T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖLÇÜM HATALI LİNEER OLMAYAN MODELLERDE PARAMETRE KESTİRİMİ

AZİZ HARMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR
EKİM-1995

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne
DİYARBAKIR

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri üyesinin ünvanı, adı ve soyadı

Başkan : Prof. Dr. Hasan İlhan TUTALAR

Üye : Doç. Dr. Müjgan TEZ (Tez Danışmanı) Müjgan Tez

Üye : Doç Dr. Hasan AKBAYIN

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım. .24./..11..../1995

Profesör Doktor Zeki TEZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince, her türlü yardımı benden esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Doçent Doktor Müjgan Tez'e ve araştırmalarımda yardımcı olan Doçent Doktor Hasan Akbayın ile Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür eder saygılar sunarım.

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Bu çalışmada, bağımlı ve bağımsız değişkenlerin hatalı ölçüldüğü durumlarda gözlem değerlerini en iyi şekilde temsil eden matematiksel ifadeyi oluştururken, lineer olmayan regresyon modeli olarak adlandırılan bu matematiksel ifadede bulunabilecek parametreleri kestirmek üzere, ölçüm hatalı lineer olmayan parametre kestirim problemini tanıtıp kestirim yöntemlerini araştırarak bu tip modellerle karşı karşıya gelen araştırmacıların istatistiksel çalışmalarına katkıda bulunmaktır.

ÖZET

Bu çalışmada, $Y_t = y_t + e_t, X_t = x_t + u_t$ ve $t = 1,2 \ldots n$ için (Y_t, X_t) gözlemleri yapıldığında, ölçüm hatalı lineer olmayan $y_t = f(x_t : \beta)$ modelinin parametreleri, $\varepsilon_t = (e_t, u_t)'$ hata vektörünün sıfır ortalamaya ve pozitif tanımlı singüler olmayan Σ kovaryans hata matrisi ile normal dağılıma sahip olduğunu kabul ederek, Σ kovaryans hata matrisinin bilindiği veya bilinmediği durumlarda tamamen türeve dayalı bazı kestirim yöntemleri verilecek ve modifiye edilmiş bir kestirici kuadratik bir modele uygulanacaktır.

SUMMARY

In this study, it has been purposed to estimate parameters of nonlinear regression model $Y_t = f(x_t;\beta)$ with functional relationshps, where Y_i and X_i are both subject to measurement error, when we consider observe (Y_t, X_t) for $Y_t = y_t + e_t$ $X_t = x_t + u_t$ and t=1,2,....n. Therefore it is assumed that the error vector $\varepsilon_t = (e_t, u_t)'$ has zero mean value and covariance matrix Σ with normal distributed, that is positive defined and nonsinguler. In cases whether coariance error matrix Σ known or unknown, we give some estimation methods about $y_t = f(x_t;\beta)$ that depend on diferentation and a modified estimator that was applied to a quadratic model.

BÖLÜM-1

1.1- GİRİŞ:

Ölçüm hatalı lineer olmayan modeller, en çok mühendislik ve fen bilimlerindeki deneysel verilerin analizinde, ziraat ve sosyoekonomik problemlerin incelenmesi gibi çeşitli uygulamalarda kullanılmaktadır. Örneğin fizikokimyada sıcaklık-basınç ile ilgili problemlerin incelenmesinde ölçüm hatalı lineer olmayan modeller kullanılmaktadır. Bu modeller, gözlem değerleri hatalı ölçüldüğünde verilen gözlemleri temsil eden matematiksel fonksiyon düzgün doğru olmadığında, kuadratik, kubik vb. gibi bir fonksiyon ile ifade edilir. Yani bağımlı ve bağımsız değişkenlerin hata içerdiği durumlarda söz konusu model x'e göre lineer olmayan $y_t = f(x_t; \beta)$ genel modeli ile gösterilir. $t = 1,2...,n$ için $(Y_t, X_t) = (y_t, x_t) + (e_t, u_t)$ dir. Bu çalışmanın birinci bölümünde önceki çalışmalar verilecek, ikinci bölümde, ölçüm hatalı lineer bir model için parametre kestirimi ve bu model için moment kestiriciler verilir. Üçüncü bölümde, Σ kovaryans hata matrisinin bilinip veya bilinmediği durumlarda türeve dayalı en küçük kareler kestirimi, maksimum olabilirlik yöntemi ve modifiye edilmiş (maksimum olabilirlik kestiricinin değiştirilmişi) bir kestirim yöntemi verilecektir. Dördüncü bölümde de modifiye edilmiş kestirim yöntemi $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_a x_t^2$ gibi kuadratik bir modele uygulanacaktır.

1.2- ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR:

Lineer modellerde genel tartışma, Kendall ve Stuart (1961), Madansky (1950), Malinaud (1966-pp-10), Dolby (1976) ve Fuller (1980) tarafından verilmiştir.

Lineer olmayan modellerde parametre kestirimi son yüzyılın başlarından itibaren araştırılmaya başlanmıştır. Bu konuda en eski tartışma Deming (1931-1943) tarafından başlatılmıştır. Bu yıllarda Deming tarafından en küçük kareler yöntemi ve linerizasyona dayanan bir kestirim yöntemi verilmiştir. Cook (1931) Deming'in yöntemine iterative bir düzeltme yapmıştır. Deming'in bu yöntemi, Dolby ve Lipton (1972), Dolby (1972), Britt ve Lucke (1973), Clutton Brock (1967) tarafından bazı değişikliklerle geliştirildi. Vilages (1969) genel lineer olmayan modelin katsayılarının bir iterative kestiriminin asimtotik özelliklerini hata varyanslarının örneklem hacmi ile ters orantılı olarak azaldığı varsayımıyla elde etti. Yani $a_n = 0(n)$ ve $b_n = 0(1)$dır. Wolter ve Fuller (1975) iterative Kestirimin asimtotik özelliklerini, kestirilen katsayıların kovaryans matrisinin kestiricisini vererek geliştirdiler. Federov (1974) ve Berkson (1950) kontrollü türden bağımsız rastgele değişkenler bulunduran lineer olmayan modeldeki değişken hatalarını araştırdı. Kendall ve Stuart (1961-pp-29) Hey ve Hey (1960), O'Neill et all (1969), Chan (1960), D.A.Anderson (1981) Wolter ve Fuller (1982-a) ve Caroll ile Stefansky (1983) tarafından özel lineer olmayan modellerde kestirim problemi incelenmiştir. Kuadratik bir model için parametre kestirimini ilk olarak Kendall ve Stuart (1961) incelemiştir. Daha sonra Wolter ve Fuller (1975) bilinmeyen katsayıların değiştirilmiş kestiricilerini, kestiricilerin asimtotik özelliklerini ve asimtotik sonuçlarla yüzeysel davranışının uyum sağladığı bir Monte Carlo çalışması yaptılar. Wolter ve Fuller (1982-b) kovaryans matrisi biliniyorken $a_n^{-1} = o(n^{-1/3})$ varsayım altında bir limit dağılımına sahip olan katsayılar kestiricisini verdiler. Griliches ve Ringstad (1970) yapısal ilişkiye sahip kuadratik bir modelin parametreleri için alışılmış en küçük kareler kestiricisini incelemiştir. Bu konudaki uygulamalar için Bohrnstedt ve Carter (1971), Wolter ve Fuller (1975) kaynakları incelenebilir.

BÖLÜM - 2

GENEL BİLGİLER

2.1 Ölçüm Hatalı Lineer Modeller :

$$(2.1)$$

Tanım.2.1.1: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + e_t , X_t = x_t + u_t \; t = 1,2...n$

için $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t$ modeline lineer ölçüm hatalı model denir. Burada (e_t, u_t) $t = 1,2...n$ için sıfır ortalama ve $\Sigma = E\{(e_t, u_t)'.(e_t, u_t)\} =$ diag $(\sigma_{ee}, \sigma_{uu})$ kovaryans matrisine sahip bağımsız rastgele vektörler ve $X' = (x_1, x_2,...x_n)$ sabitlerin bir vektörüdür.

2.2. Model Parametrelerinin Kestirilmesi:

$Y_t = y_t + e_t , X_t = x_t + u_t \; , y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t \; t = 1,2...n$ modeli için (Y_t, X_t) gözlemlerinin yapıldığını kabul edelim. β_0 ve β_1 katsayılarının alışılmış en küçük kareler kestiricileri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X}).(Y_t - \overline{Y}) = \sum_{t-1}^{n} (Y_t - \overline{X}_t).(X_t - \overline{X})'\hat{\beta}_1 \tag{2.2}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X})^2 . \beta_1$$

$$\hat{\beta}_1 = \left[\sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X})^2 \right]^{-1} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X}) \; (Y_t - \overline{Y}) \tag{2.3}$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} \tag{2.4}$$

$$E\{(\hat{\beta}_0;\hat{\beta}_1)\} = (\beta_0;\beta_1) \text{ ve}$$

$$V\left\{(\hat{\beta}_0;\hat{\beta}_1)'\right\} = \begin{bmatrix} n^{-1}+\overline{x}^2 A_{xx}^{-1} & -\overline{X}A_{xx}^{-1} \\ -\overline{x}A_{xx}^{-1} & A_{xx}^{-1} \end{bmatrix} \sigma_{\varepsilon\varepsilon} \text{ dir.}$$

$$A_{xx} \approx (n-1)m_{xx}, \varepsilon_t = e_t - u_t\beta_1,$$

$\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_{ee} + \beta_1^2\sigma_{uu}$ Fuller (1976.pp.81)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + e_t\,,\; X_t = x_t + u_t$$

$$(x_t, e_t, u_t)' \approx \mathrm{NI}\left[(\mu_x, 0, 0)',\ \mathrm{diag}\,(\sigma_{xx}, \sigma_{ee}, \sigma_{uu})\right]$$

olduğunu kabul edelim. Yukarıdaki modelin genelleştirilmesi, x değişkenlerinin bir vektörünü içeren bir model t=1,2,...,n için

$$Y_t = x_t\beta + e_t, \qquad X_t = x_t + u_t \tag{2.5}$$

olarak yazılabilir.

Burada x_t, k boyutlu bir satır vektörü, β, k boyutlu bir sütun vektörü ve $\varepsilon_t = (e_t, u_t)'$, $k+1$ boyutlu $\varepsilon_t = (0, \Sigma_{\varepsilon\varepsilon})$ ile normal dağılıma sahip rastgele vektörlerdir. e_t ve u_t arasındaki kovaryans matrisi Σ_{eu} ve u_t'nin kovaryans matrisi Σ_{uu}'nın bilindiğini varsayalım. e_t'nin σ_{ee} varyansı bilinmesin ve $\{x_t\}$ k boyutlu satır vektörlerinin bir dizisi olsun.

$\Sigma_{uu} = I$ ve $\Sigma_{ue} = 0$ olduğunda, (e_t, u_t)'nin yoğunluk fonksiyonu

$$L = (2\pi)^{-(K+1)/2}\sigma_{ee}^{-1/2} \exp\left\{\sigma_{ue}^{-1}\ \sigma_t^2 + u_t u_t'\ ]\right\} \tag{2.6}$$

olup x_t sabittir. (e_t, u_t)'nin (Y_t, X_t)ye dönüşümünün jakobiyeni ve n tane gözlemin olabilirlik fonksiyonunun logaritması,

$$LogL = \frac{-1}{2} n\left[(k+1)\log 2\pi + \log\sigma_{ee}\right] - \frac{1}{2}\left\{\sum_{t=1}^{n} \sigma_{ee}^{-1}(Y_t - x_t\beta)^2 + \sum_{t=1}^{n}(X_t - x_t)'\right\} dir.$$

Maksimum olabilirlik kestiricilerini bulmak için olabilirlik fonksiyonunun logaritması olan ifadesi $t = 1,2...n$ için $x_t, \beta\, ve\, \sigma_{ee}$'ye göre minimumlaştırılır. $\beta, \sigma_{ee}\, ve\, x_t$'ye göre kısmi türevleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \sigma_{ee}^{-1} \sum_{t=1}^{n} x_t^{\cdot}(Y_t - x_t\beta) \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_{ee}} = -\frac{1}{2} n\sigma_{ee}^{-1} + \frac{1}{2}\sigma_{ee}^{-2} \sum_{t=1}^{n}(Y_t - x_t\beta)^2 \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial x_t} = \sigma_{ee}^{-1}(Y_t - x_t\beta)\beta' + (X_t - x_t) \qquad (2.10)$$

$t = 1,2...n$ için bu denklemler sıfıra eşitlenirse,

$$Y_t - \hat{x}_t\hat{\beta} = (\hat{\sigma}_{ee} + \hat{\beta}'\hat{\beta}^{-1})^{-1}\left(Y_t - X_t\hat{\beta}\right)\hat{\sigma}_{ee} \qquad (2.11)$$

$$X_t - \hat{x}_t = (\hat{\sigma}_{ee} + \hat{\beta}'\hat{\beta})^{-1}\left[(Y_t - X_t\hat{\beta})^2\right] \qquad (2.12)$$

iken t=1, 2...n için türev denklemleri yardımıyla

$$x_t' = \left[\hat{\sigma}_{ee}^{-1}\hat{\beta}\hat{\beta}' + I\right]^{-1}\left[\hat{\sigma}_{ee}^{-1} Y_t\hat{\beta} + X_t'\right] \qquad (2.13)$$

$$\left[\hat{\sigma}_{ee}^{-1}\hat{\beta}\hat{\beta}' + I\right]^{-1} = I - \left[1 + \hat{\sigma}_{ee}^{-1}\hat{\beta}'\hat{\beta}\right]^{-1}\hat{\beta}\hat{\beta}^{-1}\hat{\sigma}_{ee}^{-1} \qquad (2.14)$$

olur. Bu bagıntılar 2.11'de yerine yazılırsa

$$\hat{\sigma}_{ee}^{-1}(\hat{\sigma}_{ee} + \hat{\beta}\hat{\beta}) = (\hat{\sigma}_{ee} + \hat{\beta}\hat{\beta})^{-1} = \left[n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - X_t\hat{\beta})^2\right] \qquad (2.15)$$

bulunur.

2.3. Ölçüm Hatalı $Y = \beta_0 + \beta_1 x$ Modeli İçin Moment Kestiriciler

$Y = \beta_0 + \beta_1 x,\ x = X + u,\ y = Y + e$ olsun

X ve Y rastgele değişkenleri arasında yukarıdaki ilişkinin olduğunu ve (y, x) gözlemlerinin yapıldığını varsayalım. Ayrıca E(u)=E(e)=0 ve

$Cov(x_i, y_i) = \beta_1 \sigma_x^2 \quad (i = 1,2,\ldots n)$ olsun

(Y,X) rastgele değişkenleri

$E(Y,X) = (\mu_y, \mu_x) = (\beta_0 + \beta_1 \mu_x, \mu_x)$ ortalama ve

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^2 \sigma_{xx} - \sigma_{xx} & \beta_1 \sigma_{xx} \\ \beta_1 \sigma_{xx} & \sigma_{xx} - \sigma_{uu} \end{bmatrix}$$

kovaryans matrisi ile normal dağılıma sahiptir.

Burada $\mu,\ \sigma_x^2,\ \sigma_u^2,\ \sigma_e^2,\ \beta_0$ ve β_1 gibi altı parametre bulunmaktadır.

(Her i = 1, 2…,n için $Cov(u_i, e_i) = 0$ dır.)

$\beta = Cov(X,Y) / \sigma_x^2$ kestirimini araştıralım.

Bunun için

$\mu, \beta_0 + \beta_1 \mu, \sigma_x^2 = \sigma_X^2 + \sigma_u^2, \sigma_y^2 = \sigma_Y^2 + \sigma_e^2$

ve cov (x,y)= $\beta_1 \sigma_x^2$= cov (X,Y) değerlerini kestirmeliyiz.

$\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \qquad \hat{\sigma}_X^2 = \hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_u^2$

$\hat{\sigma}_Y^2 = \hat{\sigma}_y^2 - \hat{\sigma}_e^2$ ve $Cov(\widehat{X,Y}) = C\hat{o}v(x,y)$ kestirimleri (Y,X)'nin ortak dağılımındaki parametrelerin maksimum olabilirlik kestiricileridir.

$\hat{\sigma}_Y^2 = \beta_1^2 \sigma_X^2$ olup $\hat{\beta}_0$ *ve* $\hat{\mu}$'nin ihmal edilmesiyle $\sigma_x^2 = \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_u^2, \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_e^2 = \hat{\beta}_1^2 \hat{\sigma}_x^2 + \sigma_e^2$ *ve* $\hat{\mathrm{Cov}}(x,y) = \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_x^2$ bulunur. Bu dört bilinmeyenli üç denklemin oluşturduğu sistemin ortak çözümünü araştırıyoruz. Bunun için σ_u^2, σ_e^2 veya $\frac{\sigma_u^2}{\sigma_e^2}$'den herhangi biri biliniyorsa ve $Cov(u_i, e_i) = 0$ *ise* β_1'*i*' kestirebiliriz. β_1'in kestirimi yardımıyla $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ bulunur.

2.3.1 σ_e^2 biliniyorsa:

$\hat{\sigma}_y^2 - \hat{\sigma}_e^2 = \hat{\beta}_1^2 \hat{\sigma}_X^2$ ve $Cov(x,y) = \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_X^2$ ise

$$\hat{\sigma}_y^2 - \hat{\sigma}_e^2 = \hat{\beta}_1 \;.\; Cov(x,y) \;\; ise \;\; \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\sigma}_y^2 - \sigma_e^2}{Cov(x,y)} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[(y_i - \bar{y}) - \sigma_e^2\right]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - n\sigma_e^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}$$

olur.

2.3.2 σ_u^2 biliniyorsa:

$\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_u^2 = \hat{\sigma}_X^2$ eşitliğinin her iki yanını $\hat{\beta}_1$ ile çarparsak $\hat{\beta}_1(\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_u^2) = \beta_1 \sigma_X^2 = Cov(x,y)$ olur. Bunun yardımıyla

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n Cov(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_u^2)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - n\hat{\sigma}_u^2}$$ bulunur.

2.3.3. $\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$ **biliniyorsa:**

$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_X^2 + \hat{\sigma}_u^2$ *ise* $\lambda.\hat{\sigma}_x^2 = \lambda.\hat{\sigma}_X^2 + \hat{\sigma}_e^2$ olur.

$\lambda\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2 = \lambda\hat{\sigma}_X^2 + \hat{\sigma}_e^2 - \hat{\beta}_1^2\sigma_X^2 - \hat{\sigma}_e^2 = \lambda\hat{\sigma}_X^2 - \hat{\beta}_1^2\hat{\sigma}_X^2$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafını $\hat{\beta}_1$ ile çarparsak, $(\lambda\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2)\hat{\beta}_1 = \lambda\hat{\beta}_1\hat{\sigma}_X^2 - \hat{\beta}_1^3\hat{\sigma}_X^2 = \lambda.Cov(x,y) - \beta_1^3\hat{\sigma}_X^2$ $Cov(x,y) = \hat{\beta}_1\hat{\sigma}_x^2$ olduğundan

$\hat{\beta}_1^2 Cov(x,y) = \hat{\beta}_1^3\hat{\sigma}_x^2$ olur. $Cov(x,y)\hat{\beta}_1^2 + (\lambda\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2)\hat{\beta}_1 - \lambda Cov(x,y) = 0$ olur. Bu ifade $\hat{\beta}_1$ 'in ikinci dereceden bir fonksiyonudur.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\hat{\sigma}_y^2 - \lambda\hat{\sigma}_x^2) + \sqrt{(\hat{\sigma}_y^2 - \lambda\hat{\sigma}_x^2)^2 + 4\lambda[Cov(x,y)]^2}}{2.Cov(x,y)} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}) - \lambda\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - \lambda\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - \right]^2 + 4\lambda\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y - \bar{y})\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}$$

2.3.4. σ_u^2 ve σ_e^2**'nin her ikisi de biliniyorsa:**

$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_X^2 + \hat{\sigma}_u^2$

$\hat{\sigma}_y^2 = \hat{\beta}_1^2\hat{\sigma}_X^2 + \hat{\sigma}_e^2$'dir. Birinci denklemi $\hat{\beta}_1^2$ ile çarpıp ikinci denklemi birinci denklemden çıkarırsak $\hat{\beta}_1^2\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\beta}_1^2\hat{\sigma}_u^2 - \hat{\sigma}_e^2$ bulunur. Bunun yardımıyla $\hat{\beta}_1^2(\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_u^2) = \hat{\sigma}_y^2 - \sigma_e^2$ yazılabilir. Bundan dolayı da

$$\hat{\beta}_1 = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_y^2 - \hat{\sigma}_e^2}{\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_u^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}) - n\hat{\sigma}_e^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) - \hat{\sigma}_u^2}}$$ olur. Burada

$$Sgn(\hat{\beta}_1) = \mathrm{sgn}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i . \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right]$$ dir. [Albert Madansky (1969)]

BÖLÜM -3

ÖLÇÜM HATALI LİNEER OLMAYAN MODELLER:

3.1 Modelin Tanımı:

Tanım 3.1.1 Bir Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan bir B sınıfı

a)$\Omega \in B$,

b)$\forall A \in B$ için $A^C \in B$

c) B'deki bir A_n dizisi için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in B$ ise B sınıfına Ω'da bir $\sigma-$ cebir denir.

Tanım 3.1.2: B,Ω'da bir $\sigma-$ cebir olmak üzere

$P: B \to R$

$A \to P(A)$ fonksiyonu

a) $\forall A \in B$ için $P(A) \geq 0$

b)$P(\Omega) = 1$

c)B'deki ayrık bir A_n dizisi için $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$

özelliklerine sahip ise P'ye Ω üzerinde bir olasılık ölçüsü denir.

Tanım 3.1.3:

$\Omega \neq \varnothing$,B,Ω'da bir $\sigma-$ cebir ve P,B üzerinde bir olasılık ölçüsü olmak üzere (Ω,P,B) üçlüsüne olasılık uzayı denir.

Tanım 3.1.4:

(Ω, B, P) bir olasılık uzayı, $n=1,2,\ldots\infty$ için $a_n b_n = n$ olacak şekilde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ birer pozitif reel sayı dizisi olsunlar. $a_n = 1$ alınırsa.

$$y_t = f(x_t : \beta) \tag{3.1}$$

n'ci denemedeki gözlemler (Y_t, X_t) $t = 1,2 \ldots n$ olmak üzere $(Y_t, X_t) = (y_t, x_t) + (e_t, u_t)$ ise (3.1) modeline ölçüm hatalı model denir.

$\beta : p$x1 boyutlu parametre vektörü olup p boyutlu R^p Euclid uzayının kompakt ve konveks alt kümesi olan $\otimes$ kümesinin bir iç noktasıdır.

X_t:1xq boyutlu vektörlerin bir dizisi ve x_t vektörleri R^q Euclid uzayın alt kümesi olan A'nın elemanlarıdır. $f : R^{p+q} \rightarrow R^1$ Reel değerli sürekli bir fonksiyondur. $(\Omega$,B,P) üzerinde tanımlanmış (e_t, u_t) rastgele değişkenleri ölçüm hatalarını belirtir.

Tanım 3.1.5:

Eğer (3.1) de tanımlı $f(x_t : \beta)$ fonksiyonu x veya β 'ya göre lineer değil ise bu modele ölçüm hatalı lineer olmayan model denir. Bu modelde rastgele değişkenler olan x ler sabit ise model fonksiyonel ilişkiye, x'ler sabit olmayan rastgele değişkenler ise model yapısal ilişkiye sahiptir denir.

Bu çalışmada fonksiyonel ilişkili modellerle ilgileneceğiz. Şimdi kestirim yöntemlerinde kullanacağımız bazı sembolleri tanıtalım.

$f(x_t:\beta)$ fonksiyonu A x $\otimes$ kümesi üzerinde her iki değişkene göre birinci ve ikinci mertebeden türevlere sahip olsun. Gösterimler aşağıdaki gibidir.

$\frac{\partial f(x_t:\beta)}{\partial x} = f_x(x_t:\beta)$ fonksiyonu, x'in elemanlarına göre $f(x_t:\beta)$'nın kısmi türevlerinin q boyutlu satır vektörünü,

$\frac{\partial f(x_t:\beta)}{\partial \beta} = f_\beta(x_t:\beta)$ fonksiyonu, β'nın elemanlarına göre kısmi türevlerin p boyutlu sütun vektörünü,

$\frac{\partial^2 f(x_t:\beta)}{\partial \beta \partial x} = f_{\beta x}(x_t:\beta)$ fonksiyonu, x ve β'nin elemanlarına göre ikinci kısmi türevlerin pxq boyutlu matrisini,

$\frac{\partial^2 f(x_t:\beta)}{\partial x \partial x} = f_{xx}(x_t:\beta)$ fonksiyonu, x'e göre ikinci kısmi türevlerin qxq boyutlu matrisini göstersin.

3.2 MODEL PARAMETRELERİN KESTİRİLMESİ

Bir parametrenin beklenen değerini bulmakla bu parametrenin kestiricisi bulunur. $E(\hat{\beta}) = \beta$ ise $\hat{\beta}$ istatistiğine β parametresinin yansız kestiricisi denir. Örneğin örneklem ortalaması kitle ortalaması için bir yansız kestiricidir. $E(\bar{x}) = \mu$. Ölçüm hatalı lineer olmayan bir model için parametre kestirimi yapılırken, klasik lineer olmayan model kestiriminde optimizasyon olarak bilinen aşağıdaki yöntem kullanılır. Model yardımıyla bir amaç fonksiyonu bulunur, bu fonksiyon kalan kareler toplamı, rezidüler veya artıklar olarak bilinir. Amaç fonksiyonunu minimumlaştırmakla model parametreleri kestirilmiş olur. Bu modelin bulundurduğu rastgele değişkenlere ait maksimum olabilirlik fonksiyonunu veya bu fonksiyonun logaritmasını maksimumlaştırmakla da modelin maksimum olabilirlik kestiricileri bulunur. (3.1) modeli için amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q(x_t;\beta) = \left[Y_t - f(x_t,\beta), X_t - x_t\right].\Sigma^{-1}\left[Y_t - f(x_t,\beta), X_t - x_t\right]'$$

3.2.1 En Küçük Kareler Kestirimi:

En küçük kareler yöntemi, basit lineer olmayan regresyon modelindeki parametreleri kestirmek için kullanılan türeve dayalı bir yöntemdir. Bu yöntem, Gaus-Newton yöntemi, Gradient yöntemi, Marguardt yöntemi veya en hızlı döşüm (Stepest-descent) yöntemi olarak bilinir.

En küçük kareler yöntemi, kalan kareler toplamını herbir parametreye göre minimum yapmak için kullanılan bir yöntemdir.

$y_t = f(x_t;\beta),(Y_t,X_t) = (y_t,x_t)+(e_t,u_t)$ $t = 1,2...n$ *için* $\varepsilon_t = (e_t,u_t)'$ ve $\varepsilon_t' \approx N(0,\Sigma)$ (3.2)

olduğunu kabul edelim. Ayrıca (e_t,u_t) ölçüm hataları 0 (sıfır) ortalama matrisli, Σ kovaryans matrisi ile bağımsız olarak normal dağılıma sahip olsun.

$$E(e_t) = E(u_t) = 0$$

$$\Sigma = E(\varepsilon_t'.\varepsilon_t) = E\left[\begin{pmatrix} e_t \\ u_t \end{pmatrix}.(e_t,u_t)\right] = E\left[\begin{vmatrix} \mathbf{e}_t & \mathbf{e}_t \\ \mathbf{u}_t & \mathbf{e}_t \end{vmatrix} \begin{matrix} e_t & u_t \\ u_t & u_t \end{matrix}\right] = \begin{bmatrix} E(e_te_t)\,E(e_tu_t) \\ E(u_te_t)\,E(u_tu_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{eu} \\ \sigma_{ue} & \sigma_{uu} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

olacak şekilde kovaryans matrisini blok matrisler halinde yazabiliriz. (3.1) modeli için Σ kovaryans matrisli amaç fonksiyonu olan

$$Q(x_t;\beta) = \sum_{t=1}^{n} q(x_t;\beta) = [Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t]\,\Sigma^{-1}\,[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t]' \quad (3.5)$$

fonksiyonunu minimumlaştırmak gerekir. Bunun için bu ifadenin β ve x'e göre kısmi türevlerini alıp sıfıra eşitlersek normal denklemler elde ederiz. β 'ya göre türev almakla p tane, x'e göre türev almakla q tane denklem elde edilir. Bu denklemlerin ortak çözümüyle bulunacak $\hat{\beta}$ ve $\hat{x}_t$ kestiricileri β ve x_t parametrelerinin en küçük kareler kestiricileridir.

3.2.1.1 Σ Kovaryans matrisi biliniyorsa :

$$Q(x_t;\beta) = [Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t]\,\Sigma^{-1}\,[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t]'$$

$$\frac{\partial Q(x_t;\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\Sigma^{-1}\left(Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right)^2\right]$$

$$= -2\Sigma^{-1}\left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right].\left[f_\beta(x_t;\beta), 0\right]' = 0$$

ise

$$\left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right] \textstyle\sum^{-1} \left[f_\beta(x_t;\beta), 0\right]' = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial Q(x_t;\beta)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\textstyle\sum^{-1}\left(Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right)^2\right]$$

$$= -2\textstyle\sum^{-1}\left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right], \left[f_x'(x_t;\beta, I)\right]' = 0$$

ise

$$\left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right] \textstyle\sum^{-1} \left[f_x'(x_t;\beta), I\right]' = 0 \tag{3.7}$$

bulunur. (3.6) denkleminde p bilinmeyenli p tane (3.7) denkleminde q bilinmeyenli q tane normal denklem bulunmaktadır. Her bir denklem sisteminin ortak çözümü olan $\hat{\beta} = \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_p), \hat{X}_t = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_q)$ değerleri β ve x'in en küçük kareler kestiricileridir.

3.2.1.2 $\sum$ Kovaryans matrisi bilinmiyorsa :

$\sum = \sigma^2 V, V$ bilinen pozitif tanımlı karesel bir matris, σ^2 bilinmeyen ama kestirilebilen bir sabittir. Bu durumda,

$$Q(x_t;\beta) = \left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right] \textstyle\sum^{-1}\left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right]' = \sigma^2\left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right] V^{-1}\left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right]' \tag{3.8}$$

$$\mathrm{V}^{-1} = \begin{bmatrix} F & G \\ G' & H \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \begin{matrix} \}np \\ \}\, n \end{matrix} \quad \text{olsun.} \tag{3.9}$$

Burada F,H,A ve C matrisleri simetrik değildir. G ve B matrisi simetriktir.

$$\left.\begin{aligned} F &= (A - BC^{-1}B')^{-1} \\ G &= -A^{-1}B(C - B'A^{-1}B)^{-1} \\ G' &= -C^{-1}B'(A - BC^{-1}B')^{-1} \\ H &= (C - B'A^{-1}B)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

bağıntıları yazılabilir. [Seber (1987)]

Bu bağıntılar yardımıyla

$$\left.\begin{aligned} A &= F^{-1} + F^{-1}G(H - G'F^{-1}G)^{-1}G'F^{-1} \\ B &= -F^{-1}G(H - G'F^{-1}G)^{-1} \\ B' &= -(H - G'F^{-1}G)^{-1}G'F^{-1} \\ C &= (H - G'F^{-1}G)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

ters bağıntılar bulunur.

$$\left.\begin{aligned} N &= \left\{\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial \beta_r}\right\} \quad t = 1,2\ldots n, r = 1,2\ldots p \\ M &= diag\left(\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x_t}\right) \\ Q &= C + MB' + BM + MAM \\ T &= Q^{-1}(B + MA) \\ \tau &= A - (B' + AM)Q^{-1}(B + MA) = A - (B' + AM)T \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

olmak üzere

$$\varepsilon' V^{-1} \varepsilon = (e_t, u_t)\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_t \\ u_t \end{bmatrix}$$

$$=\left(e_tA+u_tB', e_tB+u_tC\right)\begin{pmatrix} e_t \\ u_t \end{pmatrix}$$

$$=\left(e_t^2A+2e_tB'u_t+u_t^2C\right)$$

$$=\left[Y_t-f\left(x_t;\beta\right)\right]^2A+2\left[Y_t-f\left(x_t;\beta\right)\right]\beta'\left(X_t-x_t\right)+2\left(X_t-x_t\right)^2C$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon'V^{-1}\varepsilon)=-2[Y_t-f(x_t;\beta)]A.\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial\beta}-2\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial\beta}B'(X_t-x_t)=0$$

ise

$$[Y_t-f(x_t;\beta)]AN+NB'(X_t-x_t)=0$$

ve

$$N\left\{\left[Y_t-f(\hat{x}_t;\hat{\beta}\right]A+(x_t-\hat{x}_t)B'\right\}=0 \tag{3.13}$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon'V^{-1}\varepsilon)=-2[Y_t-f(x_t;\beta)].\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x}A-2\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x}B'(X_t-x_t)$$
$$-2[Y_t-f(x_t;\beta)]B'-2(X_t-x_t)C=0 \tag{3.14}$$

olur.

$$[Y_t-f(x_t;\beta)]MA+MB'(X_t-x_t)+[Y_t-f(x_t;\beta)]B'+(X_t-x_t)C=0$$
$$\Rightarrow[Y_t-f(x_t;\beta)].(MA+B')+(X_t-x_t)(MB'+C)=0 \tag{3.15}$$

olur. 3.14 ve 3.15 denklem sistemlerinin çözümünü sağlayan $\hat{\beta}$ ve $\hat{x}_t$ değerleri β ve x_t'nin en küçük kareler kestiricileridir.

3.2.2 MAKSİMUM LİKELİ HOOD KESTİRİMİ:

3.2.2.1 Σ KOVARYANS MATRİSİ BİLİNMİYORSA

(Kestiricisi bulunabiliyorsa)

(3.1) Modeli için $\Sigma = \sigma^2 V$ kovaryans matrisi,V bilinen karesel bir matris ve σ^2 bilinmeyen bir sabit olmak üzere (Y_t, X_t) $(t = 1,2...n)$ gözlemleri için olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınırsa

$$\log L(\beta, x, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2}\varepsilon' V^{-1}\varepsilon = sabit - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2}\varepsilon' V^{-1}\varepsilon \qquad (3.16)$$

ifadesini maksimumlaştıran $\hat{\beta}, \hat{x}_t$ ve $\hat{\sigma}^2$ kestiricileri (3.1) için maksimum olabilirlik kestiricileridir. Bunun için (3.16) bağıntısının β, x ve σ^2'ye göre kısmi türevler alınırsa, (3.13) bağıntısından

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\log L(\beta, x, \sigma^2) = N\{B(X_t - \hat{x}_t) + A[Y_t - f(\hat{x}_t; \hat{\beta})]\} = 0, \qquad (3.17)$$

(3.15) bağıntısından da

$$\frac{\partial}{\partial x}\log L(\beta, x, \sigma^2) = (C + MB')(X_t - \hat{x}_t) + (\beta + MA)[Y_t - f(x_t; \beta)] = 0 \qquad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log L(\beta, x, \sigma^2) = n(p+1)\sigma^2 - \hat{\varepsilon}' V^{-1}\hat{\varepsilon} = 0 \qquad (3.19)$$

yazılabilir. Bunun yardımıyla $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n(p+1)}\hat{\varepsilon}' V^{-1}\hat{\varepsilon}$ bulunur. Burada $\hat{\varepsilon}' = [Y_t' - f'(\hat{x}_t; \hat{\beta}), X_t' - \hat{x}_t]$ dir. Bu durumda x ve β parametrelerini oluşturan p+n tane normal denklem bulunmaktadır. Sayısal çözüm için bilgi (informasyon) matrisine ihtiyaç duyuluyor. $E=(X_t-x_t)=E(Y_t-y_t)=0$ için (3.16) bağıntısındaki olabilirlik fonksiyonunun ikinci kısmi türevi yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 \log L(\beta, x_t, \partial^2)}{\partial\beta_r \partial\beta_s}=\frac{\partial}{\partial\beta_s}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_r}f(x_t;\beta).B(X_t-x_t)+A.(Y.f(x_t;\beta)\frac{\partial}{\partial\beta_r}f(x_t;\beta)\right]$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\beta_r\partial\beta_s}f(x_t;\beta).B(X_t-x_t)-\frac{\partial}{\partial\beta_r}f(x_t;\beta).A.\frac{\partial}{\partial\beta_s}f(x_t;\beta)$$ olur.

Eşitliğin her iki tarafının beklenen değeri alınırsa,

$$-E(\frac{\partial^2 \log L}{\partial\beta_r\partial\beta_s})=\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial\beta_r}A\frac{\partial}{\partial\beta_s}f(x_t;\beta) \quad (r,s=1,2\ldots,p) \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial^2 \log L(\beta, x, \sigma_2)}{\partial\beta_r\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial\beta_r}B'(X_t-x_t)+\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial\beta_r}A[Y-f(x_t;\beta)]\right]$$

$$=-\frac{\partial^2 f'(x_t;\beta)}{\partial\beta_r}B'-\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial\beta_r}A.\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x}=-\frac{\partial f'(x_t;\beta)}{\partial\beta_r}(B'+AM)$$

Son eşitliğin her iki yanının beklenen değeri alınırsa

$$-E(\frac{\partial^2 \log L}{\partial\beta_r\partial x})=\frac{\partial f'(x_t;\beta)}{\partial\beta_r}(B'+AM) \tag{3.21}$$

bulunur.

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[C(X-x_t)+\frac{\partial}{\partial x_i}\beta'(X-x_t)+B(Y-f(x_t;\beta))\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x_j}A(Y-f(x_t;\beta)\right]=-c_{ij}-b_{ij}\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x_i}-b_{ij}\frac{\partial f(x_j;\beta)}{\partial x_j}-c_{ij}.\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x_i}.\frac{\partial f(x_j;\beta)}{\partial x_j}$$

Yine her iki tarafın beklenen değeri alınırsa,

$$-E(\frac{\partial^2 \log L}{\partial x_i\partial x_j})=c_{ij}+b_{ij}\frac{\partial f(x_i;\beta)}{\partial x_i}+b_{ij}\frac{\partial f(x_j;\beta)}{\partial x_j}+c_{ij}\frac{\partial f(x_i;\beta)}{\partial x_i}.\frac{\partial f(x_j;\beta)}{\partial x_j}(i,j=1,2\ldots q) \tag{3.22}$$

olur. Burada a_{ij}, b_{ij} ve c_{ij} sırayla A,B ve C matrisinin elemanlarıdır. (3.20),(3.21) ve (3.22) denkleminin katsayıları matrisi,

$$W = \begin{bmatrix} N'AN & N'(B' + AM') \\ (B + MA)N & Q \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

bilgi matrisidir. p+n tane denklemin sayısal çözümü için aşağıdaki iterativ yöntem kullanılabilir.

$$\begin{pmatrix} \beta_{(a+1)} \\ x_{(a+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{(a)} \\ x_{(a)} \end{pmatrix} + W_{(a)}^{-1} \begin{bmatrix} NB' & N'A \\ C + MB' & B + MC \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X - x_{(a)} \\ Y - f\left(x_{(a)}; \beta_{(a)}\right) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Burada ( ) alt indisi maximum olabilirlik hesaplarının 'inci ölçüm değeridir.

V matrisini oluşturan bloklardan faydalanarak ters matris için bağıntı ve ters bağıntılar yazıldığı gibi W^{-1} matrisi için de benzer bağıntılar yazılarak asimtotik kovaryans matrisinin $(N'\tau N)^{-1}$ olduğu gösterilebilir. [(G.R. Dolby-1972)]

Yukarıdaki işlemlerin analizi ile ilgili bazı sorunlar vardır. Birincisi σ^2nin maximum olabilirlik kestiricisinin tutarsız olmasıdır, bu durum lineer modeller için iyi bilinmektedir. [(Kendall ve Stuart 1973-403)]

Egertan ve Lyock (1979) $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{q-p}\hat{\varepsilon}'V^{-1}\hat{\varepsilon}$ olarak buldular. $\hat{\sigma}^2$ tutarsızlığı diğer kestiricilerin tutarlılığı ile özdeştir. İkincisi, iterativ yöntemde adım yönünün ve adım büyüklüğünün yakınsamaya yapacağı etkidir. Üçüncüsü, maksimum olasılık hesaplarının rastgele parametrelerin varlığı durumunda kullanılmasından kaynaklanır ve maksimum olabilirlik kestiricileri tutarlı olsalar bile asimtotik kovaryans matrisleri genellikle umulan bilgi matrisinin tersiyle verilmez.

3.2.2.2 Σ KOVARYANS MATRİSİ KISMEN BİLİNİYORSA

(3.1) modelinde Σ kovaryans matrisi tamamen bilinmiyorsa en çok olabilirlik kestiricileri bulunamaz. Bard (1974) bu nedenle $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{eu} \\ \sigma_{ue} & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$ kovaryans matrisindeki dört blok matristen örneğin σ_e^2 bilindiğinde bu zorluk ortadan kalkar. Şöyleki $\sigma_e^2 = P$ olsun. Burada P, bilinen pozitif tanımlı bir matristir.

Ayrıca x ve y'deki hataların tamamen ilişkisiz olduğunu kabul edelim.

$\hat{Y}_t = f(\hat{x}_t; \hat{\beta})$ olmak üzere logaritmik olabilirlik fonksiyonunun sabit olmayan kısmı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$LogL(\beta, x, \sigma_u^2) = -\frac{n}{2}\log \det \sigma_u^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(e_t^1 P^{-1} e_t) + u_t' V^{-1} u_t \tag{3.25}$$

olur. Burada σ_u^2 nun en çok olabilirlik kestiricisinin

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n} M_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t u_t' \tag{3.26}$$

olduğu söylenebilir. Uygun bir düzeltme faktörüyle bu tahminin yanı kaldırılabilir. (3.25) Olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonu yerine

$$Q(x_t, \beta) = \frac{n}{2}\log \det M_{xx} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} u_t . u_t' \tag{3.27}$$

Merkezi amaç fonksiyonunu minimumlaştırmak yeterlidir.

$$Q(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{n}{2}\log \det \sum_{t=1}^{n} (\hat{X}_t - x_t)(\hat{X}_t - x_t)' + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} (\hat{Y}_t - y_t)' P^{-1} (\hat{Y}_t - y_t)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{x}_t} &= nM^{-1}{}_{xx}\left(\hat{X}_t - x_t\right)\\ \frac{\partial Q(\hat{x},\hat{y})}{\partial \hat{y}_t} &= P^{-1}\left(\hat{Y}_t - y_t\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3.28)$$

şeklinde verilir.

Kısmi türevler gradiyent vektörünün elemanlarıdır.

H Hessian matrisi ikinci kısmi türevlerden oluşur. Bu matrisi elde etmek büyük karışıklıklara yol açacağından Gauss yaklaşımı kullanılabilir.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_t \partial x_t} &\approx nM^{-1} = n\left[\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{X}_t - x_t\right)\left(\hat{X}_t - x_t\right)'\right]^{-1}\\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x_t \partial y_t} &= 0\\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x_t \partial y_t} &= P^{-1}\end{aligned}\right\} \qquad (3.29)$$

olacağından $\sum_t = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}M_{xx}\end{bmatrix}$ yazabiliriz.

Deming yaklaşımına göre

$$H = \begin{bmatrix} \sum_1^{-1} & 0.............00 \\ 0 & \sum_2^{-1},..........00 \\ 0............................0 & \\ 0......................0.\sum_n^{-1} & \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

Ayrıca q=$(q_1, q_2, ..., q_n)'$ gradiyent vektörü $q_t = \sum_t^{-1} \varepsilon_t$ ile verilir.

3.2.2.3. β VEKTÖRÜNÜN BİR İTERATİVE KESTİRİMİ

Bu kestirici, (3.1) ölçüm hatalı modelin maksimum olabilirlik kestiricisinin modifiye edilmiş bir hali olarak geliştirilmiştir. (e_t, u_t)'nin Σ_t kovaryans matrisinin singüler olmadığını kabul edelim.

Σ_t bilindiğinde, (e_t, u_t)hata vektörü sıfır ortalama ve Σ_t kovaryans matrisi ile bağımsız olarak normal dağıldığını kabul edelim. Bu durumda Ax⊗'de bulunan x_t ve β'nin (Y_t, X_t)gözlemlerinin maksimum olabilirlik kestiricisi,

$$\sum_{t=1}^{n} Q(x_t \beta; Y_t, X_t) = \sum_{t=1}^{n} \{Y_t - f(x_t; \beta), X_t - x_t\} \Sigma^{-1} \{Y_t - f(x_t; \beta), X_t - x_t\}'$$

eşitliğini minimumlaştıran değerdir. β'nin bir maksimum olabilirlik kestiricisi elde edilmediği sürece, β'nin kestirimine giden iterative bir yöntem bulunabilir. Bunun için $\bar{\beta}$, β'nin bir başlangıç kestirimi olsun. Bu durumda alışılmış en küçük kareler yöntemi önerilir. $\hat{x}_t, A$'de bulunan x_t'nin $q(\bar{\beta}, x_t; Y_t, X_t)$ değerini minimumlaştıran nokta olsun. $\hat{x}_t$, A'nın içinde ise;

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^{ee} & \sigma^{eu} \\ \sigma^{ue} & \sigma^{uu} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$\hat{x}_t$ değeri

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{t=1}^{n} Q(x_t \beta; Y_t X_t) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [Y_t - f(x_t; \beta), X_t - x_t] . \begin{bmatrix} \sigma^{ee} & \sigma^{eu} \\ \sigma^{ue} & \sigma^{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t - f(x_t; \beta) \\ X_t - x_t \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [Y_t - f(x_t; \beta)]\sigma^{ee} + (X_t - x_t)\sigma^{ue}, [y_t - f(x_t; \beta).\sigma^{eu} + (X_t; x_t)\sigma^{uu}] . \begin{bmatrix} Y_t - f(x_t; \beta) \\ X_t - x_t \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{[Y_t - f(x_t;\beta)]^2 \sigma^{ee} + (X_t - x_t)\sigma^{ue}[Y_t - f(x_t;\beta)] + [Y_t - f(x_t;\beta)]\sigma^{eu}.[X_t - x_t] + (X_t - x_t)^2 \sigma^{uu}\right\}$$

$$= -2[Y_t - f(x_t;\beta)] f_x(x_t;\beta)\sigma^{ee} - \{\sigma^{ue}[Y_t - f(x_t;\beta) + (X_t - x_t)\sigma^{ue} f_x(x_t;\beta)]\ \}$$

$$-\{\sigma^{eu}.[Y_t - f(x_t;\beta)] + (X_t - x_t)\sigma^{eu}.f_x(x_t;\beta)\} - 2(X_t - x_t)\sigma^{uu} = 0$$

olduğundan

$$[Y_t - f(\hat{x}_t;\beta)] f_x(x_t;\beta) + [Y_t - f(x_t;\bar{\beta})]\sigma^{eu} + [X_t - x_t]\sigma^{ue} f_x(\hat{x}_t,\bar{\beta}) + [X_t - x_t]\sigma^{uu} = 0 \quad (3.31)$$

ifadesini sağlar.

$$\left.\begin{array}{l} y_t = f(x_t;\beta) \text{ ise } \hat{y}_t = f(\hat{x}_t;\bar{\beta}) \\ \Delta\beta = \beta - \bar{\beta},\ \Delta x_t = x_t - \hat{x}_t,\ \Delta y_t = y_t - \hat{y}_t \end{array}\right\} \quad (3.32)$$

olmak üzere $f(x_t;\beta)$ fonksiyonu $(\hat{x}_t;\bar{\beta})$ komşuluğunda taylor serisine açılıp lineer olmayan terimler ihmal edilirse,

$$f(x_t;\beta)\ f(\hat{x}_t;\bar{\beta}) + \frac{\partial}{\partial\beta'} f(\hat{x}_t;\bar{\beta})(\beta - \bar{\beta}) + \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}_t;\bar{\beta})(X_t - \hat{x}_t)' \quad (3.33)$$

bağıntısı bulunur. (3.32) sistemini oluşturan bağıntılar (3.33)'te yerine yazılırsa,

$$f(x_t;\beta) - f(\hat{x}_t;\bar{\beta}) = f'_\beta(\hat{x}_t;\bar{\beta})(\beta - \bar{\beta}) + f_x(\hat{x}_t;\bar{\beta})(x_t - \hat{x}_t)' \quad (3.34)$$

ise

$$\Delta y_t = f'_\beta(\hat{x}_t;\bar{\beta})(\Delta\beta) + f_x(\hat{x}_t;\bar{\beta})(\Delta x_t)' \quad (3.35)$$

bulunur. (3.30) denklemi,

$$\sum_{t=1}^{n} Q(x_t;\beta) = \sum_{t=1}^{n}[(Y_t - y_t),(X_t - x_t)]\sum\nolimits^{-1}[(Y_t - y_t),(X_t - x_t)]' \quad (3.36)$$

olarak yazılabilir.

$\hat{e}_t = Y_t - \hat{y}_t$, $\hat{u}_t = X_t - \hat{x}_t$ olmak üzere (3.30) denklemindeki kareler toplamına bir yerel (local) yaklaşım olarak,

$$\sum_{t=1}^{n} Q(x_t;\beta) = \{[Y_t - \hat{y}_t + \hat{y}_t - y_t],[X_t - \hat{x}_t - \hat{x}_t - x_t]\}\sum^{-1}\{[Y_t - \hat{y}_t + \hat{y}_t - y_t],[X_t - \hat{x}_t - \hat{x}_t - x_t]\}'$$

$$= \sum_{t=1}^{n}\{[(Y_t - \hat{y}_t)-(Y_t - \hat{y}_t)],[(X_t - \hat{x}_t)-(X_t - \hat{x}_t)]\}\sum^{-1}\{[(Y_t - \hat{y}_t)-(y_t - \hat{y}_t)],[(X_t - \hat{x}_t)-(x_t - \hat{x}_t)]\}'$$

$$= \sum_{t=1}^{n}(\hat{e}_t - \Delta y_t,\ \hat{u}_t - \Delta x_t)\sum^{-1}(\hat{e}_t - \Delta y_t,\ \hat{u}_t - \Delta x_t)' \qquad (3.37)$$

yazılabilir. (3.35) denkleminde kullanılan ve (3.37) ifadesini minimumlaştıran $\Delta\beta$ 'nın değeri, yani $\Delta\hat{\beta}$

$$\sigma_{e_t}^2 = \{1,-f_x(x_t,\bar{\beta})\}\sum\{1,-f_x(x_t;\beta)\}' e_t \qquad (3.38)$$

$$M_{xx} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\sigma_{e_t}^{-2} f_\beta(\hat{x}_t;\bar{\beta}).f_\beta'(\hat{x}_t;\bar{\beta})e_t \qquad (3.39)$$

olmak üzere,

$$\hat{M}_{xx} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\sigma_{e_t}^{-2} f_\beta(\hat{x}_t;\bar{\beta})\{\hat{e}_t - u_t f_x'(\hat{x}_t;\bar{\beta})\}e_t \qquad (3.40)$$

ifadesini sağlar. Bu durumda β 'nın geliştirilmiş bir kestirici $\hat{\beta} = \bar{\beta} + \Delta\hat{\beta}$ ile verilir. $\hat{\beta}$ 'nın oluşturulması (3.39) denklemine local yaklaşıma dayanır.

$a_n^{-1} = 0\left(n\frac{-1}{3}\right)$olsun. a_n yineleme sayısı olarak yorumlandığında modifiye edilmiş kestirim birkaç yinelemeli deneylere uygulanabilir. Yani modifiye edilmiş kestirim ölçüm hatasının varyansının büyük olduğu durumlarda kullanılabilir.

$$q_t = e_t - f_x(x_t;\beta)u_t' - \frac{1}{2}tr\{f_{xx}(x_t;\beta)(u_t'u_t' - \sigma_{uu})\}$$

olmak üzere

$$\hat{e}_t - f_x\left(x_t, \overline{\beta}\right)\hat{u}_t' - \frac{1}{2}tr\left\{f_{xx}\left(\hat{x}_t, \beta\right)\right\}\left(u_t'u_t - \sigma_{uu}\right) = f_\beta'\left(x_t; \beta\right)\left(\Delta\beta\right) + q_t + 0_p\left(n\frac{-1}{2}\right)$$

yazılabilir.

$\hat{q}_t = \hat{e}_t - \hat{u}_t . f_x\left(\hat{x}_t; \overline{\beta}\right) - \frac{1}{2}tr\left\{f_{xx}\left(\hat{x}_t; \overline{\beta}\right)\left(\hat{u}_t'.\hat{u}_t - \sigma_{uu}\right)\right\}$ olmak üzere

$\Delta \overset{\approx}{\beta}$ modifiye edilmiş kestiricisi

$\hat{M}_{xx}\left(\Delta \overset{\approx}{\beta}\right) = n^{-1} \sum_{t=1}^{bn} \hat{\sigma}_{et}^{-2} f_\beta\left(\hat{x}_t, \overline{\beta}\right)\hat{q}_t$ ifadesini sağlar.

Burada $\overset{\approx}{\beta} = \overline{\beta} + \Delta \overset{\approx}{\beta}$ şeklindedir. Bu değişiklik (3.39) denkleminin sağını oluşturan ifadeler yardımıyla yapılmıştır. (W.A. Fuller 1982)

BÖLÜM -4

MODİFİYE EDİLMİŞ KESTİRİM YÖNTEMİNİN KUADRATİK BİR MODELE UYGULAMASI

Tanım 3.1.4'de q=1, p=3 ve $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$ alınırsa $y_t = f(x_t; \beta)$ modeli

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 x_t^2 \qquad t = 1,2,\ldots,n \tag{4.1}$$

modeline dönüşür. Burada da $Y_t = y_t + e_t, X_t = x_t + u_t$ (Y_t, X_t) gözlem vektörü olup (e_t, u_t) ölçüm hatalarının vektörüdür. Burada amaç bağımsız olarak normal dağılmış (e_t, u_t) hatalarına sahip (4.1) polinomunun β katsayılar vektörünü kestirmektir. $(e_t, u_t) \approx$N (0,V) olsun.

(4.1) modelinin vektörel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$Y_t = (1, x_t, x_t^2).\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2$$

bunun yardımıyla

$Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2 = 0$ yazılabilir.

Bu denklem de

$$y_t - (1, x_t, x_t^2).\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

olarak yazılır.

$$\beta' = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ ve } W_t = (1, x_t, x_t^2)$$

ise (4.2) denklemi $y_t - W_t\beta' = 0$ denklemine dönüşür. Bu son denklemin de vektörel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$(y_t, w_t).\begin{pmatrix} 1 \\ -\beta' \end{pmatrix} = 0$ olarak yazılabilir.

$(y_t, w_t) = Z_t.\begin{pmatrix} 1 \\ -\beta' \end{pmatrix} = \theta$ olsun. Bu durumda (4.1) modeli

$$Z_t.\theta = 0 \tag{4.3}$$

olarak ifade edilebilir.

$W_t = w_t + f_t = (1, X_t, X_t^2 - \sigma_u^2)$ olsun.

$(1, x_t, x_t^2) + (f_1, f_2, f_3) = (1, X_t, X_t^2 - \sigma_u^2)$ ise

$(1 + f_1, x_t + f_2, x_t^2 + f_3) = (1, X_t, X_t^2 - \sigma_u^2)$

olur.

Bunun yardımıyla

$$\left.\begin{aligned} 1 + f_1 &= 1 \\ x_t + f_2 &= X_t \\ x_t^2 + f_3 &= X_t^2 - \sigma_u^2 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

(4.4) sisteminden

$f_1 = 0, x_t + f_2 = x_t + u_t$ ise $f_2 = u_t$

$x_t^2 + f_3 = X_t^2 - \sigma_u^2 = (x_t + u_t)^2 - \sigma_u^2 = (x_t^2 + 2x_t u_t + u_t^2 - \sigma_u^2)$

buradan da $f_3 = 2x_t u_t + u_t^2 - \sigma_u^2$

olur ve

$f = \left(0, u_t 2x_t u_t + u_t^2 - \sigma_u^2\right)$ bulunur.

$Z_t = \left(Y_t, W_t\right) = Z_t + \delta_t$

$\delta_t = \left(e_t, f_t\right)$ ve $E\left(\delta_t\right) = 0$ olacak şekilde bir δ_t ve W_t gösterimleri tanımlanırsa, ikinci dereceden moment matrisler

$$M = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} M_t = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t'.Z_t = \begin{bmatrix} M_{yy} & M_{yw} \\ M_{wy} & M_{ww} \end{bmatrix}$$

$$m = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} m_t = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} z_t'.z_t = \begin{bmatrix} m_{yy} & m_{yw} \\ m_{wy} & m_{ww} \end{bmatrix}$$

ve kovaryans matrisler

$$\Omega_t = E\left(\delta_t', \delta_t\right) = \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \Omega_{ef(t)} \\ \Omega_{fe(t)} & \Omega_{ff(t)} \end{bmatrix}$$

$$\Omega = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \Omega_t = \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \Omega_{ef} \\ \Omega_{fe} & \Omega_{ff} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanabilir.

$\left(e_t, f_t\right)$ ölçüm hataları iki değişkenli normal dağılıma sahip olduğundan δ_t'nin kovaryans matrisi simetrik olup, bulundurduğu blok matrisler aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Omega_t = E\left(\delta_t' \delta_t\right) = E\left[\begin{pmatrix} e_t \\ f_t \end{pmatrix} . \left(e_t, f_t\right)\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} e_t e_t & e_t f_t \\ f_t e_t & f_t f_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left(e_t e_t\right) & E\left(e_t f_t\right) \\ E\left(f_t e_t\right) & E\left(f_t f_t\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \Omega_{ef(t)} \\ \Omega_{fe(t)} & \Omega_{ff(t)} \end{bmatrix} \text{ise}$$

$$\Omega_{ef(t)} = E\left[e_t\left(0, u_t, 2x_t u_t + u_t^2 - \sigma_u^2\right)\right]$$

$$= E\left[e_t.0, e_t u_t, 2x_t u_t e_t + e_t u_t^2 - e_t.\sigma_u^2\right]$$

$$= \left[E(0), E\left(e_t.u_t\right), E\left(2x_t u_t e_t + e_t u_t^2 - e_t \sigma_u^2\right)\right]$$

$$= \left(0, 0, 2\mathrm{x}_t \sigma_{eu}\right) = \Omega_{fe(t)} \tag{4.5}$$

$$\Omega_{ff(t)} = E\left(f_t f_t\right) = E\left(f_t' f_t\right) = E\begin{bmatrix} 0 \\ u_t \\ 2x_t u_t + u_t^2 - \sigma_u^2 \\ \end{bmatrix}.\left[0, u_t, 2x_t u_t + u_t^2 - \sigma_u^2\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_t^2 & 2x_t u_t^2 + u_t^3 - u_t \sigma_u^2 \\ 0 & 2x_t u_t^2 + u_t^3 - u_t \sigma_u^2 & \left(2x_t u_t + u_t^2 - \sigma^2\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E\left(u_t^2\right) & 2x_t E\left(u_t^2\right) + E\left(u_t^3\right) - \sigma_u^2 E\left(u_t\right) \\ 0 & 2x_t E\left(u_t^2\right) + E\left(u_t^3\right) - \sigma_u^2 E\left(u_t\right) & 4x_t^2 E\left(u_t^4\right) + E\left(u_t^4\right) + E\left(u_t^4\right) + 4x_t E\left(x_t^3\right) - 4x_t E\left(u_t^3\right) - 2\sigma_u^2 E\left(u_t^2\right) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & 2x_t \sigma_u^2 \\ 0 & 2x_t \sigma_u^2 & 4x_t^2 \sigma_u^2 + 2\sigma_u^4 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

bulunur. Buna göre kovaryans matris

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & 0 & 0 & 2x_t \sigma_{eu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 & 2x_t \sigma_u^2 \\ 2x_t \sigma_{eu} & 0 & 2x_t \sigma_u^2 & 4x_t^2 \sigma_u^2 + 2\sigma_u^4 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

olarak yazılabilir.

Ω_t nin tutarsız $\hat{\Omega}_t$ kestiricisi x_t *ile* X_t *ve* X_t^2 *ile* $X_t^2 - \sigma_u^2$ ifadesini yer değiştirmesiyle bulunmuş Ω'*nın* $\overline{\Omega}$ kestiricisi $\hat{\Omega} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\hat{\Omega}_t$ *iken* β katsayılar vektörünün bir kestiricisi

$$\hat{\beta} = \left(M_{ww} - \hat{\alpha}\hat{\Omega}_{ff}\right)^{-1}\left(M_{wy} - \hat{\alpha}\hat{\Omega}_{fe}\right) \tag{4.8}$$

dir. Burada $\hat{\alpha}, \left|M - \alpha\hat{\Omega}\right| = 0$ determinant denkleminin en küçük köküdür. Bu kestirici için iki durum vardır. Birincisi $\hat{\alpha}$ olasılık olarak 1'e yakınsar, $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} W_t' y_t$'nin bir kestiricisi $\left(M_{wy} - \hat{\alpha}\Omega_{ff}\right)$ ifadesi ortalama kareler matrisinin bir kestiricisi gibi görünebilir. İkincisi (4.8) kestiricisi $h(\theta) = \dfrac{\theta' M\theta}{(\theta'\Omega\theta)^{-1}}$ fonksiyonunu minimum yapan β değeridir. $h(\theta)$, lineer modellerde olabilirlik fonksiyonu olduğundan maksimum olabilirlik kestiricisi değildir. Burada $\theta' = (1 - \beta')$'dir. (Wolter ve Fuller 1982).

(4.1) Kuadratik modeli ve buna ait bütün varsayımlara ek olarak kovaryans matrisi singüler ise β katsayılar vektörünün bir kestiricisi aşağıdaki gibi bulunur.

$\sigma_u^2 = 0$ ise (3.1) modeli ikinci dereceden bir polinomal modele indirgenir. $\sigma_u^2 \neq 0$ ise alışılmış en küçük kareler kestiricisi tutarsızdır. β katsayılar vektörünün bir kestiricisini bulmak için,

$$Q(x_t;\beta) = \left[Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2, X_t - x_t\right]\begin{bmatrix}\sigma^{ee} & \sigma^{eu}\\ \sigma^{ue} & \sigma^{uu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2\\ X_t - x_t\end{bmatrix} \tag{4.9}$$

ifadesini minimumlaştırmak gerekir.

$$Y = (Y_1, Y_2, \ldots Y_n)', \; W = (1, x_t, x_t^2), \; \beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$$

ise (4.1) bağıntısı $Y = W\beta$ olarak yazılabilir. $Y = W\beta$ ise $W'Y = W'W\beta$ olur. Bu eşitliğin her iki yanını soldan $(W'W)^{-1}$ ile çarparsak

$$(W'W)^{-1} \quad W'Y = (W'W)^{-1}(W'W)\beta \text{ ise } \hat{\beta} = (W'W)^{-1}W'Y$$

bulunur. Bu $\hat{\beta}$, β en küçük kareler kestiricisidir.

$$Q(x_t;\beta) = (Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2)^2 \sigma^{ee} + (X_t - x_t).(Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2)\sigma^{ue}$$

$$+(Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2)(X_t - x_t)\sigma^{eu} + (X_t - x_t)\sigma^{uu}$$

$$\frac{\partial\theta(x_t;\beta)}{\partial x_t} = -2\{(Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2)(\beta_1 + 2\beta_2 x_t)\}\sigma^{ee}$$

$$-2\{(Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2) + (\beta_1 + 2\beta_2 x_t)(X_t - x_t)\}.\sigma^{eu} - 2(X_t - x_t)\sigma^{uu} = 0$$

ise

$$\{(Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2)(\beta_1 + 2\beta_2 x_t)\}.\sigma^{ee} + \{(Y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t - \beta_2 x_t^2) + (\beta_1 + 2\beta_2 x_t)(X_t - x_t)\}\ \sigma^{eu}$$

$$+(X_t - x_t)\sigma^{uu} = 0 \qquad (4.11)$$

$$\hat{e}_t = Y_t - \hat{y}_t,\ \hat{y}_t = E(y_t) = E(\beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2)$$

$$\hat{e}_t = Y_t - E[\beta_0 + \beta_1(X_t - u_t) + \beta_2(X_t - u_t)^2]$$

$$= Y_t - [E(\beta_0) + E(\beta_1 X_t) - E(\beta_1 u_t) + E(\beta_2 X_t^2 - 2X_t.u_t.\beta_2 + u_t^2.\beta_2)] \qquad (4.12)$$

$$= Y_t - \beta_0 - \beta_1 X_t - \beta_2(X_t^2 - \sigma_u^2)$$

(3.38 eşitliğinden)

$$\sigma_{e_t}^2 = \{1, -f_x(\hat{x}_t, \hat{\beta})\}.\sum(1, -f_x(\hat{x}_t, \hat{\beta}))'$$

$$\hat{\sigma}_{e_t}^2 = [1, -(\hat{\beta}_1 + 2\beta_2\hat{x}_t)].\begin{bmatrix}\sigma^{ee} & \sigma^{eu}\\ \sigma^{ue} & \sigma^{uu}\end{bmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ -(\beta_1 + 2\beta_2\hat{x}_t)\end{pmatrix}$$

$$=\left[\sigma_{ee}-\left(\hat{\beta}_1+2\hat{\beta}_2\hat{x}_t\right)\sigma_{ue},\sigma_{eu}-\left(\hat{\beta}_1+2\hat{\beta}_2\hat{x}_t\right)\sigma_{uu}\right].\begin{bmatrix}1\\-\left(\hat{\beta}_1+2\hat{\beta}_2\hat{x}_t\right)\end{bmatrix}\sigma_{uu}$$

$$=\sigma_{ee}-2\left(\hat{\beta}_1+2\hat{\beta}_2\hat{x}_t\right)\sigma_{eu}+\left(\hat{\beta}_1+2\hat{\beta}_2\hat{x}_t\right)\sigma_{uu}$$

bulunur.

Bunun yardımıyla $\Delta\beta=\beta-\hat{\beta}$'nın $(\Delta\beta)^*$ kestiricisi hesaplanır.

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\hat{\sigma}_{e_t}^{-2}\begin{bmatrix}1\\x_t\\x_t^2\end{bmatrix}.\left(1,x_t,x_t^2\right)\left(\Delta\beta\right)^*=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{\sigma}_{e_t}^{-2}\hat{e}_t$$

$M_{\hat{x}\hat{x}}^{*}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{\sigma}_{e_t}^{-2}\begin{pmatrix}1\\x_t\\x_t^2\end{pmatrix}.\left(1,x_t,x_t^2\right)$ olmak üzere kestirilmiş kovaryans matris $\left(\frac{1}{n}M_{\hat{x}\hat{x}}^{*}\right)^{-1}$ ile verilir.

$M_{\hat{x}\hat{x}}^{*}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{\sigma}_{e_t}^{-2}f_{\beta}\left(\hat{x}_t,\hat{\beta}\right).f_{\beta}'\left(\hat{x}_t,\hat{\beta}\right)$ olur.

(Wolter ve Fuller-1982)

SONUÇ

Bağımlı ve bağımsız değişkenin hatalı ölçüldüğü lineer regresyon modeline ait parametre kestirimi sorunu tam anlamıyla çözülememiştir. Modelin lineer olmaması ve değişkenlerin ölçüm hatalı olmasının birlikte oluşturduğu problemler karmaşıklığı daha da artırır. Bu durumda, lineer regresyon ve klasik lineer olmayan (ölçüm hatasız) regresyon modelinde olduğu gibi bazı varsayımlar altında parametre kestirimi yapılmaktadır. Bu varsayımları en aza indirgemekle kestiricilerin tutarlılık derecesi artar.

Bu çalışmada ölçüm hatalı lineer olmayan model için bazı varsayımlarla parametre kestirimi yapılmıştır. Bu model için kestirim yüzeyinin egriliği, parametreler için güven aralıkları ve güven bölgesi, varyans bileşenleri analizi, kestiricilerin tutarlılığı, asimtotikliği v.b. gibi özellikleri ve parametre uzayı için geometrik yorum araştırılabilir.

KAYNAKLAR

1) Madansky Albert.The fitting of straight lines when both variables are subjejt to error. American State. Ass. Journal (1968) (173-203).

2) Britt H.I. and Lucke R.H. The estimation of parameters in nonlinear implicit model. Tecnometrics, (1973)15, 233-247.

3) Donald W. Marquart An algorithm for least squares setimation of nonlinear parameters. J.SOC.INDUST. Appl.Math. (1963) VoL.11 No: 2

4) Dolby. G.R. Generalized least squares and Maksimum likelihood Estimation of Nonlinear Fonctional Relationships, J.R. Stat. (1972) 25,157-162..

5) Fuller A. Wayne Mesurement error in veriables Models. 1987. Ph. Dr. Iowa State Univ

6) Dolby, G.R. and Lipton S. Maksimum Likelihood Estimation of the general nonlinear fonctional relationship with replicated observations an correlated errors Biometrika (1972), 59,121-129.

7) Fuller A. Wayne Paroberties of some estimators for the errors in-variables model The annalas of state (1980). Vol. 8. No:2,407-422.

8) Fuller A.Wayne- Estimating a Nonlinear errors in variables model with singular error Covairance matrix. procedings of the business and Econometric statistics section Amer (1975). Statist. Assoc.

9) Fuller A.W. and Wolter. M.K. estimation of nonlinear errors in variables models the Ann. of statistics Vol. (1982-a) 10 No:2, 539-548.

10)Fuller A. Wayne and Wolter M.K. Estimation of the quadratic errors in veriables model. Biometrika (1982-b) 69, 1,pp-175-182 priented in Great Britain.

11)Seber, G.A.F. and Wild, C.J Nonlinear Regression. John Wiley and Sons. Newyork. (1988).

12)Bard, Y. Nonlinear parameter Estimation. Academic press. Newyork and London. (1974).

13)DEMİNG, W.E. The application of least squares. Philosophical magazine series 7,11, 146-158(1931).

ÖZGEÇMİŞ

ADI SOYADI	: Aziz HARMAN
DOĞUM YERİ	: LİCE
DOĞUM TARİHİ	: 03.04.1963
ÖĞRENİM DURUMU	:
İLKOKUL	: Dernek Köyü İlkokulu
ORTAOKUL	: Tatvan Y.B.İ.Ö.
LİSE	: Diyarbakır Lisesi
ÜNİVERSİTE	: Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.
ÇALIŞTIĞI KURUM	: Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Bölümü Matematik Anabilimdalı
GÖREVİ	: Matematik Eğitimi Uzmanı