpha}{c} \left[\frac{\delta_{\alpha, K-i\nu}\, \delta_{\alpha', K-i\nu}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2K+1-\alpha')} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\delta_{\alpha, K-i\nu+1}\, \delta_{\alpha', K-i\nu+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2K+1-\alpha')} \right] - z \left[\frac{\delta_{\alpha, K-i\nu}\, \delta_{\alpha', K-i\nu+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2K+1-\alpha')} - \frac{\delta_{\alpha, K-i\nu+1}\, \delta_{\alpha', K-i\nu}}{\Gamma(\alpha')\Gamma(2K+1-\alpha)} \right] \right\}. \quad (3.3)$$

olsun. $\theta = t(1-t)t'(1+t')/(1-t+t')$ olmak üzere S_K yeniden yazılabilir. Şimdi öncelikle K-toplamasını yapacağız:

$$S_K^{(1)}=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{2K\,\Gamma(2K+4)\cdot\theta^K}{\Gamma(K)\,\Gamma(K+1)}=2.5!.\theta\cdot{}_2F_1(3,7/2,1,4\theta)\ ,$$

ve

$$S_K^{(2)}=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{2K\cdot\Gamma(2K+4)}{\Gamma(K)\,\Gamma(K)}=S_K^{(1)}+2.7!.\theta^2\,{}_2F_1(9/2,4,2;4\theta).$$

Burada $S_K^{(1)}$, $Z\alpha$ ile orantılı toplamı; $S_K^{(2)}$ ise z ile orantılı toplamı göstermektedir. Bu ifadelerde görülen KHF´ların dönüşüm bağıntılarını kullanırsak

$$S_K^{(1)}=2.5!.\theta.(1-4\theta)^{-7/2}\,{}_2F_1\left(-2,7/2,1;\frac{4\theta}{4\theta-1}\right)\ , \tag{3.4.a}$$

ve

$$S_K^{(2)}=S_K^{(1)}+2.7!.\theta^2.(1-4\theta)^{-9/2}\,{}_2F_1\left(-2,9/2,2;\frac{4\theta}{4\theta-1}\right). \tag{3.4.b}$$

buluruz. O zaman genel toplam ifadesi

$$S_K=2\,\frac{t(1-t)t'(1+t')}{(1-t+t')^6}\,t^{\alpha-1-\beta}\,t'^{\alpha'-1-\beta}(1-t)^{\beta-\alpha}(1+t')^{\beta-\alpha'}\Bigg\{5!\Bigg[\frac{iZ\alpha}{c}\Big(\delta_{\alpha=\alpha',\,\beta-i\nu}+$$
$$+\delta_{\alpha=\alpha',\,\beta-i\nu+1}\Big)-z\Big(\delta_{\alpha=\alpha'-1,\,\beta-i\nu}-\delta_{\alpha=\alpha'+1,\,\beta-i\nu+1}\Big)\Bigg](1-4\theta)^{-7/2}\,{}_2F_1\left(-2,7/2,1;\frac{4\theta}{4\theta-1}\right)-$$
$$-z.7!.\theta\cdot\Big(\delta_{\alpha=\alpha'-1,\,\beta-i\nu}-\delta_{\alpha=\alpha'+1,\,\beta-i\nu+1}\Big)(1-4\theta)^{-9/2}\,{}_2F_1\left(-2,9/2,2;\frac{4\theta}{4\theta-1}\right)\Bigg\}. \tag{3.5}$$

haline gelir. Şimdi de

$$T_1^{\alpha\alpha'}=5!.\left\{\frac{iZ\alpha}{c}\Big(\delta_{\alpha=\alpha',\,\beta-i\nu}+\delta_{\alpha=\alpha',\,\beta-i\nu+1}\Big)-z\Big(\delta_{\alpha=\alpha'-1,\,\beta-i\nu}-\delta_{\alpha=\alpha'+1,\,\beta-i\nu+1}\Big)\right\},$$
$$T_2^{\alpha\alpha'}=7!.(-z)\Big(\delta_{\alpha=\alpha'-1,\beta-i\nu}-\delta_{\alpha=\alpha'+1,\beta-i\nu+1}\Big).$$

tanımlarını yaparsak ve KHF´ları seriye açarsak

$$S=\frac{t^{\alpha-\beta}\,t'^{\alpha'-\beta}(1-t)^{\beta-\alpha+1}(1+t')^{\beta-\alpha'+1}}{(1-t+t')^6}\Bigg\{T_1^{\alpha\alpha'}\left[\frac{15}{4(1-4\theta)^{7/2}}-\frac{35}{2(1-4\theta)^{9/2}}+\frac{63}{4(1-4\theta)^{11/2}}\right]+$$
$$+T_2^{\alpha\alpha'}\theta\left[\frac{5}{4(1-4\theta)^{9/2}}-\frac{15}{2(1-4\theta)^{11/2}}+\frac{33}{4(1-4\theta)^{13/2}}\right]\Bigg\}. \tag{3.6}$$

buluruz. θ değerini yerine yazmak yoluyla

$$S=t^{\alpha-\beta}(1-t)^{\beta-\alpha+1}\,t'^{\alpha'-\beta}(1+t')^{\beta-\alpha'+1}\Big\{T_1^{\alpha\alpha'}\Big[\frac{15(1-t+t')}{4(1-t+t'-2tt')^7}-\frac{35(1-t+t')^3}{2(1-t+t'-2tt')^9}+$$
$$+\frac{63(1-t+t')^5}{4(1-t+t'-2tt')^{11}}\Big]+T_2^{\alpha\alpha'}\Big[\frac{5(1-t+t')}{(1-t+t'-2tt')^9}-\frac{15(1-t+t')^3}{(1-t+t'-2tt')^{11}}+$$
$$+\frac{33(1-t+t')^5}{4(1-t+t'-2tt')^{13}}\Big]t(1-t)\,t'(1+t').$$

elde ederiz. Bu aşamada t-ve t́-üzerinden integral alabiliriz. Bunun için önce

$$(U,V,Y)_{\alpha\alpha'}=\int_0^1 dt\int_0^\infty dt'\,\frac{t^{\alpha-\beta}\,t'^{\alpha'-\beta}(1-t)^{\beta-\alpha+1}(1+t')^{\beta-\alpha'+1}}{(1-t+t')^6}\left(\frac{1-t+t'}{1-t+t'-2tt'}\right)^{(7,9,11)}, \tag{3.7}$$

$$(Q,W,X)_{\alpha,\alpha'}=\int_0^1 dt\int_0^\infty dt'\,\frac{t^{\alpha-\beta+1}\,t'^{\alpha'-\beta+1}(1-t)^{\beta-\alpha+2}(1+t')^{\beta-\alpha'+2}}{(1-t+t')^8}\left(\frac{1-t+t'}{1-t+t'-2tt'}\right)^{(9,11,13)}. \tag{3.8}$$

tanımlarını yapıyoruz. t üzerinden integral aldıktan sonra $u=\beta-\alpha$ olmak üzere

$$U_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(1-u)\Gamma(2+u)}{\Gamma(3)}\Big[D_{\alpha\alpha'}\,{}_2F_1(7,1-u,3;2)+E_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(3)\Gamma(2-u)}{\Gamma(4)\Gamma(1-u)}\,{}_2F_1(7,2-u,4;2)+$$
$$+\frac{3\Gamma(3)\Gamma(3-u)}{\Gamma(5)\Gamma(1-u)}\,{}_2F_1(7,3-u,5;2).F_{\alpha\alpha'}+G_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(3)\Gamma(4-u)}{\Gamma(6)\Gamma(1-u)}\,{}_2F_1(7,4-u,6;2)\Big],$$

$$V_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(1-u)\Gamma(2+u)}{\Gamma(3)}\Big[D_{\alpha\alpha'}\,{}_2F_1(9,1-u,3;2)+E_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(3)\Gamma(2-u)}{\Gamma(4)\Gamma(1-u)}\,{}_2F_1(9,2-u,4;2)+$$
$$+\frac{3\Gamma(3)\Gamma(3-u)}{\Gamma(5)\Gamma(1-u)}\,{}_2F_1(9,3-u,5;2).F_{\alpha\alpha'}+\frac{\Gamma(3)\Gamma(4-u)}{\Gamma(6)\Gamma(1-u)}G_{\alpha\alpha'}\,{}_2F_1(9,4-u,6;2)\Big],$$

$$Y_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(1-u)\Gamma(2+u)}{\Gamma(3)}\Big[D_{\alpha\alpha'}\,{}_2F_1(11,1-u,3;2)+E_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(3)\Gamma(2-u)}{\Gamma(4)\Gamma(1-u)}\,{}_2F_1(11,2-u,4;2)+$$
$$+F_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(3)\Gamma(3-u)}{\Gamma(5)\Gamma(1-u)}\,{}_2F_1(11,3-u,5;2)+G_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(3)\Gamma(4-u)}{\Gamma(6)\Gamma(1-u)}\,{}_2F_1(11,4-u,6;2)\Big],$$

$$Q_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(2-u)\Gamma(3+u)}{\Gamma(5)}\Big[D_{\alpha\alpha'}\,{}_2F_1(9,2-u,5;2)+E_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(5)\Gamma(3-u)}{\Gamma(6)\Gamma(2-u)}\,{}_2F_1(9,3-u,6;2)+$$
$$+F_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(5)\Gamma(4-u)}{\Gamma(7)\Gamma(2-u)}\,{}_2F_1(9,4-u,7;2)+G_{\alpha\alpha'}\frac{\Gamma(5)\Gamma(5-u)}{\Gamma(8)\Gamma(2-u)}\,{}_2F_1(9,5-u,8;2)\Big],$$

$$W_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(2-u)\Gamma(3+u)}{\Gamma(5)}\Big[D_{\alpha\alpha'}\,{}_2F_1(11,2-u,5;2)+E_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(5)\Gamma(3-u)}{\Gamma(6)\Gamma(2-u)}\,{}_2F_1(11,3-u,6;2)+$$
$$+F_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(5)\Gamma(4-u)}{\Gamma(7)\Gamma(2-u)}\,{}_2F_1(11,4-u,7;2)+G_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(5)\Gamma(5-u)}{\Gamma(8)\Gamma(2-u)}\,{}_2F_1(11,5-u,8;2)\Big],$$

$$X_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(2-u)\Gamma(3+u)}{\Gamma(5)}\Big[D_{\alpha\alpha'}\,{}_2F_1(13,2-u,5;2)+E_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(5)\Gamma(3-u)}{\Gamma(6)\Gamma(2-u)}\,{}_2F_1(13,3-u,6;2)+$$

$$+F_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(5)\Gamma(4-u)}{\Gamma(7)\Gamma(2-u)}\,{}_2F_1(13,4-u,7;2)+G_{\alpha\alpha'}\frac{3\Gamma(5)\Gamma(5-u)}{\Gamma(8)\Gamma(2-u)}\,{}_2F_1(13,5-u,8;2)\Big]. \quad (3.10)$$

buluruz. Bu ifadelerde görülen $(D,E,F,G)_{\alpha\alpha'}$ katsayıları şu şekilde tanımlıdır:

$$D_{\alpha\alpha'}=\int_{\epsilon}^{\infty}dt'\frac{t'^{\alpha'-\alpha-1}}{(1+t')^{\alpha'-\alpha+4}}\ ;\quad E_{\alpha\alpha'}=\int_{\epsilon}^{\infty}dt'\frac{t'^{\alpha'-\alpha-2}}{(1+t')^{\alpha'-\alpha+4}}\ ;$$

$$F_{\alpha\alpha'}=\int_{\epsilon}^{\infty}dt'\frac{t'^{\alpha'-\alpha-3}}{(1+t')^{\alpha'-\alpha+4}}\ ;\quad G_{\alpha\alpha'}=\int_{\epsilon}^{\infty}dt'\frac{t'^{\alpha'-\alpha-4}}{(1+t')^{\alpha'-\alpha+4}}\,. \quad (3.11)$$

(3.10)'daki KHF'lar seriye açılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$U_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{\Gamma(3)}\Big[-D_{\alpha\alpha'}\Gamma(1-u)+\Gamma(2-u)\Big(\frac{8}{3}D_{\alpha\alpha'}+E_{\alpha\alpha'}\Big)-\Gamma(3-u)\Big(2D_{\alpha\alpha'}+\frac{3}{2}E_{\alpha\alpha'}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{4}\Big)+$$

$$+\Gamma(4-u)\Big(\frac{8}{15}D_{\alpha\alpha'}+\frac{3}{5}E_{\alpha\alpha'}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{5}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{60}\Big)-\Gamma(5-u)\Big(\frac{2}{45}D_{\alpha\alpha'}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{15}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{30}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{180}\Big)\Big],$$

$$V_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{\Gamma(3)}\Big[-\Gamma(1-u)D_{\alpha\alpha'}+\Gamma(2-u)(4D_{\alpha\alpha'}+E_{\alpha\alpha'})-5\Gamma(3-u)\Big(D_{\alpha\alpha'}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{2}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{20}\Big)+$$

$$+\Gamma(4-u)\Big(\frac{8}{3}D_{\alpha\alpha'}+2E_{\alpha\alpha'}+\frac{2F_{\alpha\alpha'}}{5}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{60}\Big)-\frac{\Gamma(5-u)}{3}\Big(2D_{\alpha\alpha'}+2E_{\alpha\alpha'}+\frac{3F_{\alpha\alpha'}}{5}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{20}\Big)+$$

$$+\frac{\Gamma(6-u)}{105}\Big(8D_{\alpha\alpha'}+10E_{\alpha\alpha'}+4F_{\alpha\alpha'}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{2}\Big)-\frac{\Gamma(7-u)}{105}\Big(\frac{D_{\alpha\alpha'}}{3}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{2}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{4}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{24}\Big)\Big],$$

$$Y_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{\Gamma(3)}\Big[-\Gamma(1-u)D_{\alpha\alpha'}+\Gamma(2-u)\Big(\frac{16}{3}D_{\alpha\alpha'}+E_{\alpha\alpha'}\Big)-\Gamma(3-u)\Big(\frac{28}{3}D_{\alpha\alpha'}+\frac{7E_{\alpha\alpha'}}{2}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{4}\Big)+$$

$$+\Gamma(4-u)\Big(\frac{112}{15}D_{\alpha\alpha'}+\frac{21E_{\alpha\alpha'}}{5}+\frac{3F_{\alpha\alpha'}}{5}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{60}\Big)-\Gamma(5-u)\Big(\frac{28D_{\alpha\alpha'}}{9}+\frac{7E_{\alpha\alpha'}}{3}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{2}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{36}\Big)+$$

$$+\Gamma(6-u)\Big(\frac{32D_{\alpha\alpha'}}{45}+\frac{2E_{\alpha\alpha'}}{3}+\frac{4F_{\alpha\alpha'}}{21}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{63}\Big)-\Gamma(7-u)\Big(\frac{4D_{\alpha\alpha'}}{45}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{10}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{28}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{12\cdot 21}\Big)+$$

$$+\Gamma(8-u)\Big(\frac{16D_{\alpha\alpha'}}{35\cdot 81}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{3\cdot 45}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{9\cdot 35}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{9\cdot 12\cdot 21}\Big)-\Gamma(9-u)\Big(\frac{2D_{\alpha\alpha'}}{7\cdot 25\cdot 81}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{3\cdot 25\cdot 63}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{9\cdot 21\cdot 50}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{21\cdot 45\cdot 60}\Big)\Big],$$

$$Q_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(3-u)(-1)^u}{\Gamma(5)}\Big[-\Gamma(2-u)D_{\alpha\alpha'}+\frac{\Gamma(3-u)}{5}(8D_{\alpha\alpha'}+3E_{\alpha\alpha'})-\frac{\Gamma(4-u)}{5}\Big(4D_{\alpha\alpha'}+3E_{\alpha\alpha'}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{2}\Big)+$$

$$+\frac{\Gamma(5-u)}{35}\Big(\frac{16D_{\alpha\alpha'}}{3}+6E_{\alpha\alpha'}+2F_{\alpha\alpha'}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{6}\Big)-\frac{\Gamma(6-u)}{35}\Big(\frac{D_{\alpha\alpha'}}{3}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{2}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{4}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{24}\Big)\Big],$$

$$W_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{\Gamma(5)}\Big[-\Gamma(2-u)D_{\alpha\alpha'}+\frac{3}{5}\Gamma(3-u)(4D_{\alpha\alpha'}+E_{\alpha\alpha'})-\Gamma(4-u)(2D_{\alpha\alpha'}+E_{\alpha\alpha'}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{10})+$$
$$+\frac{\Gamma(5-u)}{7}(\frac{16D_{\alpha\alpha'}}{3}+4E_{\alpha\alpha'}+\frac{4F_{\alpha\alpha'}}{5}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{30})-\frac{\Gamma(6-u)}{7}(D_{\alpha\alpha'}+E_{\alpha\alpha'}+\frac{3F_{\alpha\alpha'}}{10}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{40})+$$
$$+\frac{\Gamma(7-u)}{63}(\frac{4D_{\alpha\alpha'}}{5}+E_{\alpha\alpha'}+\frac{2F_{\alpha\alpha'}}{5}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{20})-\frac{\Gamma(8-u)}{25.63}(\frac{2D_{\alpha\alpha'}}{3}+E_{\alpha\alpha'}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{2}+$$
$$+G_{\alpha\alpha'}/12)\Big],$$

$$X_{\alpha\alpha'}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{\Gamma(5)}\Big[-\Gamma(2-u)D_{\alpha\alpha'}+\frac{3}{5}\Gamma(3-u)(16D_{\alpha\alpha'}+3E_{\alpha\alpha'})-$$
$$-\frac{\Gamma(4-u)}{5}(\frac{56D_{\alpha\alpha'}}{3}+7E_{\alpha\alpha'}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{2})+\frac{\Gamma(5-u)}{5}(\frac{32D_{\alpha\alpha'}}{3}+6E_{\alpha\alpha'}+\frac{6}{7}F_{\alpha\alpha'}+$$
$$+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{42})-\Gamma(7-u)(\frac{2D_{\alpha\alpha'}}{3}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{2}+\frac{3F_{\alpha\alpha'}}{28}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{168})+\frac{\Gamma(7-u)}{9}(\frac{16D_{\alpha\alpha'}}{15}+E_{\alpha\alpha'}+$$
$$+\frac{2F_{\alpha\alpha'}}{7}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{42})-\Gamma(8-u)(\frac{8D_{\alpha\alpha'}}{45}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{5}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{14}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{126})+$$
$$+\frac{\Gamma(9-u)}{15}(\frac{32}{55.63}D_{\alpha\alpha'}+\frac{2}{165}E_{\alpha\alpha'}+\frac{2}{385}F_{\alpha\alpha'}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{14.99})-$$
$$-\frac{\Gamma(10-u)}{15.45}(\frac{2}{11.21}D_{\alpha\alpha'}+\frac{E_{\alpha\alpha'}}{7.11}+\frac{F_{\alpha\alpha'}}{11.14}+\frac{G_{\alpha\alpha'}}{14.66})\Big]. \qquad (3.12)$$

Yine bir önceki bölümde yapılana benzer olarak $(D,E,F,G)_{\alpha\alpha'}$ katsayılarını t'-integrasyonu sonunda $\alpha=\alpha'$, $\alpha=\alpha'+1$ ve $\alpha=\alpha'-1$ durumları için hesaplarsak

$$D_{\alpha\alpha}=-11/6,\quad E_{\alpha\alpha}=13/3,\quad F_{\alpha\alpha}=-47/6,\quad G_{\alpha\alpha}=37/3;$$
$$D_{\alpha,\alpha-1}=5/2,\quad E_{\alpha,\alpha-1}=-7/2,\quad F_{\alpha,\alpha-1}=9/2,\quad G_{\alpha,\alpha-1}=-11/2;$$
$$D_{\alpha,\alpha+1}=1/4,\quad E_{\alpha,\alpha+1}=-25/12,\quad F_{\alpha,\alpha+1}=77/12,\quad G_{\alpha,\alpha+1}=-57/4. \qquad (3.13)$$

elde ederiz. Bulduğumuz sonuçları (3.12)´de yerlerine yazarsak

$$U_{\alpha\alpha}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{2}\Big[\frac{11}{6}\Gamma(1-u)-\frac{5}{9}\Gamma(2-u)-\frac{7}{8}\Gamma(3-u)+\frac{47}{180}\Gamma(4-u)-\frac{2}{135}\Gamma(5-u)\Big],$$
$$U_{\alpha,\alpha+1}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{2}\Big[-\frac{\Gamma(1-u)}{4}-\frac{17}{12}\Gamma(2-u)+\frac{49}{48}\Gamma(3-u)-\frac{17}{15.16}\Gamma(4-u)-\frac{\Gamma(5-u)}{6.24}\Big],$$
$$U_{\alpha,\alpha-1}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{2}\Big[-\frac{5}{2}\Gamma(1-u)+\frac{19}{6}\Gamma(2-u)-\frac{7}{8}\Gamma(3-u)+\frac{\Gamma(4-u)}{24}+\frac{\Gamma(5-u)}{12.30}\Big],$$

$$V_{\alpha,\alpha}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{2}\Big[\frac{11}{6}\Gamma(1-u)-3\Gamma(2-u)+\frac{7}{24}\Gamma(3-u)+\frac{17}{20}\Gamma(4-u)-\frac{11}{36}\Gamma(5-u)+$$
$$+\frac{\Gamma(6-u)}{30}-\frac{\Gamma(7-u)}{945}\Big],$$

$$V_{\alpha,\alpha+1}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{2}\Big[-\frac{\Gamma(1-u)}{4}-\frac{13}{12}\Gamma(2-u)+\frac{113}{48}\Gamma(3-u)-\frac{281}{240}\Gamma(4-u)+\frac{127}{3\cdot 240}\Gamma(5-u)-$$
$$-\Gamma(6-u)/15\cdot 24+\Gamma(7-u)/21\cdot 96\Big],$$

$$V_{\alpha,\alpha-1}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{2}\Big[-\frac{5}{2}\Gamma(1-u)+\frac{13}{12}\Gamma(2-u)-\frac{39}{8}\Gamma(3-u)+\frac{11}{8}\Gamma(4-u)-\frac{17}{120}\Gamma(5-u)+$$
$$+\Gamma(6-u)/420+\Gamma(7-u)/48\cdot 105\Big],$$

$$Y_{\alpha,\alpha}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{2}\Big[\frac{11}{6}\Gamma(1-u)-\frac{49}{9}\Gamma(2-u)+\frac{281}{12}\Gamma(3-u)+\frac{\Gamma(4-u)}{60}-\frac{5}{6}\Gamma(5-u)+$$
$$+658\,\Gamma(6-u)/27\cdot 63-\frac{299}{28\cdot 270}\Gamma(7-u)+\frac{79}{15\cdot 27\cdot 84}\Gamma(8-u)-\frac{2\Gamma(9-u)}{9\cdot 63\cdot 75}\Big],$$

$$Y_{\alpha,\alpha+1}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{2}\Big[-\frac{\Gamma(1-u)}{4}-\frac{3\Gamma(2-u)}{4}+\frac{161}{48}\Gamma(3-u)-\frac{157}{48}\Gamma(4-u)+\frac{187}{144}\Gamma(5-u)-$$
$$-\frac{29}{180}\Gamma(6-u)+\frac{17}{3\cdot 420}\Gamma(7-u)+\frac{\Gamma(8-u)}{12\cdot 15\cdot 84}-\frac{\Gamma(9-u)}{25\cdot 48\cdot 63}\Big],$$

$$Y_{\alpha,\alpha-1}=\frac{\Gamma(2+u)(-1)^u}{2}\Big[-\frac{5}{2}\Gamma(1-u)+\frac{59}{6}\Gamma(2-u)-\frac{293}{24}\Gamma(3-u)+\frac{263}{40}\Gamma(4-u)-$$
$$-\frac{41}{24}\Gamma(5-u)+\frac{3}{4}\Gamma(6-u)-\frac{\Gamma(7-u)}{90}+\frac{\Gamma(8-u)}{7\cdot 54\cdot 60}+\frac{\Gamma(9-u)}{21\cdot 60\cdot 90}\Big],$$

$$Q_{\alpha,\alpha}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{4!}\Big[\frac{11}{6}\Gamma(2-u)-\frac{\Gamma(3-u)}{3}-\frac{7}{20}\Gamma(4-u)+\frac{47}{18\cdot 35}\Gamma(5-u)-\frac{\Gamma(6-u)}{9\cdot 35}\Big],$$

$$Q_{\alpha,\alpha+1}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{4!}\Big[-\frac{\Gamma(2-u)}{4}-\frac{17}{20}\Gamma(3-u)+\frac{49}{120}\Gamma(4-u)-\frac{17}{24\cdot 35}\Gamma(5-u)-\frac{\Gamma(6-u)}{24\cdot 28}\Big],$$

$$Q_{\alpha,\alpha-1}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{4!}\Big[-\frac{5}{2}\Gamma(2-u)+\frac{19}{10}\Gamma(3-u)-\frac{9}{20}\Gamma(4-u)+\frac{\Gamma(5-u)}{6\cdot 14}+\frac{\Gamma(6-u)}{24\cdot 70}\Big],$$

$$W_{\alpha\alpha}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{4!}\Big[\frac{11}{6}\Gamma(2-u)-\frac{9}{5}\Gamma(3-u)+\frac{7}{60}\Gamma(4-u)+\frac{17}{70}\Gamma(5-u)-$$
$$-\frac{11}{7\cdot 24}\Gamma(6-u)+\frac{\Gamma(7-u)}{180}-\frac{2}{9\cdot 25\cdot 63}\Gamma(8-u)\Big],$$

$$W_{\alpha,\alpha+1}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{4!}\Big[-\frac{\Gamma(2-u)}{4}-\frac{13}{20}\Gamma(3-u)+\frac{113}{120}\Gamma(4-u)-\frac{281}{7\cdot 120}\Gamma(5-u)+\frac{127}{28\cdot 120}\Gamma(6-u)-$$
$$-\frac{\Gamma(7-u)}{9\cdot 240}-\frac{\Gamma(8-u)}{5\cdot 48\cdot 63}\Big],$$

$$W_{\alpha,\alpha-1}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{4!}\Big[-\frac{5}{2}\Gamma(2-u)+\frac{39}{10}\Gamma(3-u)-\frac{39}{20}\Gamma(4-u)+\frac{11}{28}\Gamma(5-u)-\frac{17}{14\cdot 40}\Gamma(6-u)+$$
$$+\Gamma(7-u)/40\cdot 63+\Gamma(8-u)/12\cdot 50\cdot 63\Big],$$

$$X_{\alpha\alpha}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{4!}\Big[\frac{11}{6}\Gamma(2-u)-\frac{49}{15}\Gamma(3-u)+\frac{281}{180}\Gamma(4-u)+\frac{\Gamma(5-u)}{210}-\frac{5}{28}\Gamma(6-u)+$$
$$+\frac{273}{54\cdot 105}\Gamma(7-u)-\frac{299}{63\cdot 90}\Gamma(8-u)-\frac{49}{55\cdot 90}\Gamma(9-u)-\frac{2\Gamma(10-u)}{15\cdot 21\cdot 33\cdot 45}\Big],$$

$$X_{\substack{\alpha,\\ \alpha+1}}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{4!}\Big[-\frac{\Gamma(2-u)}{4}-\frac{9}{20}\Gamma(3-u)+161\Gamma(4-u)/120-\frac{157}{168}\Gamma(5-u)+\frac{61}{224}\Gamma(6-u)-$$
$$-\frac{271}{14.15.16}\Gamma(7-u)+\frac{17}{90.105}\Gamma(8-u)-\frac{377}{12.15.70.77}\Gamma(9-u)-\frac{\Gamma(10-u)}{3.44.45.84}\Big],$$

$$X_{\substack{\alpha,\\ \alpha-1}}=\frac{\Gamma(3+u)(-1)^u}{4!}\Big[-\frac{5}{2}\Gamma(2-u)+\frac{59}{10}\Gamma(3-u)-\frac{293}{60}\Gamma(4-u)+\frac{263}{140}\Gamma(5-u)-\frac{41}{112}\Gamma(6-u)+$$
$$+\frac{\Gamma(7-u)}{28}-\frac{\Gamma(8-u)}{15.45}+\frac{\Gamma(9-u)}{11.21.900}+\frac{\Gamma(10-u)}{12.30.45.77}\Big]. \qquad (3.14)$$

buluruz. (3.5)´deki delta sembolleri ile gösterilen durumlar için (3.14) yeniden düzenlenirse aşğıdaki ifadeler elde edilir:

i) $\alpha=\alpha'=\beta-i\nu$ $(u=i\nu)$;

$$U_{\substack{\beta-i\nu,\\ \beta-i\nu}}=\frac{\Gamma(2+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[\frac{11}{6}\Gamma(1-i\nu)-\frac{5}{9}\Gamma(2-i\nu)-\frac{7}{8}\Gamma(3-i\nu)+\frac{47}{180}\Gamma(4-i\nu)-\frac{2}{135}\Gamma(5-i\nu)\Big],$$

$$V_{\substack{\beta-i\nu,\\ \beta-i\nu}}=\frac{\Gamma(2+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[\frac{11}{6}\Gamma(1-i\nu)-3\Gamma(2-i\nu)+\frac{7}{24}\Gamma(3-i\nu)+\frac{17}{120}\Gamma(4-i\nu)-\frac{11}{36}\Gamma(5-i\nu)+$$
$$+\Gamma(6-i\nu)/30-\Gamma(7-i\nu)/945\Big],$$

$$Y_{\substack{\beta-i\nu,\\ \beta-i\nu}}=\frac{\Gamma(2+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[\frac{11}{6}\Gamma(1-i\nu)-\frac{49}{9}\Gamma(2-i\nu)+\frac{281}{12}\Gamma(3-i\nu)+\frac{\Gamma(4-i\nu)}{60}-\frac{5}{6}\Gamma(5-i\nu)+$$
$$+\frac{658}{27.63}\Gamma(6-i\nu)-\frac{299}{28.270}\Gamma(7-i\nu)+\frac{79}{15.27.84}\Gamma(8-i\nu)-\frac{2\Gamma(9-i\nu)}{9.63.75}\Big],$$

ii) $\alpha=\alpha'=\beta-i\nu+1$ $(u=i\nu-1)$;

$$U_{\substack{\beta-i\nu+1,\\ \beta-i\nu+1}}=\frac{\Gamma(1+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[-\frac{11}{6}\Gamma(2-i\nu)+\frac{5}{9}\Gamma(3-i\nu)+\frac{7}{8}\Gamma(4-i\nu)-\frac{47}{180}\Gamma(5-i\nu)+\frac{2}{135}\Gamma(6-i\nu)\Big],$$

$$V_{\substack{\beta-i\nu+1,\\ \beta-i\nu+1}}=\frac{\Gamma(1+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[-\frac{11}{6}\Gamma(2-i\nu)+3\Gamma(3-i\nu)-\frac{7}{24}\Gamma(4-i\nu)-\frac{17}{20}\Gamma(5-i\nu)+\frac{11}{36}\Gamma(6-i\nu)-$$
$$-\Gamma(7-i\nu)/30+\Gamma(8-i\nu)/945\Big],$$

$$Y_{\substack{\beta-i\nu+1,\\ \beta-i\nu+1}}=\frac{\Gamma(1+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[-\frac{11}{6}\Gamma(2-i\nu)+\frac{49}{9}\Gamma(3-i\nu)-\frac{281}{12}\Gamma(4-i\nu)-\frac{\Gamma(5-i\nu)}{60}+\frac{5}{6}\Gamma(6-i\nu)-$$
$$-\frac{658}{27.63}\Gamma(7-i\nu)+\frac{299}{28.270}\Gamma(8-i\nu)-\frac{79}{15.27.84}\Gamma(9-i\nu)+\frac{2\Gamma(10-i\nu)}{9.63.75}\Big],$$

iii) $\alpha=\alpha'-1=\beta-i\nu$ $(u=i\nu)$;

$$U_{\substack{\beta-i\nu,\\ \beta-i\nu+1}} = \frac{\Gamma(2+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\left[-\frac{\Gamma(1-i\nu)}{4} - \frac{17}{12}\Gamma(2-i\nu) + \frac{49}{48}\Gamma(3-i\nu) - \frac{17}{15\cdot 16}\Gamma(4-i\nu) - \frac{\Gamma(5-i\nu)}{6\cdot 24}\right],$$

$$\begin{aligned} V_{\substack{\beta-i\nu,\\ \beta-i\nu+1}} = \frac{\Gamma(2+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[&-\frac{\Gamma(1-i\nu)}{4} - \frac{13}{12}\Gamma(2-i\nu) + \frac{113}{48}\Gamma(3-i\nu) - \frac{281}{240}\Gamma(4-i\nu) + \frac{127}{3\cdot 240}\Gamma(5-i\nu) - \\ &- \frac{\Gamma(6-i\nu)}{15\cdot 24} + \frac{\Gamma(7-i\nu)}{21\cdot 96}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{\substack{\beta-i\nu,\\ \beta-i\nu+1}} = \frac{\Gamma(2+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[&-\frac{\Gamma(1-i\nu)}{4} - \frac{3}{4}\Gamma(2-i\nu) + \frac{161}{48}\Gamma(3-i\nu) - \frac{157}{48}\Gamma(4-i\nu) + \frac{187}{144}\Gamma(5-i\nu) - \\ &- \frac{29}{180}\Gamma(6-i\nu) + \frac{17}{3\cdot 420}\Gamma(7-i\nu) + \frac{\Gamma(8-i\nu)}{12\cdot 15\cdot 84} - \frac{\Gamma(9-i\nu)}{25\cdot 48\cdot 63}\Big], \end{aligned}$$

$$Q_{\substack{\beta-i\nu,\\ \beta-i\nu+1}} = \frac{\Gamma(3+i\nu)(-1)^{i\nu}}{4!}\left[-\frac{\Gamma(2-i\nu)}{4} - \frac{17}{20}\Gamma(3-i\nu) + \frac{49}{120}\Gamma(4-i\nu) - \frac{17}{35\cdot 24}\Gamma(5-i\nu) - \frac{\Gamma(6-i\nu)}{24\cdot 28}\right],$$

$$\begin{aligned} W_{\substack{\beta-i\nu,\\ \beta-i\nu+1}} = \frac{\Gamma(3+i\nu)(-1)^{i\nu}}{4!}\Big[&-\frac{\Gamma(2-i\nu)}{4} - \frac{13}{20}\Gamma(3-i\nu) + \frac{113}{120}\Gamma(4-i\nu) - \frac{281}{7\cdot 120}\Gamma(5-i\nu) + \\ &+ \frac{127}{28\cdot 120}\Gamma(6-i\nu) - \frac{\Gamma(7-i\nu)}{9\cdot 240} - \frac{\Gamma(8-i\nu)}{12\cdot 20\cdot 63}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\substack{\beta-i\nu,\\ \beta-i\nu+1}} = \frac{\Gamma(3+i\nu)(-1)^{i\nu}}{4!}\Big[&-\frac{\Gamma(2-i\nu)}{4} - \frac{9}{20}\Gamma(3-i\nu) + \frac{161}{120}\Gamma(4-i\nu) - \frac{157}{168}\Gamma(5-i\nu) + \frac{61}{224}\Gamma(6-i\nu) - \\ &- \frac{271}{14\cdot 15\cdot 36}\Gamma(7-i\nu) + \frac{17}{90\cdot 105}\Gamma(8-i\nu) - \frac{377}{12\cdot 15\cdot 70\cdot 77}\Gamma(9-i\nu) - \\ &- \Gamma(10-i\nu)/3\cdot 44\cdot 45\cdot 84\Big], \end{aligned}$$

iv) $\alpha = \alpha' + 1 = \beta - i\nu + 1 \quad (u = i\nu - 1)$:

$$U_{\substack{\beta-i\nu+1,\\ \beta-i\nu}} = \frac{\Gamma(1+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\left[\frac{5}{2}\Gamma(2-i\nu) - \frac{19}{6}\Gamma(3-i\nu) + \frac{7}{8}\Gamma(4-i\nu) - \frac{\Gamma(5-i\nu)}{24} - \frac{\Gamma(6-i\nu)}{30\cdot 12}\right],$$

$$\begin{aligned} V_{\substack{\beta-i\nu+1,\\ \beta-i\nu}} = \frac{\Gamma(1+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[&\frac{5}{2}\Gamma(2-i\nu) - \frac{13}{12}\Gamma(3-i\nu) + \frac{39}{8}\Gamma(4-i\nu) - \frac{11}{8}\Gamma(5-i\nu) + \frac{17}{120}\Gamma(6-i\nu) - \\ &- \frac{\Gamma(7-i\nu)}{420} - \frac{\Gamma(8-i\nu)}{48\cdot 105}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{\substack{\beta-i\nu+1,\\ \beta-i\nu}} = \frac{\Gamma(1+i\nu)(-1)^{i\nu}}{2}\Big[&\frac{5}{2}\Gamma(2-i\nu) - \frac{59}{6}\Gamma(3-i\nu) + \frac{293}{24}\Gamma(3-i\nu) - \frac{263}{40}\Gamma(5-i\nu) + \\ &+ \frac{41}{24}\Gamma(6-i\nu) - \frac{3}{14}\Gamma(7-i\nu) + \frac{\Gamma(8-i\nu)}{90} - \frac{\Gamma(9-i\nu)}{7\cdot 54\cdot 60} - \frac{\Gamma(10-i\nu)}{21\cdot 60\cdot 90}\Big], \end{aligned}$$

$$Q_{\substack{\beta-i\nu+1,\\ \beta-i\nu}} = \frac{\Gamma(2+i\nu)(-1)^{i\nu}}{4!}\left[\frac{5}{2}\Gamma(3-i\nu) - \frac{19}{10}\Gamma(4-i\nu) + \frac{9}{20}\Gamma(5-i\nu) - \frac{\Gamma(6-i\nu)}{6\cdot 14} - \frac{\Gamma(7-i\nu)}{24\cdot 70}\right],$$

$$\begin{aligned} W_{\substack{\beta-i\nu+1,\\ \beta-i\nu}} = \frac{\Gamma(2+i\nu)(-1)^{i\nu}}{4!}\Big[&\frac{5}{2}\Gamma(3-i\nu) - \frac{39}{10}\Gamma(4-i\nu) + \frac{39}{20}\Gamma(5-i\nu) - \frac{11}{28}\Gamma(6-i\nu) + \\ &+ \frac{17}{14\cdot 40}\Gamma(7-i\nu) - \Gamma(8-i\nu)/40\cdot 63 - \Gamma(9-i\nu)/12\cdot 50\cdot 63\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\substack{\beta-i\nu+1,\\ \beta-i\nu}} = \frac{\Gamma(2+i\nu)(-1)^{i\nu}}{4!}\Big[&\frac{5}{2}\Gamma(3-i\nu) - \frac{59}{10}\Gamma(4-i\nu) + \frac{293}{60}\Gamma(5-i\nu) - \frac{263}{140}\Gamma(6-i\nu) + \\ &+ \frac{41}{112}\Gamma(7-i\nu) - \frac{\Gamma(8-i\nu)}{28} + \frac{\Gamma(9-i\nu)}{15\cdot 45} - \frac{\Gamma(10-i\nu)}{11\cdot 21\cdot 900} - \frac{\Gamma(11-i\nu)}{12\cdot 30\cdot 45\cdot 77}\Big]. \end{aligned}$$

(3.6) ifadesini

$$S^{(1)} = T_1^{\alpha\alpha'}\left(\frac{15}{4}U_{\alpha\alpha'} - \frac{35}{2}V_{\alpha\alpha'} + \frac{63}{4}Y_{\alpha\alpha'}\right), \tag{3.15.a}$$

ve

$$S^{(2)} = T_2^{\alpha\alpha'}\left(\frac{5}{4}Q_{\alpha\alpha'} - \frac{15}{2}W_{\alpha\alpha'} + \frac{33}{4}X_{\alpha\alpha'}\right). \tag{3.15.b}$$

şeklinde ikiye ayırabiliriz. $Z\alpha$ ile orantılı terimlerde $\nu=0$ alırsak ve gama fonksiyonlarını açıp ν'ye göre ilk basamak terimini alırsak

$$
\begin{aligned}
S^{(1)} = 5!\Big\{ \frac{iZ\alpha}{c} \Big[\!\Big[& \frac{15}{4}\Big(\frac{11}{6} - \frac{5}{9} - \frac{14}{8} + \frac{47.6}{180} - \frac{2.24}{135} - \frac{11}{6} + \frac{10}{9} + \frac{42}{8} - \frac{47.24}{180} + \\
& + \frac{47.24}{180} + \frac{2.120}{135}\Big) - \frac{35}{2}\Big(\frac{11}{6} - 3 + \frac{14}{24} + \frac{6.17}{120} + \frac{120}{30} - \frac{11.24}{36} - \frac{6.120}{945} - \\
& - \frac{11}{6} + 6 - \frac{42}{24} - \frac{17.24}{20} + \frac{11.120}{36} - \frac{6.120}{30} + \frac{6.7.120}{945}\Big) + \frac{63}{4}\Big(\frac{11}{6} - \frac{49}{9} + \\
& + \frac{281.2}{12} + \frac{6}{60} - \frac{5.24}{6} + \frac{658.120}{27.63} - \frac{299.6.120}{28.270} + \frac{79.42.120}{27.15.84} - \frac{12.56.120}{9.63.75} - \\
& - \frac{11}{6} + \frac{49.2}{9} - \frac{281.6}{12} - \frac{24}{60} + \frac{5.120}{6} - \frac{658.6.120}{27.63} + \frac{299.42.120}{28.270} - \\
& - \frac{79.42.8.120}{27.15.84} + \frac{12.56.9.120}{9.63.75}\Big)\Big]\!\Big] + \frac{z}{2}(-1)^{i\nu}\Big[\frac{15}{4}\Big[\frac{5}{2}(1-i\nu) - \\
& - \frac{19}{6}(2-3i\nu) + \frac{7}{8}(6-11i\nu) - \frac{24-50i\nu}{24} - \frac{120-274i\nu}{30.12} + \frac{1+i\nu}{4} + \frac{17}{12} - \\
& - \frac{49}{48}(2-i\nu) + \frac{17}{15.16}(6-5i\nu) + \frac{24-26i\nu}{6.24}\Big] - \frac{35}{2}\Big[\frac{5}{2}(1-i\nu) - \frac{13}{12}(2-3i\nu) + \\
& + \frac{39}{8}(6-11i\nu) - \frac{11}{8}(24-50i\nu) + \frac{17}{120}(120-274i\nu) - \frac{840-1764i\nu}{420} - \\
& - \frac{6720-13068i\nu}{48.105} + \frac{1+i\nu}{4} + \frac{13}{12} - \frac{113}{48}(2-i\nu) + \frac{281}{240}(6-5i\nu) - \\
& - \frac{127(24-26i\nu)}{3.240} + \frac{120-154i\nu}{15.24} - \frac{720-1044i\nu}{21.96}\Big] + \frac{63}{4}\Big[\frac{5}{2}(1-i\nu) - \\
& - \frac{59}{6}(2-3i\nu) + \frac{293}{24}(6-11i\nu) - \frac{263}{40}(24-50i\nu) + \frac{41}{24}(120-274i\nu) - \\
& - \frac{3}{14}(840-1764i\nu) + \frac{6720-13068i\nu}{90} - \frac{40320-109584i\nu}{7.54.60} -
\end{aligned}
$$

$$-\frac{362880-1026576i\nu}{21.60.90}+\frac{1+i\nu}{4}+\frac{3}{4}-\frac{161}{48}(2-i\nu)+\frac{157}{48}(6-5i\nu)-\frac{187}{144}(24-26i\nu)+$$

$$+\frac{29}{180}(120-154i\nu)-\frac{17}{3.420}(720-1044i\nu)-\frac{5040-8028i\nu}{12.15.84}+$$

$$+\frac{40320-69264i\nu}{25.48.63}\Bigg]\Bigg]\Bigg\}. \qquad (3.16.a)$$

ve

$$S^{(2)}=\frac{7!}{4!}z(-1)^{i\nu}\Bigg\{\frac{5}{4}\Bigg[\frac{5}{2}(2-i\nu)-\frac{19}{10}(6-5i\nu)+\frac{9}{20}(24-26i\nu)-\frac{120-154i\nu}{6.14}-$$

$$-\frac{720-1044i\nu}{24.70}+\frac{2+i\nu}{4}+\frac{17.4}{20}-\frac{49.4}{120}(3-i\nu)+\frac{17.4}{24.35}(12-7i\nu)+$$

$$+\frac{4.(60-47i\nu)}{24.48}\Bigg]-\frac{15}{2}\Bigg[\frac{5}{2}(2-i\nu)-\frac{39}{10}(6-5i\nu)+\frac{39}{20}(24-26i\nu)-$$

$$-\frac{11}{28}(120-154i\nu)+\frac{17(720-1044i\nu)}{14.40}-\frac{5040-8028i\nu}{40.63}-\frac{40320-69264i\nu}{12.50.63}+$$

$$+\frac{2+i\nu}{4}+\frac{13.4}{20}-\frac{113.4.(3-i\nu)}{120}+\frac{281.4.(12-7i\nu)}{7.120}-\frac{127.4.(60-47i\nu)}{28.120}+$$

$$+\frac{4.(360-342i\nu)}{9.240}+\frac{4.(2520-2754i\nu)}{63.20.12}\Bigg]+\frac{33}{4}\Bigg[\frac{5}{2}(2-i\nu)-\frac{59}{10}(6-5i\nu)+$$

$$+\frac{293}{60}(24-26i\nu)-\frac{263}{140}(120-154i\nu)+\frac{41}{112}(720-1044i\nu)-$$

$$-\frac{5040-8028i\nu}{28}+\frac{40320-69264i\nu}{15.45}-\frac{362880-663696i\nu}{11.21.900}-$$

$$-\frac{3628800-6999840i\nu}{12.30.45.77}+\frac{2+i\nu}{4}+\frac{9.4}{20}-\frac{161.4.(3-i\nu)}{120}+$$

$$+\frac{157.4.(12-7i\nu)}{168}-\frac{61.4.(60-47i\nu)}{224}+\frac{271.4.(360-342i\nu)}{14.15.36}-$$

$$-\frac{68(2520-2754i\nu)}{90.105}+\frac{377.4.(4160-24552i\nu)}{12.15.70.77}+\frac{4.(37440-225128i\nu}{3.44.45.84}\Big]\Big\}. \quad (3.16.b)$$

buluruz. (3.16.a) ve (3.16.b) ifadelerinden

$$S = -24966,677iZ\alpha/c + 5017,6788z(-1)^{i\nu}(i\nu), \quad (3.16.\acute{a})$$

ve

$$S = -67803,582(-1)^{i\nu}(i\nu) \quad (3.16.\acute{b})$$

elde edilir. $(-1)^{i\nu} = (e^{\pm i\pi})^{i\nu} = 1 \pm \pi\nu + \ldots$ açılımını gözönüne alarak ve $S^{(1)}$ ve $S^{(2)}$'yi genel toplamda yerine yazarak

$$S = -24966,677iZ\alpha/c - 62785,903i(Z\alpha/c)z^2 \pm$$
$$\pm i\pi 62785,903(Z\alpha/c)^2 z^3, \quad (3.17)$$

buluruz. O zaman ΔE_n^{BK} şu hale gelir:

$$\Delta E_n^{BK} = \frac{\alpha A_{00}(2P_N)^4}{(-3)4(-2i)^4}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dz}{2\pi i}\cdot(i^2/c)(1/c^4)[-24966,677-$$
$$-62785,903z^2](Z\alpha/c) \quad (3.18)$$

z-integrasyonu kolayca yapılır ve

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dz}{2\pi i}\cdot\frac{1}{(z^2-1)^3} = -\frac{3}{16} \quad ; \quad \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dz}{2\pi i}\cdot\frac{z^2}{(z^2-1)^3} = \frac{1}{16}$$

bulunur. Bunları (3.18)'de yerlerine yazarsak

$$\Delta E_n^{BK} = \frac{\alpha P_N^4 \cdot A_{00}}{12}[3.24966,677 - 62785,903](Z\alpha/16)$$

$$= 63,0944.A_{00}Z\alpha\,(Z\alpha/N_n)^4 \quad (3.19)$$

elde ederiz.

$1S_{1/2}$ için $A_{00}= 1/8$ olduğunu daha önce bulmuştuk. Bunu kullanarak $1S_{1/2}$ için

$$\Delta E_n^{BK} = 18{,}58283.\frac{4\alpha}{3\pi} Z\alpha\,(Z\alpha/N_n)^4, \tag{3.20}$$

elde ederiz. Böylece $\alpha.Z\alpha.(Z\alpha)^4$ basamağından BK enerji kaymasını birinci bölümde sözüedilen ve kullanılan yöntemle kolayca elde ettik. Bu basamaktan sonucun daha önce bulunmamış olduğunu belirtmeliyiz. Bu nedenle herhangi bir karşılaştırma kriterine sahip değiliz. Ancak bir önceki basamaktan katkıyı oldukça doğru bir şekilde elde etmemiz bu sonucun da doğru ve makul olduğunu söyleme cesareti vermektedir.

EK.1. (2.41) İFADESİNDEKI K ÜZERİNDEN TOPLAMIN KONFLÜENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR (KHF) CİNSİNDEN YAZILIMI

KHF´ların seriye açılmış olarak ifadesi şu sekilde verilir[18]:

$$F(\alpha,\beta,\gamma\,;\,z) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma.1}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1.2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}z^3 + \ldots$$

(2.41) ifadesindeki toplamı ikiye ayırarak

$$S^{(1)} = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{2K.\Gamma(2K+3)}{\Gamma(K).\Gamma(K+1)}\theta^K = 2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{K.(2K+2)!}{(K-1)!.K!}\theta^K,$$

ve

$$S^{(2)} = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{2K.\Gamma(2K+3)}{\Gamma(K).\Gamma(K)}\theta^K = 2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{K.(2K+2)!}{(K-1)!.(K-1)!}\theta^K.$$

şeklinde yazmıştık. $S^{(1)}$´in ilk birkaç terimini alır biraz düzeltirsek KHF cinsinden yazılabildiğini hemen görürüz:

$$S^{(1)} = 2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(2K+2)!}{(K-1)!.(K-1)!}\theta^K = 2\left(\frac{4!}{0!0!}\theta + \frac{6!}{1!1!}\theta^2 + \frac{8!}{2!2!}\theta^3 + \ldots\right) = 2.4!.\theta.\left(1 + \frac{3.5/2}{1}(4\theta) + \frac{3.4.5/2.7/2.}{1.2.1.2}(4\theta)^2 + \ldots\right)$$

Aynı şekilde $S^{(2)}$´nin ilk birkaç terimini alıp düzeltirsek

$$S^{(2)} = 2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(K-1+1).(2K+2)!\theta^K}{(K-1)!.(K-1)!} = 2\left[\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(2K+2)!\theta^K}{(K-1)!(K-1)!} + \sum_{K=2}^{\infty}\frac{(2K+2)!\theta^K}{(K-1)!(K-2)!}\right]$$

$$= 2\left[S^{(1)}_{K/2} + \frac{6!}{1!0!}\theta^2 + \frac{8!}{2!1!}\theta^3 + \ldots\right] = S^{(1)}_K + 2.6!.\theta^2\left[1 + \frac{7.8}{1.1.2}\theta + \ldots\right]$$

$$= S^{(1)}_K + 2.6!.\theta^2\left[1 + \frac{7/2.4}{1.1.2}4\theta + \ldots\right]$$

$$= S_K^{(1)} + 2.6!.\theta^2 {}_2F_1(7/2,4,2;4\theta)$$

$$= 2.4!.\theta\, {}_2F_1(3,5/2,1;4\theta) + 2.6!.\theta^2 {}_2F_1(7/2,4,2;4\theta).$$

buluruz.

EK.2. GAMA FONKSİYONLARININ ν'YE GÖRE AÇILIMI

2. ve 3. Bölümdeki gama fonsiyonlarını ν'ye göre seriye açıp birinci basamak terimini alırsak

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(2-i\nu) = 1-i\nu,$

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(3-i\nu) = 2-3i\nu,$

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(4-i\nu) = 6-11i\nu,$

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(5-i\nu) = 24-50i\nu,$

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(6-i\nu) = 120-274i\nu,$

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(7-i\nu) = 840-1764i\nu,$

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(8-i\nu) = 6720-13068i\nu,$

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(9-i\nu) = 40320-109584i\nu,$

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(10-i\nu) = 362880-1026576i\nu,$

$\Gamma(1+i\nu).\Gamma(11-i\nu) = 3628800-10628640i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(1-i\nu) = 1+i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(3-i\nu) = 2-i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(4-i\nu) = 6-5i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(5-i\nu) = 24-26i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(6-i\nu) = 120-154i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(7-i\nu) = 720-1044i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(8-i\nu) = 5040-8028i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(9-i\nu) = 40320-69264i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(10-i\nu) = 362880-663696i\nu,$

$\Gamma(2+i\nu).\Gamma(11-i\nu) = 3628800-6999840i\nu,$

$\Gamma(3+i\nu).\Gamma(2-i\nu) = 2+i\nu,$

$$\Gamma(3+i\nu).\Gamma(3-i\nu) = 4 \quad ,$$

$$\Gamma(3+i\nu).\Gamma(4-i\nu) = 4(3-i\nu),$$

$$\Gamma(3+i\nu).\Gamma(5-i\nu) = 4(12-7i\nu),$$

$$\Gamma(3+i\nu).\Gamma(6-i\nu) = 4(60-47i\nu),$$

$$\Gamma(3+i\nu).\Gamma(7-i\nu) = 4(360-342i\nu),$$

$$\Gamma(3+i\nu).\Gamma(8-i\nu) = 4(2520-2754i\nu),$$

$$\Gamma(3+i\nu).\Gamma(9-i\nu) = 4(4160-24552i\nu),$$

$$\Gamma(3+i\nu).\Gamma(10-i\nu)= 4(37440-225128i\nu).$$

elde ederiz.

EK.3. 2. VE 3. BÖLÜMDEKİ KATSAYILARIN HESABI

2. ve 3. bölümlerde $(A, B, C, D, E, F, G)_{\alpha\alpha'}$ ile gösterdiğimiz katsayılar, daha önce sözünü ettiğimiz sonsuz gibi gözüken integrallerle ifade edilmektedir. Fakat bu integrallerden uygun integral eğrisi seçimi ile sonlu sayılar elde edilebilir. Hepsinin çözüm yolu aynı olduğundan sadece $F_{\alpha\alpha}$, $F_{\alpha,\alpha-1}$, ve $F_{\alpha,\alpha+1}$ katsayılarının ayrıntılı hesabını vermekle yetiniyoruz:

$$F_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dv}{2\pi i}\cdot\frac{\Gamma(v+7)\Gamma(-v)\,\epsilon^{-v-6}}{(v+3)(v+4)(v+5)(v+6)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{v\to-4}\frac{\Gamma(7+v)\Gamma(-v)}{(v+5)(v+6)^2\epsilon^{6+v}} + \lim_{v\to-5}\frac{\Gamma(7+v)\Gamma(-v)}{(v+4)(v+6)^2\epsilon^{6+v}} + \lim_{v\to-6}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\Gamma(7+v)\Gamma(-v)}{(v+4)(v+5)\epsilon^{v+6}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{1.2^2.\epsilon^2} + \frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{(-1)\cdot\epsilon} + \frac{\Gamma(7+v)\Gamma(-v)\,\epsilon^{-6-v}}{(v+4)^2(v+5)^2}\Big\{\big(\psi(7+v)-\psi(-v)-\ln\epsilon\big)(v+4)(v+5)-$$

$$-(v+5+v+4)\Big\}_{v\to-6}\Big]$$

$$= \frac{\Gamma(6)}{4}\Big[2[\psi(1)-\psi(6)-\ln\epsilon]+3\Big]\cdot\frac{1}{2} \cong -47/6$$

$$F_{\alpha,\alpha-1} = \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dv}{2\pi i}\cdot\frac{\Gamma(v+3)\Gamma(-v)}{\Gamma(3)(6+v)\,\epsilon^{v+6}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dv}{2\pi i}\cdot\frac{\Gamma(v+7)\Gamma(-v)\,\epsilon^{-v-6}}{(v+3)(v+4)(v+5)(v+6)^2}$$

$$\cong \lim_{v\to-6}\frac{1}{2}\frac{d}{dv}\left(\frac{\Gamma(v+7)\Gamma(-v)\,\epsilon^{-v-6}}{(v+3)(v+4)(v+5}\right)$$

$$= \lim_{v\to-6}\frac{\Gamma(v+7)\Gamma(-v)\,\epsilon^{-v-6}}{2(v+3)^2(v+4)^2(v+5)^2}\Big\{[\psi(v+7)-\psi(-v)-\ln\epsilon]\cdot(v+3)(v+4)(v+5)-$$

$$-[(v+4)(v+5)+(v+3)(v+4)+(v+3)(v+5)]\Big\}$$

$$= \frac{5!}{18.4}\left\{-6\left[\psi(1)-\psi(6)-\ln\epsilon\right]-11\right\}$$

$$= 9/2.$$

$$F_{\alpha,\alpha+1} = \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{d\vartheta}{2\pi i}\cdot\frac{\Gamma(5+\vartheta)\Gamma(-\vartheta)\epsilon^{-\vartheta-6}}{\Gamma(5)\cdot(\vartheta+6)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(5)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{d\vartheta}{2\pi i}\cdot\frac{\Gamma(7+\vartheta)\Gamma(-\vartheta)\epsilon^{-\vartheta-6}}{(\vartheta+5)(\vartheta+6)^2}$$

$$= \frac{1}{24}\lim_{\vartheta\to-6}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\Gamma(7+\vartheta)\Gamma(-\vartheta)\epsilon^{-\vartheta-6}}{(\vartheta+5)}\right)$$

$$= \frac{1}{24}\lim_{\vartheta\to-6}\left\{\frac{\Gamma(7+\vartheta)\Gamma(-\vartheta)\epsilon^{-\vartheta-6}}{(\vartheta+5)^2}\left(\left[\psi(7+\vartheta)-\psi(-\vartheta)-\ln\epsilon\right](\vartheta+5)-1\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\frac{\Gamma(1)\Gamma(6)}{(-1)^2}\left\{\left[\psi(1)-\psi(6)-\ln\epsilon\right](-1)-1\right\}$$

$$\simeq \frac{77}{12}. \;;\left(\psi(1)-\psi(6)=-\frac{137}{60}\right).$$

S O N U Ç

Başlangıçta da belirtildiği gibi bu çalışmanın amacı Kuantumelektrodinamiğinin öz-etkileşmeli formülasyonu için önerilen yöntemi kullanarak Boşluk Kutuplanmasına katkıları incelemek ve tartışmaktı. Bu amaca ulaşmak için anılan yöntem kullanılarak Kuantum Elektrodinamiğinde temel problem olarak bilinen ıraksaklıklar-pertürbatif yöntemler kullanılmaksızın-giderilmiştir. Kuantumelektrodinamiğindeki serbest parçacık etkileşmelerine dayanan pertürbasyon yöntemleri yerine burada bağlı elektronların öz-etkileşmeleri dikkate alınmıştır. Dolayısıyla kulllanılan Green fonksiyonları,Dirac-Coulomb probleminin Green fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların kullanılması sonucu ortaya çıkan ikinci bölümdeki integraller sonsuz gibi gözükse de karmal uzayda uygun integrasyon eğrisi seçimi ile sonlu değerlerinin doğrudan(ıraksaklık olmayacak şekilde) hesaplanabileceği daha önce gösterilmişti.

2. Bölümde gerçekten daha önce bulunanlara oldukça yakın sonlu sayılar elde edilmiştir. Fizikte herhangi bir problemle ilgili olarak sonlu bir sayı bulmanın ne denli önemli olduğu hatırlanırsa çalışmamızın umut verici olduğu hemen görülür. Standart Kuantum Elektrodinamiğinde ilk basamaktan katkı $-\frac{29}{145}\frac{4\alpha}{3\pi}Z\alpha\left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^3$ iken Prof.N.Ünal ve arkadaşlarınca bulunan sonuç $-\frac{29}{144}\cdot\frac{4\alpha}{3\pi}Z\alpha\left(Z\alpha/N_n\right)^3$ 'dir. Bizim bulduğumuz sonuç ise $-0{,}18748\times\frac{4\alpha}{3\pi}Z\alpha\left(Z\alpha/N_n\right)^3$ 'dir. Sonuçlar tam olarak aynı olmamakla birlikte birbirlerinden çok farklı da değillerdir. Bu da kullandığımız

yöntemin doğruluğunu kanıtlamaktadır. Ayrıca α'ya göre bir sonraki basamaktan $-(Z\alpha)^5\alpha$ - katkıyı da aynı yolla ve ilk kez olarak hesapladık ve $-18,58283\frac{4\alpha}{3\pi}Z\alpha\left(\frac{Z\alpha}{N_n}\right)^4$ olarak bulduk. Önceden de işaret ettiğimiz gibi bu basamaktan katkı hiç gözönüne alınıp hesaplanmadığı için karşılaştırma yapmak olanağına sahip değiliz, fakat bir önceki basamaktan katkıyı daha öncekilere yakın olarak bulmamız, elde ettiğimiz bu sonucun da doğru olabileceğini göstermektedir. Hesaplar bıktırıcı ve uzun olmakla birlikte yeni çalışmaların bunu gidereceğine inanıyoruz.

Ö Z E T

Bu çalışmada Öz-alan Kuantumelektrodinamiğindeki genel enerji kayması ifadesinin Boşluk Kutuplanması kısmından hareketle Boşluk Kutuplanmasına yüksek basamaktan katkılar elde edilmiştir. Pertürbatif olmayan yeni bir analitik yöntemle 2.Bölümde ilk basamaktan katkı olarak $1S_{1/2}$ durumu için $\Delta E_n^{BK} = (4\alpha/3\pi)(0,18748)Z(Z\alpha/N_n)^3\alpha$ bulunmuştur. Üçüncü bölümde ise aynı yöntemle bir sonraki basamaktan $[\alpha(Z\alpha)^5]$ katkı olarak $1S_{1/2}$ için $\Delta E_n^{BK} = (4\alpha/3\pi)\cdot(18,5823)(Z\alpha/N_n)^4\cdot Z\alpha$ elde edilmiştir.

S U M M A R Y

In this study the higher order contributions to Vacuum Polarization are obtained by starting the vacuum polarization part of a general expression for the energy shift in Self-field Quantumelectrodynamics. By using a new non-perturbative analythical method , it is found in the second chapter that the first order contribution is $\Delta E_n^{BK} = (4\alpha/3\pi)\cdot(0,18748).\ Z\alpha\,(Z\alpha/N_n)^3$ for the $1S_{1/2}$ state. In the third chapter by the same method it is found that the second order contribution is $\Delta E_n^{BK} = (4\alpha/3\pi)(18,5823)Z\alpha\,(Z\alpha/N_n)^4$ for the $1S_{1/2}$ state.

K A Y N A K L A R

[1]- J.D.Bjorken and S.D.Drell, ´Relativistic Quantum Mechanics´,Mc.Graw-Hill Inc., (1964).

[2]- E.H.Wichmann and N.M.Kroll, Phys.Rev. 101,2,(1956) 843.

[3]- K.Blomquist, Nucl.Phys. 48,(1972) 95.

[4]- A.I.Milšthein and V.M.Strakhovenko, Zh.Exp.Teor. Fiz. 84,(1983) 1247 [Sov.Phys.JETP 57, 772 (1983)].

[5]- Ya.I.Granowskii, Zh. Exp.Teor.Fiz.70,(1976) 2035 [Sov.Phys. JETP 43, 1062 (1976)].

[6]- M.Gyullassy, Nucl. Phys., A 244,(1975) 497.

[7]- A.R.Neghabian, Phys. Rev. A 27,(1983) 2311.

[8]- G.Rinker and L.Wilets, Phys. Rev.A 12,(1977) 748.

[9]- N.L.Manakov, A.A.Nakipelor, and A.G.Fainshtein, Zh. Exp. Teor. Fiz. 95,(1989) 1167 [Sov.Phys. JETP 68, 673 (1989)].

[10]- E.A.Uehling, Phys. Rev. 48,(1935) 55.

[11]- G.A.Rinker,Jr and L.Wilets, Phys. Rev. Lett. 31,(1973) 1559.

[12]- W.Pieper and W.Greiner, Z. Phys.,(1972) 257; Nuovo Cim. 18,(1973) 551.

[13]- G.Soff, B.Müller and J.Rafelski, Z.Naturf. 29a,(1974) 1267.

[14]- H.A.Bethe and E.E.Salpeter, ´Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms´, Springer Verlag, (1957) 77.

[15]- A.O.Barut, 'Foundations of Radiation Theory and Quantumelectrodynamics', Plenum Publ.Co., N.Y.,(1980) (A.O.Barut ed.).

[16]- A.O.Barut and J.Kraus, Foundations of Phys. Vol.13, No.2,(1983) 189.

[17]- A.O.Barut and N.Ünal, Phys. Rev. D 41,42,(1990) 3822.

[18]- I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik, 'Table of Integrals,Series and Products', Academic Press, New York (1965).