T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

LİNEER OLMAYAN HOMOJEN HİPERBOLİK DALGA DENKLEMLERİ İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ

Necat POLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

97704

DİYARBAKIR

TEMMUZ –2000

T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

DİYARBAKIR

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin Ünvanı, Adı Soyadı

Başkan : Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR

Üye : Prof. Dr. Müjgan TEZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulkadir ERTAŞ (danışman)

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

20/7/2000

Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR

Ünvanı, Adı Soyadı

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu teze başlamamda, hazırlanmasında, yardımlarını ve teşviklerini esirgemeyen kendisinden çok şey öğrendiğim değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdulkadir ERTAŞ' a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Sıcak ilgileriyle desteklerini yanımda hissettiğim D.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünün değerli üyelerine de ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Bu çalışmanın temel amacı lineer olmayan hiperbolik denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümlerini araştırmaktır. İki veya daha yüksek basamaktan verilen lineer olmayan homojen hiperbolik denklemleri, karakteristikler yardımıyla birinci basamaktan sistemlere indirgemek ve Riemann invariyantlarını da kullanarak verilen denklemin çözümünü araştırmaktır.

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde hiperbolik dalga denklemlerine götüren bazı problemler ele alınmaktadır. İkinci bölümde birinci basamaktan sistemler ve karakteristik yöntem verilmektedir. Üçüncü bölümde ise bir boyutlu sıkıştırılabilir akı için başlangıç değer probleminin çözümü incelenmektedir. Ayrıca, lineer olmayan homojen hiperbolik bir denklem ele alınarak başlangıç değer problemi için bu denklemin çözümü verilmektedir.

SUMMARY

The study consist of three chapters. In Chapter 1, we investigate some problems that gave rise to linear hyperbolic wave equations. In Chapter 2, first- order systems and characteristic metod are dwelt upon. In Chapter 3, we investigated the solution of initial value problems for the one-dimensional compressible flow. Moreover, we studied on a nonlinear homogenous hyperbolic equation and, for initial value problem, gave a solution of that equation.

GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklem (KDD) ler, sık sık doğanın temel kanunlarının formüllendirilmesinde, uygulamalı matematikte, matematiksel fizikte kapsamlı değişik problemlerin matematiksel analizinde ve mühendislik biliminde ortaya çıkar. Bu konu matematiksel bilimlerde, özellikle fizik, geometri ve analizde merkezi rol oynar. Fizikle ilgili bir çok problem uygun başlangıç ve / veya sınır koşulları ile KDD lere göre tanımlanır.

Bugün için KDD lerin lineer olması durumunda, çözümlerinin pek çok özelliği bilinmektedir.

Lineer olmayan KDD lerin kökeni çok eskiye dayanmasına rağmen dikkate değer yeni gelişmeler yirminci yüzyılın son yarısında olmuştur. Lineer olmayan KDD lerin geliştirilmesi için esas etkenlerden birisi lineer olmayan dalga yayımları problemleri üzerindeki gelişmeler olmuştur.

Lineer olmayan KDD ler için başlangıç ve / veya sınır değer problemlerinin çözümleri her zaman iyi çıkmayabilir. Çözüm belli bir zamandan sonra işlemez hale gelebilir. İlginç bazı sonuçların elde edilebilmesi bu problemlerin çözümüne bağlıdır. Bu amaçla lineer olmayan hiperbolik denklemlerin çözümleri yıllardır araştırmaların konusu olmuştur. Bu araştırmalar 1860 larda Riemann'ın çalışmalarında başladı. Daha sonraları Courant, Friedrichs, Ludford, (Fermi, Pasta ve Ulamın lineer olmayan sistemlerde nümerik çalışmaları), Zabusky, Lax ve Jeffrey'in çalışmalarını görüyoruz.

Riemann, dalga yayımlarında süreksizlik geliştirecek basit bir dalganın koşullarının varsayımı ile ilgilendi. Fermi, Pasta ve Ulam, lineer olmayan sonlu bir şeridin titreşimleri ile nümerik olarak çalıştılar. Ludford, değişken Anisentropik akının başlangıç değer problemi için Riemann invariyantlarını kullanarak tetkik etti. Hodograf yüzeyde başlangıç eğrileri için katlama metodunun tersini kullandı. Zabusky, lineer olmayan sürekli bir şeridin titreşimleri için Riemann invariyantlarını ve Ludford'un yayma metodunu kullandı. Lax ve Jeffrey de Riemann invariyantlarını dönüm noktasına ait zaman için daha düşük ve daha alçak sınırları sağlayan karşılaştırma teoremini geliştirmek için kullandılar.

Mevcut çalışmamızda lineer olmayan homojen hiperbolik denklemler için bu problemleri inceliyoruz. Hiperbolik denklemlerin çözümünde önemli rol oynayan karakteristik metodunu kullandık. Riemann invariyantları yardımıyla KDD i her karakteristik boyunca genel teoriyi kullanarak adi diferansiyel denkleme indirgedik. Bunlara binaen lineer olmayan homojen hiperbolik denklemlerin çözümünü veriyoruz.

1. Bölümde dalga denkleminin çıkışını vermekte, buna ek olarak dalga denklemlerine götüren bazı problemleri ele almaktayız.

2. Bölümde karakteristik yöntemi veriyoruz. Birinci basamaktan sistemler yardımıyla n. basamaktan denklemin birinci basamaktan n tane sisteme indirgenebileceği incelenmektedir. Lineer olmayan denklemlerin birinci dereceden denklemlerin diferansiyellerine göre basit bir şekilde ele alınabileceği gösterilmektedir.

3. Bölümde bir boyutlu sıkıştırılabilir akı için verilen denklemlerin çözümü ayrıntılı olarak ele alındı. Bu problem için başlangıç koşullarına göre çözümü verildi. Bu bölümün son kısmında ikinci dereceden lineer olmayan homojen hiperbolik bir denklem ele alınarak önceki veriler ışığında, başlangıç ve keyfi başlangıç koşulu altında bu problemin çözümü verilmektedir.

1. BÖLÜM

DALGA DENKLEMLERİNE GÖTÜREN PROBLEMLER

1.1. Lineer Dalga Denkleminin Kökeni

Bütün x ekseni boyunca uzanan, sonsuz uzunlukta bir şeride sahip olduğumuzu ve sadece düşey yönde hareket eden böyle bir şeridin, her noktasında harekete uygun olduğunu varsayalım.

Böyle bir şeridin hareketini nasıl tanımlayabiliriz? Her nokta sadece düşey yönde hareket ettiği için, verilen bir nokta her zaman x koordinatı üzerindedir. Bununla birlikte onun uzaklığı x ekseni üzerinde değişir. u, x ekseni üstünde verilen noktanın uzaklığını göstersin. (Eğer nokta x ekseninden aşağı ise, u negatiftir.) Açıkça u, verilen x noktasının ve t zamanının fonksiyonudur: $u=u(x,t)$. Biz u ya göre sağlanan bir kısmi diferansiyel denklemi (KDD) çıkarmayı arzuluyoruz. $\rho(x)$, lineer yoğunluk olsun, yani uzunluğa bağlı olarak tanımlanan kütle ve $T(x)=H(x)\mathbf{i}+V(x)\mathbf{j}$ şeritteki gerilme olsun.(Siyah harf tipi vektör için kullanılmıştır.) τ şerit için bir teğet (tanjant) vektörü olsun. Şerit denklemi $u=u(x,t)$ olsun. Basit bir hesapla onun τ teğeti, u_x eğimine sahiptir. Bu nedenle $\tau=\mathbf{i}+u_x\,\mathbf{j}$ dir. Şeritteki gerilme her zaman tanjant olarak hesaplanır. Böylece vektörel çarpım, $T\times\tau=0$; yani,

$$H(x)\,u_x-V(x)=0$$

ve böylece

$$V(x)=H(x)\,u_x$$

dir. a dan b ye uzanan bir şerit parçası düşünelim. Yatay hareketi varsaymadığımız için orada hiçbir parçada net bir yatay kuvvet olamaz. Bu nedenle $H(a)=H(b)=H$, H=sabit, alabiliriz. Böylece düşey yönde parçada net F kuvveti,

$$F=V(b)-V(a)=H[u_x(b,t)-u_x(a,t)]$$

şeklinde olup, Newton' un ikinci kanununa göre

$$F = \int_a^b \rho u_{tt} dx$$

yazılır. Buradan

$$\int_a^b \rho u_{tt} dx = H[u_x(b,t) - u_x(a,t)]$$

ve

$$\int_a^b \rho u_{tt} dx = H \int_a^b u_{xx}(x,t) dx \qquad (1\text{-}1)$$

yazılabilir. (1-1), keyfi (a,b) aralığı için elde edildiğinden,

$$\rho(x) u_{tt} = H u_{xx} \qquad (1\text{-}2)$$

veya

$$u_{xx} = \frac{\rho}{H} u_{tt}$$

neticesi çıkarılır. Ayrıca

$$\rho = \frac{kütle}{uzunluk} = \frac{M}{L}$$

ve

$$H = kuvvet = kütle \times ivme = \frac{kütle \times uzunluk}{zaman^2} = \frac{ML}{T^2}$$

olur. Bu nedenle,

$$\frac{H}{\rho}=\frac{ML}{T^2}\frac{L}{M}=\frac{L^2}{T^2}$$

elde edilir.

Böylece H/ρ hızın karesinin boyutu cinsinden ifade edilir. H ve ρ ikisi de doğal olarak pozitif olduğu için,

$$\frac{\rho}{H}=c^{-2} \qquad (1\text{-}3)$$

koyabiliriz. Burada c, gerçel sayı olup, belirli zamandan sonra belirlenen amacın tam hızıdır. Böylece herhangi bir olayda titreşen şeridin denklemi, (1-2) ve (1-3) ten

$$u_{xx}-c^{-2}u_{tt}=0 \qquad (1\text{-}4)$$

elde edilir.

(1-4) denklemi, başka birçok fiziki problemlerde ortaya çıkar. Örneğin, bir boyutlu tam dalgalarda gaz parçasının hızı, dalgada gazın yoğunluğu, elektromagnetik dalgaların yayılmalarında, belirli özel problemlerde elektrik veya magnetik etki alanındaki vektörlerin elemanları ve fiziki bakımdan önemli bir çok problemler tarafından sağlanır.

(1-4) ün çıkarılmasında, şeritteki gerilmeden dolayı, sadece şeritte rol oynayan kuvvetlerin içe ait kuvvetler olduğu varsayılarak yer çekimi gibi dıştan gelen kuvvetler ihmal edilmiştir. Sonraki birkaç kısmın sonuçları yerçekiminin etkisi altında düşünülen şeritler olduğu yanlışlıkla varsayılarak, yanlış anlaşılmamalıdır. Onlarda yerçekimi ihmal edilmiştir.

1.2. Bir Boyutlu Gaz Akışının Lagrangian Gösterimi

İçi gaz dolu ve bir boyutlu hareket yapan bir tüpe sahip olduğumuzu varsayalım. Bir boyutludan kasıt şudur. Tüpün x eksenine dikey her bir düzlemindeki bütün partiküller, x eksenindeki partikül gibi aynı hareketi yapar. Burada düzlem x eksenini keser. Olan bu durum, hareketin tamamen x ekseni yönündeki partiküllerin hareketi gibi tanımlanabilir.

İlkönce x ekseninde farklı partikülleri belirleyen bir yola ihtiyacımız var. Bu bir çok yolla yapılabilir. Bunlardan birini seçelim. α her partikülün başlangıç pozisyonunu belirtsin. Böylece herhangi t zamanında bu partikülün x pozisyonu, α ve t nin bir fonksiyonu olacak: $x(\alpha,t)$. Partiküllerin birbirini yutmadığı kabul edildiğinden, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ise $x(\alpha_1,t) \neq x(\alpha_2,t)$ ve başlangıçta

$$x(\alpha,0)=\alpha \qquad (1\text{-}5)$$

dır.

Her partikülün pozisyonuna ilaveten, yoğunluk $\rho(\alpha,t)$ ve basınç $P(\alpha,t)$ nin bilinmesi arzu edilendir. x, ρ, P niceliklerini tanımlamak için üç denkleme ihtiyacımız var. Birinci denklem durum denklemi, yakın belirli çevrenin özelliklerine göre tanımlanan bir denklumdir. Düzensizliği ihmal ederek

$$P=f(\rho) \qquad (1\text{-}6)$$

şeklinde verilmiş olduğunu varsayalım.

Hala iki denkleme daha ihtiyacımız var. Bunların birincisi kütlenin korunumu kanunundan gelir. t=0 zamanda α_1 den α_2 ye varan partiküllerin bir kesitini düşünelim. Bu kesitin kütlesi, $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\rho(\alpha,0)d\alpha$ ve t zaman sonrada aynı toplamın kütlesi $\int_{x_1}^{x_2}\rho(\alpha,t)dx$ olacak. Kesitin miktarı veya uzunluğu zamanla değişebilir, fakat kütle sabit kalmalı. Bu nedenle

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\rho(\alpha,0)d\alpha=\int_{x_1}^{x_2}\rho(\alpha,t)dx$$

veya

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho(\alpha,0)d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho(\alpha,t)x_\alpha(\alpha,t)d\alpha$$

olur. Her iki tarafı α_2-α_1 e bölelim ve $\alpha_2 \to \alpha_1 = \alpha$ (diyelim). O zaman

$$\rho(\alpha,0) = x_\alpha(\alpha,t)\rho(\alpha,t) \qquad (1\text{-}7)$$

Bundan sonra başlangıç yoğunluğu $\rho(\alpha,0)$ ın sabit olduğunu varsayarız, ρ_0:

$$\rho(\alpha,0) = \rho_0 = \text{sabit} \qquad (1\text{-}8)$$

O zaman

$$x_\alpha(\alpha,t)\rho(\alpha,t) = \rho_0 \qquad (1\text{-}9)$$

yazılır.

Sonra bu kesite Newton'un ikinci kanununu uygularız. Sadece basınçtan dolayı etkilenen kuvvetleri varsayarız. Sağdaki kesitin son noktasında basınç $P(\alpha_2,t)$, soldaki son noktada $P(\alpha_1,t)$ olsun. Basınç sıkıştırıcı kuvvet olduğundan, $P(\alpha_2,t)$ negatif yönde ve $P(\alpha_1,t)$ pozitif yönde hareket eder. Bu nedenle net kuvvet -[$P(\alpha_2,t)$-$P(\alpha_1,t)$] olur. Newton'un ikinci kanununa göre

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\alpha,t)x_{tt}(\alpha,t)dx = -[P(\alpha_2,t) - P(\alpha_1,t)]$$

veya

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho(\alpha,t)x_{tt}(\alpha,t)x_\alpha(\alpha,t)d\alpha = -[P(\alpha_2,t) - P(\alpha_1,t)]$$

bulunur. (1-9) kullanılarak bu,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho_0 x_{tt}(\alpha,t)d\alpha = -[P(\alpha_2,t) - P(\alpha_1,t)]$$

ifadesine indirgenir. Her iki taraf α_2-α_1 e bölünerek ve $\alpha_2 \to \alpha_1 = \alpha$ alınsın. O zaman

$$\rho_0 x_{tt}(\alpha,t) = -P_\alpha(\alpha,t) \qquad (1\text{-}10)$$

olur. Böylece (1-9), (1-10) ve (1-6) dan x, ρ ve P için

$$\rho x_\alpha = \rho_0$$

$$\rho_0 x_{tt} = -P_\alpha$$

$$P = f(\rho)$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemlerde α partikülün başlangıç pozisyonu, t zaman olup bağımsız değişkenlerdir. x herhangi bir zamanda partikülün pozisyonu, P basınç ve ρ yoğunluk olup bağımlı değişkenlerdir. Akı için böyle bir gösterim Lagrangian gösterimi olarak adlandırılır.

(1-6) yı α ya göre diferansiyellersek $P_\alpha = f'(\rho)\rho_\alpha$ elde ederiz. Bu da (1-10) dan P yi yok etmemizi mümkün kılar ve

$$\rho_0 x_{tt} = -f'(\rho)\rho_\alpha$$

bulunur. Yalnız x e göre bir denklem bulmak için bu denklemden ρ yi yok edecek olan (1-9) kullanılırsa,

$$\rho_0 x_{tt} = -f'\left(\frac{\rho_0}{x_\alpha}\right)\frac{-\rho_0 x_{\alpha\alpha}}{x_\alpha^{\ 2}}$$

veya

$$x_{tt} = \frac{f'(\rho_0 / x_\alpha)}{x_\alpha^{\;2}} x_{\alpha\alpha} \qquad (1\text{-}11)$$

x için yüksek (ikinci) basamaktan lineer olmayan bir denklemdir.

(1-11) karmaşık olduğundan, onu sadeleştiren orantıyı arayalım. (1-11) e sık sık yararlı bir yaklaşma örneği gibi, gazın hareketini nispeten sakin varsayalım. Öyle ki verilen partikül, kısa zamanda orijinal pozisyonundan çok uzak hareket etmeyecektir. t=0 olduğu zaman x(α,t)=α olduğu için bu varsayım küçük t ler için α dan çok fazla farklı olmayan x için eşit alınabilir. x in α ya eş kaldığını varsaymayacağız. Çünkü o zaman orada hiçbir hareket olmayacaktır. Bu nedenle sonra gelen en uygun şeyi yaparız; $x_\alpha \sim 1$ olduğunu varsayarız. Çünkü bu x in küçük t ler için α dan çok fazla değişmediğini ifade eder.

$x_\alpha \sim 1$ varsayımı, (1-11) de kullanıldığı zaman, (1-11),

$$x_{tt} = f'(\rho_0) x_{\alpha\alpha} \qquad (1\text{-}12)$$

ifadesine lineer olarak dönüşür. Basıncın yoğunlukla artacağını varsaymamız doğal olduğu için, $f'(\rho)$ >0 varsayabiliriz ve bu nedenle $f'(\rho_0) = c_0^{\;2}$ alalım. O zaman (1-12),

$$x_{tt} = c_0^{\;2} x_{\alpha\alpha} \qquad (1\text{-}13)$$

dalga denklemi olur.

Bir de P için lineer olmayan dalga denklemi bulabiliriz. Onu lineer hale getirmek için $x_\alpha \sim 1$ varsayarız. İlk önce x i (1-9) ve (1-10) dan yok ederiz. (1-9) dan

$$x_\alpha = \rho_0 \rho^{-1}$$

ifadesine sahibiz. Bu nedenle,

$$x_{\alpha tt} = \rho_0 (\rho^{-1})_{tt}$$

olup, (1-10) dan

$$\rho_0 x_{tt\alpha} = -P_{\alpha\alpha}$$

elde ederiz. O zaman $x_{\alpha tt} = x_{tt\alpha}$,

$$\rho_0^{\,2}(\rho^{-1})_{tt} = -P_{\alpha\alpha} \tag{1-14}$$

yazılabilir. Bundan ρ yi yok etmek için (1-6) yı kullanarak

$$P = f(\rho)$$

ve

$$P_t = f'(\rho)\rho_t$$

elde ederiz. Bu nedenle,

$$(\rho^{-1})_t = -\rho^{-2}\rho_t = -\left[\rho^2 f'(\rho)\right]^{-1} P_t$$

$$(\rho^{-1})_{tt} = -\left\{\left[\rho^2 f'(\rho)\right]^{-1} P_t\right\}_t$$

yazılır. Böylece (1-14),

$$\rho_0^{\,2}\left\{\left[\rho^2 f'(\rho)\right]^{-1} P_t\right\}_t = P_{\alpha\alpha}$$

olur. Tekrar $x_\alpha \sim 1$ varsayarsak, bu da

$$c_0^{\,-2} P_{tt} = P_{\alpha\alpha} \tag{1-15}$$

dalga denklemine indirgenir.

1.3. Bir Boyutlu Gaz Akışının Eulerian Gösterimi

Pratikte, Lagrangian gösteriminden çok akıcı akışkanların Eulerian olarak adlandırılan gösterimi kullanmak genellikle daha faydalıdır. Eulerian gösteriminde x ve t bağımsız değişkenler olup, u hız, P basınç ve ρ yoğunluk, bağımlı değişkenlerdir. Kavram olarak iki gösterim arasındaki fark, Lagrangian gösteriminde gözlemcinin partikülü ve hareketi gözetlemesidir. Eulerianda gözlemci, gazda belirli bir nokta kendi kendine tayin eder ve o noktada hareketin nasıl değiştiğini gözler.

Şimdi Lagrangian gösteriminin denklemlerini gösterelim, yani,

$$\rho x_\alpha = \rho_0 \qquad (1\text{-}16)$$

$$\rho_0 x_{tt} = -P_\alpha \qquad (1\text{-}17)$$

denklemleri,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} P_x = 0$$

Eulerian gösteriminin denklemlerine eşittir.

Bunu görmek için, ilk önce x=x(α,t) gözlenir ve tanıma göre $u=x_t$ dir. Böylece

$$x_t = u(x,t) = u[x(\alpha,t),t]$$

dir. Bu nedenle

$$x_{tt} = u_x x_t + u_t = u u_x + u_t$$

$$x_{tt} = u_t + u u_x$$

olur. Ayrıca

$$P = P(x,t) = P[x(\alpha,t),t]$$

dir. Bu nedenle

$$P_\alpha = P_x x_\alpha = \frac{\rho_0}{\rho} P_x \qquad \text{(1-16) ya göre}$$

ve (1-17) den

$$\rho_0 x_{tt} = -P_\alpha$$

$$\rho_0 (u_t + u u_x) = -\frac{\rho_0}{\rho} P_x$$

veya

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} P_x = 0$$

olur. Buna ilaveten, (1-16) ya göre

$$\rho x_\alpha = \rho_0$$

ve

$$(\rho x_\alpha)_t = 0$$

olduğunu görürüz. Yani,

$$(\rho_t + u\rho_x) x_\alpha + \rho x_{\alpha t} = 0$$

fakat

$$x_{\alpha t} = x_{t\alpha} = u_\alpha = u_x x_\alpha$$

dır. Böylece

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0$$

veya

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

olur.

Eğer S düzensizliği hesaba katılırsa, o zaman üçüncü denklem $S_t+uS_x=0$ ilave edilmelidir.

Özetlersek bir boyutlu sıkıştırılabilir isentropik akının Eulerian denklemleri,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \tag{1-18}$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} P_x = 0 \tag{1-19}$$

$$P = f(\rho) \qquad f\,,\, f' > 0 \text{ ile verilen fonksiyon} \tag{1-20}$$

şeklindedir.

$f(\rho)$ bilindiğinden, (1-19) den P yi yok etmek için (1-20) yi kullanabiliriz. (1-20) den

$$P_x = f'(\rho)\rho_x \tag{1-21}$$

$f'(\rho)$ >0 olduğundan

$$c^2(\rho) = f'(\rho) \tag{1-22}$$

alınarak ve (1-21) den

$$P_x = c^2(\rho)\rho_x \tag{1-23}$$

yazılır. (1-23), (1-19) da kullanılarak

$$u_t + uu_x + \frac{c^2(\rho)}{\rho}\rho_x = 0 \tag{1-24}$$

bulunur.

(1-18) ve (1-24), iki bilinmeyen fonksiyon u(x,t) ve ρ(x,t) için iki KDD oluşturur. $c^2(\rho)$, (1-22) ye göre tanımlanan ρ nin bilinen fonksiyonudur. (1-18) ve (1-24) denklemleri lineer değildir ve genel davranışlarına bölüm 3 te bakılacak. Bu bölümde (1-18) ve (1-24) e lineer yaklaşmayı elde edecek bir metodu göstermek ile yetineceğiz. Bunu yapmak için, bilinen bir fonksiyona, yani, (1-18), (1-24) ve belirli başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan, $\hat{u}(x,t)$ ve $\hat{\rho}(x,t)$ bilinen fonksiyonlar çiftine sahip olduğumuz varsayılacaktır. O zaman az değiştirilen sınır ve/ veya başlangıç koşullarını tasavvur ederiz. "Az değiştirilen" den kasıt şudur. Sınır ve/veya başlangıç koşullarında bir $\in$ parametresi vardır ki bilinen çözüm ile problem $\in=0$ a tekabül eder ve çok küçük bir $\in$ ye sahiptir. Pratikte $\in$, bir akıda ince hava yaprağının kalınlığı, bazı bölgelerin sınırında azıcık sıçramanın yüksekliği veya problemde küçük parametrelerin aldığı sayılardan herhangi biri olabilir.

$\in$ küçük olduğundan, $\in$ nin kuvvetleri ile değiştirilecek problemi çözmeye çalışacağız. Bunu yapmak doğaldır, fakat kanunlara uygun olduğu anlamına gelmez. Çünkü böyle bir serinin yakınsak olacağı garantisi yoktur. Serinin asimtotik olduğu hala garanti edilmemiştir. Gerçekten şu anda KDD ler için bu denklemi kararlaştıracak genel bir kuram yoktur. Bu nedenle pratikte, aşağıda verilen yönteme göre bulunan değiştirilen çözümün gerçekten doğru bir çözüme iyi bir yaklaşım olup olmadığını incelemek gereklidir. Mevcut durumda genel bir incelemeye girişmeyerek aksine kendimizi birinci basamaktan yaklaşımları elde edecek incelemelerle sınırlayacağız.

Bunu değiştirilen problem için çözümü,

$$u(x,t) = \hat{u}(x,t) + \in \tilde{u}(x,t) + \in^2 \tilde{\tilde{u}}(x,t) + \cdots$$

$$\rho(x,t) = \hat{\rho}(x,t) + \in \tilde{\rho}(x,t) + \cdots \tag{1-25}$$

şeklinde yazarak yaparız. Şu halde (1-25) yi (1-18) ve (1-24) te yerlerine koyalım. Taylor teoremine göre,

$$(\hat{\rho} + \in \tilde{\rho} + \cdots)^{-1} = \hat{\rho}^{-1}\left(1 + \in \frac{\tilde{\rho}}{\hat{\rho}} + \cdots\right)^{-1} = \hat{\rho}^{-1} - \in \frac{\tilde{\rho}}{\hat{\rho}^2} + \cdots$$

ve

$$c^2(\hat{\rho} + \in \tilde{\rho} + \cdots) = c^2(\hat{\rho}) + \in \frac{dc^2(\hat{\rho})}{d\rho}\tilde{\rho} + \cdots$$

yı kullanarak ve $\in$ nin katsayılarını eşitleyerek,

$$\tilde{\rho}_t + (\hat{\rho}\tilde{u})_x + (\tilde{\rho}\hat{u})_x = 0 \tag{1-26}$$

$$\tilde{u}_t + \hat{u}\tilde{u}_x + \hat{u}_x\tilde{u} + \frac{c^2(\hat{\rho})}{\hat{\rho}}\tilde{\rho}_x + \frac{1}{\hat{\rho}}\frac{dc^2(\hat{\rho})}{d\rho}\hat{\rho}_x - \frac{\tilde{\rho}}{\hat{\rho}^2}c^2(\hat{\rho})\hat{\rho}_x = 0 \tag{1-27}$$

elde ederiz. Bunlar değişim fonksiyonları $\tilde{u}$ ve $\tilde{\rho}$ için lineer denklemlerdir. Değişken katsayılar $\hat{u}$, $\hat{\rho}$ yapılan değişimin etrafında çözüme bağlıdır. Eğer değiştirilmemiş akının sabitliğini, yani,

$$\hat{u}(x,t) = u_0 = sabit \qquad ve \qquad \hat{\rho}(x,t) = \rho_0 = sabit \tag{1-28}$$

varsayarsak, o zaman (1-26) ve (1-27),

$$\tilde{\rho}_t + \rho_0\tilde{u}_x + u_0\tilde{\rho}_x = 0 \tag{1-29}$$

ve

$$\tilde{u}_t + u_0 \tilde{u}_x + \frac{c_0^{\,2}}{\rho_0} \tilde{\rho}_x = 0 \qquad (1\text{-}30)$$

biçiminde yazılır.

(1-29) ve (1-30) u operatör formunda,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{\rho} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u} = 0 \qquad (1\text{-}31)$$

$$\frac{c_0^{\,2}}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\rho} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u} = 0 \qquad (1\text{-}32)$$

yazarak, hem $\tilde{u}$ hem $\tilde{\rho}$ nin,

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - c_0^{\,2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u = 0 \qquad (1\text{-}33)$$

KDD nin çözümleri olduğunu görürüz.

$$\xi = x - u_0 t , \qquad \tau = t \qquad (1\text{-}34)$$

değişken değiştirmelerini kullanırsak, (1-34) denklemi,

$$u_{\tau\tau} - c_0^{\,2} u_{\xi\xi} = 0 \qquad (1\text{-}35)$$

dalga denklemi olur. u_0 hızıyla, yani, değiştirilmemiş akının hızıyla hareket eden koordinat sistemi için değişikliğe tekabül edecek (1-34) değişkenlerinin değişikliğine dikkat edilmelidir. Eğer (1-35), değiştirilmemiş akının geri kalan kısmı ise, o zaman , değişkenlerin değişimine gerek olmaksızın bir dalga denklemi şeklindedir.

2. BÖLÜM

BİRİNCİ BASAMAKTAN SİSTEMLER

2.1. Giriş

Sonuçlarımızı, KDD sistemlerine yaymaya çalışmamız doğaldır. Böyle bir yayma, basit matematiksel konularla sınırlanmamaktadır. Günden güne fiziki problemler, tek denklemlerden ziyade, KDD sistemleriyle artarak ifade ediliyor. Bunun için sonraki bölümde, böyle bir sistemin önemli bir örneğini ele alarak inceleyeceğiz.

Adi diferansiyel denklem (ADD) lerde, tek yüksek basamaktan denklemler ile denklem sistemleri denktir, yani, uygun diferansiyellenebilirlik varsayımları altında, tek n. basamaktan ADD, birinci basamaktan n tane denklem sistemine denktir. Böylece bu bakış açısıyla, ADD ler için gereklilik dışında, yüksek basamaktan sistemler düşünülmemektedir. Bununla birlikte KDD için, durum çok karmaşıktır. KDD in her zaman tek yüksek basamaktan denkleme denk olmasına gerek olmayabilir. Çünkü o, KDD sistemleri için ve tek yüksek basamaktan denklemler için başlangıç değer problemleri arasında var olan denkliği dönüştürecek. Fakat denklemlerin kendileri için doğru olmayabilir. Şimdi gerekli noktalara değinerek, sistemleri ele alalım.

Saydığımız olumsuzluklara rağmen yüksek basamaktan sistemlerin çoğu, birinci basamaktan sistemlere indirgenebilmektedir. Ayrıca, pratikte ortaya çıkan sistemlerin çoğu, doğrudan birinci basamaktan sistemler gibi ortaya çıkmaktadır.

n bilinmeyen fonksiyon, $u^{(1)}(x,y),\dots,u^{(n)}(x,y)$ için n denklem sistemini varsayalım. Kısmi türevlerin indis hanesini korumak için, u fonksiyonlarında indisleri kullanırız.

Varsayımımız şudur. Denklemler lineerdir, yani, $u_x^{(k)}$, $u_y^{(k)}$ ve $u^{(k)}$ hepsi bütün $k=1,\dots,n$ için lineer olan denklemler olmalı. Eğer, $a_{jk}(x,y)$, j. denklemde $u_x^{(k)}$ nın katsayısını, $b_{jk}(x,y)$ j. denklemde $u_y^{(k)}$ nın katsayısını ve $c_{jk}(x,y)$, j. denklemde $u^{(k)}$ nın katsayısını belirtirse, iki bağımsız değişkenli n bilinmeyen fonksiyon için birinci basamaktan en genel lineer homojen sistemi,

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_{jk}(x,y)u_x^{(k)} + b_{jk}(x,y)u_y^{(k)}\right] = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(x,y)u^{(k)} \qquad j=1,\dots,n \qquad (2\text{-}1)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca yaklaşık olarak özdeş olan yarı lineer sistemi de

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_{jk}(x,y)u_x^{(k)}+b_{jk}(x,y)u_y^{(k)}\right]=c_j(x,y,\mathbf{u}) \qquad \text{j=1,...,n} \tag{2-2}$$

şeklinde yazılır. Burada siyah harfler vektörleri belirtir.

(2-1) ifadesi, bir takım matris cebirin takdimini mümkün kılar. Buna binaen,

$$U=\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(j)} \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix}=(u^{(j)}) \tag{2-3}$$

$$A=(a_{jk}) \qquad B=(b_{jk}) \qquad \text{ve} \qquad C=(c_j) \tag{2-4}$$

alalım. O zaman (2-2),

$$A(x,y)U_x+B(x,y)U_y=C(x,y,U) \tag{2-5}$$

kısaltılmış biçimde yazılabilir.

2.2. Sistem (2-5) in Sınıflandırılması

Tek birinci basamaktan denklemler için yaptığımız gibi, (2-2) sisteminde yönlü türevlere ait bazı türevleri belirtelim. Eğer n^2 yönlü türevlerini,

$$D_{jk}=a_{jk}\frac{\partial}{\partial x}+b_{jk}\frac{\partial}{\partial y} \tag{2-6}$$

gibi takdim edersek, sistem,

$$\sum_{k=1}^{n}D_{jk}u^{(k)}=c_j \qquad \text{j=1,...,n} \tag{2-6a}$$

şeklinde yazılabilir. Bu formda her u, her denklemde farklı yönde diferansiyellenmiştir. Daha dikkatle, j. denklemde k. u, (2-6) ya göre verilen D_{jk} yönünde diferansiyellenmiştir. Eğer verilen denklemde, u nun hepsi aynı yönde diferansiyellenseydi daha iyi olurdu.

Gerçekten aynı yönde diferansiyellenen sonuç denkleminde, bütün u ların böyle bir yolla n denklem (2-2) in lineer kombinasyonu formunda mümkün mü? Bu soruyu cevaplamak için (2-2) yi, λ_j keyfi sabitleriyle çarpar ve j boyunca toplarız. Bu,

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_j a_{jk} u_x^{(k)} + \lambda_j b_{jk} u_y^{(k)}\right] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j \qquad (2\text{-}7)$$

yi verir. (2-7) de, $u^{(k)}$, yön sayıları,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{jk}$$

nın yönünde diferansiyellenmiştir. Bütün k ler için aynı olacak yönleri arzularız. Böylece onların yön sayıları, orantılı

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{jk} = \mu \sum_{j=1}^{n} \lambda_i b_{jk} \qquad k=1,\dots,n \qquad (2\text{-}8)$$

veya

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_i (a_{jk} - \mu b_{jk}) = 0 \qquad k=1,\dots,n \qquad (2\text{-}9)$$

olmalıdır. Arzu edilen KDD i verecek olan λ nın çarpanlarını ararız. Bu nedenle (2-9) un aşikar olmayan çözümlerine gereksinim var. Yani μ,

$$\det(a_{jk} - \mu b_{jk}) = 0 \qquad (2\text{-}10)$$

denkleminin kökü olmalıdır. Satır vektörü, $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, şu halde $A - \mu B$ nin sol öz vektörüdür.

(2-10) denklemi, μ için n. dereceden polinom denklemidir. Onun r farklı reel köklere, $\mu_1, \cdots, \mu_r$ ye sahip olduğunu varsayalım. Bunların her biri için bir öz vektöre, $\Lambda_k = (\lambda_{1k}, \cdots, \lambda_{nk})$, $k = 1, \cdots, r$ ye sahip olacağız. (2-7) de, n tane Λ nın elemanlarını sıra ile kullanarak, aynı yönde diferansiyellenen bütün u ların her birinde (2-7) formunun farklı denklemlerini, r yi bulacağız. (2-8) i (2-7) de kullanalım. O zaman

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j b_{jk} (\mu u_x^{(k)} + u_y^{(k)}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j \qquad (2\text{-}11)$$

olur.

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_j b_{jk} = \beta_k$$

alalım. O zaman (2-11) in sol tarafı,

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k (\mu u_x^{(k)} + u_y^{(k)}) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k D u^{(k)}$$

$$= D\sum_{k=1}^{n} \beta_k u^{(k)} - \sum_{k=1}^{n} (D\beta_k) u^{(k)}$$

olur. Burada D, μ ve 1 yön sayılarına sahip olan yönde yönlü türevdir, yani, eğimi μ^{-1} dir. Eğer

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k u^{(k)} \qquad \text{ve} \qquad \hat{C} = \sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k c_k + (D\beta_k) u^{(k)}\right]$$

koyarsak, (2-11),

$$D\hat{u} = \hat{C}$$

kısaltılmış şekilde yazılabilir.

Yukarıdaki bütün indirgemelerde μ, (2-10) un herhangi bir kökü olup ve λ_j, karşılık gelen öz vektörlerin bileşenleridir. μ_l, (2-10) un köklerinden biri ve λ_{kl}ye tekabül eden Λ_l öz vektörünün elemanlarıdır. Daha önce alındığı gibi $l = 1,\cdots,r$ olsun. Şu halde r denklemi (2-11) deki gibi teşkil edilirse,

$$D_l \hat{u}^{(l)} = \hat{C}_l \qquad l = 1,\cdots,r \tag{2-12}$$

burada

$$D_l = \mu_l \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \tag{2-13}$$

$$\beta_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jl} b_{jk} \tag{2-14}$$

ile

$$\hat{u}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kl} u^{(k)} \tag{2-15}$$

ve

$$\hat{C}_l = \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_{jl} c_j + (D_l \beta_{jl}) u^{(j)} \right] \tag{2-16}$$

yazılabilir.

(2-12) nin her denklemi, yalnız $\hat{u}^{(l)}$ nin denklemlerini içerir. (2-12) denklemleri, bu nedenle (2-6) sisteminden daha basittir. Bununla birlikte, r<n ise, (2-6) sisteminde hepsini tekrar yerine koymak için (2-12) denkleminde yeterli denklemler yoktur ve (2-6) nın n-r denklemi, (2-12) sistemine eklenilmelidir. Bu durumu ele almak zor olduğundan ve pratikte nadiren görüldüğünden, r=0 durumu hariç tutularak ele alınmayacak. r=0 olduğunda, yani, gerçel öz değerler hiç olmadığında, sistem eliptik

olarak adlandırılır ve daha kolay ele alınabilir. Eliptik sistemin klasik örneği, Cauchy-Riemann denklemleri,

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \tag{2-17}$$

çiftidir. (2-17) yi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = 0 \tag{2-18}$$

biçiminde yazarak öz değer denkleminin,

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{2-19}$$

yani,

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2-20}$$

veya

$$\mu^2 + 1 = 0 \tag{2-21}$$

olduğunu görürüz. Öz değerlerin ikisi de sanal olduğundan, sistem eliptiktir. u ve v yi (2-17) den yok edersek, $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$ olur ve potansiyel denklem, eliptik denklemin klasik bir örneğidir.

2.3. Hiperbolik Sistemler; Karakteristikler

Eğer n tane gerçel Λ lineer olarak bağımsız öz vektörleri varsa, (2-5) sistemi hiperbolik olarak adlandırılır. (2-5) sistemi n farklı gerçel öz değerlere sahipse, bu nedenle kesinlikle hiperboliktir. Ancak tekrarlanan öz değer kadar lineer olarak bağımsız öz vektör olacağı için bazı tekrarlanan öz değerler için de hiperbolik olabilir. Öz değerlerin hepsi gerçel ve farklı olduğu zaman, (2-5), tamamen hiperbolik olarak adlandırılır. Biz tamamen hiperbolik sistemleri ele alacağız. Sistemde katsayılar x ve y ye bağlı olduğundan, öz değerler ve öz vektörler de x ve y ye bağlıdır. Bu nedenle onların varlığı, gerçelliği, çokluğu x ve y nin fonksiyonlarıdır. Şimdi tamamen hiperbolik olan bir bölgede (2-5) i ele alalım.

Bunun manası şudur. (2-10), n farklı gerçel kök μ_l; $l = 1,\cdots,n$ ye sahiptir ve μ nün gerçel ve farklı kaldığı değerler için xy düzleminde bir bölge düşünüyoruz. Önceki sayfalarda geliştirilen kuramlara göre, KDD lerin sistemini, yalnız bir yönde bilinmeyenlerin türevlerini içeren n yeni KDD lere belirtmek için μ nünkinden ortaya çıkan kalan öz vektörleri kullanabiliriz. Bu yönlü türevlerin yönleri [(2-13) e bakınız], μ_l^{-1}, $l = 1,\cdots,n$ dir. Doğal olarak, bu eğimleriyle yönleri, karakteristik yönler olarak kabul edeceğiz. Böylece, tamamen hiperbolik olan bir yarı lineer sistemde, düzlemin her (x,y) noktasında, n farklı karakteristik yönlerin kümesine sahibiz. Şöyle ki, eğimlerinin yönleri μ_l^{-1}, $l = 1,\cdots,n$ dir. Burada μ nünki, (2-10) un kökleridir. μ değerleri x ve y nin fonksiyonları olduğundan, her (x,y) noktasında, μ_l^{-1} karakteristik yönlerine sahip olan eğrileri verebiliriz. Bunlar n ADD takımının

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mu_l(x,y)} \qquad l = 1,\cdots,n \tag{2-22}$$

çözümü olacaklar. KDD ler böylece her denklemin karakteristiklerin biri boyunca diferansiyeli alınacak kanonik sisteme indirgenir.

Eğer sistem hiperbolik fakat tamamen hiperbolik değilse, karakteristik yönlerin bazıları katlı olabilir. Bununla birlikte kanonik formda n farklı KDD olup, fakat onların birkaçı aynı karakteristik boyunca yönlü türevleri içerir.

Genellikle, iki bağımsız değişkenli birinci basamaktan yarı lineer bir sistem, sıfırdan farklı herhangi bir yerde verilen noktada n karakteristik yöne sahip olacak.

Karakteristik yönlerin sayısı noktadan noktaya değişebilir. Eğer bir noktada n gerçel karakteristik yön varsa, sistem o noktada hiperboliktir. Eğer bir noktada gerçel karakteristik yönler yoksa, o zaman sistem, orada eliptiktir.

3. BÖLÜM

BİR BOYUTLU SIKIŞTIRILABİLİR AKI

3.1. Bir Boyutlu Değişken Olmayan Anisentropik Akının Eulerian Denklemi

1.3. kısmında, bir boyutlu isentropik akının Eulerian denklemlerini çıkardık. Eğer akı anisentropik ise, Eulerian denklemleri,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} P_x = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

$$S_t + uS_x = 0$$

olur. Burada ρ = lineer yoğunluk, yani, tek uzunluğa bağlı kütle

u = x yönündeki hız

P = basınç

S = düzensizlik

tir. Birinci denklem, süreklilik denklemidir. Kütlenin korunumunu ifade eder. İkincisi, Newton' un ikinci hareket kanunudur. Üçüncüsü verilen partikülün düzensizliğinin zamanla değişmeyeceğini ifade eder. Bütün nicelikler x ve t nin fonksiyonları gibi düşünülmektedir.

Dört bilinmeyenli sadece üç denklem olduğundan, başka bir denkleme ihtiyaç vardır. Bu dördüncü denklem, durum denkleminin varsayımına göre sağlanır; yani,

$$P = f(\rho, S) \qquad (3\text{-}2)$$

gibi verilen bir f fonksiyonunu varsayarız.

(3-2) yi kullanarak, u ve ρ nin yerine u ve P yi içeren bir denkleme göre (3-1) denkleminin birinci kısmını tekrar yazabiliriz. Bunu yapmak için pozitif ve hız boyutlarına sahip olan f_ρ nin fiziki karşılıklarını belirtelim. Bu nedenle

$$c^2 = f_\rho(\rho, S) \tag{3-3}$$

yazabiliriz. Şu halde (3-2) den

$$P_t = c^2 \rho_t + f_S S_t$$

ve

$$uP_x = c^2 u\rho_x + f_S uS_x$$

olur. Bu iki denklem ve (3-1) in birinci ve üçüncü denklemleri kullanılarak,

$$P_t + uP_x = c^2(\rho_t + u\rho_x) = -c^2 \rho u_x$$

veya

$$P_t + uP_x + c^2 \rho u_x = 0 \tag{3-4}$$

bulunur.

Eğer ρ ye (3-2) ye göre tanımlanan P ve S nin bilinen bir fonksiyonu gibi bakarsak, (3-4), x ve t nin fonksiyonları gibi P ve u için bir diferansiyel denklemdir. (3-4) e göre (3-1) in birinci denklemini tekrar yerine koyarsak,

$$P_t + uP_x + c^2 \rho u_x = 0$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} P_x = 0 \tag{3-5}$$

$$S_t + uS_x = 0$$

sistemini buluruz.

Bunlar, üç bilinmeyen u, P ve S için üç denklemdir. ρ, (3-2) ye göre P ve S nin fonksiyonu ve c, (3-3) e göre ρ ve S nin, dolayısıyla P ve S nin fonksiyonu olduklarından, P ve S bilinmeyenleri, (3-5) e ρ ve c gibi katılır.

3.2. Karakteristikler

(3-5) i matris formunda yazarak,

$$\begin{pmatrix} u & c^2\rho & 0 \\ 1/\rho & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_x \\ u_x \\ S_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_t \\ u_t \\ S_t \end{pmatrix} = 0 \tag{3-6}$$

elde ederiz. Böylece karakteristik yönler μ,

$$\begin{vmatrix} u-\mu & c^2\rho & 0 \\ 1/\rho & u-\mu & 0 \\ 0 & 0 & u-\mu \end{vmatrix} = 0 \tag{3-7}$$

veya

$$(u-\mu)\left[(u-\mu)^2 - c^2\right] = 0 \tag{3-8}$$

denkleminin kökleridir. Bu nedenle,

$$\mu = u, \qquad u \pm c \tag{3-9}$$

dir. μ, ((2.3.) kısmından) karakteristik eğimin, yani, dt/dx in karşılığı olduğundan, karakteristiklerin üç ailesine

C_0:

$$\frac{dx}{dt} = u$$

(3-10)

$C^{\pm}$:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c$$

ye sahibiz.

Karakteristikler boyunca KDD lerin aldığı formu görmek için, öz vektörleri buluruz. $\left(\lambda_1^{(0)} \quad \lambda_2^{(0)} \quad \lambda_3^{(0)}\right)$, $\mu = u$ için öz vektörler olsun. O zaman

$$\left(\lambda_1^{(0)} \quad \lambda_2^{(0)} \quad \lambda_3^{(0)}\right)\begin{pmatrix} 0 & c^2\rho & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

olur. Böylece $\lambda_2^{(0)} = \lambda_1^{(0)} = 0$ ve $\lambda_3^{(0)}$ keyfidir. Bu nedenle (0 0 1), bir öz vektördür. Bunu kullanarak ve (3-5) kısmi diferansiyel denklemleri toplayarak

$$S_t + uS_x = 0 \qquad (3\text{-}12)$$

elde edilir. (3-12) nin sol tarafi, S nin partikül türevi olup (3-12) denklemine göre sıfır olur. Bu nedenle özel bir partikülün yolu izlenmiş olmalı. Bu C_0 karakteristiklerinin partikül yörüngeleri ile aynıdır. Çünkü onlarda dx/dt = u dur.

Sonra $C^{\pm}$ karakteristikleri için $\left(\lambda_1^{\pm} \quad \lambda_2^{\pm} \quad \lambda_3^{\pm}\right)$ öz vektörleri belirleriz. Bu öz vektörler

$$\left(\lambda_1^{\pm} \quad \lambda_2^{\pm} \quad \lambda_3^{\pm}\right)\begin{pmatrix} \mp c & c^2\rho & 0 \\ 1/\rho & \mp c & 0 \\ 0 & 0 & \mp c \end{pmatrix} = 0 \qquad (3\text{-}13)$$

bağıntısını sağlarlar, yani,

$$c\lambda_1^{\pm} \mp \frac{1}{\rho}\lambda_2^{\pm} = 0$$

$$c^2\rho\lambda_1^{\pm} \mp c\lambda_2^{\pm} = 0$$

$$\lambda_3^{\pm} = 0$$

olur. Böylece

$$c\rho\lambda_1^{\pm} = \pm\lambda_2^{\pm} \qquad \lambda_3^{\pm} = 0$$

bulunur. Bu nedenle $(1 \quad \pm c\rho \quad 0)$ öz vektörlerdir. Bunlar kullanılarak

$$P_t + uP_x + c^2\rho u_x \pm c\rho\left(u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}P_x\right) = 0$$

denklemlerine indirgenebilir, yani,

$$P_t + (u \pm c)P_x \pm c\rho[u_t + (u \pm c)u_x] = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

olur.

Burada P ve u, her ikisi de aynı yönde türevlenmiştir, yani karakteristik yön sayıları 1 ve $u \pm c$ dir. Eğer $C^{\pm}$ karakteristikleri boyunca parametreler $s_{\pm}$ olursa, (3-14),

$$\frac{\partial P}{\partial s_{\pm}} \pm c\rho\frac{\partial u}{\partial s_{\pm}} = 0 \qquad C^{\pm} \text{ de} \qquad (3\text{-}15)$$

formunu alır. c, ρ gibi S ye de bağlı olduğundan, (3-15) daha fazla analizi yapılmadan $C^{\pm}$ boyunca integrallenemez. Eğer c, S den bağımsız ise bununla birlikte integrallenebilir. Bu isentropik akının özel durumudur.

3.3. İsentropik Akı; Karakteristikler

İsentropik akının özel durumu daha fazla analiz edilebilir. Eğer düzensizlik sabit ise, (3-2) durum denkleminden, P, ρ nin fonksiyonu olarak

$$P = f(\rho) \qquad (3\text{-}16)$$

yazılır. Şu halde

$$c^2 = f'(\rho) \qquad (3\text{-}17)$$

olur.

(3-16) ve (3-17) den

$$P_x = c^2 \rho_x \qquad (3\text{-}18)$$

yazılabilir. (3-18) i kullanarak, (3-1) in ikinci denkleminden P yi yok edebiliriz ve

$$u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x = 0 \qquad (3\text{-}19)$$

elde ederiz.

(3-19) denklemi ve (3-1) in birinci denklemi, x ve t nin fonksiyonları gibi, iki bilinmeyen fonksiyon u ve ρ için iki KDD in bir çiftini oluşturur. Bir kere u(x,t) ve ρ(x,t) tanımlanmış ve P(x,t), (3-16) durum denkleminden bulunabilir.

Bu sistem, yani,

$$\begin{aligned} &\rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0 \\ &u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x = 0 \end{aligned} \qquad (3\text{-}20)$$

denklemleri genel yolla çözülebilir. Matris formunda, (3-20),

$$\begin{pmatrix} u & \rho \\ c^2/\rho & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_x \\ u_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_t \\ u_t \end{pmatrix} = 0 \qquad (3\text{-}21)$$

olur. Böylece μ öz değerleri,

$$\begin{vmatrix} u-\mu & \rho \\ c^2/\rho & u-\mu \end{vmatrix} = 0 \tag{3-22}$$

yani,

$$(u-\mu)^2 - c^2 = 0$$

ın kökleridir ve bundan dolayı

$$\mu = u \pm c \tag{3-23}$$

olur.

$(\lambda_1^{\pm} \quad \lambda_2^{\pm})$ öz vektörleri,

$$(\lambda_1^{\pm} \quad \lambda_2^{\pm})\begin{pmatrix} \mp c & \rho \\ c^2/\rho & \mp c \end{pmatrix} = 0$$

yani,

$$c\lambda_1^{\pm} \mp \frac{c^2}{\rho}\lambda_2^{\pm} = 0$$

ın çözümleridir. Böylece

$$\lambda_1^{\pm} = \pm\frac{c}{\rho}\lambda_2^{\pm}$$

olup $(\pm c/\rho \quad 1)$, öz vektörlerdir. Onları kullanarak

$$\pm\frac{c}{\rho}(\rho_t + \rho u_x + u\rho_x) + (u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x) = 0$$

yani,

$$\pm\frac{c}{\rho}\left[\rho_t+(u\pm c)\rho_x\right]+\left[u_t+(u\pm c)u_x\right]=0 \qquad (3\text{-}24)$$

diferansiyel denklemleri buluruz. Bu yüzden önceki gibi,

$$\pm\frac{c}{\rho}d\rho+du=0 \qquad C^{\pm} \text{ de} \qquad (3\text{-}25)$$

elde edilir.

3.4. Riemann İnvariantları

Anisentropik durumda, c, (3-15) in sonucu ile ρ gibi S ye de bağlıydı ve (3-25) gibi açıkça integrallenemiyordu. Mevcut isentropik durumda, $c=c(\rho)$. Bu nedenle,

$$L(\rho)=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{c(\rho)}{\rho}d\rho \qquad (3\text{-}26)$$

alırsak, (3-25),

$$d\left[L(\rho)\pm u\right]=0 \qquad C^{\pm} \text{ de} \qquad (3\text{-}27)$$

yazılabilir ve integrali

$$L(\rho)\pm u=sabit \qquad C^{\pm} \text{ de}$$

verir. Elbette C^+ ve C^- de sabitler farklı olacak. $L(\rho)+u$ nun sabit değerini C^+ da 2r olarak ve $L(\rho)-u$ nun sabit değerini C^- de 2s olarak kabul edeceğiz. Şöyle ki,

$$L(\rho)+u=2r \qquad C^{+} \text{ da} \qquad (3\text{-}28)$$

ve

$$L(\rho) - u = 2s \qquad C^- \text{ de} \tag{3-29}$$

r ve s nicelikleri, Riemann invariantları olarak adlandırılır. Yukarıda gösterildiği gibi, r, her C^+ karakteristiğinde sabittir. Bununla birlikte her C^+ da aynı sabit olması zorunlu değildir. Diğer taraftan, r, genelde C^- de değişecek. Benzer bir şekilde, s, her C^- de sabittir, fakat genellikle her C^+ da değişecek. Bu nedenle r ve s yi yeni eğrisel koordinatlar gibi takdim etmeye çalışmamız doğaldır. Bu karakteristikleri yeni eğrisel koordinatlar gibi takdim etmek istediğimizi söylemenin başka bir yoludur. Uygulamalı matematikte, biri genellikle yapılana benzer bir şeyi var sayar. Eğer r ve s nin bağımsız olmadığı ve bu nede le yeni bağımsız değişkenler gibi kullanılamadığındaki durumun incelenmesi başarılamasaydı, mevcut durumda ilginç sonuçlar bulunamayacaktı. Bununla birlikte r ve s nin bağımsız olduğu hali ele alacağız. Bağımlılık haline girmeyeceğiz.

r, C^+ da sabit olduğundan, s, C^+ da parametre gibi alınabilir. Bunun gibi r, C^- de parametre gibi kullanılabilir. Şöyle ki C^+ da $dx = (u+c)dt$,

$$\frac{dx}{ds} = (u+c)\frac{dt}{ds} \qquad C^+ \text{ da} \tag{3-30}$$

yazılır. Aynı şekilde

$$\frac{dx}{dr} = (u-c)\frac{dt}{dr} \qquad C^- \text{ de} \tag{3-31}$$

olur.

Şimdi C^+ da , r, sabittir. Bu nedenle (3-30) daki türevler gerçekten s ye göre kısmi türevlerdir. Aynı şekilde (3-31) deki r için türevlerde. Böylece (3-30) ve (3-31), bazı bölgelerde geçerli olacak şekilde alınan iki fonksiyon x(r,s) ve t(r,s) için birinci basamaktan iki KDD i gösteren, KDD lerin bir çifti,

$$x_s = (u+c)t_s \tag{3-32}$$

$$x_r = (u-c)t_r \tag{3-33}$$

gibi yazılabilir. Eğer x ve t için onları çözebilirsek, o zaman x ve t nin fonksiyonları gibi r ve s yi bulmak için çözümü tersine çevirebiliriz. (3-28) ve (3-29) u çözerek

$$L(\rho) = r + s \tag{3-34}$$

$$u = r - s \tag{3-35}$$

elde ederiz ve yerine koyma ile, u(x,t) ve ρ(x,t) yi buluruz.

Asıl problemimiz böylece çözülen yeni birinci basamaktan (3-32) ve (3-33) sistemine indirgenmiş bulunmaktadır. Burada u ve c katsayıları, (3-34) ve (3-35) den dolayı r ve s bağımsız değişkenlerinin bilinen bir fonksiyonudur. [$c = c(\rho)$ nin verilen gazın durum denkleminden doğrudan bulunan, ρ nin bilinen bir fonksiyonu olduğunu anımsayalım.]

(3-32) ve (3-33) denklemleri, asıl sistemin önemli sadeleştirilmesini gösterir. Çünkü lineerdirler. Ayrıca $x_{rs} = x_{sr}$ ye göre onlardan t yi hemen çıkarabiliriz ve tek ikinci basamaktan

$$(u_r + c_r)t_s + (u + c)t_{rs} = (u - c)t_{rs} + (u_s - c_s)t_r \tag{3-36}$$

denklemini buluruz. (3-36) daki katsayılar, r ve s nin fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonları açıkça elde etmek için (3-35) ten

$$u_r = 1 \qquad u_s = -1 \tag{3-37}$$

ve (3-34) ten

$$L'(\rho)\rho_r = L'(\rho)\rho_s = 1$$

bulunur. (3-26) dan, $L'(\rho) = c/\rho$ dir. Böylece

$$\rho_r = \rho_s = \frac{\rho}{c}$$

olur. O zaman

$$c_r = \frac{dc}{d\rho}\rho_r = \frac{\rho}{c}\frac{dc}{d\rho} \qquad \text{ve} \qquad c_s = \frac{dc}{d\rho}\rho_s = \frac{\rho}{c}\frac{dc}{d\rho} \tag{3-38}$$

yazılır.

(3-37) ve (3-38) i (3-36) da kullanarak

$$\left(1+\frac{\rho}{c}\frac{dc}{d\rho}\right)t_s + 2ct_{rs} = -\left(1+\frac{\rho}{c}\frac{dc}{d\rho}\right)t_r$$

veya

$$t_{rs} + \frac{1+\dfrac{\rho}{c}\dfrac{dc}{d\rho}}{2c}\left(t_r + t_s\right) = 0 \tag{3-39}$$

elde ederiz. Burada $t_r + t_s$ nin katsayısı, $r+s$ $[(3-34)den]$den dolayı sadece ρ nin fonksiyonudur. Bu fonksiyonu ϕ olarak,yani,

$$\phi(r+s) = \frac{1+\dfrac{\rho}{c}\dfrac{dc}{d\rho}}{2c} \tag{3-40}$$

alırsak, (3-39) u

$$t_{rs} + [\phi(r+s)](t_r + t_s) = 0 \tag{3-41}$$

kısaltılmış formunda yazabiliriz.

(3-41) i $t(r,s)$ için çözersek, (3-32) ve (3-33), $x(r,s)$ yi verir.

3.5. Başlangıç Koşulları

(3-41), lineer ve hiperbolik olduğundan, onun için başlangıç değer problemi verilebilir. Daha dikkatle, t nin değerleri, rs düzleminde Γ eğrisi boyunca t nin dış türevleri verilir ve o zaman Γ nin komşuluğunda bir çözüm bulunur. Asıl problem, bununla birlikte, x ve t nin u ve ρ için sağlanmasıdır. Böyle doğal fiziki koşulları verecek olan, u ve ρ nin başlangıç değerleri yani u(x,0) ve ρ (x,0) olacak. Bu nedenle

$$u(x,0) = \alpha(x) \tag{3-42}$$

$$\rho(x,0) = \beta(x) \tag{3-43}$$

başlangıç koşullarının verildiğini varsayalım.

Bu başlangıç koşulları, t(r,s) için başlangıç koşullarına nasıl çevrilebilir? Bunun cevabı basittir. (3-28), (3-29), (3-42) ve (3-43) den

$$r = \frac{1}{2}\{L[\beta(x)] + \alpha(x)\} \tag{3-44}$$

$$s = \frac{1}{2}\{L[\beta(x)] - \alpha(x)\} \tag{3-45}$$

elde edilir.

(3-44) ve (3-45) denklemleri, xt düzleminde t=0 ın görüntüsü olan rs düzleminde Γ eğrisinin parametrik gösterimini verir. Bu nedenle birinci başlangıç koşulumuz t için

$$t = 0 \qquad \Gamma \text{ de}$$

şeklindedir. Burada Γ, (3-44) ve (3-45) e göre parametrik olarak verilen eğridir.

Γ de ikinci başlangıç koşuluna ihtiyacımız vardır. Yani orada t nin birinci türevleri vardır. İkinci koşulu elde etmek için, (3-44) ün Γ başlangıç eğrisi boyunca diferansiyeli alınarak

$$dr = \frac{1}{2}\{L'[\beta(x)]\beta'(x) + \alpha'(x)\}dx \tag{3-46}$$

elde edilir. Fakat (3-32) ve (3-33) e göre

$$dx = x_r dr + x_s ds = (u-c)t_r dr + (u+c)t_s ds \qquad (3\text{-}47)$$

olup (3-47) yi

$$dx = (u+c)(t_r dr + t_s ds) - 2ct_r dr$$

biçiminde tekrar yazarız. Çünkü o zaman

$$dx = (u+c)dt - 2ct_r dr$$

kabul ederiz. Fakat Γ boyunca dt=0 dır. Böylece

$$dx = -2ct_r dr \qquad \Gamma \text{ de} \qquad (3\text{-}48)$$

olur. (3-48), (3-46) da yerine konarak ve t_r için çözülerek,

$$t_r = -c^{-1}\{L'[\beta(x)]\beta'(x) + \alpha'(x)\}^{-1} \qquad \Gamma \text{ de} \qquad (3\text{-}49)$$

elde edilir.

Benzer ifade Γ boyunca t_s için bulunabilir. Böylece Γ boyunca t nin normal türevi bilinir ve ikinci başlangıç koşulu belirlenmiş olur. Tabii ki (3-49) da paydanın verilen başlangıç verileri için sıfır olmadığı varsayılır.

3.6. Polytropik Gaz

(3-41) deki KDD, açıkça çözülemeyecek kadar geneldir. Gerçekten durum denklemi, (3-16) gibi genel bir halde kaldığı zaman gaz dinamiklerinde nispeten az çözülebilir. $f(\rho)$ için daha özel bir hali tasavvur etmeliyiz. Gerçekten gazların büyük bir takımı

$$P = A\rho^{\gamma} \tag{3-50}$$

biçiminde durum denklemine sahiptir. Burada A ve γ sabitlerdir. Gazın (3-50) ye göre verilen durum denklemi polytropik gaz olarak adlandırılır. Uygun sıcaklıkta hava $\gamma = 1.4$ ile polytropiktir.

(3-50) durum denklemi, önceki kısımda takdim edilen niceliklerin çoğunu açıkça hesaplamamızı mümkün kılar. (3-50) ve (3-17) den

$$c = \sqrt{A\gamma}\,\rho^{(\gamma-1)/2} \tag{3-51}$$

olur. O zaman (3-26), $\rho_0 = 0$ ile

$$L(\rho) = \frac{2\sqrt{A\gamma}}{\gamma - 1}\rho^{(\gamma-1)/2}$$

dir. (3-51) i kullanılarak,

$$L(\rho) = \frac{2c}{\gamma - 1} \tag{3-52}$$

gibi yazabilir.

(3-40) taki ϕ fonksiyonunun polytropic durumda göründüğünü anlamak için (3-51) den

$$dc = \frac{\gamma - 1}{2}\frac{c}{\rho}d\rho$$

ve buradan

$$\frac{\rho}{c}\frac{dc}{d\rho} = \frac{\gamma - 1}{2}$$

olduğu görülür. Böylece (3-40) denklemi,

$$\phi(r+s)=\frac{\gamma+1}{2(2c)}$$

olur. (3-52) kullanılarak, bu

$$\phi(r+s)=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)L}$$

gibi yazılabilir. Sonuçta (3-34) kullanılırsa

$$\phi(r+s)=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{1}{r+s} \tag{3-53}$$

elde edilir.

Eğer

$$\kappa=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

alınırsa

$$\phi(r+s)=\frac{\kappa}{r+s}$$

olup (3-41) den

$$t_{rs}+\frac{\kappa}{r+s}(t_r+t_s)=0 \tag{3-54}$$

bulunur.

Birinci türevli terimler sabit katsayılı denklemlerden kaldırılabilir. r ve s, (3-54) e simetrik olarak dahil olduğundan

$$t(r,s) = \psi(r+s)\omega(r,s) \qquad (3\text{-}55)$$

koyarak (3-54) için bunu genelleştirmeye çalışacağız. Burada ω, yeni bağımsız değişken ve ψ, tanımlanmış olacak. Öyle ki ω_r ve ω_s nin katsayıları sıfıra eşit olacak.

(3-55), (3-54) te yerine konup terimleri toplanılırsa,

$$\psi\omega_{rs} + \left(\psi' + \frac{\kappa\psi}{r+s}\right)(\omega_r + \omega_s) + \left(\psi' + \frac{2\kappa\psi'}{r+s}\right)\omega = 0 \qquad (3\text{-}56)$$

bulunur. Bu nedenle $\psi(r+s) = (r+s)^{-\kappa}$ seçilirse, (3-55),

$$t(r,s) = \frac{\omega(r,s)}{(r+s)^{\kappa}}$$

olur. O zaman (3-56),

$$\omega_{rs} + \frac{\kappa(1-\kappa)}{(r+s)^2}\omega = 0 \qquad (3\text{-}57)$$

a indirgenir. Bu da değişken katsayılı telgraf denklemidir. Sabit katsayılı telgraf denklemi için Riemann fonksiyonu, (r-ρ)(s-σ) nun fonksiyonudur. Burada ρ ve σ, Riemann fonksiyonunda parametre noktasının koordinatlarıdır. (ρ burada gazın yoğunluğu değildir.) mevcut durumda, R(r,s,ρ,σ), (r+s) nin de fonksiyonu olmalı. Çünkü (3-57) de katsayı (r+s) nin fonksiyonudur. Bunlardan ve başka gerçeklerden, Riemann,

$$z = \frac{(r-\rho)(s-\sigma)}{(r+s)(\rho+\sigma)} \qquad (3\text{-}58)$$

gibi tek değişkenli Riemann fonksiyonunu araştırmayı sürdürür. Yani Riemann,

$$R(r,s,\rho,\sigma)=\psi(z) \tag{3-59}$$

yi uygun görür. Burada z, (3-58) deki gibi verilir ve ψ, tanımlanmış olacak. Şöyle ki R, (3-57) (ki o, self-adjointtir.) yi sağlayacak ve Riemann fonksiyonuna ilave edilen genel koşullar,

r=ρ olduğunda

$$R_s(\rho,s,\rho,\sigma)=0 \tag{3-60}$$

s=σ olduğunda

$$R_r(r,\sigma,\rho,\sigma)=0 \tag{3-61}$$

ve r=ρ ve s=σ olduğunda

$$R(\rho,\sigma,\rho,\sigma)=1 \tag{3-62}$$

dir.

(3-59) ü (3-57) de yazarsak, ψ nin

$$z(1-z)\psi''+(1-2z)\psi'-\kappa(1-\kappa)\psi=0 \tag{3-63}$$

adi diferansiyel denklemi sağladığını görürüz. (3-63) denkleminde,

$$\alpha=1-\kappa \qquad \beta=\kappa \qquad ve \qquad \gamma=1$$

dönüşümleri yapılırsa,

$$z(1-z)\psi''+[\gamma-(1+\beta+\alpha)z]\psi'-\alpha\beta\psi=0 \tag{3-64}$$

hipergeometrik denklemi elde edilir.

(3-60) ve (3-61) koşulları otomatikmen (3-59) tarafından sağlanır. (3-62) koşulu,

$$\psi(0)=1 \tag{3-65}$$

ister.

(3-65) i sağlayan (3-64) ün çözümü,

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+\cdots \tag{3-66}$$

şeklindeki hipergeometrik fonksiyonudur. Böylece

$$\mathrm{R}(r,s,\rho,\sigma)=F\left[1-\kappa,\kappa,1;-\frac{(r-\rho)(s-\sigma)}{(r+s)(\rho+\sigma)}\right] \tag{3-67}$$

olur.

Eğer κ, bir tam sayı ise, (3-57), başka bir metotla doğrudan çözülebilir. Bu metot, ilk olarak r ve s nin yerine u ve c yi bağımsız değişkenler olarak içerir. (3-34) ve (3-52) den

$$\frac{2c}{\gamma-1}=r+s \tag{3-68}$$

ve (3-35) ten

$$u=r-s \tag{3-69}$$

olur.

(3-68) ve (3-69) u kullanarak, (3-54) teki değişkenleri değiştirelim.

$$t_r=t_u u_r+t_c c_r \Rightarrow t_r=t_u+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)t_c$$

$$t_s=t_u u_s+t_c c_s \Rightarrow t_s=-t_u+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)t_c$$

$$t_{rs}=t_{uu}u_s+t_{cc}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)c_s \Rightarrow t_{rs}=-t_{uu}+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2 t_{cc}$$

Bu değişkenler (3-54) te yerlerine yazılarak,

$$t_{uu}=\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2\left(t_{cc}+\frac{2\kappa}{c}t_c\right) \qquad (3\text{-}70)$$

bulunur. (3-70) denklemi, Euler-Poisson-Darbox denklemidir. Eğer

$$2\kappa=n-1 \qquad n \text{ tamsayı} \qquad (3\text{-}71)$$

dönüşümü yapılırsa (3-70) den

$$t_{uu}=\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2\left(t_{cc}+\frac{n-1}{c}t_c\right) \qquad (3\text{-}72)$$

bulunur.

(3-72) denklemine, küresel simetrili bir problem için n değişkenli uzayda bir dalga denklemi gibi bakılabilir. Bunu görmek için

$$c=\sqrt{x_1^{\,2}+\cdots+x_n^{\,2}}$$

$$\nabla^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^{\,2}} \qquad (3\text{-}73)$$

olsun. $t=t(x_1,\cdots,x_n,u)$, yalnızca c ve u nun fonksiyonu olup

t=t(c,u)

olarak yazılır. Buna göre,

$$\frac{\partial t}{\partial x_1} = \frac{\partial t}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_1} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x_1{}^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial c^2}\left(\frac{\partial c}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial t}{\partial c}\frac{\partial^2 c}{\partial x_1{}^2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x_2} = \frac{\partial t}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_2} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x_2{}^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial c^2}\left(\frac{\partial c}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial t}{\partial c}\frac{\partial^2 c}{\partial x_2{}^2} \qquad (3\text{-}74)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial t}{\partial x_n} = \frac{\partial t}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_n} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x_n{}^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial c^2}\left(\frac{\partial c}{\partial x_n}\right)^2 + \frac{\partial t}{\partial c}\frac{\partial^2 c}{\partial x_n{}^2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2}} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x_1{}^2} = \frac{x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}{\left(x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2\right)\sqrt{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad (3\text{-}75)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x_n} = \frac{x_n}{\sqrt{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2}} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x_n{}^2} = \frac{x_1{}^2 + \cdots + x_{n-1}{}^2}{\left(x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2\right)\sqrt{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2}}$$

elde edilir. (3-74) ve (3-75) e göre,

$$\nabla^2 t = t_{cc} + \frac{n-1}{c} t_c \qquad (3\text{-}76)$$

olup (3-72) denklemi,

$$t_{uu} = \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)^2 \nabla^2 t \qquad (3\text{-}77)$$

denklemine dönüşür. Bu da $(\gamma - 1)/2$ yayma sabiti ile bir dalga denklemidir.

Eğer κ, tamsayı ise, (3-54) başka bir metotla da çözülebilir. Bunun için

$$\tau = \frac{1}{r+s}(t_r + t_s) \qquad (3\text{-}78)$$

olsun. (3-54) ve (3-78) denklemlerinden

$$t_{rs} = -\kappa\tau \tag{3-79}$$

$$\tau_r = \frac{-1}{(r+s)^2}(t_r + t_s) + \frac{1}{r+s}(t_{rr} + t_{sr}) \Rightarrow \tau_r = \frac{-(\kappa+1)\tau}{r+s} + \frac{t_{rr}}{r+s}$$

(3-80)

$$\tau_s = \frac{-1}{(r+s)^2}(t_r + t_s) + \frac{1}{r+s}(t_{rs} + t_{ss}) \Rightarrow \tau_s = \frac{-(\kappa+1)\tau}{r+s} + \frac{t_{ss}}{r+s}$$

$$\tau_{rs} = \frac{(\kappa+1)}{(r+s)^2}\tau - \frac{(\kappa+1)}{r+s}\tau_s - \frac{1}{(r+s)^2}t_{rr} + \frac{1}{r+s}t_{rrs}$$

(3-81)

$$\tau_{sr} = \frac{(\kappa+1)}{(r+s)^2}\tau - \frac{(\kappa+1)}{r+s}\tau_r - \frac{1}{(r+s)^2}t_{ss} + \frac{1}{r+s}t_{ssr}$$

olup (3-79) dan $t_{rs} = t_{sr} \Rightarrow t_{sr} = -\kappa\tau$, $t_{rss} = -\kappa\tau_s$, $t_{srr} = -\kappa\tau_r$ bulunur. $\tau_{rs} = \tau_{sr}$ ve (3-80) den

$$\frac{-1}{r+s}(\tau_r + \tau_s) = \frac{2(\kappa+1)}{(r+s)^2}\tau + \frac{1}{(r+s)^2}(t_{rr} + t_{ss})$$

olduğu göz önüne alınarak (3-81) in birinci ve ikinci kısımları taraf tarafa toplanılırsa

$$\tau_{rs} + \frac{\kappa+1}{r+s}(\tau_r + \tau_s) = 0 \tag{3-82}$$

bulunur. (3-82) denklemi şunu gösteriyor. Eğer κ nin her değeri için (3-54) ün bir çözümü varsa, (3-78) dönüşümü uygulanarak (κ+1) için çözüm bulunabilir. Özellikle κ=0 için, (3-54),

$$t_{rs} = 0$$

olur. Buradan

$$t = f(r) + g(s)$$

bulunur. Burada f ve g keyfidir. (3-78) e göre, κ=0 için (3-82) nin, yani, κ=1 için (3-54) ün genel çözümü ,

$$\tau = \frac{f'(r) + g'(r)}{r + s}$$

biçimindedir. κ=2 için

$$\tau = \frac{-2[f'(r) + g'(s)]}{(r+s)^2} + \frac{f''(r) + g''(s)}{r+s}$$

elde edilir.

Genellikle, κ tamsayı ise, (3-54) ün genel çözümü,

$$t(r,s) = \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial r^{\kappa-1}} \frac{f(r)}{(r+s)^{\kappa}} + \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial s^{\kappa-1}} \frac{g(s)}{(r+s)^{\kappa}} \tag{3-83}$$

olur. Burada $f(r)$ ve $g(s)$ argümentlerinin keyfi fonksiyonlarıdır.

(3-54) ü başka bir yollada çözmemiz mümkündür. Bunun için,

$$w = r + s \tag{3-84}$$

değişken değiştirmesini kullanalım. Buna binaen,

$$t_r = t_w w_r \Rightarrow t_r = t_w,\ t_s = t_w w_s \Rightarrow t_s = t_w,\ t_{rs} = t_{ww} w_s \Rightarrow t_{rs} = t_{ww} \tag{3-85}$$

bulunur. (3-84) ve (3-85) denklemleri kullanılarak (3-54) denklemi,

$$t_{ww} + \frac{2\kappa}{w} t_w = 0 \tag{3-86}$$

denklemine dönüşür. (3-86) nın her iki tarafi w^2 ile çarpılırsa,

$$w^2 t_{ww} + 2\kappa w t_w = 0 \qquad (3\text{-}87)$$

elde edilir. (3-87) denklemi Cauchy-Euler tipinde bir diferansiyel denklemdir.

$$w = e^p \rightarrow p = \ln w$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\left(w^2 D^2 + 2\kappa w D\right)t = 0$$

denklemi,

$$wD = D_1, \quad w^2 D^2 = D_1(D_1 - 1) \quad \left(D = \frac{d}{dw}, \quad D_1 = \frac{d}{dp}\right)$$

$$\left[D_1^2 + (2\kappa - 1)D_1\right]t = 0$$

denklemine dönüşür. Gerekli hesaplamalardan sonra, (3-86) nın genel çözümü,

$$t = c_1 + c_2 w^{1-2\kappa} \qquad (3\text{-}88_a)$$

olur. (3-84) ü (3-88$_a$) da yazarsak,

$$t(r,s) = c_1 + c_2 (r+s)^{1-2\kappa} \qquad (3\text{-}88)$$

denklemi (3-54) ün genel çözümü olur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

3.7. Lineer Olmayan Dalga Denklemi İçin Uygulama

Mevcut bölümün metotları

$$w_{tt} - c^2(w_x)w_{xx} = 0 \tag{3-89}$$

formunda verilen lineer olmayan dalga denklemini çözmek için kullanılabilir. Burada c hızı, w_x e bağlı olarak kabul edilir.

(3-89) u bir d.nklem sistemine indirgemek için

$$w_t = u \qquad ve \qquad w_x = v \tag{3-90}$$

koyalım. O zaman (3-89), $u_t - c^2 v_x = 0$ olur. $w_{tx} = w_{xt}$ olduğundan, $u_x = v_t$ ye de sahibiz. Böylece

$$\begin{aligned} u_x - v_t &= 0 \\ u_t - c^2(v)v_x &= 0 \end{aligned} \tag{3-91}$$

sistemini elde ederiz. (3-91) i matris formunda yazarsak,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3-92}$$

elde ederiz.

(2-10) a göre, μ öz değerleri için karakteristik denklem,

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2(v) \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

dan

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & -c^2(v) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3\text{-}93)$$

dır. Böylece

$$\mu = \pm c(v) \qquad (3\text{-}94)$$

olur. Karşılık gelen öz vektörler, $(c \quad \mp 1)$ dır. Önceki gösterimlerimize uygun olarak, $\mu = +c$ yi C^+ karakteristiklerine ve $\mu = -c$ yi C^- karakteristiklerine uygun olarak kabul ederiz.

Genellikle, sistemi kanonik formda yazmak için öz vektörleri kullanırız. Bu şu anlama gelir. (3-91) in birinci denklemini c ile ve ikincisini –1 ile çarpar ve toplarız. Ondan sonra (3-91) in birinci denklemini c ile ve ikincisini +1 ile çarpar ve toplarız. Sonuçta,

$$\begin{aligned} &u_t - cu_x + c(v_t - cv_x) = 0 \\ &u_t + cu_x - c(v_t + cv_x) = 0 \end{aligned} \qquad (3\text{-}95)$$

KDD çiftini elde ederiz.

(3-95) denklemi, (3-91) hiperbolik sistemin kanonik formudur. Burada u ve v kanonik sistemin verilen denkleminde aynı yönde diferansiyellenmiştir. (3-95) in birinci denkleminde, hem u hem v nin yön sayıları, 1 ve –c yönünde, yani, C^+ boyunca diferansiyellenmiştir. (3-95) in ikinci denkleminde, hem u hem v nin yön sayıları 1 ve c yönünde, yani, C^- boyunca diferansiyellenmiştir. Böylece

$$du \pm c dv = 0 \qquad C^{\pm} \text{ de} \qquad (3\text{-}96)$$

dır. c=c(v) olduğundan,

$$M(v) = \int_{v_0}^{v} c(z)dz \qquad (3\text{-}97)$$

takdim edilerek

$$cdv = dM(v) \tag{3-98}$$

yazılabilir. Öyle ki (3-86),

$$d[u \pm M(v)] = 0 \qquad C^{\pm} \text{ de} \tag{3-99}$$

olur.

(3-99) denklemi, r ve s Riemann invariantlarını,

$$\begin{aligned} r &= u + M(v) && C^{+} \text{ da} \\ s &= u - M(v) && C^{-} \text{ de} \end{aligned} \tag{3-100}$$

gibi takdim etmeye imkan verir.

r, C^+ da sabit olduğundan, s, C^+ da parametre olarak alınabilir. Bunun gibi r, C^- de parametre gibi kullanılabilir. Şöyle ki

$$\frac{dx}{ds} = c\frac{dt}{ds} \qquad C^{+} \text{ da} \tag{3-101}$$

$$\frac{dx}{dr} = -c\frac{dt}{dr} \qquad C^{-} \text{ de} \tag{3-102}$$

yazılabilir.

Şimdi C^+ da , r, sabittir. Bu nedenle (3-101) deki türevler gerçekten s ye göre kısmi türevlerdir. Aynı şekilde (3-102) deki r için türevlerde. Böylece (3-101) ve (3-102), bazı bölgelerde geçerli olacak şekilde alınan iki fonksiyon x(r,s) ve t(r,s) için birinci basamaktan iki KDD i gösteren, KDD lerin bir çifti,

$$x_s = ct_s \tag{3-103}$$

$$x_r = -ct_r \tag{3-104}$$

gibi yazılabilir. Eğer x ve t için onları çözebilirsek, o zaman x ve t nin fonksiyonları gibi r ve s yi bulmak için çözümü tersine çevirebiliriz. (3-100) ü çözerek

$$u = \frac{r+s}{2} \tag{3-105}$$

$$M(v) = \frac{r-s}{2} \tag{3-106}$$

elde ederiz ve yerine koyma ile, u(x,t) ve v(x,t) yi buluruz.

Asıl problemimiz böylece çözülen yeni birinci basamaktan (3-103) ve (3-104) sistemine indirgenmiş bulunmaktadır. Burada u ve v katsayıları, (3-105) ve (3-106) dan dolayı r ve s bağımsız değişkenlerinin bilinen bir fonksiyonudur. [$c = c(v)$, v nin bilinen bir fonksiyonu olduğunu anımsayalım.]

(3-103) ve (3-104) denklemleri, asıl sistemin önemli sadeleştirilmesini gösterir. Çünkü lineerdirler. Ayrıca $x_{rs} = x_{sr}$ ye göre onlardan t yi hemen çıkarabiliriz ve tek ikinci basamaktan

$$c_r t_s + ct_{rs} = -ct_{rs} - c_s t_r \tag{3-107}$$

denklemini buluruz. (3-107) deki katsayılar, r ve s nin fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonları açıkça elde etmek için (3-105) ten ve (3-106) dan

$$M'(v)v_r = -M'(v)v_s = \frac{1}{2}$$

buluruz. (3-97) den, $M'(v) = c$ dir. Böylece

$$v_r = \frac{1}{2c}, \qquad v_s = -\frac{1}{2c}$$

olur. O zaman

$$c_r = \frac{dc}{dv} v_r = \frac{1}{2c}\frac{dc}{dv} \qquad \text{ve} \qquad c_s = \frac{dc}{dv} v_s = -\frac{1}{2c}\frac{dc}{dv} \tag{3-108}$$

dir.

(3-108), (3-107) de kullanılarak

$$\left(\frac{1}{2c}\frac{dc}{dv}\right) t_s + 2c t_{rs} = \left(\frac{1}{2c}\frac{dc}{dv}\right) t_r$$

veya

$$t_{rs} + \frac{\frac{1}{2c}\frac{dc}{dv}}{2c}\left(t_r - t_s\right) = 0 \tag{3-109}$$

elde edilir. Burada $t_r - t_s$ nin katsayısı, $r - s$ $[(3-106)dan]$den dolayı sadece v nin fonksiyonudur. Bu fonksiyonu ϕ olarak, yani,

$$\phi\left(\frac{r-s}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2c}\frac{dc}{dv}}{2c} \tag{3-110}$$

alırsak, (3-109),

$$t_{rs} + \left[\phi(\frac{r-s}{2})\right](t_r - t_s) \tag{3-111}$$

kısaltılmış formda yazılabilir.

(3-111), $t(r,s)$ için çözülürse, (3-103) ve (3-104), $x(r,s)$ yi verir. (3-111), lineer ve hiperbolik olduğundan, onun için başlangıç değer problemi verilebilir. Daha dikkatle, t nin değerlerini, rs düzleminde Γ eğrisi boyunca t nin dış türevlerini veririz ve o zaman Γ nin komşuluğunda çözüm buluruz. Asıl problem, bununla birlikte, x ve t nin fonksiyonları gibi u ve v içindi. Böyle doğal fiziki koşulları verecek olan, u ve v nin başlangıç değerleri olacak. Yani u(x,0) ve v(x,0). Bu nedenle

$$u(x,0) = \alpha(x) \tag{3-112}$$

$$v(x,0) = \beta(x) \tag{3-113}$$

başlangıç koşullarının verildiğini varsayalım.

Bu başlangıç koşullarını t(r,s) için başlangıç koşullarına nasıl çevirmeliyiz. (3-100), (3-112) ve (3-113) den

$$\alpha(x) + M[\beta(x)] = r \tag{3-114}$$

$$\alpha(x) - M[\beta(x)] = s \tag{3-115}$$

elde ederiz.

(3-114) ve (3-115) denklemleri, xt düzleminde t=0 ın görüntüsü olan rs düzlemindeki Γ eğrisinin parametrik gösterimini verir. Bu nedenle birinci başlangıç koşulumuz t için

t=0 ;   Γ üzerinde

olur. Burada Γ, (3-114) ve (3-115) e göre parametrik olarak verilen eğridir.

Γ de ikinci başlangıç koşuluna ihtiyacımız vardır. Yani orada t nin birinci türevlerini içerir. İkinci koşulu elde etmek için, (3-114) ü Γ başlangıç eğrisi boyunca diferansiyelleriz.

$$dr = \{M'[\beta(x)]\beta'(x) + \alpha'(x)\}dx \tag{3-116}$$

elde ederiz. Fakat (3-103) ve (3-104) e göre

$$dx = x_r dr + x_s ds = -ct_r dr + ct_s ds \tag{3-117}$$

dir. (3-107) yi

$$dx = c(t_r dr + t_s ds) - 2ct_r dr$$

formunda tekrar yazarız. Çünkü o zaman

$$dx = cdt - 2ct_r dr$$

yi kabul ederiz. Fakat Γ de $dt = 0$. Böylece

$$dx = -2ct_r dr \qquad \Gamma \text{ de} \tag{3-118}$$

(3-118) i (3-116) da yerine koyarak ve t_r için çözerek,

$$t_r = -\frac{1}{2}c^{-1}\{M'[\beta(x)]\beta'(x) + \alpha'(x)\}^{-1} \qquad \Gamma \text{ de} \tag{3-119}$$

elde ederiz.

Benzer ifade Γ boyunca t_s için bulunabilir. Böylece Γ boyunca t nin normal türevi bilinir ve ikinci başlangıç koşuluna sahip oluruz. Tabii ki (3-119) da paydanın verilen başlangıç verileri için sıfır olmadığı varsayılır.

(3-111) deki KDD açıkça çözülemeyecek kadar geneldir. c(v) için daha özel bir form tasavvur etmeliyiz.

$$c = Av^{\gamma} \tag{3-120}$$

alalım. Burada A ve γ sabittirler. $v_0 = 0$ ile (3-97) denklemi,

$$M(v) = A\frac{v^{\gamma+1}}{\gamma+1} \tag{3-121}$$

olur. (3-120) den

$$\frac{dc}{dv} = A\gamma v^{\gamma-1} \tag{3-122}$$

yazılabilir. Böylece (3-110) denklemi, (3-120)-(3-122) ile birlikte

$$\phi\left(\frac{r-s}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{\gamma}{(\gamma+1)M(v)}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuçta (3-106), kullanılarak,

$$\phi\left(\frac{r-s}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{(\gamma+1)}\frac{1}{r-s} \tag{3-123}$$

elde edilir.

$$\kappa = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma+1}$$

alınırsa, (3-123) denklemi,

$$\phi\left(\frac{r-s}{2}\right) = \frac{\kappa}{r-s}$$

ve (3-111) denklemi,

$$t_{rs} + \frac{\kappa}{r-s}(t_r - t_s) = 0 \tag{3-124}$$

denklemine dönüşür. (3-124) için

$$w = r - s \tag{3-125}$$

değişken değiştirmesini kullanalım. Buradan,

$$t_r = t_w w_r \Rightarrow t_r = t_w,\ t_s = t_w w_s \Rightarrow t_s = -t_w,\ t_{rs} = t_{ww} w_s \Rightarrow t_{rs} = -t_{ww} \tag{3-126}$$

bulunur. (3-125) ve (3-126) denklemleri kullanılarak (3-124) denklemi,

$$t_{ww} - \frac{2\kappa}{w} t_w = 0 \tag{3-127}$$

denklemine dönüşür. (3-127) nin her iki tarafını w^2 ile çarparsak,

$$w^2 t_{ww} - 2\kappa w t_w = 0 \tag{3-128}$$

elde edilir. (3-128) denklemi, Cauchy-Euler tipinde bir diferansiyel denklemdir.

$$w = e^p \rightarrow p = \ln w$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\left(w^2 D^2 - 2\kappa w D\right) t = 0$$

denklemi,

$$wD = D_1, \quad w^2 D^2 = D_1 (D_1 - 1) \quad \left(D = \frac{d}{dw}, \quad D_1 = \frac{d}{dp}\right)$$

$$\left[D_1^2 - (2\kappa + 1) D_1\right] t = 0$$

denklemine dönüşür. Gerekli hesaplamalardan sonra, (3-127) nin genel çözümü,

$$t = c_1 + c_2 w^{2\kappa+1} \tag{3-129}$$

olur. (3-125), (3-129)da yazılırsa,

$$t(r,s) = c_1 + c_2 (r-s)^{2\kappa+1} \tag{3-130}$$

denklemi (3-124) ün genel çözümü olur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Özelde,

$$w_{tt} - c(w_x)w_{xx} = 0$$

$$w(x,0) = \frac{x^2}{2} + 5 \tag{3-131}$$

$$w_t(x,0) = 0$$

(3-131) başlangıç koşullarıyla verilen lineer olmayan hiperbolik denklemi ele alalım. (3-112) ve (3-113) başlangıç değerleri, (3-90) ile

$$u(x,0) = w_t(x,0) \Rightarrow \alpha(x) = 0$$

$$v(x,0) = w_x(x,0) \Rightarrow \beta(x) = x \tag{3-132}$$

değerlerine dönüşür. (3-97), (3-120) ve (3-132), (3-119) da kullanılarak,

$$t_r = \frac{-1}{2A^2} x^{-2\gamma} \tag{3-133}$$

bulunur. (3-130) denkleminden

$$t_r = c_2(2\kappa+1)(r-s)^{2\kappa} \tag{3-134}$$

olduğu çıkar. (3-106), (3-97) denklemleri kullanılarak, (3-116) ve (3-117) eşitliklerinden

$$c_2 = -\frac{(\gamma+1)^{2\kappa}}{2^{2\kappa+1}A^{2\kappa+2}(2\kappa+1)}x^{-2\{\gamma(\kappa+1)+\kappa\}}$$

bulunur. Ayrıca

$$t = 0 \ ; \quad \Gamma \text{ üzerinde}$$

başlangıç koşulu için aynı şekilde

$$c_1 = \frac{1}{A(2\kappa+1)(\gamma+1)}x^{1-\gamma}$$

bulunur. c_1 ve c_2 eşitlikleri, (3-130) da yerlerine yazılarak

$$t(r,s) = \frac{1}{A(2\kappa+1)(\gamma+1)}x^{1-\gamma} - \frac{(\gamma+1)^{2\kappa}}{2^{2\kappa+1}A^{2\kappa+2}(2\kappa+1)}x^{-\{\gamma(\kappa+1)+\kappa\}}(r-s)^{2\kappa+1}$$

elde edilir. Böylece (3-132) başlangıç koşulu ile verilen lineer olmayan hiperbolik denklemin çözümünü (3-130) denklemi için elde ettik.

KAYNAKLAR

1. COURANT, R., and FRİEDRİCHS, K. O., 1948. Supersonic Flow and Shock Waves, İnterscience, New York.
2. CARRİER, G. F., and GREENSPAN, H. P., 1957. Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J. Fluid Mech., 4, 97-109.
3. DEBNATH, L.,1997. Nonlinear Partial Diferantial Equations for Scientist and Engineers, Birhäuser, Boston.
4. ERTAŞ, A., 1997. Kısmi Diferansiyel Denklemler, Diyarbakır.
5. GARABEDİAN, P. R., 1964. Partial Diferantial Equations, John Wılay &Son. Inc.
6. JEFFREY, A., 1963. The development of jump discontinuities in non-linear hyperbolic syste ı of equations in two independent variables, Archs. Rat. Mech. Anal., 14, 27-37.
7. JEFFREY, A., and TANİU, T., 1964. Nonlinear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics, Academic, New York.
8. JOHN. F., 1971. Partial Diferantial Equations, Springer-Verlag, New York İnc.
9. LUDFORD, G. S. S., and MARTİN, M. H., 1954. One Dimensional Anisentropic Flows, Commun. Pure Appl. Math., 7, 45-63.
10. LAX. P. D., 1954. The initial value problem for non-linear hyperbolic equations in to independent variables, Ann. Math. Stud.(Princeton), 33, 211-229.
11. RİEMANN, B.,1858. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Göttingen, Abhandlunger, 8, 43 .
12. WHITHAM, G. B. , 1958. On the propagation of shock waves through regions of non- uniform area or flow, J. Fluid Mech., 4, 337-360.
13. WHITHAM. G. B., 1974. Linear and Nonlinear Waves, A Wiley-İnterscience, New York.
14. ZABUSKY, N. J., 1962. The exact solution for the vibrationof a nonlinear continuous model string, J. Math. Phys., 3, 1028-1039.

ÖZGEÇMİŞ

03.03.1976 tarihinde Siirt'in Kurtalan ilçesinde doğdum. İlköğrenimimi Atatürk İlkokulunda, orta ve lise öğrenimimi Kurtalan Lisesinde tamamladım. Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünden 1997 yılında mezun oldum. Aynı yıl Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladım. 01.09.1998 tarihinde Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü "Uygulamalı Matematik" Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladım. Halen bu görevi yürütmekteyim.