T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
DİYARBAKIR

Bu çalışma jürimiz tarafından **M A T E M A T İ K** Anabilim Dalı' nda **D O K T O R A** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin Ünvanı, Adı ve Soyadı

Başkan	:	Prof. Dr.	H. İlhan TUTALAR (Danışman)
Üye	:	Prof. Dr.	Fethi ÇALLIALP
Üye	:	Doç. Dr.	Sezai OĞRAŞ
Yedek Üye	:	Yrd.Doç.Dr.	H. Özlem GÜNEY

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım. 03.11.2000

Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın başından bitimine ve akademik hayatım boyunca göstermiş olduğu ilgi, anlatılmaz hoşgörü ve engin bilgileri ile beni yönlendiren tez danışmanım, saygıdeğer hocam, sayın

Prof. Dr. Hasan İlhan TUTALAR' a

teşekkür ve şükranlarımı,

Çalışmalarım esnasında sorunlarımla yakından ilgilenen,saygıdeğer hocam, sayın

Doç. Dr. Sezai OĞRAŞ' a

ve tezimin yazılımı ve düzenlenmesi esnasında, değerli vakitlerini harcamayı esirgemeyen, sayın

Yrd. Doç. Dr. H.Özlem GÜNEY ' e

teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

A M A Ç

Son zamanlarda, sayısal yarıgrupların uygulama alanlarının zenginliği, bu yarıgrupların oluşumunu ve özelliklerini incelemeyi ilginç hale getirmektedir. Bu anlamda, çalışmamızın amacı üç noktadan ibarettir.

Birinci amacımız, sayısal yarıgruplar ve bunların tip dizileri hakkındaki genel bilgileri derlemektir.

İkinci amacımız, çalışmamızın esas kısımlarından ilkini oluşturmakta olup, belli formda yazılmış tip dizilerine aynı biçimde bir sayısal yarıgrubun karşılık geldiğini kanıtlamaktır.

Çalışmamızın başka bir esasını oluşturan, ARF ve Bakışıklı yarıgruplar için gereken kriterleri vermek ise son amacımızdır.

ÖZET

Bu çalışmamız, beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde,sayısal yarıgruplar ve onların tip dizileri hakkında genel bilgiler verilmektedir.

İkinci bölüm, sayısal yarıgrupların tip dizilerini bulmak için kullanılan farklı yöntemlerden oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde, Weierstrass yarıgrupları da denilen 3 ve 4 ile başlayan sayısal yarıgruplara yer verilmektedir.

Dördüncü bölüm, çalışmamızın temelini oluşturan kısımlardan ilkidir. Yani S bir sayısal yarıgrup, $t \in$ N ve $t \geq 3$ olsun. Bu durumda, $n(S)=2$, $t_1=2t+1$ ve $t_2=t$ olmak üzere $\{t_1,t_2\}$ dizisi

$$S=\{0,\ t_1+1,\ t_1+t_2+2, \rightarrow \ldots\}$$

sayısal yarıgrubunun tip dizisi,

$n(S)=3$, $t_1=4t+1$, $t_2=2t+1$ ve $t_3=t$ olmak üzere $\{t_1,t_2,t_3\}$ dizisi:

$$S=\{0,\ t_1+1,\ t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3, \rightarrow \ldots\}$$

sayısal yarıgrubunun tip dizisi,

$n(S)=4$, $t_1=8t+1$, $t_2=4t+1$, $t_3=2t+1$ ve $t_4=t$ olmak üzere $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ dizisi

$$S=\{0,\ t_1+1,\ t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3, t_1+t_2+t_3+t_4+4, \rightarrow \ldots\}$$

sayısal yarıgrubunun tip dizisidir.

Son bölüm ise çalışmamızın temelini oluşturan kısımlardan ikincisidir. Burada da, bir yarıgrubun, ARF veya bakışıklı yarıgrup olması için gereken kriterler bulunmaktadır.

ABSTRACT

This study consists of five chapters.

In the first chapter, general informations on the Numerical Semigroups and their type sequences are given.

The second chapter consists of the different methods used to find type sequences of numerical semigroups.

In the third chapter, numerical semigroups beginning with 3 and 4, referred to also as " Weierstrass semigroups " are discussed.

The fourth chapter is the first principal part of our study. Namely, let S be a numerical semigroup, $t \in \mathrm{N}$ and $t \geq 3$.

The sequence $\{t_1, t_2\}$ is the type of sequence of following numerical semigroup with $n(S)=2$:

$S=\{0, t_1+1, t_1+t_2+2, \rightarrow \ldots\}$, where $t_1=2t+1$ and $t_2=t$.

The sequence $\{t_1, t_2, t_3\}$ is the type of sequence of following numerical semigroup with $n(S)=3$:

$$S=\{0, t_1+1, t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3, \rightarrow \ldots\}$$

where $t_1=4t+1$, $t_2=2t+1$ and $t_3=t$

The sequence $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ is the type of sequence of following numerical semigroup with $n(S)=4$:

$$S=\{0, t_1+1, t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3, t_1+t_2+t_3+t_4+4, \rightarrow \ldots\}$$

where $t_1=8t+1, t_2=4t+1$, $t_3=2t+1$ and $t_4=t$.

The last chapter is the second principal part of our study. Here, the necessary criteria for a numerical semigroup to be ARF or symmetric semigroup are found.

G İ R İ Ş

Yarıgrup kavramı ilk olarak N. H. ABEL' in 1826 yılında yapılan bir çalışması ile ortaya çıkmıştır. 1937 yılında Rus matematikçi A.K.SUSKEWICH tarafından yazılan " Genelleştirilmiş Grup teorisi " adlı kitap yarıgruplar teorisinde önemli bir yere sahip olmakla birlikte, yarıgruplar teorisinde temel kaynak A.H.CLIFFORD ve G.B.PRESTON tarafından yazılan " Yarıgrupların Cebirsel Teorisi " isimli kitaptır.

Yarıgruplar Cebir, Topoloji ve Diferansiyel Geometri alanlarında oldukça geniş uygulamalara sahiptirler. Özellikle, yarıgrupların Grup ve Halka Teorisindeki önemi tartışılmaz bir gerçektir. Bununla birlikte LOCAL, NOTHERIAN LOCAL, GORENSTEIN ve ARF halkalarının tiplerinin incelenmesindeki çalışmaların kayda değer olduğu da söylenebilir ([1], [2], [3], [5], [11], [15], [17]). Halkanın yarıgrubunun tip dizilerinin incelenmesi yarıgrup teorisine yeni bir yön vermiştir.

Son dönemlerde yarıgrup teorisine yeni bir bakış ise tip dizilerinden elde edilen sayısal yarıgruplar ve onların özelliklerinin araştırılması ile bulunan ARF ve BAKIŞIKLI (SİMETRİK) yarıgruplar gibi Halka Teorisinde kullanımı yaygın olan yeni yapıların ortaya çıkması olarak söylenebilir ([6], [7], [14]).

Sonuç olarak, sayısal yarıgrubun tip dizisini karakterize etmek ve ayrıca tip dizilerinden de sayısal yarıgrubu elde etmek ayrı bir önem taşımaktadır.

1. BÖLÜM

Bu bölüm, üç kesimden oluşmaktadır. 1. kesimde sayısal yarıgruplarla ilgili genel bilgiler, 2. kesimde maksimum indirgenme boyutuna (MİB) sahip sayısal yarıgruplar, 3. kesimde ise önceki kesimlerle ilgili uyarıcı örnekler yer almaktadır.

1.1 Genel Bilgiler

Bu kesimde, sayısal yarıgruplar hakkında bilinen genel bilgilerden bahsedeceğiz. Bunu yaparken kullanacağımız semboller için [6] esas alınacaktır.

Tanım 1.1.1 : $N=\{0,1,2,...\}$ Doğal Sayılar kümesi ve $S\subseteq N$ olmak üzere, $(N,+)$ yarı grubunun sıfırı kapsayan $(S,+)$ altyarıgrubuna ***sayısal yarıgrup*** denir.

Not 1.1.2 : [2]' den her S yarıgrubun sonlu üreteçli olduğu bilinmektedir. Yani, $k\geq 1$ olmak üzere, S yarıgrubunun

$$S=\langle x_1,x_2,...,x_k\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{k}n_ix_i\ :\ n_i\in N\right\}$$

olacak şekilde sonlu tane $x_1,x_2,...,x_k$ elemanı vardır.

Ayrıca [2]' den

$$OBEB\,(x_1,x_2,...,x_k)=1 \quad\Leftrightarrow\quad Card\,(N\setminus S)<\infty$$

olduğunu biliyoruz.

Tanım 1.1.3 : S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, aşağıdaki tamsayıları tanımlayalım.

$$g(S)=\max\{x\in Z : x\notin S\}$$

$$n(S)=Card\,(\{0,1,...,g(S)\}\cap S)$$

$$\mu(S)=\min\{x\in S : x\neq 0\}$$

Burada verilen $g(S)$ ve $\mu(S)$ sayılarına sırasıyla S yarıgrubunun ***Frobenius sayısı*** ve ***katlılığı*** denir.

Gösterim 1.1.4 : Herhangi bir S sayısal yarıgrubu, $i=1,2,3,...,n(S)$ için $s_i \in S$, $n=n(S)$ ve $s_i < s_{i+1}$ olmak üzere,

$$S = \{0=s_0, s_1, s_2, ..., s_{n-1}, s_n = g(S)+1, \rightarrow ...\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada " $\rightarrow$ " ile $g(S)+1$ ifadesinden büyük her tamsayının S sayısal yarıgrubuna ait olduğu anlaşılmaktadır.

Tanım 1.1.5 : S bir sayısal yarıgrup ve $i \geq 0$ için , S_i ve $S(i)$ kümeleri sırasıyla,

$$S_i = \{x \in S : x \geq s_i\}$$

ve

$$S(i) = \{x \in \mathrm{N} : x + S_i \subseteq S\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonuç 1.1.6 : S bir sayısal yarıgrup olmak üzere ,

(i) $S_0 = S = S(0)$

(ii) $S(n) = \mathrm{N}$

(iii) $1 \leq k \leq n$ için $S_i \subset S_{i-1}$ ve $S(k-1) \subset S(k)$

olur.

İspat : Tanım 1.1.5'te verilen S_i ve $S(i)$ sayısal yarıgrupların yapılarından ispat açıktır.

Tanım 1.1.7 : S bir sayısal yarıgrup olmak üzere , $t(S) = Card(S(1) \setminus S)$ tamsayısına S sayısal yarıgrubunun ***tipi*** denir. Ayrıca $i \geq 1$ olmak üzere , $t_i(S)$ sayıları

$$t_i(S) = Card(S(i) \setminus S(i-1))$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Buna göre, $t_1(S) = t(S)$ olduğu açıktır ama genellikle $t_i(S) \neq t(S(i))$ dir ([2]). Bu yolla elde edilen $\{t_1, t_2, ..., t_{n(S)}\}$ sayı dizisine S sayısal yarıgrubunun ***tip dizisi*** adı verilir.

Önerme 1.1.8 : $S \neq \mathrm{N}$ olmak üzere, S bir sayısal yarıgrup ve $g = g(S)$ olsun. O zaman, her bir $i = 1,2,...,n(S)$ için aşağıdakiler sağlanır.

(a) $g(S(i)) = g(S) - s_i$

(b) $1 \leq t_i(S) \leq t_1(S)$

İspat : ([6, s: 2-3]) .

Önerme 1.1.9 : S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, Tanım 1.1.7' deki gösterimler altında

$$\sum_{i=1}^{n(S)} t_i(S)=g(S)+1-n(S)$$

olur.

İspat : ([6, s: 2-3]) .

Önerme 1.1.10 : $2n(S)\leq g(S)+1\leq n(S)(t(S)+1)$ gerçeklenir.

İspat : Önerme 1.1.8 ve Önerme 1.1.9'dan kolayca elde edilir.

Önerme 1.1.11 : S bir sayısal yarıgrup olmak üzere ,

$$1\leq t(S)\leq \min\{\mu(S)-1, g(S)+2-2n(S)\}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat : ([6, s: 3-4]) .

Önerme 1.1.12 : S bir sayısal yarıgrup , $g=g(S)$ ve $n=n(S)$ olsun. Bu durumda,

$$t_n=g-s_{n-1}=s_n-s_{n-1}-1$$

olarak bulunur

İspat :

$$S_{n-1}=\{s_{n-1}, g+1,\rightarrow\ldots\}$$

olduğundan

$$S(n-1)=\{x\in \mathrm{N}: x+S_{n-1}\subseteq S\}=\{x\in \mathrm{N}: x+s_{n-1}\geq g+1\}\cup\{0\}$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$S(n)\setminus S(n-1)=\mathrm{N}\setminus S(n-1)=\{x\in \mathrm{N}: 1\leq x\leq g-s_{n-1}\}$$

olur. Buradan da

$$t_n=Card(S(n)\setminus S(n-1))=g-s_{n-1}$$

çıkar. Öte yandan $s_n=g+1$ olduğundan

$$t_n=g-s_{n-1}=s_n-1-s_{n-1}$$

eşitliği elde edilir.

Uyarı 1.1.13 : Önerme 1.1.11 ve Önerme 1.1.12 deki ifadelerin bir sonucu olarak,

$$t(S) \le s_{n(S)-1} + 3 - 2n(S)$$

eşitsizliğini elde ederiz (Bu eşitsizlik , $(g(S) - s_{n(S)-1}) > 1$ olduğu durumda

$$t(S) \le g(S) + 2 - 2n(S)$$

biçiminde daha belirgin olur). Gerçekten, $t_2 = t_3 = \ldots = t_{n(S)-1} = 1$ ve $t_{n(S)} = g(S) - s_{n(S)-1}$ olduğunda $t_1(S) = t(S)$ en büyük değerini alır.

Önerme 1.1.14 : S bir sayısal yarıgrup , $g = g(S)$, $n = n(S)$ ve $t_{n-1} = t_{n-1}(S)$ olsun. O zaman , aşağıdakiler doğrudur.

$$t_{n-1} = s_{n-1} - s_{n-2} \quad (\Leftrightarrow s_{n-1} - s_{n-2} \le g - s_{n-1})$$

veya

$$t_{n-1} = s_{n-1} - s_{n-2} - 1 \quad (\Leftrightarrow s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1})$$

İspat : ([6, s: 3-5]) .

Önerme 1.1.15 : S bir sayısal yarıgrup , $g = g(S)$ $n = n(S)$ ve $t_{n-2} = t_{n-2}(S)$ olsun. O zaman ,

$$t_{n-2} = \begin{cases} s_{n-2} - s_{n-3} + 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1} \\ s_{n-1} - s_{n-3} \le g - s_{n-2} \end{pmatrix} \\ s_{n-2} - s_{n-3} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} ya & \begin{pmatrix} s_{n-1} - s_{n-2} \le g - s_{n-1} \\ s_{n-1} - s_{n-3} \le g - s_{n-2} \end{pmatrix} \\ ya\ da & \begin{pmatrix} s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1} \\ s_{n-1} - s_{n-3} > g - s_{n-2} \\ s_{n-2} - s_{n-3} \le g - s_{n-2} \\ s_{n-2} - s_{n-3} \ne s_{n-1} - s_{n-2} \end{pmatrix} \end{cases} \\ s_{n-2} - s_{n-3} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} ya & \begin{pmatrix} s_{n-1} - s_{n-2} \le g - s_{n-1} \\ s_{n-1} - s_{n-3} > g - s_{n-2} \\ s_{n-2} - s_{n-3} \le g - s_{n-2} \end{pmatrix} \\ ya\ da & \begin{pmatrix} s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1} \\ s_{n-2} - s_{n-3} > g - s_{n-2} \end{pmatrix} \\ ya\ da & \begin{pmatrix} s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1} \\ s_{n-2} - s_{n-3} = s_{n-1} - s_{n-2} \end{pmatrix} \end{cases} \\ s_{n-2} - s_{n-3} - 2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_{n-1} - s_{n-2} \le g - s_{n-1} \\ s_{n-2} - s_{n-3} > g - s_{n-2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat : ([6, s: 4-6]) .

Önerme 1.1.16 : S bir sayısal yarıgrup , $t_i(S)=t_i$, $n=n_0=n(S)$,$n_i=n(S(i))$ ve $g=g(S)$ olsun. O zaman, her bir $1\le i\le n$ için

$$t_i=s_i-s_{i-1}+n_i-n_{i-1}$$

olarak bulunur.

İspat : Her bir $1\le i\le n$ için $g(S(i))=g(S)-s_i$ olduğundan ,

$$n_{i-1}=Card\{s\in S(i-1):\ s\le g-s_{i-1}\}$$

ve

$$n_i=Card\{s\in S(i):s\le g-s_i\}$$

$$n_i=Card\{s\in S(i-1):\ s\le g-s_i\}+Card\{s\in S(i)\setminus S(i-1):\ \ s\le g-s_i\}$$

olur. Buradan

$$n_{i-1}-n_i=Card\ \{s\in S(i-1):g-s_i<s\le g-s_{i-1}\}-Card\ \{s\in S(i)\setminus S(i-1):s\le g-s_i\}$$

$$=(s_i-s_{i-1})-Card\ \{s\in S(i)\setminus S(i-1):\ g-s_i<s\le g-s_{i-1}\}$$
$$-Card\ \{s\in S(i)\setminus S(i-1):s\le g-s_i\}$$
$$=(s_i-s_{i-1})-t_i$$

elde edilir.

Önerme 1.1.17: S bir sayısal yarıgrup, $t_i=t_i(S)$, $n=n(S)$, $n_i=n(S(i))$ ve $g=g(S)$ olsun. O zaman , her bir $1\le i\le n$ için $n_i\le n-i$ şeklindedir.

İspat : ([6, s: 7]) .

Uyarı 1.1.18 : S bir sayısal yarıgrup, $t_i=t_i(S)$, $n=n(S)$, $n_i=n(S(i))$ ve $g=g(S)$ olsun. O zaman ,

(i) $n_n=n(\mathrm{N})=0$

(ii) Her bir $1\le i\le n$ için , $n_i\ge 1$

yazılır. Bu yüzden , önceki önermeden her bir $1\le i\le n-1$ için ,

$$i-n=1-n+i-1\le n_i-n_{i-1}\le n-i-n_{i-1}\le n-i-1 \qquad (1)$$

olarak bulunur.

(iii) Yukarıdaki (1) eşitsizliğinden ve Önerme 1.1.17'den

$$s_i-s_{i-1}-n+i\le t_i\le s_i-s_{i-1}+n-i-1 \qquad (2)$$

elde edilir.

Özellikle $i = n-1$ ise

$$-1 \le n_{n-1} - n_{n-2} \le 0$$

olur. Yani ,

$$s_{n-1} - s_{n-2} - 1 \le t_{n-1} \le s_{n-1} - s_{n-2}$$

çıkar. $i = n-2$ iken ,

$$-2 \le n_{n-2} - n_{n-3} \le 1$$

bulunur. Yani

$$s_{n-2} - s_{n-3} - 2 \le t_{n-2} \le s_{n-2} - s_{n-3} + 1$$

yazılır. Ayrıca her bir $1 \le i \le n$ için ve $s_0 = 0$ olmak üzere ,

$$t_i = s_i - s_{i-1} - 1$$

oluyorsa (yani , $n_i - n_{i-1} = -1$ ise) o zaman ,

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = s_n - s_{n-1} - 1 + s_{n-1} - s_{n-2} - 1 + \ldots s_2 - s_1 - 1 + s_1 - 1$$

$$= s_n - n = g + 1 - n \qquad (3)$$

çıkar. $0 \le h \le \mu$ olmak üzere ,

$$S = \{0, \mu, 2\mu, \ldots, (n-2)\mu, (n-1)\mu, (n-1)\mu + h, \rightarrow \ldots\}$$

diyelim. Bu durumda ,

$$S(1) = \{0, \mu, 2\mu, \ldots, (n-2)\mu, (n-2)\mu + h, \rightarrow \ldots\}$$

$$S(i) = \{0, \mu, 2\mu, \ldots, (n-i-1)\mu, (n-i-1)\mu + h, \rightarrow \ldots\}$$

$$S(n-1) = \{0, h, \rightarrow \ldots\}$$

elde ederiz ve her biri bir sayısal yarıgrup olurlar. Bu nedenle

$$t_1 = \ldots = t_{n-1} = \mu - 1$$

ve

$$t_n = h - 1 = g - s_{n-1}$$

olarak yazılır. Yani bu durumda, her $0 \le i \le n$ için,

$$t_i = s_i - s_{i-1} - 1 \qquad (4)$$

bulunur.

Not 1.1.19 : Uyarı 1.1.18, bir S Sayısal yarıgrubunun tip dizisinin elemanlarının sınırlarını oluşturmakta kullanılabilir.

Tanım 1.1.20 : Uyarı 1.1.18'de verilen (4) eşitliğini sağlayan sayısal yarıgruplara ***ARF yarıgrupları*** denir.

Tanım 1.1.21 : Tip dizisi $\{1,1,...1\}$ biçiminde olan bir sayısal yarıgruba ***Bakışıklı (Simetrik) yarıgrup*** denir.

Tanım 1.1.22 : Tip dizisi $\{2,1,1,...1\}$ şeklinde olan bir sayısal yarıgruba ***Bakışıklımsı (Simetriğimsi) yarıgrup*** denir.

Not 1.1.23 : Bir ARF yarıgrubun bakışıklı yarıgrup olması gerekmediği gibi bakışıklı bir yarıgrubun bir ARF yarıgrup olması da gerekmez(Bkz.Örnek 1.3.4 ve Örnek 5.2.2).

Teorem 1.1.24 : S bir sayısal yarıgrup , $n(S)=2$ ve $g=g(S)$ olmak üzere, $\{t_1,t_2\}$ pozitif tamsayı dizisinin S yarıgrubunun bir tip dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul, $1 \leq t_2 \leq t_1$ ve $t_1+t_2=g-1$ olmasıdır.

İspat : ([2, s: 16]) .

Teorem 1.1.25 : S bir sayısal yarıgrup , $n(S)=3$ ve $g=g(S)$ olmak üzere, pozitif tamsayıların $i=2,3$ için $1 \leq t_i \leq t_1$ olacak şekilde bir $\{t_1,t_2,t_3\}$ dizisi verilsin. Bu dizinin S sayısal yarıgrubunun tip dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul, $\{t_1,t_2,t_3\}$ dizisinin aşağıdaki koşullardan birini sağlamasıdır:

(i) $t_2 \leq t_3$ ve $t_1 \geq t_2+t_3-1$

(ii) $t_2 \geq t_3$ ve $t_1=t_2$

(iii) $t_2 \geq t_3$ ve $t_1 \geq t_2+t_3+1$

İspat : ([6, s: 8-9]) .

Teorem 1.1.26 : S bir sayısal yarıgrup , $n(S)=4$ ve $g=g(S)$ olmak üzere, pozitif tamsayıların $i=2,3,4$ için $1 \leq t_i \leq t_1$ olacak şekilde bir $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ dizisi verilsin. Bu dizinin S sayısal yarıgrubunun tip dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul, $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ dizisinin aşağıdaki koşullardan birini sağlamasıdır:

i) $t_3 \leq t_4$, $t_2 \leq t_4$ ve $t_1 \geq t_2+t_3+t_4-2$

ii) $t_3 \leq t_4$, $t_4 \leq t_2 \leq t_3+t_4-1$ ve $t_1 \geq t_2+t_3+t_4$

iii) $t_3 \leq t_4$, $t_4 \leq t_2 \leq t_3+t_4-1$ ve $t_1 = t_2+t_3-1$

iv) $t_3 \leq t_4$, $t_3+t_4-1 \leq t_2$ ve $t_1 \geq t_2+t_3+t_4+2$

v)	$t_3 \leq t_4$,	$t_3+t_4-1 \leq t_2$	ve	$t_1=t_2+t_3+1$
vi)	$t_3 \leq t_4$,	$t_3+t_4-1 \leq t_2$	ve	$t_1=t_2+1$
vii)	$t_3 \geq t_4$,	$1< t_2 \leq t_4+1$	ve	$t_1 \geq t_2+t_3+t_4-2$
viii)	$t_3 \geq t_4$,	$t_4+1 \leq t_2 \leq t_3+t_4+1$ $(t_2 \neq t_3+1)$	ve	$t_1 \geq t_2+t_3+t_4$
ix)	$t_3 \geq t_4$,	$t_4+1 \leq t_2 \leq t_3+t_4+1$ $(t_2 \neq t_3+1)$	ve	$t_1=t_2+t_3-1$
x)	$t_3 \geq t_4$,	$t_3+t_4+1 \leq t_2$	ve	$t_1 \geq t_2+t_3+t_4+2$
xi)	$t_3 \geq t_4$,	$t_3+t_4+1 \leq t_2$	ve	$t_1=t_2+t_3+1$
xii)	$t_3 \geq t_4$,	$t_3+t_4+1 \leq t_2$	ve	$t_1=t_2$
xiii)	$t_3 \geq t_4$,	$t_2=t_3$	ve	$t_1 \geq t_2+t_3+t_4+2$
xiv)	$t_3 \geq t_4$,	$t_2=t_3$	ve	$t_1=t_2+t_3+1$
(xv)	$t_3 \geq t_4$		ve	$t_1= t_2=t_3$

İspat : ([6, s: 9-14]) .

Not 1.1.27 : Verilen tip dizisine karşılık bir tek sayısal yarıgrup geldiği gibi birden fazla sayısal yarıgrup da gelebilir (Bknz. Örnek 1.3.1 ve Örnek 1.3.2).

Uyarı 1.1.28 : Verilen tip dizisine karşılık hiçbir sayısal yarıgrup gelmeyebilir (Bknz. Örnek 1.3.3).

Tanım 1.1.29 : S bir sayısal yarıgrup olmak üzere ,

$$g(S)+1-n(S)=t(S).n(S)$$

eşitliği sağlanıyorsa S sayısal yarıgrubuna ***Maksimal uzunluklu sayısal yarıgrup*** denir. Benzer olarak ;

$$g(S)+1-n(S)=t(S).n(S)-1$$

oluyorsa bu durumda S sayısal yarıgrubuna ***hemen hemen maksimal uzunluklu sayısal yarıgrup*** adı verilir.

Sonuç 1.1.30 : S bir sayısal yarıgrup , $t_i=t_i(S)$, $n=n(S)$, $n_i=n(S(i))$ ve $g=g(S)$ olsun. O zaman , her bir $1 \leq i \leq n$ için $n_i+s_i=n+t_1+t_2+...+t_i$ eşitliği sağlanır.

İspat : ([6, s: 17]) .

Sonuç 1.1.31 : S bir sayısal yarıgrup , $t_i = t_i(S)$, $n = n(S) \geq 2$, $n_i = n(S(i))$ olsun. O zaman , her bir $1 \leq i \leq n-1$ için ;

$$\left(\sum_{j=1}^{i} t_j \right) + i \leq s_i \leq n + \left(\sum_{j=1}^{i} t_j \right) - 1$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : ([6, s: 17]) .

Uyarı 1.1.32 : S bir sayısal yarıgrup , $t_i = t_i(S)$, $n = n(S) \geq 2$ ve $\mu = \mu(S)$ olsun.

(a) $i = 1$ ise

$$t_1 + 1 \leq \mu \leq t_1 + n - 1$$

olur. Ayrıca ,

$$\max\{1, \mu - n + 1\} \leq t_1 \leq s_1 - 1$$

eşitsizliği elde edilir. Özellikle $n > 1$ olmak üzere ,

$$\mu - n + 1 \leq t_1 \qquad (5)$$

eşitsizliği , bir S sayısal yarıgrubunun bakışıklı (simetrik) olması için gerekli koşul olarak verilir.

$t_1 = 1$ ise (5) eşitsizliği $\mu \leq n$ şeklinde olur ki bu durum S sayısal yarıgrubunun bakışıklı (simetrik) olmasını gerektirir.

(b) n , fazla büyük olması gerekmeyen bir doğal sayı olmak üzere , $n > 1$ iken verilen $\{t_1, t_2, \ldots t_n\}$ tip dizili bir S sayısal yarıgrubunun s_i elemanları için Sonuç 1.1.31 ve aşağıdaki gösterimde verildiği gibi bir sınır elde etmek mümkündür.

Gösterim 1.1.33 : $n \geq 5$ olmak üzere, tip dizisi $\{t_1, t_2, \ldots t_n\}$ olan bir S sayısal yarıgrubunun aşağıdaki koşulları sağladığı bilinmektedir :

(1) $g = g(S) = t_1 + t_2 + \ldots + t_n + n - 1$ (Önerme 1.1.19'dan)

(2) $s_{n-1} = g - t_n$ (Önerme 1.1.12'den)

(3) (Önerme 1.1.14'ten)

Ya

$$s_{n-2} = s_{n-1} - t_{n-1} \quad (\Leftrightarrow s_{n-1} - s_{n-2} \leq g - s_{n-1})$$

ya da

$$s_{n-2} = s_{n-1} - t_{n-1} - 1 \quad (\Leftrightarrow s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1})$$

(4) (Önerme1.1.15'ten)

Ya

$$s_{n-3} = s_{n-2} - t_{n-2} + 1 \quad (\Leftrightarrow s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1} \; ve \; s_{n-1} - s_{n-3} \leq g - s_{n-2})$$

ya da

$$s_{n-3} = s_{n-2} - t_{n-2} \quad \left(\begin{array}{l} ya \;\; s_{n-1} - s_{n-2} \leq g - s_{n-1} \;\; ve \;\; s_{n-1} - s_{n-3} \leq g - s_{n-2} \\ yada \; s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1}, \; s_{n-1} - s_{n-3} > g - s_{n-2} \; ve \\ s_{n-2} - s_{n-3} \leq g - s_{n-2} \;\; , \; s_{n-2} - s_{n-3} \neq s_{n-1} - s_{n-2} \end{array} \right)$$

ya da

$$s_{n-3} = s_{n-2} - t_{n-2} - 1 \quad \left(\begin{array}{l} ya \;\; s_{n-1} - s_{n-2} \leq g - s_{n-1}, \;\; s_{n-1} - s_{n-3} > g - s_{n-2} \\ ve \;\; s_{n-2} - s_{n-3} \leq g - s_{n-2} \\ ya\,da \; s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1}, \;\; s_{n-2} - s_{n-3} > g - s_{n-2} \\ ya\,da \; s_{n-1} - s_{n-2} > g - s_{n-1}, \;\; s_{n-2} - s_{n-3} = s_{n-1} - s_{n-2} \end{array} \right)$$

ya da

$$s_{n-3} = s_{n-2} - t_{n-2} - 2 \quad (\Leftrightarrow s_{n-1} - s_{n-2} \leq g - s_{n-1} \; ve \; s_{n-2} - s_{n-3} > g - s_{n-2})$$

(5) (Sonuç 1.1.31'den) Her bir $1 \leq i \leq n-4$ için ;

$$\left(\sum_{j=1}^{i} t_j \right) + i \leq s_i \leq n + \left(\sum_{j=1}^{i} t_j \right) - 1$$

olarak yazılır.

1.2 Maksimum İndirgenme Boyutlu (MİB) Sayısal Yarıgruplar

Bu kesimde , bir önceki kesimde verilen bilgiler ışığında Maksimum İndirgenme Boyutlu (MİB) sayısal yarıgruplardan bahsedeceğiz .

Tanım 1.2.1 : S bir sayısal yarıgrup ve $k \in \mathrm{N}$ olmak üzere, $i = 1, 2, \ldots, k$ için $s_i \in S$ ve $s_i < s_{i+1}$ olsun. Eğer S sayısal yarıgrubu minimum sayıda elemanla üretiliyorsa, yani

$$S = \langle s_1, s_2, \ldots s_k \rangle$$

şeklinde yazılıyorsa , o zaman $M = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ kümesine S sayısal yarıgrubunun ***üreteçlerinin minimal sistemi*** denir.

Tanım 1.2.2 : Bir S sayısal yarıgrubun üreteçlerinin minimal sisteminin eleman sayısına S sayısal yarıgrubunun ***indirgenme boyutu*** denir ve $e(S)$ ile gösterilir. Buna göre , $S = \langle s_1, s_2, \ldots s_k \rangle$ sayısal yarıgrup ve $M = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ kümesi S sayısal yarıgrubunun üreteçlerinin minimal sistemi olmak üzere,

$$e(S) = Card(M)$$

yazılır.

Tanım 1.2.3 : S bir sayısal yarıgrup ve $\mu = \mu(S)$ olsun. Genellikle $e(S) \leq \mu$ olarak ifade edilir. Eğer $e(S) = \mu$ oluyorsa, o zaman S sayısal yarıgrubuna ***Maksimum İndirgenme Boyutlu (MİB) sayısal yarıgrup*** adı verilir .

ARF yarıgruplarının maksimum indirgenme boyutlu (MİB) oldukları bilinmektedir. ([11, s : 15]).

Uyarı 1.2.4 : Maksimal indirgenme boyutlu bir sayısal yarıgrubun maksimal uzunluklu olması gerekmediği gibi, maksimum uzunluklu bir sayısal yarıgrubun maksimum indirgenme boyutlu olması da gerekmez (Bknz. Örnek 1.3.6 ve Örnek 1.3.7).

Üstelik, bakışıklı bir sayısal yarıgrubun maksimum indirgenme boyutlu olması ve maksimum indirgenme boyutlu bir sayısal yarıgrubun da bakışıklı olması gerekmez (Bknz. Örnek 1.3.4 ve Örnek 1.3.5)

1.3 Örnekler

Bu kesimde ise önceki kesimlerde sözü edilen bazı not ve uyarılarla ilgili ilginç örnekler vereceğiz.

Örnek 1.3.1 :$\{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \{6,2,1,1\}$ tip dizisine karşılık gelen bir tek sayısal yarıgrup vardır ve bu sayısal yarıgrup , Teorem 1.1.26' da (iv) ile verilen koşulu, yani

$$t_3 \leq t_4 \ , \ t_3 + t_4 - 1 \leq t_2 \quad ve \quad t_1 \geq t_2 + t_3 + t_4 + 2$$

eşitsizliklerini sağlar .

Bu durumda , söz konusu sayısal yarıgrup

$$S=\{0,t_1+1,\ t_1+t_2+3,\ t_1+t_2+t_3+3\ ,t_1+t_2+t_3+t_4+4,\to \dots\ \}$$
$$=\{0,7,11,12,14,\to \dots\}$$

şeklinde yazılır.

Örnek 1.3.2 : Şimdi de $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=\{6,1,1,1\}$ sayı dizisini ele alalım .Bu diziyi tip dizisi olarak kabul eden dört farklı sayısal yarıgrup vardır.Çünkü, bu dizi Teorem 1.1.26'da (i), (ii), (iv) ve (xiii) ile verilen koşulları gerçekler. Bu durumda gerçeklenen her bir koşula bir sayısal yarıgrup karşılık gelecektir . Yani ;

(i) koşuluna karşılık gelen sayısal yarıgrup :

$$S=\{0,t_1+3,\ t_1+t_2+3,\ t_1+t_2+t_3+3\ ,t_1+t_2+t_3+t_4+4,\to \dots\ \}$$
$$=\{0,9,10,11,13,\to \dots\}\ ;$$

(ii) koşuluna karşılık gelen sayısal yarıgrup :

$$S=\{0,t_1+2,\ t_1+t_2+3,\ t_1+t_2+t_3+3\ ,t_1+t_2+t_3+t_4+4,\to \dots\ \}$$
$$=\{0,8,10,11,13,\to \dots\}\ ;$$

(iv) koşuluna karşılık gelen sayısal yarıgrup :

$$S=\{0,t_1+1,\ t_1+t_2+3,\ t_1+t_2+t_3+3\ ,t_1+t_2+t_3+t_4+4,\to \dots\ \}$$
$$=\{0,7,10,11,13,\to \dots\}\ ;$$

ve son olarak

(xiii) koşuluna karşılık gelen sayısal yarıgrup :

$$S=\{0,t_1+1,\ t_1+t_2+2,\ t_1+t_2+t_3+3\ ,t_1+t_2+t_3+t_4+4,\to \dots\ \}$$
$$=\{0,7,9,11,13,\to \dots\}$$

olarak bulunur.

Örnek 1.3.3 : $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=\{4,3,4,3\}$ sayı dizisini , tip dizisi olarak kabul eden hiçbir sayısal yarıgrup yoktur. Çünkü, bu dizi Teorem 1.1.26' da verilen koşullardan hiçbirini sağlamaz.

Örnek 1.3.4 : $S=\{0,4,6,8,\to \dots\}$ sayısal yarıgrubunun tip dizisinin

$$\{t_1,t_2,t_3\}=\{3,1,1\}$$

olduğu kolayca görülebilir. Üstelik, S sayısal yarıgrubu maksimum indirgenme boyutludur.

Çünkü

$$S=\{0,4,6,8,\rightarrow\ldots\}=\langle\ 4,6,7,9\ \rangle$$

yazabiliriz ve bu durumda S sayısal yarıgrubunun üreteçlerinin sistemi,

$$M=\{\ 4,6,7,9\ \}$$

kümesinden başka bir şey olamaz. O halde,

$$\mu=\mu(S)=4=e(S)$$

olarak bulunur. Ancak S sayısal yarıgrubunun tip dizisi

$$\{t_1,t_2,t_3\}=\{3,1,1\}$$

olduğundan S bakışıklı değildir.

Örnek 1.3.5 : $S=\{0,3,5,6,8,\rightarrow\ldots\}$ sayısal yarıgrubunu incelediğimizde, tip dizisinin

$$\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=\{1,1,1,1\}$$

şeklinde yazıldığını ve dolayısıyla S sayısal yarıgrubunun bakışıklı olduğunu söyleyebiliriz. Ancak S sayısal yarıgrubu maksimum indirgenme boyutlu değildir. Çünkü,

$$S=\{0,3,5,6,8,\rightarrow\ldots\}=\langle\ 3,5\ \rangle$$

biçiminde yazılıp S sayısal yarıgrubunun üreteçlerinin minimal sistemi,

$$M=\{\ 3,5\ \}$$

olarak yazılır. Bu durumda,

$$\mu=\mu(S)=3 \quad \text{ve} \quad e(S)=2$$

olduğundan $\mu=\mu(S)\neq e(S)$ elde edilir .

Örnek 1. 3. 6 : S sayısal yarıgrubunun

$$S=\{0,6,10,12,14,\rightarrow\ldots\}$$

şeklinde olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda , tip dizisinin

$$\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=\{5,3,1,1\}$$

biçiminde olduğu açıktır. S sayısal yarıgrubu maksimum indirgenme boyutludur. Çünkü,

$$S=\{0,6,10,12,14,\rightarrow\ldots\}=\langle 6,9,10,14,17,19\rangle$$

olarak yazılabildiğinden S sayısal yarıgrubu için $\mu=\mu(S)=6=e(S)$ olarak bulunur.

Başka bir deyişle, S sayısal yarıgrubu maksimum indirgenme boyutludur. Çünkü, S sayısal yarıgrubu ARF yarıgrubudur. Öte yandan, S sayısal yarıgrubu maksimum uzunluklu değildir :

$$g(S) = 13 \quad , \quad n(S) = 4 \quad ve \quad t(S) = t_1(S) = 5$$

olduğundan dolayı

$$g(S) + 1 - n(S) \neq t(S)n(S)$$

elde edilir.

Örnek 1.3.7 : Son olarak $S = \{0,3,4,6,\rightarrow \ldots\}$ sayısal yarıgrubuna baktığımızda, S sayısal yarıgrubunun maksimal uzunluklu olduğunu, fakat maksimum indirgenme boyutlu olmadığını söyleyebiliriz. Çünkü

$$g(S) = 5 \quad , \quad n(S) = 3 \quad ve \quad t(S) = t_1(S) = 1$$

olduğundan dolayı

$$g(S) + 1 - n(S) = t(S)n(S)$$

eşitliği sağlanır. Yani , S sayısal yarıgrubu maksimal uzunlukludur. Ancak

$$\mu = \mu(S) = 3 \neq 2 = e(S)$$

elde edildiğinden dolayı S sayısal yarıgrubu maksimal indirgenme boyutlu olmaz.

2. BÖLÜM

Bu bölüm iki kesimden oluşmaktadır. Birinci kesimde, sayısal yarıgrupların tip dizilerini bulmak için önceki bölümde verilen yöntemlerden farklı olarak bazı algoritmalardan söz edeceğiz. İkinci kesimde de bu algoritmaların uygulaması anlamında örneklere yer vereceğiz.

2 .1 Tip dizileri için algoritmalar

Verilen bir sayısal yarıgrubun tip dizisinin tam olarak bulunması ile ilgili farklı algoritmaları bu kesimde sunacağız.

Tanım 2.1.1 : S bir sayısal yarıgrup , $s \in S$ ve $s \neq 0$ sayısı sabit olsun.

$$e_0 = s \ \ ve \ \ e_1 = \min \{ t \in S : t \not\equiv 0 \ (\bmod s) \}$$

diyelim. O zaman ,

$$e_i = \min \{ t \in S : t \not\equiv e_j \ (\bmod s) \ , \ j = 0,1,2,\ldots,i-1 \}$$

şeklinde tanımlayıp oluşturduğumuz $\{ e_0 , e_1 , e_2 , \ldots , e_{s-1} \}$ sayı dizisine (mod s) ye göre S sayısal yarıgrubunun ***standart tabanı*** denir.

Uyarı 2.1.2 : Herhangi bir S sayısal yarıgrubunun standart tabanı, bu yarıgrubun üreteçlerinin bir kümesi olduğundan S sayısal yarıgrubunun üreteçlerinin minimum kümesini kapsar.

Tanım 2.1.3 : $n(S) = n \ ve \ e_0 = \mu = \mu(S)$ olmak üzere herhangi bir S sayısal yarıgrubu ,

$$S = \{ 0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n = g+1, \rightarrow \ldots \}$$

şeklinde verilsin. Her bir $i = 1,2,\ldots,n$ için ,

$$BS = BS(0) = \{ e_0^{(0)}, e_1^{(0)}, \ldots, e_{\mu-1}^{(0)} \}$$

kümesine (mod μ) ye göre S sayısal yarıgrubunun ***standart tabanı*** denir.

Ayrıca , (mod μ) ye göre S (i) sayısal yarıgrubunun standart tabanı da

$$BS(i) = \{ e_0^{(i)}, e_1^{(i)}, \ldots, e_{\mu-1}^{(i)} \}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.1.4 : S herhangi bir sayısal yarıgrup, $BS(0)$ ve $BS(i)$ kümeleri Tanım 2.1.3' te verildiği gibi sırasıyla, S sayısal yarıgrubunun standart tabanı ve S(i) sayısal yarıgrubunun standart tabanı olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} t_i(S) &= Card\,(S(i) \setminus S(i-1)) \\ &= Card\left\{e_j^{(i-1)} : e_j^{(i-1)} \in BS(i-1),\ e_j^{(i-1)} \notin BS(i),\ 0 \le j \le \mu-1 \right\} \\ &= Card\left\{e_j^{(i)} : e_j^{(i)} \in BS(i),\ e_j^{(i)} \notin BS(i-1),\ 0 \le j \le \mu-1 \right\} \\ &= Card\left\{e_j^{(i-1)} : e_j^{(i-1)} > \mu,\ e_j^{(i-1)} + s \notin BS(0),\ 0 \le j \le \mu-1,\ s_i \le s \le s_{n-1},\ \forall s\right\} \end{aligned}$$

şeklinde olur.

İspat : ([6, s : 23-24]).

Sonuç 2.1.5 : Aşağıdaki eşitlik Teorem 2.1.4 'den kolayca elde edilir. $i = n$ için

$$t_n(S) = Card\left\{e_j^{(i)} : \ e_j^{(i-1)} > \mu \right\}$$

Aşağıdaki önermede S sayısal yarıgrubunun bir tip dizisi için bir algoritma verilecektir.

Önerme 2.1.6 : S bir sayısal yarıgrup, $n = n(S)$ ve $\mu = \mu(S)$ olsun. Bu durumda S sayısal yarıgrubunun $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ şeklinde bir tip dizisi vardır.

İspat : S sayısal yarıgrubu

$$S = \{0 = s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n = g+1, \to \ldots\}$$

şeklinde olsun. Her bir $i = 1, 2, \ldots, n$ için ,

$$BS(i) = \left\{e_0^{(i)}, e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots, e_{\mu-1}^{(i)} \right\}$$

kümesinin Tanım 2.1.3 'ten (mod μ) ye göre S (i) sayısal yarıgrubunun standart tabanı olduğunu biliyoruz. Her bir $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $j = 0, 1, \ldots, \mu-1$ için, $e_j^{(i-1)} \in BS(i-1)$ olmak üzere

$$e_0^{(i-1)} < e_1^{(i-1)} < \ldots < e_h^{(i-1)} = \mu < e_{h+1}^{(i-1)} < \ldots < e_{\mu-1}^{(i-1)} \tag{6}$$

ve $0 \le h \le \mu-1$ olacak şekilde bir h tamsayısı vardır. $a_h = \mu$ alırsak,

$$a_j = \begin{cases} e_j^{(i-1)} & ; \begin{cases} ya\ \ j < h \\ yada\ \ \exists s \in S;\ s_i \le s \le s_{n-1},\ e_j^{(i-1)} + s \in BS(0) \end{cases} \\ e_j^{(i-1)} - \mu & ;\ Diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{7}$$

olmak üzere Teorem 2.1.4' den

$$BS(i) = \{a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-1}\}$$

yazılır.

Bu durumda ,

$$t_i(S) = Card\left\{ j : a_j = e_j^{(i-1)} - \mu \right\}$$

olarak bulunur.

Şimdi de aşağıdaki önerme ile bir S ayısal yarıgrubunun bir tip dizisi için bir diğer algoritma vereceğiz.

Önerme 2.1.7 : S bir sayısal yarıgrup , $n = n(S)$ ve $\mu = \mu(S) = e_0^{(0)}$ olmak üzere, S sayısal yarıgrubunun $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ şeklinde bir tip dizisi vardır.

İspat : S sayısal yarıgrubunun (mod μ) 'ye göre standart tabanının

$$BS = BS(0) = \left\{ e_0^{(0)}, e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, ..., e_{\mu-1}^{(0)} \right\}$$

şeklinde verildiğini biliyoruz. O zaman $0 \leq j \leq \mu - 1$ için $f_j = \alpha_j \mu + j$ olmak üzere

$$\left\{ f_0, f_1, ..., f_{\mu-1} \right\} = \left\{ e_0^{(0)}, e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, ..., e_{\mu-1}^{(0)} \right\}$$

diyelim. Bu durumda, $f_0 = \mu$ ve $\alpha_0 = 1$ olduğu açıktır. Üstelik, her $j \geq 1$ tamsayısı için , $1 \leq \alpha_j \leq n$ elde edilir. Gerçekten,

$$g(S) + \mu = \max\left\{ f_1, f_2, ..., f_{\mu-1} \right\}$$

olduğundan ve $n\mu \geq g(S) + 1$ eşitsizliğinden $\alpha_j \leq n$ çıkar. Buna göre, önceki varsayımlardan

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \alpha_j - t_1 - t_2 - ... - t_n = 0$$

yani,

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} t_i \qquad (8)$$

elde edilir. Böylece , (8) eşitliğinden α_j tamsayı dizisini buluruz. Bu dizinin her bir elemanına S sayısal yarıgrubunun tip dizisinin bir elemanı karşılık geleceği açıktır.

Sonuç 2.1. 8 : S bir sayısal yarıgrup , $n = n(S)$ ve $\mu = \mu(S)$ olsun. O zaman , aşağıdaki koşullar gerçeklenir.

(a) S sayısal yarıgrubu bakışıklıdır $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\mu-1} \alpha_j = n$

(b) S sayısal yarıgrubu bakışıklımsıdır $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\mu-1} \alpha_j = n + 1$

İspat : ([6, s: 27-29]).

Önerme 2.1. 9 : S bir sayısal yarıgrup , $n=n(S)\geq 2$ olmak üzere , her bir $i=1,2,...,n$ için $1\leq t_i\leq t_1$ olacak şekilde $\{t_1,t_2,...,t_n\}$ tamsayı dizisi, S sayısal yarıgrubun tip dizisi olsun. O zaman $\mu=\mu(S)$ olmak üzere , aşağıdaki (a) – (f) koşullarını sağlayan,

$$\alpha_1\mu+1=f_1\ ,\ \alpha_2\mu+2=f_2\ ,...,\ \alpha_{\mu-1}\mu+\mu-1=f_{\mu-1} \text{ ve } \mu-1\geq 1$$

olacak şekilde μ tamsayı vardır :

(a) $\sum_{j=1}^{\mu-1}\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}t_i$

(b) $f_h=\alpha_h\mu+h=g(S)+\mu$ olacak şekilde $\exists h,1\leq h\leq\mu-1$.

(c) $\forall j, 1\leq j\leq\mu-1$ için $\alpha_j\leq\alpha_h$ dır. Ayrıca , $j>h$ ise $\alpha_j<\alpha_h$ olur.

(d) $x\in\mathrm{N}$ ve $0\leq j\leq\mu-1$ için $x=y\mu+j$ olmak üzere ,

$$x\in S\Rightarrow\alpha_j\leq y$$
$$x\notin S\Rightarrow\alpha_j>y$$

yazılır.

(e) $(m-1)\mu<g(S)+1\leq m\mu$ olacak şekilde $m\in\mathrm{N}$ var olsun. O zaman,

$$g(S)+1=(m-1)\mu+r$$

şeklinde ise

$$\mu-1-n-m\leq Card\{\alpha_j : ya\ \alpha_j=(m-1)\ ve\ j\geq r\ \ yada\ \alpha_j=m\ \}\leq t_1$$

olur.

(f) $t_1(S)=\mu-1-Card\{f_j\in BS(0):f_j>\mu\ ,\exists f_u\in BS(0)\ ,f_u+f_j\in BS(0)\}$

yazılır.

İspat : ([6, s: 28-29]).

2. 2 . Algoritmaların uygulamaları

Bu kesimde, verilen bir S sayısal yarıgrubunun standart tabanını kullanarak, söz konusu algoritmalar yolu ile bu sayısal yarıgrubun tip dizilerinin bulunmasına ilişkin çarpıcı örnekleri tartışacağız.

Örnek 2.2.1 : $S=\{0,8,12,\rightarrow...\}$ sayısal yarıgrubunun tip dizisini bulalım.Bunun için önce S sayısal yarıgrubunun standart tabanını elde edeceğiz. Tanımlar gereği

$$e_0=\mu=8\quad ve\quad e_1=\min\{t\in S:\ t\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 8\ )\}=12$$

çıkar ve böyle devamla

$$e_2 = \min\{t \in S : \ t \not\equiv e_j \ (\bmod 8)\ ,\ j=0,1\ \} = 13$$

ve

$$e_3 = \min\{t \in S : \ t \not\equiv e_j \ (\bmod 8)\ ,\ j=0,1,2\ \} = 14$$

olur. Benzer şekilde

$$e_4 = 15,\ e_5 = 17,\ e_6 = 18\ ,\ e_7 = 19$$

olarak bulunur. Bu durumda , S sayısal yarıgrubunun (mod 8) 'e göre standart tabanı

$$BS = BS(0) = \{8,12,13,14,15,17,18,19\}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de S(1) sayısal yarıgrubunun (mod 8)' e göre standart tabanını bulalım; $i=1$ için, (6) eşitsizliğinden

$$e_0^{(0)} < e_1^{(0)} < \ldots < e_h^{(0)} = \mu < e_{h+1}^{(0)} < \ldots < e_{\mu-1}^{(0)}$$

ve $0 \le h \le 7$ olacak şekilde h tamsayısı vardır. Ancak $1 \le h \le 7$ olamaz. Aksine, örneğin $h=1$ olsun. O zaman,

$$e_1^{(0)} = \mu = 8$$

olur. Bu ise

$$e_1^{(0)} = 12$$

oluşu ile çelişir. $h=2,3,\ldots,7$ için de bir çelişkinin elde edileceği benzer işlemlerle bulunur. Böylece, $h=0$ olmak zorundadır. O halde, $a_0 = \mu = 8$ olarak bulunur. Bu durumda, Önerme 2.1.6'de verilen (7) formülü kullanıldığında

$$a_1 = e_1^{(0)} = 8 \quad \text{veya} \quad a_1 = e_1^{(0)} - \mu = 4$$

olur. Ancak, $a_1 = e_1^{(0)} = 8$ olamaz. Çünkü, $e_1^{(0)} + s = 12+8=20 \notin BS(0)$ çıkar.

O halde $a_1 = 4$ olmalıdır. Benzer işlemlerle ,

$$a_2 = 13-8 = 5\ ,\ a_3 = 14-8=6\ ,\ a_4 = 15-8\ ,$$
$$a_5 = 17-8=9\ ,\ a_6 = 18-8=10\ \ ve\ \ a_7 = 19-8=11$$

oldukları görülür. Bu durumda , $S(1)$ sayısal yarıgrubunun standart tabanı

$$BS(1) = \{\ 8,4,5,6,7,\ 9,10,11\}$$

olacaktır. Böylece, Teorem 2.1.4' ten

$$\begin{aligned} t_i(S) &= Card\left\{e_j^{(0)} : e_j^{(0)} \in BS(0)\ ,\ e_j^{(0)} \notin BS(1)\ ,\ 0 \le j \le 7\ \right\} \\ &= Card\ \{\ 12,13,14,15,17,18,19\ \} \\ &= 7 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $t_2(S)$ sayısını bulalım. $i=2$ için, (6) eşitsizliğinden

$$e_0^{(1)} < e_1^{(1)} < \ldots < e_h^{(1)} = \mu < e_{h+1}^{(1)} < \ldots < e_{\mu-1}^{(1)}$$

ve $0 \leq h \leq 7$ olacak şekilde h tamsayısı vardır. Ancak, yukarıdaki i=1 halinde h için yapılan benzer işlemler sonucunda $1 \leq h \leq 7$ olamaz. Böylece, $h=0$ olmak zorundadır.

Bu durumda, $a_0 = \mu = 8$ olur. Şimdi de S (2) sayısal yarıgrubunun standart tabanı olan BS (2) kümesinin diğer elemanları bulalım.

$i=2$ ve $n=n(S)=2$ olduğundan Önerme 2.1.6' te (7) formülü ile verilen a_j tamsayılarının yazılışındaki,

$$\exists s \in S,\ s_i \leq s \leq s_{n-1}\ ,\ e_j^{(i-1)} + s \in BS(0)$$

koşulu kesinlikle geçerli olmaz. Çünkü,

$$s_2 \leq s \leq s_1$$

olur ki bu,

$$s_i < s_{i+1}$$

oluşu ile çelişir. O zaman, geriye

$$e_j^{(i-1)} - \mu > 0$$

olduğu durum kalmaktadır. O halde,

$$a_5 = 9-8 = 1\ ,\ a_6 = 10-8 = 2 \quad ve \quad a_7 = 11-8 = 3$$

çıkar. Böylece, S (2) sayısal yarıgrubunun standart tabanı,

$$BS(2) = \{8, 1, 2, 3\}$$

olarak bulunur. Bu durumda, Sonuç 2.1.5 ' ten

$$\begin{aligned} t_2(S) &= Card\{j : a_j - \mu\ \} \\ &= Card\{j : a_j - 8\ \} \\ &= Card\{5, 6, 7\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

olur. Yani sonuçta,

$$S = \{0, 8, 12, \rightarrow \ldots\}$$

sayısal yarıgrubunun tip dizisi

$$\{t_1, t_2\} = \{7, 3\}$$

olarak bulunur.

Aşağıdaki örnekte verilen S sayısal yarıgrubunun tip dizisini Sonuç 2.1.8, Önerme 2.1.9 ve Önerme 2.1.7'den yararlanarak bulalım.

Örnek 2.2.2 : $S=\{0,3,5,6,8,\rightarrow...\}$ sayısal yarıgrubunun tip dizisini hesaplayalım . Bunun için önce S sayısal yarıgrubunun standart tabanı BS (0) kümesini bulmalıyız.

$$e_0=\mu=3 \quad ve \quad e_1=\min\{t\in S:\ t\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)\}=5$$

$$e_2=\min\{t\in S:\ t\not\equiv e_j\ (\mathrm{mod}\ 3),\ j=0,1\}=10$$

olur. Bu durumda , S sayısal yarıgrubunun standart tabanı ,

$$BS=BS(0)=\{3,5,10\}$$

elde edilir. Şimdi de $0\le j\le 2$ için, f_j sayılarını bulalım. $0\le j\le 2$ için $f_j=\alpha_j\mu+j$ olmak üzere ,

$$BS(0)=\{e_0^{(0)},e_1^{(0)},e_2^{(0)}\}=\{f_0,f_1,f_2\}=\{3,5,10\}$$

diyelim. O zaman ,

$$f_0=3\alpha_0+0=e_0^{(0)}=3 \Rightarrow \alpha_0=1$$

$$f_1=3\alpha_1+1=e_2^{(0)}=10 \Rightarrow \alpha_1=3$$

$$f_2=3\alpha_2+2=e_1^{(0)}=5 \Rightarrow \alpha_2=1$$

olarak bulunur.

Öte yandan , Önerme 2.1.9 / (f)' deki

$$t_1(S)=\mu-1-Card\{f_j\in BS(0):f_j>\mu,\ \exists f_u\in BS(0),\ f_u+f_j\in BS(0)\}$$

eşitliğinden

$$t_1(S)=3-1-Card(\{f_2\})=3-1-1=1$$

çıkar.

Ayrıca , Önerme 1.1.8 / (b) 'den de

$$1\le t_i\le t_1$$

olduğundan

$$t_2=t_3=t_4=1$$

elde edilir. Sonuçta , $S=\{0,3,5,6,8\}$ sayısal yarıgrubunun tip dizisi ,

$$\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=\{1,1,1,1\}$$

olacak şekilde bulunur.

3. BÖLÜM

Bu bölümde , G. İKEDA ve H.İ.TUTALAR tarafından karakterize edilen 3 ve 4 ile başlayan sayısal yarıgruplardan bahsedilecek ve sayısal yarıgrupların tip dizileri verilecektir.

3.1. Özel Sayısal Yarıgruplar

Bu kesimde 3 ve 4 ile başlayan özel sayısal yarıgrupları tanımlayarak ilginç özellikleri incelenecektir. Bu kesimde incelenecek sayısal yarıgruplara 3- ve 4- ile başlayan Weierstrass sayısal yarıgrupları da denilmektedir.[16, 35-43].

Gösterim 3.1.1 : r *ve* s pozitif tamsayıları en küçük başlangıç değerlerini belirtmek üzere, $r < s$ iken 3 ile başlayan Weierstrass S sayısal yarıgrubu

$$S=\{0,3,\dots,3r,3r+1,\dots,3s+2,\rightarrow\dots\}$$

biçiminde ifade edilir.

Önerme 3.1.2 : Yukarıda verilen S sayısal yarıgrubu için aşağıdaki koşullar gerçeklenir.

(i) $2r-s\geq 0$

(ii) $2s-r+1\geq 0$.

İspat : [17, s: 160-161]

Önerme 3.1.3 : Gösterim 3.1.1' de verilen S sayısal yarıgrubu için $Card(\mathrm{N}\setminus S)=r+s$ şeklindedir.

İspat : [17, s: 160-161]

Gösterim 3.1.4 : r *ve* s pozitif tamsayıları en küçük başlangıç değerlerini belirtmek üzere, $r > s$ iken 3 ile başlayan Weierstrass S sayısal yarıgrubu

$$S=\{0,3,\dots,3s,3s+2,\dots,3r+1,\rightarrow\dots\}$$

biçiminde ifade edilir ve $2s-r\geq 0$, $2r-s+1\geq 0$ ve bu durumda $Card(\mathrm{N}\setminus S)=r+s$ olur.

İspat : [16, s: 35-39]

Gösterim 3.1.5 : r, s ve t pozitif tamsayıları, $r+t-2s \geq 0$ koşullu, en küçük başlangıç değerlerini belirtmek üzere, 4 ile başlayan Weierstrass S sayısal yarıgrubu

$$S=\{0,4,\ldots,4r,4r+1,\ldots,4s+2,\ldots,4t+3,\rightarrow\ldots\}$$

şeklinde yazılır ve bu durumda $Card(\mathbb{N}\setminus S)=r+s+t$ olur.

Önerme 3.1.6 :Gösterim 3.1.5'de verilen S sayısal yarıgrubu için aşağıdaki koşullar sağlanır.

(i) $r+s-t \geq 0$

(ii) $s+t-r+1 \geq 0$

İspat : [18, s: 138]

3.2 Örnekler

Bu kesimde, bir önceki kesimde sözü edilen sayısal yarıgrupların, tip dizisi olmayan sayısal yarıgruplara dair birer örnek oluşturduklarını ve bunlardan bazılarının ARF veya bakışıklı yarıgrup olmadıklarına ilişkin örnekler vereceğiz.

Örnek 3.2.1 : $r=3$ ve $s=4$ için Gösterim 3.1.1 ile verilen S sayısal yarıgrubu

$$S=\{0,3,9,10,\rightarrow\ldots\}$$

şeklinde olur. Bu durumda, $g(S)=8$ ve $n(S)=2$ olup, $t_1=3$ ve $t_2=4$ elde edilir. Bu ise, Önerme 1.1.8 / (b) ile çelişir. Yani, $t_1<t_2$ olamaz. Böylece, S sayısal yarıgrubuna karşılık hiçbir tip dizisi gelmez.

Örnek 3.2.2 : $r=3$ ve $s=2$ için Gösterim 3.1.4' de verilen S sayısal yarıgrubu

$$S=\{0,3,6,8,\rightarrow\ldots\}$$

biçiminde olur. Bu durumda, $g(S)=7$ ve $n(S)=3$ olup $t_1=3$, $t_3=g-s_2=7-6=1$ ve

$$t_1+t_2+t_3=g+1-n(s)\Rightarrow 4+t_2=7+1-3=5\Rightarrow t_2=1$$

bulunur. Yani, S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{3,1,1\}$ şeklinde olur.

Örnek 3.2.3 : $r=2$ ve $s=1$ için Gösterim 3.1.4' de verilen S sayısal yarıgrubu

$$S=\{0,3,5,6,7,\rightarrow\ldots\}=\{0,3,5,\rightarrow\ldots\}$$

olarak bulunur. Bununla birlikte, $g(S)=4$ ve $n(S)=2$ olup S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{2,1\}$ olarak bulunur.

Bu durumda, $i=1,2$ olmak üzere her i için

$$t_i = s_i - s_{i-1} - 1$$

eşitliği gerçeklendiğinden, S sayısal yarıgrubu bir ARF yarıgrubu olur. Üstelik Tanım 1.1.22' den de S sayısal yarıgrubunun bir bakışıklımsı yarıgrup olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 3.2.4 : $r=2$, $s=1$ ve $t=1$ için Gösterim 3.1.5' de verilen S sayısal yarıgrubu

$$S=\{0,4,6,7,8,\rightarrow\dots\}=\{0,4,6,\rightarrow\dots\}$$

biçiminde olur. $g(S)=5, n(S)=2$ ve buradan $t_1=2$, $t_2=1$ olup S sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{2,1\}$ olarak bulunur. Böylece, $1\leq i\leq 2$ olmak üzere, her i için

$$t_i = s_i - s_{i-1} - 1$$

eşitliği gerçeklenmediğinden, S sayısal yarıgrubu bir ARF yarıgrubu değildir. Ancak, S sayısal yarıgrubu bir bakışıklımsı yarıgruptur.

4. BÖLÜM

Bu bölüm, elde ettiğimiz sonuçlar ve bunların uygulamaları şeklinde iki kesimden oluşmuş olup, tez çalışmamızdaki esas kısımların ilkidir.

4.1 Tip Dizileri ile ilgili sonuçlar

Bu kesimde, daha önceki bilgilerden yararlanarak yazdığımız tüm özel tip dizilerine karşılık gelen sayısal yarıgrupların,

$$S=\{0,t_1+1,\ t_1+t_2+2,\ t_1+t_2+t_3+3, t_1+t_2+t_3+t_4+4, \rightarrow \dots\}$$

şeklinde olacağını göstererek, bu sayısal yarıgrupların tümünün ARF yarıgrup da olduklarına dair sonuçları, ispatları ile birlikte vereceğiz.

Sonuç 4.1.1 : $t \geq 3$ ve $t \in \mathrm{N}$ olmak üzere, $t_1 = 2t+1$ ve $t_2 = t$ olarak alalım. Tip dizisi $\{t_1, t_2\}$ şeklinde olan bir S sayısal yarıgrubu ve $n = n(S) = 2$, $g = g(S)$ verilsin. $S=\{0,t_1+1,\ t_1+t_2+2,\ \rightarrow \dots\}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\{t_1, t_2\}$ dizisi için $t_1+t_2 = g-1$ ve $1 \leq t_2 \leq t_1$ olmasıdır.

İspat : $t \geq 3$ ve $t \in \mathrm{N}$ olmak üzere, $t_1 = 2t+1$ ve $t_2 = t$ diyelim. $n = n(S) = 2$, $g = g(S)$ olacak şekildeki S sayısal yarıgrubu

$$S=\{0,t_1+1,\ t_1+t_2+2,\ \rightarrow \dots\}$$

olsun. Bu durumda, $s_n = s_2 = g+1$ eşitliğinden

$$t_1+t_2+2 = g+1 \Rightarrow g-1 = t_1+t_2$$

ve t_1 ile t_2 sayılarının seçilişlerinden de $1 \leq t_2 \leq t_1$ sağlanır. Tersine, $1 \leq t_2 \leq t_1$ ve $t_1+t_2 = g-1$ olsun. Önerme 1.1.12'den $0 = s_0 \in S$ olmak üzere

$$t_1 = s_1 - s_0 - 1 \Rightarrow s_1 = t_1 + 1$$

çıkar. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} t_2 = s_2 - s_1 - 1 &\Rightarrow s_2 = t_2 + s_1 + 1 \\ &\Rightarrow s_2 = t_1 + t_2 + 2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda, $n = n(S) = 2$, $g = g(S)$ olmak üzere, S sayısal yarıgrubu

$$S=\{0,s_1,\ s_2 \rightarrow \dots\} = \{0,t_1+1,\ t_1+t_2+2,\ \rightarrow \dots\}$$

şeklinde olur.

Sonuç 4.1.2 : $t \in \mathrm{N}$, $t \geq 3$ için, $t_1 = 4t+1$, $t_2 = 2t+1$ ve $t_3 = t$ diyelim. Tip dizisi $\{t_1, t_2, t_3\}$ ve $n = n(S) = 3$, $g = g(S)$ olan $S = \{0, t_1+1, t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3, \rightarrow ...\}$ şeklinde bir S sayısal yarıgrubunun var olması için gerekli ve yeterli koşul $\{t_1, t_2, t_3\}$ dizisinin $t_2 \geq t_3$ ve $t_1 \geq t_2 + t_3 + 1$ eşitsizliklerini sağlamasıdır.

İspat : $S = \{0, t_1+1, t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3, \rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrup olsun. t_1, t_2 ve t_3 doğal sayılarının seçilişlerinden, ispat açıktır.

Tersine, $t \in N$ ve $t \geq 3$ olmak üzere, $t_1 = 4t+1$, $t_2 = 2t+1$ ve $t_3 = t$ verilsin. $t_2 \geq t_3$ ve $t_1 \geq t_2 + t_3 + 1$ olduğunu kabul edelim. Önerme 1.1.9' dan $g = t_1 + t_2 + t_3 + 2$ olup $g + 1 = t_1 + t_2 + t_3 + 3 = s_3$ elde edilir. Önerme 1.1.12' den de $t_3 = g - s_2$ bulunur. Bu durumda, $t_3 = t_1 + t_2 + t_3 + 2 - s_2$ olup, buradan da $s_2 = t_1 + t_2 + 2$ çıkar. Öte yandan, $t_2 + 1 > t_3$ olduğundan ve Teorem 1.1.25' den $s_1 = s_2 - t_2 - 1 = (t_1 + t_2 + 2) - t_2 - 1 = t_1 + 1$ bulunur. Böylece, S sayısal yarıgrubu $n = n(S) = 3$, $g = g(S)$ olmak üzere

$$S = \{0, s_1, s_2, s_3, \rightarrow ...\} = \{0, t_1+1, t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3, \rightarrow ...\}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.1.3 : $t \in \mathrm{N}$ ve $t \geq 3$ olmak üzere, $t_1 = 8t+1$, $t_2 = 4t+1$, $t_3 = 2t+1$ ve $t_4 = t$ olsun. Tip dizisi $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ ve $n = n(S) = 4$, $g = g(S)$ olan bir S sayısal yarıgrubu var ve $S = \{0, t_1+1, t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3, t_1+t_2+t_3+t_4+4 \rightarrow ...\}$ şeklinde olması için gerekli ve yeterli koşul $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ dizisinin $t_3 \geq t_4$ $t_2 \geq t_3 + t_4 + 1$ ve $t_1 \geq t_2 + t_3 + t_4 + 2$ eşitsizliklerini sağlamasıdır.

İspat : Verilen özellikli sayısal yarıgrup

$$S = \{0, t_1+1, t_1+t_2+2, t_1+t_2+t_3+3, t_1+t_2+t_3+t_4+4, \rightarrow ...\}$$

olsun. t_1, t_2, t_3 ve t_4 doğal sayılarının seçilişlerinden,

$$t_3 \geq t_4 \text{ , } t_2 \geq t_3 + t_4 + 1 \text{ ve } t_1 \geq t_2 + t_3 + t_4 + 2$$

koşullarının sağlandığı kolayca görülür.

Tersine, $t \in \mathrm{N}$ ve $t \geq 3$ olmak üzere,

$$t_1 = 8t+1, \ t_2 = 4t+1, \ t_3 = 2t+1 \text{ ve } t_4 = t$$

olsun. Bu durumda,

$$t_3 \geq t_4, t_2 \geq t_3 + t_4 + 1 \text{ ve } t_1 \geq t_2 + t_3 + t_4 + 2$$

eşitsizliklerini sağlayan $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ sayı dizisini tip dizisi olarak kabul eden ve $n = n(S) = 4$, $g = g(S)$ şeklinde olan S sayısal yarıgrubunu bulalım. Önerme 1.1.9' dan

$$g = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + 4 + 3 = s_4 - 1$$

çıkar. Böylece

$$s_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + 4$$

elde edilir. Önerme 1.1.12' den de

$$s_3 = g - t_4 = t_1 + t_2 + t_3 + 3$$

olduğu bulunur. Öte yandan, $t_3 \geq t_4$ eşitsizliğinden $t_3 + 1 > t_4$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1.1.14'ten $s_2 = s_3 - t_3 - 1 = t_1 + t_2 + 2$ elde edilir. Teorem 1.1.26'den, $t_3 + 1 > t_4$ ve $t_2 + 1 > t_3 + t_4 + 1$ eşitsizlikleri sağlandığından $s_1 = s_2 - t_2 - 1 = t_1 + 1$ olarak bulunur. O halde, S sayısal yarıgrubu ,

$$S = \{0, s_1, s_2, s_3, s_4, \rightarrow \ldots\} = \{0, t_1 + 1, t_1 + t_2 + 2, t_1 + t_2 + t_3 + 3, t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + 4, \rightarrow \ldots\}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.1.4 : S sayısal yarıgrup , $t \in N$ ve $t \geq 3$ olmak üzere,

(i) $n(S) = 2$ için $\{2t+1, t\}$

(ii) $n(S) = 3$ için $\{4t+1, 2t+1, t\}$

(iii) $n(S) = 4$ için $\{8t+1, 4t+1, 2t+1, t\}$

tip dizili S sayısal yarıgrupların hepsi birer ARF yarıgrubudur.

İspat : S sayısal yarıgrup , $t \in N$ ve $t \geq 3$ olsun.

(i) $n(S) = 2$ ve $g = g(S)$ olmak üzere $\{2t+1, t\}$ tip dizili S sayısal yarıgrubu, Sonuç 4.1.1' den $S = \{0, 2t+2, 3t+3, \rightarrow \ldots\}$ şeklinde yazılır. Bu durumda, her $i = 1, 2$ için $t_i = s_i - s_{i-1} - 1$ eşitliğinin sağlandığını görmek kolaydır. Yani , S sayısal yarıgrubu ARF yarıgrubu olur.

(ii) $n(S) = 3$ ve $g = g(S)$ olmak üzere Sonuç 4.1.1'den $\{4t+1, 2t+1, t\}$ tip dizisine karşılık $S = \{0, 4t+2, 6t+4, 7t+5, \rightarrow \ldots\}$ sayısal yarıgrubu elde edilir. Bu durumda S sayısal yarıgrubu ARF yarıgrubu olur. Çünkü

$$t_1 = (4t+2) - 0 - 1 = 4t+1$$
$$t_2 = (6t+4) - (4t+2) - 1 = 2t+1$$
$$t_3 = (7t+5) - (6t+4) - 1 = t$$

değerleri beklenen eşitlikleri sağlar.

(iii) $n(S)=4$ ve $g=g(S)$ olmak üzere Sonuç 4.1.1'den $\{8t+1, 4t+1, 2t+1, t\}$ tip dizisine tekabül eden S sayısal yarıgrubun $S=\{0, 8t+2, 12t+4, 14t+6, 15t+7, \rightarrow \ldots\}$ biçiminde olduğu açıktır. Böylece, yukarıda yapılan benzer işlemlerle her $i=1,2,3,4$ için $t_i = s_i - s_{i-1} - 1$ koşulunun sağlandığını, yani S sayısal yarıgrubunun bir ARF yarıgrubu olduğu bulunur.

4.2 Sonuçlara Ait Örnekler

Bu kesimde, bir önceki kesimde verilen S sayısal yarıgrupları ile ilgili ilginç örnekler vereceğiz.

Örnek 4.2.1 : $S=\{0,10,15,\rightarrow \ldots\}$ sayısal yarıgrubunu ele aldığımızda, $g(S)=14$, ve $n(S)=2$ olduğunu söyleyebiliriz. Sonuç 4.1.1' de $t=4$ olursa $t_1=9$ ve $t_2=4$ bulunur. Dolayısıyla, S sayısal yarıgrubu ne bakışıklı ne de bakışıklımsıdır. Ancak S sayısal yarıgrubu maksimum indirgenme boyutlu olmasına karşın maksimum uzunluklu değildir.

Her ARF yarıgrubunun Kesim 4.1' de verilen sayısal yarıgruplar biçiminde yazılamayacağını gösteren bir başka örnek ise aşağıdadır.

Örnek 4.2.2 : $S=\{0,3,5,\rightarrow \ldots\}$ sayısal yarıgrubunu düşünelim. Böylece, $g(S)=4$ ve $n(S)=2$ olur. Bununla birlikte, $t_1=2$ ve $t_2=1$ oldukları Örnek 3.2.3' den kolayca görülür. Bu durumda, bu sayısal yarıgrubun tip dizisinin $\{2,1\}$ olacağını söyleyebiliriz. Üstelik, yine aynı örnekten S sayısal yarıgrubunun bir ARF yarıgrubu olduğu anlaşılır.

5. BÖLÜM

Tez çalışmamızın esas kısımlarından ikincisi olan bu son bölüm, iki kesimden oluşmaktadır.

5.1 Arf ve Bakışıklı Yarıgruplar için Kriterler

Bu kesimde, ARF ve bakışıklı yarıgruplar arasındaki ilişkileri inceleyerek, bunlarla ilgili elde ettiğimiz bazı ilginç sonuçları vereceğiz.

Sonuç 5.1.1 : S bir sayısal yarıgrup ve $i=1,2,...,n(S)$ için $s_i \in S$ olsun. O zaman, S bakışıklı yarıgrup ve $s_i - s_{i-1} = 2$ oluyorsa S sayısal yarıgrubu bir ARF yarıgrup olur.

İspat : S bir sayısal yarıgrup ve her $i=1,2,...,n(S)$ için $s_i - s_{i-1} = 2$ olsun. S bakışıklı yarıgrup olduğundan, her $i=1,2,...,n(S)$ için $t_i = 1$ olur.Buradan $t_i = 1 = 2-1 = s_i - s_{i-1} - 1$ elde edilir. Böylece Tanım 1.1.21'den S sayısal yarıgrubunun ARF yarıgrubu olduğu çıkar.

Sonuç 5.1.2 : S sayısal yarıgrup ve $1 \le i \le n(S)$ olsun. S, bir ARF yarıgrup ve her $i=1,2,...,n(S)$ için $s_i - s_{i-1} = 2$ ise S bakışıklı bir yarıgrup olur.

İspat : S bir ARF yarıgrup olduğundan her $i=1,2,...,n(S)$ için $t_i = s_i - s_{i-1} - 1$ yazılır. Varsayımda verildiği gibi $s_i - s_{i-1} = 2$ olduğundan ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1.3 : S bir sayısal yarıgrup ve $\mu = \mu(S)$ olsun. S sayısal yarıgrubunun bakışıklı yarıgrup olması için gerekli ve yeterli koşul $\mu \ge 2$ ve $g(S)+1 = 2n(S)$ olmasıdır.

İspat : S bir sayısal yarıgrup ve $\mu = \mu(S)$ olmak üzere Önerme 1.1.10' dan

$$2\,n(S) \le g(S)+1 \le \big(t(S)+1\big)\,n(S)$$

eşitsizliğinin sağlandığını biliyoruz. S bakışıklı yarıgrup olduğundan $t(S)=1$ olur. Buradan

$$2\,n(S) \le g(S)+1 \le 2\,n(S)$$

eşitsizliği elde edilir. Yani, $g(S)+1 = 2n(S)$ çıkar.

Tersine, $\mu \geq 2$ ve $g(S)+1=2n(S)$ olsun. Önerme1.1.11' den

$$1 \leq t(S) \leq \min\{\mu(S)-1, g(S)+2-2n(S)\} \tag{9}$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan, varsayımda verilenler (9) eşitsizliğinde yerine yazıldığında her $i=1,2,\ldots,n(S)$ için $t_i(S)=1$ olur. Bu durumda Tanım 1.1.21'den S sayısal yarıgrubunun bakışıklı olduğu görülür.

Sonuç 5.1.4 : S bir sayısal yarıgrup ve $\mu=\mu(S)=2$ olsun. Bu durumda

$$g(S) > 2n(S)+1$$

ise S bakışıklı bir yarıgrup olur.

İspat : S bir sayısal yarıgrup ve $\mu=\mu(S)=2$ olmak üzere $g(S)>2n(S)+1$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$g(S)+2-2n(S) > 2-2n(S)+2n(S)+1$$

çıkar. Yani

$$g(S)+2-2n(S) > 3$$

elde edilir. Bu durumda

$$g(S)+2-2n(S) = x$$

denirse Önerme 1.1.11'den de

$$1 \leq t(S) \leq \min\{\mu(S)-1, g(S)+2-2n(S)\}$$

eşitsizliği varolduğundan $1 \leq t(S) \leq \min\{1, x\}=1$ bulunur. Böylece Tanım 1.1.21'den ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1.5 : S bir sayısal yarıgrup ve $i=1,2,\ldots,n(S)$ olmak üzere, $t_i=t_i(S)$ ve $n_i=n(S(i))$ diyelim. Her $i=1,2,\ldots,n(S)$ için , $n_i=n_{i-1}-1$ ise S yarıgrubu bir ARF yarıgrubu olur.

İspat : Önerme 1.1.17'den her bir $i=1,2,\ldots,n(S)$ için

$$t_i = s_i - s_{i-1} + n_i - n_{i-1} \tag{10}$$

olduğunu biliyoruz. $n_i=n_{i-1}-1$ eşitliğini (10) ifadesinde yerine yazarsak her bir $i=1,2,\ldots,n(S)$ için , $t_i=s_i-s_{i-1}-1$ eşitliğini elde ederiz. Bu durumda, Tanım 1.1.20'den S sayısal yarıgrubunun bir ARF yarıgrup olduğu çıkar.

Sonuç 5.1.6 : S bir sayısal yarıgrup ve $i=1,2,...,n(S)$ olmak üzere, $t_i=t_i(S)$ ve $n_i=n(S(i))$ diyelim. Her $i=1,2,...,n(S)$ için , $n_i - n_{i-1}=s_i-s_{i-1}-1$ ise S yarıgrubu bir bakışıklı yarıgrup olur.

İspat : Her bir $i=1,2,...,n(S)$ için , $n_i - n_{i-1}=s_i-s_{i-1}-1$ eşitliğini Önerme 1.1.16'da yerine yazarsak, $t_i=n_{i-1}-n_i+1+n_i-n_{i-1}=1$ olduğunu elde ederiz. Bu ise ispatı bitirir.

5.2 Kriterlere ait Örnekler

Bu kesimde ise her ARF yarıgrubunun bakışıklı bir yarıgrup olmadığına ve her bakışıklı yarıgrubun da ARF yarıgrubu olmayacağına ilişkin çarpıcı örnekler vereceğiz. Ayrıca Kesim 5.1'de verilen bazı sonuçları terslerinin neden doğru olamayacaklarını örneklerle açıklayacağız.

Örnek 5.2.1: Bölüm 4' te verilen bütün sayısal yarıgruplar ARF yarıgruplardır , ancak bakışıklı yarıgrup değildirler.

Örnek 5.2.2: $S=\{0,3,5,6,8,\rightarrow...\}$ sayısal yarıgrubunun bakışıklı olduğu Örnek 3.1.5'te gösterilmişti.Bu durumda, $i=1,2,3,4$ için $t_i=1$ yazılır.Ancak $t_3=s_3-s_2-1=0$ olduğundan bu, $t_3=1$ oluşu ile çelişir. Yani, $i=3$ için $t_i=s_i-s_{i-1}-1$ eşitliği sağlanmadığından S yarıgrubu bir ARF yarıgrup olmaz.

Bununla birlikte, hem ARF yarıgrup hem de bakışıklı yarıgrup olan sayısal yarıgruplar da bulunmaktadır.

Örnek 5.2.3: $S=\{0,2,4,6,\rightarrow...\}$ sayısal yarıgrubunun hem ARF hem de bakışıklı olduğunu Sonuç 5.1.1 ve Sonuç 5.1.2 ' den kolayca görebiliriz.

KAYNAKLAR

1. ABHYANKAR; S.S., Local rings of high embedding dimension, Amer.J.Math. 89 (1967), 1073-1077.

2. BARUCCİ, V., DOOPS,D.E. and FONTANA, M., Maximality properties in numerical semigroups, with application to one-dimensional analytically irreducible local domains, procedings of the conference " Commutative Ring Theory" Fes, Lecture notes Pure Appl. Math., Vol. 153, M.Dekker (1992), 13-24.

3. BERTİN,J. and CARBONNE,P., Semi-groupes d'entiers et applications aux branches, J.Algebra 49 (1977), 81-95.

4. BRESİNSKY, H., Symmetric Semigroups of İntegres generated 4 elements , Manuscripta Math. 17 (1975) 205-219.

5. BROWN,W.C. and CURTİS,F., Numerical Semigroups of maksimal and almost maksimal length, Semigroup Forum 42 (1991), 219-235.

6. D'ANNA, M.., Type sequences of Numerical Semigroups, Semigroup Forum Vol.56 (1998), 1-31.

7. FROBERG,R., GOTLİEB,C. and HAGGKVİST,R. On numerical Semigroups, Semigroup Forum Vol. 35 (1987), 63-83.

8. HİGGİNS,M.P., Techniques of Semigroup Theory. Oxford Universty press.(1992).

9. HOWİE,J.M. and RUSKUC,N., Proceeding of Conference On Semigroups and Applications (1997).

10. HOWİE,J.M., An introduction to semigroups theory, Academic press. (1976).

11. KUNZ, E., The value semigroup of an one dimensional Gorenstein ring, Proc.Amer.Math.Soc.25 (1970),748-751.

12. MATSUOKA,T., On the degree of singularity of one dimensional analytically irreducible noetherian local ring, J.Math. Kyoto Univ.11-3 (1971), 485-494.

13. PETRİCH,M., Introduction to Semigroups, Columbus, Ohio. (1973).

14. ROSALES,J.C.,
(a) On Numerical Semigroups, Semigroup Forum Vol.52 (1996), 307-318.
(b) On Symmetric Numerical Semigroups, J.Algebra 182 (1996), 422-434.

15. SALLY,J., Cohen-Macaulay Local rings of maximal embedding dimension, J.Algebra 56 (1979), 168-183.

16. TUTALAR,H.İ., Weierstrass sayısal yarıgrubu ve cebirsel fonksiyonlar cisminin oluşumu, Hacettepe Üniversitesi (1983). (Doktora Tezi).

17. TUTALAR, H.İ., On A Construction of Algebraic Function Fields,Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Eng., Vol.13, June 1984, p. 157-164.

18. TUTALAR, H.İ., The weierstrass non – gap sequences beginning with 4, and a construction of its algebraic function field, Doğa TU J.Math.,11, 2, 1987, p.135-140.

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Kızıltepe'de doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Kızıltepe'de tamamladım. Yüksek Öğrenimime 1985 yılında Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladım. 1989 yılında adı geçen bölümden mezun oldum ve 1990 yılında yine aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım.

Yüksek lisans eğitimimi 1991-1993 yılarında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde tamamladım ve 1995 yılında yine aynı enstitüde Doktora eğitimime başladım.

Halen aynı üniversitede Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.

Evli ve iki çocuk babasıyım.