

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

**GÖRELİ LANDAU YÖRÜNGELERİNİN
KENDİLİĞİNDEN YAYMA YARI ÖMÜRLERİNİN
HESAPLANMASI**

F.Figen BİNBAY

36 067

DOKTORA TEZİ

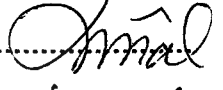
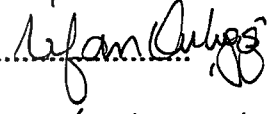
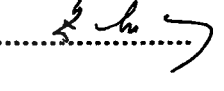
(FİZİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR
EKİM -1995

**F.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANİSTON MERKEZİ**

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne
DİYARBAKIR

Bu çalışma, jürimiz tarafındanF İ Z İ K.....
Anabilim Dalı'ndaDOKTORA..... tezi olarak kabul edilmiştir.

| Jüri Üyesinin | Ünvanı | Adı Soyadı | İmzası |
|---------------|---------------------|------------|---|
| Başkan | Prof. Dr. Hüseyin | Ünal |  |
| Üye | Yrd. Doç. Dr. İrfan | AGIKGÖZ |  |
| Üye | Prof. Dr. Zülküf | GÜLSÜN |  |

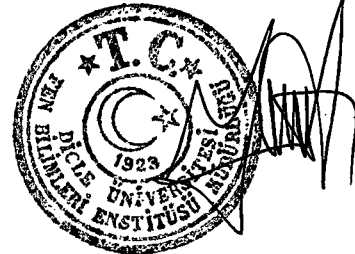
Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

02.11.1995


imza

Prof. Dr. Zeli Tez
Ünvanı, Adı Soyadı

Enstitü Müdürü
mühür



TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın bütün aőamalarında, her türlü özveriden kaçınmayarak destek olan, bilgi ve tecrübesiyle yol gösteren Sayın hocam **Prof.Dr.Nuri ÜNAL**'a sonsuz teşekkürlerimi sunmak istiyorum. Ayrıca bu çalışmanın çeşitli aőamalarında görüşlerinden faydalandığım danışmanım Sayın **Yrd.Doç.Dr.İrfan AÇIKGÖZ** ve Sayın **Yrd.Doç.Dr.Ali HAVARE**'ye de teşekkür ediyorum.



İÇİNDEKİLER

| | |
|---|-----------|
| Bölüm :1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1. Öz-alan Kuantum Elektrodinamiği Formülasyonu. | 2 |
| 1.2. Öz-alan Kuantum Elektrodinamiği Eylemi | 4 |
| Bölüm :2. KENDİLİĞİNDEN YAYMA | 14 |
| Bölüm :3. SABİT BİR MANYETİK ALANDAKİ BİR ELEKTRONUN HAREKETİ. | 17 |
| 3.1. Göresiz ve Görelî Durumlarda Landau Yörüngelerinin Kartezyen Koordinatlardaki İfadesi. | 24 |
| 3.2. Görelî Landau Yörüngelerinin Silindirik Koordinatlardaki İfadesi. | 29 |
| Bölüm : 4. GÖRELİ LANDAU YÖRÜNGELERİNİN KENDİLİĞİNDEN YAYMA YARI-ÖMÜRLERİNİN HESAPLANMASI. | 45 |
| Bölüm: 5 . SONUÇ. | 61 |
| - KAYNAKLAR | 62 |
| - ŞEKİLLER. | 64 |
| - ÖZGEÇMİŞ. | 66 |

AMAÇ

Bu çalışmada, öz-alan kuantum elektrodinamiği formülasyonunda yer alan bir eylem yardımıyla, görelî Landau yörüngeleri kendiliğinden yayma yarı-ömürleri hesaplanmaya çalışılacaktır. Öz-alan KED eylemi iterasyona dayanan bir işlemle, bir takım ışınımsal süreçlerin neden olduğu enerji kaymalarının hesaplanmasına izin vermektedir. Eylemden hareketle elde edilen enerji kayması ifadesi karmal bir ifadedir. Bunun sanal kısmı, kendiliğinden yayma ve soğurma ile ilgilidir.

Enerjinin sanal kısmıyla bozunma oranı arasındaki ilişkiden yararlanarak kendiliğinden yayma olayıyla ilgili yarı-ömürler hesaplanabilir. Coulomb potansiyelindeki elektronun bir takım geçişleri için bu hesaplanmış ve deneyle uyuşan sonuçlar elde edilmiştir.⁽¹⁾ Bu çalışmada aynı yöntem görelî Landau yörüngelerine ait dalga fonksiyonları ve dipol yaklaşımı kullanılarak denenmiştir. Amacımız daha önceki çalışmalarla ^(2,3) uyumlu bir sonuç elde etmektir.

ÖZET

Öz-alan kuantum elektrodinamiğinin formülasyonu elektronun öz-enerjisini temel alır. Bu yaklaşım burada düzgün bir manyetik alandaki bir elektronun bozunma oranlarını değerlendirmekte kullanılır. Bu, görelî Landau yörüngelerine ait dalga fonksiyonları kullanılarak yapılır ve dipol yaklaşımı gerçekleştirilir. Bozunma oranları için türetilen formül bazı geçişlerin bozunma oranlarını hesaplamakta kullanılır.



SUMMARY

The formulation of self-field quantum electrodynamics is based upon the electron's self-energy. This approach is here used for evaluating the decay rates of an electron in a uniform magnetic field. This is done by using the wave functions which belong to the relativistic Landau orbits, and the dipole approximation is employed. The formula derived for the decay rates is used in the calculation of the decay rates of the transitions.



Bölüm : 1. GİRİŞ

Kuantum elektrodinamiğindeki (KED) çok önemli etkilerin bazılarının-örneğin Lamb kayması, kendiliğinden yayma ve (g-2)-kuantumlanmış bir A_μ alanının açık kullanımı olmaksızın hesaplanabildiği, bu üç etkinin tek bir denklem içinde yer aldığı öz-alan kuantum elektrodinamiği formülasyonu, düşünce olarak klasik elektrodinamiğin çizgisindedir.⁽⁴⁾ Bu formülasyonda, klasik elektrodinamikte olduğu gibi, öz-enerji etkileri kapalı ve tedirginmesiz bir şekilde gözönüne alınmaktadır. Formülasyon bu haliyle kuantum ışınım teorisine açıklık ve tamlık getirmekte ve kolaylık sağlamaktadır.

Bu çalışmada, düzgün bir manyetik alandaki bir elektronun kendiliğinden yayma bozunma oranının (ya da yarı ömrünün) hesabı, öz-alan (KED) formülasyonunda gerçekleştirilmektedir. Yukarıda bahsedilen üç etkinin birlikte ortaya çıktığı ifadenin sanal kısmı, kendiliğinden yayma ve soğurmanın enerji kaymasına olan katkısını vermektedir. Kendiliğinden yayma ile ilgili enerji kayması ifadesinde, ilk basamaktan etkileri hesaplamak için elektronun düzgün bir manyetik alandaki hareketini betimleyen görelî Landau öz-durumları yerine konmuştur ve sanal enerji kayması ile kendiliğinden yayma arasındaki ilişkiden yararlanarak görelî Landau yörüngeleri için kendiliğinden yaymanın yarı ömrü ifadesi elde edilmiştir.

Bu çalışmanın ilk bölümünde, öz-alan KED formalizmi standart KED ile karşılaştırmalı olarak ele alınacak ve öz-alan KED eyleminin nasıl elde edildiğinden bahsedilecektir. Bölüm 2 kendiliğinden yayma olayını, Bölüm 3 sabit bir manyetik alandaki bir elektronun hareketini ve Landau yörüngelerinin elde edilmesini içerecektir. Son olarak 4.Bölümde görelî Landau yörüngelerine ait kendiliğinden yayma yarı ömrünün hesaplanması ve daha önceki yazılarda verilen sonuçlarla karşılaştırılması gerçekleştirilecektir.

1.1. Öz-alan Kuantum Elektrodinamiği :

Klasik elektrodinamikte, ışınımsal süreçler bir dış alandaki elektronun öz-enerjisinden hesaplanırlar. Bunun tersine, kuantum elektrodinamiğinde elektronun ve fotonun dış alandaki enerjileri ve öz-enerjileri önce dikkate alınmaz, öz-alanıyla etkileşmesi gözönüne alınmayan (öz-etkileşmesiz) parçacıklarla hesaba başlanır; sonra öz-enerji foton foton denkleme geri konur. Bunun için tedirginme teorisi kullanılır.

Son zamanlarda, öz-enerjiye dayalı bir kuantum elektrodinamiğini geliştirmenin gerekliliğine dikkat çekilmiş ve böyle bir teorinin genel ilkeleri görelî durumda verilmiştir. ^(4,5,6)

Standart kuantum elektrodinamiğinde, elektronları Dirac denkleminin (Schrödinger denkleminin görelî hali) çözümü olan dalga fonksiyonları ile temsil etmek yerine fotonlar gibi onların da bir klasik bir de kuantumlu alanlarının varlığı düşünülmektedir. Bu varsayım standart kuantum mekaniğinden ayırt etmek için ikinci kuantumlama olarak adlandırılmaktadır. Fakat bu işlemler yalnızca serbest elektron ve serbest foton olarak düşünülebilen sistemlerde formüle edilmektedir. Kuantum elektrodinamiğinin, ikinci kuantizasyonu içermeyen fakat kaynakların öz-alanlarının başlangıçtan itibaren elektronlar için muhafaza edildiği bu formülasyonu, Barut ve Kraus, ve Barut ve Van Huele tarafından geliştirildi. Söz konusu bu çalışmalarda, çiftlenimli Maxwell-Dirac denklemlerinde öz-alanı biçimsel olarak kaynaklar cinsinden yazmanın mümkün olduğu ve geride çizgisel olmayan bir integrodiferansiyel denklemin kaldığı gösterildi.

Bu denklem iterasyona dayalı bir metodla çözülebilmektedir ve bu yolla Lamb-kayması ve kendiliğinden yayma için formüller türetilmiştir. Bu iki süreç, karmal bir enerji kaymasının gerçel ve sanal kısımları olarak ortaya çıkmaktadırlar.

Bu teorinin başlangıçta vurgulanması gereken bir kaç temel görünüşü aşağıdaki şekilde özetlenebilir : ⁽⁴⁾

1) Herşeyden önce, ψ madde alanı birinci-kuantumlanmış bir dalga fonksiyonu ile betimlenir. Lamb kayması ya da anormal manyetik moment gibi bir-cisim problemleri için, ψ alanını kuantumlamak gerekli değildir. A^μ elektromanyetik alanı çiftlenimli Maxwell Dirac denklemlerinden çözülebilir, böylece elektromanyetik alanın kuantumlanması da hesaplara girmemiş olur.

2) Kuantum elektrodinamiğindeki belli başlı problemlerden bir tanesi renormalizasyon işlemini sonlu kılabilme (Renormalizasyon fikri ilk kez Weisskopf (1936) tarafından öne sürüldü. Kütle renormalizasyonu, gözlenen kütleyi oluşturmak üzere elektronun kütlesinin, öz etkileşmesiz bir m_0 mekanik kütlesi ile kendi alanıyla etkileşmesinden kaynaklanan sonsuz bir öz-kütleden oluştuğunu kabul etmektir. Bu işlem, klasik elektrodinamikteki ışınma tepkisinin kuantum mekaniksel karşılığıdır.⁽²⁾)

Beklendiği gibi renormalizasyon işlemi öz-enerjiyle başlayan hesaplamalar ve tedirginme teorisini kullanan hesaplamalar için oldukça farklıdır. Bu teoride, öz-enerji integralleri teorinin parametrelerini renormalize eden terimlerle, sonlu ve gözlenebilir olan diğer terimlere ayrılır.

Öz-enerjiyi içeren çizgisel olmayan denklemler, renormalizasyondan sonra, bağlı durum dalga fonksiyonlarıyla başlayan ve iterasyona dayalı bir işlemle çizgisel hale getirilebilirler. Bu yolla, örneğin Lamb-kayması için Bethe'nin bulduğuna benzer bir formül bulunmuştur. Pratik amaçlar için yeterli olan iterasyonun en düşük mertebesinde, tek sonsuzluk ara durumlardaki sonsuz sayıda çok saçılma durumlarından gelir. Böyle bir sistem için, sonlu sayıda durumlarla (örneğin, iki düzeyli bir atom) tüm sonuçlar sonlu olarak elde edilirler. Eğer durumların genişlikleri dikkate alınırsa, Coulomb problemi için bile teorinin sonlu hale getirileceği umut edilebilir. Dahası, bu formülasyonda hiçbir kırmızıaltı (ıraksama) problemi yoktur. Regülerizasyondan sonra boşluk kutuplanması etkilerini veren ek terimlere sahip olunmaktadır.

(3) Öz-alan KED formülasyonunda, hareket denklemleri yerine bir eylem yardımıyla işe başlanır ve tüm hesaplamalar eylemde gerçekleştirilir. Eyleme dayalı teori daha açık ve daha basittir. Bağlı durum ve saçılma problemleri eylemden hareketle birleşik bir tarzda ele alınabilirler.

Genel olarak, boyutsuz olan eylem, saçılma problemleri için birim uzay ve zaman başına G saçılma genliğine ve bağlı-durum problemleri için de sistemin toplam \mathcal{E} değişmez enerjisine bağlıdır.

(4) Sonuç olarak, bu teoremin önemli bir görünüşü, ışınımsal süreçlerin anlaşılmasına getirdiği sadeliktir. Tüm hesaplamalar, ışınımsal terimlerin de kapalı biçimde tedirginmesiz olarak hesaplanabildiği klasik ışınım teorisine paralel bir biçimde sürdürülür. Kuantum etkileri, ya boşluk dalgalanmalarına sahip kuantumlanmış A^{sp} ışınım alanına ya da Zitterbewegung'a bağlı olarak dalgalanmalara sahip olan elektronun kendisine atfedilebilir. (Işınım alanını kuantum mekaniksel olarak düşündüğümüzde, \vec{E} ve \vec{B} alanları belirsizlik ilkesine uyan $\Delta \vec{E}$ ve $\Delta \vec{B}$ belirsizliklerine sahiptir. Harmonik salınganda en düşük enerjili taban durumun enerjisi tam olarak sıfır olmadığı gibi burada da hiç fotonun bulunmadığı taban durumun \vec{E}_0 ve \vec{B}_0 alanları vardır. Bunlara boşluktaki dalgalanmalar denir.) Burada ikinci yaklaşım izlenmektedir, yani elektronun kendisinin ışınım kaynağı olduğu varsayılr. Böylece ışınım yapan elektron için doğru hareket denklemi, öz-etkileşmesiz bir elektron için yazılan Dirac veya Schrödinger denklemi değildir, Larmor terimiyle klasik olarak ışınım yapan bir elektron için yazılan Lorentz-Dirac denklemi gibi çizgisel olmayan bir öz-enerji terimi eklenmiş bir denklemdir.

1.2. Öz-alan Kuantum Elektrodinamiği Eylemi :

Bu bölümde, öz-alan KED formalizmindeki Lamb kayması, kendiliğinden yayma ve boşluk kutuplanması gibi üç kuantum etkisinin birlikte ortaya çıktığı genel formülün türetilmesinden bahsedilecektir. ^(4,6,7,8) Bu genel formülde kendiliğinden yayma bozunma oranı $\Gamma/2$, karmal bir enerji kaymasının sanal kısmı olarak, Lamb kayması ve boşluk kutuplanması da aynı enerji kaymasının gerçel kısmı olarak gözükürler. Söz konusu formül, kuantum elektrodinamiğinin ($\hbar = c = 1$ ve $dx \equiv d^4x$ olmak üzere)

$$W = \int dx \left[\bar{\Psi} (\gamma^\mu i\partial_\mu - m) \Psi + J^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad 1.2.1$$

eyleminden türetilmektedir. Bu ifadede, ilk terim Dirac elektronunun kinetik eylemidir, burada $\psi(x)$, $x \equiv (t, \bar{x})$ uzay-zaman noktasındaki elektronun birinci-kuantumlanmış madde alanıdır, γ^μ bilinen Dirac γ matrisleridir, m elektronun kütlesidir. İkinci terim elektronun elektromanyetik alanla etkileşmesini tanımlar. Bu terimde, elektron akımı

$$J^\mu = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad 1.2.2$$

ile, toplam elektromanyetik alan

$$A_\mu = A_\mu^e + A_\mu^s \quad 1.2.3$$

ile verilirler.

Burada e ve s üst indisleri, dış ve öz anlamında kullanılmışlardır. A_μ^e dış alanı dinamik bir değişken değildir, A_μ^s öz-alanı yüklerin akımından kaynaklanır, bu yüzden sonsuzda sıfır olur. A_μ^e dış alanının kaynakları ya da dinamiği bu

Onun için öz-alan teorisinde elektromanyetik alan elektron alanından ayrı olarak kuantumlanmamış olsa bile, (Standart KED' nde öyle yapılmaktadır) kaynağı olan elektron tarafından kuantumlanmış olarak yayılır.

(1.2.4) denklemi

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^{(s)} F^{\mu\nu(0)} dx &= \frac{1}{2} \int dx \left[F^{\mu\nu(0)} A_{\mu}^s \right]_{,\nu} - \frac{1}{2} \int dx F_{,\nu}^{\mu\nu(0)} A_{\mu} \\ &= -\frac{1}{2} \int dx F_{,\nu}^{\mu\nu(0)} A_{\mu}^s \end{aligned}$$

ile birlikte (1.2.1) denkleminde kullanılırsa, eylem

$$W = \int dx \left\{ \bar{\Psi} \left[\gamma^{\mu} (i\partial_{\mu} - eA_{\mu}^e) - m \right] \Psi + \frac{1}{2} J^{\mu} A_{\mu}^s \right\} \quad 1.2.5$$

olur. Burada (1.2.5) elde edilirken yüzey integralinin sıfır verdiği düşünülmüştür. Bu A_{μ}^s alanının sonsuzda sıfıra gitmesi demektir. Sonraki adımda, $A_{,\mu}^s = 0$ olduğu kovaryant ayarda,

$$\square A_{\mu}^s = J_{\mu} = -e \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi \quad 1.2.6$$

denkleminin çözümü yani,

$$A_{\mu}^s(x) = -e \int dy D_{\mu\nu}(x-y) \bar{\Psi}(y) \gamma^{\nu} \Psi(y) \quad 1.2.7$$

ifadesi, (1.2.5) denkleminde yerine konarak, A_{μ}^s 'nin eylemden çıkartılması işlemi tamamlanır.

(1.2.7) denkleminde $D_{\mu\nu}(x-y)$ kovaryant ayardaki nedensel Green fonksiyonudur, bu fonksiyonu

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{k^2 + i\epsilon} \quad 1.2.8$$

olarak alırız. Böylece (1.2.5) denklemini

$$W = \int d\mathbf{x} \bar{\Psi}(\mathbf{x}) \left[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu^e) - m \right] \Psi(\mathbf{x}) - \frac{e^2}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \bar{\Psi}(\mathbf{x})$$

$$\times \gamma^\mu \Psi(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{k^2 + i\epsilon} \bar{\Psi}(\mathbf{y}) \gamma_\mu \Psi(\mathbf{y})$$

$$= W_0 + W_1 \quad 1.2.9$$

olur.

Elektron madde alanı ψ 'nin zaman değişkeni cinsinden

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_n \Psi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n x_0} \quad 1.2.10$$

Fourier açılımı (1.2.9) denkleminde yerine konur ve k_0 , y_0 , x_0 zaman integrasyonları gerçekleştirilirse, toplam eylemin çizgisel kinetik enerji kısmı

$$W_0 = 2\pi \sum_n \int d^3\mathbf{x} \bar{\Psi}_n(\bar{\mathbf{x}}) (\gamma^0 E_n - \bar{\gamma} \cdot \bar{\mathbf{p}} - e\gamma^\mu A_\mu^e - m) \Psi_n(\bar{\mathbf{x}}) \quad 1.2.11 \text{ a.}$$

çizgisel olmayan öz-enerji kısmı ise

$$W_1 = -2\pi \frac{e^2}{2} \sum_{n,m,r,s} \delta(E_n - E_m + E_r - E_s)$$

$$\begin{aligned}
& \int d^3 x \bar{\Psi}_n(\bar{x}) \gamma^\mu \Psi_m(\bar{x}) \int d^3 y \bar{\Psi}_r(\bar{y}) \gamma_\mu \Psi_s(\bar{y}) \\
& \times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\bar{x} - \bar{y})}}{2} \left[i \frac{\pi}{k} \left[\delta(E_r - E_s + k) + \delta(E_r - E_s - k) \right] \right. \\
& \left. + P \frac{1}{2k} \left[\frac{1}{E_r - E_s - k} - \frac{1}{E_r - E_s + k} \right] \right] \quad 1.2.11 \text{ b.}
\end{aligned}$$

olacaktır. Bu ifadeler elde edilirken Dirac delta fonksiyonlarının integral tanımından ve,

$$\frac{1}{(E_n - E_m)^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \left[\frac{1}{E_n - E_m - k} - \frac{1}{E_n - E_m + k} \right]$$

ve

$$\frac{1}{E_n - E_m - k} = P \frac{1}{E_n - E_m - k} - i\pi\delta(E_n - E_m - k)$$

bağıntılarından yararlanıldı. (1.2.11 b.) denkleminde p integralin esas değerini göstermektedir ve \oint sistemin spektrumunun kesikli durumları üzerinden toplamayı ve sürekli durumları üzerinden integral almayı işaret eder.

$$E_n - E_m = \omega_{nm} \quad \text{ve}$$

$$E_r - E_s = \omega_{rs} \quad \text{olmak üzere,}$$

şimdi, $\delta(\omega_{nm} + \omega_{rs})$ şeklindeki δ fonksiyonu iki seçimle sağlanabilir;

- (1) $\omega_{nm} = 0$, bu yüzden $\omega_{rs} = 0$,
ya da
(2) $\omega_{nm} = \omega_{rs}$

Bu seçimlerle W_1 eylemi

$$\begin{aligned}
W_1 = & -2\pi \frac{e^2}{2} \int_{n,s} d^3x \bar{\Psi}_n(\bar{x}) \gamma^\mu \Psi_n(\bar{x}) \int d^3y \bar{\Psi}_s(\bar{y}) \gamma_\mu \Psi_s(\bar{y}) \\
& \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\bar{k} \cdot (\bar{x}-\bar{y})} \left[\frac{i\pi}{2k} [\delta(k) + \delta(-k)] + p \frac{1}{2k} \left[-\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right] \right] \\
& - 2\pi \frac{e^2}{2} \int_{n,s} d^3x \bar{\Psi}_n(\bar{x}) \gamma^\mu \Psi_s(\bar{x}) \int d^3y \bar{\Psi}_s(\bar{y}) \gamma_\mu \Psi_n(\bar{y}) \\
& \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\bar{k} \cdot (\bar{x}-\bar{y})} \left[\frac{i\pi}{2k} [\delta(E_s - E_n + k) + \delta(E_s - E_n - k)] \right. \\
& \left. + p \frac{1}{2k} \left[\frac{1}{E_s - E_n - k} - \frac{1}{E_s - E_n + k} \right] \right] \tag{1.2.12}
\end{aligned}$$

olur. (1.2.12) denklemindeki ilk terim, yani

$$\delta(k) + \delta(-k) = 2\delta(k)$$

terimi, k üzerinden integrasyonun bir sonucu olarak katkıda bulunmayacaktır.

Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta vardır; ilk δ fonksiyonu yani

$$\delta(E_s - E_n + k), \quad E_n \rangle E_s$$

olduğunu belirtir ve bu yüzden bu terim n durumunun daha düşük enerjili s durumlarına bozunmasına karşılık gelir. Diğer yandan ikinci δ fonksiyonu, aynı şekilde, n durumundaki bir atomun onu daha yüksek s durumlarına çıkaracak şekilde ışınım soğurmasına karşılık gelir. İkinci δ fonksiyonu foto uyarma görüngüsü incelenirken kullanılır. Yani yayma olayı incelenirken ilk δ fonksiyonu, soğurma durumunda ikinci δ fonksiyonu katkıda bulunur.

(1.2.12) denklemiyle verilen W_1 eylemine ulaştıktan sonra, iki şey yapılabilir; toplam eylemi minimize ederek hareket denklemleri türetilir ve böylece enerjiler ve dalga fonksiyonları için elde edilen çiftlenimli Hartree-tipi denklemler çözülebilir. Veya bundan sonra yapılacağı gibi, hareket denklemlerini bulur ve onları eylemde yerine koyarsak, eylem $W = 0$ olan minimum değerini sağlayacaktır. Diğer bir deyişle, bizim problemimizin tam bir çözümü

$$W_0 + W_1 = 0$$

yapacak şekilde $\{\psi_n(\bar{x})\}$ dalga fonksiyonlarının kümesini bulmak olacaktır. Şimdi, e^2 ile orantılı karesel olmayan W_1 öz-enerji kısmının yokluğunda, W_0 , dinamik olmayan A_μ^e dış alanındaki bir elektronun Dirac denkleminin çözümleri için minimum (sıfır) olur.

Bu yüzden, eğer, $\{\psi_n(\bar{x})\}$ için Dirac denkleminin böyle bir alandaki $\{E_n^{(0)}\}$ enerji özdeğerli çözümlerinin $\{\Psi_n^{(0)}(\bar{x})\}$ tam kümesini alır ve

$$E_n = E_n^{(0)} + \Delta E_n$$

yazarsak, eylemin birinci iterasyonu W_0 'a, $2\pi \sum_n \Delta E$ terimi kadar katkıda bulunacaktır ve W_1 , $\{\Psi_n^{(0)}(\bar{x})\}$ fonksiyonlarıyla değerlendirilir. Böylece eylemin ilk iterasyonda sıfır olmasından,

$$W_1^{(1)} = - 2\pi \sum_n \Delta E_n \quad 1.2.13$$

elde ederiz. $W_1^{(1)}$ eylemindeki üst işaret birinci iterasyonu işaret etmektedir.

Özel olarak bu çalışmada A_μ^e , düzgün manyetik alanı verecek dış potansiyeldir ve $\{\Psi_n^{(0)}(\bar{x})\}$ göreli Landau yörüngelerinin öz-durumları ve $\{E_n^{(0)}\}$ bu öz-durumlara karşılık gelen enerji özdeğerleridir. (1.2.12) ve (1.2.13) denklemlerinden aşağıdaki fiziksel yorumlara sahip üç terimin bir toplamı şeklinde n. enerji seviyesindeki kaymayı belirleriz. (Bundan sonra $\Psi_n^{(0)}(\bar{x})$ 'deki (0) üst indisini kullanmıyoruz.)

(1) Boşluk Kutuplanması :

$$\Delta E_n^{\text{BK}} = - \frac{e^2}{2} \int_s d^3 x \bar{\Psi}_n(\bar{x}) \gamma^\mu \Psi_n(\bar{x}) P \left[\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\bar{k} \cdot (\bar{x}-\bar{y})}}{k^2} \right] \int_s d^3 y \bar{\Psi}_s(\bar{y}) \gamma_\mu \Psi_s(\bar{y}) \quad 1.2.14$$

(2) Kendiliğinden Yayma ve Soğurma :

$$\Delta E_n^{\text{KY}} = - \frac{e^2}{2} \int_s d^3 x \bar{\Psi}_n(\bar{x}) \gamma^\mu \Psi_s(\bar{x}) \int_s d^3 y \bar{\Psi}_s(\bar{y}) \gamma_\mu \Psi_n(\bar{y}) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\bar{k} \cdot (\bar{x}-\bar{y})} \frac{i\pi}{2k} \left[\delta(E_s - E_n + k) + \delta(E_s - E_n - k) \right] \quad 1.2.15$$

(3) Lamb Kayması :

$$\Delta E_n^{LK} = \frac{e^2}{2} \int_s \bar{\Psi}_n(\bar{x}) \gamma^\mu \Psi_s(\bar{x}) \int d^3 y \bar{\Psi}_s(\bar{y}) \gamma_\mu \Psi_n(\bar{y}) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\bar{k} \cdot (\bar{x}-\bar{y})}}{2k} P \left[\frac{1}{E_s - E_n - k} - \frac{1}{E_s - E_n + k} \right] \quad 1.2.16$$

Görüldüğü gibi enerji kaymasının sanal kısmı, kendiliğinden yayma ve soğurmanın enerji kaymasına katkısını vermektedir. (Bu n. düzeyin çizgi genişliği ya da enerjisine gelen belirsizliktir.)

Bu bölümde son olarak dikkat edilecek şey ΔE_n^{KY} 'nin n. düzeyin bozunma oranıyla ilişkisidir. ϵ enerjili bir sistemin atomik durumu zaman içerisinde bozunduğunda, bu durumun dalga fonksiyonunun zamana bağlılığı

$$e^{-i(\epsilon - i\Gamma/2)t} = e^{-i\epsilon t} e^{-\Gamma/2t}$$

ile verilir. Burada Γ durumun bozunma oranıdır, ya da Γ 'nın tersinin iki katı ortalama yarı-ömrünü verir. Bir diğer deyişle

$$\Gamma = -2\text{Im}(\epsilon) \quad 1.2.17$$

şeklindedir. Böylece (1.2.15) denkleminde doğru δ fonksiyonunu alarak ve (1.2.17) denklemini de kullanarak, n. düzeyin bozunma oranı için aşağıdaki genel formülü elde ederiz.

$$\Gamma_n = -e^2 \int_s \int d^3 x \bar{\Psi}_n(\bar{x}) \gamma^\mu \Psi_s(\bar{x}) \int d^3 y \bar{\Psi}_s(\bar{y}) \gamma_\mu \Psi_n(\bar{y}) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\bar{k} \cdot (\bar{x}-\bar{y})} \frac{\pi}{2k} \delta(E_s - E_n + k) \quad 1.2.18$$

Bir n durumunun toplam bozunma oranı, enerjisi E_n 'den daha küçük olan tüm s durumlarına bozunma oranlarının evre-dışı (inkoherent) bir toplamıdır. Sadece taban durumu kararlıdır. Tüm diğer $\Psi_n^{(0)}(\bar{x})$ durumları (bu durumlar toplam Hamiltoniyenin gerçek öz durumları değildir, yaklaşık öz durumlarıdır.) kaymalara neden olurlar ve kararsızdırlar.



Bölüm : 2. KENDİLİĞİNDEN YAYMA ⁽⁹⁾ :

Bizi çevreleyen ışığın büyük kısmı "kendiliğinden yayma" görüngüsünden kaynaklanır. Kendiliğinden yayma, atomun uyarılmış duruma nasıl geçtiğine bağlı olarak değişen isimlerle anılan görüngülerin ana başlığıdır. Örneğin atomlar veya moleküller ısıtma yoluyla değil de başka bir yolla uyarılırlarsa, kendiliğinden yayma olayı "ışıldama" (luminescence) olarak, atomun uyarılması ışınımın soğurulması ile gerçekleşirse kendiliğinden yayma "flüorışılık" (fluorescence) olarak adlandırılır. Bazen moleküller yarı kararlı bir seviyeye sahiptirler ve uyarma ışınımı kapatıldığı zaman bile ışımaya devam ederler, bu "fosforışılık" tır (phosphorescence). Güneş ideal bir siyah cisim ışıyıcısıdır ve yaydığı görünür ışığın çoğunun "kendiliğinden yayma" ya bağlı olduğu hesaplanabilir.

Şüphesiz, lazerler uyarılmış yayma ile ışık üretirler. Buna rağmen, bir lazer açıldığı zaman ilk önce uyarılan fotonlar kendiliğinden yaymanın sonucunda bunu yaparlar.

Uyarılmış bir atomun neden ışımaya yaptığı, bunun klasik ve klasik olmayan görünümlerinin neler olduğu, hangi fiziksel gösterimin bu görüngüyü açıklayabildiği soruları uzun zamandan beri yanıtlanmaya çalışılmaktadır.

Hertz'in 1887'deki deneyleri titreşen yüklerin ışımaya yaptığını gösterdi. Lorentz'in ışık ve madde teorisinde atomik ışımaya atomik elektronlara atfedildi. Bunların neden sadece belirli frekanslarla ışımaya yaptıklarını anlamamanın yolu yoktu. Sonra, bir atomun yayma ve soğurma frekansları, elektronların bağlanması ile ilişkili "yay sabitleri" yoluyla teoriyle alındı. Bunların hepsi 1913'de hidrojen atomunun Bohr teorisiyle değişti.

Bohr kendiliğinden yayma görüngüsünde klasik olmayan bir görünüşe işaret etti, ona göre "kendiliğinden", "nedensiz" demektir. Ve uyarılmış bir atomun ne zaman bir kuantum atlaması yapacağı ve bir foton yayacağı bilinmiyordu. Kendiliğinden yaymanın klasik olmayan diğer görünümleri Einstein tarafından 1917'de ortaya kondu. Einstein, atomun kendiliğinden yayma nedeniyle geri tepmesi gerektiği neticesine vardı. Bu geri tepme klasik olarak anlaşılabilir, çünkü klasik olarak bir atom tarafından ışınan alan çizgisel momentum taşımaz. Einstein'a göre "küresel dalgalar formunda çıkan ışımaya varılmaz". Çünkü eğer bir atom klasik küresel bir dalga ışıdıysa, geri tepmeyebilirdi.

Einstein termodinamik argümanlar yardımıyla kendiliğinden yayma ve uyarılmış yayma katsayılarının A/B oranını türetti. A katsayısını ilk prensiplerden doğrudan türetmeyi başaran kişi Dirac oldu, Dirac yeni formüle edilmiş kuantum ışımaya teorisini kullandı. Kendiliğinden yaymanın klasik elektromanyetizma çerçevesinde tatmin edici bir teorisi asla sunulmadı.

Kuantum elektrodinamiğinin hangi fiziksel gösteriminin kendiliğinden yaymayı açıklayabileceği sorusuna, bununla ilgili zengin literatürde aşağıdaki iki cevap bulunabilir :

(i) Daha eski olan cevap, kendiliğinden yayma görüngüsünü klasik olarak aşına olduğumuz ışımaya tepkisi ile birleştirmek şeklinde olanıdır. Dirac makalesinde "kendiliğinden yaymanın doğru bir tanımını verdiği için, şimdiki teori ışımaya tepkisinin yayma yapan sistem üzerindeki etkisini muhtemelen vermek zorundadır" diye yazmıştı. Böyle bir yorum aynı yıl Landau tarafından basılan bir makalede ve karşılığı bulunma ilkesini kullanan Van Vleck'in daha önceki bir makalesinde açıkça ifade edildi.

(ii) Daha sonra farklı bir cevap ortaya çıktı. Lamb kayması hakkındaki çalışmalar, bir enerji düzeyindeki Lamb kaymasının - ve aynı zamanda kendiliğinden yayma olayına bağlı doğal çizgi genişliğinin - elektromanyetik alanın kuantum-mekaniksel sıfır-nokta dalgalanmalarına atfedilebileceği fikrine götürdü.⁽¹⁰⁾

1948'de basılan bir makalesinde, Welton kendiliğinden yayma görüngüsünün "dalgalanan alanın etkisi altında oluşan zorlanımlı yayma" olarak düşünölebileceğini yazdı.

Zamanla, bu iki bakış açısının aynı olduğu anlaşıldı. Işıma tepkisi (radiation reaction) ve sıfır-nokta alanları oldukça yakın bir ilişkiyi paylaşırlar⁽²⁾. Bir elektrik devresindeki Nyquist-Johnson gerilim farkı dalgalanmaları nasıl dirence bağılysa, sıfır-nokta alanının dalgalanmaları da ışımısal dirence (yani ışımaya tepkisine) bağılıdır. Callen ve Welton tarafından ortaya konan dalgalanma-yitim (fluctuation-dissipation) teoremi eğer bir ışımaya tepkisi alanı varsa, mutlaka bir sıfır-nokta alanının da olması gerektiğini ve bunun tersinin de doğru olduğunu söyler.



Bölüm : 3. SABİT BİR MANYETİK ALANDAKİ BİR ELEKTRONUN HAREKETİ : (2)

Yaklaşık 100 yıl kadar önce Lienard, dairesel hareket yapan bir elektronun, etkisinde kaldığı güçlü merkezci ivmeye bağlı olarak, yoğun ışın yapacağı sonucuna varmıştır. Merkezci ivmenin düzgün bir manyetik alan tarafından oluşturulduğu bir teori, Schott tarafından geliştirildi. Klasik olarak enerjinin hangi oranda ışınacağı, Larmor'un bu problem için bulduğu formülle verilir. Bu formül, göresiz olarak,

$$W = \frac{2}{3} r_0^2 \frac{v^2}{c} B^2 \quad 3.1$$

veya yüksek enerjilerde

$$W = \frac{2}{3} r_0^2 c B^2 (E/mc^2)^2 \quad 3.2$$

şeklindedir. Burada $r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2}$ klasik elektron yarıçapıdır. Bu çalışmalar, yüzyılın başındaki ışın tepkisi hakkındaki gelişmelerle yakından ilgiliydiler, çünkü enerji korunumu gereksinimleri ışınan enerjinin nasıl dengeleneceği sorusunu ortaya çıkardı. Şimdi, klasik hareket denklemlerindeki \ddot{z} ışınım tepki teriminin, parçacığın ışın yaparken başlangıç noktasına doğru spiral hareketi yapmasını sağlayacak şekilde dairesel yörüngelerin küçülmesine neden olduğu biliniyor.

Yine yaklaşık 40 yıl kadar önce, sinkrotronlardaki enerji kaybı soruları önemli olmaya başladığı zaman ve daha sonraları sinkrotron ışınması astrofizikte önemli bir ilgi alanı olduğunda, bu görüngü sadece bir merak konusu olmaktan öteye geçti. Bunun sonucu olarak, teori dikkate değer bir incelikle geliştirildi.

Galaksilerden yayılan ısısal olmayan ışımının kaynağının manyetik alanlarda hareket eden yüklü kozmik parçacıkların sinkrotron ışımından kaynaklandığına inanılmaktadır.⁽³⁾ Pulsarlarla ilgili son çalışmalar nötron yıldızlarında muhtemelen $10^{12} - 10^{14}$ Gauss mertebesinde manyetik alanların var olduğunu ve pulsarların yaydığı ışığa sinkrotron ışımının katkıda bulunabileceğini gösterdi. Bu yüzden, yüksek manyetik alanlardaki yüklü parçacıkların yaydığı ışımının araştırılması astrofizikte büyük öneme sahiptir. Dahası, sabit bir manyetik alandaki yüklü parçacıkların hareketiyle ilgili çalışmalar teorik anlamda büyük ilgi konusu olmuştur, çünkü bu hareket tam olarak çözülebilir.^(3,11,12)

Astrofizikte sinkrotron ışımasıyla ilgili çalışmalar megagauss mertebesinde manyetik alanlar (1.5 - 3.0 MG) ve yüksek enerjili elektronlarla (150-300 BeV) gerçekleştirilmektedir.

Sinkrotron ışımının kuantım fiziğindeki karşılığı "kendiliğinden yayma" görüngüsüdür. Böylece, sinkrotron ışımasıyla ilgili bir çalışma, kendiliğinden yayma görüngüsünü açıklamak için çok uygundur.⁽¹³⁾

Kuantum teorisinde yüklü bir parçacığın sabit bir manyetik alandaki hareketi pek çok bilim adamı tarafından ele alınmıştır. Yukarıda bahsedildiği gibi pek çok deneysel ve teorik teknik Dirac parçacığının bir \vec{B} dış manyetik alanındaki davranışıyla yakından ilgilidir, ve bu problemin değişik görünümlerini araştırmak bu nedenle uygundur. Birkaç klasik süreçle ilişkili olması nedeniyle, Heisenberg gösterimindeki bazı genel ifadelerle probleme giriş yapılabilmektedir. Böyle çalışmalar, ilk olarak Johnson ve Lippmann tarafından geliştirilmiştir.^(11,12)

Sisitemin tam olarak anlaşılması, Heisenberg denklemlerini durgun ve düzgün bir dış manyetik alandaki Dirac parçacığının kararlı durumlarının çalışılmasıyla tamamlayarak sağlanır.

Şimdi, $A_\mu(x)$ potansiyeliyle tanımlanan bir dış (klasik) elektromanyetik alanla bir Dirac parçacığının etkileşmesine bakalım.

Bunun için, serbest elektron için yazılan

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) = 0 \quad 3.3$$

Dirac denkleminde ∂_μ yerine $\partial_\mu + ieA_\mu$ yazılır. Burada γ^μ Dirac γ matrislerinin notasyonunu gözden geçirmek yararlı olacaktır.

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta \\ \gamma^i &= \beta \alpha^i \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3 \quad 3.4$$

Açık bir gösterim

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} & \gamma^j &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} & \alpha^j &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 3.5$$

Şeklinde 2×2 'lik birim I matrisleri ve Pauli σ^i matrisleri ile sağlanır. Bu gösterim Dirac denkleminin giresiz limitinde yararlıdır.

Böylece bir dış alandaki bir elektron için Dirac denklemi

$$(i \partial_\mu \gamma^\mu - e A_\mu \gamma^\mu - m) \Psi(x) = 0 \quad 3.6$$

olur.

Burada

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right)$$

olmak üzere dörtlü momentum vektörü, m elektronun kütesidir. (3.6) denklemini böylece daha açık bir şekilde

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \left[\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + \beta m + eA_0 \right] \Psi \\ &= (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \Psi + (-e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + eA_0) \Psi \\ &= (H_0 + H_{\text{ek}}) \Psi \end{aligned} \quad 3.7$$

olarak yazılabilir. H_{ek} ile gösterilen etkileşme Hamiltoniyeninin, $\vec{\alpha}$ 'nın bir hız işlemcisi olarak sunulmasıyla uyum içerisinde, bir dış alandaki klasik parçacığın

$$-e\vec{v} \cdot \vec{A} + eA^0$$

şeklindeki Hamiltoniyeniyle benzerliğine dikkat edelim. Heisenberg gösteriminde, herhangi bir O işlemcisi

$$\frac{d}{dt} O(t) = i[H, O(t)] + \frac{\partial O}{\partial t} \quad 3.8$$

hareket denklemini sağlar. Böylece, burada, $\vec{\pi}$ konum işlemcisi ve ayar-değişmez (gauge-invariant) $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$ momentumu

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A^0$$

3.9

$$\vec{B} = \text{dön} \vec{A}$$

olmak üzere

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = i [H, \bar{r}] = \bar{\alpha} \quad 3.10$$

$$\frac{d\bar{\pi}}{dt} = i [H, \bar{\pi}] - e \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = e (\bar{E} + \bar{\alpha} \times \bar{B}) \quad 3.11$$

denklemlerini sağlarlar. İkinci denklem Lorentz kuvveti denkleminin işlemci karşılığıdır.

Bu denklemlerin göresiz limitine bakarsak, $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ yazarız ve

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

gösterimini kullanırız. Böylece (3.7) denkleminde

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\pi} \chi + eA^0 \varphi + m\varphi$$

3.12

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\pi} \varphi + eA^0 \chi - m\chi$$

Çiftlenimli denklemlerine ulaşırız. Göresiz limitte, büyük mc^2 enerjisi ($c = 1$) (3.12)' de sürücü terimdir. Zamanın yavaş değişen fonksiyonları olan Φ ve X 'i sunalım :

$$\begin{aligned}\varphi &= e^{-imt} \Phi \\ \chi &= e^{-imt} X\end{aligned}\tag{3.13}$$

Bu spinörler

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} X + eA^0 \Phi\tag{3.14}$$

$$i \frac{\partial X}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Phi + eA^0 X - 2mX$$

denklemlerini sağlarlar.

Eğer $eA^0 \ll 2m$ olduğunu varsayarsak ikinci denklem yaklaşık olarak

$$X \cong \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \Phi \ll \Phi\tag{3.15}$$

biçiminde çözülür ve bu ifade 3.14'ün ilk denkleminde yerine konursa

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 \right] \Phi\tag{3.16}$$

Pauli denklemini elde edilir. Bu, φ ve χ için (ya da sırasıyla Φ ve X) büyük ve küçük bileşen ifadelerinin kullanımını haklı kılar. (3.16) denkleminde olduğu gibi, bu bir elektromanyetik alan içerisindeki Schrödinger denkleminin spinörlere genelleştirilmesidir.

Biraz cebirle;

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = \sigma_i \sigma_j \pi^i \pi^j = \pi^2 + \frac{1}{4} [\sigma_i, \sigma_j] [\pi^j, \pi^i] = \pi^2 - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\tag{3.17}$$

ve

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\bar{p} - e\bar{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m} \bar{\sigma} \cdot \bar{B} + eA^0 \right] \Phi \quad 3.18$$

yazabiliriz. Spine bağıllık sadece $\bar{\sigma} \cdot \bar{B}$ manyetik etkileşmesi yoluyla. \hbar ve c sabitlerini de kullanarak,

$$H_{\text{spin}} = - \frac{e\hbar}{2mc} \bar{\sigma} \cdot \bar{B} = -\bar{\mu} \cdot \bar{B} \quad 3.19$$

yazarız. Burada $\bar{\mu}$ manyetik momenti

$$\bar{\mu} \equiv \frac{e}{mc} \frac{\hbar \bar{\sigma}}{2} = 2 \left(\frac{e}{2mc} \right) \bar{S} \quad 3.20$$

olarak tanımlanır. \bar{S} spin işlemcisi $\frac{\hbar \bar{\sigma}}{2}$ 'dir. Tanıma göre g jiromanyetik oranı 2'dir.

Bu Dirac teorisinin açık olmayan bir öngörüsüdür, ve Pauli denkleminin göreli olmayan formu içerisinde türetilir. $|\bar{\mu}|$ nün gerçek değeri

$$|\bar{\mu}| = \frac{e\hbar}{2mc} = 5.79 \times 10^{-9} \text{ ev/G} \quad 3.21$$

şeklindedir. Işınımsal düzeltmeler g 'nin deneysel olarak ölçülen değerini çok küçük bir miktarda etkiler.

Eğer $\bar{A} = \frac{1}{2} \bar{B} \times \bar{r}$ seçerek düzgün bir $\bar{B} = \text{dön } \bar{A}$ manyetik alanını gözönüne alırsak, ve A 'daki kuadratik terimi ihmal edersek (zayıf alan yaklaşımı), (3.18) Pauli denklemini daha da indirgenebilir.

Sonuç olarak

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[\frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\bar{L} + 2\bar{S}) \cdot \bar{B} \right] \Phi \quad 3.22$$

denklemini elde ederiz. Burada $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$ yörüngesel açısal momentum işlemcisidir.

3.1 - Görelî ve Göresiz Limitlerinde

Landau Yörüngelerinin Kartezyen Koordinatlardaki İfadesi ^(14,15) :

Sabit manyetik alanı verecek şekilde vektör potansiyeli $\vec{A} = (-yB, 0, 0)$ olarak da seçebiliriz. Bu durumda

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\bar{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - eV + \frac{e}{mc} \bar{S} \cdot \bar{B} \right] \Psi = E \Psi \quad 3.1.1$$

şeklindeki Pauli denklemi

$$\left[c^2 \bar{p}^2 + e^2 B^2 y^2 - ecB (\hbar \sigma_z - 2yp_x) \right] \Psi = 2mc^2 E \Psi \quad 3.1.2$$

olur. ψ , 2-bileşenli bir spinör dalga fonksiyonudur. Yükü $e = Z | e |$ olarak yazacağız ve bundan sonraki işlemlerde

$$\gamma \equiv (|e| B \hbar c)^{1/2} \quad 3.1.3$$

parametresini kullanacağız.

3.1.2. denklemine göre p_x ve p_z hareket sabitleridirler, o halde

$$\Psi(\vec{r}) = e^{i(xp_x + zp_z)/\hbar} f(y) \quad 3.1.4$$

biçiminde bir çözüm önerilebilir. Bu çözümün (3.1.2) denkleminde yerine konmasıyla $f(y)$ spinörü için bir denklem elde edilir. Aşağıdaki şekilde değişken değiştirirsek yani

$$\eta \equiv \left(\frac{|e|B}{\hbar c} \right)^{1/2} \left(y + \frac{cp_x}{Z|e|B} \right) \quad 3.1.5$$

tanımlayıp y yerine bunu kullanırsak, (3.1.2) denklemini

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - \eta^2 + a + Z\sigma_z \right) f(\eta) = 0 \quad 3.1.6$$

olur. Burada

$$a = \frac{2mc^2 E - c^2 p_z^2}{\gamma^2} \quad 3.1.7$$

şeklindedir. 2-bileşen denklemini daha da sadeleştirmek için f yi σ_z ' nin bir öz fonksiyonu olarak gerçekleştirilir:

$$\sigma_z f_s = s f_s \quad s = \pm 1 \quad 3.1.8$$

Böylece denklem;

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \eta^2 + (a + Zs) \right] f_s = 0 \quad s = \pm 1 \quad 3.1.9$$

olur. Bu denklem çizgisel harmonik titreşici için Schrödinger denklemdir.

Bize

$$E_{n,s} = \frac{1}{2mc^2} [c^2 p_z^2 + (2n + 1 - Zs) \gamma^2], \quad n = 0, 1 \dots \quad 3.1.10$$

enerji özdeğerlerini verir.

Bu enerji özdeğerlerine karşılık gelen düzeyler, Landau düzeyleri olarak adlandırılırlar. Çözümler $H_n(\eta)$ Hermite polinomları cinsinden elde edilir:

$$f_s(\eta) = e^{\frac{1}{2}\eta^2} H_n(\eta) P_s \quad 3.1.11$$

burada

$$P_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_{-1} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3.1.12$$

şeklinde verilirler. Bunlar aynı zamanda

$$\sigma_x P_s = P_{-s}, \quad \sigma_y P_s = isP_{-s}, \quad \sigma_z P_s = sP_s \quad 3.1.13$$

şartlarını da sağlayan spinörlerdir. (4) denklemini

$$\Psi_{n,s}(\vec{r}) = C_{n,s} e^{i(s\varphi_x + \varphi_z)/\hbar} e^{\frac{1}{2}\eta^2} H_n(\eta) P_s \quad 3.1.14$$

genel çözümünü yazmamızı sağlar. $C_{n,s}$ normalizasyon sabitidir.

Hareket, alana dik bir biçimde kuantumlanmıştır ve enerji düzeyleri eşit aralıklıdır.

Şimdi de sabit bir manyetik alandaki görelî bir elektronun enerji düzeylerini belirleyelim. \vec{B} alanını z eksenî boyunca alalım. Bu şekilde bir manyetik alanı verecek vektör potansiyelin bileşenleri $A^0 = A^x = A^z = 0$ ve $A^y = B_x$ seçilebilir.

E enerjili kararlı bir $\Psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ çözümünü için (3.12) denklemleri

$$(E - m) \varphi = \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \chi \quad 3.1.15$$

$$(E + m) \chi = \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \varphi$$

verirler. χ 'nin bu denklemlerden elenmesi φ için yazılan

$$\begin{aligned} (E^2 - m^2) \varphi &= [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})]^2 \varphi = [(\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}] \varphi \\ &= [\vec{p}^2 + e^2 B^2 x^2 - eB (\sigma_z + 2xp_y)] \varphi \end{aligned} \quad 3.1.16$$

denklemini verir. Bu bir harmonik titreşiminin Hamiltoniyenidir. p_y , p_z ve σ_z sağ tarafla komüt olduklarından, çözümleri

$$\varphi(\vec{x}) = e^{i(p_y y + p_z z)} f(x) \quad 3.1.17$$

formunda önerebiliriz. Burada $f(x)$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + (eBx - p_y)^2 - eB\sigma_z \right] f(x) = (E^2 - m^2 - p_z^2) f(x) \quad 3.1.18$$

denklemini sağlar.

B'nin işaretini $eB_0 > 0$ olacak şekilde seçerek ve

$$\xi = \sqrt{eB} \left(x - \frac{p_y}{eB} \right) \text{ de\u0131\u015fkeniyle}$$

3.1.19

$$a = \frac{E^2 - m^2 - p_z^2}{eB}$$

ifadesini kullanarak 3.1.18 denklemini

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 - \sigma_z \right) f = af \quad 3.1.20$$

denklemine indirgeriz. f , σ_z 'nin $\alpha = \pm 1$ özde\u011ferleri i\u00e7in

$$\alpha = 1 \text{ i\u00e7in } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -1 \text{ i\u00e7in } f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{-1} \end{pmatrix} \quad 3.1.21$$

olacak \u015fekilde bir \u00f6zvekt\u00f6r olarak alınırsa, f_α ,

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \right) f_\alpha(\xi) = - (a + \alpha) f_\alpha(\xi) \quad \alpha = \pm 1 \quad 3.1.22$$

denklemini sa\u011flar. Sonsuzda s\u0131fır olan \u00e7\u00f6z\u00fcm bir $H_n(\xi)$ Hermite polinomu cinsinden ifade edilerek, genel \u00e7\u00f6z\u00fcm

$$f_\alpha = C e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \quad 3.1.23$$

\u015feklinde elde edilir. Bu arada n ; 0, 1, 2, tamsayı de\u011ferlerini almak \u00fczere

$$a + \alpha = 2n + 1$$

\u015fart\u0131 sa\u011flanır. Bu y\u00fczden enerji d\u00fczeyleri

$$E^2 = m^2 + p_z^2 + eB(2n + 1 - \alpha) \quad 3.1.24$$

olarak elde edilirler. Bu enerji düzeylerine karşılık gelen dalga fonksiyonları kolayca yazılabilir. Düzeyler kesikli ($n, \alpha = -1$; $n + 1, \alpha = 1$) ve sürekli (p_y 'de) katmerliliğin her ikisine birden sahiptirler. Sürekli düzeylerin katmerliliği sonlu bir kutudaki parçacığı gözönüne alarak kesikli katmerliliğe indirgenebilir.

3.2. Görelî Landau Yörüngelerinin Silindirik Koordinatlardaki İfadesi⁽¹⁶⁾ :

Şimdiye kadar yapılan hesaplarda göresiz ve görelî limitte Landau yörüngelerinin kartezyen koordinatlardaki ifadesi elde edilmiştir. Görelî Landau yörüngelerinin kendiliğinden yayma bozunma oranının hesaplanmasını amaçlayan bu çalışmada, söz konusu fiziksel sistemin silindirik simetrisi göz önünde bulundurularak, Landau yörüngelerinin öz-durumlarının silindirik koordinatlardaki ifadesi kullanılacaktır.

Bunun için önce, herhangi bir dış alan içerisindeki bir elektron için kovaryant formdaki ($\hbar = c = 1$ olmak üzere)

$$(\gamma^\mu \pi_\mu - M) \Psi(x) = 0 \quad 3.2.1$$

Dirac denklemini yazalım. Burada γ^μ , uzay ve zaman kısmı sırasıyla $(\gamma^0, -\vec{\gamma})$ olmak üzere Dirac γ matrisleri, π_μ yine uzay ve zaman kısmı

$$(\pi_0, \vec{\pi}) \equiv (p_0 - eA_0, \vec{p} - e\vec{A})$$

olmak üzere dördü momentum vektörü, M elektronun kütesidir. A_0 skaler ve \vec{A} vektörel potansiyel olmak üzere A_μ dış alanı temsil eden dördü-vektör, $\psi(x)$ 'de konum $(x_0 = t, \vec{x})$ dördü vektörüne bağlı olarak elektronu betimleyen dalga fonksiyonudur. 3.1'deki hesaplara benzer bir biçimde, $A_\mu = 0$, yani dış alanın olmadığı durum için

$$(E - M) \varphi = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi$$

3.2.2

$$(E + M) \chi = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi$$

çiftlenimli denklemleri elde edilir. Bunlar elde edilirken

$$\Psi(x_0, \vec{x}) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad 3.2.3$$

seçilmiştir. $\varphi(\vec{x})$ ve $\chi(\vec{x})$ 'in (φ_{\pm} , Dirac denkleminin pozitif enerjili; χ_{\pm} , negatif enerjili çözümleridirler. \pm işareti parçacık spininin yönelimini göstermektedir.)

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}, \quad \chi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}$$

şeklindeki iki-bileşenli ifadeleri 3.2.2 denkleminde yerlerine konularak

$$(E - M) \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}$$

3.2.4 a,b

$$(E + M) \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}$$

denklemlerine ulaşılır. Daha açık bir biçimde, tek tek bileşenler cinsinden

$$\varphi_+ = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E - M)} \chi_+ \quad \varphi_- = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E - M)} \chi_-$$

3.2.5

$$\chi_+ = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E + M)} \varphi_+ \quad \chi_- = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E + M)} \varphi_-$$

yazabiliriz. Örneğin; $(E - M) \varphi_+ = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_+$ denkleminde χ_+ 'nın φ_+ cinsinden ifadesi yerine konursa

$$(E - M) \varphi_+ = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E + M)} \varphi_+ \quad 3.2.6$$

denklemini, ya da bütün bileşenlerin sağladığı denklemler 3.2.6 formunda olacağından, genel olarak

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \varphi_i = (E^2 - M^2) \varphi_i \quad 3.2.7$$

ifadesini elde ederiz. $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2$ hesaplanırken

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma^i p_i \sigma^j p_j \quad 3.2.8$$

ifadesinde

$$(\sigma^1)^2 = (\sigma^2)^2 = (\sigma^3)^2 = 1, \quad \sigma^1 \sigma^2 = -\sigma^2 \sigma^1$$

$$p_1 p_2 = p_2 p_1$$

$$p_1 p_3 = p_3 p_1$$

$$p_2 p_3 = p_3 p_2$$

3.2.9

oldukları kullanılırsa,

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \vec{p}^2 \quad 3.2.10$$

olarak bulunur. Bu 3.2.7 denkleminde yerine konursa;

$$(E^2 - M^2) \varphi_i = p^2 \varphi_i \quad 3.2.11$$

denklemini elde edilir. Bu denklem, serbest parçacık için Klein-Gordon denklemdir.

Şimdi, z-yönünde B_0 sabit manyetik alanı verecek şekilde $A_0 = \phi = 0$ ve

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} y B_0 \hat{x} + \frac{1}{2} x B_0 \hat{y}$$

seçelim 3.2.11 denklemini vektör potansiyel varlığında;

$$(E^2 - M^2) \varphi_i = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \varphi_i \quad 3.2.12$$

olur.

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - e \vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \sigma_z B_0 \quad 3.2.13$$

ve

$$\vec{\pi} \cdot \vec{\pi} = (\vec{p} - e\vec{A})^2 = \vec{p}^2 - e B_0 L_z + \frac{e^2}{4} B_0^2 (x^2 + y^2) \quad 3.2.14$$

olduğundan, bunlar denklem 3.2.12'de yerine konursa,

$$\left[\vec{p}^2 - e B_0 [L_z + \sigma_z] + \frac{e^2}{4} B_0^2 (x^2 + y^2) \right] \varphi = (E^2 - M^2) \varphi \quad 3.2.15$$

denklemini elde edilir.

Bu durumda, parçacığın hareketi z-yönünde serbest parçacık hareketi, xy-düzleminde de iki boyutlu harmonik titreşiminin hareketi şeklindedir. Bu durum, yani problemdeki silindirik simetri varlığı, bizi denklemini silindirik koordinatlarda incelemeye yöneltmektedir.

O halde (3.2.15) denklemindeki değişkenlerin silindirik koordinatlarda yazılan

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \theta}$$

3.2.16

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

ifadelerini ve

$$(E^2 - M^2 \pm eB_0) = \beta \pm \quad 3.2.17$$

kısaltmasını 3.2.15 denkleminde kullanarak;

$$\left\{ - \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + ieB_0 \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{eB_0}{2} \right)^2 \rho^2 \right\} \varphi_+(\rho, \theta, z) = \beta_+ \varphi_+(\rho, \theta, z)$$

ve

3.2.18

$$\left\{ - \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + ieB_0 \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{eB_0}{2} \right)^2 \rho^2 \right\} \varphi_-(\rho, \theta, z) = \beta_- \varphi_-(\rho, \theta, z)$$

elde ederiz. Bu aşamada,

$$\varphi_\beta(\rho, \theta, z) \sim U_\alpha e^{im\theta} e^{ip_z z} \quad 3.2.19$$

çözümünü önerir ve 3.2.18 denklemlerinde yerine koyarsak

$$\alpha_\pm = E^2 - M^2 \pm eB_0 - p_z^2$$

kısaltmasıyla beraber bu bize $U_{\alpha}(\rho)$ cinsinden

$$\frac{d^2 U_{\alpha}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU_{\alpha}}{d\rho} + \left(\alpha_{\pm} + eB_0 m - \frac{m^2}{\rho^2} - \left(\frac{eB_0}{2} \right)^2 \rho^2 \right) U_{\alpha}(\rho) = 0 \quad 3.2.20$$

denklemini verir. Bu şekilde problem, (3.2.20) denkleminin çözümünü bulmaya indirgenmiş olur. Uygun bir şekilde değişken değiştirilmesiyle denklem daha kolay çözümler hale gelecektir. Yeni değişkeni

$$\sqrt{\frac{eB_0}{2}} \rho = x \quad 3.2.21$$

olarak seçelim. Bu takdirde (3.2.20) denklemini

$$\lambda = \frac{2}{eB_0} \alpha_{\pm} + 2m$$

olmak üzere yeni değişken cinsinden

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(x)}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{x^2} - x^2 \right) R(x) = 0 \quad 3.2.22$$

olur.

Bu denklem incelenirse,

- (i) $x \rightarrow 0$ iken
- (ii) $x \rightarrow \infty$ iken
- (iii) $0 < x < \infty$ aralığında denklemin çözümleri sırasıyla

$x^{|m|}$, $e^{-x^2/2}$ ve Laguerre polinomları cinsinden bulunur, o zaman $R(x)$ genel çözümü

$$R(x) = e^{-x^2/2} x^{|m|} L_N^{|m|}(x^2) \quad 3.2.23$$

olacaktır. Burada N , $\frac{\lambda - 2|m| - 2}{4}$ ifadesine karşılık gelmektedir.

$$\alpha_{\pm} = E^2 - M^2 \pm eB_0 - p_z^2$$

olduğunu hatırlayarak ve $\frac{eB_0}{2M} = \omega$ alarak, enerji özdeğerleri için

$$E_+^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega N + 2M\omega (|m| - m)$$

ve

3.2.24

$$E_-^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega N + 2M\omega (|m| - m + 2)$$

yazabiliriz.(3.2.19)biçimindeki genel çözüm ifadesiyle birlikte

$$\varphi_+ = Ae^{ip_z z + im\theta - \frac{M\omega}{2}\rho^2} (\sqrt{M\omega}\rho)^{|m|} L_{N+}^{|m|} (M\omega\rho^2)$$

ve

3.2.25

$$\varphi_- = Be^{ip_z z + im\theta - \frac{M\omega}{2}\rho^2} (\sqrt{M\omega}\rho)^{|m|} L_{N-}^{|m|} (M\omega\rho^2)$$

olacaktır. Bundan sonra, diğer bileşenler için söz konusu olan

$$\chi_{\pm} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{(E + M)} \varphi_{\pm}$$

ifadesinden yararlanarak χ_{\pm} 'yi bulmak için, önce $\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}$ hesaplanmalıdır. Bunun için ise,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) = \sigma_x \pi_x + \sigma_y \pi_y + \sigma_z \pi_z$$

ve

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tanımlarından yararlanarak

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_x \\ \pi_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\pi_y \\ i\pi_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_z & 0 \\ 0 & -\pi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{pmatrix} \quad 3.2.26$$

yazılır. Bu arada

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} y B_0 \hat{x} + \frac{1}{2} x B_0 \hat{y}$$

olduğu hatırlanır ve A_z bileşeninin sıfır, ve

$$\pi_z = p_z - eA_z = p_z \quad 3.2.27$$

olduğu 3.2.26 denkleminde kullanılırsa

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} = \begin{pmatrix} p_z & \pi_- \\ \pi_+ & -p_z \end{pmatrix} \quad 3.2.28$$

bulunur.

Bu arada

$$\pi_x = p_x + \frac{e}{2} y B_0 \quad 3.2.29$$

$$\pi_y = p_y - \frac{e}{2} x B_0$$

ve

$$\pi_+ = \pi_x + i\pi_y \quad 3.2.30$$

$$\pi_- = \pi_x - i\pi_y$$

olduklarına dikkat edelim. Bundan sonra yapılacak iş bütün bu işlemcileri silindirik koordinatlarda ifade etmektir.

Bu yapılırsa

$$\pi_+ = e^{i\theta} \left(-i \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} - iM\omega\rho \right)$$

ve

3.2.31

$$\pi_- = e^{-i\theta} \left(-i \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + iM\omega\rho \right)$$

ifadeleri elde edilir. 3.2.4b, yani

$$\begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} = \frac{1}{(E + M)} \begin{pmatrix} p_z & \pi_- \\ \pi_+ & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} \quad 3.2.32$$

denklemini, χ_+ ve χ_- 'lerin φ_+ ve φ_- ' ler cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlanabileceğini söyler:

$$\chi_+ = \frac{1}{(E + M)} (p_z \varphi_+ + \pi_- \varphi_-)$$

3.2.33

$$\chi_- = \frac{1}{(E + M)} (\pi_+ \varphi_+ - p_z \varphi_-)$$

Bütün bileşenler bu şekilde elde edildikten sonra öz-durumlar aşağıdaki şekilde bulunur :

1. Durum ; Spin manyetik alan ile aynı yöndedir. Bu φ_- bileşeninin sıfır olması demektir. Bu öz duruma karşılık gelen özenerji

$$E_{\pm}^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega N_{\pm} + 2M\omega (|m| - m)$$

ile verilir.

a) Sistemin kuantum sayısı $m > 0$ ise, enerji

$$E_{+}^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega N_{+}$$

olur. Bu öz-durum ;

$$\varphi_{+} = (\text{sbt}) e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im\theta + ip_z z} \left(\sqrt{M\omega} \rho\right)^{|m|} L_{N_{+}}^{|m|} (M\omega\rho^2),$$

$$\varphi_{-} = 0$$

$$\chi_{+} = \frac{(\text{sbt})}{(E+M)} p_z \left(\sqrt{M\omega} \rho\right)^{|m|} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im\theta + ip_z z} L_{N_{+}}^{|m|} (M\omega\rho^2),$$

ve

$$\chi_{-} = \frac{(\text{sbt})}{(E+M)} \left\{ 2i \left(\sqrt{M\omega}\right) \left(\sqrt{M\omega} \rho\right)^{|m|+1} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + i(m+1)\theta + ip_z z} L_{N_{+}-1}^{|m|+1} (M\omega\rho^2) \right\}.$$

bileşenlerine sahiptir. (Bu bileşenlerde ve diğerlerinde $\text{sbt} \equiv$ sabit şeklinde yazılan katsayı daha sonra bulunacak olan normalizasyon katsayısıdır).

b. $m < 0$ ise, enerji

$$E_{\pm}^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega N_{\pm} + 4M\omega m$$

şeklindedir. Bu öz-durumun bileşenleri;

$$\varphi_+ = (\text{sbt.}) e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im\theta + ip_z z} (\sqrt{M\omega} \rho)^{|m|} L_{N_+}^{|m|} (M\omega\rho^2),$$

$$\varphi_- = 0$$

$$\chi_+ = \frac{(\text{sbt.})}{(E+M)} p_z (\sqrt{M\omega} \rho)^{|m|} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im\theta + ip_z z} L_{N_+}^{|m|} (M\omega\rho^2),$$

$$\chi_- = -\frac{(\text{sbt.})}{(E+M)} 2i (\sqrt{M\omega}) (\sqrt{M\omega} \rho)^{|m|-1} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + i(m+1)\theta + ip_z z} (N + |m|) L_{N_+}^{|m|-1} (M\omega\rho^2)$$

olarak bulunurlar.

2. Durum ; Spin manyetik alana zıt yönde yönelmiştir. Bu φ_+ bileşeninin sıfır olması demektir. Bu öz duruma karşılık gelen öz enerji

$$E_-^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega N_- + 2M\omega (|m| - m + 2)$$

ile verilir.

a) $m > 0$ ise, enerji

$$E_-^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega N_- + 4M\omega$$

olur. Bileşenler

$$\varphi_+ = 0$$

$$\varphi_- = (\text{sbt.}) (\sqrt{M\omega} \rho)^{|m|} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im\theta + ip_z z} L_{N_-}^{|m|} (M\omega\rho^2)$$

$$\chi_+ = - \frac{(sbt)}{(E+M)} 2i\sqrt{M\omega} (\sqrt{M\omega\rho})^{|\mathbf{m}|-1} (N+1) e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + i(m-1)\theta + ip_z z} L_{N-1}^{|\mathbf{m}|-1} (M\omega\rho^2)$$

ve

$$\chi_- = - \frac{(sbt) p_z}{(E+M)} (\sqrt{M\omega\rho})^{|\mathbf{m}|} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im\theta + ip_z z} L_{N-1}^{|\mathbf{m}|} (M\omega\rho^2)$$

şeklindedirler.

b) $m < 0$ için, enerji

$$E_-^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega N_- + 4M\omega (|\mathbf{m}| + 1)$$

olur.

Bileşenler ise,

$$\varphi_+ = 0$$

$$\varphi_- = (sbt.) (\sqrt{M\omega\rho})^{|\mathbf{m}|} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im\theta + ip_z z} L_{N-1}^{|\mathbf{m}|} (M\omega\rho^2)$$

$$\chi_+ = - \frac{(sbt)}{(E+M)} 2i\sqrt{M\omega} (\sqrt{M\omega\rho})^{|\mathbf{m}|+1} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + i(m-1)\theta + ip_z z} L_{N-1}^{|\mathbf{m}|+1} (M\omega\rho^2)$$

ve

$$\chi_- = - \frac{(sbt) p_z}{(E+M)} (\sqrt{M\omega\rho})^{|\mathbf{m}|} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im\theta + ip_z z} L_{N-1}^{|\mathbf{m}|} (M\omega\rho^2)$$

şeklindedir.

Her bir duruma karşılık gelen dalga fonksiyonlarının

$$\begin{aligned} -L < z < L \\ 0 < \rho < \infty \\ 0 < \theta < 2\pi \end{aligned}$$

aralıklarında

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_{-L}^{+L} dz |\Psi(\rho, \theta, z)|^2 = 1$$

şeklindeki normalizasyon şartından yararlanarak, normalizasyon katsayılarını bulmak da mümkündür. (3.2.34) açık olarak,

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_{-L}^{+L} dz \{ |\varphi_+|^2 + |\varphi_-|^2 + |\chi_+|^2 + |\chi_-|^2 \} = 1 \quad 3.2.35$$

şeklindedir.

Bu yapıldığında bütün öz-durumlar için normalizasyon katsayılarının

$$A = \left(\frac{(E + M) N!}{4\pi L \Gamma(|m| + N + 1)} \frac{M\omega}{E} \right)^{1/2} \quad 3.2.36$$

olmak üzere aynı oldukları bulunmuştur.

Son olarak görelî Landau yörüngelerine karşılık gelen bütün öz-durumları normalizasyon katsayılarıyla beraber aşağıdaki gibi yazabiliriz.:

$$A = \left(\frac{(E + M) N!}{4\pi L \Gamma(|m| + N + 1)} \frac{M\omega}{E} \right)^{1/2}$$

ve

$$F(\rho, \theta, z) = \left(\sqrt{M\omega} \rho \right)^{|m|} e^{\frac{M\omega}{2} \rho^2 + im\theta + ip_z z}$$

olmak üzere,

1. $\varphi_- = 0$, $m > 0$;

$E_+^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega N$ özenerjili öz durum :

$$\Psi_1(\rho, \theta, z) = AF(\rho, \theta, z) \begin{pmatrix} L_{N_+}^{|m|}(M\omega\rho^2) \\ 0 \\ \frac{p_z}{(E+M)} L_{N_+}^{|m|}(M\omega\rho^2) \\ \frac{2iM\omega\rho}{(E+M)} e^{i\theta} L_{N_+-1}^{|m|+1}(M\omega\rho^2) \end{pmatrix} \quad 3.2.37$$

2. $\varphi_- = 0$, $m < 0$;

$E_+^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega(N_+ + |m|)$ özenerjili öz durum :

$$\Psi_2(\rho, \theta, z) = AF(\rho, \theta, z) \begin{pmatrix} L_{N_+}^{|\mathbf{m}|}(M\omega\rho^2) \\ 0 \\ \frac{p_z}{(E+M)} L_{N_+}^{|\mathbf{m}|}(M\omega\rho^2) \\ -\frac{2i(N+|\mathbf{m}|)}{\rho(E+M)} e^{i\theta} L_{N_+}^{|\mathbf{m}|-1}(M\omega\rho^2) \end{pmatrix} \quad 3.2.38$$

3. $\varphi_+ = 0$, $\mathbf{m} > 0$;

$$E_-^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega(N_- + 1) \quad \text{özenerjili öz durum};$$

$$\Psi_3(\rho, \theta, z) = AF(\rho, \theta, z) \begin{pmatrix} 0 \\ L_{N_-}^{|\mathbf{m}|}(M\omega\rho^2) \\ -\frac{2i(N+1)}{\rho(E+M)} e^{-i\theta} L_{N_-+1}^{|\mathbf{m}|-1}(M\omega\rho^2) \\ -\frac{p_z}{(E+M)} L_{N_-}^{|\mathbf{m}|}(M\omega\rho^2) \end{pmatrix} \quad 3.2.39$$

4. $\varphi_+ = 0$, $\mathbf{m} < 0$;

$$E_-^2 = M^2 + p_z^2 + 4M\omega(N_- + |\mathbf{m}| + 1) \quad \text{özenerjili öz durum};$$

$$\Psi_4(\rho, \theta, z) = AF(\rho, \theta, z) \begin{pmatrix} 0 \\ L_{N_+}^{[m]}(M\omega\rho^2) \\ \frac{2iM\omega\rho}{(E+M)} e^{-i\theta} L_{N_+}^{[m+1]}(M\omega\rho^2) \\ -\frac{p_z}{(E+M)} L_{N_+}^{[m]}(M\omega\rho^2) \end{pmatrix} \quad 3.2.40$$



Bölüm : 4. GÖRELİ LANDAU YÖRÜNGELERİNİN KENDİLİĞİNDEN YAYMA YARI ÖMÜRLERİNİN HESAPLANMASI

Bu bölümde, bir önceki bölümün son kesiminde sunulan görelî Landau yörüngelerine ait öz durumların dalga fonksiyonları, birinci bölümün ikinci kesiminde, öz-alan KED eyleminden hareketle elde edilen kendiliğinden yayma yarı ömrü denkleminde (1.2.18) yerine konulacaktır. Bu yapılırken, elektronun sabit manyetik alan içerisinde z-ekseni boyunca yaptığı hareket gözönüne alınmayacak, integraller (ρ, θ) olmak üzere iki-boyutta değerlendirilecektir. (Bu yapılabilir, çünkü parçacığın z-ekseni boyunca yaptığı harekette, çizgisel momentumun z-bileşeni sürekli değerler almaktadır. z-ekseni boyunca sürekli olan bu özdeğerlere ait öz durumların farklı kuantum durumları olarak - n ve s durumları - etiketlenmesi ve bu durumlar arasındaki geçişlere bakılması fiziksel olarak anlamlı bulunmamış, bunun yerine, sadece ρ ve θ ile tanımlanan düzlemdeki farklı kuantum durumları arasındaki geçişlere bakmak ve bu geçişler için bozunma oranlarını hesaplamak daha anlamlı bulunmuştur.)

Şimdi, üç boyuttan iki boyuta geçiş, (1.2.9) öz-alan KED eylemi ifadesinden başlayarak aşağıdaki gibi olacaktır:

$$W = 2\pi \delta(E_n - E_m) \int dz d\bar{x}_\perp \bar{\Psi}_{E_n, p_n}(\bar{x}_\perp) e^{-ip_m z + ip_n z} (H(p_n, \bar{x}_\perp) - E_n) \Psi_{E_n, p_n}(\bar{x}_\perp)$$

$$-e^2 \int dz \int dz' d\bar{x}_\perp d\bar{y}_\perp \bar{\Psi}_{E_n, p_n}(\bar{x}_\perp) e^{-i(p_n - p_i)z} \gamma^\mu \Psi_{E_n, p_i}(\bar{x}_\perp)$$

$$\times \bar{\Psi}_{E_n, p_i}(\bar{y}_\perp) \gamma_\mu \Psi_{E_n, p_n}(\bar{y}_\perp) e^{i(p_n - p_i)z} \frac{dk_3 d^2 k_\perp}{\pi \sqrt{k_\perp^2 + k_3^2}}$$

$$x\delta(E_s - E_n - \sqrt{k_1^2 + k_3^2}) e^{ik_3(z-z') + i\vec{k}_1(\vec{x}_1 - \vec{y}_1)} \quad 4.1$$

$$W = 2\pi \delta(E_n - E_m) 2\pi \delta(p_n - p_m) \int d\vec{x}_1 \bar{\Psi}_{E_n, p_n} (H(p_n, \vec{x}_1) - E_n) \Psi_{E_n, p_n} (\vec{x}_1) \\ - e^2 \int d\vec{x}_1 d\vec{y}_1 \bar{\Psi}_{E_n, p_n} (\vec{x}_1) \gamma^\mu \Psi_{E_s, p_s} (\vec{x}_1) \bar{\Psi}_{E_s, p_s} (\vec{y}_1) \gamma_\mu \Psi_{E_n, p_n} (\vec{y}_1) \quad 4.2$$

$$\int d^2 k_1 e^{i\vec{k}_1(\vec{x}_1 - \vec{y}_1)} \frac{\delta(E_s - E_n - \sqrt{k_1^2 + (p_n - p_n')^2})}{\pi \sqrt{k_1^2 + (p_n - p_n')^2}} \delta(p_s - p_s' + p_n - p_n')$$

Burada E_n , E_s ve p_n , p_s , elektronun n ve s farklı kuantum durumları olmak üzere, enerji ve momentum özdeğerleridir. p_n' , p_s' farklı konumdaki elektronun n ve s kuantum durumlu momentum özdeğerleridir.

Bu arada, kendiliğinden yayma bozunma oranı için elde edilen üç boyutlu ifadeyi hatırlayalım ⁽¹⁾ ($e^2 = 4\pi\alpha$),

$$\Gamma_n \cong - \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{s(<n)} \int d^3 x \bar{\Psi}_n(\vec{x}) \gamma^\mu \Psi_s(\vec{x}) \int d^3 y \bar{\Psi}_s(\vec{y}) \gamma_\mu \Psi_n(\vec{y})$$

$$\times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \frac{\pi}{2k} \delta(E_s - E_n + k)$$

(4.1) ve (4.2) denklemleri Γ_n bozunma oranının iki boyuttaki ifadesini aşağıdaki şekilde verirler;

$$\Gamma_n \cong - \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{s(<n)} \int d\bar{x}_\perp d\bar{y}_\perp \bar{\Psi}_n(\bar{x}_\perp) \gamma^\mu \Psi_s(\bar{x}_\perp) \bar{\Psi}_s(\bar{y}_\perp) \gamma_\mu \Psi_n(\bar{y}_\perp)$$

$$\int d^2 k_\perp e^{i\bar{k}_\perp \cdot (\bar{x}_\perp - \bar{y}_\perp)} \frac{\delta(E_s - E_n - k_\perp)}{\pi k_\perp} \quad 4.3$$

Burada

$$\bar{x}_\perp = (\rho, \theta), \quad \bar{y}_\perp = (\rho', \theta'); \quad d\bar{x}_\perp = \rho d\rho d\theta, \quad d\bar{y}_\perp = \rho' d\rho' d\theta'$$

ve

$$k_\perp, \bar{k}' \text{ 'nin } k_3 (= k_z)$$

dışındaki bileşenleri olmak üzere

$$d^2 k_\perp = k_\perp dk_\perp$$

şeklindedir.

Bu aşamada dipol yaklaşımı yapılacaktır. Dipol yaklaşımı yapmak,

$$e^{i\bar{k}_\perp \cdot (\bar{x}_\perp - \bar{y}_\perp)}$$

üstel terimini seriye açtıktan sonra ilk terimi almak, yani

$$e^{i\bar{k}_\perp \cdot (\bar{x}_\perp - \bar{y}_\perp)} \cong 1 \quad 4.4$$

yazmak demektir. Bu, elektronun Landau yörüngeleri yarıçapının yayılan ışığın dalga boyundan daha küçük olması anlamını taşır. (4.3) denkleminde dipol yaklaşımı yapılırsa bu denklemdeki k_\perp integrasyonu

$$\int \delta(E_s - E_n + k_\perp) \frac{k_\perp dk_\perp}{k_\perp} = 1$$

verir. Bütün bunlar ve $\gamma^\mu \gamma_\mu = \gamma_0^2 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma}$ olduğu (4.3) denkleminde yerine konursa;

$$\Gamma_n \cong - \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{s(<n)}^{\dagger} \left[\int \rho d\rho d\theta \bar{\Psi}_n(\rho, \theta) \gamma^0 \Psi_s(\rho, \theta) \int \rho' d\rho' d\theta' \bar{\Psi}_s(\rho', \theta') \gamma^0 \Psi_n(\rho', \theta') \right. \\ \left. - \int \rho d\rho d\theta \bar{\Psi}_n(\rho, \theta) \vec{\gamma} \Psi_s(\rho, \theta) \int \rho' d\rho' d\theta' \bar{\Psi}_s(\rho', \theta') \vec{\gamma} \Psi_n(\rho', \theta') \right] \quad 4.5$$

integrallerine ulaşılır. Bundan sonra,

$$\bar{\Psi} \gamma^0 = \Psi^+ \quad \text{ve} \quad \bar{\Psi} \vec{\gamma} = \Psi^+ \vec{\alpha} \quad 4.6$$

olduğu kullanılarak,

$$\Gamma_n = - \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{s(<n)}^{\dagger} \left[\int \rho d\rho d\theta \Psi_n^+(\rho, \theta) \Psi_s(\rho, \theta) \int \rho' d\rho' d\theta' \Psi_s^+(\rho', \theta') \Psi_n(\rho', \theta') \right. \\ \left. - \int \rho d\rho d\theta \Psi_n^+(\rho, \theta) \vec{\alpha} \Psi_s(\rho, \theta) \int \rho' d\rho' d\theta' \Psi_s^+(\rho', \theta') \vec{\alpha} \Psi_n(\rho', \theta') \right] \quad 4.7$$

elde edilir. (4.7)'deki ilk terim skaler ya da elektriksel kısım olarak adlandırılır. Skaler kısımdan, dalga fonksiyonlarının ortogonalitesi nedeniyle herhangi bir katkı gelmez. İkinci terim vektörel ya da magnetik kısım olarak adlandırılır. $\vec{\alpha}$ 'nın ($c\vec{\alpha}$) hız işlemcisi olması bu şekilde adlandırmaya neden olmaktadır. İlk terim sıfır olduğundan bundan sonra vektörel kısmı değerlendireceğiz. Böylece (4.7) denklemi,

$$\Gamma_n = - \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{s(<n)}^{\dagger} \int \rho d\rho d\theta \Psi_n^+(\rho, \theta) \vec{\alpha} \Psi_s(\rho, \theta) \int \rho' d\rho' d\theta' \Psi_s^+(\rho', \theta') \vec{\alpha} \Psi_n(\rho', \theta') \quad 4.8$$

olur.

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{yada} \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

ve $\bar{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, 0)$ olduğu gözönünde bulundurularak, (4.8)'deki integrali alınacak ifade için,

$$\begin{aligned} \Psi_n^+(\rho, \theta) \bar{\alpha} \Psi_s(\rho, \theta) \Psi_s^+(\rho', \theta') \bar{\alpha} \Psi_n(\rho', \theta') &= \Psi_n^+(\rho, \theta) \sigma^1 \Psi_s(\rho, \theta) \Psi_s^+(\rho', \theta') \sigma^1 \Psi_n(\rho', \theta') \\ &+ \Psi_n^+(\rho, \theta) \sigma^2 \Psi_s(\rho, \theta) \Psi_s^+(\rho', \theta') \sigma^2 \Psi_n(\rho', \theta') \end{aligned} \quad 4.9$$

elde edilir. Bu aşamada, üçüncü bölümün ikinci kesiminde sunulan görelî Landau yörüngelerinden 4.duruma ait, farklı kuantum durumlarına karşılık gelen düzeyler arasındaki geçişlere bakacağımızdan, bu durumun (3.2.40) dalga fonksiyonunu, n ve s kuantum durumları cinsinden etiketleyerek (4.8) denkleminde yerine koyacağız. Dalga fonksiyonlarını önce,

$$\Psi_n^+(\rho, \theta) = A_n (0, \varphi_{n1}^* \varphi_{n2}^* \varphi_{n3}^*), \quad \Psi_s(\rho, \theta) = A_s \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{s1} \\ \varphi_{s2} \\ \varphi_{s3} \end{pmatrix}$$

ve

$$\Psi_s^+(\rho', \theta') = A_s (0, \varphi_{s1}' \varphi_{s2}' \varphi_{s3}'), \quad \Psi_n(\rho', \theta') = A_n \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{n1}' \\ \varphi_{n2}' \\ \varphi_{n3}' \end{pmatrix}$$

kapalı biçiminde yazalım. Burada A_n ve A_s normalizasyon katsayıları iki boyutta ve n ve s kuantum durumlarına göre,

$$A_n = \left(\frac{(E_n + M)N_n!}{2\pi\Gamma(|m_n| + N_n + 1)} \frac{M\omega}{E_n} \right)^{1/2}$$

ve

$$A_s = \left(\frac{(E_s + M)N_s!}{2\pi\Gamma(|m_s| + N_s + 1)} \frac{M\omega}{E_s} \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanmışlardır.

(4.10) dalga fonksiyonları ve σ^i ($i = 1,2$) matrislerinin 4×4 'lük gösterimleri (4.8) denkleminde kullanılırlarsa, bileşenler cinsinden,

$$\int \rho d\rho d\theta \int \rho' d\rho' d\theta' \{2\varphi_{n2}^* \varphi_{s1} \varphi_{s1}^* \varphi_{n2}' + 2\varphi_{n1}^* \varphi_{s2} \varphi_{s2}^* \varphi_{n1}'\} \quad 4.11$$

integrali elde edilir. Bu integraldeki ρ ve ρ' ile ilgili integralleri

$$I_{\rho\rho'} = 2 \int \rho d\rho \varphi_{n2}^* \varphi_{s1} \int \rho' d\rho' \varphi_{s1}^* \varphi_{n2}' + 2 \int \rho d\rho \varphi_{n1}^* \varphi_{s2} \int \rho' d\rho' \varphi_{s2}^* \varphi_{n1}' \quad 4.12$$

şeklinde ayıralım. Bunları da tek tek değerlendirmek üzere,

$$\begin{aligned} I_{\rho_1} &= \int \rho d\rho \varphi_{n2}^* \varphi_{s1} & I_{\rho_2} &= \int \rho d\rho \varphi_{n1}^* \varphi_{s2} \\ I'_{\rho_1} &= \int \rho' d\rho' \varphi_{s1}^* \varphi_{n2}' & I'_{\rho_2} &= \int \rho' d\rho' \varphi_{s2}^* \varphi_{n1}' \end{aligned} \quad 4.13$$

yazalım. Bileşenlerin açık biçimleri

$$F_n(\rho, \theta) = \left(\sqrt{M\omega} \rho\right)^{|m_n|} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im_n\theta}$$

4.14

$$F_s(\rho, \theta) = \left(\sqrt{M\omega} \rho\right)^{|m_s|} e^{-\frac{M\omega}{2}\rho^2 + im_s\theta}$$

olmak üzere,

$$\varphi_{n1}^* = F_n^*(\rho, \theta) L_{N_n}^{|m_n|}(M\omega\rho^2)$$

$$\varphi_{n1}' = F_n^*(\rho', \theta') L_{N_n}^{|m_n|}(M\omega\rho'^2)$$

$$\varphi_{n2}^* = F_n^*(\rho, \theta) \left(-\frac{2iM\omega\rho}{(E_n + M)} e^{i\theta} \right) L_{N_n}^{|m_n|+1}(M\omega\rho^2)$$

$$\varphi_{n2}' = F_n^*(\rho', \theta') \frac{2iM\omega\rho'}{(E_n + M)} e^{-i\theta'} L_{N_n}^{|m_n|+1}(M\omega\rho'^2)$$

$$\varphi_{s1} = F_s(\rho, \theta) L_{N_s}^{|m_s|}(M\omega\rho^2)$$

4.15

$$\varphi_{s1}^* = F_s^*(\rho', \theta') L_{N_s}^{|m_s|}(M\omega\rho'^2)$$

$$\varphi_{s2} = F_s(\rho, \theta) \frac{2iM\omega\rho}{(E_s + M)} e^{-i\theta} L_{N_s}^{|m_s|+1}(M\omega\rho^2)$$

$$\varphi_{s2}^* = F_s^*(\rho', \theta') \left(-\frac{2iM\omega\rho'}{(E_s + M)} \right) e^{-i\theta'} L_{N_s}^{|m_s|+1}(M\omega\rho'^2)$$

şeklindedir. (4.13)'deki I_{ρ_1} integralini, ilgili bileşenlerin açık biçimleriyle,

$$I_{\rho_1} = -\frac{2i}{(E_n + M)} \int \rho \, d\rho \, M\omega\rho \left(\sqrt{M\omega\rho}\right)^{|m_n|+|m_s|} e^{-m\omega\rho^2} L_{N_n}^{|m_n|+1}(M\omega\rho^2) L_{N_s}^{|m_s|+1}(M\omega\rho^2) \quad 4.16$$

şeklinde yazalım. Bu integrali değerlendirmeden önce, (4.11) integralindeki açılmalara bakarsak bunlar,

$$I_{\theta\theta'} = \int_0^{2\pi} d\theta \, e^{-im_n\theta} e^{i\theta} e^{im_s\theta} \int_0^{2\pi} d\theta' \, e^{-im_n\theta'} e^{i\theta'} e^{im_s\theta'} \quad 4.17$$

biçimindedirler. Bu integraller Kronecker delta fonksiyonları verirler. Buna göre $|m_n|$ ve $|m_s|$ kuantum sayılarının farkı 1'e eşit olmalıdır. Bu , düzeyler arasındaki geçişlerin $\Delta |m| = 1$ sağlanıyorsa mümkün olacağını söyler. (4.16) I_{ρ_1} integralini düzenler ve $M\omega\rho^2 = x$ olmak üzere değişken değiştirmesi yaparsak;

$$I_{\rho_1} = -\frac{2i}{(E_n + M)} \frac{1}{2\sqrt{M\omega}} \int dx \, (x)^{\frac{1}{2}(|m_n|+|m_s|+1)} e^{-x} L_{N_n}^{|m_n|+1}(x) L_{N_s}^{|m_s|}(x) \quad 4.18$$

elde ederiz. Bu aşamada, öncelikle N_n ve N_s 'e 0,1,2,... olmak üzere tamsayı değerler vererek,

$$\int dx \, (x)^{\frac{1}{2}(|m_n|+|m_s|+1)} e^{-x} L_{N_n}^{|m_n|+1}(x) L_{N_s}^{|m_s|}(x) \text{ integralini}$$

$$I = \int dx \, (x)^{\frac{1}{2}(|m_n|+|m_s|+1)} e^{-x} \left\{ L_0^{|m_n|+1}(x) L_0^{|m_s|}(x) + L_0^{|m_n|+1}(x) L_1^{|m_s|}(x) \right. \\ \left. + L_1^{|m_n|+1}(x) L_0^{|m_s|}(x) + L_1^{|m_n|+1}(x) L_1^{|m_s|}(x) + L_1^{|m_n|+1}(x) L_2^{|m_s|}(x) + \dots \right\} \quad 4.19$$

şeklinde açalım.

Laguerre polinomlarının konfluent hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$L_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha+1)} \Phi(-n, \alpha + 1; x)$$

şeklinde verilen ifadesi ve

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

yardımıyla (4.19) için,

$$\begin{aligned} I &= \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s| + 1)} e^{-x} + (|m_s| + 1) \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s| + 1)} e^{-x} - \\ &- \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2}} e^{-x} + \dots \end{aligned} \quad 4.20$$

elde ederiz. Kolaylık sağlaması açısından, bu integralleri N_n ve N_s 'e verdiğimiz değerlere $(0, 1, 2, \dots)$ göre aşağıdaki şekilde ayırabiliriz. ($I_{N_n N_s}$);

$$I_{00} = \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s| + 1)} e^{-x},$$

$$I_{01} = (|m_s| + 1) \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s| + 1)} e^{-x} - \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2}} e^{-x},$$

$$I_{10} = (|m_n| + 2) \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s| + 1)} e^{-x} - \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2}} e^{-x},$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= (|m_n| + 2) (|m_s| + 1) \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s| + 1)} e^{-x} - (|m_n| + 2) \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2}} e^{-x} - \\ &- (|m_s| + 1) \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2}} e^{-x} + \int dx (x)^{\frac{1}{2}(|m_n| + |m_s|) + \frac{5}{2}} e^{-x}, \end{aligned}$$

$$I_{12} = \dots$$

⋮
⋮
⋮

4.21

Bu integrallerin tümü $\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\mu x} dx$ biçimindedirler. İntegral tablosundan ⁽¹⁷⁾ bunun sonucu

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu^{\nu}} \Gamma(\nu) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0, \operatorname{Re}\nu > 0] \quad 4.22$$

olarak bulunur ve (4.21) integrallerinde kullanılırsa,

$$I_{00} = \Gamma\left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2}\right),$$

$$I_{01} = (|m_s| + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{5}{2}\right),$$

$$I_{10} = (|m_n| + 2) \Gamma\left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{5}{2}\right),$$

$$I_{11} = (|m_n| + 2) (|m_s| + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2}\right) - (|m_n| + 2) \Gamma\left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{5}{2}\right)$$

$$- (|m_s| + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{5}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{7}{2}\right),$$

4.23

elde edilir. Buna göre, I_{p1} integrali

$$I_{\rho 1} = - \frac{i}{(E_n + M)} \frac{1}{\sqrt{M\omega}} [I_{00} + I_{01} + \dots] \quad 4.24$$

verir. Aynı şekilde

$$I'_{\rho 1} = \int \rho' d\rho' \varphi_{s1}^* \varphi'_{n2}$$

integrali de değerlendirilirse,

$$I'_{\rho 1} = \frac{i}{(E_n + M)} \frac{1}{\sqrt{M\omega}} [I'_{00} + I'_{01} + \dots] \quad 4.25$$

verdiği görülür. (4.13)' deki diğer integraller için de

$$I'_{00} = \Gamma \left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2} \right)$$

$$I'_{01} = (|m_n| + 1) \Gamma \left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2} \right) - \Gamma \left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{5}{2} \right)$$

$$I'_{10} = (|m_s| + 2) \Gamma \left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{3}{2} \right) - \Gamma \left(\frac{1}{2} (|m_n| + |m_s|) + \frac{5}{2} \right) \quad 4.26$$

olmak üzere

$$I_{\rho 2} = \frac{i}{(E_s + M)} \frac{1}{\sqrt{M\omega}} [I'_{00} + I'_{01} + \dots]$$

ve

4.27

$$I'_{\rho 2} = - \frac{i}{(E_s + M)} \frac{1}{\sqrt{M\omega}} [I'_{00} + I'_{01} + \dots]$$

ifadeleri elde edilir. Bütün bunlar $I_{\rho\rho'}$ için yazılan (4.12) ifadesinde kullanılarak,

$$I_{\rho\rho'} = \frac{2}{(E_n + M)^2 M\omega} [I_{00} + I_{01} + \dots]^2 + \frac{2}{(E_s + M)^2 M\omega} [I'_{00} + I'_{01} + \dots]^2 \quad 4.28$$

elde edilir. Şimdi Γ_n bozunma oranının tam ifadesini elde etmek üzere normalizasyon katsayılarıyla beraber $I_{\rho\rho'}$ integralinin sonucu (4.8)'de yerine konursa,

$$\Gamma_n = \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{s < (n)} (2\pi)^2 \left(\frac{(E_n + M) N_n!}{2\pi\Gamma(|m_n| + N_n + 1)} \frac{M\omega}{E_n} \right) \left(\frac{(E_s + M) N_s!}{2\pi\Gamma(|m_s| + N_s + 1)} \frac{M\omega}{E_s} \right) \\ \times \left\{ \frac{2}{(E_n + M)^2 M\omega} [I_{00} + I_{01} + \dots]^2 + \frac{2}{(E_s + M)^2 M\omega} [I'_{00} + I'_{01} + \dots]^2 \right\} \quad 4.29$$

ya da

$$\Gamma_n = \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{s < (n)} \left\{ \frac{2N_n! N_s! M\omega (E_s + M)}{\Gamma(|m_n| + N_n + 1) \Gamma(|m_s| + N_s + 1) (E_n + M) E_n E_s} [I_{00} + I_{01} + \dots]^2 \right. \\ \left. + \frac{2N_n! N_s! M\omega (E_n + M)}{\Gamma(|m_n| + N_n + 1) \Gamma(|m_s| + N_s + 1) (E_s + M) E_n E_s} [I'_{00} + I'_{01} + \dots]^2 \right\} \quad 4.30$$

elde edilir. (4.29)'daki $(2\pi)^2$ çarpanı (4.17) açışal integrasyonlarından gelmektedir. Bundan sonra, (4.30)'un sadece birinci terimini kullanmak yeterli olacaktır. Bu terimde

$$\frac{1}{E_n E_s} \sim \frac{1}{M^2} \left[1 - \frac{2\omega}{M} (N_n + |m_n| + N_s + |m_s| + 2) \right] \quad 4.31$$

ve

$$\frac{(E_s + M)}{(E_n + M)} \sim \left[1 + \frac{\omega}{M} (N_s - N_n + |m_s| - |m_n|) + o(\omega^2) \right] \quad 4.32$$

bağıntıları kullanılırsa,

$$\Gamma_n \cong \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{s < n} \frac{2N_n! N_s! \left[1 + \frac{\omega}{M} (N_s - N_n + |m_s| - |m_n|) \right] \omega}{\Gamma(|m_n| + N_n + 1) \Gamma(|m_s| + N_s + 1) M} \times \left[1 - \frac{2\omega}{M} (N_n + |m_n| + N_s + |m_s| + 2) \right] [I_{00} + I_{01} + \dots]^2 \quad 4.33$$

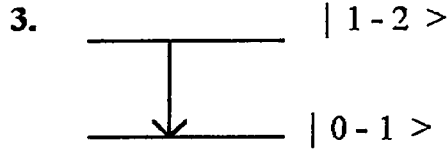
elde edilir.

Şimdi, 4. duruma ait enerji düzeyleri arasındaki geçişlerin bozunma oranlarını (ya da yarı ömürlerini) hesaplayacağımız için, bu durumun

$$E^2 = M^2 + 4M\omega (N + |m| + 1)$$

enerji ifadesinde, N ve m kuantum sayılarına $N = 0, 1, 2, \dots$ ve $m = -1, -2, \dots$ şeklinde değerler vererek enerji düzeylerini belirlediğimizde Şekil.1'deki enerji düzeylerini elde ederiz. Düzeylerin gösteriminde kuantum sayıları $|N m\rangle$ şeklinde sıralanmıştır.

Olası geçişler için bozunma oranlarını hesaplamak üzere $\Delta |m| = 1$ şartını sağlayan geçişleri tespit edersek, bu bize Şekil.2'yi verir. Bu geçişlerden şekildeki gibi numaralandırılmış birkaçı için bozunma oranınının (4.33) denklemi yardımıyla hesaplanması aşağıdaki değerleri verir :



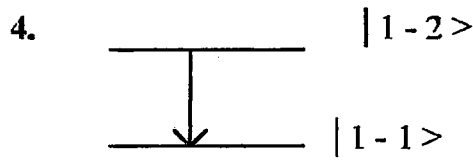
Bu geçişe ait N_n , $|m_n|$, N_s , $|m_s|$ kuantum sayılarını (bunlar sırasıyla 1,2,0,1 şeklindedir),

$$\Gamma_n \cong \frac{\alpha}{4\pi} \sum \frac{2N_n! N_s! \omega \left[1 + \frac{\omega}{M} (N_s - N_n + |m_s| - |m_n|) \right]}{\Gamma(N_n + |m_n| + 1) \Gamma(|m_s| + N_s + 1) M} \left[1 - \frac{2\omega}{M} (N_n + |m_n| + N_s + |m_s| + 2) \right] [I_{00} + I_{01} + \dots]^2$$

denkleminde yerine koyduğumuzda ($I_{N_n N_s}$ bu geçiş için I_{10} olarak alınacaktır);

$$\Gamma[(1,-2) \rightarrow (0,-1)] \cong \frac{\alpha}{4\pi} \frac{4\omega}{3M} \left[1 - \frac{14\omega}{M} + \frac{24\omega^2}{M^2} \right]$$

elde ederiz. Aynı şekilde,



$$\Gamma[(1,-2) \rightarrow (1,-1)] \cong \frac{\alpha}{4\pi} \frac{8}{3} \frac{\omega}{M} \left[1 - \frac{15\omega}{M} + \frac{14\omega^2}{M^2} \right]$$

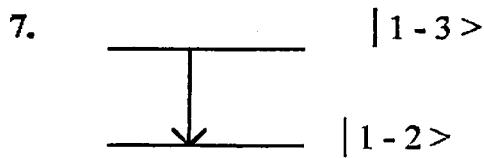
elde edilir.

3. ve 4. geçişler aynı $|N_n m_n\rangle$ kuantum durumundan başka durumlara geçişi temsil ettiklerinden, toplam bozunma oranı;

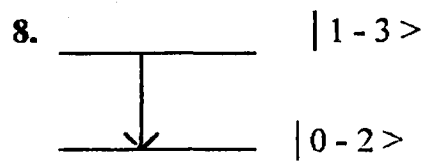
$$\begin{aligned} \Gamma(1, -2) &= \Gamma[(1, -2) \rightarrow (0, -1)] + \Gamma[(1, -2) \rightarrow (1, -1)] \\ &\cong \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{4\omega}{3M} \left[1 - \frac{14\omega}{M} + \frac{24\omega^2}{M^2} \right] + \frac{8\omega}{3M} \left[1 - \frac{15\omega}{M} + \frac{14\omega^2}{M^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Yine aynı şekilde 7. ve 8. geçişleri ele alırsak;



$$\Gamma[(1, -3) \rightarrow (1, -2)] \cong \frac{\alpha}{4\pi} \frac{9\omega}{M} \left[1 - \frac{19\omega}{M} + \frac{18\omega^2}{M^2} \right]$$



$$\Gamma[(1, -3) \rightarrow (0, -2)] \cong \frac{\alpha}{4\pi} \frac{3\omega}{2M} \left[1 - \frac{18\omega}{M} + \frac{32\omega^2}{M^2} \right]$$

$$\Gamma(1, -3) = \Gamma[(1, -3) \rightarrow (1, -2)] + \Gamma[(1, -3) \rightarrow (0, -2)]$$

$$\sim \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{9\omega}{M} \left[1 - \frac{19\omega}{M} + \frac{18\omega^2}{M^2} \right] + \frac{3\omega}{M} \left[1 - \frac{18\omega}{M} + \frac{32\omega^2}{M^2} \right] \right\}$$

bulunur.

Bölüm : 5 - SONUÇ.

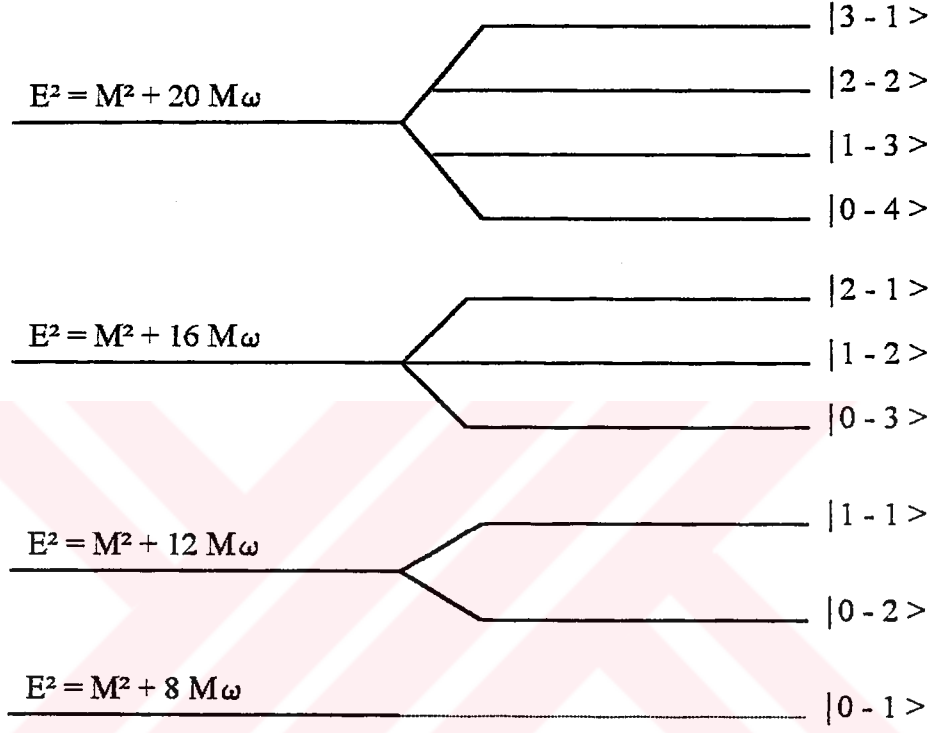
Düzgün bir manyetik alandaki bir elektronun kendiliğinden yayma bozunma oranlarını (ya da yarı-ömürlerini), elektronun öz-enerjisine dayalı bir formülasyonda (öz-alan KED) hesaplamayı amaçladığımız bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde öz-alan KED formalizmi standart KED formalizmiyle karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. İkinci bölümde kendiliğinden yayma olayı, üçüncü bölümde ise sabit manyetik alandaki bir elektronun hareketi ayrıntılı bir biçimde ele alınmıştır. Sabit manyetik alandaki bir elektronun bulunabileceği Landau yörüngeleri olarak adlandırılan enerji düzeyleri ve bu düzeylere karşılık gelen öz-durumlar, problemin içerdiği silindirik simetri nedeniyle silindirik koordinatlarda ifade edilerek, yine üçüncü bölümde sunulmuşlardır. 4.bölümde, görelî Landau yörüngelerine ait öz-durumlardan faydalanılarak kendiliğinden yayma bozunma oranları öz-alan KED formalizminde hesaplanmıştır. Bu yapılırken, 4. bölümün başında açıklandığı üzere, iki-boyutta çalışmak tercih edilmiş, ayrıca dipol yaklaşımı da yapılmıştır. İsteksiz birkaç geçiş için yapılan bozunma oranı hesabı, manyetik alanın kendisi, ikinci ve üçüncü kuvvetleriyle orantılı terimlerin toplamını içermektedir. Bu, ilk terim hariç olmak üzere Tsai ve Yıldız'ın makalesinde⁽³⁾ yer alan (aynı problem için) bozunma oranı hesabının manyetik alana bağılılığı ile uyumlu gözükmektedir.

KAYNAKLAR

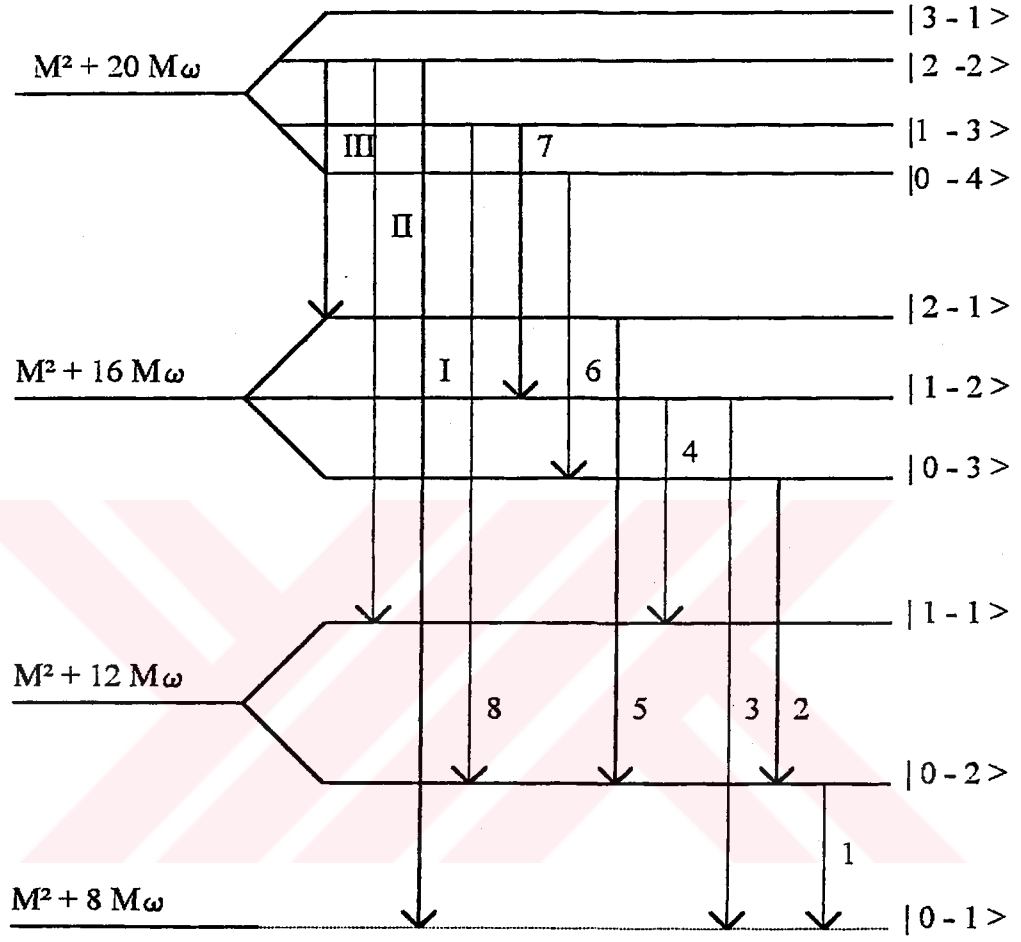
1. Barut, A.O., Salamin, Y.I., 1988. Relativistic Theory of Spontaneous Emission, Phys. Rev. A. 37 , 2284 - 2296.
2. Grandy, Jr., Walter T., 1991. Relativistic Quantum Mechanics of Leptons and Fields. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands.
3. Tsai, Wu -Yang, Yıldız, Asım, 1973. Motion of an Electron in a Homogeneous Magnetic Field - Modified Propagation Function and Synchrotron Radiation, Phys.Rev.D.8 , 3446 - 3460.
4. Barut, A.O., Kraus, J., 1983. Nonperturbative Quantum Electrodynamics : The Lamb Shift, Foundations of Phys. .13 , 189 - 194.
5. Barut, A. O., 1980. Electromagnetic Interactions Beyond Quantum Electrodynamics. Foundation of Radiation Theory and Quantum Electrodynamics. (A.O.Barut, editör) Plenum, New York.
6. Barut, A.O., Van Huele, J.F., 1985. Quantum Electrodynamics based on self-energy : Lamb shift and spontaneous emission without field quantization, Phys. Rev. A. 32. , 3187 - 3195.
7. Barut, A.O., Dowling, J.P., 1987. Quantum electrodynamics based on self-energy, without second quantization: The Lamb Shift and Long-range Casimir-Polder Van der Waals forces near boundaries, Phys. Rev. A.36 , 2550 - 2556.
8. Barut, A.O., Salamin, Y., Ünal, N., 1992. Relativistic Theory of the Lamb Shift in Self-field quantum electrodynamics, Phys. Rev. A. 45 , 7740 - 7745.

9. Milonni, P.W., 1984. "Why Spontaneous Emission ?", Am. J. Phys. 52(4), 340 - 343.
10. Fain, B., 1982. Spontaneous Emission vs. Vacuum Fluctuations, IL NUOVO CIMENTO .68B , 73 -78.
11. Johnson, M.H., Lippmann, B.A., 1949. Motion in a Constant Magnetic Field. Phys. Rev. 76 , 828 - 832.
12. Johnson, M.H., Lippmann, B.A., 1950. Relativistic Motion in a Magnetic Field. Phys. Rev. 77 , 702 - 705.
13. Milonni, P.W., 1980. Classical and Quantum Theories of Radiation. Foundations of Radiation Theory and Quantum Electrodynamics. (A.O.Barut, editör) Plenum, New York.
14. Itzykson, C., Zuber, Jean - Bernard, 1980. Quantum Field Theory. Mc Graw -Hill. LONDON.
15. Berestetskiï, V.B., Lifshitz, E.M., Pitaevskiï, L.P., 1971. Relativistic Quantum Theory. Volume 4 of Course of Theoretical Physics. Part I. Pergamon Press Ltd.. OXFORD.
16. Havare, Ali, 1993. Göreli Landau Yörüngelerine Boşluk Kutuplanması ve Anormal Manyetik Moment Katkıları. Yayınlanmamış Doktora Tezi, D.Ü.Fen-Bilimleri Enstitüsü, DİYARBAKIR.
17. Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., 1980. Table of Integrals, Series and Products. Academic Press. New York.

ŞEKİLLER



Şekil : 1 - 4. duruma ait enerji düzeyleri



Şekil : 2- $\Delta |m| = 1$ Şartını sağlayan geçişler.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Hacettepe Üniversitesi Fizik Mühendisliği Bölümünü bitirdi. Aynı yıl Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 1988 yılında " Çeşitli paramanyetik İyon Çözeltilerinin T_1 Durulma Zamanı Ölçümleri" konulu Yüksek Lisans çalışmasını tamamladı. 1990 yılında da Doktora çalışmasına başladı. Yabancı dili İngilizcedir. Halen Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümün'de çalışmaktadır.

