

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

FABER POLİNOMLARI VE SIFIRLARI

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Bilal ÇEKİÇ

106528

YÜKSEK LİSANS TEZİ


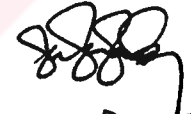

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

106528

DİYARBAKIR
HAZİRAN - 2001


T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne
DIYARBAKIR

Bu çalışma, jürimiz tarafından **M A T E M A T İ K** Anabilim Dalı'nda
Y Ü K S E K L İ S A N S tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Jüri Üyesinin Ünvanı</u>	<u>Adı Soyadı</u>	
Başkan	: Doç. Dr.	Sezai OĞRAŞ (Danışman)	
Üye	: Prof. Dr.	H.İlhan TUTALAR	
Üye	: Yrd.Doç. Dr.	H.Özlem GÜNEY	
Yedek Üye	: Yrd.Doç. Dr.	Abdulkadir ERTAŞ	—

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

29 / 06 / 2001


Prof. Dr.H.İlhan TUTALAR
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamın başından sonuna kadar değerli bilgileriyle bana ışık tutan, önümde yeni ufuklar açan, ilgisini ve içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim saygıdeğer danışman hocam

Doç. Dr. Sezai OĞRAŞ' a,

teşekkür ve şükranlarımı,

Her konuda sürekli yardımcı ve yol gösterici olan, geniş tecrübesiyle çalışmalarımnda etkin katkısı bulunan değerli hocam

Prof. Dr. Hasan İlhan TUTALAR' a

ve çalışmalarımın her aşamasında olduğu kadar sonuçların tartışılmasında da yanımda olan, her zaman beni yönlendiren ve destek olan sayın hocam

Yrd. Doç. Dr. H.Özlem GÜNEY' e

saygılarımı sunarım.

Bugünüme ulaşmamda verdikleri emek ve sevgileri ile benim için her zaman önemli olan aileme ve beraber çalışmaktan mutluluk duyduğum Matematik Bölümünde görevli tüm elemanlara teşekkürlerimi sunarım.

Bilal ÇEKİÇ

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

ÖZET

SUMMARY

SEMBOL LİSTESİ

GİRİŞ

1.BÖLÜM :

FABER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER POLİNOMLARI

1.1 Faber Polinomlarının Temel Özellikleri.....	1
1.2 Faber Polinomlarının Cebirsel Özellikleri.....	11
1.3 En Basit Asimptotik Özellikler.....	15
1.4 Genelleştirilmiş Faber Polinomları.....	19

2.BÖLÜM :

ÖZEL BÖLGELER İÇİN FABER POLİNOMLARI VE SIFIRLARI

2.1 m -katlı Simetrik Bölgeler İçin Faber Polinomları.....	24
2.2 Dairesel Yay Bölgeler İçin Faber Polinomları	31
2.3 Çokgen Bölgeler İçin Faber Polinomları.....	34
2.4 Dairesel Dilimler İçin Faber polinomları.....	35
2.5 Halka Dilimler İçin Faber polinomları.....	38
2.6 Faber Polinomlarının Sıfırlarının Yeri.....	43
2.7 Faber Polinomlarının ve Türevinin Sıfırları.....	45

3.BÖLÜM :

ELİPS BÖLGELER İÇİN FABER POLİNOMLARININ AÇIK GÖSTERİLİŞLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER POLİNOMLARININ SIFIRLARI

3.1 Elips Bölgeler İçin Faber Polinomları.....	47
3.2 Genelleştirilmiş Faber Polinomlarının Sıfırları.....	51

ŞEKİL LİSTESİ

KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ

AMAC

Bir E kümesinin dışını birim çemberin dışı üzerine dönüştüren $\Phi(z)$ dönüşümü ile üretilen Faber polinomları, kompleks düzlemde yaklaşımlar gibi nümerik analizde iyi bilinen klasik uygulamalara sahiptirler.

Günümüzde polinom ve rasyonel yaklaşımlara temel teşkil eden Faber polinomlarının rolü hızla artmıştır ve son zamanlarda özel bölgeler için Faber polinomları konusunda büyük çalışmalar gözlenmiştir.

Bu noktadan hareketle ilk iki bölümdeki amacımız, Faber polinomlarına ait tanım, özellik ve teoremleri vererek, diğer çalışmalara kaynak olması açısından bir bütünlük sağlamak olduğu halde üçüncü bölümde “*Farklı odaklı elips bölgeler için Faber polinomlarının açık gösterilişi ve genelleştirilmiş Faber polinomlarının sıfırlarının elde edilişlerine ait teorem ve sonuçları*” elde etmektir.

Bu çalışmanın, Faber polinomları konusunda çalışan araştırmacılar için bir kaynak oluşturacağı kanısındayız.

ÖZET

“ *Faber Polinomları ve Sıfırları* ” adlı bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Diğer bölümlere hazırlık niteliğinde olan birinci bölümde Faber ve genelleştirilmiş Faber polinomlarının temel özellikleri hakkında bazı önemli tanım ve teoremler verilmektedir.

İkinci bölümde, kompleks düzlemin m -katlı simetrik, dairesel yay ve halka dilimi gibi uygun alt bölgeleri için Faber polinomlarının elde edilişi ele alınmıştır. Bunun yanında Faber polinomlarının sıfırlarını belli bir matrisin öz değerlerine bağlayan yeni bir determinant ifadesi verilerek, m -katlı simetrik bölgelere ait Faber polinomlarının sıfırlarının bulunması ile ilgili sayısal örnekler verildi.

Çalışmamızın esas kısmını oluşturan üçüncü bölüme gelince, dönüşüm fonksiyonu elipsin odaklarına bağlı olarak ifade edilmiş ve farklı odaklı elipsler için Faber polinomları bulunmuştur. Buna ek olarak, genelleştirilmiş Faber polinomlarının sıfırları ile dönüşüm ve ağırlık fonksiyonu tarafından belirlenen P_n matrisinin özdeğerleri arasındaki ilişki ortaya konulmuş ve bunun sonucu olarak Faber polinomlarının türevlerinin sıfırlarının da P_n matrisleri yardımıyla elde edilebileceği gösterilmiştir. Son olarak, E bölgesinin m -katlı simetrik olması durumunda, $g(z)$ ağırlık fonksiyonunun uygun bir seçimiyle, genelleştirilmiş Faber polinomlarının sıfırlarının kümesinin de m -katlı simetrik olduğu sonucu gözlemlendi. Özel olarak, 3.2.2. Teoremden $g(z) = 1$ ve $g(z) = \Phi'(z)$ alınırsa, sırasıyla, He M. [10] tarafından ispatlanmış 2.6.5. Teorem elde edilmekte ve Faber polinomlarının türevlerinin sıfırlarının kümesinin de m -katlı simetrik olduğu görülmektedir.

ABSTRACT

This study entitled as “ *Faber polynomials and theirs zeros* ” consists of three chapters.

In the first chapter which is a preliminary form to next ones, some important definitions and theorems concerning with the basic properties of Faber and generalized Faber polynomials were given.

The Chapter 2 has seperated to be obtained Faber polynomials for some suitable subregions of complex plane as m - fold symmetric domains, circular lunes and annular sectors. Moreover, we derived a new determinant representation which relates the zeros of Faber polynomials to the eigenvalues of a certain matrix, and illustrated some numerical computations and various examples to find the zeros of Faber polynomials associated with m - fold symmetric domains.

When it comes to chapter 3 that is main part of our study, it was expressed mapping function in terms of the focus of ellips and Faber polynomials were obtained for ellips with different focus. In addition, the relation between the zeros of generalized Faber polynomials and eigenvalues of P_n matrix has brought out and as result of this, it has been shown that the zeros of derivative of Faber polynomials can also be found using P_n matrix. Finally, the theorem as expressed with “*If E is m -fold symmetric domain, then the set of zeros of generalized Faber polynomials are also m -fold symmetric*” was proved with suitable choosing of the weighted function $g(z)$. In particular, if we choose $g(z) = 1$ and $g(z) = \Phi'(z)$ in the Theorem 3.2.2, then it will be obtained Theorem 2.6.5 that has been proved by He M. [10] and it will be shown that the set of the zeros of derivatives of Faber Polynomials was m -fold symmetric too, respectively.

SEMBOL LİSTESİ

C^*	Genişletilmiş Kompleks Sayılar Kümesi
K	Bir Noktadan Daha Çok Nokta İçeren Tümleniyi Bağlantılı Sınırlı Kontinuum
G	Sonlu Basit Bağlantılı Bölge ya da K Kontinuumun İç Noktalarının Kümesi
Γ	G Bölgesinin ya da K Kontinuumun Sınırı
Γ_R	K Kontinuumun D Tümleniyinin Seviye çizgisi
G_R	Γ_R Seviye Çizgisinin İçi
D_R	Γ_R Seviye Çizgisinin Dışı
$F_n(z)$	n . dereceden Faber Polinomu
$T_n(z)$	n . dereceden Chebseyhev Polinomu
$\Phi(t; z)$	Faber Polinomlarının Üreteç Fonksiyonu
$g(z)$	Ağırlık Fonksiyonu
$F_n(z; g)$	Genelleştirilmiş Faber Polinomu
$\Phi(t, z; g)$	Genelleştirilmiş Faber Polinomlarının Üreteç Fonksiyonu
S_m	m – yıldız
H_m	m – köşeli Hiposikloid İle Sınırlı Bölge
D_α	Dairesel Yay Bölge
S_α	Dairesel Dilim Bölge
G_m	Düzgün Çokgen Bölge
ϕ_n	n . dereceden Yardımcı Polinom
$\tilde{F}_n(z)$	Bölünmüş Faber Polinomları
L_m	m – köşeli Hiposikloid Bölge İle Üretilen Faber Polinomlarının Sıfırlarının Kümesi

ÖNSÖZ

Klasik Faber polinomları, kompleks değişkenli fonksiyonların yaklaşım teorisinde önemli rol oynarlar. Faber polinomları ile elde edilen Faber serileri, basit bağlantılı bölgelerdeki analitik fonksiyonların ifadeleri için kullanılırlar ve analitik fonksiyonların yaklaşımları konusundaki teoremlerin çoğu, bu serilerin yardımıyla ispat edilebilirler.

Bunun yanında Taylor serileri hakkında bilinen sonuçların çoğu Faber serileri üzerine taşınabilmektedir.

$|z - z_0| < R$ diskinde analitik olan herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu bu diskin içinde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

şeklindeki bir Taylor serisine genişletilebilir. Bu halde

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

serisi $|z - z_0| < R$ diskinin içinde düzgün yakınsak olur.

1885 yılında C.Runge sınırlı basit bağlantılı bir G bölgesinde analitik olan $f(z)$ fonksiyonu için, G bölgesi içinde $f(z)$ fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir $\{Q_n(z)\}$ polinom dizisinin olacağını ve bu durumda da

$$f(z) = Q_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [Q_n(z) - Q_{n-1}(z)] \quad , \quad z \in G \quad (2)$$

olarak yazılabileceğini gösterdi. Ancak 1905'de, G.Faber (1) ile verilen Taylor serisini keyfi basit bağlantılı G bölgesine taşıyarak, (2) ile verilen serinin belirsizliği üzerinde durarak, $\{Q_n(z)\}$ yerine alınabilecek $\{F_n(z)\}$ polinomlarının bir sistemini belirlemek için bazı ek koşulların olması gerektiğini ve bu durumda da $\{a_n\}$ katsayıları $f(z)$ fonksiyonu tarafından belirlenmek üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z) \quad , \quad z \in G \quad (3)$$

şeklinde verilebileceğini belirtti. Basit bağlantılı G bölgesinin sınırının analitik bir Γ eğrisi olması durumunda (3) ifadesindeki polinomlar tümleyeni bağlantılı herhangi sınırlı kontinum için tek olarak belirlenebilirler.

S.N.Mergelyan, V.K.Dzyadyk ve V.S.Rogozhin gibi matematikçiler, Faber polinomlarını ve serilerini kullanarak, analitik fonksiyonların sınır problemlerini, serilerin toplanabilirliği ve yakınsaklığı ile yaklaşımlar teorisi üzerinde bir takım ileri çalışmalar yapmışlardır.

Bunun yanında Faber Polinomları kompleks düzlemin bazı özel alt bölgeleri için, polinom ve rasyonel yaklaşımlar elde etmek için yaygın bir şekilde kullanılır. Özellikle lineer denklemler için yarı iteratif metodlar yardımıyla, en iyiye yakın polinom yaklaşımları için bu polinomlara başvurulur.

Faber Polinomlarının sıfırları son on yılda aktif araştırma konularından biri olmuştur. Sıfırların bölgelere göre yeri, dağılımı, yoğunluğu ve limit durumları incelenerek, bu konudaki çalışmalara yeni boyutlar kazandırılmıştır.



1.BÖLÜM

FABER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER POLİNOMLARI

Bu bölümde Faber ve Genelleştirilmiş Faber Polinomlarının cebirsel ve asimptotik özelliklerini inceleyerek, bunlara ait örnekler vereceğiz.

1.1. Faber Polinomlarının Temel Özellikleri

Kompleks düzlemde $\overline{G} = G \cup \Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni, $z = \infty$ noktasını içeren basit bağlantılı bir D bölgesi olmak üzere, sınırı analitik Γ eğrisi olan sınırlı ve basit bağlantılı bir G bölgesi verilsin. Bu halde Riemann dönüşüm teoremiyle, D bölgesini tek değerli olarak $|w|=1$ bölgesine dönüştüren, D de meromorfik ve

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \Phi'(\infty) = \gamma > 0, \quad \gamma = \text{sbt.} \quad (1)$$

koşullarını sağlayan bir tek konform $w = \Phi(z)$ dönüşüm fonksiyonu vardır.

(1) ifadesindeki $\Phi'(\infty) = \gamma > 0$ koşulu bazen

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \gamma > 0 \quad (2)$$

şeklinde de yazılır ([3],[22],[24]).

(1) ve (2) koşulları, D bölgesinde $z = \infty$ noktası hariç analitik olan $w = \Phi(z)$ fonksiyonunun $z = \infty$ noktasında basit bir kutba ve dolayısıyla

$$\Phi(z) = \gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \dots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \dots \quad (3)$$

şeklinde bir Laurent açılımına sahip olduğunu belirtir.

n pozitif bir tamsayı olmak üzere (3) ifadesinden

$$\Phi^n(z) = (\gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \dots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \dots)^n \quad (4)$$

ve buradan da

$$\Phi^n(z) = \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \dots + a_0^{(n)} + \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \dots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \dots \quad (5)$$

açılımı elde edilir.

(5) ifadesinin sağ tarafındaki polinoma, G bölgesi için n . dereceden *Faber polinomu* adı verilir.

Faber polinomları için genellikle

$$F_n(z) = \gamma^n z^n + a_{n-1}^n z^{n-1} + a_{n-2}^n z^{n-2} + \dots + a_1^n z + a_0^n \quad (6)$$

gösterimi kullanılır ([1], [3], [22], [24], [25]).

(4) ifadesinden

$$F_0(z) = 1,$$

$$F_1(z) = \gamma z + \gamma_0$$

ve

$$F_2(z) = \gamma^2 z^2 + 2\gamma\gamma_0 z + (\gamma_0^2 + 2\gamma\gamma_1)$$

değerlerini bulmak oldukça kolaydır.

Eğer (5) ile verilen açılımdaki z değişkeninin negatif kuvvetlerini içeren terimlerin toplamı için

$$-E_n(z) = \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \dots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \dots \quad (7)$$

olarak alınırsa, bu durumda (5) ve (6) bağıntılarından

$$F_n(z) = \Phi^n(z) + E_n(z), \quad z \in D \quad (8)$$

eşitliği yazılabilir.

(3), (5) ve (7) açılımları $|z| > R_0$ bölgesinde yakınsak olmalarına karşın, $F_n(z)$ polinomu ve $\Phi^n(z)$ fonksiyonu D bölgesinin tamamında tanımlıdır. Bundan dolayı $E_n(z)$ fonksiyonu da D bölgesinde tanımlıdır ve

$$E_n(\infty) = 0 \quad (9)$$

koşulunu sağlar.

z -düzleminde $w = \Phi(z)$ dönüşümü altında $|w| = R > 1$ çemberine dönüşen Γ_R çizgilerine D bölgesinin Green fonksiyonuna ait *seviye çizgileri* adı verilir. $w = \Phi(z)$ fonksiyonu konform ve tek değerli olduğundan, $R > 1$ için Γ_R seviye çizgisi bir kapalı düzgün analitik eğri olur ([6], [9], [22]).

Özel olarak $R = 1$ alındığında Γ_1 eğrisi G bölgesinin Γ sınırı olur. $R > 1$ için her Γ_R çizgisi, $G_R = \text{iç}(\Gamma_R)$ ve $D_R = \text{dış}(\Gamma_R)$ olmak üzere iki doğal bölge tanımlar.

$z \in G_R$ alındığında Γ_R eğrisi için

$z \in G_R$ alındığında Γ_R eğrisi için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{E_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (10)$$

olur.

(10) ifadesiyle beraber $n = 1, 2, 3, \dots$ için (8) eşitliği

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_n(\zeta) - \Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

şeklinde yazılabilir ki, buradan da

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G_R \quad (11)$$

elde edilir.

(11) bağıntısı Faber polinomları için bir genel tanım olarak düşünülebilir.

$z = \Psi(w)$ fonksiyonu $w = \Phi(z)$ için ters fonksiyon olsun. Bu durumda

$\beta = \frac{1}{\gamma} > 0$ olmak üzere,

$$z = \Psi(w) = \beta w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \dots + \frac{\beta_k}{w^k} + \dots, \quad |w| > 1 \quad (12)$$

fonksiyonu $|w| > 1$ bölgesini D bölgesi üzerine konform ve tek değerli olarak dönüştürür. $\zeta = \Psi(t)$ değişken kullanımıyla (11) eşitliği

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{t^n \Psi'(t)}{\Psi(t) - z} dt, \quad z \in G_R \quad (13)$$

şeklinde yazılabilir.

(13) özelliği, $t = \infty$ noktası komşuluğunda, $\{F_n(z)\}$ Faber polinomlarının

$$\Phi(t, z) = \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z}, \quad z \in G_R, |t| > R \quad (14)$$

şeklindeki fonksiyonun Laurent açılımındaki katsayıları olacağını belirtir.

Daha açıkçası $\{F_n(z)\}$ Faber polinomları için üreteç fonksiyonu adını alan ve (14) ile verilen fonksiyon,

$$\Phi(t, z) = \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^{n+1}}, \quad z \in G_R, |t| > R \quad (15)$$

açılımına sahiptir ([10], [11], [22], [24], [25]).

Şimdiye kadar kullandığımız tanım ve özelliklerin tümü,

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve } \Phi'(\infty) = \gamma > 0$$

koşulları altında, $w = \Phi(z)$ fonksiyonunun basit bağlantılı bir D bölgesini $|w| > 1$ bölgesi üzerine dönüştürmesi gerçeğine dayanır.

D kümesinin tüm kompleks düzleme olan tümleyeninin basit bağlantılı bir G bölgesinin kapanışı olması gerekmez. Düzlemde basit bağlantılı D tümleyeni ile sınırlı K kontinuumu demekle, tümleyeni basit bağlantılı D bölgesi ve bir noktadan daha çok nokta kapsayan sınırlı, kapalı ve bağlantılı bir K kümesi anlaşılacaktır. G bölgesi yerine K kümesi alındığında $w = \Phi(z)$ ve $z = \Psi(w)$ fonksiyonları tek türlü olarak tanımlanır ve bunlara ait tanım ve özelliklerde herhangi bir değişiklik olmaz.

Böylece basit bağlantılı tümleyeni ile dejenere olmayan sınırlı bir K kontinuumu için Faber polinomları (6) veya (11) bağıntıları ile tanımlanabilir.

Bundan başka Faber polinomları D bölgesini $|w| > 1$ bölgesine dönüştüren $w = \Phi(z)$ fonksiyonu ile tanımlı olduklarından bu polinomların yalnız K kontinuumu ile değil aynı zamanda bu kontinuumun D tümleyeni ile de belirlenebildiğini söyleyebiliriz.

Diğer taraftan $z = \Psi(w)$ fonksiyonu hem D bölgesini ve hem de onun tümleyeni olan K kümesini tanımladığından, (15) özelliği ile beraber $\{F_n(z)\}$ Faber polinomları, (12) açılımına sahip ve $|w| > 1$ bölgesinde tek değerli olan $z = \Psi(w)$ fonksiyonu tarafından elde edilebilirler.

Şimdi $R > 1$ için Γ_R konturunun dışı olan D_R bölgesini göz önüne alalım. $w = \Phi(z)$ fonksiyonu D_R bölgesini $|w| > R$ bölgesi üzerine dönüştürdüğünden

(1) ile verilen benzer koşullar altında $w = \frac{1}{R}\Phi(z)$ dönüşümü, D_R bölgesini $|w| > 1$

bölgesi üzerine dönüştürür ve D_R bölgesi için $\{F_n(z; R)\}$ Faber polinomları

$$F_n(z; R) = \frac{1}{R^n} F_n(z) = \frac{1}{R^n} [\Phi^n(z) + E_n(z)] \quad (16)$$

bağıntısıyla tanımlı olur.

Şimdi Faber polinomlarının en basit örneklerini verelim.

1.1.1.Örnek

Eğer G bölgesi $|z - z_0| < R_0$ diski ise, bu durumda dönüşüm fonksiyonu

$$w = \Phi(z) = \frac{z - z_0}{R_0}$$

şeklinde olup, bu bölgeye ait Faber polinomları $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$F_n(z) = \frac{1}{R_0^n} (z - z_0)^n$$

formülü verilir.

Böylece $|z - z_0| < R_0$ diski için Faber polinomları $E_n(z) \equiv 0$ olmak üzere dönüşüm fonksiyonun negatif olmayan tamsayı kuvvetleridir.

Gerçekten verilen dönüşüm için

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve } \Phi'(\infty) = \frac{1}{R_0} > 0$$

özellikleri sağlanıp,

$$D = C^* / \bar{G} = \{z : |z - z_0| > R_0\}$$

bölgesi için

$$w = \Phi(z) = \frac{z - z_0}{R_0}$$

$$|w| = \left| \frac{z - z_0}{R_0} \right| > \frac{R_0}{R_0} = 1 \Rightarrow |w| > 1$$

şeklinde olup, (5) ve (16) özelliğiyle beraber istenilen Faber polinomları

$$F_0(z) = 1 ,$$

$$F_1(z) = \frac{z - z_0}{R_0} ,$$

$$F_2(z) = \frac{1}{R_0^2} (z^2 - 2zz_0 + z_0^2) ,$$

...

$$F_n(z) = \frac{1}{R_0^n} (z - z_0)^n$$

olarak elde edilirler.

Verilen dönüşüme karşılık gelen

$$z = \Psi(w) = R_0 w + z_0$$

ters dönüşümü için

$$\gamma = \frac{1}{R_0} \text{ ve } \beta = R_0$$

olmak üzere $\gamma \cdot \beta = 1$ olduğunu görmek kolaydır.

1.1.2.Örnek

Kompleks düzlemde K kotinuumu $[-1,1]$ aralığı olarak alınsın. Bu halde,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \sqrt{z^2 - 1} = 1$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçilmesi durumunda

$$w = \Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad z \notin [-1,1] \quad (17)$$

dönüşümü,

$$D = C^* \setminus [-1,1]$$

bölgesini konform ve tek değerli olarak $|w| > 1$ bölgesi üzerine dönüştürür.

Verilen dönüşümün tersi, $|w| > 1$ için

$$z = \Psi(w) = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) \quad (18)$$

ile verilen Zhukovski fonksiyonudur.

(15) bağıntısı yardımıyla $\{F_n(z)\}$ Faber polinomları için

$$F(t; z) = \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z}$$

şeklindeki üreteç fonksiyonu düzenlenerek ve türevleri alınarak,

$$\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} = \frac{t^2 - 1}{t(t^2 - 2tz + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^{n+1}}$$

veya $|t| > R$ ve $|\Phi(z)| < R$ için

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2tz + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^n}$$

yazabiliriz.

Bu son ifadede $t = \frac{1}{w}$ alınarak,

$$\frac{1-w^2}{1-2wz+w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n F_n(z), \quad |w| < 1 \quad (19)$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan, $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$ olmak üzere (19) ifadesinin sol tarafının birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden

$$\frac{1-w^2}{1-2wz+w^2} = T_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} w^n T_n(z), \quad (20)$$

şeklinde bir seriye açılabilirdiği, ortogonal polinomlar teorisinden bilinmektedir ([1], [8], [13], [22], [24], [25]).

(19) ve (20) bağıntıları karşılaştırılarak $n \geq 1$ için

$$F_0(z) = T_0(z), \quad F_n(z) = 2T_n(z) \quad (21)$$

oldukları görülür.

Böylece, eğer $K = [-1, 1]$ şeklindeyse, o zaman verilen aralık için Faber polinomları birinci çeşit Chebyshev polinomlarıdır. ($n \geq 1$ için 2 çarpanıyla)

Bu gerçeği başka bir yolla da gösterebiliriz. Gerçekten ilk olarak,

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{z^2 - (\sqrt{z^2 - 1})^2} = z - \sqrt{z^2 - 1} \quad (22)$$

eşitliğini yazabiliriz.

$$w = \Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad z \notin [-1, 1]$$

ifadesindeki kökün değerinin seçiminden dolayı $z = \infty$ noktasının komşuluğunda $\frac{1}{\Phi(z)}$

fonksiyonunun açılımı negatif kuvvet içermez. Bu nedenle

$$\Phi^n(z) \text{ ve } \Phi^n(z) + \frac{1}{\Phi^n(z)}$$

genişlemesinin her ikisi negatif olmayan kuvvetlerle aynı terimlere sahiptirler.

Yine (22) özelliğiyle

$$\Phi^n(z) + \frac{1}{\Phi^n(z)} = (z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n \quad (23)$$

olur.

Diğer taraftan birinci çeşit Chebyshev polinomları için

$$T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n] , \quad |x| > 1 \quad (24)$$

yazılımı sağlar.

(23) ve (24) özellikleri karşılaştırıldığında

$$(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n$$

ifadesinin sadece z 'nin negatif olmayan kuvvetlerini içerdiğini görürüz.

Böylece (23) ile verilen fonksiyon $[-1,1]$ aralığı için $F_n(z)$ Faber polinomlarıdır.

Üstelik (23) ve (24) bağıntıları (21) i sağlar.

1.1.3.Örnek

Düzlemde odakları ∓ 1 ve $R > 1$ olmak üzere

$$a = \frac{1}{2}(R + \frac{1}{R}) \quad \text{ve} \quad b = \frac{1}{2}(R - \frac{1}{R})$$

yarı eksenli ile bir elips verilmiş olsun. Böyle bir elipsin denklemi $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için

$$z = \frac{1}{2}(Re^{i\theta} + \frac{1}{Re^{i\theta}})$$

yazılabilir ki, buradan da

$$z = \Psi(w; R) = \frac{1}{2}(Rw + \frac{1}{Rw})$$

ve

$$w = \Phi(z; R) = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

dönüşüm fonksiyonları tanımlanır.

Böylece (16) özelliğiyle verilen elips için Faber polinomları

$$F_n(z; R) = \frac{1}{R^n} F_n(z) = \frac{2}{R^n} T_n(z), \quad n \geq 1 \quad (25)$$

şeklinde elde edilmiş olur[9,13,22,24].

1.1.4.Örnek

K kotinuumu p odaklı kapalı bir Lemniscate in içi olsun. Böyle bir bölge

$$|z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \dots + a_1z + a_0| \leq a$$

koşulunu sağlayan noktaların kümesidir.

Bu durumda kök fonksiyonunun esas değeri alınmak üzere, dönüşüm fonksiyonu

$$w = \Phi(z) = \frac{z}{a} \left(1 + \frac{a_{p-1}}{z} + \frac{a_{p-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_1}{z^{p-1}} + \frac{a_0}{z^p} \right)^{1/p}, \quad z \in D$$

şeklinde tanımlı olur ki, buradan da $m = 1, 2, \dots$ için

$$\Phi^{mp}(z) = \frac{1}{a^{mp}} (z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \dots + a_1z + a_0)^m$$

ve

$$F_{mp}(z) = \frac{1}{a^{mp}} (z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \dots + a_1z + a_0)^m$$

bağıntıları yazılabilir.

Böylece $m = 1, 2, \dots$ olmak üzere mp mertebeden tüm Faber polinomları hesaplanabilir. Özel olarak iki odaklı $|z^2 - 1| \leq 1$ Lemniscate verilmiş ise, bu halde

$$F_{2n}(z) = (z^2 - 1)^n$$

olur. Üstelik

$$\Phi(z) = z \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)^{1/2} = z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^3} - \frac{1}{16z^5} + \dots$$

özelliğiyle, küçük dereceden tek dereceli Faber polinomları

$$F_1(z) = z \quad \text{ve} \quad F_3(z) = z^3 - \frac{3}{2}z$$

şeklinde hesaplanabilir.

1.1.5.Örnek

$w = \infty$ noktasında basit bir kutba sahip

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{3w^3}, \quad |w| > 1 \quad (26)$$

fonksiyonu $w = \infty$ noktası hariç $|w| > 1$ bölgesinde analitiktir.

(26) ifadesinde $w = e^{i\theta}$ alınarak

$$z = \Psi(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{3}e^{-3i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{3}(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

elde edilir.

Bu ifadeyi reel ve sanal kısımlarına ayırarak ,

$$x = 4 \cos 3\theta, \quad y = 4 \sin 3\theta$$

Astroid denklemi elde ederiz.

Sınırların uygunluk ilkesiyle,

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{3w^3}$$

fonksiyonu, $|w| > 1$ bölgesini konform ve tek değerli olarak bu astroidin dışına dönüştürür. Diğer taraftan Faber polinomları için üreteç fonksiyonunun düzenlenmesiyle,

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \frac{w^4 - 1}{w(w^4 + \frac{1}{3} - zw^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}} \quad (27)$$

eşitliği ortaya çıkar.

Bu durumda z sayısının keyfi değerleri için Faber polinomlarını yazmak kolay değildir. Bundan dolayı Faber polinomlarını hesaplamak için bazı kısıtlamalar yapmalıyız. (27) eşitliğinde $z = 0$ olarak alınırsa,

$$\frac{w^4 - 1}{w^5} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{3w^4})} = \frac{w^4 - 1}{w^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k w^{4k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k w^{4k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k w^{4k+5}}$$

açılımından

$$F_{4k}(0) = \frac{(-1)^k}{3^k} - \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} = (-1)^k \frac{4}{3^k}, \quad k \geq 1$$

ve

$$F_n(0) = 0, \quad n \neq 4k$$

olarak bulunurlar.

1.1.6.Örnek

m doğal sayısı için

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{mw^m}, \quad |w| > 1 \quad (28)$$

fonksiyonu, $|w| > 1$ bölgesini konform ve tek değerli olarak $m+1$ köşeli hiposikloid in dışına dönüştürür. Bu durumda önceki örnekte olduğu gibi $z = 0$ noktasında Faber polinomları hesaplanabilir. Bununla beraber aşağıdaki sunulacak diğer metotlarda uygulanabilir.

1.2.Faber Polinomlarının Cebirsel Özellikleri

K bağlantılı D tümleyenine sınırlı bir kontinum olsun.

Bu durumda

$$\zeta = \Psi(t) = \beta t + \beta_0 + \frac{\beta_1}{t} + \dots + \frac{\beta_k}{t^k} + \dots, \quad |t| > 1 \quad (29)$$

dönüşüm fonksiyonunun açılımını kullanarak, üreteç fonksiyonu için

$$\Phi(t; z) = \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}}, \quad z \in K, \quad |t| > 1 \quad (30)$$

şeklindeki bağıntıdan

$$\beta - \frac{\beta_1}{t^2} - \dots - \frac{k\beta_k}{t^{k+1}} - \dots = \left[\frac{F_0(z)}{t} + \dots + \frac{F_k(z)}{t^{k+1}} + \dots \right] \left[\beta t + (\beta_0 - z) + \dots + \frac{\beta_k}{t^k} + \dots \right] \quad (31)$$

eşitliğini buluruz.

(31) ifadesinin her iki tarafının t değişkenine göre aynı kuvvetli katsayılarının eşitlenmesinden,

$$\begin{aligned} 0 &= (\beta_0 - z)F_0(z) + \beta F_1(z) \\ -\beta_1 &= \beta_1 F_0(z) + (\beta_0 - z)F_1(z) + \beta F_2(z) \\ -2\beta_2 &= \beta_2 F_0(z) + \beta_1 F_1(z) + (\beta_0 - z)F_2(z) + \beta F_3(z) \\ &\vdots \\ -k\beta_k &= \beta_k F_0(z) + \beta_{k-1} F_1(z) + \dots + (\beta_0 - z)F_k(z) + \beta F_{k+1}(z) \end{aligned} \quad (32)$$

sistemini elde ederiz.

$\beta = \beta_{-1}$ alınarak, (32) sisteminin son denklemi

$$-k\beta_k = \sum_{s=k}^{-1} \beta_s F_{k-s}(z) - zF_k(z) \quad (33)$$

şeklinde yazılabilir ki, bu da bize

$$zF_k(z) = \sum_{s=-1}^k \beta_s F_{k-s}(z) + k\beta_k$$

ve

$$\beta F_{k+1}(z) = zF_k(z) - k\beta_k - \sum_{s=0}^k \beta_s F_{k-s}(z) \quad (34)$$

özelliklerini verir.

(34) ifadesi bir indirgeme bağıntısı olup,

$$\zeta = \Psi(t) = \beta t + \beta_0 + \frac{\beta_1}{t} + \dots + \frac{\beta_k}{t^k} + \dots \quad |t| > 1$$

açılımının bilinmesi durumunda, (34) bağıntısıyla Faber polinomları ard arda hesaplanabilir ([2], [8], [24]).

Bunun yanında (34) ifadesi Faber polinomlarının bir tanımı olarak alınabilir. Gerçekten, eğer $\{F_n(z)\}$ polinomları (34) ile verilen indirgeme bağıntısını sağlarsa (32) sistemiyle beraber (31) eşitliği kullanılarak,

$$\Phi(t, z) = \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{t^{k+1}}, \quad z \in K, |t| > 1$$

açılımını elde edebiliriz.

Ancak hemen belirtelim ki, (34) bağıntısı sadece $\Psi(w)$ ile verilen fonksiyonun katsayıları tarafından tek olarak belirlenebilir.

Şimdi bir örnek olarak, m doğal sayısı için, $|w| > 1$ bölgesini konform ve tek değerli olarak $m+1$ köşeli hiposikloid in dışına dönüştüren

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{mw^m}$$

dönüşümüne ait Faber polinomlarını hesaplayalım.

Bu durumda $s \neq m$ için

$$\beta = 1,$$

$$\beta_m = \frac{1}{m}$$

ve

$$\beta_s = 0$$

şeklinde olup, (34) ile verilen bağıntıyla beraber

$$F_k(z) = z^k, \quad k \leq m,$$

$$F_{m+1}(z) = z^{m+1} - 1 - \frac{1}{m},$$

$$F_{n+1}(z) = zF_n(z) - \frac{1}{m}F_{n-m}(z), \quad n > m$$

değerleri bulunur.

(32) sistemini bir kez daha göz önüne aldığımızda, bu sistemin ilk k denklemi

$$\begin{aligned}
 -(\beta_0 - z) &= \beta F_1(z) \\
 -2\beta_1 &= (\beta_0 - z)F_1(z) + \beta F_2(z) \\
 -3\beta_2 &= \beta_1 F_1(z) + (\beta_0 - z)F_2(z) + \beta F_3(z) \\
 &\vdots \\
 -k\beta_{k-1} &= \beta_{k-2}F_1(z) + \beta_{k-3}F_2(z) + \dots + (\beta_0 - z)F_{k-1}(z) + \beta F_k(z)
 \end{aligned} \tag{35}$$

şeklinde yazabiliriz.

$F_1(z), F_2(z), \dots, F_k(z)$ şeklindeki k bilinmeyenli, k lineer denklem sisteminin determinantı

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (\beta_0 - z) & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & (\beta_0 - z) & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{k-2} & \beta_{k-3} & \beta_{k-4} & \dots & (\beta_0 - z) & \beta \end{vmatrix} = \beta^k \neq 0$$

şeklinindedir. O halde

$$F_k(z) = \frac{1}{\beta^k} \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & -(\beta_0 - z) \\ (\beta_0 - z) & \beta & 0 & \dots & 0 & -2\beta_1 \\ \beta_1 & (\beta_0 - z) & \beta & \dots & 0 & -3\beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{k-2} & \beta_{k-3} & \beta_{k-4} & \dots & (\beta_0 - z) & -k\beta_{k-1} \end{vmatrix} \tag{36}$$

determinantının kullanımıyla, k mertebeden Faber polinomları (35) sisteminden belirlenebilir ([10], [24]).

(36) bağıntısı, $z = \Psi(w)$ dönüşüm fonksiyonunun açılımının $\{\beta_k\}$ katsayılarının kullanılmasıyla determinant formundaki Faber polinomlarının ifadesidir.

Tekrar hatırlatalım ki, Faber polinomları

$$\zeta = \Psi(t) = \beta t + \beta_0 + \frac{\beta_1}{t} + \dots + \frac{\beta_k}{t^k} + \dots, \quad |t| > 1$$

ile verilen dönüşüm fonksiyonu tarafından tamamen belirlenebilirler. Bu durumda, K kontinumunun ve D bölgesinin şeklinin ayrıntılı olarak açıklanmasına gerek yoktur. Ancak başlangıçtaki gibi $\Psi(w)$ fonksiyonunun açılımı göz önüne alınmalıdır.

Şimdi Faber polinomlarının diğer bir özelliğine bakalım. Bunun için,

$$Q_n(z) = \gamma^n z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (37)$$

şeklindeki keyfi polinomunda $z = \Psi(w)$ alınırsa

$$Q_n[\Psi(w)] = w^n + b_1 w^{n-1} + \dots + b_{n-1} w + b_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{(n)}}{w^k} \quad (38)$$

açılımını elde ederiz.

(37) ifadesindeki $\{a_s\}$ katsayıları, (38) ifadesinde

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = b_n = 0 \quad (39)$$

koşullarını sağlayacak biçimde seçilmelidir.

Bunu göstermek için $[\Psi(w)]^n$ fonksiyonunun açılımındaki negatif olmayan kuvvetlerin toplamını

$$\Psi_n(w) = \beta^n w^n + \beta_1^n w^{n-1} + \dots + \beta_{n-1}^n w + \beta_n^n, \quad |w| > 1 \quad (40)$$

ile gösterirsek, bu halde (38) ifadesi yerine (37) ifadesinden $|w| > 1$ için (40) açılımıyla,

$$Q_n[\Psi(w)] = \gamma^n \Psi_n(w) + a_1 \Psi_{n-1}(w) + \dots + a_{n-1} \Psi_1(w) + a_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^{(n)}}{w^k} \quad (41)$$

şeklindeki eşitlikten, (38) bağıntısındaki $\{b_s\}$ katsayılarını hesaplayabiliriz.

Gerçekten (39) özelliğiyle beraber, bir sonuç olarak (41) eşitliğinden

$$b_1 = \gamma^n \beta_1^{(n)} + a_1 \beta^{n-1} = 0$$

$$b_2 = \gamma^n \beta_2^{(n)} + a_1 \beta_1^{n-1} + a_2 \beta^{n-2} = 0$$

⋮

$$b_n = \gamma^n \beta_n^{(n)} + a_1 \beta_{n-1}^{n-1} + a_2 \beta_{n-2}^{n-2} + \dots + a_{n-1} \beta_1^1 + a_n = 0$$

elde ederiz. $\{a_s\}$ katsayıları yukarıdaki denklem sistemi yardımıyla tek türlü belirlenebilirler. Bu nedenle (37) ile verilen n . mertebeden tüm polinomlar arasında (38) bağıntısı yerine geçebilecek

$$Q_n[\Psi(w)] = w^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{(n)}}{w^k}, \quad |w| > 1 \quad (42)$$

şeklinde bir tek açılım vardır.

Diğer taraftan $E_n(z)$ fonksiyonu D bölgesinde analitik ve $E_n(\infty) = 0$ olmak üzere Faber polinomları için

$$F_n(z) = \Phi^n(z) + E_n(z), \quad z \in D \quad (43)$$

bağıntısını yazabiliriz. Bu demektir ki (15) ifadesiyle beraber

$$F_n[\Psi(w)] = w^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(n)}}{w^k}, \quad |w| > 1 \quad (44)$$

çıkar.

Böylece (42) ve (44) şeklindeki genişlemeler tek olarak Faber polinomlarını belirlerler. Daha açıkçası (44) bağıntısı, $z = \Psi(w)$ fonksiyonu için Faber polinomlarının bir tanımı olarak alınabilir.

1.3.En Basit Asimptotik Özellikler

Önceden belirtildiği gibi $|\Phi(z)| = R > 1$ için her Γ_R seviye çizgisi, bu eğrinin D_R dışı ve G_R içi olmak üzere iki doğal bölge tanımlar. $E_n(z)$ fonksiyonu, $\overline{D_R}$ kapalı bölgesinde analitik ve $E_n(\infty) = 0$ olduğundan Γ_R pozitif yönlü olmak üzere sınırsız bölgeler için Cauchy Teoreminden her $z \in D$ için,

$$E_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{E_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D_R$$

yazılabilir.

Diğer taraftan (43) eşitliğindeki $E_n(z)$ fonksiyonunun değeriyle yukarıdaki integral için

$$E_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_n(\zeta) - \Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D_R$$

olur.

Böylece

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G_R \quad (45)$$

ve

$$E_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D_R \quad (46)$$

şeklinde benzer iki bağıntıya sahip olmuş oluruz.

Bağlantılı D tümleyeni ile sınırlı bir K kontinum üzerinde Faber polinomlarını hesaplayabiliriz.

Bunun için, eğer $z \in K$ ise yeteri kadar küçük sabit $\varepsilon > 0$ sayısı için (45) ifadesinde $R = 1 + \varepsilon$ alınabilir. Bu durumda

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G_R$$

integralinden $\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})$, K kontinumundan $\Gamma_{1+\varepsilon}$ seviye çizgisine olan uzaklığı ve $\ell(\Gamma_{1+\varepsilon})$ da $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisinin uzunluğunu göstermek üzere

$$|F_n(z)| \leq \frac{(1+\varepsilon)^n}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leq \frac{(1+\varepsilon)^n \ell(\Gamma_{1+\varepsilon})}{2\pi \rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})} \quad (47)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$c_1(\varepsilon)$, yalnızca ε sayısına bağlı ve $\varepsilon \rightarrow 0$ için sonsuz büyüyen bir sabit olmak üzere (47) eşitsizliğini

$$|F_n(z)| \leq c_1(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n, \quad z \in K \quad (48)$$

şeklinde de yazabiliriz.

(48) ifadesinin her iki tarafının n . dereceden kökü alınarak, $n \rightarrow \infty$ için limit durumunda

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} \leq 1 + \varepsilon, \quad z \in K$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlikte ε yeteri kadar küçük keyfi bir sabit ve sol taraf ε a bağlı olmadığından

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} \leq 1, \quad z \in K \quad (49)$$

limit bağıntısını yazabiliriz.

r ve R , $1 < r < R$ olacak şekilde iki sayı olsun. Bu halde \overline{D}_R kapalı kümesi üzerinde $E_n(z)$ fonksiyonunu belirleyebiliriz. Bunun için $\delta = \rho(\Gamma_r, \Gamma_R)$ terimiyle Γ_r ve Γ_R seviye çizgileri arasındaki uzaklığı belirtmek üzere, (46) ifadesinden tüm $z \in \overline{D}_R$ için

$$|E_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \frac{|\Phi(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{r^n}{2\pi\delta} \ell(\Gamma_r) \quad (50)$$

üst sınırını elde ederiz.

Böylece,

$$F_n(z) = \Phi^n(z) + E_n(z) \quad z \in D$$

bağıntısından, Faber polinomları için en basit asimptotik formülünün

$$F_n(z) = \Phi^n(z) + O(r^n), \quad z \in \overline{D_R}, \quad 1 < r < R \quad (51)$$

şeklinde olduğunu görürüz.

(51) ifadesinde $\Phi^n(z)$ teriminin mutlak değeri $z \in \Gamma_R$ için R^n oranında ve geriye kalan terim de daha küçük oranlı r^n ile artar.

Hemen belirtelim ki, (50) ifadesinde $\delta = (z, \Gamma_r)$ alınarak $z \rightarrow \infty$ için

$$\frac{r^n}{2\pi\delta} \ell(\Gamma_r)$$

terimi sıfıra azalacak şekilde yeniden yazılabilir.

Üstelik (51) ifadesinden $c_2(R) < 1$ ve $c_3(R) > 1$ olmak üzere $z \in \Gamma_R$ için

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \Phi^n(z) \left[1 + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right) \right], \\ c_2(R)R^n &\leq |F_n(z)| \leq c_3(R)R^n, \end{aligned} \quad (52)$$

olur.

(52) eşitsizliğinin her üç yanı için n . dereceden kök alarak ve $n \rightarrow \infty$ limitine geçerek,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} = |\Phi(z)|, \quad z \in D \quad (53)$$

eşitsizliğini buluruz ki, buradaki yakınsama D deki her kompakt küme üzerinde düzgündür. Yani D kümesinde kapsanan her sınırlı kapalı F kümesi üzerinde yakınsama düzgün olur.

Üstelik, eğer $z \in \Gamma_R$ ise bu durumda $n+1$ ve n için (51) ifadesi

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} &= \frac{\Phi^{n+1}(z) + O(r^{n+1})}{\Phi^n(z) + O(r^n)} = \Phi(z) \frac{1 + O(r^{n+1}/R^{n+1})}{1 + O(r^n/R^n)} \\ &= \Phi(z) \left[1 + \frac{O(r^{n+1}/R^{n+1}) - O(r^n/R^n)}{1 + O(r^n/R^n)} \right] \\ &= \Phi(z) + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda D deki her F kompakt kümesi üzerinde düzgün yakınsayan ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \Phi(z), \quad z \in D \quad (54)$$

limitini veren

$$\frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \Phi(z) + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right), \quad z \in D, \quad n \rightarrow \infty$$

asimptotik bağıntısını yazabiliriz.

Bu bölümdeki özelliklerin (formüllerin) tümü, basit bağlantılı D tümleyeni ile, keyfi sınırlı bir K kontinuumu için elde edilmişlerdir. Bunun yanında eğer K kontinuumu bazı ek şartlar sağlarsa, bu halde bazı sonuçlarının genişleyebilmesi doğal olacaktır.

Kabul edelim ki K kontinuumu, düzgün analitik Γ sınıрыyla, basit bağlantılı bir G bölgesinin kapanışı olarak alınsın. D bölgesinin Γ sınırı düzgün bir eğri olduğundan, $w = \Phi(z)$ dönüşüm fonksiyonu, Γ eğrisine analitik devam olarak genişletilebilir. Bu halde $\Gamma_1 = \Gamma$ ve $\rho_0 \leq \rho < 1$ olmak üzere Γ_ρ seviye eğrileri göz önüne alındığında $\rho_0 \leq \rho < 1$ olacak şekilde ρ yerine $R > 1$ ve $r > 1$ değerleri alınabilir. Böylece, örneğin (50) eşitsizliği yerine ρ_1 oranıyla geometrik dizinin oranında $\rho_0 < \rho_1 < \rho < 1$ olarak alındığında, \overline{D} bölgesinde sifıra yakınsayan $\{E_n(z)\}$ dizisi için

$$|E_n(z)| \leq c_4 \rho_1^n, \quad z \in \overline{D}_\rho, \quad \rho_0 < \rho_1 < \rho < 1 \quad (55)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Üstelik (51) ifadesi yerine $n \rightarrow \infty$ için

$$F_n(z) = \Phi^n(z) + O(\rho_1^n), \quad z \in \overline{D}_\rho \quad (56)$$

olarak alınabilir.

Yine (52) eşitsizliği, ρ oranlı geometrik dizinin hesabıyla, \overline{G}_ρ kapalı bölgesinde $\{F_n(z)\}$ Faber polinomlarının dizisinin sifıra düzgün azaldığını sağlayan

$$c_3(\rho)\rho^n \leq |F_n(z)| \leq c_6(\rho)\rho^n, \quad z \in \Gamma_\rho \quad (57)$$

eşitsizliği ile bütünleşir.

Son olarak regüler analitik Γ konturu için (53) ve (54) ile verilen limit bağıntılarının, $\rho_0 < \rho < 1$ için D bölgesinde geçerli olduklarını hatırlatalım.

1.4. Genelleştirilmiş Faber Polinomları

Eğer $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde analitik ve $\alpha_0 = g(\infty) > 0$ ise, bu durumda sonsuzda n . mertebeden kutba sahip olan $g(z)\Phi^n(z)$ fonksiyonu, $|z| > R_0$ için

$$\alpha_0 \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} + \frac{b_1^{(n)}}{z} + \dots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \dots$$

şeklinde bir açılıma sahiptir.

Daha açıkçası

$$g(z)\Phi^n(z) = \alpha_0 \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} + \frac{b_1^{(n)}}{z} + \dots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \dots, \quad |z| > R_0 \quad (58)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu açılımda z değişkenin negatif olmayan kuvvetlerini içeren terimlerin toplamına, K kontinum için n . mertebeden genelleştirilmiş Faber polinomu ve $g(z)$ fonksiyonuna da *ağırlık fonksiyonu* adı verilir ([24], [25]).

Bu polinom genellikle

$$F_n(z; g) = \alpha_0 \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} \quad (59)$$

şeklinde gösterilir.

Diğer taraftan ,

$$E_n(z; g) = \left[\frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \dots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \dots \right] \quad (60)$$

fonksiyonu D bölgesinde analitiktir ve $E_n(\infty; g) = 0$ şeklindedir.

Böylece, (59) ve (60) özellikleriyle beraber (58) eşitliğinden

$$F_n(z; g) = g(z)\Phi^n(z) + E_n(z; g), \quad z \in D \quad (61)$$

buluruz.

Bunun yanında, adi Faber polinomlarında yapıldığı gibi (61) ifadesi yardımıyla

$$F_n(z; g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{g(\zeta)\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G_R \quad (62)$$

ve

$$E_n(z; g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{g(\zeta)\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D_R \quad (63)$$

şeklinde iki eşitlik elde edilebilir.

Yukarıdaki integrallerde $\zeta = \Psi(t)$ olarak, yeni integrasyon değişkeni altında,

$$F_n(z; g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{t^n g[\Psi(t)]\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} dt, \quad z \in G_R \quad (64)$$

ve

$$E_n(z; g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{t^n g[\Psi(t)]\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} dt, \quad z \in D_R \quad (65)$$

integrallerini elde ederiz.

(64) integrali

$$\Phi(t, z; g) = \frac{g[\Psi(t)]\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z; g)}{t^{n+1}}, \quad z \in K, |t| > 1 \quad (66)$$

açılımını verir.

Böylece, $\Phi(t, z; g)$ fonksiyonu, genelleştirilmiş $\{F_n(z; g)\}$ polinomlarının bir üreteç fonksiyonu olur.

Genelleştirilmiş Faber polinomları ve onların determinant şeklindeki formları için bir indirgeme bağıntısını elde etmek zor değildir. Gerçekten, (66) ifadesinden

$$g[\Psi(t)]\Psi'(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots + \frac{a_k}{t^k} + \dots \quad (67)$$

açılımını vererek, (31) e benzer olarak

$$a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots + \frac{a_k}{t^k} + \dots = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z; g)}{t^{k+1}} \right] \left[\beta t + (\beta_0 - z) + \frac{\beta_1}{t} + \dots + \frac{\beta_k}{t^k} + \dots \right]$$

eşitliğini yazabiliriz.

Bu son bağıntının her iki tarafının t değişkenine göre aynı kuvvetli terimlerin katsayılarını eşitlemekle

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta F_0(z; g) \\ a_1 &= (\beta_0 - z)F_0(z; g) + \beta F_1(z; g) \\ a_2 &= \beta_1 F_0(z; g) + (\beta_0 - z)F_1(z; g) + \beta F_2(z; g) \\ &\vdots \\ a_{k+1} &= \beta_k F_0(z; g) + \beta_{k-1} F_1(z; g) + \dots + (\beta_0 - z)F_k(z; g) + \beta F_{k+1}(z; g) \end{aligned} \quad (68)$$

denklem sistemini elde ederiz.

Buradan da (34) e benzer olarak,

$$\beta F_{k+1}(z; g) = zF_k(z; g) + a_{k+1} - \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s F_{k-s}(z; g) \quad (69)$$

indirgeme bağıntısını elde ederiz [24].

$F_0(z; g) = \alpha_0$ ve $a_0 = \alpha_0 \beta$ olduğundan, (68) denkleminin ilki ihmal edilirse, geriye kalan k denklem (35) sistemine benzer olarak ifade edilebilir.

Bununla beraber (69) ifadesinin sağ tarafı için

$$a_1 - (\beta_0 - z)\alpha_0, a_2 - \beta_1\alpha_0, a_3 - \beta_2\alpha_0, \dots, a_k - \beta_{k-1}\alpha_0$$

değerleri elde edilir ki, buradan da genelleştirilmiş Faber polinomları için

$$F_k(z; g) = \frac{1}{\beta^k} \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & [a_1 - (\beta_0 - z)\alpha_0] \\ (\beta_0 - z) & \beta & 0 & \dots & 0 & (a_2 - \beta_1\alpha_0) \\ \beta_1 & (\beta_0 - z) & \beta & \dots & 0 & (a_3 - \beta_2\alpha_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{k-3} & \beta_{k-3} & \beta_{k-4} & \dots & (\beta_0 - z) & (a_k - \beta_{k-1}\alpha_0) \end{vmatrix} \quad (70)$$

şeklindeki determinant formunu elde ederiz.

Ayrıca

$$F_n(z; g) = g(z)\Phi^n(z) + E_n(z; g), \quad z \in D$$

ifadesinde $z = \Psi(w)$ alarak,

$$F_n[\Psi(w); g] = g[\Psi(w)]w^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{(n)}}{w^k}, \quad |w| > 1 \quad (71)$$

açılımı bulunur.

(71) ifadesinin tek olarak genelleştirilmiş $F_n(z; g)$ Faber polinomunu tanımladığını göstermek kolaydır.

Şimdi $\{F_n(z; g)\}$ polinomlarının en basit asimptotik özelliklerini göz önüne alalım. Her şeyden önce (48) ile verilen tahminin ispatı $\{F_n(z; g)\}$ polinomlarının genel durumunu değiştirmeksizin uygulanabilir.

Bunun bir sonucu olarak, $c_1(\varepsilon)$ sabiti $g(z)$ ağırlık fonksiyonuna bağlı olmak üzere

$$|F_n(z; g)| \leq c_1(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n, \quad z \in K \quad (72)$$

yazılabilir.

(72) eşitsizliği

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{F_n(z; g)} \leq 1, \quad z \in K \quad (73)$$

şeklindeki limit bağıntısını verir.

Benzer olarak $E_n(z)$ fonksiyonunun (50) ile verilen tahmini, $E_n(z; g)$ fonksiyonu içinde elde edilebilir.

Yani eğer $1 < r < R$ ise, o zaman

$$|E_n(z; g)| \leq c_2(r, R)r^n, \quad z \in \overline{D_R} \quad (74)$$

şeklinde olacaktır.

Yukarıdaki son eşitsizlik $n \rightarrow \infty$ için

$$F_n(z; g) = g(z)\Phi^n(z) + O(r^n), \quad z \in \overline{D_R} \quad (75)$$

asimptotikliğini ve

$$c_3(R)R^n \leq |F_n(z; g)| \leq c_4(R)R^n, \quad z \in \Gamma_R \quad (76)$$

tahmini verir.

Bu iki bağıntı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}(z; g)}{F_n(z; g)} = \Phi(z), \quad z \in D \quad (77)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(z; g)|} = |\Phi(z)|, \quad z \in D \quad (78)$$

şeklindeki limit bağıntılarını verir.

Bundan başka, eğer K kontinumunu düzgün analitik Γ sınırıyla basit bağlantılı bir G bölgesinin kapanışı, $\rho_0 < 1$ olmak üzere $w = \Phi(z)$ dönüşümü D_{ρ_0} bölgesinde analitik devam edilebilir bir fonksiyon ve $g(z)$ ağırlık fonksiyonu D_{ρ_0} bölgesinde analitikse, o zaman (55) e benzer olarak, $\rho_0 < \rho < 1$ alındığında ρ yardımıyla (74) eşitsizliğinde yeniden $r > 1$ seçimi yapılabilir. Keza benzer bir değişiklik (75) formülü için de geçerlidir.

Bu halde (76) eşitsizliği

$$c_5(\rho)\rho^n \leq |F_n(z; g)| \leq c_6(\rho)\rho^n, \quad z \in \Gamma_\rho \quad (79)$$

şeklinde yazılabilecektir.

Genelleştirilmiş Faber polinomları, ağırlık fonksiyonunun açılımındaki katsayılar kullanılarak, adi Faber polinomları cinsinden kolayca ifade edilebilirler.

Gerçekten

$$g[\Psi(t)] = b_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \dots + \frac{b_k}{t^k} + \dots, \quad |t| > 1 \quad (80)$$

açılımını vererek, (66) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & (b_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \dots + \frac{b_n}{t^n} + \dots) [F_0(z) + \frac{F_1(z)}{t} + \dots + \frac{F_n(z)}{t^n} + \dots] \\ & = F_0(z; g) + \frac{F_1(z; g)}{t} + \dots + \frac{F_n(z; g)}{t^n} + \dots \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son bağıntıdan

$$F_n(z; g) = \sum_{k=0}^n b_{n-k} F_k(z) \quad (81)$$

şeklinde ifade edilebilen

$$b_0 F_0(z) + b_1 F_{n-1}(z) + \dots + b_n F_0(z) = F_n(z; g)$$

özelliğini elde ederiz. Genel durumda (80) açılımının katsayıları sadece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1$$

eşitsizliğini sağladığından, genelleştirilmiş Faber polinomlarını ifade eden (81) bağıntısı çok çeşitli olabilir.

Genelleştirilmiş Faber polinomlarının basit bir örneğini göz önüne alalım.

Bunun için K kontinumunu $|z| \leq 1$ birim disk ve ağırlık fonksiyonu da $|z| > 1$ için

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} \quad (82)$$

şeklinde olsun. Bu halde (81) eşitliğinden

$$F_n(z; g) = \sum_{k=0}^n b_{n-k} z^k = z^n \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z^k} \quad (83)$$

olarak yazılabilir.

Böylece K kontinumunun birim disk olması durumunda, genelleştirilmiş Faber polinomları, (82) ile verilen ağırlık fonksiyonunun genişlemesinin kısmi toplamları cinsinden (83) formülüyle temsil edilebilirler.

Son bir kez daha hatırlatalım ki, bu bölümde K kontinumuna herhangi bir kısıtlama konmaksızın ve de K kontinumunun, bir düzgün analitik sınırla basit bağlantılı bir bölgenin kapanışı olması halinde Faber polinomlarının en basit analitik özelliklerini göz önüne aldık.

2.BÖLÜM

ÖZEL BÖLGELER İÇİN FABER POLİNOMLARI VE SIFIRLARI

Bir E kümesinin dışını çemberin dışı üzerine dönüştüren $\Phi(z)$ konform dönüşümü ile üretilen Faber polinomları, kompleks düzlemde yaklaşımlar gibi nümerik analizde iyi bilinen klasik uygulamalara sahiptirler.

Son zamanlarda özel bölgeler için Faber polinomları konusunda büyük çalışmalar gözlenmiştir. S.W. Ellacoot [5] $|z| < 1$, $\text{Re}z \geq 0$ yarı diski için Faber polinomlarının katsayılarını, Coleman ve Smith [1], Gatermann [8] dairesel dilimler için Faber polinomlarının oluşturulmasını ve Papamichael [23] ise yıldızlı bölgelere ait Faber polinomlarının hesabı için bir algoritma programı geliştirmiştir.

2.1. m -Katlı Simetrik Bölgeler İçin Faber Polinomları

Bu kesimde ilk olarak m -katlı simetrik bölgelere ait Faber polinomlarının katsayılarını determinant ifadesine bağlı olarak elde edip, sonra da bundan bağımsız bir şekilde Cauchy integral formülü yardımıyla m -köşeli hiposikloid ve m -yıldız için Faber polinomlarının açık gösterilişlerini bulacağız.

2.1.1.Tanım : m pozitif bir sayı olsun. E bölgesinin, orijin etrafındaki $2\pi/m$ radyan açılı bir dönme dönüşümü, E kümesini kendi üzerine taşıyorsa E bölgesine *m -katlı simetrik bölge* adı verilir. Bu tanıma göre, eğer E kümesi m -katlı simetrik bir bölge ise,

$$\Phi(e^{2\pi i/m} w) = e^{2\pi i/m} \Phi(z) \quad (1)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\Phi(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_k}{z^k} + \dots \quad (2)$$

ve

$$\Psi(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \dots + \frac{b_k}{w^k} + \dots \quad (3)$$

olmak üzere, $\Phi(z)$ ve $\Psi(w)$ dönüşüm fonksiyonlarının Laurent açılımları sırasıyla

$$\Phi(z) = z \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{mk-1}}{z^{mk}} \right)$$

ve

$$\Psi(w) = w \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{mk-1}}{w^{mk}} \right)$$

şeklinde olur ([10], [11]).

2.1.1.Örnek

$$S_m = \{xw^k : 0 \leq x \leq \frac{1}{4^m}, k = 0, 1, \dots, m-1, w^m = 1, m = 2, 3, \dots\}$$

kümesi düzgün m -yıldızı gösterme üzere

$$z = \Psi(w) = w \left(1 + \frac{1}{w^m} \right)^{2/m}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (4)$$

fonksiyonu $|w| > 1$ bölgesini konform olarak C^* / S_m üzerine dönüştürür ([2], [4]).

Böylece

$$\begin{aligned} \Psi(e^{\frac{2k\pi i}{m}} w) &= e^{\frac{2k\pi i}{m}} w \left(1 + \frac{1}{(e^{\frac{2k\pi i}{m}} w)^m} \right)^{2/m} \\ &= e^{\frac{2k\pi i}{m}} \left(1 + \frac{1}{w^m} \right)^{2/m} \\ &= e^{\frac{2k\pi i}{m}} \Psi(w) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ki, bu da S_m bölgesinin m -katlı simetrik bölge olduğunu gösterir.

2.1.2.Örnek

H_m bölgesi

$$z = e^{i\theta} + \frac{1}{(m-1)e^{(m-1)i\theta}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad m = 2, 3, \dots$$

parametrik denklemlerle m -köşeli hiposikloid ile sınırlı kapalı bölgeyi belirtsin. Bu halde,

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{(m-1)w^{m-1}}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (5)$$

dönüşümü $|w| > 1$ bölgesini konform olarak C^* / H_m üzerine dönüştürür ve H_m bölgesinin m -katlı simetrik bölge olduğu kolayca görülür.

Aşağıdaki teorem simetrik bölgelerle üretilen Faber polinomlarının determinant yoluyla katsayılarının belirtilmesini ortaya koymaktadır.

2.1.1. Teorem

$F_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$ için

$$\Psi(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \frac{b_2}{w^2} + \dots$$

şeklindeki dönüşüm fonksiyonuna ait Faber polinomları olsun.

Bu durumda

$$H_n = \begin{bmatrix} b_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2b_1 \\ b_1 & b_0 & 1 & \dots & 0 & 3b_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 4b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots & b_0 & nb_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde $n \times n$ tipinde bir matris ve I_n de $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere

$$F_n(z) = \det(zI_n - H_n)$$

olarak yazılabilir ve bunun bir sonucu olarak da, $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$F_n(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_{n-j}z^{n-j}$$

olarak alındığında, c_{n-j} katsayıları H_n matrisinin m köşegen elemanlarından geçen satır ve sütunların atılması ile elde edilen $n-j$ mertebeden matrislerin determinantlarının toplamı cinsinden yazılabilir.

Daha açıkçası $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$c_{n-j} = (-1)^{n-j} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_j \leq n} \det[b_{i_p, i_q}]$$

şeklinde yazılabilir.

Özel olarak E bölgesi m -katlı simetrik bölge ise

$$j \neq 0 \pmod{m} \text{ için } c_{n-j} = 0$$

şeklinde olup bu durumda $k = 0, 1, \dots, m-1$ için

$$F_{m+n+k}(z) = z^{m+n+k} + c_{m+n+k-m}z^{m+n+k-m} + \dots + c_{m+n+k-jm}z^{m+n+k-jm} + \dots + c_k z^k$$

olur ([10], [20]).

İspatlarındaki boşlukları tarafımızdan doldurulan aşağıdaki teoremler, S_m ve H_m şeklindeki özel simetrik bölgelere ait Faber polinomlarının açık gösterilişlerini vermektedir.

2.1.2. Teorem

$F_n(z)$ Faber polinoları,

$$S_m = \{xw^k : 0 \leq x \leq \frac{1}{4^m}, k = 0, 1, \dots, m-1, w^m = 1, m = 2, 3, \dots\}$$

düzgün m -yıldız ile üretilmiş olsun. Bu durumda $n \geq 1$ için,

$$\left[\frac{n}{m} \right] = \begin{cases} \frac{n}{m} & ; n \equiv 0 \pmod{m} \\ \frac{n-k}{m} & ; n \equiv k \pmod{m}, k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$F_n(z) = \frac{2n}{m} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} (-1)^j \frac{\Gamma\left(\frac{2n}{m} - j\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{m} - 2j + 1\right) j!} z^{n-mj}$$

olur.

İspat : (4) ile verilen

$$z = \Psi(w) = w \left(1 + \frac{1}{w^m}\right)^{2/m}$$

dönüşüm fonksiyonunun $|w| > 1$ bölgesini konform olarak C^*/S_m üzerine dönüştürdüğünü biliyoruz. $\Psi(w)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi $\Phi(z)$ olarak alındığında, Faber polinomlarının tanımıyla beraber, c_{n-j} katsayıları $\{\Phi(z)\}^n$ 'in açılımındaki Laurent katsayıları olmak üzere, S_m ile üretilen $F_n(z)$ Faber polinoları,

$$F_n(z) = \sum_{j=0}^n c_{n-j} z^{n-j}$$

şeklinde yazılabilir.

Yeteri kadar büyük seçilen R için S_m , $|z|=R$ çemberiyle sınırlı bölgenin içinde kalmak üzere $j = 0, 1, \dots, n$ için

$$c_{n-j} = \int_{|z|=R} \frac{\{\Phi(z)\}^n}{z^{n-j+1}} dz$$

veya alternatif olarak $z = \Psi(w)$ özelliğiyle $j = 0, 1, \dots, n$ için

$$c_{n-j} = \int_{|w|=r>1} \frac{w^n \Psi'(w)}{\{\Psi(w)\}^{n-j+1}} dw$$

elde ederiz.

2.1.1.Örnekte simetrisi gösterilen

$$S_m = \{xw^k : 0 \leq x \leq \frac{1}{w^m}, k = 0, 1, \dots, m-1, w^m = 1, m = 2, 3, \dots\}$$

bölgesi ile üretilen $F_n(z)$ Faber polinomları 2.1.1. Teorem gereği

$$F_n(z) = \sum_{j=0}^n c_{n-mj} z^{n-mj}$$

formunda yazılabilir.

Diğer taraftan Cauchy teoremiyle c_{n-mj} katsayılarının

$$\frac{w^n \Psi'(w)}{\{\Psi(w)\}^{n-mj+1}}$$

açılımındaki $\frac{1}{w}$ nın katsayılarıyla aynı olduğunu görürüz. (4) ifadesi kullanılarak

$$\Psi'(w) = \left(1 - \frac{1}{w^m}\right) \left(1 + \frac{1}{w^m}\right)^{\frac{(2-m)}{m}}$$

çıkarmak ki, buradan da

$$\begin{aligned} \frac{w^n \Psi'(w)}{\{\Psi(w)\}^{n-mj+1}} &= w^{mj-1} \left(1 - \frac{1}{w^m}\right) \left(1 + \frac{1}{w^m}\right)^{\frac{-(m+2n-2mj)}{m}} \\ &= w^{mj-1} \left(1 + \frac{1}{w^m}\right)^{\frac{-(m+2n-2mj)}{m}} - w^{mj-m-1} \left(1 + \frac{1}{w^m}\right)^{\frac{-(m+2n-2mj)}{m}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Hemen belirtelim ki, $|w| > 1$ için

$$(\alpha)_{-1} = 0,$$

$$(\alpha)_0 = 1$$

ve

$$(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+i-1)$$

olmak üzere

$$\left(1 + \frac{1}{w^m}\right)^{\frac{-(m+2n-2mj)}{m}} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m+2n-2mj}{m}_i \frac{w^{-mi}}{i!}$$

yazılabilir. Böylece $\frac{1}{w}$ nın katsayıları

$$\begin{aligned}
c_{n-mj} &= (-1)^j \frac{\binom{m+2n-2mj}{m}}{j!} - (-1)^{j-1} \frac{\binom{m+2n-2mj}{n}}{(j-1)!} \\
&= (-1)^j \frac{2m \binom{\frac{2n}{m}+1-2j}{\frac{2n}{m}+1-2j+1} \cdots \binom{\frac{2n}{m}+1-2j+j-2}{\frac{2n}{m}}}{n j!} \\
&= (-1)^j \frac{2n}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{2n}{m}-j\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{m}-2j+1\right) j!}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

2.1.3. Teorem

$F_n(z)$, n . dereceden H_m bölgesine ait Faber polinomları olsun. Bu durumda $n \geq 1$ için,

$$\left[\frac{n}{m} \right] = \begin{cases} \frac{n}{m} & ; n \equiv 0 \pmod{m} \\ \frac{n-k}{m} & ; n \equiv k \pmod{m}, k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$F_n(z) = n \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} (-1)^j \frac{\Gamma(n-mj+j)}{\Gamma(n-mj+1)(m-1)^j j!} z^{n-mj}$$

şeklindedir.

İspat:

$$z = \Psi(w) = w \left(1 + \frac{1}{(m-1)w^m} \right)$$

dönüşüm fonksiyonu $|w| > 1$ bölgesini konform olarak C^*/H_m üzerine dönüştürür.

Yine Faber polinomlarının tanımından biliyoruz ki H_m ile üretilen $F_n(z)$ Faber polinomları, c_{n-j} katsayıları $\{\Phi(z)\}^n$ 'in açılımındaki Laurent katsayıları olmak üzere, H_m ile üretilen $F_n(z)$ Faber polinomları,

$$F_n(z) = \sum_{j=0}^n c_{n-j} z^{n-j}$$

olarak yazılabilir.

H_m bölgesi $|z|=R$ çemberi ile sınırlı bölgenin içinde kalacak şekilde yeteri kadar büyük $|z|=R$ ve $j=0,1,\dots,n$ alınıp yukarıdaki ispata benzer olarak

$$c_{n-j} = \int_{|z|=R} \frac{\{\Phi(z)\}^n}{z^{n-j+1}} dz$$

ve $z = \Psi(w)$ dönüşümü kullanılarak, $j=0,1,\dots,n$ için

$$c_{n-j} = \int_{|w|=r>1} \frac{w^n \Psi'(w)}{\{\Psi(w)\}^{n-j+1}} dw$$

elde ederiz. H_m bölgesinin simetri özelliğinden, $\Psi(w)$ dönüşüm fonksiyonu

m -kathı simetrik dönüşüm olur. $j=0,1,\dots,n$ için $j \neq 0 \pmod{m}$ şeklindeyse $c_{n-j} = 0$

olduğunu görmek kolaydır ve buradan da $F_n(z)$ Faber polinomları için

$$\begin{aligned} \frac{w^n \Psi'(w)}{\{\Psi(w)\}^{n-mj+1}} &= w^{mj-1} \left(1 - \frac{(m-1)}{(m-1)w^m}\right) \left(1 + \frac{1}{(m-1)w^m}\right)^{-(n-mj+1)} \\ &= w^{mj-1} \left(1 + \frac{1}{(m-1)w^m}\right)^{-(n-mj+1)} - w^{mj-m-1} \left(1 + \frac{1}{(m-1)w^m}\right)^{-(n-mj+1)} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bunun yanında $|w|>1$ için

$$\binom{\alpha}{i} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+i-1), \binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{-1} = 0$$

olmak üzere

$$\left(1 + \frac{1}{(m-1)w^m}\right)^{-(n-mj+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n-mj+1}{i} \frac{w^{-mi}}{(m-1)^i i!}$$

yazılabilir. Böylece $\frac{1}{w}$ nın katsayıları

$$\begin{aligned} c_{n-mj} &= (-1)^j \frac{1}{(m-1)^j j!} \binom{n-mj+1}{j} - (-1)^{j-1} \frac{(m-1)^{1-j}}{(j-1)!} \binom{n-mj+1}{j-1} \\ &= (-1)^j \frac{n}{(m-1)^j j!} (n-mj+1)(n-mj+2)\cdots(n-mj+j-1) \\ &= (-1)^j \frac{n \Gamma(n-mj+j)}{(m-1)^j \Gamma(n-mj+1) j!} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

2.2.Dairesel Yay Bölgeleri İçin Faber Polinomları

Bu kesimde He M. [14] tarafından özel olarak seçilen dairesel yay bölgeleri için Faber polinomlarının açık gösterilişlerine ait teorem ve sonuçlar verilecektir. Her iki eksene göre simetrik, köşeleri $z = \mp\alpha$ ($0 < \alpha \leq 2$) ve dış açısı $\alpha\pi$ olan birbirini kesen iki yay ile sınırlı bölgeyi D_α ile gösterelim. $\Psi'(w) = 1$ ile normalize edilmiş

$$z = \Psi(w) = \alpha \frac{1 + [(w-1)/(w+1)]^\alpha}{1 - [(w-1)/(w+1)]^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 2$$

dönüşüm fonksiyonu $|w| > 1$ bölgesini konform olarak C^*/D_α bölgesine dönüştürür ve $z = \Psi(w)$ dönüşümünün tersi de

$$w = \Phi(z) = \frac{1 + [(z-\alpha)/(z+\alpha)]^{1/\alpha}}{1 - [(z-\alpha)/(z+\alpha)]^{1/\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 2$$

şeklinde olur [3].

D_α bölgesinin büyüklüğü α parametresine bağlıdır (şekil 1).

Daha açıkçası D_α bölgesi

$$D_\alpha = \begin{cases} \text{konkav bölge} & ; \quad 0 < \alpha < 1 \\ \text{birim disk} & ; \quad \alpha = 1 \\ \text{konveks bölge} & ; \quad 1 < \alpha < 2 \\ [2, -2] & ; \quad \alpha = 2 \end{cases}$$

şeklinde belirtilebilir. $\alpha = 1/2, 1$ ve 2 için D_α bölgesine ait Faber polinomları

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ çift} \\ \frac{n-1}{2} & ; n \text{ tek} \end{cases} \quad \text{ve} \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

olmak üzere

α	D_α	$\Phi(z)$	$\Psi(w)$	$F_n(z)$
$\alpha = 1$	$ z < 1$	z	w	z^n
$\alpha = 2$	$[-2, 2]$	$\frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2}$	$w + \frac{1}{w}$	$2\text{Cosn}(\cos^{-1}(z/2))$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$D_{1/2}$	$z + \frac{1}{4z}$	$\frac{w + \sqrt{w^2 - 1}}{2}$	$\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{C_{n-k}^n}{4^k} z^{n-2k}$

şeklinde sınıflandırılabilir.

$\alpha = \frac{1}{2}, 1$ ve 2 değerleri dışında D_α bölgesi ile üretilecek Faber polinomlarının açık gösterilişlerini verebilmek oldukça güçtür. Bunun nedeni ise dönüşüm fonksiyonun bu değerler için karışık hal almasıdır.

Bununla birlikte He M. çalışmasında [14] α parametresinin $0 < \alpha \leq 2$ aralığındaki tüm değerleri için D_α bölgesi ile üretilen Faber polinomlarının açık gösterilişlerini bulmayı başarmıştır.

Aşağıdaki teoremler böyle bir durumu ortaya koymaktadır.

2.2.1. Teorem

$$z = \Psi(w) = \alpha \frac{1 + [(w-1)/(w+1)]^\alpha}{1 - [(w-1)/(w+1)]^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 2$$

ve sonsuzun bir komşuluğunda

$$\Psi(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \dots + \frac{b_k}{w^k} + \dots$$

olarak alınsın.

Bu halde $b_0 = 0$ ve $k = 1, 2, \dots$ için

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}, \quad \binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{-1} = 0$$

ve

$$a_1 = -2\alpha,$$

$$a_2 = 2\alpha^2,$$

$$a_k = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{\alpha}{r} \binom{-\alpha}{k-r}$$

olmak üzere

$$b_k = \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & \alpha a_2 + a_3 \\ a_2 & a_1 & 0 & \dots & \alpha a_3 + a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \alpha a_4 + a_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & \alpha a_{k+1} + a_{k+2} \end{bmatrix}}{(2\alpha)^k}$$

şeklindedir [3].

İspat:

Yukarıdaki teoremden geçen $z = \Psi(w)$ fonksiyonu için

$$g(w) = \frac{[1 - (1/w)]^\alpha}{[1 + (1/w)]^\alpha}$$

şeklinde alınsın, bu durumda dönüşüm fonksiyonu

$$\Psi(w) = \alpha \frac{1 + g(w)}{1 - g(w)}$$

şeklinde yazılabilir. $|w| > 1$ için

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 2\alpha \quad \text{ve} \quad a_k = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{\alpha}{r} \binom{-\alpha}{k-r}$$

olmak üzere

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{w^k}$$

fonksiyonunun açılımını kullanarak, $\Psi(w)$ fonksiyonunun Laurent açılımını elde ederiz. $\Psi(w)$ fonksiyonunun Laurent açılımı

$$\Psi(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \dots + \frac{b_k}{w^k} + \dots$$

şeklinde olsun.

Bu durumda

$$w + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{w^i} = \alpha \frac{1 + g(w)}{1 - g(w)}$$

yani

$$(1 - g(w)) \left(w + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{w^i} \right) = \alpha (1 + g(w))$$

denklemini yazılabilir.

Bu denklemin eşitliğinden $b_0 = 0$ ve

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha a_2 + a_3 \\ -\alpha a_3 + a_4 \\ -\alpha a_4 + a_5 \\ \vdots \\ -\alpha a_{k+1} + a_{k+2} \end{bmatrix}$$

lineer denklem sistemini elde ederiz.

Katsayı matrisinin determinanı $\alpha_j^k = (2\alpha)^k \neq 0$ olduğundan sistemin tek çözümü vardır. Böylece Cramer kuralı istenen sonucu verir.

2.2.2. Teorem

$F_n(z)$, D_α için n . Dereceden Faber polinomları olsun. Bu durumda

$$a_r(i) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha j}{r} \binom{-\alpha j}{i-r},$$

$$c_n(j) = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-j-1}{i} (-1)^i a_r(i) \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n+j+1}{i} a_{n-r}(i) \right)$$

ve

$$D_n(j) = \begin{cases} c_0(j) + c_2(j) + \dots + c_n(j) & , n \text{ çift ise} \\ c_1(j) + c_3(j) + \dots + c_n(j) & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olmak üzere $n \geq 1$ için

$$F_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{-4}{\alpha^{n-j-1}} D_n(j) z^{n-j}$$

olur [14].

2.3. Çokgen Bölgeler İçin Faber Polinomları

G_m , m tane doğru parçasıyla sınırlanmış kapalı bir düzgün çokgen bölge olsun.

Bu durumda bir çokgenin konform dönüşümü için Schwarz-Christoffel formülü kullanılarak,

$$b_{m-1} = \frac{1}{m-1}$$

ve

$$b_{mk-1} = \frac{2(m-2)(2m-2)\dots(m(k-1)-2)}{(mk-1)m^k k!}, \quad k = 2, 3, \dots$$

olmak üzere G_m bölgesi için

$$\begin{aligned} \Psi(w) &= \int \left(1 - \frac{1}{w^m}\right)^{2/m} dw \\ &= w + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{mk-1}}{w^{mk-1}} \end{aligned}$$

şeklinde normalize edilmiş $\Psi(w)$ ters dönüşüm fonksiyonu elde edilebilir [10].

Bunun yanında simetrik bölgelerin özellikleri ile beraber G_m bölgesi için

$$\left[\frac{n}{m} \right] = \begin{cases} \frac{n}{m} & n \equiv 0 \pmod{m} \\ \frac{n-k}{m} & n \equiv k \pmod{m} \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$F_n(z; G_m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} c_{n-mk} z^{n-mk}$$

şeklindeki Faber polinomları bulunabilir. Özel olarak

$$F_k(z) = z^k, \quad 1 \leq k \leq m-1$$

$$F_m(z) = z^m - \frac{m}{m-1}$$

$$F_{k+m}(z) = z^k \left(z^m - \frac{m+k}{m-1} \right), \quad 1 \leq k \leq m-1$$

$$F_{2m}(z) = z^{2m} - \frac{2m}{m-1} z^m + \frac{3m^2 - 5m + 2}{m(2m-1)(m-1)^2}$$

elde ederiz.

2.4. Dairesel Dilimler İçin Faber Polinomları

Günümüzde kompleks düzlemde, polinom ve rasyonel yaklaşımlara temel teşkil eden Faber polinomlarının rolü hızla artmıştır. Ancak bunun yanında şimdiye kadar düzlemin uygun alt bölgelerinden olan dairesel sektörler için Faber polinomları bilinmiyordu. Coleman ve Smith [1], Schwarz-Christoffel ve diğer yardımcı dönüşümleri kullanarak, dairesel dilimler için Faber polinomlarını verecek bir konformal dönüşüm elde etmeyi başarmışlardır.

Aşağıda vereceğimiz teoremler dairesel dilim bölgeler için dönüşüm fonksiyonunu ve bu dönüşüm ile üretilen Faber polinomlarının nasıl elde edileceğini ifade etmektedir.

2.4.1. Teorem

$|w| \leq 1$ birim diskinin tümleyeni

$$a = a(\alpha) = \alpha^{-1}(2\alpha - 1)^{1/2} \quad \text{ve} \quad p = p(a) = (1 - a^2)^{1/2}$$

özelliğiyle

$$u(w) = \frac{i(w-1)}{2aw^{1/2}} \quad \text{ve} \quad v(w) = \frac{(2-a^2)(w-1)^2 + 4wa^2}{a^2(w+1)^{1/2}}$$

olmak üzere

$$\Psi(w) = \frac{-[u + (u^2 - 1)^{1/2}]^2}{[v + (v^2 - 1)^{1/2}]^{p(a)}}$$

dönüşümüyle

$$\{z : |z| \leq 1, |\arg z| \leq \pi/\alpha, \alpha > 1\}$$

dairesel diliminin tümleyeni üzerine konform olarak dönüşür [1].

2.4.2. Teorem

2.4.1. Teoremde tanımlanan fonksiyonun

$$\Psi(w) = \rho(w + \beta_0 + \beta_1 w^{-1} + \beta_2 w^{-2} + \dots)$$

şeklindeki Laurent açılımının katsayıları tekrarlı olarak üretilebilir.

Üstelik $P_n(x)$, n . dereceden Legendre polinomlarını göstermek üzere

$\alpha_0 = 1$ ve $k \geq 1$ için

$$\alpha_k = P_k(x) + P_{k-1}(x) \quad \text{ve} \quad x = 2p^2 - 1$$

olarak alındığında, 2.4.1. Teoremde α ve p değişkeni için $\beta_0 = \alpha_1$ ve

$$(k+1)\beta_k = \alpha_{k+1} - \sum_{v=0}^{k-1} v\beta_v \alpha_{k-r}$$

şeklinde elde edilir [1]. $0 \leq \alpha \leq \pi$ olarak alındığında

$$S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |\arg z| \leq \alpha\}$$

dairesel sektörü ile üretilen $F_n(z)$ Faber polinomlarının hesabı için

$$x = 1 - 2c, \quad c = \frac{\alpha}{\pi} \left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right)$$

olmak üzere, x e bağlı olarak, aşağıdaki adımları takip etmek büyük kolaylık sağlar [8].

Adım 1.

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n > 0$$

$$\alpha_0(x) = 1, \quad \alpha_n(x) = P_n(x) + P_{n-1}(x), \quad n > 0$$

olarak P Legendre ve α polinomlarını hesapla.

Adım 2.

$$\beta_0(x) = a_1(x) = 1 + x$$

ve

$$(n+1)\beta_n(x) = a_{n+1}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} k \beta_k(x) a_{n-k}(x) \quad , n > 0$$

bağıntılarıyla $\Psi(w)$ fonksiyonunun Laurent açılımındaki β katsayılarını bul.**Adım 3.**

$$b_n(x) = \beta_n(x) \rho^{n+1} \quad , n \geq 0$$

özelliklerinden b değerlerini elde et ve son olarak,**Adım 4.**

$$F_0(z) = 1 \quad , \quad F_1(z) = z - b_0(x)$$

ve

$$F_{n+1}(z) = [z - b_0(x)] F_n(z) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k(x) F_{n-k}(z) - (1+n) b_n(x) \quad , n > 0$$

indirgeme bağıntısıyla beraber $x = 1 - 2c$ alarak, Faber polinomlarını bul.**2.4.3. Örnek**

$n \leq 4$ için S_a ile üretilen F_n Faber polinomlarını hesaplayalım. Yukarıdaki akış şemasına göre,

Adım 1.

$$P_0(x) = 1$$

$$a_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$a_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$$

$$a_2(x) = \frac{1}{2}(-1 + 2x + 3x^2)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$$

$$a_3(x) = \frac{1}{2}(-1 - 3x + 3x^2 + 5x^3)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4)$$

$$a_4(x) = \frac{1}{8}(3 - 12x - 30x^2 + 20x^3 + 35x^4)$$

Adım 2.

β katsayıları için

$$\begin{aligned}\beta_0(x) &= 1+x & \beta_1(x) &= \frac{1}{4}(-1+2x+3x^2) \\ \beta_2(x) &= \frac{1}{12}(-1-7x+x^2+7x^3) & \beta_3(x) &= \frac{1}{48}(5+4x-30x^2-4x^3+25x^4)\end{aligned}$$

Adım 3.

$b_n(x) = \rho^{n+1}\beta_n(x)$, $n \geq 0$ özelliğindeki b değerleri hesaplanır.

Adım 4.

Son olarak yukarıdaki adımlar birleştirilerek

$$F_0(z) = 1, F_1(z) = z - \rho(1+x), F_2(z) = z^2 - 2\rho(1+x)z + \frac{1}{2}\rho^2(3+2x-x^2)$$

$$F_3(z) = z^3 - 3\rho(1+x)z^2 + \frac{3}{4}\rho^2(5+6x+x^2)z - \frac{1}{2}\rho^3(3+x-x^2+x^3)$$

$$\begin{aligned}F_4(z) &= z^4 - 4\rho(1+x)z^3 + \rho^2(7+10x+3x^2)z^2 - \frac{1}{3}\rho^3(17+23x+7x^2+x^3)z \\ &+ \frac{1}{8}\rho^4(11+4x+2x^2+4x^3-5x^4)\end{aligned}$$

şeklinde istenen Faber polinomları elde edilmiş olur [12].

2.5. Halka Dilimler İçin Faber Polinomları

Kompleks düzlemin özel bölgeleri için Faber polinomları, polinom ve rasyonel yaklaşımları elde etmek için yaygın bir şekilde kullanılır. Özellikle bu polinomlar, lineer denklemler için yarı iteratif metotlar kullanılarak en iyiye yakın (near – optimal polynomial) polinom yaklaşımları için kullanılabilir [21].

Bu kesimde halka dilime ait Faber polinomlarını bulmak için önce Schwarz–Christoffel dönüşümü yardımıyla $\Psi(w)$ ters fonksiyonu verilecek ve sonrada bu bölgeye ait Faber polinomlarının elde edilişi örnekle belirtilecektir.

2.5.1. Teorem

$$A(x) = [(x - a^2)(x - a^{-2})]^{1/2}, \quad B(x) = [(x - b^2)(x - b^{-2})]^{1/2}$$

ve

$$\zeta = \frac{1}{4w} [(w^2 + 1)(a^{-2} - a^2) - 2w(a^{-2} + a^2)]$$

olmak üzere

$$\Psi(w) = -\exp\left[-\int_{a^2}^{-\zeta^{-1}} \frac{B(x)}{xA(x)} dx\right]$$

dönüşümü yardımıyla

$$Q = \{z : R \leq |z| \leq 1, \theta \leq |\arg z| \leq \pi\}, \quad 0 < \theta \leq \pi$$

halka diliminin tümleyeni üzerine konform olarak dönüşür [2].

Bu durumda a ve b parametreleri için $0 < a \leq b \leq 1$ olarak alındığında

$$\pi - \theta = \int_{a^2}^{b^2} \left[\frac{(b^2 - x)(b^{-2} - x)}{(x - a^2)(a^{-2} - x)} \right]^{1/2} \frac{dx}{x} \quad (6)$$

ve

$$\log R = -\int_{b^2}^{b^{-2}} \left[\frac{(x - b^2)(b^{-2} - x)}{(x - a^2)(a^{-2} - x)} \right]^{1/2} \frac{dx}{x} \quad (7)$$

denklemleri sağlanır [2].

$\Psi(w)$ dönüşüm fonksiyonunda a ve b parametrelerinin bazı özel seçimleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(i) Eğer $b = a$ ise (6) ve (7) bağıntılarından $\theta = \pi$ ve $R = a^4$ elde edilir ki, bu da halka diliminin $[-1, -R]$ reel aralığının tümleyenine dönüştüğünü gösterir.

(ii) $b = 1$ olarak alınması durumunda da halka dilimli bölge dairesel yaydan oluşacak ve son olarak,

(iii) $a \rightarrow 0$ ve $b \rightarrow 0$ limit durumunda ise, (6) ve (7) ifadelerinden

$$\theta \rightarrow \frac{a\pi}{b} \quad \text{ve} \quad R \rightarrow 0$$

elde edilir ki, bu da Q bölgesinin

$$\{z : |z| \leq 1, 0 \leq |\arg z| \leq \pi\}$$

şeklindeki dairesel dilimden oluştuğunu gösterir [2].

2.5.2. Teorem

2.4.1. Teoremindeki tanım ve gösterimler altında

$$u = \frac{2a^2(1+b^4)}{b^2(1-a^4)}, \quad s = 2\frac{1+a^4}{1-a^4} \quad (8)$$

olmak üzere

$$\Psi(w) = \rho(w + \beta_0 + \beta_1 w^{-1} + \dots)$$

$i < 0$ için $a_i = 0$, $a_0 = 1$ ve

$$(k+1)a_{k+1} = (2k+1)(s-u)a_k - 2k(s^2 - su - 1)a_{k-1} \\ + (2k-1)(s-u)a_{k-2} + (1-k)a_{k-3}, \quad k \geq 0 \quad (9)$$

ve

$$c_{k+1} = a_{k+1} - sa_k + a_{k-1} \quad (10)$$

olarak alınsın .

Bu halde $\beta_0 = c_1$, $\beta_1 = \frac{1}{2}c_2$ ve $n \geq 2$ için

$$(n+1)\beta_n = c_{n+1} - \sum_{r=1}^{n-1} r c_{n-r} \beta_r \quad (11)$$

olur [2].

2.5.1. Tanım

Aşağıdaki eşitliği sağlayan $\tilde{F}_n(z)$ polinomuna *bölünmüş Faber polinomu* denir ([2], [8]).

$$\tilde{F}_n(z) = F_n(z) \rho^{-n}$$

2.5.3. Teorem

2.4.1. Teoremde tanımlanan Q halka dilimi için

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\Psi(w)}{w} = \rho$$

olmak üzere n . dereceden Faber polinomu

$$F_n(z) = \rho^n \tilde{F}_n(z) \quad (12)$$

şeklinde olup, bölünmüş Faber polinomu yardımcı $\phi_{n-1}(z)$ polinomları cinsinden

$$\tilde{F}_n(\rho z) = z^n + \phi_{n-1}(z) \quad (13)$$

özellği yazılabilir.

Bunun yanında $\{\phi_n\}$ yardımcı polinomları 2.4.2. Teoremdaki Laurent katsayıları cinsinden

$$\phi_n(z) = (z - \beta_0) \phi_{n-1}(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \phi_{n-k-1}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k z^{n-k} - (1+n)\beta_n \quad (14)$$

bağıntısıyla tekrarlı olarak üretilebilir [9].

Gerçekten, $b_k = \beta_k \rho^{k+1}$ olmak üzere Faber polinomlarının

$$F_{n+1}(z) = (z - b_0) F_n(z) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k F_{n-k}(z) - (1+n)b_n, \quad n > 0$$

tekrar bağıntısını sağladığını biliyoruz. Bu durumda $n \geq 1$ için ϕ_{n-1} , $(n-1)$ dereceli bir polinom ve $\phi_{-1} = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(z) &= \Phi_n(z/\rho) \\ \Phi_n(z) &= z^n + \phi_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (15)$$

olarak alındığında (14) ifadesinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

Yukarıda verilen bağıntılar yardımıyla halka dilimi için Faber polinomları tekrarlı olarak hesaplanabilir [2].

2.5.1. Örnek

$n = 2$ için ilk önce (8) ile tanımlanan u ve s cinsinden (9) da verilen a_k ları hesaplayalım.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = s - u, \quad a_2 = \frac{(s^2 - 4su + 3u^2 + 2)}{2}$$

$$a_3 = \frac{(-s^3 - 3s^2u + 9su^2 - 5u^3 + 8s - 8u)}{2}$$

2.5.2. Teoremden verilen

$$c_{k+1} = a_{k+1} - sa_k + a_{k-1}$$

bağıntısı yardımıyla c_k değerlerini

$$c_1 = -u, \quad c_2 = \frac{(-s^2 - 2su + 3u^2 + 4)}{2}$$

$$c_3 = \frac{(-2s^3 + s^2u + 6su^2 - 5u^3 + 8s - 10u)}{2}$$

ve böylece Laurent açılımının katsayıları (11) bağıntısından

$$\beta_0 = -u, \beta_1 = \frac{(-s^2 - 2su + 3u^2 + 4)}{4}$$

$$\beta_2 = \frac{(-4s^3 + s^2u + 10su^2 - 7u^3 + 16s - 16u)}{12}$$

şeklinde bulunur.

Laurent açılımının katsayıları (14) ifadesinde kullanılarak ϕ_n yardımcı fonksiyonları

$$\phi_0 = u, \phi_1 = 2uz + \frac{(s^2 + 2su - u^2 - 4)}{2}$$

$$\phi_2 = 3uz^2 + \frac{(3s^2 + 6su + 3u^2 - 12)z}{4} + \frac{(2s^3 + s^2u - 2su^2 + u^3 + 2u - 8s)}{2}$$

şeklinde bulunarak

$$\Phi_1(z) = z + u, \Phi_2(z) = z^2 + \phi_1(z), \Phi_3(z) = z^3 + \phi_2(z)$$

elde edilir.

Halka dilim bölge, birim diskin dilim bölgesi olduğunda limit durumunda $a \rightarrow 0$ ve $b \rightarrow 0$ iken $s \rightarrow 2$ ve c dairesel dilim bölge için tanımlanmış parametre olmak üzere

(iii) özel durumundan

$$u \rightarrow 2\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 = 2(1-c)$$

elde edilir.

Böylece

$$\Phi_1(z) = z - 2(1-c)$$

$$\Phi_2(z) = z^2 + (1-c)[-4z + 2 + 2c]$$

$$\Phi_3(z) = z^3 + (1-c)[-6z^2 + (9-3c)z - 2 - 4c]$$

fonksiyonları bulunmuş olur [2].

2.6.Faber Polinomlarının Sıfırlarının Yeri

Faber polinomlarının sıfırları, son on yılda aktif araştırma konularından biri olmuştur ([10], [12], [16], [20]).

Bu kesimde, Faber polinomlarının sıfırlarının bölgelere göre yerleri üzerinde duracağız.

T.Kövari ve Pommerenke [19] konveks bir bölgeye ait Faber polinomlarının sıfırlarının da bölge içinde yer aldığını göstermişlerdir.

Daha sonraki çalışmalarda herhangi bir küme için elde edilen Faber polinomlarının sıfırlarının daima bu bölgenin konveks kabuğunda bulunacağı iddia edildi[26]. Ancak Goodman [7] ters bir örnekle bu son varsayımın doğru olmadığını göstermiştir.

Aşağıdaki teoremler, farklı bölgeler için Faber polinomlarının sıfırlarının yerlerini belirtmektedir.

2.6.1.Teorem

K kompakt bölgesinin Faber polinomu $F_n(z)$ olarak alınsın.

Bu durumda,

(i) $F_n(z)$ Faber polinomlarının sıfırlarının tüm limit noktaları K bölgesindedir.

(ii) K bölgesi konveks ise, her n için $F_n(z)$ Faber polinomlarının sıfırları yine K bölgesinde olur.

Ek olarak, eğer K bir doğru parçası değil ise o zaman her n için $F_n(z)$ Faber polinomlarının sıfırları K bölgesi içinde yer alır. K kümesinin doğru parçası olması durumunda $F_n(z)$ Faber polinomlarının sıfırları K kümesinin son noktalarında yer alamaz ([16], [19]).

2.6.2.Teorem

$F_n(z)$ Faber polinomu H_m bölgesinin n dereceden Faber polinomu olsun.

Bu halde $n \geq 1$ için $w = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ olmak üzere, $F_n(z)$ Faber polinomlarının tüm sıfırları

$$L_m = \{x w^k; 0 \leq x < \frac{m}{m-1}, k = 0, 1, \dots, m-1, m \geq 2\}$$

kümesinde yer alır (şekil 4-5-6) [12].

2.6.3. Teorem

$m \geq 2$, $n \geq 1$ ve $F_n(z)$, S_m düzgün m -star ile üretilmiş n . dereceden Faber polinomları olsun. Bu durumda $F_n(z)$ Faber polinomlarının sıfırları S_m bölgesinde yer alır (şekil 7-8)[18].

2.6.4. Teorem

K bölgesi ile üretilen Faber polinomlarının sıfırları bölgenin konveks kabuğunda yer alır [26].

2.6.5. Teorem

Eğer E bölgesi m -kat simetrik bölge ise, bu durumda E bölgesiyle üretilen Faber polinomlarının sıfırlarının kümesi de m -kat simetriktr.

İspat :

E bölgesi m -kat simetrik olduğundan

$$\Phi(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{mk-1}}{z^{mk-1}} = z \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{mk-1}}{z^{mk}} \right)$$

$$[\Phi(z)]^n = z^n \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{mk-1}}{z^{mk}} \right)^n$$

ve

$$\Phi^n(e^{\frac{2\pi i}{m}} z) = e^{\frac{2n\pi i}{m}} \Phi^n(z)$$

olarak yazılabilir ki buradan da $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$F_n(e^{\frac{2\pi i}{m}} z) = e^{\frac{2n\pi i}{m}} F_n(z)$$

yazılabilir.

Böylece $j = 1, 2, 3, \dots, n$ için z_j değerleri

$$F_{nm+k}(z)$$

Faber polinomlarının sıfıra eşit olmayan sıfırlarını göstermek üzere

$k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ için

$$F_{nm+k}(z) = z^k \prod_{j=1}^n (z^m - z_j^m)$$

olur.

2.7.Faber Polinomlarının ve Türevlerinin Sıfırları

Faber polinomları, integral formülü indirgeme bağıntısı ve üretici fonksiyon gibi değişik temsillere sahiptirler. Bu ifadeler Faber polinomlarının sıfırları hakkında az bilgi verir. Aşağıdaki teorem bir matrisin özdeğerleri ile Faber polinomlarının sıfırları arasındaki bağıntıyı ortaya koymaktadır.

2.7.1.Teorem

$F_n(z)$ Faber polinomları

$$\Psi(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \dots$$

şeklindeki dönüşüm fonksiyonuna ait Faber polinomları olsun.

Bu durumda

$$H_n = \begin{bmatrix} b_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2b_1 \\ b_1 & b_0 & 1 & \dots & 0 & 3b_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 4b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots & b_0 & nb_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

şeklinde nxn tipinde matris ve I_n de nxn tipinde birim matris olmak üzere

$$F_n(z) = \det(zI_n - H_n)$$

olarak yazılabilir ve bunun bir sonucu olarak da H_n matrisinin öz değerleri $F_n(z)$ Faber polinomlarının sıfırları olur [10,20].

2.7.2.Teorem

$F_n(z)$ Faber polinomları

$$\Psi(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \dots + \frac{b_k}{w^k} + \dots$$

şeklindeki dönüşüm fonksiyonuna ait Faber polinomları olsun. Faber polinomlarının türevleri için I_n nxn tipinde birim matris ve

$$G_n = \begin{bmatrix} b_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots & b_0 & 1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris olmak üzere

$$F'_{n+1}(z) = (n+1) \det(zI_n - G_n)$$

özelliği sağlanır. Daha açık olarak $F'_{n+1}(z)$ polinomlarının sıfırları G_n matrisinin özdeğerleridir.

İspat :

Faber polinomlarının (1.15) ile verilen üretic fonksiyonun z ye göre türevini, sonra da w ya göre integralini alırsak,

$$\frac{1}{\Psi(w) - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'(z)}{nw^n} \quad (17)$$

elde ederiz.

Diğer taraftan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ serisi

$$d_n = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & 0 \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c \end{vmatrix}}{c_0^{n+1}}$$

olmak üzere

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

şeklinde yazılabildiğinden, (17) ifadesinden

$$\frac{F'_{n+1}(z)}{n+1} = (-1)^n \begin{vmatrix} b_0 - z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 - z & 1 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 - z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 - z \end{vmatrix}$$

bulunur.

Yine Faber polinomlarının türevi

$$F'_{n+1}(z) = (n+1) \det(zI_n - G_n)$$

biçiminde ifade edilebileceğinden, G_n matrisinin özdeğerleri Faber polinomlarının türevinin sıfırlarını verir.

3.BÖLÜM

ELİPS BÖLGELER İÇİN FABER POLİNOMLARININ AÇIK GÖSTERİLİŞLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER POLİNOMLARININ SIFIRLARI

Daha önce yapılmış çalışmalarda, ∓ 1 odaklı elips bölge için Chebseyhev polinomlarına karşılık gelen Faber polinomları elde edilebiliyordu.

Bu kesimde dönüşüm fonksiyonunu elipsin odaklarına göre düzenleyerek, farklı odaklı elipsler için Faber polinomlarını elde edeceğiz.

Diğer taraftan K kontinuumu için genelleştirilmiş Faber polinomlarının sıfırları ile dönüşüm ve ağırlık fonksiyonu tarafından elde edilen P_n matrisinin öz değerleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyup, bunun sonucu olarak, Faber polinomlarının türevinin sıfırlarının da P_n matrisi yardımıyla elde edilebileceğini göstereceğiz.

3.1.Elips Bölgeler İçin Faber Polinomları

$w = \infty$ noktasında basit kutba sahip

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{2w}, \quad |w| > 1 \quad (1)$$

dönüşüm fonksiyonu $w = \infty$ noktası hariç $|w| > 1$ bölgesinde analitiktir.

(1) ifadesinde $w = e^{i\theta}$ alınarak

$$z = \Psi(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{2e^{i\theta}} = \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}i\sin\theta$$

denklemini elde edilir. Bu ifadeyi reel ve sanal kısımlarına ayırarak,

$$x = \frac{3}{2}\cos\theta, \quad y = \frac{1}{2}\sin\theta \quad \text{veya} \quad \frac{x^2}{(3/2)^2} + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1 \quad (2)$$

şeklindeki elips denklemi bulunur.

Sınırların uygunluk ilkesinden, (1) ile verilen fonksiyon $|w| > 1$ bölgesini konform ve tek değerli olarak bu elipsin dışına dönüştürür.

Bu elips bölge ile üretilen Faber polinomlarını elde etmek için üreteç fonksiyonu düzenlenerek,

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \frac{2w^2 - 1}{w(2w^2 - 2zw + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}} \quad (3)$$

eşitliği elde edilir.

Bu durumda z değişkeninin keyfi değerleri için Faber polinomlarını yazmak kolay değildir. Bundan dolayı bu polinomların hesabı için bazı kısıtlamalar yapmak gerekir.

(3) ifadesinde $z = 0$ alınarak,

$$\begin{aligned} \frac{2w^2 - 1}{2w^3 + w} &= \frac{2w^2 - 1}{2w^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2w^2}} = \frac{2w^2 - 1}{2w^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k w^{2k}}, \quad |w| > 1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k w^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1} w^{2k+3}} \end{aligned}$$

şeklindeki açılımı elde ederiz.

Böylece,

$$F_{2k}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} = \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}, \quad k \geq 1$$

$$F_0(0) = 1, F_n(0) = 0, \quad n \neq 2k$$

değerleri bulunmuş olur.

Şimdi dönüşüm fonksiyonunu, elipsin odak noktalarını cinsinden yazalım.

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{rw}, \quad |w| > 1, r > 1 \quad (4)$$

dönüşüm fonksiyonunda $w = e^{i\theta}$ alınarak

$$z = \Psi(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}} = \left(1 + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \sin \theta, \quad r > 1$$

denklemini bulunur. Bu ifadeyi reel ve sanal kısımlarına ayırarak,

$$x = \left(1 + \frac{1}{r}\right) \cos \theta \quad \text{ve} \quad y = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \sin \theta, \quad r > 1 \quad (5)$$

şeklindeki elips denklemi elde edilir.

(5) ifadesindeki elipsin yarı eksen uzunlukları

$$a = 1 + \frac{1}{r} \quad \text{ve} \quad b = 1 - \frac{1}{r}$$

olduğundan, odak noktası

$$c^2 = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 = \frac{4}{r}$$

şeklinde r cinsinden yazılabilir.

Özel olarak, $r = 1$ olması durumunda bölge, $[-2,2]$ aralığına; dönüşüm fonksiyonu ise

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{w}, \quad |w| > 1$$

şekline dönüşür. Bu halde üretilen Faber polinomları,

$$F_n(z) = 2 \cos n(\arccos z/2)$$

şeklindeki Chebyshev polinomlarına karşılık gelir.

Aşağıdaki teorem farklı odaklı elipsler için Faber polinomlarının açık gösterilişlerini vermektedir.

3.1.1. Teorem

E bölgesi, eksen uzunlukları $a = 1 + \frac{1}{r}$ ve $b = 1 - \frac{1}{r}$ olan elips ile sınırlı bölge olsun. Bu bölge ile üretilen n . dereceden Faber polinomları, $n = 1, 2, \dots$ için

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & n = 2k \\ \frac{n-1}{2} & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

olmak üzere

$$F_n(z) = n \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (-1)^j \frac{r^{-j} (n-j-1)!}{j! (n-2j)!} z^{n-2j}$$

şeklinde dir.

İspat :

(4) ile verilen

$$z = \Psi(w) = w + \frac{1}{w}, \quad |w| > 1$$

dönüşüm fonksiyonunun tersi $\Phi(z)$ ise, $\{\Phi(z)\}^n$ fonksiyonunun açılımındaki katsayılar, yeterince büyük R için

$$c_{n-j} = \int_{|z|=R} \frac{\{\Phi(z)\}^n}{z^{n-j+1}} dz \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (6)$$

olmak üzere, (5) elipsleri ile üretilen Faber polinomları,

$$F_n(z) = \sum_{j=0}^n c_{n-j} z^{n-j}$$

ile verilir ve söz konusu elipsler $|z| = R$ ile sınırlı bölgenin içinde kalırlar.

(6) ifadesine alternatif olarak, $z = \Psi(w)$ kullanılarak, $j = 0, 1, \dots, n$ için

$$c_{n-j} = \int_{|w|=r>1} \frac{w^n \Psi'(w)}{[\Psi(w)]^{n-j+1}} dw$$

katsayılarını elde ederiz.

Elips bölgenin simetrikliğinden dolayı $j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ için

$$j \neq 0 \pmod{2} \text{ ise } c_{n-j} = 0$$

çıkar. Böylece $F_n(z)$ Faber polinomları,

$$F_n(z) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} c_{n-2j} z^{n-2j}$$

şeklinde yazılabilir. Cauchy teoreminden c_{n-2j} katsayılarının,

$$\frac{w^n \Psi'(w)}{[\Psi(w)]^{n-2j+1}}$$

açılımında $\frac{1}{w}$ nın katsayıları ile aynı olduğunu görülür. (4) ifadesinden

$$\begin{aligned} \frac{w^n \Psi'(w)}{[\Psi(w)]^{n-2j+1}} &= \frac{w^n (1 - 1/rw^2)}{w^{n-2j+1} (1 + 1/rw^2)^{n-2j+1}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{rw^2}\right) \left(1 + \frac{1}{rw^2}\right)^{2j-n-1} w^{2j-1} \end{aligned}$$

elde edilir. $|w| > 1$ için

$$\binom{n}{k} = n(n+1) \dots (n+k-1)$$

ve

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{-1} = 0$$

olmak üzere,

$$\left(1 + \frac{1}{rw^2}\right)^{-(n-2j+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n-2j+1}{k} \frac{w^{-2k}}{k!} r^{-k}$$

açılımından $\frac{1}{w}$ nın katsayıları,

$$\begin{aligned}
c_{n-2j} &= (-1)^j \binom{n-2j+1}{j} \frac{r^{-j}}{j!} - (-1)^{j-1} \binom{n-2j+1}{j-1} \frac{r^{-j}}{(j-1)!} \\
&= (-1)^j \frac{r^{-j}}{j!} n(n-2j+1)(n-2j+2)\dots[(n-2j+1)+(j-2)] \\
&= (-1)^j \frac{r^{-j} n(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

3.2.Genelleştirilmiş Faber polinomlarının Sıfırları

K kontinuumu için genelleştirilmiş Faber polinomlarının sıfırları ile P_n matrisinin öz değerleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymaya çalışacağız.

3.2.1.Teorem

$F_n(z; g)$ genelleştirilmiş Faber polinomu ($g(\infty) = \alpha_0 > 0$),

$$\Psi(w) = \beta w + \beta_0 + \beta_1 w^{-1} + \dots + \beta_n w^n + \dots, \quad |w| > 1$$

ve

$$g[\Psi(t)] \Psi'(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{t} + \dots + \frac{\alpha_n}{t^n} + \dots$$

olsun.

Bu durumda

$$P_n = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \beta_0 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 - \beta_1 \alpha_0 & \beta_0 & \beta & \dots & 0 \\ \alpha_3 - \beta_2 \alpha_0 & \beta_1 & \beta_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - \beta_{n-1} \alpha_0 & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \dots & \beta_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

şeklinde $n \times n$ tipinde matris ve I_n de $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere

$$F_n(z; g) = \frac{1}{\beta^n} [\det(z I_n - P_n)]$$

şeklinde yazılabilir.

Daha açıkçası P_n matrisinin öz değerleri, genelleştirilmiş Faber polinomlarının sıfırlarını verir.

İspat :

Genelleştirilmiş Faber polinomlarının (1.70) ifadesindeki determinant formunda n .sütunu birinci sütunla değiştirerek, I_n $n \times n$ tipinde birim matris ve P_n yukarıdaki gibi olmak üzere

$$F_n(z; g) = (-1)^n \frac{1}{\beta^n} \det(P_n - z I_n)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\det(P_n - z I_n) = (-1)^n \det(z I_n - P_n)$$

özdeşliği ile beraber

$$F_n(z; g) = \frac{1}{\beta^n} [\det(z I_n - P_n)]$$

çıkar ki bu da gösterilmek istenen şeydir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak Faber polinomlarının türevinin sıfırlarını elde edebiliriz.

3.2.2.Sonuç

3.2.1. Teoreminin hipotezi altında

$$g(z) = \Phi'(z) \quad (8)$$

olmak üzere $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$F'_{n+1}(z) = (n+1)F_n(z; g)$$

ve

$$g(\infty) = \alpha_0 = \gamma, \quad g[\Psi(t)] \Psi'(t) = 1$$

elde edilir. Gerçekten, genelleştirilmiş Faber polinomlarının üreteç fonksiyonundan

$$\frac{1}{\Psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z; g)}{t^{n+1}} \quad (9)$$

eşitliği yazılabilir. (8) ifadesinin t ye göre türevi

$$\begin{aligned} \frac{\Psi'(t)}{[\Psi(t) - z]^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)F_n(z; g)}{t^{n+2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nF_{n-1}(z; g)}{t^{n+1}} \end{aligned}$$

olup, adi Faber polinomlarının üreteç fonksiyonun z ye göre türevi ile karşılaştırarak

$$F'_n(z) = nF_{n-1}(z; g) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$F'_{n+1}(z) = (n+1)F_n(z; g) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir.

(8) ifadesinin seçimi sonucunda, 3.2.1. Teoremden verilen α katsayıları

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$$

özelliğini sağlar. Dolayısıyla (7) ile verilen ifadeden Faber polinomlarının türevi için

$$P_n = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 \alpha_0 & \beta_0 & \beta & \dots & 0 \\ \beta_2 \alpha_0 & \beta_1 & \beta_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n-1} \alpha_0 & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \dots & \beta_0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir ki burada He M.[14] çalışmasında geçen matris ile aynıdır.

3.2.2. Teorem

E bölgesi m -simetrik ve $g(z)$ ağırlık fonksiyonu

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{mk}}{z^{mk}}, \quad c_0 > 0$$

şeklinde olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Faber polinomlarının sıfırlarının kümesi de m -simetrik.

İspat :

E bölgesi m -simetrik olduğundan

$$\Phi(z) = z \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{mk-1}}{z^{mk}} \right)$$

ve

$$\Phi^n(e^{\frac{2\pi i}{m}} z) = e^{\frac{2\pi ni}{m}} \Phi^n(z)$$

olarak yazılabilir. Bunun yanında

$$g(z) = g(e^{\frac{2\pi i}{m}} z)$$

olduğundan

$$g(e^{\frac{2\pi i}{m}} z) \Phi^n(e^{\frac{2\pi i}{m}} z) = e^{\frac{2\pi i}{m}} g(z) \Phi^n(z)$$

ve

$$F_n(e^{\frac{2\pi i}{m}} z; g) = e^{\frac{2\pi i}{m}} F_n(z; g)$$

çıkar. Sıfıra eşit olmayan z_j değerleri genelleştirilmiş $F_n(z; g)$ Faber polinomlarının sıfırları olmak üzere $k = 0, 1, \dots, m-1$ için

$$F_{mn+k}(z; g) = z^k \prod_{j=1}^n (z^m - z_j^m)$$

şeklinde yazılabilir ki buda gösterilmek istenendir.

$g(z)$ ağırlık fonksiyonunun özel seçimleri için aşağıdaki durumlar elde edilebilir.

3.2.1.Sonuç

i) $g(z) = 1$ olarak alınması durumunda genelleştirilmiş $F_n(z; g)$ Faber polinomları, adi Faber polinomlarından oluşacak ve 2.6.4. Teoremi sağlanacaktır.

ii) m -simetrik bölge için $g(z) = \Phi'(z)$ seçilirse bu halde

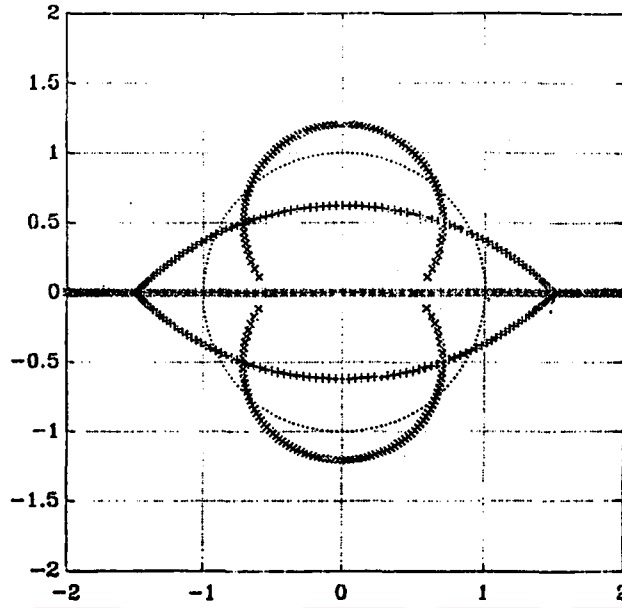
$$\Phi'(z) = \Phi'(e^{\frac{2\pi i}{m}} z)$$

ve

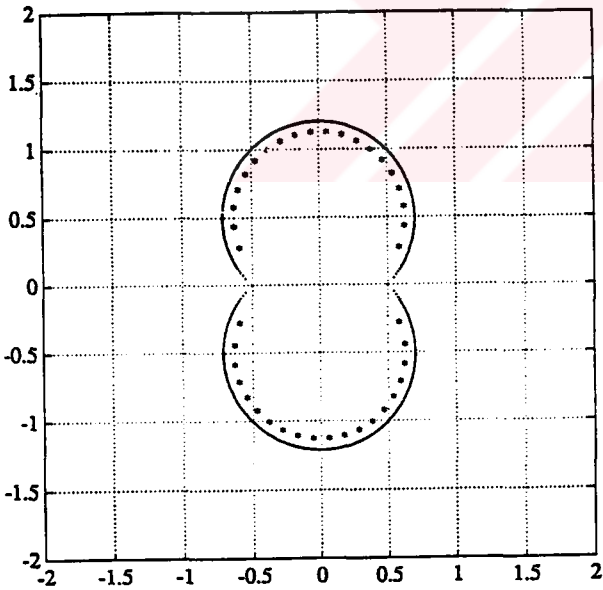
$$F'_{n+1}(z) = (n+1)F_n(z; g)$$

olur ki bu da Faber polinomlarının türevlerinin sıfırlarının kümesinin de m -simetrik olduğunu gösterir.

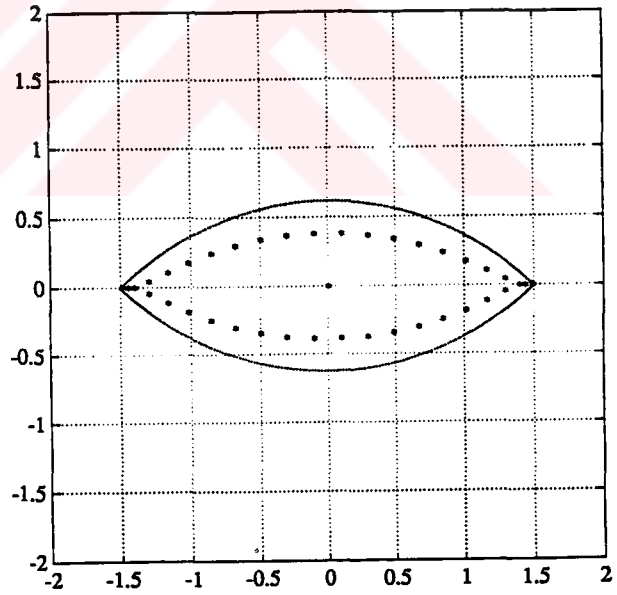
ŞEKİL LİSTESİ



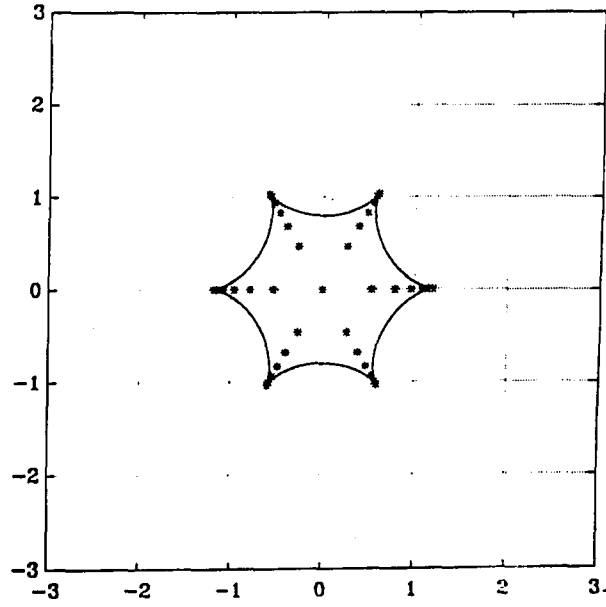
Şekil 1. $\psi(w)$ altında $|w| > 1$ 'in görüntüleri
 $\alpha=1$ (\cdot), 2 (*), $1/2$ (x), $3/2$ (+).



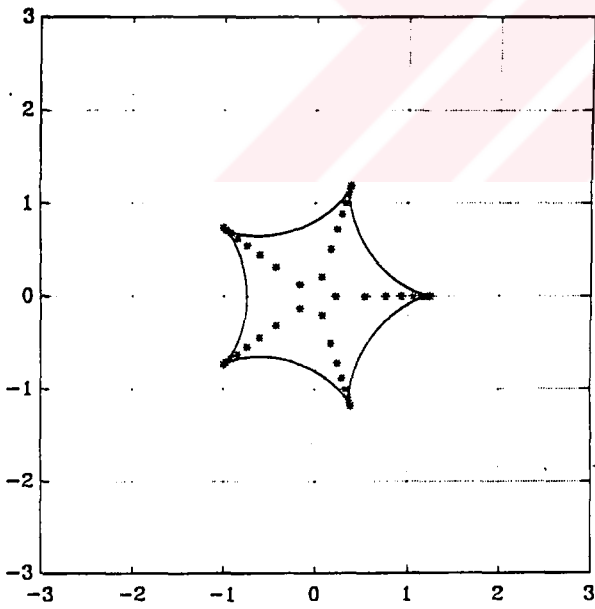
Şekil 2. $n=40$ için $D_{1/2}$ bölgesinin
 Faber polinomlarının sıfırları (*)



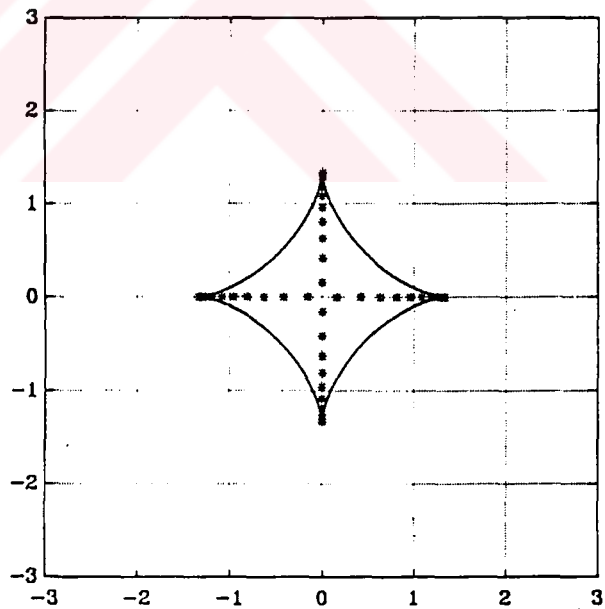
Şekil 3. $n=39$ için $D_{3/2}$ bölgesinin
 Faber polinomlarının sıfırları (*)



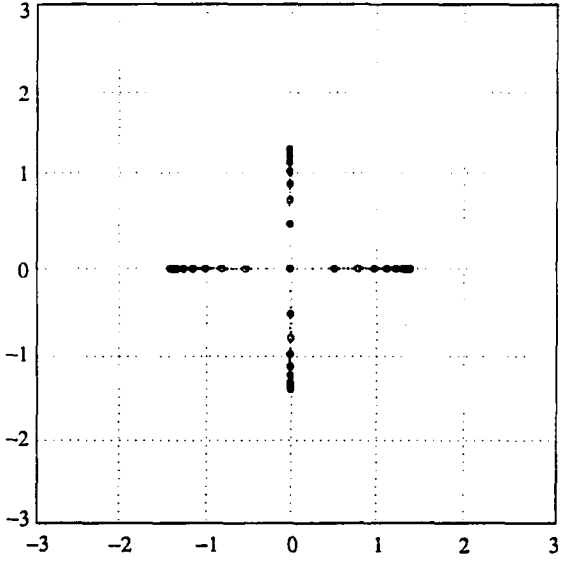
Şekil 4. $n=40$ için 6 köşeli hiposikloid bölgenin Faber polinomlarının sıfırları (*)



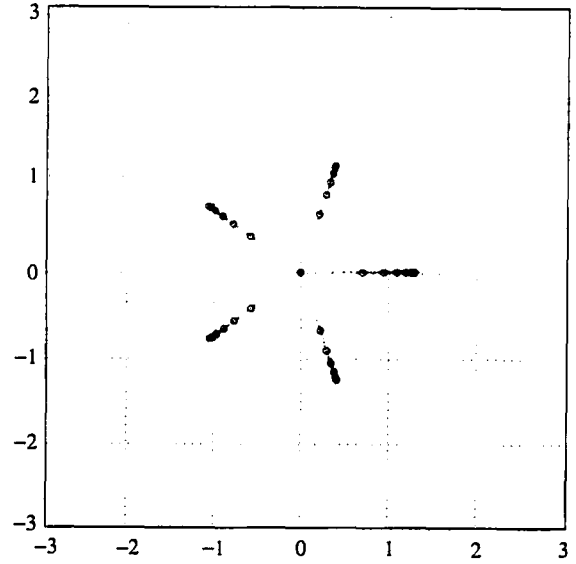
Şekil 5. $n=40$ için 5 köşeli hiposikloid bölgenin Faber polinomlarının sıfırları (*)



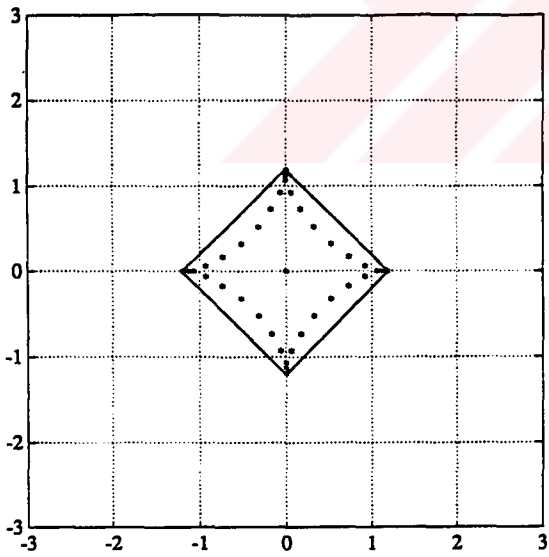
Şekil 6. $n=40$ için 4 köşeli hiposikloid bölgenin Faber polinomlarının sıfırları (*)



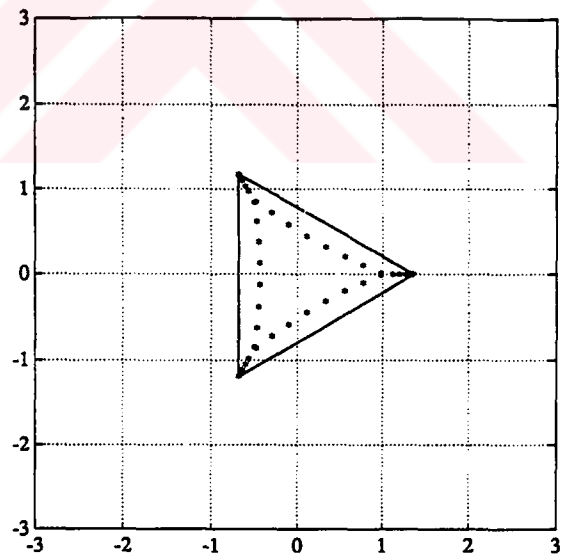
Şekil 7. $n=33$ için S_4 ile üretilen
Faber polinomlarının sıfırları (•)



Şekil 8. $n=32$ için S_5 ile üretilen
Faber polinomlarının sıfırları (•)



Şekil 9. $n=39$ için G_4 ile üretilen
Faber polinomlarının sıfırları (*)



Şekil 10. $n=39$ için G_3 ile üretilen
Faber polinomlarının sıfırları (*)

KAYNAKLAR

- [1] COLEMAN, J. P. , SMITH R. A. , 1987. The Faber Polynomials for Circular Sectors, Math.Computation vol.49 no: 179 , 231-241.
- [2] COLEMAN, J. P. , MYERS N. J. , 1995. The Faber Polynomials for Annular Sectors, Math.Computation vol.64 no: 209 , 181-203.
- [3] CURTISS, J. , 1971. Faber polynomials and the Faber Series, American Math. Monthly 78 , 577-596.
- [4] EIERMANN, M. , VARGA , R.S. , 1993. Zeros and Local Extreme Points of Faber Polynomials associated with Hypocycloidal Domains, Electric Trans. On Numer. Anal. 1 , 49-71.
- [5] ELLACOTT, S. W. , 1983. Computation of Faber Series with Application to Numerical Polynomial Approximation in the Complex Plane, Math. Computation vol.40 , 575-587.
- [6] GAIER, D. , 1987. Lectures on Complex Approximation, Birkhäuser, BOSTON
- [7] GOODMAN , A. W. , 1975. A note on the Zeros of Faber Polynomials Proc. Amer. Math. Soc. 49 , 407-410.
- [8] GATERMANN, K. , HOFFMANN, C. and OPFER, G. , 1992. Explicit Faber Polynomials on Circular Sectors, Math. Comp. vol.58 no:197 , 241-253.
- [9] HASSON, M., WALSH, B. , 1997. Singular Points of Analytic Functions Expanded in a Series of Faber Polynomials, Rocky Mountain J.Math. 27 no:3 , 817-825.
- [10] HE , M. , 1993. Numerical Results on the Zeros of Faber Polynomials for m -fold Symmetric Domains, Lectures in Applied Math. vol.29 , 229-240
- [11] HE , M. , 1994-a. The Faber Polynomials for m -fold Symmetric Domains, Journal of Comp. and Applied Math. 54, 313-324.
- [12] HE , M. , SAFF , E. B. , 1994-b. The Zeros of Faber Polynomials for an m -cusped Hypocycloid, Journal of Approximation Theory vol.78 no:3 , 410-432.
- [13] HE , M. , BARTOLOMEO J. , 1994-c. On Faber Polynomials Generated by m -star Math. Comp. vol.62 no:205 , 277-287.
- [14] HE , M. , 1995. The Faber Polynomials for Circular Lunes, Computers Math. Applic. vol.30 no:3-6 , 307-315.
- [15] HE , M. , 1996. Explicit Representations of Faber Polynomials for m -cusped Hypocycloids , Journal of Approximation Theory vol.87 no.2 , 137-147.

- [16] KUIJLAARS, A. B. J. , 1995-a. Asymptotic Distribution of the Zeros of Faber Polynomials, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 118 , 437-477.
- [17] KUIJLAARS, A. B. J. , 1995-b. Chebyshev- type Quadrature and Zeros of Faber Polynomials, Journal of Comp. and Applied Math. 62 , 155-179.
- [18] KUIJLAARS, A. B. J. , SAFF, E. B. , 1996. The Zeros of Faber Polynomials Generated by m -star, Math. Comp. vol.65 no:213 , 151-156.
- [19] KÖVARI, T. , POMMERENKE, C. H. , 1967. On Faber Polynomials and Faber Expansions, Math. Zeitschr. 99 , 193-206.
- [20] LIESEN, J. , 2000. On the Location of the Zeros of Faber Polynomials, Analysis vol. 20 no:2 157-162.
- [21] LANCZOS , 1987. Polynomial Approximation in Complex Plane, J.Comp. Appl. Math. 18 , 193-211
- [22] MARCUSHEVICH, A. I. , 1977. Theory of Functions of a Complex Variable. vol.3 Chelsea, NEW YORK.
- [23] PAPAMICHAEL, N. , SOARES, M. J. and STYLIANOPOULOS N. S. 1993. A Numerical Method for the Computation of Faber Polynomials for Starlike Domains, I.M.A. J. Numer. Anal. vol.13 , 181-193.
- [24] SUETIN, P. K. , 1998. Series of Faber Polynomials, Gordon and Breach Science Publishers, AMSTERDAM
- [25] SMIRNOV, V. I. , LEBEDEV, N. A. , 1968. Functions of a Complex Variable. Constructive Theory , LONDON.
- [26] ULLMAN, J. L. 1972. The Location of the Zeros of the Derivatives of Faber Polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 34 , 422-424.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı :Bilal ÇEKİÇ
Doğum Tarihi :18.05.1975
Doğum Yeri :Diyarbakır
Medeni Hali :Bekar
Ünvanı :Arş.Gör.
Üniversite :Dicle Üniversitesi
Fakülte :Fen-Edebiyat
Bölüm :Matematik
Anabilim Dalı :Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Eğitimi

Orta Öğretim :Diyarbakır Ziya Gökalp Lisesi

Lisans :Dicle Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi, 1992-1997

Çalıştığı Kurumlar :Milli Eğitim Bakanlığı
Ergani Anadolu Öğr. Lisesi, 1998-1999
Dicle Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2000-

Adres

İş :Dicle Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü
21280-Diyarbakır
Tlf. No: 0 412 248 85 50-3149

Ev :Emek Cad. Çolak S.
Bel-Kent Koop. E Blk 1/3
21090-Diyarbakır