T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
N BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEGATİF VE EKSİK KATSAYILI -KATLI FONKSİYONLARIN BİR ALT SINIFI

SEVTAP SÜMER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR
ŞUBAT-2003

T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

DİYARBAKIR

Bu çalışma, jürimiz tarafından **M A T E M A T İ K** Anabilim Dalı'nda **Y Ü K S E K L İ S A N S** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin Ünvanı,		Adı Soyadı
Başkan :	Yrd. Doç. Dr.	H. Özlem GÜNEY (Danışman)
Üye :	Prof. Dr.	H. İlhan TUTALAR
Üye :	Doç. Dr.	Sezai OĞRAŞ
Yedek Üye :	Yrd. Doç. Dr.	Abdulkadir ERTAŞ

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

03.03/2003

Prof. Dr. Çetin AYTEKİN

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Öğrencisi olduğum için kendimi ayrıcalıklı bulduğum ve her zaman gurur duyduğum, her konuda desteğini ve ilgisini hep yanımda hissettiğim, sadece bir hoca değil, bir abla ve çok iyi bir dost olan, tanıdığım en özel insanlardan biri, sayın danışman hocam,

Yrd.Doç. Dr. H.Özlem GÜNEY' e

Bana matematiği anlamayı ve matematikçi olmayı öğreten, kendisine her zaman hayranlık duyduğum sayın hocam,

Prof.Dr. H.İlhan TUTALAR'a

Gerek lisans gerekse yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgilerinden faydalanma şansını yakaladığım sayın hocam,

Doç. Dr Sezai OĞRAŞ'a

Tezin yazımı aşamasında hep yanımda olan, benimle birlikte bıkmadan usanmadan koşuşturan, benden hiçbir yardımı esirgemeyen sevgili ***Mehtap-Ali ÇAKIR*** ve ***Ali Fuat EKER'e***

En önemlisi, bana duydukları sevgi, anlayış ve güvenle beni bugünüme getiren, hayatımda onlardan daha değerli hiçbir şey olmadığına tüm kalbimle inandığım ***anneme ve babama***

Sonsuz teşekkürler....

Sevtap SÜMER

İÇİNDEKİLER

A M A Ç

Son zamanlarda Yalınkat ve p-katlı Fonksiyonlar Kuramı, karmaşık analiz alanında çalışan pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Herhangi bir fonksiyonun yalınkat veya p-katlı olması durumu, bu fonksiyonun davranışının belirlenmesinde oldukça önemli rol oynamaktadır.

Bu çalışmadaki amacımız, öncelikle, yalınkat ve p-katlı fonksiyonların tanımlanan altsınıflarını incelemek, sonra p-katlı fonksiyonların bu sınıflarla örtüşmeyen yeni bir altsınıfını tanımlamak ve bu sınıf ile ilgili bazı teoremleri ispatlamaktır.

Bir diğer amacımız ileride bu alanda çalışacak araştırmacılara yol gösterici bir kaynak oluşturmaktır.

Ö Z E T

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, yalınkat ve p-katlı fonksiyonların tanımları, onlarla ilgili teoremler ve bunların sonuçları ile bu tip fonksiyonların bilinen sınıflarının bazı önemli altsınıfları verilmektedir. Bundan başka Subordinasyon İlkesi verilerek, tanımlanacak olan yeni alt sınıfa bir taban oluşturulmaktadır.

Çalışmamıza temel oluşturan yalınkat, p-katlı, meromorfik yalınkat ve meromorfik çok katlı fonksiyonların bazı altsınıfları *ikinci bölümde* incelenmektedir.

Birinci ve ikinci bölümlerde, gereksiz tekrarlardan kaçınmak ve konunun bütünlüğünü bozmamak amacıyla, ispatlar için doğrudan ulaşılabilecek kaynak gösterilmesi yoluna gidilmiştir.

Çalışmamızın esas kısmını oluşturan *üçüncü bölümde,* negatif ve eksik katsayılı p-katlı fonksiyonlar sınıfının yeni bir altsınıf tanımlanmaktadır. Ayrıca bu sınıf ile ilgili Katsayı Kestirimi, Bükülme ve Kapalılık Özellikleri ayrıntılı olarak gösterilmektedir. Bundan başka, bu sınıf için Konvekse-yakınlık, Yıldızıllık ve Konvekslik Yarıçapları hesaplanmaktadır.

ABSTRACT

This study consists of three chapters.

In the *first chapter*, the definition of univalent and p-valent functions, the theorems and their results connected to them and some their important subclasses of known classes of such functions are given. Moreover, by giving subordination principle, a base for a new subclass which will be defined is formed.

Some subclasses of univalent, p-valent, meromorphic univalent and meromorphic p-valent functions which will be a support in our study are investigated in the *second chapter*.

In the first and second chapters, by the aim to avoid unnecessary repeats and not to damage the completeness of topics, to be straightforward obtained references are prefered.

In the *third chapter* which consists of the main part of our study, a new subclass of p-valent functions with negative and missing coefficients is defined. Furthermore, coefficient estimates, distortion and closure properties concerned with this class are shown with details. Moreover, radius of close-to-convexity, starlikeness and convexity for this class are calculated.

SEMBOLLER

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}$: Gerçel Sayılar Kümesi

$\mathbb{C}$: Karmaşık Sayılar Kümesi

U : $\{ z : |z| < 1 \}$, Birim disk

U^* : $\{ z : 0 < |z| < 1 \}$, Delinmiş disk

$\mathcal{A}(D)$: D Bölgesinde Analitik Fonksiyonlar Kümesi

S : Normalleştirilmiş Yalınkat Fonksiyonlar Sınıfı

Δ : Birim diskin dışı

Σ : Δ Bölgesinde Tanımlı Yalınkat Fonksiyonlar

Σ' : Σ Sınıfında Sıfır Olmayan Fonksiyonlar Sınıfı

S^* : Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı

C : Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

$\wp$: Pozitif Gerçel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı

K : Konvekse-Yakın Fonksiyonlar Sınıfı

$f \prec g$: f Fonksiyonu g Fonksiyonuna Subordine

S_p^* : p-katlı Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı

C_p : p-katlı Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

K_p : p-katlı Konvekse-Yakın Fonksiyonlar Sınıfı

$S_p^*(\alpha)$: α-mertebeli p-Katlı Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı

$C_p(\alpha)$: α-mertebeli p-Katlı Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

$S_{(p)}^*(\alpha)$: α-mertebeli Meromorfik Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı

$C_{(p)}(\alpha)$: α-mertebeli Meromorfik Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

ÖNSÖZ

Karmaşık Analizin, özellikle amacı fonksiyonun analitik özellikleri ile analitik bir fonksiyonun görüntüsünün geometrik özellikleri arasındaki bağıntıyı anlatmak olan, zarif bir dalı Geometrik Fonksiyonlar Kuramıdır. U açık birim diskinde analitik bir f fonksiyonunun bir w değerine karşılık $w=f(z)$ denklemi ya birden çok çözümü ya p-den daha çok çözümü ya da en çok p çözümü vardır. Bu durumda, f fonksiyonuna $|z|<1$ bölgesinde sırasıyla yalınkat, p-katlı ya da orta(lama) p-katlı fonksiyon denir. Bu çalışmada yalınkat ve p-katlı fonksiyonlar ele alınmaktadır.

Son yüzyılda ortaya çıkan ve üzerindeki çalışmaların özellikle yakın yıllarda hızlandığı yalınkat ve p-katlı fonksiyonlar kuramı, karmaşık analizde kendine önemli bir yer edinmiştir. Yalınkat fonksiyonlar, bu kuramın klasik durumunu ifade eder. Yalınkat fonksiyonlar Kuramı, tek karmaşık değişkenli analitik fonksiyonların çalışılmasında önemli bir kısmı oluşturur. Teorinin esası, karmaşık düzlemin uygun bir altkümesi olan, basit bağlantılı bir Ω bölgesinin, U açık birim diskine bire-bir örten ve analitik olarak eşdeğer olduğunu doğrulayan ünlü Riemann Dönüşüm Teoremine (R.D.T) dayanır. Bu, analitik, 1:1 ve örten bir $f:\Omega \rightarrow U$ yalınkat fonksiyonun varolması demektir. Birim diskte tanımlanan yalınkat fonksiyonlara yapılan kısıtlama R.D.T. ile doğrulanır. Yalınkat fonksiyonlar Kuramı, P. Koebe, L. Bieberbach, K. Loewner, G.M. Goluzin, H. Grunsky ve M. Schiffer gibi ünlü pek çok matematikçi tarafından geliştirilmiş temel teknikler ile elde edilen pek çok yararlı sonuç içerir.

Yalınkat ve p-katlı fonksiyonların, basit geometrik özellikler ile tanımlanmış bazı özel altsınıfları mevcuttur. Bu altsınıflar incelenirken, geometrik fonksiyon Kuramı ile yalınkat fonksiyonlar Kuramının birleştiği unutulmamalıdır. Bu altsınıfların, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar ve subordinasyon ile yakından ilgileri vardır. Son yıllarda önemli gelişmeler kaydeden ve karmaşık analizde önemli rol oynayan subordinasyon kavramı, ilk olarak, E. Lindelöf tarafından ortaya atılmış, ancak temel bağıntılar J.E. Littlewood ve W.W. Rogosinski tarafından geliştirilmiştir. Subordinasyon kavramı, bir baskınlık durumu olarak düşünülebilir.

Yalınkat fonksiyonların altsınıflarının en öncelikli örneği, $U=\{z : |z|<1\}$ birim diskinde analitik, yalınkat ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalleştirilmiş fonksiyonların oluşturduğu, S sınıfı olarak bilinir. Bu sınıfa ait fonksiyonların katsayıları için, uzun yıllar bir tahmin olarak kalan ve 1984 yılında Louis de Branges tarafından ispatlanan ünlü Bieberbach Kestirimi önemli yer tutar. S sınıfının iki önemli altsınıfı konveks ve yıldızıl (yıldız-şekilli) fonksiyonların sınıflarıdır. Bu altsınıflar kullanılarak tanımlanabilen bir diğer sınıf ta konvekse-yakın fonksiyonlar sınıfı olarak bilinir. Bu sınıfların α-mertebeli olma durumları da ilginçtir.

Yalınkat fonksiyonların altsınıflarına benzer olarak, p-katlı fonksiyonların da p-katlı konveks, p-katlı yıldızıl ve p-katlı konvekse-yakın fonksiyon sınıfları tanımlanmıştır ve özellikle M.S. Robertson, A. Schild, T.H. MacGregor, B. Pinchuk ve I.S. Jack tarafından ilgilenilmişlerdir. Bu sınıflar için de α-mertebeli olma durumu tanımlanabilir. Ayrıca meromorfik yalınkat ve meromorfik çok katlı fonksiyonlar üzerinde de genelde M.K. Aouf, M.L. Morga, B.A. Uralegaddi, M.D. Ganigi, J.E. Miller, C.H. Pommerenke ve J. Clunie çalışmışlardır. Bu tipteki fonksiyonların da yalınkat ve p-katlı fonksiyonların altsınıflarına benzer altsınıfları verilmiştir.

Günümüzde, başta S. Owa ve M.K. Aouf olmak üzere bu kuram ile ilgilenen karmaşık analizciler, yalınkat, p-katlı, meromorfik yalınkat ya da meromorfik çok katlı fonksiyonların pozitif, negatif veya eksik katsayılı bazı ilginç altsınıflarıyla ilgilenerek, bu sınıflardaki fonksiyonların katsayıları ve modülleri için sınırlar elde etmişlerdir. Bu çalışma boyunca da ilginç bulunan birçok çalışma incelenmiş ve bu çalışmalara benzer olarak pozitif ve eksik katsayılı p-katlı fonksiyonların yeni bir altsınıfı tanımlanarak, bu sınıfa ait teoremler verilmiştir.

1. B Ö L Ü M

YALINKAT VE ÇOK KATLI FONKSİYONLAR

Bu bölümde sırası ile yalınkat ve çok katlı fonksiyonlar ile bazı altsınıfları için birtakım önemli tanımlar, teoremler ve bunların sonuçları verilmektedir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bir bölge, açık bağlantılı bir kümedir. Bir D bölgesinde düzenli bir f fonksiyonuna D ***bölgesinde yalınkattır*** denmesi, f'in D deki farklı z değerleri için farklı w değer çiftleri karşılık getirmesi anlamına gelir. Bu durumda, $w=f(z)$ denklemi, her w değeri için D bölgesinde en fazla bir köke sahiptir. Böyle fonksiyonlar, D bölgesini bire-bir ($1:1$) ve konform olarak, w-düzlemindeki bir bölge üzerine dönüştürür.

Yalınkatlık için bir başka tanım aşağıdaki gibi verilebilir.

Herhangi bir D bölgesinde ve en fazla bir kutup noktası hariç tüm düzlemde analitik bir f fonksiyonu için, $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere,

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

önermesi doğru oluyorsa, yani f fonksiyonu bu bölgede, bir tek noktada aynı değeri iki kez almıyorsa f fonksiyonuna D ***bölgesinde yalınkattır*** denir. D bölgesindeki yalınkatlık doğal olarak D bölgesinin her alt bölgesinde de sağlanır. Bir D bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu, bir $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda yalınkat ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında ***yerel yalınkat fonksiyon*** denir. Analitik bir f fonksiyonu için $f'(z_0) \neq 0$ koşulu, z_0 noktasında yerel yalınkatlığa eşdeğerdir. Bir bölgede yerel yalınkat olan bir analitik fonksiyon yalınkat olmayabilir. Örneğin, $f(z)=z^2$ fonksiyonu $D=\left\{z:1<|z|<2\,,\,0<\arg z<3\pi/2\right\}$ bölgesinde yerel yalınkattır ancak yalınkat değildir.

$U=\{z: |z|<1\}$ birim diskinde analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş yani, $f(0)=f'(0)-1=0$ koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Her $f\in S$ fonksiyonu,

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilebilir. Bununla beraber, bir $f\in S$ fonksiyonu ile birlikte temel dönüşümler olarak bilinen eşlenik, dönme, genişleme, disk otomorfizmi, erim, atılmış değer ve karekök dönüşümleri kullanılarak elde edilen aşağıdaki gibi tanımlı $g:U\to\mathbb{C}$ fonksiyonları da S sınıfındadır:

1. $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ (*Eşlenik alma*)
2. $g(z)=e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$ (*Dönme*)
3. $g(z)=r^{-1}f(rz)\;\; 0<r<1$ (*Genişleme*)
4. $g(z)=\dfrac{f\left(\dfrac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)-f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)}\;,\; |\alpha|<1$ (*Disk Otomorfizmi*)
5. ψ, $\psi(0)=\psi'(0)-1=0$ koşullarını sağlayan ve f nin görüntüsü üzerinde analitik ve yalınkat bir fonksiyon olmak üzere
   $g(z)=(\psi\circ f)(z)$ (*Erim*)
6. $f(z)\neq w$ olmak üzere $g(z)=\dfrac{wf(z)}{w-f(z)}$ (*Atılmış Değer*)
7. $g(z)=\sqrt{f(z^2)}$ (*Karekök*).

S sınıfındaki fonksiyonların en öncelikli örneği olan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=z+2z^2+3z^3+\cdots$$

şeklinde Taylor serisi açılımına sahip $K(z)=z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu, $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskini $-1/4$ den ∞ a kadar kesilmiş düzlem üzerine konform olarak dönüştürür.

Gerçekten, Koebe fonksiyonu,

$$K(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\frac{1}{4}$$

olarak tekrar düzenlendiğinde ve $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun U bölgesini konform olarak $\mathrm{Re}\{w\}>0$ bölgesine dönüştürdüğü düşünüldüğünde, yukarıdaki ifadenin doğru olduğu görülür.

Rezidüsü 1 olan, sonsuz basit bir kutup hariç, U bölgesinin dışı olan $\Delta=\{z:|z|>1\}$ bölgesinde analitik ve yalınkat

$$g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots=z+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^{-n}$$

fonksiyonlarının sınıfı Σ ile gösterilir. Bu sınıf, S sınıfı ile yakından ilgilidir. Her bir $g\in\Sigma$ fonksiyonu, Δ bölgesini tıkız bağlantılı bir E bölgesinin tümleyeni üzerine dönüştürür.

Σ sınıfında $g(z)\neq 0$ yani $0\in E$ koşullu fonksiyonların kümesi Σ' ile gösterilir. Herhangi bir $g\in\Sigma$ fonksiyonu, sabit b_0 teriminin uygun bir şekilde ayarlanması ile Σ' sınıfına ait olur. Böyle bir ayarlama sadece g fonksiyonunun görüntüsünü değiştirecek ve g fonksiyonunun yalınkatlığını bozmayacaktır.

Her bir $f\in S$ fonksiyonundan ters dönme uygulanarak elde edilen fonksiyon Σ' sınıfına aittir. Gerçekten, her bir $f\in S$ için,

$$g(z)=\left\{f\left(\frac{1}{z}\right)\right\}^{-1}=z-a_2+(a_2^2-a_3)z^{-1}+\cdots$$

fonksiyonu Σ' sınıfına aittir. Diğer taraftan, bu ters dönme dönüşümü, doğal olarak S ve Σ' sınıfları arasında bire-bir bir eşlemedir. Σ' sınıfı,

$$G(z)=\sqrt{g(z^2)}$$

karekök dönüşümü altında korunur. Bu her $g\in\Sigma$ için uygulanamaz, ancak $g\in\Sigma'$ olması durumunda olanaklıdır. Çünkü karekök, $g(z^2)=0$ iken bir branş noktasına sahip olacaktır.

$|z|>1$ olmak üzere, $g(z)=z+b_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ fonksiyonunun yalınkatlığı b_n, $(n=1,2,\ldots)$ Laurent katsayılarının ölçüsü üzerine kuvvetli sınırlama getirir. Bu durum yalınkat fonksiyonlar kuramında temel olan Alan Teoremi olarak bilinir. Bu teorem 1914 yılında Gronwall tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 1.1.1 (Alan Teoremi)

Σ sınıfından alınan her g fonksiyonu için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \le 1$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik, g fonksiyonunun, $b_0 \in \mathbb{C}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $g(z)=z+b_0+e^{2i\alpha}z^{-1}$ olarak seçilmesi durumunda gerçeklenir [29]. ◆

S sınıfına ait bir f fonksiyonunun a_2 (ikinci) katsayısını hesaplamak için verilen Bieberbach Teoremi yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli yer tutar.

Teorem 1.1.2 (Bieberbach Teoremi)

S sınıfından alınan her f fonksiyonu için $|a_2|\le 2$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik için, f in Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir [29]. ◆

Bieberbach Teoreminin ilk uygulaması, Koebe'ye ait ünlü bir örtme teoremidir. Her bir $f \in S$ fonksiyonu $f(0)=0$ koşullu açık bir dönüşüm olduğundan f fonksiyonunun görüntüsü orjinde merkezli en az bir diski kapsar: 1907 yılında Koebe, ρ mutlak bir sabit olmak üzere, S sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntü kümelerinin, ortak bir $|w|<\rho$ diski kapsadıklarını göstermiştir. Koebe fonksiyonu, $\rho \le 1/4$ olmasını gerektirir. Daha sonra, Bieberbach [29], ρ sabitinin $1/4$ alınabileceği şeklindeki Koebe Kestirimini ispatlamıştır.

Teorem 1.1.3 (Koebe Dörtte Bir Teoremi)

S sınıfındaki her fonksiyonun değer kümesi, $\{w : |w|<1/4\}$ diskini kapsar. ◆

Bieberbach'a ait $|a_2| \le 2$ eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrik teorisinde daha ileri uygulamalara sahiptir. En önemli sonuç, $f \in S$ iken $|f'(z)|$ için kesin üst ve alt sınırlar veren Koebe Bükülme Teoremidir. Bükülme Terimi, geometrik olarak, $|f'(z)|$ nin f dönüşümü altında sonsuz küçük büyütme çarpanı ya da $|f'(z)|^2$ Jacobien'inin alanın sonsuz küçük büyütme çarpanı olması gerçeğinden çıkmıştır.

Teorem 1.1.4 (Bükülme Teoremi)

Her bir $f \in S$ ve $|z|=r<1$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır [29]. ◆

Teorem 1.1.5 (Büyüme Teoremi)

Her bir $f \in S$ ve $|z|=r<1$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır [29]. ◆

Kimi durumlarda daha kullanışlı olan aşağıdaki teoremde, Büyüme ve Bükülme Teoremlerinin birleştirilmiş olduğu bir diğer eşitsizlik verilmektedir.

Teorem 1.1.6

S sınıfındaki her bir f fonksiyonu için $|z|=r<1$ olmak üzere

$$\frac{1-r}{1+r} \le \left|\frac{z f'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+r}{1-r}$$

olur [29]. ◆

Teorem 1.1.4, 1.1.5 ve 1.1.6 da eşitliğin gerçeklenmesi için $z \in U$ ve $z \ne 0$ iken f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir.

Bieberbach Kestirimi

S sınıfındaki her f fonksiyonu n=2,3,... için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağlar. f, Koebe fonksiyonu veya onun bir dönmesi olmadıkça tüm n değerleri için kesin eşitsizlik sağlanır. ◆

Bieberbach Kestirimi, 1916 yılında Bieberbach tarafından ortaya atılmıştır. Uzun yıllar kestirim olarak kalan ve kısmen ispatlanan bu kestirimin tam ispatı 1984 yılında Louis de Branges tarafından yapılmıştır.

1.2 Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde, yalınkat fonksiyonların bazı özel alt sınıflarını ele alarak, bu altsınıfların özelliklerinden söz edeceğiz.

Bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesi ve onun bir $z_0 \in D$ noktasını alalım. z_0 noktasını, her diğer $z \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D kümesine $z_0 \in D$ noktasına göre z_0- ***yıldızıl*** veya kısaca ***yıldızıl*** denir. Daha resimsel bir ifadeyle, D kümesinin her noktası z_0 noktasından "görünür" ise D kümesine ***yıldızıl küme*** denir. f fonksiyonu yalınkat ve $F = f(U)$ görüntü bölgesi orjine göre yıldızıl ise, yani

$$w \in F \ , \ 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow tw \in F$$

önermesi doğru ise f fonksiyonuna ***yıldızıl fonksiyon*** denir.

Noktalarının her birine göre yıldızıl olan D kümesine ***konveks küme*** denir. Geometrik olarak, D kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen D kümesinde kalıyorsa D kümesine konvekstir denir. Genel olarak konveks bir kümeyi konveks bir kümeye dönüştüren fonksiyona konveks fonksiyon denildiğini biliyoruz. Diğer bir deyişle, bir f fonksiyonu yalınkat ve $f(U)$ görüntü bölgesi konveks ise, f fonksiyonuna ***konveks fonksiyon*** denilmektedir [3].

S'nin yıldızıl ve konveks fonksiyonları kapsayan altsınıfları, sırasıyla, S^* ve C ile gösterilir.Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları için,

$$C \subset S^* \subset S$$

yazılabilir.

Yukarıdaki tanımlara örnek olarak

$$\frac{z}{1-z} \quad , \quad \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad \text{ve} \quad \frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonları verilebilir. Bu fonksiyonlardan ilk ikisi konveks fonksiyonlar olduğu halde, $\frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu yıldızıl olup konveks değildir.

f fonksiyonu, konveks bir D bölgesinde analitik ve bu bölgede $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise, f fonksiyonu, D bölgesinde yalınkattır [29]. Bu ifade, Nashiro-Warschawski Teoremi olarak bilinir.

$p(0)=1$ ve $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşulu ile U bölgesinde analitik

$$p(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye ***pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar sınıfı*** denir ve $\wp$ ile gösterilir. Bu sınıf S^* ve C sınıfları ile yakından ilgilidir.

Yalınkat fonksiyonların bazı özel sınıfları, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar yardımıyla tanımlanabilir. Başka bir deyişle, U bölgesinde analitik, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalize koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu için

$$f \in S^* \iff \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \wp$$

ve

$$f \in C \iff 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \wp$$

önermeleri doğrudur [29].

Yalınkat fonksiyonların alt sınıfları arasındaki ilişkiyi veren ve Alexander Teoremi olarak bilinen aşağıdaki ifade önemlidir.

f fonksiyonu, U bölgesinde $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile analitik olmak üzere

$$f \in C \Leftrightarrow z f' \in S^*$$

önermesi doğrudur [29].

Her pozitif $\rho \leq 2-\sqrt{3}$ sayısı için her bir $f \in S$ fonksiyonu, $|z|<\rho$ diskini konveks bir bölge üzerine dönüştürür. Bu durum her $\rho>2-\sqrt{3}$ için yanlıştır [29]. Buradaki $2-\sqrt{3}=0{,}267\ldots$ sayısına S sınıfı için ***konvekslik yarıçapı*** denir. ρ sayısı, her $f \in S$ için $f(\rho z)$, U birim diskinde konveks olacak şekildeki en büyük sayıdır. Her $f \in S$ için ***yıldızıllık yarıçapı*** da $\tanh\frac{\pi}{4}=0{,}655\ldots$ olarak bilinmektedir.

S^* sınıfını kapsayan ve basit bir geometrik tanıma sahip S sınıfının ilginç bir altsınıfı da konvekse-yakın fonksiyonlardır. Bu sınıf, 1952 yılında Kaplan tarafından geliştirilmiştir.

Bir f fonksiyonu $|z|<1$ bölgesinde analitik olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}>0$$

olacak şekilde konveks bir g fonksiyonu veya eşdeğer olarak,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z f'(z)}{g(z)}\right\}>0$$

eşitsizliğini sağlayan yıldızıl bir g fonksiyonu varsa f fonksiyonuna ***konvekse-yakın fonksiyon*** denir. $f(0)=f'(0)-1=0$ koşullarını sağlayan, yani normalleştirilmiş konvekse-yakın f fonksiyonlarının sınıfı K ile gösterilir. Burada f fonksiyonunun yalınkat olması öncelikli koşul değildir. Ayrıca g fonksiyonunun $g(0)=g'(0)-1=0$ normalize koşullarını sağlaması gerekmez.

Her konveks fonksiyon konvekse-yakındır. Daha genel olarak, her yıldızıl fonksiyon konvekse-yakındır ve her konvekse-yakın fonksiyon yalınkattır. Bu sonuçlar,

$$C \subset S^* \subset K \subset S$$

kapsama zinciri ile özetlenebilir.

Konvekse-yakın fonksiyonlar için Kaplan Teoremi olarak bilinen aşağıdaki ifade önemlidir.

f, U bölgesinde analitik ve yerel yalınkat, yani $f'(z)\neq 0$, olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konvekse-yakın olması için, $\theta_1<\theta_2$ koşullu her bir θ_1,θ_2 gerçel sayı çifti ve her bir r $(0<r<1)$ sayısına karşılık $z=re^{i\theta}$ olmak üzere,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta>-\pi$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir [29].

Burada $f'(z)\neq 0$ koşulu gereklidir. Aksi takdirde, $f(z)=z^n$ $(n\geq 1)$ fonksiyonu teoremi gerçekler ancak yalınkat değildir ve dolayısıyla konvekse-yakın olamaz. Örneğin; α, $\left(0<|\alpha|<\pi/2\right)$ gerçel sayı olsun. Bu durumda $f(z)=z(1-z)^{-2e^{i\alpha}\cos\alpha}$ fonksiyonu konvekse-yakın olmadığı halde, $\cos\psi\neq 0$ koşulu altında U birim diskini yarıçapa ait olmayan bir yarı-doğrunun tümleyenine dönüştüren

$$f(z)=(z-z^2\cos\psi)(1-e^{i\psi}z)^{-2}$$

fonksiyonu konvekse-yakındır.

S sınıfında konvekse-yakın fonksiyonların ***konvekse-yakınlık yarıçapı*** da $0.80\ldots$ olarak bilinmektedir.

1.3 Subordinasyon İlkesi

Subordinasyon ilkesi karmaşık analizde önemli rol oynamaktadır. Son yıllarda karmaşık analiz ile ilgilenen bir çok matematikçi, subordinasyon konusunda çalışmalar yapmıştır. Subordinasyon kavramı, ilk olarak E. Lindelöf tarafından ortaya atılmış, ancak temel bağıntılar J.E. Littlewood ve W.W. Rogosinski tarafından bulunmuştur.

f ve g fonksiyonları U birim diskinde analitik olsunlar. U bölgesinde

$$f(z)=g\left(\psi(z)\right) \qquad (1.3.1)$$

olacak şekilde $|\psi(z)|<1$ ve $\psi(0)=0$ koşullarını sağlayan analitik (yalınkat olması gerekmeyen) bir ψ fonksiyonu varsa, f ***fonksiyonu*** g ***fonksiyonuna subordinedir*** denir ve bu durum $f\prec g$ yazılarak anlatılır.

Pozitif gerçel kısma sahip her fonksiyon, $\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna subordinedir. Diğer bir ifade ile,

$$p(z)\in\wp \Leftrightarrow p(z)\prec\frac{1+z}{1-z}$$

yazılır [3].

Öncelikle, Subordinasyon ilkesini elde etmede önemli rol oynayan ve J.E.Littlewood'a ait bazı temel özellikleri verelim :

$f\prec g$ olsun. Bu durumda, $\psi(U)\subset U$ ve $\psi(0)=0$ olduğundan, (1.3.1) özelliği ile $f(U)\subset g(U)$ ve $f(0)=g(0)$ bulunur. Bundan başka, "U birim diskinde $f(0)=0$ ve $|f(z)|<1$ koşulları altında analitik bir f fonksiyonu için $|f'(z)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq|z|$ olur" biçiminde ifade edilen Schwarz yardımcı önermesinden; $|\psi(z)|\leq|z|$ ve $0<r<1$ olmak üzere

$$\{f(z):|z|<r\}\subset\{g(z):|z|<r\} \tag{1.3.2}$$

olduğundan $0\leq r<1$ için

$$\max_{|z|\leq r}\{|f(z)|\}\leq\max_{|z|\leq r}\{|g(z)|\}$$

yazılır.

Bundan başka,

$$\left(1-|z|^2\right)|\psi'(z)|\leq 1-|\psi(z)|^2$$

eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|&=\left(1-|z|^2\right)|\psi'||g'(\psi)|\\&\leq\left(1-|\psi|^2\right)|g'(\psi)|\end{aligned}$$

elde edilir. $|\psi(z)|\leq|z|$ eşitsizliği tekrar kullanıldığında, $0\leq r<1$ iken

$$\max_{|z|\leq r}\left\{\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|\right\}\leq\max_{|z|\leq r}\left\{\left(1-|z|^2\right)|g'(z)|\right\}$$

bulunur. Özellikle, $z=0$ alınırsa $|f'(0)|\leq|g'(0)|$ olur.

Subordine olunan fonksiyonun yalınkat olması, en önemli durumdur. g fonksiyonu U birim diskinde yalınkat olmak üzere

$$f \prec g \Leftrightarrow f(0)=g(0) \quad \text{ve} \quad f(U)\subset g(U) \tag{1.3.3}$$

önermesi doğrudur [3].

(1.3.2) ve (1.3.3) ifadeleri birlikte kullanılarak çok kullanışlı olan aşağıdaki subordinasyon ilkesi elde edilir.

Teorem 1.3.1 (Subordinasyon ilkesi)

g fonksiyonu U birim diskinde yalınkat ve $U_r=\{z:\ |z|<r\ ,\ 0<r<1\ \}$ olmak üzere $f(0)=g(0)$ ve $f(U)\subset g(U)$,

$$f(U_r)\subset g(U_r)$$

kapsamasını verir [3]. ◆

1.4 p-Katlı Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde p-katlı fonksiyonları ve bazı özel alt sınıflarını tanımlayacağız.

$w=f(z)$ denklemi, bir D bölgesinde her farklı w değeri için en fazla p tane köke sahip ise f fonksiyonuna ***p-katlı fonksiyon*** denir. Eşdeğer olarak, f fonksiyonu konveks bir D bölgesinde analitik ve α gerçel bir sabit olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} f^{(p)}(z)\right) > 0$$

oluyorsa, f fonksiyonu D bölgesinde p-katlıdır. Bu ifade,

$$f(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonunun U bölgesinde analitik ve $\operatorname{Re} f^{(p)}(z)>0$ olması durumunda U bölgesinde p-katlı olduğu anlamına gelir. Ayrıca, f fonksiyonu $|z|\le 1$ de düzenli ve $|z|=1$ üzerinde $f'(z)\neq 0$ olmak üzere

$$\int_0^{2\pi}\left|1+\operatorname{Re}\frac{z f''}{f'}\right| d\theta < 2\pi(p+1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu $|z|\le 1$ de en fazla p değerlidir.

$a_p \neq 0$, $p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ olmak üzere, $|z| < 1$ birim diskinde düzenli olan

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfını $A(p)$ ile gösterelim.

$A(p)$ sınıfındaki bir f fonksiyonuna, U birim diskinde, $\mathrm{Re}\dfrac{zf'}{f} > 0$ ve $\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{zf''}{f'}\right) > 0$ koşullarını sağlaması durumunda, sırasıyla, ***p-katlı yıldızıl fonksiyon*** ve ***p-katlı konveks fonksiyon*** denir. $A(p)$ sınıfının alt sınıfları olan p-katlı yıldızıl ve p-katlı konveks fonksiyonların sınıfları, sırasıyla, S_p^* ve C_p ile gösterilecektir.

f fonksiyonu U birim diskinde p-katlı yıldızıl bir fonksiyon ise, bu bölgede p-katlıdır. Benzer şekilde f fonksiyonu U birim diskinde p-katlı konveks bir fonksiyon ise, yine bu bölgede p-katlıdır [14].

$A(p)$ sınıfına ait bir f fonksiyonu için,

$$f \in C_p \Leftrightarrow z f' \in S_p^*$$

önermesi doğrudur.Ayrıca

$$C_p \subset S_p^*$$

bağıntısı da yazılabilir [14]. C_p ve S_p^* sınıfları, $p=1$ durumunda, sırasıyla, yalınkat fonksiyonların altsınıfları olarak bilinen konveks ve yıldızıl fonksiyonlar sınıfları olur. Özel olarak, $C_1 \subset S_1^*$ olacaktır.

$f \in A(p)$ için U birim diskinde

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''}{f'}\right) < p+\frac{1}{2}$$

yazılabiliyorsa , f U bölgesinde p-katlı yıldızıl fonksiyon ve $z \in U$ iken

$$0 < \frac{zf'}{f} < \frac{2p(p+1)}{2p+1}$$

olur [33]. Bu durumda,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'}{g'}\right\}>0$$

olacak şekilde p-katlı konveks bir $g\in A(p)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna ***p - katlı konvekse – yakın fonksiyon*** adı verilir ve bu fonksiyonların sınıfı K_p ile gösterilecektir.

Diğer taraftan, f fonksiyonu, $\forall z\in U$ ve $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere bazı $0\le\alpha<p$ değerleri için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'}{f}\right\}>\alpha$$

ve

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'}{f}\right\}d\theta=2p\pi$$

koşullarını sağlıyorsa, α - ***mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyon*** adını alır. $A(p)$ sınıfının alt sınıfı olan α-mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S_p^*(\alpha)$ ile gösterilecektir.

$A(p)$ sınıfına ait bir f fonksiyonunun ***α-mertebeli p-katlı konveks fonksiyon*** olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall z\in U$ ve $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere en az bir $0\le\alpha<p$ değeri için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''}{f'}\right\}>\alpha$$

ve

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''}{f'}\right\}d\theta=2p\pi$$

olmasıdır.

α - mertebeli p-katlı konveks fonksiyonlar için bir başka tanım da aşağıdaki gibi verilebilir.

$A(p)$ sınıfındaki bir f fonksiyonu $\forall z\in U$ ve en az bir $\alpha\ge 0$ değeri için

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{zf'}{f}+\alpha\left(1+\frac{zf''}{f'}\right)\right\}>0$$

koşulunu sağlıyorsa f, ***α-mertebeli p-katlı konveks fonksiyon*** adını alır. p-katlı α-konveks fonksiyonların sınıfı $C_p(\alpha)$ ile gösterilir.

Verilen son tanımda özel olarak $\alpha=0$ alındığında

$$C_p(0)=S_p^*(0)=S_p^*$$

olduğu açıktır. Ayrıca $C_p(\alpha)$ ve $S_p^*(\alpha)$ sınıfları için

$$f\in C_p(\alpha)\Leftrightarrow\frac{zf'}{p}\in S_p^*(\alpha)$$

önermesi doğrudur ve $0\leq\alpha\leq p$ durumunda

$$(i)\ \ S_p^*(\alpha)\subseteq S_p^*(0)$$

$$(ii)\ \ C_p(\alpha)\subseteq C_p(0)$$

$$(iii)\ \ C_p(\alpha)\subset S_p^*(\alpha)\subset A(p)$$

yazılır. Bundan başka, p-katlı α-konveks fonksiyonlar ile yıldızıl fonksiyonlar arasındaki ilgiyi açıklamak üzere aşağıdaki önerme verilebilir:

$\alpha>0$ için

$$f\in C_p(\alpha)\Leftrightarrow\exists\, F\in S_1^*\ :\ f(z)=\left\{\frac{p}{\alpha}\int_0^z\frac{F(t)^{p/\alpha}}{t}dt\right\}^{\alpha}$$

[4].

$A(p)$ sınıfına ait bir f fonksiyonunun α-mertebeli p-katlı konvekse - yakın fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall z\in U$ ve $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere en az bir $0\leq\alpha<p$ değeri için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'}{g'}\right\}>\alpha$$

olacak şekilde $g\in C$ fonksiyonunun bulunabilmesidir.

Bir $f\in A(p)$ ve bir $g\in C$ fonksiyonu için,

$$\left|\frac{f'}{g'}-1\right|<1-\alpha$$

olması, α- mertebeli konvekse – yakın fonksiyonlar için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'}{g}\right\}>\alpha$$

eşitsizliğini gerektirir.

2. BÖLÜM

NEGATİF VE POZİTİF KATSAYILI BAZI ÖZEL SINIFLAR

Son zamanlarda, S sınıfına ait fonksiyonların katsayılarının davranışı pek çok matematikçinin ilgisini çekmiş ve bu konu üzerinde çalışılmıştır. Bu bölümün 1. kesiminde S sınıfı ve ek koşullar ile tanımlanmış bazı altsınıflarına ait fonksiyonların, 2. kesiminde p-katlı fonksiyonların ek koşullar ile tanımlanmış bazı altsınıflarının, 3. kesimde meromorfik yalınkat fonksiyonların ve son olarak 4. kesimde meromorfik p-katlı fonksiyonların özelliklerini ve katsayı kestirimlerini inceleyeceğiz.

Bu bölümden itibaren, ***ekstremal fonksiyon*** denildiğinde, D, karmaşık sayılar cisminde bir bölge, $\mathcal{A}(D)$, D üzerinde analitik fonksiyonların kümesi ve ϕ, $\mathcal{A}(D)$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli bir fonksiyonel olmak üzere, $\mathrm{Re}\phi\,(f)$ in $\mathcal{A}(D)$ kümesindeki supremumunu belirleyen f fonksiyonu anlaşılacaktır.

2.1 Yalınkat Fonksiyonların Ek Koşullu Bazı Altsınıfları

$T(q)$, S' nin $(q+1)$ inci terimden sonraki sıfırdan farklı katsayıları negatif olan fonksiyonların sınıfı olsun. Daha açıkçası, U birim diskinde analitik ve yalınkat bir f fonksiyonu için $q\geq 1$ ve $n=1,2,3,\cdots$ iken

$$f\in T(q) \Leftrightarrow f(z)=z-\left|a_{q+1}\right|z^{q+1}-\cdots ,$$

önermesi doğrudur.

Şimdi $f\in T(q)$ alalım. f fonksiyonunun $T^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul her $z\in U$ için

$$\left|\frac{\frac{zf'(z)}{f(z)}-1}{(A-B)\gamma\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right)-A\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)}\right|<\beta$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada $-1\leq B<A\leq 1$, $0<A\leq 1$, $0\leq \alpha<1$, $0<\beta\leq 1$ ve γ, $\alpha\neq 0$ iken $\frac{A}{(A-B)}<\gamma\leq\frac{A}{((A-B)\alpha)}$, $\alpha=0$ iken $\frac{A}{(A-B)}\leq\gamma\leq 1$ şeklindedir.

Diğer taraftan, $T(q)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun $C^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul $zf' \in T^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ olmasıdır.

Aşağıdaki teoremlerde, $T^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ ve $C^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıflarının belli nitelendirilmelerini, bu nitelendirilmeler kullanılarak elde edilen büyüme ve bükülme teoremleri ile konvekslik yarıçapları için en kesin sonuçları ve bu sınıfların konveks doğrusal bileşimler altında kapalı olduğunu ispatsız olarak vereceğiz.

İlk olarak $T^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ ve $C^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıflarındaki fonksiyonların katsayı eşitsizliklerini verelim.

Teorem 2.1.1

Bir $f \in T(q)$ fonksiyonunun $T^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{(q+n-1)+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+n-\alpha)-A(q+n-1)]\}\left|a_{q+n}\right| \le (A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. $n=1,2,3,\cdots$ için her bir

$$f_{q+n}(z)=z-\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)z^{q+n}}{(q+n-1)+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+n-\alpha)-A(q+n-1)]} \tag{2.1.1}$$

fonksiyonları, bu sonuç için ekstremal fonksiyonlardır [20]. ◆

Teorem 2.1.2

$T(q)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun $C^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{(q+n-1)+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+n-\alpha)-A(q+n-1)]\}(q+n)\left|a_{q+n}\right| \le (A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)$$

eşitsizliğinin varolmasıdır. $n=1,2,3,\cdots$ için her bir

$$f_{q+n}(z)=z-\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)z^{q+n}}{(q+n)\{(q+n-1)+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+n-\alpha)-A(q+n-1)]\}}$$

fonksiyonları, bu sonuç için ekstremal fonksiyonlardır [20]. ◆

$f_1(z)=z$ ve $n=1,2,3,\cdots$ olmak üzere

$$f_{q+n}(z)=z-\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)z^{q+n}}{(q+n-1)+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+n-\alpha)-A(q+n-1)]}$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu durumda $f\in T^*_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $q\geq 2$ iken $i=1,2,\ldots q$ için $\lambda_i=0$, $\lambda_n\geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$ olmak üzere, f fonksiyonunun

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$$

şeklinde ifade edilebilmesidir.

Aynı durum $C^*_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfı için düşünüldüğünde, $f_1(z)=z$ ve $n=1,2,3,\cdots$ olmak üzere

$$f_{q+n}(z)=z-\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)z^{q+n}}{(q+n)\{(q+n-1)+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+n-\alpha)-A(q+n-1)]\}}$$

fonksiyonları göz önüne alınarak, $f\in C^*_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ olması için gerekli ve yeterli koşulun, $i=1,2,\ldots q$ için $\lambda_i=0$, $\lambda_n\geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$ olmak üzere, f fonksiyonunun

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$$

şeklinde yazılabilmesi olduğu görülür.

Bir $A\subset\mathcal{A}(D)$ kümesi verildiğinde, her $f_1,f_2\in A$ ($f_1\neq f_2$) ve her bir $0<\lambda<1$ için

$$f\neq\lambda f_1+(1-\lambda)f_2$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna A kümesinin ***ekstrem noktası*** denir.

$T^*_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ ve $C^*_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıflarının ekstrem noktaları, sırasıyla, $f_1(z)=z$ ve

$$f_{q+n}(z)=z-\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)z^{q+n}}{(q+n-1)+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+n-\alpha)-A(q+n-1)]}\ ,\ n=1,2,3,\cdots$$

ile $f_1(z)=z$ ve

$$f_{q+n}(z)=z-\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)z^{q+n}}{(q+n)\{(q+n-1)+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+n-\alpha)-A(q+n-1)]\}},n=1,2,3,\cdots$$

fonksiyonlarıdır [20].

$T^*_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ ve $C^*_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfları için elde edilen katsayı eşitsizlikleri kullanılarak bu sınıflar için Büyüme ve Bükülme Teoremleri elde edilebilir.

Teorem 2.1.3

f fonksiyonu $T^*_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfında ise, $|z|=r$ için,

$$r-\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)r^{q+1}}{q+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+1-\alpha)-Aq]}\le|\,f(z)\,|\le r+\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)r^{q+1}}{q+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+1-\alpha)-Aq]}\qquad(2.1.2)$$

ve

$$1-\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)(q+1)r^{q}}{q+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+1-\alpha)-Aq]}\le|\,f'(z)\,|\le 1+\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)(q+1)r^{q}}{q+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+1-\alpha)-Aq]}\qquad(2.1.3)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlikler, her bir

$$f(z)=z-\frac{(A-B)\beta\gamma\,(1-\alpha)z^{q+1}}{q+\beta\,[(A-B)\gamma\,(q+1-\alpha)-Aq]}\ ,\ (z=\pm r)\qquad(2.1.4)$$

fonksiyonları için sağlandığından (2.1.2) ve (2.1.3) ifadelerindeki sınırlar kesindir. ◆

Eğer $f\in T^*_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ ise, bu durumda U birim diski, f fonksiyonu altında

$$|w|<\frac{q(1+\beta\,(A-B)\gamma\,-A])}{q+\beta\,\{q[(A-B)\gamma\,-A]+(A-B)\gamma\,(1-\alpha)\}}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüşür. Bu eşitsizlik, (2.1.4) de verilen her bir fonksiyon için kesindir [20].

f fonksiyonu $C^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfında ise, $|z|=r$ için,

$$r-\frac{(A-B)\beta\gamma\ (1-\alpha)r^{q+1}}{(q+1)\{q+\beta\ [(A-B)\gamma\ q+1-\alpha)-Aq]\}}\leq|f(z)|\leq r+\frac{(A-B)\beta\gamma\ (1-\alpha)r^{q+1}}{(q+1)\{q+\beta\ [(A-B)\gamma\ (q+1-\alpha-Aq]\}} \tag{2.1.5}$$

ve

$$1-\frac{(A-B)\beta\gamma\ (1-\alpha)r^{q}}{q+\beta\ [(A-B)\gamma\ (q+1-\alpha)-Aq]}\leq|f'(z)|\leq 1+\frac{(A-B)\beta\gamma\ (1-\alpha)r^{q}}{q+\beta\ [(A-B)\gamma\ (q+1-\alpha)-Aq]} \tag{2.1.6}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler, her bir

$$f(z)=z-\frac{(A-B)\beta\gamma\ (1-\alpha)z^{q+1}}{(q+1)\{q+\beta\ [(A-B)\gamma\ (q+1-\alpha)-Aq]\}}\ ,\ (z=\pm r) \tag{2.1.7}$$

ekstremal fonksiyonları için sağlanır. ◆

$f\in C^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ ise, bu durumda U birim diski, f fonksiyonu altında

$$|w|<\frac{(q+1)\{q+\beta\ (A-B)\gamma\ (q+1-\alpha)-Aq]\}-(A-B)\beta\gamma\ (1-\alpha)}{(q+1)\{q+\beta\ [(A-B)\gamma\ (q+1-\alpha)-Aq]\}}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüşür. Bu sonuç (2.1.7) de verilen her bir fonksiyon için kesindir [20].

Teorem 2.1.4

f fonksiyonu $T^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfında ise $n=1,2,3,\cdots$ için

$$r(A,B,q,\alpha,\beta,\gamma)=\inf_{n}\left\{\left[\frac{(q+n-1)+\beta\ [(A-B)\gamma\ (q+n-\alpha)-A(q+n-1)]}{(A-B)\beta\gamma\ (1-\alpha)(q+n)^{2}}\right]^{1/(q+n+1)}\right\}$$

olmak üzere, f fonksiyonu, $|z|<r=r(A,B,q,\alpha,\beta,\gamma)$ diskinde konvekstir. Bu ifade, (2.1.1) ifadesinde verilen ekstremal fonksiyon için kesindir [20]. ◆

Teorem 2.1.5

$T^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ ve $C^{*}_{A,B}(q,\alpha,\beta,\gamma)$ sınıfları, konveks doğrusal bileşimler altında kapalıdır [20]. ◆

Negatif ve eksik katsayılı yalınkat fonksiyonların diğer bir altsınıfı $P^*(A,B,k,\alpha,\beta)$ sınıfıdır. Bu sınıf, $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskinde düzenli ve yalınkat olan ve $-1\leq B<A\leq 1$, $-1\leq B\leq 0$, $0\leq\alpha<1$, $0<\beta\leq 1$ olmak üzere

$$\left|\frac{f'(z)-a_1}{[A+(B-A)\alpha\beta]\,a_1-[A+(B-A)\beta\,]\,f'(z)}\right|<1$$

koşulunu sağlayan $f(z)=a_1z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n$, $(a_1>0\,,\,k\geq 2)$ fonksiyonların sınıfı olarak tanımlanır.

$P^*(A,B,k,\alpha,\beta)$ sınıfının $P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ gibi iki alt sınıfı M.K. Aouf [19] tarafından tanımlanmıştır. $P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$, $P^*(A,B,k,a,\beta)$ sınıfındaki, sırasıyla, $f(z_0)=z_0$ ve $f'(z_0)=1$ $(0<z_0<1)$ koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıflarıdır.

V.Kumar ve S.L.Shukla [39], $P_0(A,B,k,0,1,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,0,1,z_0)$ sınıfları için katsayı kestirimlerini, büyüme ve bükülme teoremlerini, kapalılık teoremleri ve $\rho\,(0\leq\rho<1)$ mertebeli konvekslik yarıçaplarını elde etmişlerdir. Ayrıca, V. Kumar [40] $a_1=1$ iken $P^*(A,B,k,0,1)$ sınıfı için benzer teoremleri ve sınıf koruyan integral operatörlerini de kapsayan pek çok sonuç elde etmiştir.

Aşağıdaki teoremlerde, $P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ sınıfları için katsayı kestirimleri, büyüme ve bükülme teoremleri, örtü teoremleri ve $\rho\,(0\leq\rho<1)$ mertebeli konvekslik yarıçapları ispatsız olarak verilmektedir. Ayrıca bu sınıfların aritmetik orta ve konveks doğrusal bileşimler altında kapalı olduğundan da söz edilmektedir.

Teorem 2.1.6

$f(z)=a_1z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n$ fonksiyonu, U birim diskinde analitik olsun ve $f(z_0)=z_0$ koşulunu sağlasın. Bu durumda f fonksiyonunun $P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left\{n[1-A-(B-A)\beta\,]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{n-1}\right\}|a_n|\leq(A-B)\beta\,(1-\alpha) \qquad (2.1.8)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu sonuç, kesindir. Eşitlik, $n=k,k+1,\ldots$ olmak üzere, her bir

$$f(z)=\frac{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]z-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z^n}{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{n-1}}$$

fonksiyonu için sağlanır [19]. ◆

Teorem 2.1.6 da verilen katsayı eşitsizliği üzerinde yapılacak basit matematiksel hesaplamalar ile $P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun

$$|a_n|\leq\frac{(A-B)\beta\ 1-\alpha)}{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{n-1}}$$

eşitsizliğini sağlayacağı görülür.

Teorem 2.1.7

$f(z)=a_1z-\sum\limits_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n$ fonksiyonu, $f'(z_0)=1$ koşulu ile U birim diskinde düzenli olsun. Bu durumda $f\in P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left\{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{n-1}\right\}|a_n|\leq(A-B)\beta\,(1-\alpha)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Eşitlik, her bir

$$f(z)=\frac{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]z-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z^n}{n\left\{\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{n-1}\right\}}\ ,\quad (n=k,k+1,\ldots)$$

fonksiyonu için sağlanır [19]. ◆

Teorem 2.1.7'deki katsayı eşitsizliği ile, $P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun

$$|a_n|\leq\frac{(A-B)\beta\,(1-\alpha)}{n\left\{\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{n-1}\right\}}$$

eşitsizliğini sağlayacağı açıktır.

Teorem 2.1.8

Eğer $f \in P_0(A,B,k,,\alpha,\beta,z_0)$ ve $|z|=r$ ise, bu durumda,

$$a=\frac{k[1-A-(B-A)\beta]}{k\{[1-A-(B-A)\beta]-(A-B)\beta(1-\alpha)z_0^{k-1}\}}$$

ve

$$b=\frac{(A-B)\beta(1-\alpha)}{k\{[1-A-(B-A)\beta]-(A-B)\beta(1-\alpha)z_0^{k-1}\}}$$

olmak üzere,

$$ar-br^k \leq |f(z)| \leq ar+br^k \tag{2.1.9}$$

ve

$$a-kbr^{k-1} \leq |f'(z)| \leq a+kbr^{k-1} \tag{2.1.10}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Bu sonuçlardaki eşitlik durumu, her bir

$$f(z)=\frac{k[1-A-(B-A)\beta]z-(A-B)\beta(1-\alpha)z^k}{k[1-A-(B-A)\beta]-(A-B)\beta(1-\alpha)z_0^{k-1}}$$

fonksiyonu için sağlanır [19]. ◆

(2.1.9) ifadesinde $r \to 1$ alınırsa, U birim diski, $f \in P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ altında

$$|w|<\frac{k[1-A-(B-A)\beta]-(A-B)\beta(1-\alpha)}{k[1-A-(B-A)\beta]-(A-B)\beta(1-\alpha)z_0^{k-1}}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüşür.

Teorem 2.1.9

Eğer $f \in P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ ve $|z|=r$ ise, bu durumda,

$$c=\frac{[1-A-(B-A)\beta]}{[1-A-(B-A)\beta]-(A-B)\beta(1-\alpha)z_0^{k-1}}$$

ve

$$d=\frac{(A-B)\beta(1-\alpha)}{k\{[1-A-(B-A)\beta]-(A-B)\beta(1-\alpha)z_0^{k-1}\}}$$

olmak üzere,

$$cr-dr^k \leq |f(z)| \leq cr+dr^k \tag{2.1.11}$$

ve

$$c-dkr^{k-1} \leq |f'(z)| \leq c+dkr^{k-1} \tag{2.1.12}$$

eşitsizlikleri vardır. (2.1.11) ve (2.1.12) ifadelerindeki eşitlik, her bir

$$f(z)=\frac{k\left[1-A-(B-A)\beta\right]z-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z^{k}}{k\{\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{k-1}\}}$$

fonksiyonu için sağlanır [19]. ◆

(2.1.11) ifadesinde $r\to 1$ alınırsa, U birim diski, $f\in P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ altında

$$|w|<\frac{k\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)}{k\{\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{k-1}\}}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüşür.

Teorem 2.1.10

$f\in P_0(A,B,k,,\alpha,\beta,z_0)$ (veya $f\in P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$) olsun. Bu durumda f fonksiyonu,

$$R^{*}=\inf_{n\geq k}\left\{\left[\frac{\left[1-A-(B-A)\beta\right](1-\rho)}{(A-B)\beta\,(1-\alpha)(n-\rho)}\right]^{\frac{1}{(n-1)}}\right\}$$

olmak üzere $|z|<R^{*}$ diskinde δ $\left(0\leq\delta<1\right)$ mertebeli konveks bir fonksiyondur.

$P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ sınıfları için kesinlik, sırasıyla,

$$f(z)=\frac{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]z-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z^{n}}{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{n-1}}$$

ve

$$f(z)=\frac{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]z-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z^{n}}{n\{\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta\,(1-\alpha)z_0^{n-1}\}}$$

fonksiyonları için vardır [19]. ◆

$P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ sınıfları aritmetik orta ve konveks doğrusal bileşimler altında kapalı oldukları aşağıdaki teoremlerde verilmektedir.

Teorem 2.1.11

f_j ve h fonksiyonları, sırasıyla, $f_j(z)=a_{1,j}z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_{n,j}|z^{n}$ $\left(j=1,2,\ldots\right)$ ve

$\lambda_j\geq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j=1$, $b_1=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{1,j}$ ve $b_n=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{n,j}$ olmak üzere, $n=k,k+1,\ldots$ iken

$h(z)=b_1 z-\sum_{n=2}^{\infty}|b_n|z^n$ ile tanımlansın. Eğer her $j=1,2,\ldots$ için f_j fonksiyonları $P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ (veya $P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$) sınıfında ise, h fonksiyonu da $P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ (veya $P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$) sınıfındadır [19]. ◆

Teorem 2.1.12

$f_1(z)=z$ ve $n=k,k+1,\ldots$ için,

$$f_n(z)=\frac{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]z-(A-B)\beta(1-\alpha)z^n}{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta(1-\alpha)z_0^{n-1}}$$

fonksiyonlarını alalım. Bu durumda, $f\in P_0(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $\lambda_n\geq 0$ ve $\lambda_1+\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n=1$ olmak üzere, $f\in P^*(A,B,k,\alpha,\beta)$ fonksiyonunun

$$f(z)=\lambda_1 f_1(z)+\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$$

şeklinde ifade edilebilmesidir. ◆

Benzer yöntemle, $f_1(z)=z$ ve $n=k,k+1,\ldots$ için,

$$f_n(z)=\frac{n\left[1-A-(B-A)\beta\right]z-(A-B)\beta(1-\alpha)z^n}{n\left\{\left[1-A-(B-A)\beta\right]-(A-B)\beta(1-\alpha)z_0^{n-1}\right\}}$$

alındığında, $f\in P_1(A,B,k,\alpha,\beta,z_0)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $\lambda_n\geq 0$ ve $\lambda_1+\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n=1$ iken, $f\in P^*(A,B,k,\alpha,\beta)$ fonksiyonunun

$$f(z)=\lambda_1 f_1(z)+\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$$

şeklinde ifade edilebilmesidir [19]. ◆

Bu tezin hazırlanması sırasında incelediğimiz makalelerde sözü edilen negatif katsayılı yalınkat fonksiyonların bir diğer alt sınıfı da, S sınıfının

$$f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \quad,\quad (\,a_n\geq 0\,) \tag{2.1.13}$$

şeklinde ifade edilebilen elemanlarının kümesi olan $\mathfrak{I}$ sınıfıdır.

Bir $f\in\Im$ fonksiyonu en az bir $\lambda\left(\lambda\geq 0\right)$, en az bir $\alpha\left(0\leq\alpha<1\right)$ ve tüm $z\in U$ değerleri için

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)\right\}>\alpha$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\Im_\lambda(\alpha)$ ***sınıfındadır ;***

$$\operatorname{Re}\{f'(z)+\lambda z f''(z)\}>\alpha$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $\Re(\lambda,\alpha)$ ***sınıfındadır*** denir. Ayrıca,

$$f\in\Re(\lambda,\alpha)\Leftrightarrow zf'\in\Im_\lambda(\alpha)$$

önermesi doğrudur.

$\Im$ sınıfındaki bir f fonksiyonuna karşılık, $\lambda\geq 0$, $0\leq\alpha<1$, $-1\leq A<B\leq 1$ ve $0<B\leq 1$ olmak üzere, $z\in U$ için $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ koşullarını ve

$$(1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)=(1-\alpha)\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}+\alpha$$

$$=\frac{1+\left[B+(A-B)(1-\alpha)\right]w(z)}{1+Bw(z)}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde U birim diskinde analitik bir w fonksiyonu bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna $\Im_\lambda\left(\alpha,A,B\right)$ ***sınıfındadır*** denir.

Bu eşitliğin

$$\left|\frac{[(1-\lambda)z^{-1}f(z)+\lambda f'(z)]-1}{B[(1-\lambda)z^{-1}f(z)+\lambda f'(z)]-[B+(A-B)(1-\alpha)]}\right|<1$$

eşitsizliğine eşdeğer olduğu kolaylıkla görülebilir.

Benzer şekilde, bir $f\in\Im$ fonksiyonunun $\Re\left(\lambda,\alpha,A,B\right)$ sınıfında olması,

$$zf'\in\Im_\lambda\left(\alpha,A,B\right)$$

olması biçiminde tanımlanmaktadır.

Özel olarak seçilen λ,α,A,B parametreleri ile elde edilmiş bazı ilginç altsınıflar aşağıdaki gibidir:

(i) $\Im_\lambda\left(\alpha,-1,1\right)=\Im_\lambda\left(\alpha\right)$ [34]

(ii) $\Re\left(\lambda,\alpha,-1,1\right)=\Re\left(\lambda,\alpha\right)$ [28]

(iii) $\Im_0\left(\alpha,-1,1\right)$ [37]

(iv) $\Im_1(\alpha,-1,1)=\Re(0,\alpha,-1,1)$ [11, 37]

(v) $\Im_1(\alpha,-\beta,\beta)=\Re(0,\alpha,-\beta,\beta)=\wp^*(\alpha,\beta)$, $(0<\beta\leq 1)$ [38]

(vi) $\Re(1,\alpha,-\beta,\beta)=\{f\in\Im \mid zf'(z)\in\wp^*(\alpha,\beta), 0<\beta\leq 1\}$

(vii) $\Im_1(0,A,B)=\Re(0,0,A,B)=\wp^*(1,A,B)$ [31,36]

$(viii)$ $\Re(1,0,A,B)=\{f\in\Im \mid zf'(z)\in\wp^*(1,A,B)\}$ [31]

(ix) $\Im_1(\alpha,A,B)=\Re(0,\alpha,A,B)=\wp(1,A,B,\alpha)$ [24]

(x) $\Re(1,\alpha,A,B)=\{\Re(1,\alpha,A,B) \mid zf'(z)\in\wp(1,A,B,\alpha)\}$

Teorem 2.1.13

(2.1.13) ile tanımlanan f fonksiyonunun $\Im_\lambda(\alpha,A,B)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty}(1+B)\left[1+(n-1)\lambda\right]a_n\leq(B-A)(1-\alpha)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu sonuç için eşitlik

$$f(z)=z-\frac{(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)\left[1+(n-1)\lambda\right]}z^n,\ \ n\geq 2 \tag{2.1.14}$$

ekstremal fonksiyonu için sağlanır [18]. ◆

$\Im_\lambda(\alpha,A,B)$ sınıfındaki (2.1.13) ile tanımlı f fonksiyonu için $n\geq 2$ iken

$$a_n\leq\frac{(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)\left[1+(n-1)\lambda\right]}$$

eşitsizliği doğrudur. Eşitlik (2.1.14) ile verilen her bir fonksiyon için vardır.

(2.1.13) ile tanımlı f fonksiyonunun $\Re(\lambda,\alpha,A,B)$ sınıfında olması için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1+B)\left[1+(n-1)\lambda\right]a_n \leq (B-A)(1-\alpha)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir. Eşitlik, $n\geq 2$ olmak üzere her bir

$$f(z)=z-\frac{(B-A)(1-\alpha)}{n(1+B)\left[1+(n-1)\lambda\right]}z^n \tag{2.1.15}$$

fonksiyonu için sağlanır.

$\Re(\lambda,\alpha,A,B)$ sınıfındaki (2.1.13) ile tanımlı f fonksiyonu

$$a_n \leq \frac{(B-A)(1-\alpha)}{n(1+B)\left[1+(n-1)\lambda\right]}\ ,\quad n\geq 2$$

eşitsizliğini sağlar. Burada eşitlik, (2.1.15) ile verilen her bir fonksiyon için vardır [18].

Yardımcı Önerme 2.1.1

(2.1.13) ile tanımlanan bir fonksiyonun $\wp(1,A,B,\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+B)\ a_n \leq (B-A)(1-\alpha)$$

olmasıdır. Bu sonuç kesindir [24]. ◆

Yardımcı Önerme 2.1.1 kullanılarak, (2.1.13) ile tanımlanan f fonksiyonunun $\wp(1,A,B,\alpha)$ $(0\leq\alpha<1)$ sınıfında olması durumunda, $0\leq\lambda\leq 1$ iken, $f\in\Im_\lambda(\alpha,A,B)$ olduğu bulunur [18].

Eğer,

$0\leq\lambda_1\leq\lambda_2$, $0\leq\alpha<1$, $-1\leq A<B\leq 1$ ve $0<B\leq 1$ ise,

$$\Im_{\lambda_2}(\alpha,A,B)\subseteq\Im_{\lambda_1}(\alpha,A,B)$$

$$\Re(\lambda_2,\alpha,A,B)\subseteq\Re(\lambda_1,\alpha,A,B);$$

$\lambda\geq 0$, $0\leq\alpha_1\leq\alpha_2<1$, $-1\leq A<B\leq 1$ ve $0<B\leq 1$ ise,

$$\Im_{\lambda}(\alpha_2,A,B)\subseteq\Im_{\lambda}(\alpha_1,A,B)$$

$$\Re(\lambda,\alpha_2,A,B)\subseteq\Re(\lambda,\alpha_1,A,B);$$

$\lambda\geq 0$, $0\leq\alpha<1$, $-1\leq A_1\leq A_2\leq 1$ ve $0<B_1\leq B_2\leq 1$ ve $A_2<B_1$ ise,

$$\Im_{\lambda}(\alpha,A_2,B_1)\subseteq\Im_{\lambda}(\alpha,A_1,B_2)$$

$$\Re(\lambda,\alpha,A_2,B_1)\subseteq\Re(\lambda,\alpha_1,A_1,B_2);$$

$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$, $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 < 1$, $-1 \le A_1 \le A_2 < B_1 \le B_2 \le 1$ ve $0 < B_1 \le B_2 \le 1$ ise

$$\Im_{\lambda_2}\left(\alpha_2, A_2, B_1\right) \subseteq \Im_{\lambda_1}\left(\alpha_1, A_1, B_2\right)$$

$$\Re\left(\lambda_2, \alpha_2, A_2, B_1\right) \subseteq \Re\left(\lambda_1, \alpha_1, A_1, B_2\right)$$

kapsamaları doğrudur [18]. ◆

(2.1.13) ile tanımlanan f fonksiyonu $\Re(\lambda, \alpha, A, B)$ sınıfında ise bu fonksiyon aynı zamanda

$$\Im_{\lambda}\left(\frac{1+\alpha}{2}, A, B\right)$$

ve

$$\Im_{\lambda}\left(\alpha, \frac{B+A}{2}, B\right)$$

sınıflarına da aittir. Yani

$$\Re(\lambda, \alpha, A, B) \subseteq \Im_{\lambda}\left(\frac{1+\alpha}{2}, A, B\right)$$

ve

$$\Re(\lambda, \alpha, A, B) \subseteq \Im_{\lambda}\left(\alpha, \frac{B+A}{2}, B\right)$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.14

(2.1.13) ile tanımlı f fonksiyonu ve $b_n \ge 0$ olmak üzere $g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ ile tanımlı g fonksiyonu, sırasıyla, $\Im_{\lambda}(\alpha, A, B)$ ve $\Re(\lambda, \alpha, A, B)$ sınıflarında olsunlar. Bu durumda, $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$ olmak üzere

$$k(z) = z - \frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

ile tanımlı k fonksiyonu $\Im_{\lambda}(\alpha, A, B)$ sınıfındadır [18]. ◆

Teorem 2.1.15

(2.1.13) ile tanımlı f fonksiyonu $\Im_{\lambda}(\alpha, A, B)$ sınıfında olsun. Bu durumda $|z| = r < 1$ için

$$r-\frac{(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)(1+\lambda)}r^2 \leq |\ f(z)\ | \leq r+\frac{(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)(1+\lambda)}r^2 \tag{2.1.16}$$

ve

$$1-\frac{2(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)(1+\lambda)}r \leq |\ f'(z)\ | \leq 1+\frac{2(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)(1+\lambda)}r \tag{2.1.17}$$

şeklindedir. (2.1.16) ve (2.1.17) ifadelerinde eşitlik $z=\mp r$ olmak üzere

$$f(z)=z-\frac{(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)(1+\lambda)}z^2 \tag{2.1.18}$$

fonksiyonu için gerçeklenir [18]. ◆

(2.1.16) ifadesinin sol tarafında $r\to 1^-$ alınırsa, $\Im_\lambda(\alpha,A,B)$ sınıfındaki (2.1.13) ile tanımlı f fonksiyonunun, $|z|<1$ bölgesini

$$|w|<\frac{(1+B)(1+\lambda)-(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)(1+\lambda)}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüştürdüğü görülür. Bu eşitsizlik (2.1.18) de verilen fonksiyon için kesindir.

Teorem 2.1.16

(2.1.13) ile tanımlanan f fonksiyonu $\Re_\lambda(\lambda,\alpha,A,B)$ sınıfında olsun. Bu durumda $|z|=r<1$ için

$$r-\frac{(B-A)(1-\alpha)}{2(1+B)(1+\lambda)}r^2 \leq |\ f(z)\ | \leq r+\frac{(B-A)(1-\alpha)}{2(1+B)(1+\lambda)}r^2 \tag{2.1.19}$$

ve

$$1-\frac{(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)(1+\lambda)}r \leq |\ f'(z)\ | \leq 1+\frac{(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)(1+\lambda)}r \tag{2.1.20}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada eşitlik, $z=\mp r$ olmak üzere her bir

$$f(z)=z-\frac{(B-A)(1-\alpha)}{2(1+B)(1+\lambda)}z^2 \tag{2.1.21}$$

fonksiyonu için vardır [18]. ◆

(2.1.19) ifadesinin sol tarafında $r\to 1^-$ alınırsa, $|z|<1$ birim diski, $\Re_\lambda(\lambda,\alpha,A,B)$ sınıfındaki (2.1.13) ile tanımlı f fonksiyonu altında

$$|w|<\frac{2(1+B)(1+\lambda)-(B-A)(1-\alpha)}{2(1+B)(1+\lambda)}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüşür. Bu eşitsizlik, (2.1.21) de verilen ekstremal fonksiyon ile kesindir.

Teorem 2.1.17

(2.1.13) ile tanımlanan f fonksiyonu $\Im_\lambda(\alpha,A,B)$ sınıfında olsun. Bu durumda f fonksiyonu $n\geq 2$ için,

$$r_1(\lambda,\alpha,\rho,A,B)=\inf_n\left\{\left[\frac{(1-\rho)(1+B)[1+(n-1)\lambda}{n(B-A)(1-\alpha)}\right]^{1/(n-1)}\right\}$$

$$r_2(\lambda,\alpha,\rho,A,B)=\inf_n\left\{\left[\frac{(1-\rho)(1+B)[1+(n-1)\lambda}{(n-\rho)(B-A)(1-\alpha)}\right]^{1/(n-1)}\right\}$$

$$r_3(\lambda,\alpha,\rho,A,B)=\inf_n\left\{\left[\frac{(1-\rho)(1+B)[1+(n-1)\lambda}{n(n-\rho)(B-A)(1-\alpha)}\right]^{1/(n-1)}\right\}$$

olmak üzere, sırasıyla, $|z|<r_1(\lambda,\alpha,\rho,A,B)$ diskinde δ $(0\leq\delta<p)$ mertebeden konvekse-yakın, $|z|<r_2(\lambda,\alpha,\rho,A,B)$ diskinde δ $(0\leq\delta<p)$ mertebeden yıldızıl ve $|z|<r_3(\lambda,\alpha,\rho,A,B)$ diskinde δ $(0\leq\delta<p)$ mertebeden konveks fonksiyon olur. Bu sonuçlar kesin olup, (2.1.14) ile verilen her bir ekstremal fonksiyon için gerçeklenir [18]. ◆

Teorem 2.1.18

c, $c>-1$ olacak şekilde bir gerçel sayı olsun. Eğer $f\in\Re(\lambda,\alpha,A,B)$ ise,

$$F(z)=\frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f(t)\,dt \quad , c>-1 \tag{2.1.22}$$

ile tanımlı F fonksiyonu da $\Re(\lambda,\alpha,A,B)$ sınıfındadır.

Eğer $F\in\Re(\lambda,\alpha,A,B)$ ise, (2.1.22) ile tanımlı f fonksiyonu

$$R^*=\inf_n\left\{\left[\frac{(c+1)(1+B)[1+(n-1)\lambda]}{(c+n)(B-A)(1-\alpha)}\right]^{1/(n-1)}\right\} \quad , \; n\geq 2$$

olmak üzere, $|z|<R^*$ diskinde yalınkattır. Eşitlik, her bir

$$f(z)=z-\frac{(c+n)(B-A)(1-\alpha)}{n(c+1)(1+B)[1+(n-1)\lambda]}z^n \quad , \; n\geq 2$$

fonksiyonu için sağlanır [18]. ◆

Aşağıdaki teorem ve sonuçlarda f_j fonksiyonları, $a_{n,j} \geq 0$, $j=1,2,\ldots m$ ve $z \in U$ olmak üzere,

$$f_j(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j}\, z^n \tag{2.1.23}$$

olarak tanımlanacaktır.

Teorem 2.1.19

$j=1,2$ olmak üzere (2.1.23) ile tanımlanan f_j fonksiyonları $\Im_\lambda(\alpha, A, B)$ sınıfında ise, $a_{n,j} \geq 0$, $j=1,2$ olmak üzere

$$h(z) = z - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{m}\left(a_{n,1} + a_{n,2}\right)z^n \ ,\left(\ a_{n,j} \geq 0\ ,\ j=1,2\ \right)$$

ile tanımlı h fonksiyonu da $\Im_\lambda(\alpha, A, B)$ sınıfına aittir [18]. ◆

Daha genel olarak, $j=1,2,\ldots m$ olmak üzere (2.1.23) ile tanımlanan her bir f_j fonksiyonu aynı $\Im_\lambda(\alpha, A, B)$ sınıfında ise,

$$h(z) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f_j(z) \tag{2.1.24}$$

ile tanımlı h fonksiyonu da $\Im_\lambda(\alpha, A, B)$ sınıfındadır [18].

Her bir $j=1,2,\ldots m$ için (2.1.23) ile tanımlı f_j fonksiyonları $\Im_\lambda(\alpha_j, A_j, B_j)$ sınıfında ise, $\alpha = \min\limits_{1\leq j\leq m}\{\alpha_j\}$, $A = \min\limits_{1\leq j\leq m}\{A_j\}$ ve $B = \max\limits_{1\leq j\leq m}\{B_j\}$ olmak üzere

$$h(z) = z - \frac{1}{m}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\right)z^n \qquad 2.1.25)$$

ile tanımlı h fonksiyonu $\Im_\lambda(\alpha, A, B)$ sınıfına aittir [18].

Benzer şekilde her bir $j=1,2,\ldots m$ için (2.1.23) ile tanımlı f_j fonksiyonları $\Re(\lambda, \alpha_j, A_j, B_j)$ sınıfında ise, $\alpha = \min\limits_{1\leq j\leq m}\{\alpha_j\}$, $A = \min\limits_{1\leq j\leq m}\{A_j\}$ ve $B = \max\limits_{1\leq j\leq m}\{B_j\}$ olmak üzere (2.1.25) ile tanımlı h fonksiyonu $\Re(\lambda, \alpha, A, B)$ sınıfındadır [18].

(2.1.23) ile tanımlı f_j $(j=1,2,\ldots m)$ fonksiyonlarının her biri aynı $\Im_\lambda(\alpha, A, B)$ sınıfında ise, $h(z) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f_j(z)$ ile verilen h fonksiyonu da $\Im_\lambda(\alpha, A, B)$ sınıfındadır. Benzer olarak, $j=1,2,\ldots m$ olmak üzere (2.1.23) ile tanımlanan her bir f_j fonksiyonları aynı $\Re(\lambda, \alpha, A, B)$ sınıfında iseler (2.1.24) ile tanımlı h fonksiyonu $\Re(\lambda, \alpha, A, B)$ sınıfındadır [18].

Teorem 2.1.20

$f_1(z)=z$ ve $f_n(z)=z-\dfrac{(B-A)(1-\alpha)}{(1+B)[1+(n-1)\lambda]}z^n$, $(n\geq 2)$ olarak alınsın. Bu durumda, $f\in\Im_\lambda(\alpha,A,B)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, f fonksiyonunun, $\mu_n\geq 0$ ve $\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n=1$ iken,

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n f_n(z)$$

şeklinde ifade edilebilmesidir. Benzer olarak, $f_1(z)=z$ ve $n\geq 2$ için $f_n(z)=z-\dfrac{(B-A)(1-\alpha)}{n(1+B)[1+(n-1)\lambda]}z^n$ alındığında, f fonksiyonunun, $\Re(\lambda,\alpha,A,B)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, bu fonksiyonunun $\mu_n\geq 0$ ve $\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n=1$ iken,

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n f_n(z)$$

şeklinde ifade edilebilmesidir [18]. ◆

$\Im_\lambda(\alpha,A,B)$ ve $\Re(\lambda,\alpha,A,B)$ sınıflarının yukarıda söylenen özelliklerine ek olarak, onların birer konveks küme oldukları da gösterilmiştir [18].

2.2 p-Katlı Fonksiyonların Ek Koşullu Bazı Altsınıfları

Yalınkat fonksiyonların S altsınıfı üzerinde ek koşullarla tanımlanabilen altsınıfların yanı sıra, p-katlı fonksiyonlar sınıfı üzerinde de aynı yöntemler uygulanarak yeni altsınıflar tanımlanabilir. Tanımlanan bu yeni altsınıflar, f fonksiyonunun seçimine bağlı olarak farklılıklar gösterir.

Negatif katsayılı analitik fonksiyonların $T_p^{(1)}$ sınıfı, $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve p-katlı olan

$$f(z)=z^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n}\ ,\ a_{p+n}\geq 0\ ,\ p\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\} \tag{2.2.1}$$

fonksiyonlarından oluşur. $T_p^{(1)}$ sınıfına ait bir f fonksiyonunun $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, en az bir α $(0 \le \alpha < p)$, en az bir λ $(\lambda \ge 0)$ ve tüm $z \in U$ değerleri için,

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{f(z)}{z^p}+\lambda\frac{f'(z)}{p z^{p-1}}\right\} > \frac{\alpha}{p} \tag{2.2.2}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Son zamanlarda, S.K. Lee, S. Owa ve H.M. Srivastava [35], $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfı üzerinde çalışmışlardır. Özellikle, $F_1(\lambda,\alpha)$ sınıfı S.B. Bhoosnurmath ve S.R. Swamy [34] tarafından ele alınmıştır.

Yardımcı Önerme 2.2.1

(2.2.1) ile tanımlanan f fonksiyonunun $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(p+\lambda\, n)a_{p+n} \le p-\alpha$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Eşitlik, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, her bir

$$f(z)=z^p-\frac{p-\alpha}{p+\lambda\, n}z^{p+n} \tag{2.2.3}$$

fonksiyonu için sağlanır [35]. ◆

Yardımcı Önerme 2.2.2

(2.2.1) ile tanımlı f fonksiyonu $\lambda \ge 1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(p+n)\, a_{p+n} \le \frac{(p+1)(p-\alpha)}{p+\lambda}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu sonuç kesindir [35]. ◆

f_j fonksiyonları $z \in U$, $p \in \mathbb{N}$ ve $j=1,2,\ldots,m$ için $a_{p+n,j} \ge 0$ olmak üzere

$$f_j(z)=z^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n,j}\, z^{p+n} \tag{2.2.4}$$

ile tanımlanmış olsun.

Teorem 2.2.1

(2.2.4) ile tanımlı f_j $\left(j=1,2,\ldots,m\right)$ fonksiyonları $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfında olsunlar.

Bu durumda, $b_{p+n}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}a_{p+n,j}$ olmak üzere

$$h(z)=z^p-\sum_{n=1}^{\infty}b_{p+n}\,z^{p+n}$$

ile tanımlı h fonksiyonu da $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfındadır [16]. ◆

(2.2.4) ile tanımlı f_j fonksiyonları her bir $j=1,2,\ldots m$ için, $F_p\left(\lambda,\alpha_j\right)$ sınıfında ve $\alpha=\min_{1\le j\le m}\left\{\alpha_j\right\}$ ise

$$h(z)=z^p-\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{p+n,j}\right)z^{p+n}$$

ile tanımlı h fonksiyonu $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfına ait olur. Ve yine,

$$\sum_{j=1}^{m}c_j=1$$

olmak üzere

$$h(z)=\sum_{j=1}^{m}c_j\,f_j(z)$$

ile tanımlı h fonksiyonu da $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfındadır [16].

$F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfı konvekstir. Bunun sonucu olarak, $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfının ekstrem noktaları vardır.

Teorem 2.2.2

$0\le\alpha<p$, $p,n\in\mathbb{N}$ için $f_p(z)=z^p$ ve $f_{p+n}(z)=z^p-\dfrac{p-\alpha}{p+\lambda\,n}z^{p+n}$ olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mu_{p+n}\ge0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{p+n}=1$ olmak üzere

$$f(z)=\sum_{m=k}^{\infty}\mu_{p+n}\,f_{p+n}(z)$$

olmasıdır [16]. ◆

$F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfının ekstrem noktaları, $p,n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $f_p(z)=z^p$ ve $f_{p+n}(z)=z^p-\dfrac{p-\alpha}{p+\lambda n}z^{p+n}$ fonksiyonlarıdır.

Teorem 2.2.3

$f(z)=z^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n}$, $\quad a_{p+n}\geq 0,\ p\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ fonksiyonu $F_p(\lambda,\alpha)$ sınıfında olsun. Bu durumda, $n\geq 1$ için

$$r_1(p,\lambda,\alpha,\delta)=\inf_n\left\{\left[\frac{(p-\delta)(p+\lambda n)}{(p+n)(p-\alpha)}\right]^{\frac{1}{n}}\right\}$$

$$r_2(p,\lambda,\alpha,\delta)=\inf_n\left\{\left[\frac{(p-\delta)(p+\lambda n)}{(p+n-\delta)(p-\alpha)}\right]^{\frac{1}{n}}\right\}$$

$$r_3(p,\lambda,\alpha,\delta)=\inf_n\left\{\left[\frac{p(p-\delta)(p+\lambda n)}{(p+n)(p+n-\delta)(p-\alpha)}\right]^{\frac{1}{n}}\right\}$$

olmak üzere f fonksiyonu, $|z|<r_1(p,\lambda,\alpha,\delta)$, $|z|<r_2(p,\lambda,\alpha,\delta)$ ve $|z|<r_3(p,\lambda,\alpha,\delta)$ diskinde, sırasıyla, δ $(0\leq\delta<p)$ mertebeli p-katlı konvekse-yakın, yıldızıl ve konveks fonksiyondur. Sonuçlar (2.2.3) ile verilen ekstremal fonksiyon için kesindir [16]. ◆

S_p, $p\geq 1$ olmak üzere $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve p-katlı

$$f(z)=z^p+\sum_{n=1}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n}\ ,\ a_{p+n}\geq 0,\ p\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı olsun. $-1\leq B<A\leq 1,\ -1\leq B<0,\ 0\leq\alpha<p$ olmak üzere $P^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfı da, S_p sınıfındaki

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{p+\left[pB+(A-B)(p-\alpha)\right]z}{1+Bz}$$

subordinasyonunu sağlayan f fonksiyonlarının altsınıfını oluştursun. Başka bir deyişle, $f\in P^*(p,A,B,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $z\in U$ için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{p+[pB+(A-B)(p-\alpha)]w(z)}{1+Bw(z)} \tag{2.2.5}$$

olacak şekilde, $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ koşullarını sağlayan bir w fonksiyonunun var olmasıdır.

(2.2.5) koşulu,

$$\left|\frac{\frac{zf'(z)}{f(z)}-p}{[pB+(A-B)(p-\alpha)]-B\frac{zf'(z)}{f(z)}}\right|<1 \tag{2.2.6}$$

eşitsizliği ile eşdeğerdir.

$T_p^{(2)}$ sınıfı, S_p sınıfının

$$f(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}|a_{p+n}|z^{p+n}\ ,\ k\geq 2 \tag{2.2.7}$$

şeklinde ifade edilebilen, analitik ve p-katlı fonksiyonları kapsayan bir alt sınıfı olsun. $P_k(p,A,B,\alpha)$ sınıfını,

$$P_k(p,A,B,\alpha)=P^*(p,A,B,\alpha)\cap T_p^{(2)}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 2.2.4

f fonksiyonu, (2.2.7) ile tanımlansın. Bu durumda, f fonksiyonunun $P_k(p,A,B,\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{n=k}^{\infty}[(1-B)n+(A-B)(p-\alpha)]|a_{p+n}|\leq(A-B)(p-\alpha)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.Bu sonuçta eşitlik $n\geq k$, $k\geq 2$ olmak üzere

$$f(z)=z^p-\frac{(A-B)(p-\alpha)}{(1-B)n+(A-B)(p-\alpha)}z^{p+n} \tag{2.2.8}$$

olarak seçildiğinde vardır [21]. ◆

Teorem 2.2.5

(2.2.7) ile tanımlanan f fonksiyonu, $P_k(p,A,B,\alpha)$ sınıfında ise, $|z|=r$ için,

$$r^p-\frac{(A-B)(p-\alpha)}{(1-B)k+(A-B)(p-\alpha)}r^{p+k}\leq |f(z)|\leq r^p+\frac{(A-B)(p-\alpha)}{(1-B)k+(A-B)(p-\alpha)}r^{p+k} \quad (2.2.9)$$

ve

$$pr^{p-1}-\frac{(A-B)(p-\alpha)(p+k)}{(1-B)k+(A-B)(p-\alpha)}r^{p+k-1}\leq |f'(z)|\leq pr^{p-1}+\frac{(A-B)(p-\alpha)(p+k)}{(1-B)k+(A-B)(p-\alpha)}r^{p+k-1} \quad (2.2.10)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Tüm eşitsizlikler kesindir. Bu ifadelerde eşitlik, her bir

$$f(z)=z^p-\frac{(A-B)(p-\alpha)}{(1-B)k+(A-B)(p-\alpha)}z^{p+k} \quad , \ (z=\mp r)$$

fonksiyonu için elde edilir [21]. ◆

Eğer $f\in P_k(p,A,B,\alpha)$ ise, U birim diski, f fonksiyonu altında

$$|w|<\frac{(1-B)k}{(1-B)k+(A-B)(p-\alpha)}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüştürülür. Bu eşitsizlik

$$f(z)=z^p-\frac{(A-B)(p-\alpha)}{(1-B)k+(A-B)(p-\alpha)}z^{p+k}$$

ekstremal fonksiyonu ile kesindir.

Bu ifade ile Teorem 2.2.4 de $\alpha=0$ yazıldığında, (2.2.7) ile tanımlı $P_k(p,A,B)$ sınıfındaki f fonksiyonunun $|z|=r$ için,

$$r^p-\frac{(A-B)p}{(1-B)k+(A-B)p}r^{p+k}\leq |f(z)|\leq r^p+\frac{(A-B)p}{(1-B)k+(A-B)p}r^{p+k}$$

ve

$$pr^{p-1}-\frac{(A-B)p(p+k)}{(1-B)k+(A-B)p}r^{p+k-1}\leq |f'(z)|\leq pr^{p-1}+\frac{(A-B)p(p+k)}{(1-B)k+(A-B)p}r^{p+k-1}$$

eşitsizliklerini sağlayacağı sonucu elde edilir. Eşitlik durumu, her bir

$$f(z)=z^p-\frac{(A-B)p}{(1-B)k+(A-B)p}z^{p+k} \quad , \ z=\pm r$$

ekstremal fonksiyonu için gerçeklenir.

Eğer f fonksiyonu $P_k(p,A,B)$ sınıfında ise, U birim diski, f fonksiyonu altında

$$|w| < \frac{(1-B)k}{(1-B)k+(A-B)p}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüştürülür. Bu eşitsizlik,

$$f(z)= z^p - \frac{(A-B)p}{(1-B)k+(A-B)p} z^{p+k}$$

ekstremal fonksiyonu ile kesinlik kazanır.

Teorem 2.2.6

c gerçel sayısı, $c>-p$ olacak şekilde seçilsin. Eğer $f \in P_k(p,A,B,\alpha)$ ise,

$$F(z)=\frac{c+p}{z^c}\int_0^z t^{c-1} f(t)\, dt \tag{2.2.11}$$

ile tanımlı F fonksiyonu da $P_k(p,A,B,\alpha)$ sınıfındadır [21].

Eğer $F \in P_k(p,A,B,\alpha)$ ise, (2.2.11) ile tanımlı f fonksiyonu

$$R^* = \inf_{n\geq k\geq 2}\left\{\left[\left(\frac{c+p}{c+p+n}\right)\left(\frac{(1-B)n+(A-B)(p-\alpha)}{(A-B)(p-\alpha)}\right)\left(\frac{p}{p+n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\right\}$$

olmak üzere, $|z|<R^*$ içinde p-katlıdır. Bu sonuç kesindir [21]. ◆

Teorem 2.2.7

Eğer $f \in P_k(p,A,B,\alpha)$ ise,

$$R_p = \inf_{n\geq k\geq 2}\left\{\left\{\left[\frac{(1-B)n+(A-B)(p-\alpha)}{(A-B)(p-\alpha)}\right]\left(\frac{p}{p+n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{n}}\right\}$$

iken, f fonksiyonu $|z|< R_p$ diskinde p-katlı konveks fonksiyondur. Bu sonuç, (2.2.8) ile tanımlanan ekstremal fonksiyon için kesindir [21]. ◆

Teorem 2.2.8

$f_j(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}\left|a_{p+n_j}\right|z^{p+n}$, $j=1,2,\ldots m$ olsun. $f_j\in P_k(p,A,B,\alpha)$ ise, bu durumda, $b_{p+n}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+n,j}$ olmak üzere $h(z)=z^p-\sum_{n=k}^{m}|b_{p+n}|z^{p+n}$ ile tanımlı h fonksiyonu da $P_k(p,A,B,\alpha)$ sınıfına aittir [21]. ◆

Teorem 2.2.9

$$f_p(z)=z^p \quad \text{ve} \quad f_{p+n}(z)=z^p-\frac{(A-B)(p-\alpha)}{(1-B)n+(A-B)(p-\alpha)}z^{p+n}, \quad (n\geq k\ ,\ k\geq 2)$$

olsun. Bu durumda,

$$f\in P_k(p,A,B,\alpha)\Leftrightarrow \lambda_n\geq 0 \text{ ve } \lambda_p+\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n=1 \text{ iken, } f(z)=\lambda_p f_p(z)+\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n f_{p+n}(z)$$

önermesi doğrudur [21]. ◆

$T_p^{(3)}$ sınıfı, U birim diskinde p-katlı ve düzenli ve $a_p>0$, $k\geq p\geq 1$ olmak üzere $f(z)=a_p z^p-\sum_{m=k+1}^{\infty}|a_m|z^m$ şeklinde ifade edilen fonksiyonların sınıfı olarak tanımlansın. Bu sınıftaki fonksiyonlardan $-1\leq B<A\leq 1$, $-1\leq B\leq 0$, $0\leq\alpha<p$ iken,

$$\left|\frac{\dfrac{f'(z)}{z^{p-1}}-pa_p}{[pB+(A-B)(p-\alpha)]a_p-B\dfrac{f'(z)}{z^{p-1}}}\right|<1\ ,\ z\in D$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı $P^*(A,B,k,p,\alpha)$ olsun.

M.K. Aouf [15], $0<z_0<1$ olmak üzere, $P^*(A,B,k,p,\alpha)$ sınıfının $f(z_0)=z_0^p$ ek koşulu ile $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ altsınıfını ve $f'(z_0)=p\,z_0^{p-1}$ ek koşulu ile $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ altsınıfını tanımlamış ve bu iki alt sınıfla ilgili özellikleri incelemiştir. $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfları için katsayı kestirimleri, büyüme ve bükülme teoremleri, kapalılık teoremleri ile δ $(0\leq\delta<1)$ mertebeli konvekslik yarıçapları aşağıda ispatsız olarak verilmektedir.

Teorem 2.2.10

$f(z_0)=z_0^p$ koşulunu sağlayan $T_p^{(3)}$ sınıfındaki bir fonksiyonun $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{m=k+1}^{\infty}\left\{m(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z_0^{m-p}\right\}|a_m|\leq(A-B)(p-\alpha)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu sonuç kesindir. Eşitlik durumu, $m\geq k+1$, $k\geq p$ olmak üzere

$$f(z)=\frac{m(1-B)z^p-(A-B)(p-\alpha)z^m}{m(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z_0^{m-p}}$$

fonksiyonu için vardır [15]. ◆

Teorem 2.2.10 dan, f fonksiyonunun $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfında olması durumunda, $m\geq k+1$, $k\geq p$ olmak üzere

$$|a_m|\leq\frac{(A-B)(p-\alpha)}{m(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z_0^{m-p}}$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Teorem 2.2.11

$f'(z_0)=pz_0^{p-1}$ koşulunu sağlayan $f\in T_p^{(3)}$ fonksiyonunu alalım. f fonksiyonunun $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{m=k+1}^{\infty}\left\{m(1-B)-\frac{1}{p}(A-B)(p-\alpha)z_0^{m-p}\right\}|a_m|\leq(A-B)(p-\alpha)$$

eşitsizliğinin doğru olmasıdır. Bu sonuç kesindir. Eşitlik durumu $m\geq k+1$, $k\geq p$ iken

$$f(z)=\frac{m(1-B)z^p-(A-B)(p-\alpha)z^m}{m\left[(1-B)-\frac{1}{p}(A-B)(p-\alpha)z_0^{m-p}\right]}$$

fonksiyonu için vardır [15]. ◆

Teorem 2.2.11 den, $f\in T_p^{(3)}$ olmak üzere f fonksiyonu $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfında ise, $m\geq k+1$ ve $k\geq p$ iken

$$|a_m|\leq\frac{(A-B)(p-\alpha)}{m\left[(1-B)-\frac{1}{p}(A-B)(p-\alpha)z_0^{m-p}\right]}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.2.12

$f \in P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ ve $|z|=r$ olsun. Bu durumda,

$$a=\frac{(k+1)(1-B)}{(k+1)(1-B)-(A-B)(p-\alpha)\,z_0^{k+1-p}}$$

ve

$$b=\frac{(A-B)(p-\alpha)}{(k+1)(1-B)-(A-B)(p-\alpha)\,z_0^{k+1-p}}$$

olmak üzere

$$ar^p-br^{k+1}\leq |f(z)| \leq ar^p+br^{k+1} \tag{2.2.12}$$

ve

$$par^{p-1}-(k+1)br^k\leq |f'(z)| \leq par^{p-1}+(k+1)br^k \tag{2.2.13}$$

ifadeleri doğrudur. Bu sonuçlar kesindir [15]. Bu sonuçlardaki eşitlik durumu için

$$f(z)=\frac{(k+1)(1-B)z^p-(A-B)(p-\alpha)z^{k+1}}{(k+1)(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z_0^{k+1-p}}$$

fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için (2.2.12) ve (2.2.13) ifadelerinin sol tarafındaki eşitlik $z=r$ de sağlanırken, sağ tarafındaki eşitlik $z=re^{i\pi/(k+1-p)}$ de sağlanır [15]. ◆

(2.2.12) ifadesinde $r\to 1$ alınırsa, U diskinin $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfındaki bir f fonksiyonu ile

$$|w|<\frac{(k+1)(1-B)-(A-B)(p-\alpha)}{(k+1)(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z_0^{k+1-p}}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüştüğü görülür. Bu eşitsizlik kesindir.

Teorem 2.2.13

$f \in P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ ve $|z|=r$ olsun. Bu durumda,

$$c=\frac{p(1-B)}{p(1-B)-(A-B)(p-\alpha)\,z_0^{k+1-p}}$$

ve

$$d=\frac{p(A-B)(p-\alpha)}{(k+1)\{p(1-B)-(A-B)(p-\alpha)\,z_0^{k+1-p}\}}$$

olmak üzere

$$cr^p-dr^{k+1}\leq |f(z)| \leq cr^p+dr^{k+1} \tag{2.2.14}$$

ve

$$pcr^{p-1}-(k+1)dr^k \le |f'(z)| \le pcr^{p-1}+(k+1)dr^k \quad (2.2.15)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu sonuçlar kesindir. (2.2.14) ve (2.2.15) ifadelerindeki eşitlik

$$f(z)=\frac{(k+1)p(1-B)z^p-p(A-B)(p-\alpha)z^{k+1}}{(k+1)\{\,p(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z_0^{k+1-p}\,\}}$$

fonksiyonu için gerçeklenir [15]. ◆

(2.2.14) ifadesinde $r\to 1$ alınırsa, $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun, U birim diskini,

$$|w|<\frac{(k+1)p(1-B)-p(A-B)(p-\alpha)}{(k+1)\left[p(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z_0^{k+1-p}\right]}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüştürdüğü görülür. Bu eşitsizlik kesindir.

Teorem 2.2.14

Eğer f fonksiyonu, $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ veya $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfında ise, bu durumda, f fonksiyonu,

$$R^*=\inf_{m\ge k+1}\left\{\left[\frac{(1-B)}{(A-B)(p-\alpha)}\,\frac{p(p-\delta)}{(m-\delta)}\right]^{\frac{1}{(m-p)}}\right\}$$

olmak üzere, $|z|<R^*$ diskinde, δ $(0\le\delta<p)$ mertebeden konveks fonksiyondur. Bu sonuç kesindir [15]. ◆

$P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfları için $m\ge k+1$, $k\ge p$ olmak üzere, sırasıyla,

$$f(z)=\frac{m(1-B)z^p-(A-B)(p-\alpha)z^m}{m(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z_0^{m-p}}$$

ve

$$f(z)=\frac{m(1-B)z^p-(A-B)(p-\alpha)z^m}{m\left[(1-B)-\frac{1}{p}(A-B)(p-\alpha)z_0^{m-p}\right]}$$

alınırsa eşitlik görülür.

Teorem 2.2.15

$$b_p=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{p,j}\ ,\ b_m=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{m,j}\quad (m\ge k+1\ ,\ k\ge p),\ \lambda_j\ge 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j=1 \text{ olmak}$$

üzere, $j=1,2,\ldots$ için f_j fonksiyonları

$$f_j(z)=a_{p,j}z^p-\sum_{m=k+1}^{\infty}|\,a_{m,j}\,|z^m\quad ;$$

ve $p\in\mathbb{N}$ iken $a_{p+n,j}\ge 0$ olmak üzere h fonksiyonu

$$h(z)=b_pz^p-\sum_{m=k+1}^{\infty}|\,b_m\,|z^m$$

şeklinde tanımlansın. Her bir $j=1,2,\ldots$ için $f_j\in P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ (veya $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$) ise, h fonksiyonu da $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ (veya $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$) sınıfındadır. ◆

Bu teorem, varsayımlarla $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıflarının her ikisinin de aritmetik orta altında kapalı olduğunu gösterir [15].

Benzer olarak $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ ve $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfları, konveks doğrusal bileşimler altında da kapalıdır [15].

Teorem 2.2.16

$f_k(z)=z^p$ ve $m\ge k+1\ ,\ k\ge p$ iken

$$f_m(z)=\frac{m(1-B)z^p-(A-B)(p-\alpha)z^m}{m(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z^{m-p}}$$

fonksiyonları tanımlansın. Bu durumda, f fonksiyonunun $P_0(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, $m\ge k$ için $\lambda_m\ge 0$ ve $\sum_{m=k}^{\infty}\lambda_m=1$ olmak üzere,

$$f(z)=\sum_{m=k}^{\infty}\lambda_m f_m(z)\ ,\ z\in U$$

şeklinde ifade edilebilmesidir [15]. ◆

Teorem 2.2.17

$m \geq k+1$, $k \geq p$ olmak üzere $f_k(z)=z^p$ ve

$$f_m(z)=\frac{m(1-B)z^p-(A-B)(p-\alpha)z^m}{m\{(1-B)-(A-B)(p-\alpha)z^{m-p}\}}$$

fonksiyonları tanımlansın. Bu durumda, bir $f \in T_p^{(3)}$ fonksiyonunun $P_1(A,B,k,p,\alpha,z_0)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, $m \geq k$ iken $\lambda_m \geq 0$ ve $\sum_{m=k}^{\infty}\lambda_m = 1$ olmak üzere,

$$f(z)=\sum_{m=k}^{\infty}\lambda_m f_m(z) \ , \ z \in U$$

şeklinde ifade edilebilmesidir [15]. ◆

$p \geq 1$, $a_p \geq 0$ ve $a_{n+k} \geq 0$ olmak üzere $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskinde düzenli olan,

$$f(z)=a_p z^p-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+k}z^{n+k}$$

fonksiyonlarının sınıfı $T_p^{(4)}$ ve

$$H=\{w: w, U \ da \ regüler, w(0)=0 \ , |w(z)|<1 \ , z\in U\}$$

olsun.

Ayrıca

$$S_p(A,B,\alpha)=\left\{ f \in T_p^{(4)} : \frac{zf'(z)}{f(z)}=(p-\alpha)\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}+\alpha, -1\leq A<B\leq 1, 0\leq \alpha<p, w\in H\right\}$$

$$=\left\{ f \in T_p^{(4)} : \frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{p+[pB+(A-B)(p-\alpha)]w(z)}{1+Bw(z)}, -1\leq A<B\leq 1, \ 0\leq \alpha<p, \ w\in H\right\}$$

ve

$$K_p(A,B,\alpha)=\left\{ f \in T_p^{(4)} : \frac{zf'(z)}{p}\in S_p(A,B,\alpha)\right\}$$

sınıflarını tanımlayalım.

$T_p^{(4)}$ sınıfının $S_p(A,B,\alpha)$ ve $K_p(A,B,\alpha)$ alt sınıfları, $0\leq\alpha<p$ olmak üzere, sırasıyla, α-mertebeli p-katlı yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıflarıdır.

$S_p(A,B,\alpha)$ sınıfının tanımı gereği, bu sınıftaki fonksiyonlar $0\le\alpha<p$ ve $z\in U$ iken $\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha$ eşitsizliğini sağlarlar. Ayrıca $\operatorname{Re}\left\{\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}\right\}$, $w(0)=0$ koşulu altında U birim diskinde harmonik bir fonksiyon olduğundan, $f\in S_p(A,B,\alpha)$, $z=re^{i\theta}$, $r<1$ için,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}d\theta=\frac{(p-\alpha)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}d\theta+\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{(p-\alpha)}{2\pi}2\pi+\alpha=p$$

yazılabilir. Bu, $S_p(A,B,\alpha)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun p-katlılığını gösterir. Benzer şekilde, $f\in K_p(A,B,\alpha)$ ise, f fonksiyonu, U birim diskinde, p-katlı konveks bir fonksiyondur.

Verilen bir z_0 $(-1<z_0<1)$ gerçel sayısı için, T_p^* ve T_p^{**} sınıfları, $T_p^{(4)}$ sınıfının $z_0\neq0$ iken, sırasıyla, $f(z_0)=z_0^p$ ve $f'(z_0)=pz_0^{p-1}$ koşullarını sağlayan alt sınıfları olsunlar.

$S_p^*(A,B,\alpha)$, $S_p^{**}(A,B,\alpha)$, $K_p^*(A,B,\alpha)$ ve $K_p^{**}(A,B,\alpha)$ sınıfları, $T_p^{(4)}$ sınıfının, sırasıyla,

$$S_p^*(A,B,\alpha)=S_p(A,B,\alpha)\cap T_p^*$$

$$S_p^{**}(A,B,\alpha)=S_p(A,B,\alpha)\cap T_p^{**}$$

$$K_p^*(A,B,\alpha)=K_p(A,B,\alpha)\cap T_p^*$$

$$K_p^{**}(A,B,\alpha)=K_p(A,B,\alpha)\cap T_p^{**}$$

şeklinde tanımlanmış altsınıfları olsunlar.

M.K.Aouf [26], $S_p(A,B,\alpha)$, $K_p(A,B,\alpha)$, $S_p^*(A,B,\alpha)$, $S_p^{**}(A,B,\alpha)$, $K_p^*(A,B,\alpha)$ ve $K_p^{**}(A,B,\alpha)$ sınıflarındaki fonksiyonlar için gerekli ve yeterli koşullar elde etmiştir. Ayrıca, kapalılık teoremleri ile büyüme-bükülme teoremlerini ispatlayıp, bu alt sınıfların konveks lineer bileşimler altında kapalı olduğunu da göstermiş ve bunlara ek olarak, $S_p^*(A,B,\alpha)$ ve $S_p^{**}(A,B,\alpha)$ sınıflarının konvekslik yarıçaplarını belirlemiştir.

$\alpha=0$ alındığında G.R. Lakshma ve K.S. Padmanabhan [5] 'a ait sonuçlara, $k=p=1$, $B=1$ ve $A=-1$ alındığında da H.Silverman [6] 'a ait olan sonuçlara ulaşılır.

Aşağıdaki ifadelerde, fonksiyonların $S_p(A,B,\alpha)$, $K_p(A,B,\alpha)$, $S_p^*(A,B,\alpha)$, $S_p^{**}(A,B,\alpha)$, $K_p^*(A,B,\alpha)$ ve $K_p^{**}(A,B,\alpha)$ sınıflarında olmaları için gerekli ve yeterli koşullar belirlenmekte ve bu amaçla kolaylık olması açısından

$$h=(B-A)(p-\alpha)$$

$$C_m=(m-p)(B+1)+h$$

$$E_m=(m-p)(B+1)+h(1-z_0^{m-p})$$

gösterimleri kullanılmaktadır.

Yardımcı Önerme 2.2.3

$f \in T_p^{(4)}$ olsun. Bu durumda,

$$f \in S_p(A,B,\alpha) \Leftrightarrow \sum_{m=k+1}^{\infty} C_m a_m \le h a_p$$

ve

$$f \in K_p(A,B,\alpha) \Leftrightarrow \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{m}{p} C_m a_m \le h a_p$$

önermeleri doğrudur [26]. ◆

Teorem 2.2.18

$f \in T_p^*$ olsun. Bu durumda $f \in S_p^*(A,B,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} E_m a_m \le h$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [26]. ◆

$k \ge p$ olmak üzere $f(z)=a_p z^p - \sum_{n=1}^{\infty} a_m z^m$ fonksiyonu $S_p^*(A,B,a)$ sınıfında ise, $m \ge k+1$ iken

$$a_m \le \frac{h}{E_m}$$

olur. Eşitlik durumu

$$f(z)=\frac{C_m z^p - h z^m}{E_m}$$

şeklindeki fonksiyonlar için sağlanır.

Teorem 2.2.19

$f \in T_p^*$ olsun. Bu durumda $f \in K_p^*(A,B,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{m=k+1}^{\infty}\left[C_m - h z_0^{m-p}\right] a_m \leq h$$

olmasıdır [26]. ◆

$f \in S_p^{**}(A,B,\alpha)$ olması, $f \in S_p(A,B,\alpha)$ olması anlamına geldiğinden, aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$f \in T_p^{**}$ iken, $f \in S_p^{**}(A,B,\alpha)$ ve $f \in K_p^{**}(A,B,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, sırasıyla,

$$\sum_{m=k+1}^{\infty}\left[C_m - \frac{m}{p} h z_0^{m-p}\right] a_m \leq h$$

ve

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{m}{p} E_m a_m \leq h$$

olmasıdır [26].

Teorem 2.2.20

$T_p^{(4)}$ sınıfındaki bir f fonksiyonu $S_p^*(A,B,\alpha)$ sınıfında ise,

$$|z| \leq r = r(A,B,\alpha) = \inf_m \left\{ \left[\left(\frac{p}{m}\right)^2 \frac{C_m}{h} \right]^{1/m-p} \right\}$$

diskinde f, p-katlı konveks fonksiyondur. Bu sınır kesindir. Eşitlik durumu, $m=k+1, k+2, \ldots$ ve $k \geq p$ iken, her bir

$$f_m(z) = \frac{C_m z^p - h z^m}{E_m}$$

fonksiyonu için gerçeklenir [26]. ◆

$T_p^{(4)}$ sınıfındaki bir f fonksiyonu $S_p^{**}(A,B,\alpha)$ sınıfında ise,

$$|z| \leq r = r(A,B,\alpha) = \inf_m \left\{ \left[\left(\frac{p}{m}\right)^2 \frac{C_m}{h} \right]^{1/m-p} \right\}$$

diskinde p-katlı konveks fonksiyon olur. Bu sınır kesindir. Eşitlik durumu, $m=k+1,k+2,\ldots$ ve $k\geq p$ iken, her bir

$$f_m(z)=\frac{C_m z^p - h z^m}{C_m - \left(\frac{m}{p}\right) h z_0^{m-p}}$$

fonksiyonu için sağlanır.

$S_p^*(A,B,\alpha)$, $S_p^{**}(A,B,\alpha)$, $K_p^*(A,B,\alpha)$ ve $K_p^{**}(A,B,\alpha)$ sınıflarının tümü konveks doğrusal bileşimler altında kapalıdır [26].

Teorem 2.2.21

$m\geq k\geq p$ için $\lambda_m \geq 0$ ve $\sum_{m=k}^{\infty}\lambda_m =1$ olsun. Bu durumda $m\geq k+1$ olmak üzere,

$f_m(z)=\dfrac{C_m - h z^{m-p}}{E_m}$ ve $f_k(z)=1$ iken,

$$f\in S_p^*(A,B,\alpha) \Leftrightarrow f(z)=z^p\sum_{m=k}^{\infty}\lambda_m f_m(z) \quad ;$$

$f_m(z)=\dfrac{C_m - h z^{m-p}}{C_m - \left(\frac{m}{p}\right) h z_0^{m-p}}$ ve $f_k(z)=1$ iken,

$$f\in S_p^{**}(A,B,\alpha) \Leftrightarrow f(z)=z^p\sum_{m=k}^{\infty}\lambda_m f_m(z) \quad ;$$

$f_m(z)=\dfrac{mC_m - p h z^{m-p}}{mC_m - p h z_0^{m-p}}$ ve $f_k(z)=1$ iken,

$$f\in K_p^*(A,B,\alpha) \Leftrightarrow f(z)=z^p\sum_{m=k}^{\infty}\lambda_m f_m(z) \quad ;$$

$f_m(z)=\dfrac{C_m - \left(\frac{p}{m}\right) h z^{m-p}}{E_m}$ ve $f_k(z)=1$ iken,

$$f\in K_p^{**}(A,B,\alpha) \Leftrightarrow f(z)=z^p\sum_{m=k}^{\infty}\lambda_m f_m(z)$$

önermeleri doğrudur [26]. ◆

Teorem 2.2.22

$0 < z_0 < 1$ olacak şekilde bir z_0 gerçel sayısı ve $S_p^*(A,B,\alpha)$ sınıfından bir f fonksiyonu alalım. $|z|=r<1$ için,

$$\frac{C_{k+1}r^p - hr^{k+1}}{E_{k+1}} \le |f(z)| \le \frac{C_{k+1}r^p + hr^{k+1}}{E_{k+1}}$$

ve

$$\frac{pC_{k+1}r^{p-1} - (k+1)hr^k}{E_{k+1}} \le |f'(z)| \le \frac{pC_{k+1}r^{p-1} + (k+1)hr^k}{E_{k+1}}$$

olur ve sınırlara

$$f(z) = \frac{C_{k+1}z^p - hz^{k+1}}{E_{k+1}}$$

fonksiyonu ile ulaşılır [26]. ◆

Eğer, $f \in S_p^{**}(A,B,\alpha)$ ve z_0, $0 < z_0 < 1$ olacak şekilde bir gerçel sayı ise, $|z|=r<1$ için,

$$\frac{p\left(C_{k+1}r^p - hr^{k+1}\right)}{pC_{k+1} - (k+1)hz_0^{k+1-p}} \le |f(z)| \le \frac{p\left(C_{k+1}r^p + hr^{k+1}\right)}{pC_{k+1} - (k+1)hz_0^{k+1-p}}$$

ve

$$\frac{p\left(pC_{k+1}r^{p-1} - (k+1)hr^k\right)}{pC_{k+1} - (k+1)hz_0^{k+1-p}} \le |f'(z)| \le \frac{p\left(pC_{k+1}r^{p-1} + (k+1)hr^k\right)}{pC_{k+1} - (k+1)hz_0^{k+1-p}}$$

yazılır. Eşitlik durumu, her bir

$$f(z) = \frac{p\left(C_{k+1}z^p - hz^{k+1}\right)}{pC_{k+1} - (k+1)hz_0^{k+1-p}}$$

fonksiyonu için gerçeklenir [26].

$0 < z_0 < 1$ olacak şekilde bir z_0 gerçel sayısı ve $K_p^*(A,B,\alpha)$ sınıfından bir f fonksiyonu alalım. $|z|=r<1$ için,

$$\frac{(k+1)C_{k+1}r^p - phr^{k+1}}{(k+1)C_{k+1} - phz_0^{k+1-p}} \le |f(z)| \le \frac{(k+1)C_{k+1}r^p + phr^{k+1}}{(k+1)C_{k+1} - phz_0^{k+1-p}}$$

ve

$$\frac{p(k+1)\left[C_{k+1}r^{p-1} - hr^k\right]}{(k+1)C_{k+1} - phz_0^{k+1-p}} \le |f'(z)| \le \frac{p(k+1)\left[C_{k+1}r^{p-1} + hr^k\right]}{(k+1)C_{k+1} - phz_0^{k+1-p}}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Eşitlik, her bir

$$f(z)=\frac{(k+1)C_{k+1}z^{p}-phz^{k+1}}{(k+1)C_{k+1}-phz_0^{k+1-p}}$$

fonksiyonu için sağlanır [26].

Eğer, $f\in K_p^{**}(A,B,\alpha)$ ve z_0, $0<z_0<1$ olacak şekilde bir gerçel sayı ise, $|z|=r<1$ için,

$$\frac{C_{k+1}r^{p}-\left(\frac{ph}{(k+1)}\right)r^{k+1}}{C_{k+1}-hz_0^{k+1-p}}\leq|f(z)|\leq\frac{C_{k+1}r^{p}+\left(\frac{ph}{(k+1)}\right)r^{k+1}}{C_{k+1}-hz_0^{k+1-p}}$$

ve

$$\frac{p\left[C_{k+1}r^{p-1}-hr^{k}\right]}{C_{k+1}-hz_0^{k+1-p}}\leq|f'(z)|\leq\frac{p\left[C_{k+1}r^{p-1}+hr^{k}\right]}{C_{k+1}-hz_0^{k+1-p}}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Sonuçlar kesin olup, eşitlik, her bir

$$f(z)=\frac{C_{k+1}z^{p}-\left(\frac{ph}{(k+1)}\right)z^{k+1}}{C_{k+1}-hz_0^{k+1-p}}$$

fonksiyonu için gerçekleşir [26].

A_p, p belirli bir tamsayı olmak üzere $U=\{\,z:|z|<1\,\}$ birim diskinde analitik ve p-katlı

$$f(z)=z^{p}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{p+k}\,z^{p+k}$$

fonksiyonlarının sınıfını, $T_p^{(*)}$ ise A_p sınıfının, $k\geq1$ için $a_{p+k}\geq0$ olmak üzere

$$f(z)=z^{p}-\sum_{k=1}^{\infty}a_{p+k}\,z^{p+k} \tag{2.2.16}$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşan alt sınıfını tanımlasın.

$T_p^{(*)}(\alpha)$ ve $C_p^{(*)}(\alpha)$ sınıfları, sırasıyla, $S_p^{*}(\alpha)$ ve $C_p(\alpha)$ sınıflarının $T_p^{(*)}$ sınıfı ile arakesitlerinden elde edilen sınıflar yani,

$$T_p^{(*)}(\alpha)=S_p^{*}(\alpha)\cap T_p^{(*)}$$

ve

$$C_p^{(*)}(\alpha)=C_p(\alpha)\cap T_p^{(*)}$$

olsunlar.

$p=1$ için $T_p^{(*)}(\alpha)$ ve $C_p^{(*)}(\alpha)$ sınıfları H. Silverman tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir [7].

$k\geq 1$ için $b_{p+k}\geq 0$ olmak üzere g fonksiyonu

$$g(z)=z^p-\sum_{k=1}^{\infty} b_{p+k}\, z^{p+k} \tag{2.2.17}$$

ile tanımlansın. $g\in T_p^{(*)}(\alpha)$ ve $-1\leq B<A\leq 1$, $0\leq \alpha\leq p$, $0\leq \beta<p$ ve $0<\gamma\leq 1$ gerçel sayıları için

$$\left|\frac{\dfrac{zf'(z)}{g(z)}-p}{(A-B)(p-\alpha)-B\left(\dfrac{zf'(z)}{g(z)}-p\right)}\right|<\gamma \quad , \quad z\in U \tag{2.2.18}$$

oluyorsa f ***fonksiyonu*** $T_p^{(*)}$ ***sınıfındadır*** denir. Eğer $T_p^{(*)}$ sınıfındaki bir f fonksiyonu, $g\in C_p^{(*)}(\alpha)$ ve $0\leq\alpha<p$, $0\leq\beta<p$, $0<\gamma\leq 1$ gerçel sayıları için (2.2.18) koşulunu sağlıyorsa f ***fonksiyonu*** $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ ***sınıfındadır*** denir.

$p=1$, $A=1$ ve $B=-1$ için $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ ve $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfları sırasıyla H.M. Srivastava ve S. Owa tarafından çalışılan $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma)$ ve $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma)$ sınıflarının kısıtlanmışlarıdır [9, 10]. Bundan başka, $\alpha=p=1$ için $g(z)\equiv z$ olur. Şöyle ki, $A=1$ ve $B=-1$ için $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfı, $\alpha=1$ için S.M. Sarangi ve B.A.Uralegaddi [37] tarafından çalışılan sınıfı veren, V.P. Gupta ve P.K. Jain [38] tarafından düşünülen $P^*(\beta,\gamma)$ sınıfıdır.

Aşağıda $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ ve $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri, büyüme ve bükülme teoremlerini ve konvekslik yarıçaplarını verilmektedir.

Yardımcı Önerme 2.2.4

(2.2.17) ile tanımlı g fonksiyonunun $T_p^{(*)}(\alpha)$ ve $C_p^{(*)}(\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, sırasıyla,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+p-\alpha)b_{p+k}\leq(p-\alpha)$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k)(p+k-\alpha)b_{p+k}\leq p(p-\alpha)$$

olmasıdır [25]. ◆

Teorem 2.2.23

(2.2.16) ile tanımlı f fonksiyonu $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfında olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(1-\gamma B)(p+k)a_{p+k}-\left(\frac{p-\alpha}{p+k-\alpha}\right)p(1-\gamma A)+(A-B)\gamma\beta\right\}\leq(A-B)\gamma(p-\beta)$$

olur. ◆

$T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfındaki (2.2.16) ile tanımlı f fonksiyonu, $k\geq1$ için

$$a_{p+k}\leq\frac{(1-\gamma B)p(p-\alpha)+(A-B)\gamma k(p-\beta)}{(1-\gamma B)(p+k)(p+k-\alpha)}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu ifade

$$g(z)=z^p-\left(\frac{p-\alpha}{p+k-\alpha}\right)z^{p+k}\quad,\ k\geq1$$

fonksiyonuna göre

$$f(z)=z^p-\frac{(1-\gamma B)p(p-\alpha)+(A-B)\gamma k(p-\beta)}{(1-\gamma B)(p+k)(p+k-\alpha)}z^{p+k}\quad,\ k\geq1$$

fonksiyonu için kesindir.

Teorem 2.2.24

(2.2.16) ile tanımlı f fonksiyonu $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfında olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(1-\gamma B)(p+k)a_{p+k}-\frac{p(p-\alpha)}{(p+k)(p+k-\alpha)}\left((1-\gamma A)p+(A-B)\gamma\beta\right)\right\}\leq(A-B)\gamma(p-\beta)$$

yazılabilir. ◆

$C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfındaki (2.2.16) ile tanımlı f fonksiyonu, $k\geq 1$ için

$$a_{p+k} \leq \frac{p^2(p-\alpha)(1-\gamma B)+(A-B)\gamma\, k(p-\beta)(2p+k-\alpha)}{(1-\gamma B)(p+k)^2(p+k-\alpha)}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu ifade

$$g(z)=z^p-\frac{p(p-\alpha)}{(p+k)(p+k-\alpha)}z^{p+k} \quad , \quad k\geq 1$$

fonksiyonuna göre

$$f(z)=z^p-\frac{p^2(p-\alpha)(1-\gamma B)+(A-B)\gamma\, k(p-\beta)(2p+k-\alpha)}{(1-\gamma B)(p+k)^2(p+k-\alpha)}z^{p+k}, \; k\geq 1$$

fonksiyonu için kesindir.

Yardımcı Önerme 2.2.4 ün uygulamaları $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ ve $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıflarına ait aşağıda verilen büyüme ve bükülme teoremleri için birer yol göstericidirler.

Teorem 2.2.25

(2.2.16) ile tanımlı $f\in A(p)$ fonksiyonu özel olarak $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfında olsun. Bu durumda

$$\widetilde{A}_p \equiv \widetilde{A}_p(\alpha,\beta,\gamma,A,B)=\frac{p(p-\alpha)(1-\gamma B)+(A-B)\gamma(p-\beta)}{(1-\gamma B)(p+1)(p+1-\alpha)} \tag{2.2.19}$$

olmak üzere $z\in U$ için

$$|z|^p-\widetilde{A}_p|z|^{p+1} \leq |f(z)| \leq |z|^p+\widetilde{A}_p|z|^{p+1} \tag{2.2.20}$$

ve

$$|z|^{p-1}\left(p-(p+1)\widetilde{A}_p|z|\right)\leq |f'(z)| \leq |z|^{p-1}\left(p+(p+1)\widetilde{A}_p|z|\right)$$

olur. Bu sonuçlar

$$g(z)=z^p-\left(\frac{p-\alpha}{p+1-\alpha}\right)z^{p+1}$$

fonksiyonuna göre

$$f(z)=z^p-\frac{(1-\gamma B)p(p-\alpha)+(A-B)\gamma(p-\beta)}{(p+1)(1-\gamma B)(p+1-\alpha)}z^{p+1} \tag{2.2.21}$$

fonksiyonu ile kesindir. ◆

(2.2.20) eşitsizliğinin sol tarafında $|z| \to 1^-$ alınırsa, $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfındaki (2.2.16) ile tanımlı f fonksiyonunun, U birim diskini,

$$r_1 = \frac{(1-\gamma B)(2p+1-\alpha)-(A-B)\gamma(p-\beta)}{(1-\gamma B)(p+1)(p+1-\alpha)}$$

olmak üzere $|w| < r_1$ diskini kapsayan bölge üzerine dönüştürdüğü görülebilir. Bu eşitsizlik (2.2.21) ile tanımlanan ekstremal fonksiyon için kesindir.

Teorem 2.2.26

(2.2.16) ile tanımlı f fonksiyonu $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfında olsun. Bu durumda

$$\widetilde{B}_p \equiv \widetilde{B}_p(\alpha,\beta,\gamma,A,B) = \frac{(1-\gamma B)p^2(p-\alpha)+(A-B)\gamma(p-\beta)(2p+1-\alpha)}{(1-\gamma B)(p+1)^2(p+1-\alpha)} \quad (2.2.22)$$

olmak üzere $z \in U$ için

$$|z|^p - \widetilde{B}_p|z|^{p+1} \le |f(z)| \le |z|^p + \widetilde{B}_p|z|^{p+1} \quad (2.2.23)$$

ve

$$|z|^{p-1}\left(p-(p+1)\widetilde{B}_p|z|\right) \le |f'(z)| \le |z|^{p-1}\left(p+(p+1)\widetilde{B}_p|z|\right)$$

eşitsizlikleri doğrudur. Bu ifadelerdeki sınırlardaki eşitlikler,

$$g(z) = z^p - \frac{p(p-\alpha)}{(p+1)(p+1-\alpha)}z^{p+1}$$

fonksiyonuna göre

$$f(z) = z^p - \widetilde{B}_p z^{p+1} \quad (2.2.24)$$

fonksiyonu ile sağlanır. ◆

(2.2.23) eşitsizliğinin sol tarafında $|z| \to 1^-$ alınırsa, $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfındaki (2.2.16) ile tanımlı f fonksiyonunun, U birim diskini,

$$|w| < r_2 = \frac{(1-\gamma B)\left\{p^2+(2p+1)(p+1-\alpha)\right\}-(A-B)\gamma(p-\beta)(2p+1-\alpha)}{(1-\gamma B)(p+1)^2(p+1-\alpha)}$$

diskini kapsayan bölge üzerine dönüştürdüğü sonucu elde edilir. Bu eşitsizlik (2.2.24) ile tanımlanan ekstremal fonksiyon için kesindir.

Yardımcı Önerme 2.2.4 ışığında, (2.2.16) ile tanımlı f fonksiyonunun U birim diskinde p-katlı yıldızıl olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k)a_{p+k} \leq p$$

olmasıdır. $f \in T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ için $\widetilde{A}_p$, (2.2.19) ile tanımlanmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k)a_{p+k} \leq (p+1)\widetilde{A}_p \leq p$$

yazılabilir. Bundan başka $f \in C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ için $\widetilde{B}_p$ (2.2.22) ile verilmek üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k)a_{p+k} \leq (p+1)\widetilde{B}_p \leq p$$

olur. Böylece $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ ve $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfları p-katlı yıldızıl fonksiyonların altsınıflarıdır. Bu yüzden de, $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ ve $C_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ altsınıfları için p-katlı konvekslik yarıçapını hesaplamak doğaldır.

Teorem 2.2.27

(2.2.16) ile tanımlı f fonksiyonu $T_p^{(*)}(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfında ise $\widetilde{A}_p$ (2.2.19) ile verilen ifade olmak üzere f fonksiyonu,

$$R_p = \inf_{k\geq 1}\left\{\left[\frac{p^2}{(p+1)(p+k)\widetilde{A}_p}\right]^{1/k}\right\} = \frac{p^2}{(p+1)^2\,\widetilde{A}_p}$$

iken $|z| < R_p$ diskinde p-katlı konveks fonksiyondur. Eşitlik durumu, her bir

$$f(z) = z^p - \frac{(p+1)\widetilde{B}_p}{(p+k)} z^{p+k}, \quad k \geq 1$$

fonksiyonu için gerçeklenir. ◆

2.3 Meromorfik Yalınkat Fonksiyonların Genel Bir Sınıfı

$p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ olmak üzere, M_p, $U^* = \{ z : z \in \mathbf{C},\ 0 < |z| < 1 \} = U / \{0\}$ delinmiş diskinde analitik, p-katlı ve orjinde rezidüsü 1 olan basit bir kutba sahip

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n \qquad (2.3.1)$$

fonksiyonlarının sınıfını belirtsin. $S_{(p)}(\alpha)$ ve $C_{(p)}(\alpha)$ sınıfları da, M_p sınıfının, $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, sırasıyla, α-mertebeli meromorfik yıldızıl ve meromorfik konveks fonksiyonlardan oluşan alt sınıfları olsun [1, 8, 29].

Analitik olarak, M_p sınıfındaki bir f fonksiyonunun $S_{(p)}(\alpha)$ sınıfında olması için $z \in U^*$ ve $0 \leq \alpha < 1$ iken,

$$\mathrm{Re}\left\{ -\frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir.

Diğer taraftan, M_p sınıfındaki bir f fonksiyonunun $C_{(p)}(\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, $z \in U^*$ ve $0 \leq \alpha < 1$ iken,

$$\mathrm{Re}\left\{ -\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > \alpha$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f \in C_{(p)}(\alpha) \Leftrightarrow -z f' \in S_{(p)}(\alpha)$$

olduğunu görmek oldukça kolaydır.

M_p sınıfındaki bir f fonksiyonunun $\Sigma_p(\alpha,\beta,A,B)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, $z \in U^*$ olmak üzere, $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \beta \leq 1, -1 \leq A < B \leq 1$ ve $0 < B \leq 1$ iken,

$$\left| \frac{\dfrac{zf'(z)}{f(z)} + 1}{B\dfrac{zf'(z)}{f(z)} + [B + (A-B)(1-\alpha)]} \right| < \beta$$

eşitsizliğinin varolmasıdır [17].

Yine M_p sınıfındaki bir f fonksiyonunun $C_{(p)}(\alpha,\beta,A,B)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$-z\,f'(z)\in\Sigma_p(\alpha,\beta,A,B)$$

olmasıdır [17].

$0\leq\alpha<1$ ve $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$\Sigma_p(\alpha,1,-1,1)=S_{(p)}(\alpha) \text{ ve } C_{(p)}(\alpha,1,-1,1)=C_{(p)}(\alpha)$$

olduğu da söylenebilir.

$\Sigma_p(\alpha,\beta,A,B)$ ve $C_{(p)}(\alpha,\beta,A,B)$ sınıflarının aşağıdaki özel durumları söz edilmeye değerdir:

(i) $\Sigma^*(\alpha,\beta,A,B)$ sınıfı, M.K.Aouf [22] tarafından çalışılmış olmak üzere

$$\Sigma_1(\alpha,\beta,A,B)=\Sigma^*(\alpha,\beta,A,B)$$

şeklindedir.

(ii) $\Sigma^*(\alpha,\beta)$, M.L.Mogra ve arkadaşları tarafından [27] oluşturulmuş, U^* bölgesindeki α-mertebeli β tipli meromorfik yıldızıl fonksiyonların sınıfı olmak üzere

$$\Sigma_1(\alpha,\beta,-1,1)=\Sigma^*(\alpha,\beta)$$

yazılır. Bu sınıf ile bağımsız olarak B.A.Uralegaddi ve M.D.Ganigi de çalışmıştır [2].

(iii) $C(\alpha,\beta)$, U^* bölgesindeki α - mertebeli β tipli meromorfik konveks fonksiyonların sınıfı olmak üzere

$$C_{(1)}(\alpha,\beta,-1,1)=C(\alpha,\beta)$$

şeklindedir.

Yardımcı Önerme 2.3.1

$f\in M_p$ alalım. Eğer $0\leq\alpha<1$, $0<\beta\leq1$, $-1\leq A<B\leq1$ ve $0<B\leq1$ iken,

$$\sum_{n=p}^{\infty}\{(n+1)+\beta\,[Bn+(B-A)\alpha\,]\}|a_n|\leq(B-A)\beta\,(1-\alpha) \qquad (2.3.2)$$

oluyorsa, $f\in\Sigma_p(\alpha,\beta,A,B)$ olur [17]. ◆

Yardımcı Önerme 2.3.2

(2.3.1) ile tanımlı f fonksiyonu M_p sınıfında olsun. Eğer $0 \le \alpha < 1$, $0 < \beta \le 1$, $-1 \le A < B \le 1$ ve $0 < B \le 1$ iken,

$$\sum_{n=p}^{\infty} n\{(n+1)+\beta\,[Bn+A+(B-A)\alpha\,]\}|\,a_n\,| \le (B-A)\beta\,(1-\alpha) \tag{2.3.3}$$

eşitsizliği doğru ise, f fonksiyonu $C_{(p)}(\alpha,\beta,A,B)$ sınıfındadır [17]. ◆

Yardımcı Önerme 2.3.1 ve 2.3.2 yardımıyla, $\Sigma_p(\alpha,\beta,A,B)$ sınıfının $\Sigma_p^*(\alpha,\beta,A,B)$ altsınıfını ve $C_{(p)}(\alpha,\beta,A,B)$ sınıfının $K_{(p)}^*(\alpha,\beta,A,B)$ altsınıfını, sırasıyla (2.3.2) ve (2.3.3) katsayı sınırlarını sağlayan (2.3.1) ile tanımlı f fonksiyonlarının sınıfları olarak tanımlayalım.

(2.3.1) ile tanımlı M_p sınıfındaki bir f fonksiyonu $0 \le \alpha < 1$, $0 < \beta \le 1$, $\gamma \ge 0$, $-1 \le A < B \le 1$ ve $0 < B \le 1$ iken, katsayıları arasında

$$\sum_{n=p}^{\infty} \{(n+1)+\beta\,[Bn+A+(B-A)\alpha\,]\}(1-\gamma+\gamma\,n\,)|\,a_n\,| \le (B-A)\beta\,(1-\alpha)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $V_p(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfındadır.

$$V_p(\alpha,\beta,0,A,B)=\Sigma_p^*(\alpha,\beta,A,B) \text{ ve } V_p(\alpha,\beta,1,A,B)=K_p^*(\alpha,\beta,A,B) \tag{2.3.4}$$

eşitliklerini görmek kolaydır. Bundan başka $0 \le \alpha < 1$, $\gamma \ge 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ iken

$$V_p(\alpha,1,\gamma,-1,1)=V_p(\alpha,\gamma)$$

eşitliği de yazılabilir [30].

Teorem 2.3.1

(2.3.1) ile tanımlı f fonksiyonu $V_p(\alpha,\beta,\gamma,A,B)$ sınıfında ise $z \in U^*$ ve $\gamma \ge 0$ iken

$$\frac{1}{|z|}-\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)}{\{(p+1)+\beta\,[(Bp+A)+(B-A)\alpha\,]\}(1-\gamma+\gamma\,p)}|z|^p \le |f(z)|$$

$$\le \frac{1}{|z|}+\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)}{\{(p+1)+\beta\,[(Bp+A)+(B-A)\alpha\,]\}(1-\gamma+\gamma\,p)}|z|^p \tag{2.3.5}$$

ve

$$\frac{1}{|z|^2}-\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)\,p}{\{(p+1)+\beta\,[(B\,p+A)+(B-A)\alpha\,]\}(1-\gamma\,+\gamma\,p)}|z|^{p-1}\le|f'(z)|$$

$$\le\frac{1}{|z|^2}+\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)\,p}{\{(p+1)+\beta\,[(B\,p+A)+(B-A)\alpha\,]\}(1-\gamma\,+\gamma\,p)}|z|^{p-1}\qquad(2.3.6)$$

eşitsizlikleri vardır. (2.3.5) ve (2.3.6) ifadelerinin sınırlarına, $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)}{\{(p+1)+\beta\,[(B\,p+A)+(B-A)\alpha\,]\}(1-\gamma\,+\gamma\,p)}z^p$$

fonksiyonu ile ulaşılır [17]. ◆

Teorem 2.3.1 de $\gamma=0$ alarak ve (2.3.4) deki ilk bağıntıyı kullanarak, (2.3.1) ile tanımlı $\Sigma_p^*(\alpha,\beta,A,B)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun, $z\in U^*$ için

$$\frac{1}{|z|}-\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)}{\{(p+1)+\beta\,[(B\,p+A)+(B-A)\alpha\,]\}}|z|^p\le|f(z)|$$

$$\le\frac{1}{|z|}+\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)}{\{(p+1)+\beta\,[(B\,p+A)+(B-A)\alpha\,]\}}|z|^p\qquad(2.3.7)$$

ve

$$\frac{1}{|z|^2}-\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)\,p}{\{(p+1)+\beta\,[(B\,p+A)+(B-A)\alpha\,]\}}|z|^{p-1}\le|f'(z)|$$

$$\le\frac{1}{|z|^2}+\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)\,p}{\{(p+1)+\beta\,[(B\,p+A)+(B-A)\alpha\,]\}}|z|^{p-1}\qquad(2.3.8)$$

eşitsizliklerini sağladığı sonucunu çıkarabiliriz. (2.3.7) ve (2.3.8) ifadelerinin sınırları, $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{(B-A)\beta\,(1-\alpha)}{\{(p+1)+\beta\,[(B\,p+A)+(B-A)\alpha\,]\}}z^p$$

fonksiyonu ile gerçekleşir.

Teorem 2.3.1 de $\gamma=1$ alarak ve (2.3.4) deki ikinci bağıntıyı kullanarak, (2.3.1) ile tanımlı $K_{(p)}^*(\alpha,\beta,A,B)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun, $z\in U^*$ için

$$\frac{1}{|z|}-\frac{(B-A)\beta(1-\alpha)}{p\{(p+1)+\beta[(Bp+A)+(B-A)\alpha]\}}|z|^{p}\leq|f(z)|$$

$$\leq\frac{1}{|z|}+\frac{(B-A)\beta(1-\alpha)}{p\{(p+1)+\beta[(Bp+A)+(B-A)\alpha]\}}|z|^{p} \quad (2.3.9)$$

ve

$$\frac{1}{|z|^{2}}-\frac{(B-A)\beta(1-\alpha)}{\{(p+1)+\beta[(Bp+A)+(B-A)\alpha]\}}|z|^{p-1}\leq|f'(z)|$$

$$\leq\frac{1}{|z|^{2}}+\frac{(B-A)\beta(1-\alpha)}{\{(p+1)+\beta[(Bp+A)+(B-A)\alpha]\}}|z|^{p-1} \quad (2.3.10)$$

eşitsizliklerini sağladığı bulunur. (2.3.9) ve (2.3.10) ifadeleri, $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{(B-A)\beta(1-\alpha)}{p\{(p+1)+\beta[(Bp+A)+(B-A)\alpha]\}}z^{p}$$

fonksiyonu altında sınır değerini alır [17].

2.4 Meromorfik Çok Katlı Fonksiyonlar

Bu kesimde meromorfik çok katlı fonksiyonların özel bir sınıfını inceleyeceğiz.

$\Sigma(p)$, $U^{*}=\{z:0<|z|<1\}$ delinmiş diskinde analitik, p-katlı, $a_{p+n-1}\geq 0$ ve $p\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ olmak üzere

$$f(z)=z^{-p}+\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n-1}z^{p+n-1} \quad (2.4.1)$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı olsun. $\Sigma(p)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun $Q^{*}[p,\alpha,A,B]$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, $-1\leq A<B\leq 1$, $A+B\geq 0$ ve $0\leq\alpha<p$ olmak üzere,

$$\left|\frac{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}+p}{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}+[pB+(A-B)(p-\alpha)]}\right|<1 \;,\; z\in U^{*}$$

olmasıdır. $Q^{*}[p,\alpha,A,B]$ sınıfı ile özellikle M.K.Aouf ilgilenmiştir [23].

M.K.Aouf'a ait aşağıdaki yardımcı önerme bu sınıftaki fonksiyonların katsayıları için önemlidir.

Yardımcı Önerme 2.4.1

f fonksiyonu $a_{p+n-1} \geq 0$ ve $p \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$ olmak üzere

$$f(z)=z^{-p}+\sum_{n=k}^{\infty} a_{p+n-1}\, z^{p+n-1}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonunun $Q^{*}[p,\alpha,A,B]$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, $n=1,2,3,\cdots$ için

$$C(p,\alpha,A,B,n)=(1+B)(n-1)+[2p+2\alpha B+(B+A)(p-\alpha)]$$

ve

$$D(p,\alpha,A,B)=(B-A)(p-\alpha)$$

olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} C(p,\alpha,A,B,n)\; a_{p+n-1} \leq D(p,\alpha,A,B)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu sonuç kesindir [23]. ◆

Yardımcı Önerme 2.4.1 in ışığında $Q^{*}[p,\alpha,A,B]$ sınıfında (2.4.1) ile tanımlı f fonksiyonları

$$a_p \leq \frac{D(p,\alpha,A,B)}{C(p,\alpha,A,B,n)}$$

katsayı eşitsizliğini sağlar. Böylece $0 \leq k \leq 1$ için

$$a_p = \frac{D(p,\alpha,A,B)k}{C(p,\alpha,A,B,n)}$$

alınır.

$Q_k^{*}[p,\alpha,A,B]$ ile, $Q^{*}[p,\alpha,A,B]$ sınıfının $a_{p+n-1} \geq 0$ ve $0 \leq k \leq 1$ iken

$$f(z)=z^{-p}+\frac{D(p,\alpha,A,B)k}{C(p,\alpha,A,B,1)}z^{p}+\sum_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1} z^{p+n-1} \tag{2.4.2}$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşan altsınıfını gösterelim.

Aşağıda, $Q_k^{*}[p,\alpha,A,B]$ sınıfı için katsayı eşitsizlikleri ve bu sınıfın aritmetik orta ve konveks doğrusal bileşimler altında kapalı olduğu ve son olarak da konvekslik yarıçapı verilmektedir.

Teorem 2.4.1

(2.4.2) ile tanımlanan f fonksiyonunun $Q_k^*[p,\alpha,A,B]$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty} C(p,\alpha,A,B,n)\, a_{p+n-1} \leq D(p,\alpha,A,B)(1-k)$$

olmasıdır. Eşitlik, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$f(z) = z^{-p} + \frac{D(p,\alpha,A,B)\, k}{C(p,\alpha,A,B,1)} z^p + \frac{D(p,\alpha,A,B)(1-k)}{C(p,\alpha,A,B,n)} z^{p+n-1} \quad , \ n \geq 2 \qquad (2.4.3)$$

fonksiyonu için geçerlidir [32]. ◆

(2.4.2) ile tanımlı f fonksiyonu, $Q_k^*[p,\alpha,A,B]$ sınıfında olsun. Bu durumda, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$a_{p+n-1} \leq \frac{D(p,\alpha,A,B)(1-k)}{C(p,\alpha,A,B,n)}$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik, (2.4.3) fonksiyonu için sağlanır [32].

Teorem 2.4.2

Her $j = 1,2,\ldots,m$ olmak üzere, $Q_k^*[p,\alpha,A,B]$ sınıfının

$$f_j(z) = z^{-p} + \frac{D(p,\alpha,A,B)\, k}{C(p,\alpha,A,B,1)} z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1,j}\, z^{p+n-1} \quad , \ \left(a_{p+n-1,j} \geq 0 \right)$$

şeklinde tanımlı f_j fonksiyonları için

$$b_{p+n-1} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_{p+n-1,j}$$

ve $b_{p+n-1} \geq 0$ olmak üzere

$$g(z) = z^{-p} + \frac{D(p,\alpha,A,B)\, k}{C(p,\alpha,A,B,1)} z^p + \sum_{n=2}^{\infty} b_{p+n-1}\, z^{p+n-1}$$

fonksiyonu da $Q_k^*[p,\alpha,A,B]$ sınıfında olur [32]. ◆

Teorem 2.4.3

$f_p(z) = z^{-p} + \dfrac{D(p,\alpha,A,B)\, k}{C(p,\alpha,A,B,1)} z^p$ ve $n \geq 2$ için

$$f_{p+n-1}(z) = z^{-p} + \frac{D(p,\alpha,A,B)\, k}{C(p,\alpha,A,B,1)} z^p + \frac{D(p,\alpha,A,B)(1-k)}{C(p,\alpha,A,B,n)} z^{p+n-1}$$

olsun. Bu durumda $\lambda_{p+n-1} \geq 0$ ve $\lambda_p + \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n = 1$ iken

$$f \in Q_k^* \left[p, \alpha, A, B \right] \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{p+n-1} f_{p+n-1}(z)$$

önermesi doğrudur [32]. ◆

Teorem 2.4.4

$Q_k^* \left[p, \alpha, A, B \right]$ sınıfının, (2.4.2) ile tanımlı f fonksiyonu için $r(p,\alpha,A,B,k)$ sayısı,

$$\frac{3p^2 D(p,\alpha,A,B)k}{C(p,\alpha,A,B,1)} r^{2p} + \frac{(p+n-1)(3p+n-1)D(p,\alpha,A,B)(1-k)}{C(p,\alpha,A,B,n)} r^{2p+n-1} = p^2$$

eşitliğini sağlayan en büyük değer iken, f fonksiyonu $0 < |z| < r = r(p,\alpha,A,B,k)$ içinde p-katlı konveks fonksiyondur. Bu sonuç, en az bir n değeri için,

$$f_{p+n-1}(z) = z^{-p} + \frac{D(p,\alpha,A,B)\,k}{C(p,\alpha,A,B,1)} z^p + \frac{D(p,\alpha,A,B)(1-k)}{C(p,\alpha,A,B,n)} z^{p+n-1}$$

fonksiyonu ile kesindir. ◆

3. BÖLÜM

NEGATİF VE EKSİK KATSAYILI p - KATLI FONKSİYONLARIN BİR ALT SINIFI

Çalışmamızın esas kısmını oluşturan bu son bölümde, ikinci bölümde incelediğimiz p-katlı fonksiyonların altsınıflarına benzer yeni bir altsınıf tanımlayarak, bazı kabuller ile bu altsınıfa ait katsayı kestirimlerini, büyüme ve bükülme teoremlerini, konvekse yakınlık, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapları ile kapalılık teoremlerini vereceğiz.

3.1 $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ Sınıfının Tanımı

$p \geq 2$ olmak üzere, U birim diskinde analitik ve p-katlı

$$f(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonların sınıfı A_p ile gösterilsin. A_p sınıfındaki bir f fonksiyonu için

$$\frac{f^{(p-1)}(z)}{p!z} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

subordinasyonu vardır [13].

Yardımcı Önerme 1.3.2'den $\dfrac{f^{(p-1)}(z)}{p!z} \in \wp$ olur. Böylece

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f^{(p-1)}(z)}{p!z}\right\}>0$$

yazılabilir. $0 \leq \alpha < p$ kısıtlaması ile bu eşitsizlik,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f^{(p-1)}(z)}{p!z}\right\}>\frac{\alpha}{p}$$

şeklinde yazılabilir. $-1 \leq B < A \leq 1$, $-1 \leq B < 0$ ve $0 \leq \alpha < p$ olmak üzere

$$\frac{f^{(p-1)}(z)}{p!\,z} \prec \left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\frac{1+Az}{1+Bz}+\frac{\alpha}{p} \tag{3.1.1}$$

subordinasyonunu sağlayan $f \in A_p$ fonksiyonlarının kümesine $A_p^*(p,A,B,\alpha)$ diyelim.

(3.1.1) ifadesi, $f \in A_p^*(p,A,B,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $z \in U$ olmak üzere,

$$\frac{f^{(p-1)}(z)}{p!z}=\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}+\frac{\alpha}{p}$$

olacak şekilde $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ koşulunu sağlayan bir w fonksiyonunun bulunabilmesi anlamına gelir.

Bu eşitlik ise,

$$\left|\frac{p\dfrac{f^{(p-1)}(z)}{p!z}-p}{[pB+(A-B)(p-\alpha)]-pB\dfrac{f^{(p-1)}(z)}{p!z}}\right|<1 \ , \ z\in U$$

eşitsizliği ile eşdeğerdir

Şimdi A_p sınıfının, $a_{p+n}>0$, $k\geq 2$ olmak üzere

$$f(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n} \tag{3.1.2}$$

şeklinde ifade edilebilen analitik ve p-katlı fonksiyonlardan oluşan altsınıfını A_s ile gösterelim. $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfını

$$A_s^*(p,A,B,\alpha)=A_p^*(p,A,B,\alpha)\cap A_s$$

şeklinde tanımlayalım.

Buradan sonraki kısımda, $-1\leq B<A\leq 1$, $-1\leq B<0$, $0\leq\alpha<p$ ve $k\geq 2$ kabulleri altında $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfı için katsayı kestirimlerini, büyüme ve bükülme teoremlerini, konvekse yakınlık, yıldızıllık ve konvekslik yarıçaplarını ve kapalılık teoremlerini vereceğiz.

3.2 Katsayı Kestirimi

Bu kesimde $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlara ait katsayı kestirimleri incelenecektir.

Teorem 3.2.1

f fonksiyonu, (3.1.2) ile tanımlansın. O zaman,

$$f \in A_s^*(p,A,B,\alpha) \Leftrightarrow (1-B)\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(p+n)!}{(n+1)!\,(p-1)!} a_{p+n} \leq (A-B)(p-\alpha) \qquad (3.2.1)$$

yazılır. Sağdaki eşitsizlik kesindir.

İspat :

Genel olarak

$$f(z) = z^p - \sum_{n=k}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n} \Rightarrow f^{(p-1)}(z) = p!\,z - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(p+n)!}{(n+1)!} a_{p+n} z^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(p-1)}(z)}{p!\,z} = 1 - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(p+n)!}{(n+1)!\,p!} a_{p+n} z^n$$

yazılabilir.

Şimdi, (3.2.1) ifadesinin sağındaki eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim ve $|z|=1$ alalım. Eşitlik hali (3.2.3) de verilen ekstremal fonksiyona karşılık geldiğinden kesin eşitsizlik halini incelemek yeter. Bu durumda,

$$\left| p\frac{f^{(p-1)}(z)}{p!\,z} - p \right| - \left| pB + (A-B)(p-\alpha) - pB\frac{f^{(p-1)}(z)}{p!\,z} \right|$$

$$= \left| -\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!} a_{p+n} z^n \right| - \left| (A-B)(p-\alpha) + B\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!} a_{p+n} z^n \right|$$

$$\leq (1-B)\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(p+n)!}{(n+1)!\,(p-1)!} a_{p+n} (A-B)(p-\alpha) \qquad ; \; B<0$$

$$< 0$$

bulunur.

"Bir D bölgesinde analitik bir f fonksiyonu bu bölgede sabit olmadıkça, $|f(z)|$ modülü maksimum değerini D bölgesinin sınırında alır" biçimindeki Maksimum Modül Teoreminden $f \in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ elde edilir.

Tersini ispatlamak için, $f \in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ alalım. Bu durumda,

$$\left| \frac{p\dfrac{f^{(p-1)}(z)}{p!z}-p}{pB+(A-B)(p-\alpha)-pB\dfrac{f^{(p-1)}(z)}{p!z}} \right| = \left| \frac{-\sum\limits_{n=k}^{\infty}\dfrac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n}z^n}{(A-B)(p-\alpha)+B\sum\limits_{n=k}^{\infty}\dfrac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n}z^n} \right| < 1$$

olur. Tüm z değerleri için $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ olduğundan

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{\sum\limits_{n=k}^{\infty}\dfrac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n}z^n}{(A-B)(p-\alpha)+B\sum\limits_{n=k}^{\infty}\dfrac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n}z^n} \right\} < 1$$

yazabiliriz. $\dfrac{f^{(p-1)}(z)}{p!z}$ ifadesinin gerçel olması için z nin değerlerini gerçel eksen üzerinde seçelim. Gerçel eksen boyunca $z \to 1^-$ alarak,

$$\frac{\sum\limits_{n=k}^{\infty}\dfrac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n}}{(A-B)(p-\alpha)+B\sum\limits_{n=k}^{\infty}\dfrac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n}} \leq 1 \tag{3.2.2}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(1-B)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n} \leq (A-B)(p-\alpha)$$

elde ederiz. Bu, teoremin ispatını tamamlar. ◆

$n \geq k$, $k \geq 2$ olmak üzere her bir

$$f(z)=z^p-\frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+n)!}z^{p+n} \tag{3.2.3}$$

fonksiyonu bir ekstremal fonksiyondur.

3.3 Bükülme Özellikleri

Bu kesimde, $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfı için büyüme ve bükülme teoremlerinden söz edeceğiz.

Teorem 3.3.1

Eğer (3.1.2) ile tanımlı f fonksiyonu $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfında ise, $|z|=r<1$ için,

$$r^p - \frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+k)!} r^{p+k} \le |f(z)| \le r^p + \frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+k)!} r^{p+k} \qquad (3.3.1)$$

ve

$$pr^{p-1} - \frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+k-1)!} r^{p+k-1} \le |f'(z)| \le pr^{p-1} + \frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+k-1)!} r^{p+k-1} \qquad (3.3.2)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliklerdeki alt ve üst sınırlar büyütülemez ve küçültülemez.

İspat :

Teorem 3.2.1 den

$$(1-B)\frac{(p+k)!}{(k+1)!(p-1)!}\sum_{n=k}^{\infty} a_{p+n} \le (1-B)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n} \le (A-B)(p-\alpha)$$

olduğunu biliyoruz. Basit matematiksel hesaplamalarla, $n \ge k$ olmak üzere

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{p+n} \le \frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+k)!}$$

ve

$$\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)\, a_{p+n} \le \frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+k-1)!}$$

bulunur.

Diğer taraftan,

$$f(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n}$$

oluşundan,

$$\begin{aligned}|f(z)|&\le|z|^p+\sum_{n=k}^{\infty}|a_{p+n}||z|^{p+n}\\&\le r^p+r^{p+k}\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n}\\&\le r^p+\frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)\,(p+k)!}r^{p+k}\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}|f(z)|&\ge|z|^p-\sum_{n=k}^{\infty}|a_{p+n}||z|^{p+n}\\&\ge r^p-r^{p+k}\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n}\\&\ge r^p-\frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)\,(p+k)!}r^{p+k}\end{aligned}$$

yazılabilir.

Benzer yöntemle,

$$\begin{aligned}|f'(z)|&\le p|z|^{p-1}+\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)|a_{p+n}||z|^{p+n-1}\\&\le pr^{p-1}+r^{p+k-1}\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)a_{p+n}\\&\le pr^{p-1}+\frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)\,(p+k-1)!}r^{p+k-1}\end{aligned}$$

buluruz. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}|f'(z)|&\ge p|z|^{p-1}-\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)|a_{p+n}||z|^{p+n-1}\\&\ge pr^{p-1}-r^{p+k-1}\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)a_{p+n}\\&\ge pr^{p-1}-\frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+k-1)!}r^{p+k-1}\end{aligned}$$

elde ederiz. ◆

(3.3.1) ve (3.3.2) ifadelerinde eşitlik, her bir

$$f(z)=z^p-\frac{(A-B)(p-\alpha)(k+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+k)!}z^{p+k} \quad ; \quad z=\mp r \tag{3.3.3}$$

fonksiyonu için sağlanır.

(3.3.1) ifadesinin sol tarafında $r \to 1^-$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.1

(3.1.2) ile tanımlı $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfındaki bir f fonksiyonu U birim diskini

$$|w|<\frac{(1-B)(p+k)!-(k+1)!(p-1)!(A-B)(p-\alpha)}{(1-B)(p+k)!}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüştürür. (3.3.3) ile verilen f fonksiyonu,bu sonuç için bir ekstremal fonksiyondur.

Teorem 3.3.1 ve Sonuç 3.3.1 de $\alpha=0$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.2

(3.1.2) ile tanımlı f fonksiyonu $A_s^*(p,A,B)$ sınıfında ise $|z|=r$ için $k\geq 2$ olmak üzere

$$r^p-\frac{(A-B)(k+1)!p!}{(1-B)\,(p+k)!}r^{p+k}\leq |f(z)|\leq r^p+\frac{(A-B)(k+1)!p!}{(1-B)\,(p+k)!}r^{p+k}$$

ve

$$pr^{p-1}-\frac{(A-B)(k+1)!p!}{(1-B)(p+k-1)!}r^{p+k-1}\leq|f'(z)|\leq pr^{p-1}+\frac{(A-B)(k+1)!p!}{(1-B)\,(p+k-1)!}r^{p+k-1}$$

olur. Bu sonuçlardaki eşitlik durumu, her bir

$$f(z)=z^p-\frac{(A-B)(k+1)!p!}{(1-B)(p+k)!}z^{p+k} \quad ; \quad z=\mp r \tag{3.3.4}$$

ekstremal fonksiyonu için sağlanır.

Sonuç 3.3.3

$f\in A_s^*(p,A,B)$ ise, U birim diski f fonksiyonu ile

$$|w|<\frac{(1-B)(p+k)!-(A-B)(k+1)!p!}{(1-B)(p+k)!}$$

diskini kapsayan bir bölge üzerine dönüşür. (3.3.4) ile verilen f fonksiyonu, bu sonuç için bir ekstremal fonksiyondur.

3.4 Konvekse – Yakınlık Yarıçapı

Teorem 3.4.1

(3.1.2) ile tanımlı $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfındaki bir f fonksiyonu,

$$R_1 = \inf_{n\geq 2}\left\{\left[\frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)\,(n+1)!(p-1)!)}\left(\frac{p-\delta}{p+n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\right\}$$

olmak üzere $|z|< R_1$ diskinde, δ $(0\leq\delta<p)$ mertebeden p-katlı konvekse yakın bir fonksiyondur. R_1 küçültülemez.

İspat :

İstenilen sonuca ulaşabilmemiz için $|z|< R_1$ iken

$$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}}-p\right| \leq p-\delta$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. $k\geq 2$ için

$$f(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Buradan, $k\geq 2$ olmak üzere

$$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}}-p\right| = \left|-\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)\,a_{p+n}\,z^n\right|$$

$$\leq \sum_{n=k}^{\infty}(p+n)\,a_{p+n}\,|z|^n$$

bulunur. Eğer,

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{p+n}{p-\delta}\right)a_{p+n}|z|^n \leq 1 \qquad (3.4.1)$$

eşitsizliği varsa

$$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}}-p\right| \leq p-\delta$$

eşitsizliği doğru olacaktır.

Teorem 3.2.1 den

$$a_{p+n} \leq \frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+n)!}$$

olduğunu biliyoruz.

Böylece (3.4.1) eşitsizliği $n \geq k \geq 2$ olmak üzere

$$\left(\frac{p+n}{p-\delta}\right)|z|^n \leq \left[\frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}\right]$$

veya

$$|z| \leq \left\{\frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}\left(\frac{p-\delta}{p+n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa doğru olacaktır. Bu da ispatı tamamlar.

Böylece f fonksiyonu, $|z|<R_1$ diskinde δ $(0\leq\delta<p)$ mertebeden p-katlı konvekse yakın bir fonksiyondur. Bu sonuç (3.2.3) ile tanımlı f fonksiyonu, bu sonuç için ekstremal fonksiyondur. ◆

Sonuç 3.4.1

$\delta=0$ alınması durumunda $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfında (3.1.2) ile tanımlı f fonksiyonu,

$$R_1^* = \inf_{n\geq 2}\left\{\left[\frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)\,(n+1)!(p-1)!)}\left(\frac{p}{p+n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\right\}$$

olmak üzere $|z|<R_1^*$ diskinde p-katlı konvekse yakın bir fonksiyon olur.

3.5 Yıldızıllık Yarıçapı

Teorem 3.5.1

(3.1.2) ile tanımlı $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfındaki bir f fonksiyonu

$$R_2=\inf_{n\geq 2}\left\{\left[\frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)\,(n+1)!(p-1)!)}\left(\frac{p-\delta}{p+n-\delta}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\right\}$$

olmak üzere $|z|<R_2$ diskinde δ $(0\leq\delta<p)$ mertebeden p-katlı yıldızıl bir fonksiyondur. Bu sonuç kesindir.

İspat :

İstenilen sonuca ulaşabilmemiz için $|z|<R_2$ iken

$$\left|\frac{z\,f'(z)}{f(z)}-p\right|\leq p-\delta$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. $k\geq 2$ için,

$$f(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Buradan, $k\geq 2$ olmak üzere

$$\left|\frac{z\,f'(z)}{f(z)}-p\right|=\left|\frac{-\sum\limits_{n=k}^{\infty}n\,a_{p+n}\,z^{p+n}}{z^p-\sum\limits_{n=k}^{\infty}a_{p+n}\,z^{p+n}}\right|$$

yazılır. Paydayı z^p parantezine alıp, yine paydaya üçgen eşitsizliğini uygularsak,

$$\left|\frac{z\,f'(z)}{f(z)}-p\right|\leq\frac{\sum\limits_{n=k}^{\infty}n\,a_{p+n}\,|z|^n}{1-\sum\limits_{n=k}^{\infty}a_{p+n}\,|z|^n}$$

buluruz.

Böylece,

$$\sum_{n=k}^{\infty}n\,a_{p+n}\,|z|^n\leq(p-\delta)-(p-\delta)\left[\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n}\,|z|^n\right]$$

veya

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{p+n-\delta}{p-\delta} \; a_{p+n} \, |z|^n \leq 1 \tag{3.5.1}$$

eşitsizlikleri varsa,

$$\left| \frac{z f'(z)}{f(z)} - p \right| \leq p - \delta$$

eşitsizliği sağlanacaktır.

Teorem 3.2.1 den

$$a_{p+n} \leq \frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)\,(p+n)!}$$

olduğunu biliyoruz.

Böylece eğer, $n \geq k \geq 2$ olmak üzere

$$\left(\frac{p+n-\delta}{p-\delta} \right) |z|^n \leq \left[\frac{(1-B)\,(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!} \right]$$

veya

$$|z| \leq \left\{ \frac{(1-B)\,(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!} \left(\frac{p-\delta}{p+n-\delta} \right) \right\}^{\frac{1}{n}}$$

ise (3.5.1) eşitsizliği sağlanır. Buradan f fonksiyonu $|z| < R_2$ diskinde δ $(0 \leq \delta < p)$ mertebeden p-katlı yıldızıl bir fonksiyondur. ◆

(3.2.3) ile tanımlı ekstremal f fonksiyonu, bu sonuç için ekstremaldir.

Sonuç 3.5.1

$\delta = 0$ alınması durumunda (3.1.2) ile tanımlı $A_s^*(p, A, B, \alpha)$ sınıfındaki f fonksiyonu,

$$R_2^* = \inf_{n \geq 2} \left\{ \left[\frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)\,(n+1)!(p-1)!)} \left(\frac{p}{p+n} \right) \right]^{\frac{1}{n}} \right\}$$

olmak üzere $|z| < R_2^*$ diskinde p-katlı yıldızıl bir fonksiyon olur.

3.6 Konvekslik Yarıçapı

Teorem 3.6.1

(3.1.2) ile tanımlı f fonksiyonu $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfında olsun. Bu durumda

$$R_3=\inf_{n\geq 2}\left\{\left[\frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)\,(n+1)!(p-1)!)}\left(\frac{p(p-\delta)}{(p+n)(p+n-\delta)}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\right\}$$

olmak üzere bu fonksiyon $|z|<R_3$ diskinde δ $\left(0\leq\delta<p\right)$ mertebeden p-katlı konveks bir fonksiyondur. Bu sonuç kesindir.

İspat :

Bu sonuca ulaşabilmemiz için $|z|<R_3$ olmak üzere

$$\left|[1+\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}]-p\right|\leq p-\delta$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. $k\geq 2$ olmak üzere

$$f(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Buradan,

$$f'(z)=p\,z^{p-1}-\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)\;a_{p+n}\;z^{p+n-1}$$

$$f''(z)=p(p-1)\,z^{p-2}-\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)(p+n-1)\;a_{p+n}\;z^{p+n-2}$$

ve böylece,

$$\left|1+\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}-p\right|=\left|\frac{-\sum_{n=k}^{\infty}n(p+n)\,a_{p+n}\;z^{p+n-1}}{p\,z^{p-1}-\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)\;a_{p+n}\;z^{p+n-1}}\right|$$

bulunur. Paydayı z^{p-1} parantezine alarak ve yine paydaya üçgen eşitsizliği uygulayarak,

$$\left|1+\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}-p\right|\leq\frac{\sum_{n=k}^{\infty}n(p+n)\,a_{p+n}\;|z|^n}{p-\sum_{n=k}^{\infty}(p+n)\,a_{p+n}\;|z|^n}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer,

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(p+n)\, a_{p+n}\, |z|^n \leq p(p-\delta) - \sum_{n=k}^{\infty} (p-\delta)(p+n)\, a_{p+n}\, |z|^n$$

veya

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(p+n)+(p-\delta)(p+n)}{p(p-\delta)}\, a_{p+n} |z|^n \leq 1 \tag{3.6.1}$$

oluyorsa,

$$\left| [1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}] - p \right| \leq p-\delta$$

bulunur.

Teorem 3.2.1 den

$$a_{p+n} \leq \frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)\,(p+n)!}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece $n \geq k$, $k \geq 2$ olmak üzere, eğer

$$\frac{n(p+n)+(p-\delta)(p+n)}{p(p-\delta)} |z|^n \leq \left[\frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)\,(n+1)!(p-1)!)} \right]$$

veya

$$|z| \leq \left\{ \frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)\,(n+1)!(p-1)!)} \left(\frac{p(p-\delta)}{(p+n)(p+n-\delta)} \right) \right\}^{\frac{1}{n}}$$

ise (3.6.1) eşitsizliği sağlanacaktır.

Böylece f fonksiyonu $|z|<R_3$ diskinde δ $(0 \leq \delta < p)$ mertebeden p-katlı konveks bir fonksiyondur. ◆

(3.2.3) ile tanımlı f fonksiyonu, bu sonuç için ekstremaldir.

Sonuç 3.6.1

$\delta = 0$ alınması durumunda (3.1.2) ile tanımlı $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfındaki f fonksiyonu,

$$R_3^* = \inf_{n\geq 2} \left\{ \left[\frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)\,(n+1)!(p-1)!)} \left(\frac{p}{p+n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{n}} \right\}$$

olmak üzere $|z|<R_3^*$ diskinde p-katlı konveks bir fonksiyondur.

3.7 Kapalılık Özellikleri

Bu kesimde, $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfının aritmetik orta ve konveks doğrusal bileşimler altında kapalı olduğundan söz edeceğiz.

Teorem 3.7.1

$$f_j(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n,j}\,z^{p+n} \quad , \; j=1,2,\ldots \text{ olsun ve } b_{p+n}=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\,a_{p+n,j} \quad ,\lambda_j>0$$

ve $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j=1$ olmak üzere $h(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}b_{p+n}\,z^{p+n}$ olarak alınsın. Eğer her bir $j=1,2,\ldots$ için $f_j\in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ ise $h\in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ bulunur.

İspat :

$f_j\in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ olduğundan Teorem 3.2.1 den

$$(1-B)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n+1)!\,(p-1)!}a_{p+n,j}\le(A-B)(p-\alpha) \quad j=1,2,\ldots$$

yazılır. Böylece,

$$(1-B)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n+1)!\,(p-1)!}b_{p+n}=(1-B)\sum_{n=k}^{\infty}\left[\frac{(p+n)!}{(n+1)!\,(p-1)!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{p+n,j}\right)\right]$$
$$\le(A-B)(p-\alpha)$$

elde edilir. Bu da $h\in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ olduğunu gösterir. ◆

Teorem 3.7.2

$A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfı konveks bir kümedir.

İspat :

$A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfındaki iki fonksiyon $f(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}a_{p+n}z^{p+n}$ ve

$g(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}b_{p+n}z^{p+n}$ ($k\ge p$, $a_{p+n}>0$, $b_{p+n}>0$) olsun. λ $(0\le\lambda\le1)$ için

$h(z)=(1-\lambda)f(z)+\lambda\,g(z)$, $z\in U$ fonksiyonunun da $A_s^*(p,A,B,\alpha)$ sınıfına ait olduğunu göstermek yeterlidir.

Buna göre,

$$h(z)=z^p-\sum_{n=k}^{\infty}\left[(1-\lambda)\,a_{p+n}+\lambda\, b_{p+n}\right]z^{p+n}$$

yazılır. $f,g\in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ fonksiyonları için Teorem 3.2.1 uygulanırsa,

$$(1-B)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n+1)!\,(p-1)!}\left[(1-\lambda)\,a_{p+n}+\lambda\, b_{p+n}\right]$$

$$=(1-\lambda)\,(1-B)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n+1)!\,(p-1)!}a_{p+n}+\lambda\,(1-B)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n+1)!\,(p-1)!}b_{p+n}$$

$$\leq(1-\lambda)\,(A-B)(p-\alpha)+\lambda\,(A-B)(p-\alpha)$$

$$=(A-B)(p-\alpha)$$

bulunur. Bu da $h\in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ anlamındadır. ◆

Teorem 3.7.3

f_p fonksiyonu $f_p(z)=z^p$ ve f_{p+n} fonksiyonu da $n\geq k,\ k\geq 2$ olmak üzere,

$$f_{p+n}=z^p-\frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+n)!}z^{p+n}$$

ile tanımlansın. Bu durumda $f\in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$\lambda_n\geq 0$ ve $\lambda_p=1-\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n$ olmak üzere,

$$f(z)=\lambda_p f_p(z)+\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n f_{p+n}(z)$$

şeklinde ifade edilebilmesidir.

İspat :

$f\in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ olsun. Teorem 3.2.1 den,

$$(1-B)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n}\leq(A-B)(p-\alpha)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$(1-B)\frac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!}a_{p+n}\leq(A-B)(p-\alpha)$$

bulunur. Bu eşitsizliği düzenlersek, $n=k,k+1,\cdots$, $k\geq 2$ için

$$a_{p+n} \leq \frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+n)!}$$

elde ederiz. Böylece, $n=k,k+1,\cdots$, $k\geq 2$ olmak üzere

$$\lambda_n = \frac{(1-B)(p+n)!}{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!} a_{p+n}$$

ve

$$\lambda_p = 1-\sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n$$

alarak,

$$\begin{aligned} f(z) &= z^p - \sum_{n=k}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n} \\ &= z^p - \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n z^p + \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n z^p - \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n \frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+n)!} z^{p+n} \\ &= [1-\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n] z^p + \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n \left\{ z^p - \frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+n)!} z^{p+n} \right\} \\ &= \lambda_p f_p(z) + \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n f_{p+n}(z) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Diğer taraftan, $f(z)=\lambda_p f_p(z)+\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n f_{p+n}(z)$ olsun.

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda_p f_p(z) + \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n f_{p+n}(z) \\ &= [1-\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n] z^p + \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n \left\{ z^p - \frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+n)!} z^{p+n} \right\} \\ &= z^p - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+n)!} \lambda_n z^{p+n} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} (1-B)\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(p+n)!}{(n+1)!(p-1)!} \frac{(A-B)(p-\alpha)(n+1)!(p-1)!}{(1-B)(p+n)!} \lambda_n &= (A-B)(p-\alpha)\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n \\ &\leq (A-B)(p-\alpha) \end{aligned}$$

bulunur ki bu da $f \in A_s^*(p,A,B,\alpha)$ demektir. ◆

K A Y N A K L A R

[1] A.W. GOODMAN ; *Univalent Functions*, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 1983.

[2] B.A. URALEGADDI & M.D. GANIGI ; *A certain class of meromorphically starlike func. with positive coefficients*, Pure Appl.Math. Sci. 26 (1987), 75-81.

[3] CH. POMMERENKE ; *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1973.

[4] F. REN & S. OWA ; *A note on a class of p-valently α -convex functions*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada – Vol. X, No. 1, February 1988.

[5] G.R. LAKSHMA & K.S. PADMANABHAN ; *p-valent regular func. with neg. coeffecient*, Commentarii Math. Univ. Sancti Pauli,32 (1) (1983), 39-49.

[6] H. SILVERMAN ; *Extreme points of Univalent functions with two fixed points*, Trans. Amer. Math. Soc., 219 (1976), 387-395.

[7] H. SILVERMAN ; *Univalent func. with negative coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc., 51 (1975), 109-116.

[8] H.M. SRIVASTAVA & S. OWA ; *Current Topics in Analytic Function Theory*, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London and Hong Kong, 1992.

[9] H.M. SRIVASTAVA & S. OWA ; *Certain subclasses of starlike functions*, J. Math. Anal. Appl., 161 (1991), 405-415.

[10] H.M. SRIVASTAVA & S. OWA ; *Certain subclasses of starlike functions II*, J. Math. Anal. Appl., 161 (1991), 405-415.

[11] H.S. AL-AMIRI ; *On a subclass of close-to-convex functions with negative coefficients*, Mathematica (Cluj) 31 (54) (1989), 1-7.

[12] L.V. AHLFORS ; *Complex Analysis*, sec.ed., McGraw-Hill Book Comp., New York 1966.

[13] M. NUNOKAWA & S. HOSHINO ; *On some starlikeness conditions for analytic functions*, Tsukuba J. Math. Vol.16 No.1 (1992), 211-215.

[14] M. NUNOKAWA & *On the Theory of Multivalent Functions*, Tsukuba J. Math. Vol.11 No.2 (1987), 273-286.

[15] M.K. AOUF ; *On Certain Classes of p-valent func. with neg. and missing coefficients*, Tamkang Journal of Math., Vol 20, Number 2, Summer 1989.

[16] M.K. AOUF & H.E. DARWISH ; *Basic Properties and characterizations of a certain class of Analytic functions with negative coefficients II*, Utilitas Math. 46 (1994) , 167-177.

[17] M.K. AOUF, H.E. DARWISH & H.M. SRIVASTAVA ; *A General Class of Meromorphically univalent Functions*, Panamerican Mathematical Journal 7(1997), Number 3, 69-84.

[18] M.K. AOUF & H.M. SRIVASTAVA ; *Certain families of analytic functions with negative coefficients*, Saitama Math. J. Vol. 13 (1996), 1-34.

[19] M.K. AOUF ; *On Certain Classes of univalent functions with negative and missing coefficients*, J. of Mathematical Research and Exposition, Vol 10, No.1 Feb. 1990, 71-78.

[20] M.K. AOUF ; *On subclasses of Starlike and Convex Functions with Missing and Negative Coefficients*, Bulletino U.M.I. (7) 4-B (1990) , 711-720.

[21] M.K. AOUF & H.E. DARWISH ; *On p-valent func. with negative and missing coefficients II*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A, V. 44 (1995) pp. 1-14.

[22] M.K. AOUF ; *A certain subclass of meromorphic starlike functions with positive coefficients*, Rend. Mat. (7) 9, Roma (1989) , 225-235.

[23] M.K. AOUF ; *A Generalization of meromorphic multivalent functions with positive coefficients*, Math. Japon 35 (1990) No.4 , 609-614.

[24] M.K. AOUF ; *A Generalization of multivalent functions with negative coefficients II*, Bull. Korean Math. Soc 25 (1988), No.2, 221-232.

[25] M.K. AOUF ; *A Generalization of the multivalent functions with negative coefficients*, J. Korean Math Soc.25 (1988) No.1, 153-166.

[26] M.K. AOUF ; *p-valent regular func. with negative coefficients of order* α, Bulletin of The Institute of Mathematics Academia Sinica , Vol 17, Number 3, September 1989 , 255-267.

[27] M.L. MOGRA, T.R. REDDY & O.P. JUNEJA ; *Meromorphic univalent func. with positive coefficients*, Bull. Austral. Math. Soc. 32 (1985),161-176.

[28] O. ALTINTAŞ ; *A subclass of analytic functions with negative coefficients*, Hacettepe Bull. Natur. Sci. Engrg. 19 (1990), 15-24.

[29] P.L. DUREN ; *Univalent Functions*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[30] S. OWA, M. NUNOKAWA & H. SAITOH ; *Generalization of certain subclasses of meromorphic univalent functions*, J. Fac. Sci. Tech. Kinki Univ. 25 (1989), 21-27.

[31] S. OWA & H.M. SRIVASTAVA ; *Certain classes of multivalent functions with negative coefficients*, Bull. Korean Math. Soc.22 (1985), 101-116.

[32] S. OWA, H.E. DARWISH & M.K. AOUF ; *Meromorphic Multivalent Functions with positive and fixed second coefficients*, Math. Japonica 46, No 2(1997), 231-236.

[33] S. OWA ; *On Nunokawa's conjecture for multivalent functions*, Bull. Austral. Math.Soc., 41, 301-305 (1990)

[34] S.S. BHOOSNURMATH & S.R. SWAMY ; *Certain classes of analytic functions with negative coefficients*, Indian J. Math. 27 (1985), 89-98.

[35] S.K. LEE & S. OWA & H.M. SRIVASTAVA ; *Basic Properties and characterizations of a certain class of Analytic functions with negative coefficients*, Utilitas Math. 36 (1989), 121-128.

[36] S.L. SHUKLA & DASHRATH ; *On certain classes of multivalent functions with negative coefficients*, Pure Appl. Math Soc. 20 (1984) 63-72.

[37] S.M. SARANGI & B.A. URALEGADDI ; *The Radius of convexity and starlikeness for certain classes of analytic func. with negative coefficients I*, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 65 (1978), 38-42.

[38] V.P. GUPTA & P.K.JAIN ; *Certain classes of univalent functions with negative coefficients II*, Bull. Austral. Math. Soc., 15 (1976), 467-473.

[39] VINOD KUMAR & S.L. SHUKLA ; *Certain classes of univalent functions with negative coefficients*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 13 (1985), 157-186.

[40] VINOD KUMAR ; *On univalent functions with negative and missing coefficients*, J. Math. Res. Exposition 4 (1984), no. 1, 27-34.

S Ö Z L Ü K

İNGİLİZCE-TÜRKÇE

A

Analytic : Analitik
Aritmethic mean : Aritmetik orta
Automorphism : Otomorfizmi

B

Bijective : Bire-bir ve örten

C

Center : Merkez
Characterization : Nitelendirilme
Close-to Convex : Konvekse-yakın
Closure : Kapalılık
Coefficient : Katsayı
Compact : Tıkız
Complex : Karmaşık
Conjecture : Kestirim
Conjugation : Eşlenik
Convex Linear Combination : Konveks Doğrusal Bileşim
Convex : Konveks, içbükey
Convexity : Konvekslik
Cover : Örtmek
Covering : Örten, örtü

D

Dilation : Genişleme
Distortion : Bükülme
Domain : Bölge
Dominate : Baskın :

E

Estimate	: Kestirim

I

Inversion	: Ters dönme
Injective	: Bire-bir

L

Locally	: Yerel

M

Magnification Factor	: Büyültme Çarpanı
Mean p-valent	: Orta(lama) p-katlı
Missing	: Eksik

O

Omitted-value	: Atılmış Değer
Onto	: Üzerine
Order	: Mertebe

P

Principle	: İlke, prensip
p-valent	: p-Katlı

R

Radii	: Yarıçap
Range	: Erim, menzil
Real Part	: Gerçel Kısım
Regular	: Düzenli
Rotation	: Dönme

S

Set : Küme

Square-root : Karekök

Starlike : Yıldızıl

Starlikeness : Yıldızıllık

T

Theory : Kuram

Transformation : Dönüşüm

Type : Tip

U

Unit : Birim

Univalent : Yalınkat

V

Visible : Görünür olma

SÖZLÜK

TÜRKÇE - İNGİLİZCE

A

Analitik	:	Analytic
Aritmetik orta	:	Aritmethic mean
Atılmış Değer	:	Omitted-value

B

Baskın	:	Dominate
Bire-bir	:	Injective
Bire-bir ve örten	:	Bijective
Birim	:	Unit
Bölge	:	Domain
Bükülme	:	Distortion
Büyültme Çarpanı	:	Magnification Factor

D

Dönme	:	Rotation
Dönüşüm	:	Transformation
Düzenli	:	Regular

E

Eksik	:	Missing
Erim	:	Range
Eşlenik	:	Conjugation

G

Genişleme	:	Dilation
Gerçel Kısım	:	Real Part
Görünür olma	:	Visible

İ

İçbükey	:	Convex
İlke	:	Principle

K

Kapalılık	:	Closure
Karekök	:	Square-root
Karmaşık	:	Complex
Katsayı	:	Coefficient
Kestirim	:	Conjecture, Estimate
Konveks Doğrusal Bileşim	:	Convex Linear Combination
Konveks	:	Convex
Konvekse-yakın	:	Close-to Convex
Konvekslik	:	Convexity
Kuram	:	Theory
Küme	:	Set

M

Menzil	:	Range
Merkez	:	Center
Mertebe	:	Order

N

Nitelendirilme	:	Characterization

O

Orta(lama) p-katlı	:	mean p-valent
Otomorfizmi	:	Automorphism

Ö

Örten : Covering
Örtmek : Cover
Örtü : Covering

P

p-Katlı : p-valent

T

Ters dönme : Inversion
Tıkız : Compact
Tip : Type

Ü

Üzerine : Onto

Y

Yalınkat : Univalent
Yarıçap : Radii
Yerel : Locally
Yıldızıl : Starlike
Yıldızıllık : Starlikeness

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Sevtap SÜMER
Doğum Tarihi	:	27.12.1976
Medeni Hali	:	Bekar
Ünvanı	:	Arş. Gör.
Üniversite	:	Dicle Üniversitesi
Fakülte	:	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	:	Matematik Bölümü
Anabilim Dalı	:	Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

EĞİTİMİ

Orta Öğretim	:	İzmir Hasan Ali Yücel Ortaokulu
Lise	:	İzmir Buca Lisesi 1991-1994
Lisans	:	Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 1995-1999
Çalıştığı Kurumlar	:	Milli Eğitim Bakanlığı Yunus Emre İlköğretim 1999-2000 Dicle Üniversitesi Fen-Edb. Fakültesi Matematik Bölümü 2000-

ADRES

İş	:	Dicle Üniversitesi Fen-Edb. Fakültesi Matematik Bölümü
Ev	:	Diclekent 11. Sok. No.14 Serkan Apt. Daire 5 Diyarbakır
e-mail	:	sevtaps@dicle.edu.tr