T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

KONFORM DÖNÜŞÜMLER VE UYGULAMALARI

Bilal ŞEKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

Danışman: Prof. Dr. Coşkun TAYFUR

DİYARBAKIR

OCAK – 2003

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

DİYARBAKIR

Bu Çalışma, jürimiz tarafından Matematik Ana bilim dalında **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyesinin Ünvanı,</u> <u>Adı Soyadı</u>

Başkan: Prof. Dr. Coşkun TAYFUR ....

Üye: Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR ....

Üye: Doç. Dr. Sezai OĞRAŞ ....

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım

03./02./2003

Prof. Dr. Çetin AYTEKİN

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli görüş ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Çoşkun Tayfur'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci ve ikinci temel bölümlerinde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanıtım ve teoremler verildi.Üçüncü bölümde, konform dönüşüm hakkında temel bilgiler verilerek, dönüşüm konform olması ile analitik olması arasındaki ilişkiyi açıklayan temel tanıtım ve teoremler verildi.Son bölümde ise ısı,elektrostatik ve hidrodinamikte bir çok önemli problemin çözülebildiği konform dönüşümlerin uygulamalarından olan Dirichlet ve Neumann problemleri hakkında genel bilgiler verilmiş ve bunların çember,yarı düzlemdeki çözümleri gösterilmiştir.

SUMMARY

This thesis is prepared for degree of master of science.In this thesis we are interested in The Dirichlet problem and Neumann problem.

This thesis consists of four chapters.In chapter 1,we summarize the fundemental concepts of the analytic functions.Chapter 2 is concerned with the integration of complex functions.Chapter 3 we summarize the conformal mappings.In the last chapter, we solved the Dirichlet problem and the Neumann problem.

GİRİŞ

Kompleks fonksiyon genelde bir bölgeyi bir başka bölge üzerine resmeder.Resmedilen bölge ile resim bölgesi arasındaki ilginin daha iyi belirlenebilmesi için kompleks fonksiyon yerine konform dönüşüm yapan analitik fonksiyonlar gözönüne alınır.Bu dönüşüm açıları ve yönleri koruyan bir dönüşümdür.

Analitik fonksiyon kuramında son derece önemli bir yere sahip olan Riemann dönüşüm teoremi sayesinde konform dönüşümün en önemli uygulamalarından biri olan Dirichlet problemini verilen bölge yerine bundan çok daha basit olan bir bölgeye resmeden bire-bir, analitik fonksiyonun varlığını gösterir.Söz konusu bu problemde verilmiş fonksiyonun normal doğrultudaki türevi koşulunu eklediğimiz zaman konform dönüşümün diğer bir uygulaması olan Neumann problemini ifade eder. Bu iki problemin ısı iletimi,elektrostatik ve hidrodinamikte bir çok önemli problem çözülebilir.

I.BÖLÜM

ANALİTİK FONKSİYONLAR

1.1. Düzlemde Bölgeler

Kompleks analizde limit, süreklilik, türev ve integral gibi kavramları, kompleks düzlemin herhangi alt kümelerinde tanımlamak yerine, kompleks düzlemin bölge diye adlandıracağımız bazı özel alt kümelerinde tanımlayacağız. Bu nedenlere bazı teknik terimlerin tanımlarını bu kesimde vereceğiz.

1.1.1. Tanım: Bir $z_0 \in C$ noktasının ε -komşuluğu

$$D(z_0,\varepsilon) = \{z \in c : |z - z_0| < \varepsilon$$

olarak tanımlanan z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk dir.

$$D(\infty, R) = \{z \in c : |z| > R\} \cup \{\infty\}$$

kümesine ∞ un R- komşuluğu denir.

$$N_0 = D(z_0,\varepsilon) - \{z_0\}$$

kümesine z_0 ın delinmiş komşuluğu denir.

$S \subset C$ kümesi verilsin. $z_0 \in S$ noktasının uygun bir ε- komşuluğu S kümesinde kalıyorsa, z_0 noktasına S nin bir iç noktası denir. S kümesinin her noktası bir iç nokta ise S ye C de açık küme denir.

Bir $z_0 \in C$ noktasının her delinmiş komşuluğu ile S kümesini arakesiti boş değilse z_0 noktasına S nin yığılma noktasıdır denir.

Bir $z_0 \in C$ noktasının her delinmiş komşuluğunda S kümesinde bulunan ve bulunmayan en az bir nokta varsa z_0 noktasına S kümesinin bir sınır noktasıdır denir.

$S \subset C$ kümesine ait herhangi z_1 ve z_2 gibi iki nokta bir poligon ile birleştirilebiliyorsa S kümesine bağlantılı küme denir.

Kompleks düzlemin bağlantılı ve açık alt kümelerine bölge denir.

1.2. Stereografik İzdüşüm

Üç boyutlu uzayda merkezi orijinde olan,

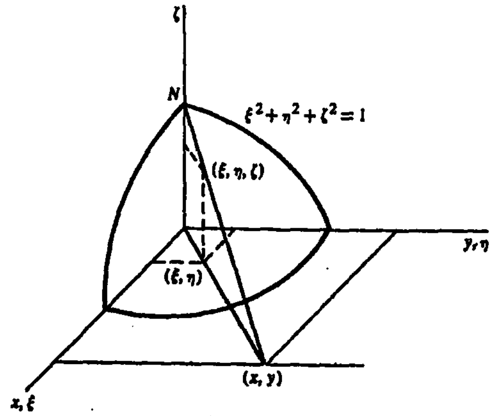
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

birim küresini göz önüne alalım. Koordinatları N (0,0,1) olan noktaya kuzey kutbu ve S (0,0,-1) olan noktaya da güney kutbu denir. Verilen küre ile kompleks düzlemin ara kesiti, düzlemde $x^2 + y^2 = 1$ çemberidir.

Küre üzerindeki herhangi $P(\xi, \eta, \zeta)$ noktasının kürenin N kuzey kutbuna birleştiren doğrunun kompleks düzlemini kestiği nokta z olsun. Bu durumda küre üzerindeki her P noktasına düzlemde bir z noktasına karşılık getirilmiş olur. N (0,0,1) kuzey kutup noktasına da ∞ sembolü ile gösterilen ve " Sonsuz " diye okunan nesneyi karşılık getirelim. Bu durumda birim küre yüzeyinin noktaları ile $C \cup \{\infty\}$ kümesinin noktaları bire – bir eşlenmiş olur. Bu şekilde elde edilen $C \cup \{\infty\}$ kümesine Genişletilmiş Kompleks Düzlem " Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi " denir.

Birim küre yüzeyi ile genişletilmiş kompleks düzlemin yukarıdaki yöntem ile bire – bir eşlenmesine " Stereografik İzdüşüm " denir.

Şimdi stereografik izdüşüm ile küre yüzeyi üzerindeki $P(\xi, \eta, \zeta)$ noktasının kompleks düzlemde karşılık gelen $z = (x, y) = x + iy$ noktasının koordinatları arasındaki ilişkiyi belirleyelim.



Şekil 1.2.1

Yukarıdaki Şekil l.2.1deki benzer üçgenleri kullanarak , $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ olmak üzere,

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\rho}{v} = \frac{1-\zeta}{1}$$

oranlarını yazabiliriz. Bu oranlardan,

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

ve

$$\xi = \frac{2x}{1+r^2}, \eta = \frac{2y}{1+r^2}, \zeta = \frac{r^2-1}{r^2+1}$$

yazılabilir.

Şimdi genişletilmiş kompleks düzlemde ∞ noktasının komşuluğunu tanımlayal:m. Yeteri derecede küçük $\varepsilon>0$ sayısı için $|z| = \frac{1}{\varepsilon}$ çemberlerine küre yüzeyi üzerinde N(0,0,1) kuzey kutbuna yeteri derecede yakın çemberler karşılık gelir. Böylece $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$ koşuluna uyan z noktalarının kümesine yani $|z| = \frac{1}{\varepsilon}$ çemberinin dışında kalan noktalarının kümesine, ∞ noktasının ε- komşuluğu denir.

1.3. Kompleks Fonksiyonun Tanımı

$S \subset C$ olmak üzere,her $z \in S$ öğesine belirli bir $w \in C$ öğesi karşılık getiren bir f kuralı varsa, bu kurala S den C ye bir kompleks fonksiyon (veya dönüşüm) denir ve

$$f : S \to C$$

$$z \to w = f(z) \text{ veya } w = f(z),\ z \in S$$

şeklinde gösterilir. $z \in S$ için w= f(z) bir kompleks sayı olduğundan, bunun

$$u = u(x,y) = \text{Re } f(z) \quad , \quad v = v(x,y) = \text{Im } f(z)$$

ile gösterilen gerçel ve sanal kısmı vardır. Bir kompleks fonksiyonun gerçel ve sanal kısımları genel olarak iki değişkenli gerçel fonksiyonlardır. Bu nedenle bir kompleks fonksiyon için

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

gösterimini kullanacağız.

. Reel analizde fonksiyon sözcüğünün hep tek- değerli olmak anlamında kullanılmasına karşın, kompleks analizde fonksiyon çok değerli olduğu durumlarda da yine fonksiyon sözcüğünü kullanacağız.

1.4. Kompleks Fonksiyonun Geometrik Anlamı

Bir w=f(z) fonksiyonu tanımlı olduğu $S \subset C$ kümesini C- düzleminin bir B kümesine resmeder. Ancak tanım kümesi ve resim kümesinin daha iyi görülebilmesi için, tanım kümesi için bir C- düzlemi kullanılır, ki buna çoğunlukla z- düzlemi de denir. Resim kümesi için ise bir başka C- düzlemi kullanılır, ki buna da w- düzlemi denir.

1.5.Kompleks Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik

1.5.1.Tanım: $S \subset C$ olmak üzere bir $f : S \to C$ kompleks fonksiyonu ve a kompleks sayısı verilsin. z_0,S nin bir yığılma noktası olsun.Eğer verilen her ε>0 sayısı için

$$0 < |z - z_0| < \delta \text{ olduğunda } |f(z) - a| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir δ>0 sayısı bulunabilirse,f fonksiyonun . z_0 noktasında limiti vardır ve limiti a dır denir.Bu durum,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \text{ ya da } z \to z_0 \text{ için} \quad f(z) \to a$$

gösterimi ile belirtilir.

1.5.2. Teorem: $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$ ve $\lim_{z \to z_0} g(z) = b$ olsun. Bu durumda

(i) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = a + b$

(ii) $\lim_{z \to z_0} [f(z).g(z)] = a.b$

(iii) $\lim_{z \to z_0} [f(z) / g(z)] = a / b \qquad (b \neq 0)$

(iv) Eğer h, f(z) noktalarında tanımlı ve $\lim_{w \to a} h(w) = c$ ise

$\lim_{z \to z_0} h(f(z)) = c$ dir.

1.5.3. Teorem: f(z) = u(x,y) + iv (x,y) fonksiyonun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında limitinin olması için gerekli ve yeterli koşul, u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonlarının her birinin (x_0, y_0) noktasında limitinin olmasıdır. Bu durumda,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y)$$

dir.

İspat: $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$=a + ib olsun. Bu durumda, ε>0 verildiğinde öyle bir δ>0 sayısı vardır ki

$$0 < |z - z_0| < \delta \text{ için } |f(z) - A| < \varepsilon$$

olur. Diğer taraftan

$$|u(x,y) - a| \le |f(z) - A| \text{ ve } |v(x,y) - b| \le |f(z) - A|$$

eşitsizlikleri göz önüne alınırsa, verilen ε>0 sayısına karşılık

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

için

$$|u(x,y) - a| < \varepsilon \text{ ve } |v(x,y) - b| < \varepsilon$$

olur. Tersine ε>0 verildiğinde öyle $\delta_1 > 0$ *ve* $\delta_2 > 0$ sayıları vardır ki

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1^2$$

olduğunda

$$|u(x,y) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_2^2$$

olduğunda

$$|v(x,y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Verilen ε>0 sayısına karşılık $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ alınırsa , $0 < |z - z_0| < \delta$ için

$$\begin{aligned} |f(z) - A| &= |u(x,y) + iv(x,y) - (a + ib)| \\ &\le |u(x,y) - a| + |v(x,y) - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu görülür.

1.5.4.Tanım: Bir f fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

ise f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer bir f fonksiyonu bir S kümesinin tüm noktalarında sürekli ise, f fonksiyonu S kümesinde süreklidir denir.

1.5.5. Teorem:f(z) = u(x,y) + iv (x,y) fonksiyonun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonlarının (x_0, y_0) noktasında sürekli olmasıdır.

İspat: Teorem 1.5.3 te

$$A = f(z_0) = u(x_0, y_0) + i(x_0, y_0)$$

alınarak ispat yapılır.

1.5.6.Teorem:f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri S ve $z_0 \in S$ de sürekli olsunlar. Bu taktirde,

(i) f+g
(ii) f.g
(iii)f/g , $g(z_0) \neq 0$

fonksiyonları da $z_0 \in S$ noktasında süreklidirler.

1.5.7.Teorem: $f : C \to C$ sürekli fonksiyonu verilsin.A ,C de açık ise $f^{-1}(A)$ açıktır.

İspat:A, C de açık olsun ve $z \in f^{-1}(A)$ alalım.w=f(z) denirse $w \in A$ ve A açık olduğundan öyle bir ε>0 vardır ki $D(w, \varepsilon) \subset A$ olur. f sürekli olduğuna göre $D(z, \delta) \subset f^{-1}(D(w, \varepsilon)) \subset f^{-1}(A)$ elde edilir.O halde $f^{-1}(A)$ açıktır.

1.6. Kompleks Fonksiyonlarda Diferansiyellenebilme

1.6.1.Tanım $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının ε- komşuluğunda tanımlı olsun.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

limiti var ve sonlu ise, bu limite $f(z)$ nin z_0 daki türevi denir. Ve genelde $f'(z_0)$

veya $\left. \dfrac{df(z)}{dz} \right|_{z = z_0}$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

yazılır.

$f(z)$ fonksiyonunun $f'(z_0)$ türevi mevcut ise $f(z)$ ye z_0 noktasında diferansiyellenebilir denir.

1.6.2. Teorem $f(z)$ fonksiyonun z_0 noktasında diferansiyellenebilir ise, $f(z)$ fonksiyonu z_0 da süreklidir.

İspat : $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasından diferansiyellenebilir olduğundan, bu noktanın bir ε- komşuluğunda tanımlıdır. Buradan,

$$0 < |h| < \varepsilon \text{ ve } z = z_0 + h$$

olmak üzere

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} h$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} f(z) &= f(z_0) + \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.h\right] \\ &= f(z_0) + f'(z_0).0 \\ &= f(z_0)\end{aligned}$$

olur. Yani $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir.

$f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $z \in C$ noktasında diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, kompleks fonksiyonların limitlerine ilişkin özellikleri kullanarak aşağıdaki teoremin ilk üç şıkkını ispatsız olarak ifade edebiliriz.

1.6.3. Teorem:

a) $\dfrac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z)$, (c sabit kompleks sayı)

b) $\dfrac{d}{dz}[f(z) \mp g(z)] = f'(z) \mp g'(z)$

c) $\dfrac{d}{dz}[f(z).g(z)] = f(z).g'(z) + g(z).f'(z)$

d) $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{g(z).f'(z) - g'(z).f(z)}{[g(z)]^2}$, $g(z) \neq 0$

İspat : d) Teorem 1.6.2 ye göre eğer $g(z_0) \neq 0$ *ise* $|h| < \delta(\varepsilon)$ *ve* $\varepsilon < |g(z_0)|$ olmak üzere,

$$|g(z_0+h)| = |g(z_0) - g(z_0+h) - g(z_0)| \geq |g(z_0) - \varepsilon| > 0$$

olur. Buna göre;

$$\frac{f(z_0+h)}{g(z_0+h)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)} = \frac{g(z_0)[f(z_0+h) - f(z_0)] - f(z_0)[g(z_0+h) - g(z_0)]}{g(z_0).g((z_0+h))}$$

yazılır.

$$\lim_{h \to o} \frac{1}{h}\left[\frac{f(z_0+h)}{g(z_0+h)} - \frac{f(z_0+h)}{g(z_0)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{g(z_0)\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f(z_0).\dfrac{g(z_0+h)-g(z_0)}{h}}{g(z_0)g(z_0+h)}$$

$$= \frac{g(z_0).f'(z_0) - f(z_0).g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$$

olur. Bu da teoremin (d) şıkkını ispatlar.

1.7. Cauchy- Riemann Denklemleri

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonunun $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$ noktasında türevi mevcut olsun. Bu durumda, $h = h_1 + ih_2$ olmak üzere,

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

şeklinde yazalım.Teorem 1.6.3 e göre,

$$\mathrm{Re}[f'(z_0)] = \lim_{h\to 0} \mathrm{Re}\left[\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}\right]$$

$$\mathrm{Im}[f'(z_0)] = \lim_{h\to 0} \mathrm{Im}\left[\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}\right]$$

olur.

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0,y_0) + i[u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0,y_0)]}{h_1 + ih_2}$$

dır. Eğer $(h_1, h_2) \to (0,0)$ a x – ekseni üzerinden yaklaşırsa, yani $h_2 = 0$ ise,

$$\mathrm{Re}[f'(z_o)] = \lim_{h_1 \to 0} \frac{u(x_0 + h_1, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_1} = u_x(x_0, y_0)$$

$$\mathrm{Im}[f'(z_0)] = \lim_{h_1 \to 0} \frac{u(x_0 + h_1, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_1} = v_x(x_0, y_0)$$

elde edilir. Bu son iki eşitliğin anlamı;

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \qquad (1.7.1)$$

dır. Burada u_x ve v_x , $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarının (x_0, y_0) noktasındaki x e göre kısmi türevleridir.

Benzer şekilde $(h_1, h_2) \to (0,0)$ a y- ekseni üzerinden yaklaşırsa, yani $h_1 = 0$ ise,

$$f'(z_0) = -i[u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)] \qquad (1.7.2)$$

elde edilir. (1.7.1) ve (1.7.2) eşitlikleri karşılaştırılırsa,

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \text{ ve } u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu birinci mertebeden kısmi türevli denklemlere Cauchy – Riemann denklemleri denir. Yani $f(z)$ fonksiyonun z_0 noktasını bir ε-komşuluğunda diferansiyellenebilir ise, bu komşulukta;

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

Cauchy – Riemann denklemleri sağlanır.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatsız olarak ifade edelim.

1.7.1.Teorem $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasının ε-komşuluğunda tanımlı ve bu komşuluktan, u ve v fonksiyonlarının x ve y ye göre birinci mertebeden kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler (x_0, y_0) noktasında,

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

şeklindeki Cauchy-Riemann eşitliklerini sağlasınlar. Bu halde $f(z)$ fonksiyonun (x_0, y_0) noktasında $f'(z_0)$ türevi mevcuttur ve değeri

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

1.8 .Analitik Fonksiyonlar

Yukarıda kompleks fonksiyonlar için "bir noktada türevlenebilir olmak" kavramını tanımladık ve bazı temel özellikleri inceledik. Burada bir açık kümenin tüm noktalarında türevi olan fonksiyonları(Analitik fonksiyonlar) inceleyeceğiz. Böylece kompleks fonksiyonlar kümesinin bir alt kümesini dikkate almış oluyoruz. İlk bakışta gereksiz gibi görülebilen bu kısıtlama, kompleks fonksiyonlarla ilgili derin ve anlamlı sonuçlar elde edebilmek için zorunludur.

1.8.1.Tanım: $w = f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in C$ noktasının bir ε- komşuluğunda tanımlı olsun. $f(z)$ nin z_0 da analitik olması için gerek ve yeter koşul $f(z)$ nin z_0 noktasının ε-komşuluğunda türevlenebilir olmasıdır.

1.8.2.Tanım: D bölgesinde tanımlı $w = f(z)$ fonksiyonu D bölgesinin her noktasın da diferansiyellenebiliyorsa $f(z)$ ye D de analitik fonksiyon denir. Çoğu kez bir bölgede analitik olan fonksiyonlara, holomorf fonksiyonlarda denir.

1.8.3.Teorem: $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu bir $z_0 \in C$ noktasında analitik olması için gerek ve yeter koşul, z_0 noktasının uygun bir ε-komşuluğunda, u ve v fonksiyonlarının x ve y ye göre birinci mertebeden sürekli kısmi türevlerinin mevcut ve Cauchy – Riemann denklemlerinin sağlanmasıdır.

1.9.Harmonik Fonksiyonlar

1.9.1.Tanım: $D, xy-$düzleminde bir bölge olmak üzere,

$$u : D \to R$$
$$(x,y) \to u(x,y) = u$$

ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer D bölgesinde u nun ikinci mertebeden kısmi türevleri (x,y) noktalarında;

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplace denklemini sağlıyorsa, u fonksiyonuna D bölgesindeki (x,y) noktalarında harmoniktir denir.

1.9.2. Teorem: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonu D bölgesinde analitik olsun. Bu durumda; $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ D bölgesinde analitik olduğuna göre, bu bölgede Cauchy–Riemann denklemleri sağlanır. Yani $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ dir. Eğer u ve v nin ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ise,

$$u_{xx}=v_{yx}, \qquad u_{yy}=-v_{xy}$$

olur. İkinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olduğundan

$$v_{yx}=v_{xy}$$

dir. Buna göre,

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

olur. Benzer şekilde

$$v_{xx}+v_{yy}=0$$

elde edilir. Yani v fonksiyonu da D bölgesinde harmonik fonksiyon olur.

1.9.3.Tanım: u ve v fonksiyonları D bölgesinde Harmonik ve birinci mertebeden kısmi türevleri Cauchy–Riemann denklemlerini sağlıyorsa v fonksiyonuna u fonksiyonunun harmonik eşleniği denir.

Not: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonu D bölgesinde analitik ise, $f(z)$ nin bu bölgede her mertebeden sürekli türevlerinin mevcut olduğu gösterilecektir.

1.9.4. Teorem: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonun D bölgesini de analitik olması için gerek ve yeter koşul v nin u fonksiyonunun harmonik eşleniği olmasıdır.

İspat: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonu D bölgesinde analitik ise, v, u nun harmonik eşleniğidir. Tersine v, u nun harmonik eşleniği ise;

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

fonksiyonu D bölgesinde analitik olur.

Not: Eğer v fonksiyonu, D bölgesinde u fonksiyonunun harmonik eşleniği ise, $-u$ fonksiyonu da, D bölgesinde v fonksiyonun harmonik eşleniğidir. Ayrıca, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ise $-if(z)=v(x,y)-iu(x,y)$ olup, $f(z)$ fonksiyonunun D bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter koşul $if(z)$ fonksiyonunun D bölgesin de analitik olmasıdır.

1.9.5.Teorem: $u=u(x,y), D$ bölgesinde harmonik fonksiyon olsun. Eğer, u fonksiyonunun D bölgesinde bir $v=v(x,y)$ gibi harmonik eşleniği varsa, $(x_0,y_0)\in D$ olmak üzere,

$$v(x,y)=\int_{y_0}^{y}u_x(x,t)-\int_{x_0}^{x}u_y(r,y_0)dr+c$$

dir.

İspat: Eğer, v fonksiyonu u nun bir harmonik eşleniği ise $f=u+iv$ fonksiyonu analitik olur. Buna göre D bölgesinde

$$v_y(x,y)=u_x(x,y)$$

dir. Bu eşitliği y ye göre integre edersek

$$v(x,y)=\int_{y_0}^{y}u_x(x,t)dt+Q(x)$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanını x e göre türetirsek

$$v_x(x,y)=\int_{y_0}^{y}u_{xx}(x,t)dt+Q'(x)=-\int_{y_0}^{y}u_{yy}(x,t)dt+Q'(x)$$

$$=-u_y(x,y)+u_y(x,y_0)+Q'(x)$$

bulunur.

$$v_x(x,y)=-u_y(x,y)$$

olduğundan bunu yukarıda yerine yazarsak

$$Q'(x) = -u_y(x, y_0)$$

elde edilir. Buradan her iki tarafı x e göre integre edersek

$$Q(x) = -\int u_y(r, y_0)dr + c$$

olur. Böylece

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(r, y_0)dr + c$$

bulunur. Eğer (0,0) noktası D bölgesine ait ise, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ almak işlem kolaylığı getirir.

2. BÖLÜM

KOMPLEKS FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

Bu bölümde kompleks fonksiyonların diferansiyellenebilir eğriler üzerinde integralini tanımlayacağız. Daha sonra bir analitik fonksiyonun en önemli özelliği olan " her mertebeden türevlenebilme " özelliği integral kavramından yararlanılarak verilecektir. Zaten bu özelliği ve analitik fonksiyonların bir kısım önemli özelliklerini integral kavramından yararlanmadan belirtmek olasılığı yoktur.

2.1.Eğri ve Çevre

2.1.1.Tanım: $\gamma:[a,b]\to C$ sürekli fonksiyonuna C-düzleminde bir eğri denir. Bir γ eğrisi için $a\le t\le b$ olmak üzere $\gamma(t)\in C$ olduğundan $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ yazılabilir. $\gamma:[a,b]\to C$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer γ fonksiyonun türevi var ve sürekli ise γ fonksiyonuna diferansiyellenebilir eğri denir.

γ diferansiyellenebilir bir eğri olmak üzere, $t\in[a,b]$ için $\gamma'(t)=x'(t)+iy'(t)\neq 0$ ise γ eğrisine düzgün eğri denir.

Bu durumda, γ eğrisinin her noktasında bir teğeti vardır. $[a,b]$ aralığının sonlu sayıda noktası dışında γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda γ nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar γ' nün bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşit ise γ eğrisine parçalı diferansiyellenebilir eğri denir.

Bir γ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ oluyorsa basit eğridir denir. γ basit bir eğri ve γ (a) $=\gamma$ (b) ise basit kapalı eğri denir.

Sonlu sayıda parçalı diferansiyellenebilir eğrilerin uç uca birleştirilmesiyle oluşan eğriye çevre denir.

2.2. Kompleks Fonksiyonların İntegrali

2.2.1.Tanım: $h:[a,b]\to C$ fonksiyonu

$$h(t)=u(t)+iv(t)$$

şeklinde tanımlanmış ve $u(t),v(t)$ reel fonksiyonlarının [a,b] aralığında reel analizde belirtilen anlamda integralleri varsa h nın [a,b] aralığındaki integrali

$$\int_a^b h(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt$$

olarak tanımlanır.

2.2.2.Tanım: D, C de bir açık küme $f:D\to C, w=f(z)$ sürekli ve $\gamma(t)=x(t)+iy(t), a\le t\le b$ eğrisi $\gamma([a,b])\subset D$ özelliğinde diferansiyellenebilir bir eğri olsun. γ üzerinde f fonksiyonunun integrali

$$\int_\gamma f=\int_\gamma f(z)dz$$

şeklinde gösterilir ve

$$\int_\gamma f=\int_\gamma f(z)dz=\int_{t=a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Eğer γ eğrisi $\gamma_1,\gamma_2,..,\gamma_n$ parçalı diferansiyellenebilir eğrilerin uç uca eklenmesiyle oluşan çevre ise,

$$\int_\gamma f=\int_\gamma f(z)dz=\sum_{i=0}^{n}\int_{\gamma_i} f(z)dz$$

olarak tanımlanır.

Not : $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ve $\gamma(t)=x(t)+iy(t),\ \ a\le t\le b$ şeklinde verilmiş olsun. $f[\gamma(t)]=u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]$ ve $\gamma'(t)=x'(t)+iy'(t)$ olduğundan, yukarıda verilen integral tanımı

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma f(\gamma(t))\gamma\ (t)dt=\int_a^b(ux'-vy')dt+i\int_a^b(vx'+uy\ )dt$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $f = u + iv$ ve $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ olmak üzere $dz = dx + idy$ yazılırsa,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

olur.

2.2.3. Teorem: $f : D \to C$ sürekli fonksiyonu verilsin ve γ eğrisi D içindeki z_1 noktasını, yine D içindeki z_2 noktasına birleştiren diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer Dbölgesinde $F' = f$ olacak şekilde bir $F : D \to C$ analitik fonksiyonu varsa,

$$\int_\gamma f = F(z_2) - F(z_1)$$

ve özel olarak $z_1 = z_2$ ise,

$$\int_\gamma f = 0$$

dır.

İspat : $\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b d[F(\gamma(t))] = F(\gamma(t))\Big|_a^b$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1)$$

olur. $z_1 = z_2$ olması durumunda $F(z_2) = F(z_1)$ olacağından,

$$\int_\gamma f = 0$$

olur.

2.2.4.Tanım: Bir $F(z)$ fonksiyonu için $F'(z) = f(z)$ ise $F(z)$ ye $f(z)$ nin belirsiz integrali denir ve

$$\int f(z)dz = F(z) + C$$

şeklinde gösterilir.

2.3. Cauchy İntegral Teoremi

Komleks analizin en önemli teoremi Cauchy İntegral teoremidir.Bu teorem kısaca Cauchy teoremide olarakta adlandırılır.Komleks analizin bir çok önemli özelliği bu teoremin birer sonucu olarak elde edilir.

2.3.1.Teorem: f fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde ve bu bölgenin γ çevresi üzerinde analitik olsun. Bu durum da,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

dır.

İspat : Bu teoremin ilk ispatı, f' türev fonksiyonunun D bölgesinde ve γ üzerinde sürekli olması koşulu altında A.L.Cauchy tarafından verilmiştir. Daha sonra bu teoremin ispatı E.Goursat tarafından f' türev fonksiyonunun sürekli olması koşulu kaldırılarak yapılmıştır. Burada teoremin Cauchy tarafından yapılan ilk ispatı verelim. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu analitik olduğundan,

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$$

olur. f' türev fonksiyonu D bölgesinde ve γ üzerinde sürekli olduğundan u_x, u_y, v_x *ve* v_y kısmı türevleri de D bölgesinde ve γ üzerinde sürekli olurlar. Ayrıca f analitik olduğundan u ve v fonksiyonları sürekli olurlar. Dolayısıyla u ve v fonksiyonları Green teoreminin koşullarını sağlarlar. Buna göre

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (u+iv)(dx+idy) = \int_{\gamma} udx - vdy + i\int_{\gamma} vdx + udy$$

$$= \iint_{D} (-v_x - u_y)\,dxdy + i\iint_{D} (u_x - v_y)dxdy$$

yazılabilir. f fonksiyonu analitik olduğundan,

$$u_x = v_y \text{ ve } u_y = -v_x$$

dır.

Cauchy-Riemann eşitlikleri kullanılırsa yukarıdaki iki katlı integrallerinin her ikisinin de sıfır olduğu görülür. Buna göre,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

olur.

2.3.2.Teorem: f fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik olsun z_1 ve z_2, D bölgesinde bulunan iki nokta olmak üzere

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

integrali z_1 noktasını z_2 noktasına birleştiren yoldan bağımsızdır.

İspat: γ_1 ve γ_2 eğrileri D bölgesinde bulunan ve z_1 noktasını z_2 noktasına birleştiren herhangi iki çevre olsun.Cauchy teoremine göre

$$\int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

olur.Buradan

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

elde edilir.

2.4. Cauchy Türev Formülü

Cauchy türev formülü Cauchy integral teoremini bir sonucudur.Cauchy türev formülüne bağlı olarak ,kompleks analizin "Morera Teoremi,Maksimum Modül Teoremi ve Liouville Teoremi " gibi birçok önemli sonuçları elde edilir.

2.4.1. Teorem(Cauchy Türev Formülü): f fonksiyonu basit kapalı bir γ eğrisinin üzerinde ve bu eğrinin sınırladığı bölgede analitik olsun. z_0 noktası γ ile sınırlı bölge içinde bir nokta olmak üzere, $f^{(n)}(z_0)$ türevi var ve değeri

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

şeklindedir.

İspat : $n = 1$ için ispatı yapalım. Bunun için,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

Cauchy İntegral formülünde z_0 yerine $z_0 + h$ yazalım. Burada h kompleks sayısı, $z_0 + h$ γ ile sınırlı bölge içinde kalacak şekilde seçilmiştir.

$$f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

yazılır. Buna göre;

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz$$

elde edilir. Buradan $h \to 0$ için limite geçirilirse,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\lambda \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz$$

olur. İspatı tamamlamak için yukarıdaki limitin;

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

olduğunu göstermek yeter. Bunun için verilen her ε>0 sayısına karşılık $0<|h|<\delta$ için,

$$\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz-\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısının varlığını göstermeliyiz,

$$\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz-\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right|=\left|\int_\gamma \frac{hf(z)dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\right|$$

$$\leq |h|\int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-z_0-h||z-z_0|^2}|dz|$$

yazılabilir. $|f|$ fonksiyonunun γ eğrisi üzerindeki maksimum değerini M, γ eğrisinin uzunluğu L ve z_0 noktasının γ eğrisi üzerindeki noktalara olan en kısa uzaklığı yani $|z-z_0|$ ın en küçük değeri ρ olmak üzere

$$\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz-\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right|<\frac{\delta ML}{\rho^2(\rho-\delta)}$$

olur. Burada

$$|z-z_0-h|>|z-z_0|-|h|\geq \rho-\delta$$

olduğu dikkate alınmıştır. O halde,

$$\frac{\delta ML}{\rho^2(\rho-\delta)}=\varepsilon \text{ veya } \delta=\frac{\rho^3\varepsilon}{ML+\rho^2\varepsilon}$$

alınırsa, yukarıdaki farkın mutlak değeri ε dan küçük bırakılmış olur.

Yani;

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

olur. n = 2 için

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

ve

$$f'(z_0+h)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-h)^2}dz$$

alınarak, yukarıda izlediğimiz yolla

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

olduğu gösterilir. Benzer şekilde devam edilerek

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

eşitliğine ulaşılır.

Cauchy Türev formülü gösteriyor ki bir noktada analitik olan bir fonksiyon bu noktada her mertebeden türevlenebilir ve türevler de analitik fonksiyonlardır. Bundan başka $f = u + iv$ fonksiyonu bir $z_0 = (x_0, y_0)$ noktasında analitik ise u ve v fonksiyonlarının bu noktada her mertebeden kısmi türevleri vardır.

3.BÖLÜM

KONFORM DÖNÜŞÜMLER

3.1. Konform Dönüşümler

Reel değişkenli fonksiyonlarda türevin bir geometrik anlamı vardır. Yani $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 daki türevi, fonksiyonun grafiğinin x_0 noktasındaki teğetinin eğimini verir.

Kompleks değişkenli fonksiyonların türevine de bir geometrik anlam vermek olanağı vardır. Şimdi çok geniş uygulamaları olan bu anlamı çıkarmaya çalışacağız.

Bilindiği gibi bir kompleks fonksiyon genelde kompleks düzlemin bir bölgesini bir başka düzlemin bir bölgesi üzerine resmeder. Resmedilen bölge ile resim bölgesi arasındaki ilginin daha iyi belirlenebilmesi ve bu resmetme işleminden uygulamada yararlanabilmek için herhangi kompleks fonksiyon yerine konform dönüşüm yapan analitik fonksiyonlar göz önüne alınır.

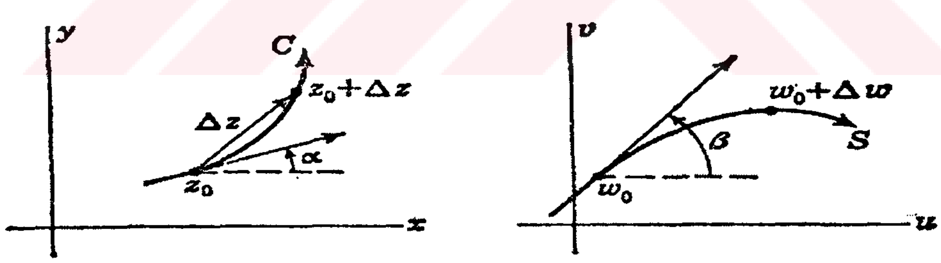
Konform dönüşüm kavramı iki boyutlu statik alanlara ilişkin sınır – değer problemlerinin çözümünde çok önemli uygulamalara sahiptir. Konform dönüşümler sınırları değişik geometrik yapıya sahip bölgelere ilişkin sınır – değer problemlerini kolayca ifade etmeye ve çözmeye elverişli ortogonal silindirik koordinatlar oluşturulmasında çok yararlı bir rol oynar.

Konform dönüşümün matematik – fizik bakımından en önemli ve en ilginç yanı Laplace denklemini yine kendine dönüştürmesi, invariyant bırakmasıdır.

Konform dönüşmelerin Dirichlet probleminin çözümünde (bir bölgenin kapanışında, sürekli, içinde harmonik olan fonksiyonun varlığı) ve harmonik fonksiyonlarda önemli uygulamaları vardır. Bu nedenle de ısı, elektrostatik ve hidrodinamikte bir çok önemli problemi çözebiliriz. Bu uygulamalarda ana ilke şöyle belirtilebilir: Problemi verilen bölge yerine bundan çok daha basit bir bölgede çözmek ve sonucu ters dönüşüm yardımıyla verilen ilk bölgeye taşımaktır. Bunun içinde verilen bölgeyi söz konusu basit bölgeye resmeden bire-bir analitik fonksiyonu bulmak gerekir. Böyle bir analitik fonksiyonun varlığını Riemann dönüşüm teoremi ile göreceğiz. Bu teorem analitik fonksiyonlar kuramında oldukça önemli role sahiptir.

3.1.1.Açıların Korunması: f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olduğu zaman $w = f(z)$ dönüşümü altında, bu noktada kesişen eğrilerin arasındaki açının yönünün değişip değişmediğini inceleyelim. f fonksiyonu z_0 da analitik olduğu için z_0 ın komşuluğunda bulunan düzgün bir yayın görüntüsü, w düzleminde düzgün bir yaydır. $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ olmak üzere

$f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ türevi vardır ve bu limit Δz nin sıfıra yaklaşım yolundan bağımsızdır.



Şekil 3.1.1

$f'(z_0) \neq 0$ olduğundan $f'(z_0)$ sayısının argümanın değerlerinden birine ψ_0 ve $|f'(z_0)|$ a da R_0 diyelim. Böylece;

$$f'(z_0) = R_0 e^{i\psi_0} \tag{3.1.1}$$

olur. Buradan

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = R_0 \qquad\qquad \lim_{\Delta z \to 0} \left(\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \psi_0$$

eşitliklerini (3.1.1) eşitliğinden bulunabilir.

Şimdi C, z_0 noktasından geçen düzgün bir eğri ve S de bu eğirinin $w = f(z)$ dönüşüme altındaki görüntüsü olsun. Eğer C boyunca yine pozitif bir yön alınırsa, buna karşılık olarak f fonksiyonu S boyunca yine pozitif bir yön belirtir. $z_0 + \Delta z$ noktası C üzerinde z_0 dan itibaren pozitif yönde bir bir nokta olduğu zaman, $\Delta z \to 0$ iken Δz nin argümanın limiti C nin z_0 daki yönlemiş teğetinin α eğim açısıdır. $w_0 = f(z_0)$ ve $z_0 + \Delta z$ nın görüntüsü de $w_0 + \Delta w$ ise buradan Δw nin argümanı S nin w_0 daki yönlenmiş teğetinin β eğim açısına yaklaşır.

$$\Delta w = \Delta z . \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

olduğundan Δw nin argümanın bir değeri

$$\arg \Delta w = \arg \Delta z + \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

dir. Buradan

$$\Delta z \to 0 \text{ ise, } \beta = \alpha + \psi_0$$

elde edilir. Demek ki bir C eğrisinin z_0 daki yönlenmiş teğeti, f nin z_0 da analitik olması ve $f'(z_0) \neq 0$ bulunması koşulu altında, $w = f(z)$ dönüşümü altında

$\psi_0 = \arg f'(z_0)$ açısı kadar döndürülür.

Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında sürekli ise z_0 ın yeterince küçük bir komşuluğundaki tüm noktalarının resimleri w_0 in belli bir ε komşuluğuna düşer. Süreklilik bağlantılılığı da koruduğundan, w_0 noktasının ε komşuluğuda bağlantılı bir küme olur. Ancak bunlar bize w_0 ın bir komşuluğunu tamamen örtülüp örtülemediğini veya bir defadan fazla örtülüp örtülemediğini belirtmez .

Ortaya çıkan bu soruların cevabını ancak f nin analitik olması koşulu ile verebilir. Özellikle $f'(z_0) \neq 0$ koşulu altında önemli sonuçlar elde edilecektir

3.1.2.Teorem: $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise w=f(z) dönüşümü altında z_0 ın belli bir komşuluğu, w_0 ın belli bir komşuluğunu tam bir defa örter.

İspat: $D_0 = D_0(z_0, r_0)$ f nin analitik olduğu disk olsun ve $w_0 = f(z_0)$ olmak üzere $F(z) = f(z) - w_0$ fonksiyonunu dikkate alalım. F, D_0 da analitiktir ve z_0 da birinci mertebeden bir sıfırı vardır. Üstelik $0<r_1<r_0$ olmak üzere $D_1 = D_1(z_0, r_1)$ diskinde F nin başka bir sıfır yeri yoktur. Buna göre,

$$m = \min_{z \in D_1} |F(z)| = \min_{z \in D_1} |f(z) - w_0|$$

alalım ve $D_m = D_m(w_0, m)$ olsun. Göstereceğiz ki $f : D_1 \to D_m$ dönüşümü bire-bir ve örtendir. Gerçekten de f, D_m deki herhangi bir w değerini bir tek defa alır. Çünkü $w \in D_m$ ise

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz$$

integralinin w_0 daki değeri 1 dir. Çünkü F nin ∂D_1 içinde bir tek sıfır yeri olup kutbu yoktur. Diğer yandan I süreklidir ve bir tamsayı fonksiyonudur. O halde $I(w) \equiv 1$, yani $w \in D_m$ değeri D_1 de bir tek defa alınır. Bu bize $f : D_1 \to D_m$ nin bire-bir ve örten olduğunu gösterir.

3.1.3. Teorem: f fonksiyonu analitik ve bütün $z \in A$ noktaları için $f'(z) \neq 0$ ise f, A daki açık kümeleri açık kümelere resmeder.

İspat: U, A içinde bulunan açık bir küme olsun ve $z_0 \in U$ için, $f(U)$ içinde bir $w_0 = f(z_0)$ noktası alalım. Varsayım gereği $f'(z_0) \neq 0$ olduğunda z_0 ın öyle bir açık V ve w_0 ın da W açık komşuluğu vardır ki $f: V \to W$ fonksiyonu öncelikle süreklidir ve f^{-1} analitiktir. f^{-1} analitik olduğuna göre öncelikle süreklidir. Bu nedenle de $U \cap V$ açık olduğundan $(f^{-1})^{-1}$ $(U \cap V)$ kümesi de açıktır ve üstelik *f*, *V* den *W* ye bire-bir ve üzerine olduğundan $w_0 \in (f^{-1})^{-1}$ $(U \cap V) = f(U) \cap W \subset f(U)$ olur yani $f(U)$ açık bir kümedir.

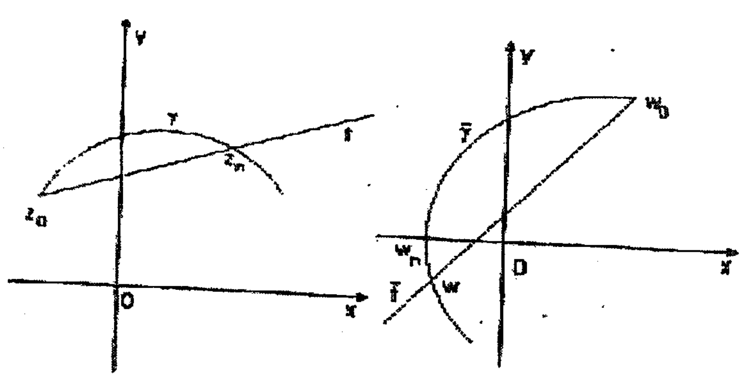
3.1.4.Teorem: $w = f(z)$ fonksiyonu bir B bölgesinde bire-bir ve analitik ise B nin f altındaki resmi *f(B)* yi bir *defa* örter ve *f(B)* bir bölgedir.

İspat: B nin f altında ki resminin $f(B)$ yi tam bir defa örttüğü, f nin bire-birliğinde açık ve bağlantılı olduğu ise Teorem 3.1.3 ve f nin sürekliliğinden görülür.

3.1.5. Teorem $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 da analitik, $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0 dan geçen bir γ düzgün eğrisinin z_0 daki teğeti x- eksine ile θ açısı yapıyorsa, $\bar{\gamma}$ resim eğrisinin de w_0 da teğeti vardır ve bu teğetinin u- ekseni ile yaptığı açı;

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0) \text{ dır.}$$

İspat : $\bar{\gamma}$ üzerinde $w_n \neq w_0$ olmak üzere $w_n \to w_0$ olacak şekilde bir (w_n) noktalar dizisi alalım. $w_n = f(z_n)$ denirse γ da $z_n \neq z_0$ olmak üzere $z_n \to z_0$ olacak biçimde (z_n) noktalar dizisi vardır. O halde,



Şekil 3.1.5

$$\arg(w_n - w_0) = \arg(z_n - z_0) + \arg\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} (\bmod 2\pi)$$

bulunur.Dikkat edilirse $n \to \infty$ için $\arg(z_n - z_0)$, t nin x- ekseniyle yaptığı açıdır.Yani;

$$\theta = \lim_{n \to \infty} \arg(z_n - z_0)$$

dir. Böylece,

$$\lim_{n \to \infty} \arg(w_n - w_0) = \theta + \arg f'(z_0) \quad (\bmod 2\pi)$$

bulunur. Bu son ifade bize $\bar{t}$ nin $\bar{\gamma}$ ya w_0 da bir teğet olduğunu ve bunun u–ekseni ile yaptığı açınında

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0) \quad (\bmod 2\pi)$$

olduğunu gösterir.

3.1.6. Teorem: f fonksiyonu z_0 da analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0 dan geçen ve aralarında α açısı oluşturan γ_1 *ve* γ_2 eğrilerinin resimleri de w_0 da, α açısı oluşturur.

İspat : Teorem 3.1.5 gereği;

$$\phi_1 = \theta_1 + \arg f'(z_0) \quad ve\, \phi_2 = \theta_2 + \arg f'(z_0)$$

olacağından

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1 = \alpha$$

bulunur.

3.1.7. Tanım:D, C de bir bölge olmak üzere $f : D \to C$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 *ve* γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ *ve* $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0 da aralarında α ile aynı yönde ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 da bir konform dönüşümdür denir.

Eğer her $z_0 \in D$ noktasında f konform ise f *ye* D de konform dönüşümdür denir.

3.1.8. Teorem:f bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 da bir konform dönüşümdür.

İspat: Teorem 3.1.6 ve Tanım 3.1.7 den ispatı kolayca görülür.Eğer bir dönüşüm konform ise bu dönüşümün Jakobiyen değerinin sıfırdan farklı olduğu sonucuna hemen varabiliriz. Çünkü;

$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik bir fonksiyonsa,Cauchy-Riemann denklemleri kullanılarak

$$j = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = |f'(z)|^2$$

yazılır. Buradan da şu sonucu söyleyebiliriz.

3.1.9 Teorem:

a) Eğer $f, A \to B$ dönüşümü konform, bire–bir ve örten ise $f^{-1} : B \to A$ biçimindeki ters dönüşümü de konformdur.

b) Eğer $f, A \to B$ ve $g : B \to C$ dönüşümler konform bire-bir ve örtense, gof: $A \to C$ olan bileşke dönüşümü de konform, bire–bir ve örtendir.

İspat:

a) f fonksiyonu bire-bir ve örten olduğundan f^{-1} dönüşümü vardır. Ters fonksiyon teoremine göre, $w=f(z)$ olmak üzere $\frac{df^{-1}(w)}{dw} = \frac{1}{\frac{df(z)}{dz}}$ şeklinde türevi olan f^{-1} fonksiyonu analitiktir. $\frac{df(z)}{dz} \neq 0$ olduğundan $\frac{df^{-1}(w)}{dw} \neq 0$ olur. Böylece f^{-1} dönüşümü Teorem 3.1.8 e göre konformdur.

b) g ve f fonksiyonları bire-bir, örten ve analitik olduklarından, gof bileşke fonksiyonu da bire-bir, örten ve analitiktir. gof fonksiyonunun z noktasındaki türevi $g'(f(z))\,f'(z) \neq 0$ olduğundan gof dönüşümü konformdur.

Şimdi konform döüşümler ile ilgili basit bir örnek verelim.

3.1.10. Örnek: $w = f(z) = z^2$ olduğuna göre $x = 1, y = 1$ ve $x + y = 1$ doğrularının sınırladığı bölgenin resmini buluruz.

Çözüm :

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

ve böylece,

$$u = x^2 - y^2$$
$$v = 2xy$$

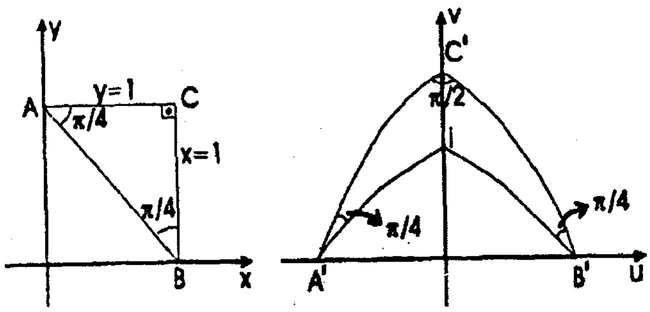
elde edilir. Buradan,

$x=1$ doğrusu $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ eğrisine,

$y=1$ doğrusu $u = \frac{v^2}{4} - 1$ eğrisine

$$x + y = 1 \text{ doğrusu da } v = \frac{1}{2}(1 - u^2)$$

eğrisine, resmedilir.Dikkat edilirse açılar da korunmuştur. Çünkü $w = f'(z) = 2z$ dir ve türev A,B ve C noktalarında sıfırdan farklıdır. Yani $w = f(z) = z^2$ dönüşümü A,B ve C noktalarında konformdur.



Şekil 3.1.10

3.1.11. Teorem: $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve bu noktada $f(z) - f(z_0)$ ın $k.(k \geq 2)$ mertebeden sıfırı varsa, z_0 dan geçen ve aralarında α açısı yapan iki düzgün eğrinin resimleri w_0 da $k\alpha$ açısı yaparlar. Dolayısıyla da z_0 ın bir komşuluğu w_0 ın bir komşuluğunu k defa örter.

İspat: z_0 ın uygun bir komşuluğunda f(z)

$$f(z) = f(z_0) + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \ldots, \qquad k \geq 2, a_k \neq 0,$$

de Taylor serisine açılabilir.Buradan,

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k . g(z)$$

yazabiliriz g(z) fonksiyonu z_0 da analitik ve g(z_0)$\neq 0$ dır. Buradan,

$$\arg(w - w_0) = \arg\big(f(z) - f(z_0)\big) = k.\arg(z - z_0) + \arg.g(z)$$

elde edilir. Şimdi $z \to z_0$ için iki tarafın limiti alınır ve de Teorem 3.1.6 teki anlamda gösterimler olarak düşünülürse $\phi = k\theta + \arg g(z_0)$ bulunur. Ancak $\arg g(z_0)$,θ dan bağımsız olduğundan Teorem 3.1.6 gereği

$$\phi_2 - \phi_1 = k(\theta_2 - \theta_1) = k\alpha$$

sonucuna varılır.

Not:Eğer $f'(z_0) = 0$ ise dönüşüm konform olmayabilir. $f'(z) = 0$ yapan bu noktaya dönüşümünün kritik noktası denir .

3.1.12.Tanım:Açıları büyüklük ve yön bakımından koruyan dönüşümlere direkt konform dönüşümler de denir.

3.1.13.Tanım :Açının büyüklüğünü koruyan fakat yönünü değiştiren dönüşümlere de ters (indirekt) konform dönüşümler denir.

3.1.14 Sonuç: $\lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = |f'(z_0)| = R_0$ idi. Bu nedenle, dönüşümler kısa doğruların uzunluklarını yaklaşık olarak R_0 çarpanı kadar büyütürler. Nokta yakınındaki küçük şekillerin her birinin görüntüsü, yaklaşık olarak aynı biçimde olması anlamında, asıl şekle uyar. ψ_0 dönme açısı gibi R_0 büyüme katsayısı da noktadan noktaya değişir. Büyük şekiller asıllarıyla ilgili benzerlik taşımayan şekillere dönüşebilirler.

3.1.15.Teorem: u, B kümesinde harmonik bir fonksiyon olsun. Eğer $f : A \to B$ fonksiyonu analitikse, u o f bileşkesi de A kümesinde harmoniktir.

İspat: $z \in A$, w=f(z) olmak üzere W,w merkezli açık disk ve $V = f^{-1}(W)$ olsun.W üzerinde u=Re(g) bağıntısını gerçekleyen bir g fonksiyonu vardır.O halde uof=Re(uog) yazabiliriz.Her z noktası için benzer tartışma geçerli olduğundan uof,A üzerinde harmoniktir.

Not: Teorem 3.1.15 Dirichlet probleminin çözümünde oldukça yararlıdır. Örneğin Dirichlet problemini, A bölgesi üzerinde çözmek yerine önce bir $f : A \to B$ bire-bir, üzerine konform dönüşüm bulunur ve problem çok daha basit olan B bölgesinde çözülür. Bu çözüm f^{-1} ile A bölgesine taşınır. Dikkat edilirse bu tartışmada uof nin yine harmonik olması gerekir. Teorem 3.1.15 gösteriyor ki uof gerçekten harmoniktir. Burada doğal olarak böyle bire-bir konform dönüşümün bulunup bulunmayacağı sorusu ortaya çıkar. Riemann dönüşüm teoremi basit bağlantılı bir bölgenin bir başka basit bağlantılı bir bölge üzerine resmedebileceğini gösterir.

3.1.16.Teorem: $w = f(z)$ $|z| \leq 1$ birim diskinde basit olsun. Öyle ki $|w| \leq 1$ birim diskine, oıijini orijine ve orijinde yönü korursa o zaman $f(z) = z$ dir.

İspat: $|z| = 1$ ve *f(0)=0* olduğunda maksimum prensibi gereği $|f(z)| = 1$ elde edilir. Schawrz Lemmasından $|w| = |f(z)| \leq |z|$ olur. Tersini görmek için aynı değişkenlere başvurulursa $|z| \leq |w|$ elde edilir.Buradan $f(z) = |z|$ veya $f(z) = e^{i\alpha} z$ dir. O zaman $w = \arg z + \alpha$ ve orijinde verilen bir yön korunmak zorunda olduğundan $\alpha = 0$ dır. Böylece,*w=f(z)=z* bulunur.

3.1.1.17 Teorem:f(z) fonksiyonu $|z| \leq 1$ diskinde bire-bir ve analitik olsun.Eğer f(z) fonksiyonu $|z| \leq 1$ diskini , $|w| \leq 1$ diski üzerine dönüştürüyorsa f(z) lineer kesirsel dönüşümdür.

İspat: Biri diski ,birim disk üzerine dönüştüren en genel lineer kesirsel dönüşüm α reel sayı ve $|\beta| < 1$ olmak üzere ,

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - \beta}{\bar{\beta} z - 1}$$

şeklindedir.Bu dönüşüm z=0 noktasını $w = \beta e^{i\alpha}$ noktasına resmeder.Şimdi;örneğin birim diski birim disk üzerine dönüştüren f(z) dönüşümünü $w_0 = f(0) = \beta e^{i\alpha}$ şeklinde olsun.Bu durumda

$$\frac{w - \beta e^{i\alpha}}{\bar{\beta} w - e^{i\alpha}}$$

ters dönüşümü w-düzlemindeki w_0 noktasını z-düzleminde orijine dönüştürür.Böylece

$$\frac{f(z)-\beta e^{i\alpha}}{\overline{\beta} f(z)-e^{i\alpha}}$$

dönüşümü orijini orijine resmeder.O halde

$$\frac{f(z)-\beta e^{i\alpha}}{\overline{\beta} f(z)-e^{i\alpha}}=e^{i\gamma} z$$

dır.Teorem 3.1.16.gereği

$$w=f(z)=e^{i\alpha}\,\frac{e^{i\gamma} z-\beta}{\overline{\beta} e^{i\gamma} z-1}$$

elde edilir.Bu da bir lineer kesirsel dönüşümdür.

Biraz sonra ispatlayacağımız,Riemann dönüşüm teoremi,basit bağlantılı bir D bölgesini basit bağlantılı bir D' bölgesi üzerine dönüştüren bire-bir ve analitik fonksiyonunun varlığını gösterecektir.Burada basit bağlantılı bir D bölgesinin $|w|<1$ diski üzerine dönüştürülebileceğini görmek yeterli olacaktır.Çünkü bu durumda τ düzlemindeki basit bağlantılı D' bölgesini birim disk üzerine dönüştüren $w=g(\tau)$ şeklinde bire-bir ve analitik fonksiyon vardır.O halde

$$\tau=g^{-1}[f(z)]$$

dönüşümü bire-bir ve analitik olup, D bölgesini D' bölgesi üzerine dönüştürür.

Yukarıdaki açıklamaya göre D' bölgesi yerine $|w|<1$ diskini almak yeterli olacaktır.

Riemann dönüşüm teoreminin ispatında ,söz konusu D bölgesinin sınırı üzerinde bazı kısıtlamalar yapmak gerekecektir.Örneğin D basit bağlantılı bölgesinin

z_0 gibi bir tek sınır noktası olsun. $z_0 = \infty$ da olabilir.Bu durumda Teorem3.1.16. gereği ,

$$\tau = \frac{1}{z - z_0}$$

dönüşümü de D bölgesini birim disk üzerine dönüştürür.Eğer D bölgesi için Riemann dönüşüm teoremi doğru ise , f(z) bütün genişletilmiş düzlemde bire-bir ve analitik olup, genişletilmiş düzlemi $|w| = |f(z)| < 1$ diski üzerine resmeder.Liouville teoremi(1) gereği f(z) sabit olmak zorundadır.Bu yüzden Riemann dönüşüm teoreminin D bölgesinin en az iki sınır noktası olması durumunda ispatlayacağız.

(1) Teorem: f(z) tam analitik fonksiyonu sınırlı ise sabittir.(Liouville Teoremi)

3.1.18.Teorem(Riemann Dönüşüm Teoremi):D en az iki sınır noktasına sahip basit bağlantılı bölge olsun.Bu durumda D bölgesini $|w| < 1$ birim diski üzerine dönüştüren bire-bir ve analitik $w = f(z)$ fonksiyonu vardır. Eğer dönüşüm D bölgesindeki z_0 noktasını orijine dönüştürecek şekilde ve z_0 noktası ile orijinde önceden verilen yönleri koruyacak biçimde belirtilmiş ise söz konusu dönüşüm tektir.

İspat :İspata geçmeden önce fonksiyon diziler ile ilgili aşağıdaki tanımları vermek uygun olacaktır.

Düzgün Yakınsaklık: S bölgesi üzerinde tanımlı $\{f_n(z)\}$ fonksiyon dizisi verilsin. $\{f_n(z)\}$ fonksiyon dizisinin S bölgesinde f(z) fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $z \in S$ noktalarından bağımsız öyle bir $N(\varepsilon)$ sayısı bulunabilmeli ki her $n > N(\varepsilon)$ için $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ eşitsizliği gerçeklensin.

Normal Yakınsaklık: S bölgesi üzerinde tanımlı $\{f_n(z)\}$ fonksiyon dizisi verilsin.Eğer S nin her kompakt alt kümesi üzerinde $\{f_n(z)\}$ dizisi düzgün yakınsak ise $\{f_n(z)\}$ dizisine normal yakınsaktır denir.

Normal Aile: D bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonların bir ailesi verilsin.Eğer bu ailedeki her fonksiyon dizisi normal yakınsak bir alt dizi ihtiva ediyorsa bu aileye normal aile denir.

Şimdi Riemann dönüşüm teorisine geçe biliriz.Önce fonksiyonların normal ailesini kullanacağız.Özellikle bir kompakt aile inşa edeceğiz ve aradığımız dönüşüm fonksiyonu bu ailedeki fonksiyonların belli bir dizisinin limiti olacaktır.

D bölgesinde tanımlı bire-bir ve analitik g(z) fonksiyonlarının bir ailesi G olsun.Ayrıca D bölgesinde . $|g(z)| \le 1$ olsun.Önce G ailesinin boş olmadığını göstereceğiz.. a ve b, D bölgesinin sınır noktaları olmak üzere.

$$h(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$$

fonksiyonunu oluşturalım.Bu fonksiyon karekökü D de bulunan bir fonksiyon elemanın,D nin bütününe analitik devam ile elde edilebilir.D basit bağlantılı olduğundan monodromy teoremi gereği bu analitik devam ve D nin tek değerli bir analitik fonksiyon belirtir.h(z) bire-bir ve analitk fonksiyondur.Çünkü $h(z_1) = h(z_2)$ ise

$$[h(z_1)]^2 = [h(z_2)]^2$$

ve

$$\frac{z_1 - a}{z_1 - b} = \frac{z_2 - a}{z_2 - b}$$

eşitliğinden $z_1 = z_2$ elde edilir.D*=R(D) olsun.Yani D bölgesinin h fonksiyonu altındaki görüntüsü D* olsun. $\beta \in D^*$ ise $-\beta \notin D^*$ dır.Çünkü,

$$\beta = \sqrt{\frac{z_1 - a}{z_1 - b}}, \quad -\beta = \sqrt{\frac{z_2 - a}{z_2 - b}}$$

ise

$$\beta^2 = \frac{z_1 - a}{z_1 - b} = \frac{z_2 - a}{z_2 - b}$$

olup,buradan $z_1 = z_2$ elde edilir. w_0 , D* de olsun. D* bölge olduğundan w_0 ın uygun bir $|w - w_0| < \varepsilon$ gibi ε - komşuluğu D* da kalır. w_0 ve - w_0 ın her ikisi birden D* da bulunmadığından $|w + w_0| < \varepsilon$ komşuluğu D* da bulunmaz. Böylece her $z \in D$ için $|h(z) + w_0| \geq \varepsilon$ dır.Şimdi

$$g_1(z) = \frac{\varepsilon}{h(z) + w_0}$$

fonksiyonu D bölgesinde bire-bir ve analitik olup $|g_1(z)| \leq 1$ dır.Buna göre $g_1(z)$ fonksiyonu G ailesine aittir.Yani G ailesi boş değildir. G ailesi düzgün sınırlı bir aile olup, analitik fonksiyonların normal ailesidir.Ancak G ailesi kompakt değildir. Çünkü G ailesi bire-bir ve analitik olmayan sabit fonksiyonları içerir. Fakat bu sabit fonksiyonlar bire-bir ve analitik fonksiyon dizilerinin limitleri olabilirler. $z_0 \in D$ olmak üzere $|g'(z_0)| \geq |g_1'(z_0)|$ koşulu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu G' ailesi , G ailesinin bir alt ailesi olsun. G' ailesi boş değildir. Çünkü $g_1(z)$ fonksiyonu G' ailesine aittir.Ayrıca G' ailesi kompaktır.Çünkü sabit fonksiyonlar G' ailesine ait değildir.Gerçekten sabit fonksiyonların türevi sıfır olup, $g_1(z)$ bire-bir ve analitik olduğundan $|g_1'(z_0)| > 0$ olduğundan sabit fonksiyonlar G' ailesine ait değildir.

$|g'(z_0)|$ G' ailesin de M gibi bir maksimum değerini alır. Yani G' ailesinde öyle bir f(z) fonksiyonu vardır ki G' ailesindeki diğer bütün g(z) fonksiyonlar için $|f'(z_0)| = M \geq |g'(z_0)|$ olur.

$F[g] = |g'(z_0)|$ diyelim.Burada F ye g nin bir fonksiyonu denir. Bu durumda F fonksiyonu aşağıdaki anlamda sürekli fonksiyondur:Eğer

$$\lim_{n\to\infty}(g_n(z)) = g(z) \text{ ise } \lim_{n\to\infty} F[g_n] = F[g]$$

dır.Şimdi G' ailesindeki bütün g fonksiyonları için F[g] pozitif reel sayıların kümesinin M gibi bir en küçük üst sınırı vardır.Buna göre öyle bir $\{g_n(z)\}$ dizisi vardır ki

$$\lim_{n\to\infty} F[g_n] = M$$

dır.Ayrıca G' ailesi normal ve kompakt olduğundan $\{g_n(z)\}$ dizisinin, $\{g_{n_k}(z)\}$ gibi bir alt dizisi vardır ve bu alt dizinin f(z) limiti G' ailesine aittir.Böylece

$$F[f] = \lim_{n_k\to\infty} F[g_{n_k}] = M$$

F[f] sonlu olduğundan M de sonludur ve G' deki bütün g fonksiyonları için $M \geq F[g]$ dır.

Son olarak $w = f(z)$ fonksiyonun D bölgesini $|w|<1$ diski üzerine dönüştürdüğünü gösterelim. $|f(z)|$ maksimum değerini D nin bir iç noktasında alamayacağından ve $|f(z_0)|<1$ olduğundan $f(z_0)=0$ dır.

$$f_1(z_0)=\frac{f(z)-f(z_0)}{\overline{f(z_0)}f(z)-1}$$

fonksiyonu da G' ailesine aittir.Bundan başka,

$$f_1'(z_0)=\frac{|f'(z_0)|}{1-|f(z_0)|^2}\geq |f'(z_0)|$$

olup, $f(z_0)\neq 0$ için $|f_1'(z_0)|>M$ dir.Şimdi farz edelim ki w, $|w|<1$ değeri D bölgesinde *f(z)* fonksiyonu için alınmasın.Yani hiçbir $z\in D$ noktasının görüntüsü w olmasın.Bu durumda

$$p(z)=\sqrt{\frac{w-f(z)}{1-\overline{w}f(z)}}$$

fonksiyonu D bölgesinde bire-bir ve analitik fonksiyondur.Çünkü D bölgesinde z_1 ve z_2 noktaları için $p(z_1)=p(z_2)$ olsun.Bu durumda

$$\frac{w-f(z_1)}{1-\overline{w}f(z_1)}=\frac{w-f(z_2)}{1-\overline{w}f(z_2)}$$

olur.f(z) D de bire-bir ve analitik olduğundan $f(z_1)=f(z_2)$ ise $z_1=z_2$ olacağından p fonksiyonu bire-birdir.Ayrıca

$$|p(z)|^2=\frac{|w-f(z)|}{|1-\overline{w}f(z)|}\leq 1$$

olduğundan p(z) fonksiyonu G ailesine aittir.Ayrıca

$$g(z) = \frac{p(z) - p(z_0)}{1 - \overline{p(z_0)}p(z)}$$

fonksiyonu da G ailesine aittir . Bundan başka

$$g'(z_0) = -\frac{1 + |w|}{2\sqrt{w}} f'(z_0)$$

ve

$$1 + |w| = 2\sqrt{w} + (1 - \sqrt{w})^2 > 2\sqrt{|w|}$$

olduğundan

$$|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$$

dır.Bu sonuç

$$|f'(z_0)| = M \geq |g'(z_0)|$$

eşitliği ile çelişkidir.Yani *w=f(z)* fonksiyonu D' bölgesindeki her değeri alır.

Son olarak tekliği ispatlayalım.Farz edelim ki $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları D bölgesini $|w| < 1$ diski üzerine resmetsin. Öyle ki $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$ ve z_0 da ki belli bir yönü, orijinde aynı yöne resmetsin.Bu durumda $f_1 o f_2^{-1}$ bileşke fonksiyonu birim diski birim disk üzerine resmeder.Öyle ki orijinin görüntüsü yine orijin olup,orijinde belli bir yönü korur. Bu durumda $f_1 o f_2^{-1}$ özdeş olup $f_1 = f_2$ elde edilir.

Not: Yukarıda ispatladığımız Riemann dönüşüm teoremi iki açıdan yetersizdir.Bunlardan birincisi,verilen basit bağlantılı D bölgesini $|w| < 1$ diski üzerine resmeden dönüşümün varlığını garanti etmesine karşılık bu dönüşümün nasıl inşa edileceğini belirtmemektedir.İkincisi,bölgelerinin sınırlarının dönüşümü hakkında bir şey söylememektedir.Örneğin, *w=f(z)* fonksiyonu D bölgesini D* bölgesine konform olarak resmediyorsa bölgelerin sınırlarını ne şekilde dönüştürdüğü hakkında bir şey söylememektedir.Ancak aşağıdaki teoremi olarak ifade edelim.

Teorem[1]**:**D ve D* bölgelerin C ve C^* çevreleri basit kapalı olsunlar.Bu durumda D yi D* üzerine resmeden konform dönüşüm $D \cup C$ üzerinde süreklidir.Ayrıca bu konform dönüşüm C sınırını C^* sınırına bire-bir dönüştürür.

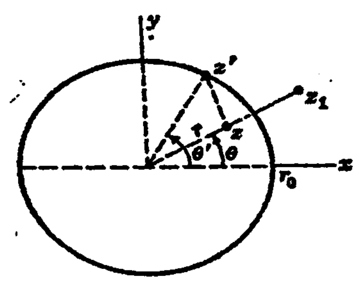
(1) Nehari,Z.,Conformal Mapping.
New York:McGraw-Hill Book Company.Inc., 1952,pp.179-181.

4. BÖLÜM
KONFORM DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI

4.1. POİSSON İNTEGRAL FORMÜLÜ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{f(z')}{z'-z}dz' \qquad (4.1.1)$$

Cauchy İntegral formülü analitik bir f fonksiyonun kapalı bir C_0 çevresinin z iç noktalarındaki değerlerini, C_0 ın üzerinde bulunan z' noktalarında f nin aldığı değerleri türünden verir. C_0 bir çember olduğunda, harmonik bir fonksiyona karşılık gelen bir formül, yani çember için Dirichlet problemini çözen bir formül bulabiliriz. Bununla birlikte, $f=u+iv$ olmak üzere, (4.1.1) eşitliğindeki gerçel bileşenlerin özdeşlenmesi C_0 ın içindeki noktalarda u yu C_0 üzerindeki noktalarda u ile v cinsinden aldığı değerleri verir.Bu durumda Cauchy-İntegral formülünde bazı değişiklikler yapmak gerekir.



Şekil 4.1.1

C_0 çembernin denklemi $z' = r_0 e^{i\theta'}$ olsun ve $r < r_0$ için $z = re^{i\theta}$ yazılabilir (Şekil 4.1.1.) z noktasının çembere göre tersi , r_0 C_0 çemberinin yarıçapı, $z_1 . z \neq 0$ noktalarının çembere göre tersi ve $|z_1|.|z| = r_0^2$ olmak üzere,

$$z_1 = \frac{r_0^2}{r}e^{i\theta} = \frac{r_0^2}{\bar{z}} = \frac{z'\overline{z'}}{\bar{z}} \qquad (4.1.2)$$

olarak yazılabilir. Bir f fonksiyon- çemberin içinin ve üzerinin her yerinde analitik olduğundan (4.1.1) eşitliği f(z) yi verir; ama oradaki integral değeri z yerine z_1 konduğunda 0 dır. Bu nedenden dolayı, bir an $z \neq 0$ sayıp dz' yerine $iz'd\theta'$ koyarak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z'}{z'-z} - \frac{z'}{z'-z_1}\right)f(z')d\theta'$$

yazabiliriz. İntegrantının parantez içindeki çarpanı gerçeldir, çünkü z_1 için (4.1.2) eşitliğinden

$$\frac{z'}{z'-z} - \frac{1}{1-\bar{z}'/\bar{z}} = \frac{z'}{z'-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}'-\bar{z}} = \frac{r_0^2 - r^2}{|z'-z|^2} \qquad (4.1.3)$$

biçiminde yazabiliriz.Dolaysıyla Cauchy İntegral Formülünün değişik bir biçimi

$$f(re^{i\theta}) = \frac{r_0^2 - r^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{f(r_0e^{i\theta'})}{|z'-z|^2}d\theta' \quad (r < r_0) \qquad (4.1.4)$$

olur. $|z'-z|^2$ nin z' ile z noktaları arasındaki uzaklık, yani

$$|z'-z|^2 = r_0^2 - 2r_0 r\cos(\theta'-\theta) + r^2 > 0 \qquad (4.1.5)$$

olduğunu ve ayrıca (4.1.4) eşitliğinde z=0 için geçerli olduğunu gözönüne alıyoruz,çünkü bu son formül $f(0)$ için (4.1.1.) cauchy integral formülüne indirgenir.Eğer f nin gerçel bileşeni u ise,o zaman (4.1.4.) formulüne göre

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2 - r^2)u(r_0,\theta')}{r_0^2 - 2r_0 r\cos(\theta'-\theta) + r^2}d\theta' \quad (r < r_0) \qquad (4.1.6)$$

olur.Bu çember içinde harmonik u fonksiyonunun Pisson integral formülüdür.

4.1.1.Tanım(Poisson Çekirdeği):4.1.6. formülündeki integral $u(r_0,\theta')$ nün $u(r,\theta)$ içine doğrusal bir integral dönüşümünü tanımlar.Bu dönüşüm r ve θ parametreli olup $u(r_0,\theta')$ f fonksiyonunu $2\pi u(r,\theta)$ ya dönüştürür.Bu integral dönüşümünün,(4.1.3) eşitliği ile gösterilen formülden dolayı, çekirdeği pozitif gerçel değerli fonksiyon tanımlar.

$$P(r_o,r,\theta'-\theta) = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r\cos(\theta'-\theta) + r^2} = \frac{r_0^2 - r^2}{|z'-z|^2} \qquad (4.1.7)$$

fonksiyonudur. Buna Poisson Çekirdeği denir. $\frac{\bar{z}}{\bar{z}'-\bar{z}}$ ile onun $\frac{z}{z'-z}$ kompleks eşleniğinin gerçel bileşenleri aynı olduğundan, (4.1.3) eşitliğini kullanarak

$$P(r_o,r,\theta'-\theta)=\Re\left(\frac{z'}{z'-z}+\frac{z}{z'-z}\right)=\Re\left(\frac{z'+z}{z'-z}\right) \qquad (4.1.8)$$

buluruz; o halde C_0 üzerinde belirlenmiş herbir z' için P, C_0 ın içinde (r,θ) nın harmonik fonksiyonudur.P nin $\theta'-\theta$ ya göre periyodu 2π olan periyodik bir çift fonksiyon olduğunu ve r=0 için P=1 çıktığını (4.1.7) eşitliğinden görebiliriz.

Poisson (4.1.6) integral formülünü şimdi

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\theta'-\theta)u(r_0,\theta')d\theta' \quad (r<r_0) \qquad (4.1.9)$$

biçiminde yazılabilir. $f=u=1$ özel durumunda P nin

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\theta'-\theta)d\theta'=1 \quad (r<r_0) \qquad (4.1.10)$$

özelliğini sağlar.

4.2.Dirichlet Problemi

Basit bağlantılı bir bölgede harmonik olan ve bölgenin sınırı üzerinde önceden verilen değerlere sahip olan harmonik fonksiyonun bulunma problemi literatürde Dirichlet problemi olarak bilinir.Eğer söz konusu harmonik fonksiyonun, bölgenin sınırı üzerinde, önceden verilen normal türevinin sağlanması isteniyorsa, problem Neumann problemi olarak bilinir.Burada Dirichlet probleminin çözümü ile ilgili bir kaç uygulama vermeye çalışacağız.Bilindiği gibi basit bağlantılı bölgede her harmonik fonksiyonun genelde bir harmonik eşleniği mevcut olup bu iki harmonik fonksiyon bir analitik fonksiyon doğurur.Şimdi konuyu dağıtmadan çalışmamızın amacına uygun olarak aşağıdaki açıklamaları(örnekleri) verelim.

Örnek:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2}=0$$

$$u(0,y)=0, \qquad u(\pi,y)=0$$
$$u(x,0)=\sin x, \qquad \lim_{y\to\infty} u(x,y)=0$$

sınır değer problemlerini göz önüne alalım. $0<x<\pi$ koşulunu sağlayan her şerit için

$$u(x,y)=e^{-y}\sin x$$

fonksiyonu yukarıdaki koşulları sağlar.Kolayca görülebileceği gibi

$$v(x,y)=e^{-y}\cos x$$

fonksiyonu u(x,y) fonksiyonun harmonik eşleniğidir.Buna göre

$$iu(x,y)+v(x,y)=ie^{-y}\sin x+e^{-y}\cos x=e^{iz}$$

fonksiyonu söz konusu bölgede bir tam fonksiyon olup, bire-bir ve analitik fonksiyondur.

Not: Verilen bir sınır değer probleminin çözümü,çoğu kez bu eşlenik fonksiyonlar yöntemiyle bulunabilir.Ne var ki bu verilen problemin kolaylık derecesine ve bizim analitik fonksiyonların gerçel ve sanal kısımlarını ne derece tespit edebileceğimize bağlıdır.Şimdi bir disk için Dirichlet probleminin çözümüne geçmeden önce aşağıdaki teoremi verelim.

4.2.1.Teorem: $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ analitik fonksiyonu z-düzlemindeki D_Z bölgesini w-düzlemindeki D_W bölgesi üzerine dönüştürsün.Eğer $h(u,v)$ fonksiyonu D_W bölgesinde harmonik ise ,

$$H(x,y)=h[u(x,y),v(x,y)]$$

fonksiyonu D_Z bölgesinde harmoniktir.

İspat: Önce D_W bölgesinin basit bağlantılı olması durumunda teoremi ispatlayalım.Bu durumda $h(u,v)$ harmonik fonksiyonun , D_W bölgesinde $g(u,v)$ gibi bir harmonik eşleniği vardır.Böylece

$$\phi(w)=h(u,v)+ig(u,v)$$

fonksiyonu D_W bölgesinde analitik olur.f(z) fonksiyonu D_Z bölgesinde analitik olduğundan, $\phi[f(z)]$ bileşke fonksiyonu da D_Z bölgesinde analitiktir. Buna göre $\phi[f(z)]$ bileşke fonksiyonun $h[u(x,y),v(x,y)]$ reel kısmı D_Z bölgesinde harmoniktir. Şimdi D_W bölgesinin basit bağlantılı olmadığı durumda,teoremi ispatlayalım.

D_W bölgesi açık küme olduğundan her bir $w_0 \in D_W$ noktasının $|w-w_0|<\varepsilon$ şeklindeki uygun bir komşuluğu D_W bölgesinde kalır ve bu komşuluk basit bağlantılıdır.Buna göre bu komşulukta teoremin birinci kısmında belirttiğimiz gibi $\phi[h(z)]$ şeklinde bir analitik fonksiyon vardır.Ayrıca f(z) fonksiyonu $z_0 \in D_Z$ de sürekli olduğundan , z_0 noktasının öyle bir $|z-z_0|<\delta$ komşuluğu vardır ki bu komşuluğun f altındaki görüntüsü $|w-w_0|<\varepsilon$ komşuluğu içine düşer.Böylece $\phi[f(z)]$ bileşke fonksiyonu $|z-z_0|<\delta$ komşuluğunda analitiktir.Buradan söz konusu komşulukta $h[u(x,y),v(x,y)]$ fonksiyonu harmoniktir. $w_0 \in D_W$ keyfi seçildiğine göre ve f(z) D_Z bölgesini D_W bölgesi üzerine resmettiğinden, $R[u(x,y),v(x,y)]$ fonksiyonu D_Z de harmonik olur.

4.3.Konform Dönüşüm Yardımıyla Dirichlet Probleminin Çözümü

Dirichlet ve ileriki bölümlerde gösterilecek olan Neumann problemlerini bir analitik fonksiyon yardımıyla yarı düzlem veya birim çemberin içine dönüştürülebilen basit bağlantılı,herhangi bir D bölgesi için çözülebilir.Bu dönüşüme Riemann Dönüşümü denir.

Riemann Dönüşüm Teoremini kullanarak yukarıdaki temel düşünce aşağıdaki gibi izlenebilir:

(i) İlk olarak D bölgesi için sınır değer problemini üst yarı düzleme veya birim daireye dönüştürmek için dönüşüm fonksiyonu kullanılır.

(ii) Üst yarı düzlem veya birim daire için Dirichlet veya Neumann problemi çözülecek.

(iii) Son olarakta ters dönüşüm vasıtasıyla (ii) deki çözüm D bölgesine taşınacak.

4.4. Bir Disk İçin Dirichlet Problemi

$F(\theta)$ fonksiyonu $(0 \le \theta \le 2\pi)$ aralığında parçasal sürekli olsun.Bu zaman F nin Poisson İntegral dönüşümünce tanımlanan u fonksiyonu, yani

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\theta'-\theta)F(\theta')d\theta' \qquad (r < r_0) \qquad (4.4.1)$$

olur.Şimdi u(r,θ) fonksiyonu $r = r_0$ çemberinin içinde harmonik ve F nin sürekli olduğu θ değerleri için

$$\lim_{r \to r_0} u(r,\theta) = F(\theta) \qquad (r < r_0) \qquad (4.4.2)$$

olduğunu gösterelim.

$F(\theta)$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$ aralığında parçalı sürekli olduğundan bu aralıktaki sonlu sayıda θ hariç F süreklidir.Bundan başka u, $r < r_0$ diski için Dirichlet probleminin çözümü olacağından (r,θ) , (r_0,θ) ya yarıçap boyunca yaklaşırken $u(r,\theta)$ değerleri $F(\theta)$ ile çakışır.Ancak burada F nin süreksiz olduğu sonlu sayıda noktayı hariç tutmak gerekir.

Öncelikle $r = r_0$ çemberinin içinde P fonksiyonu r ve θ nın harmonik fonksiyonu olduğundan u da $r = r_0$ çemberi içinde harmoniktir.F parçalı sürekli olduğundan (4.4.1) integrali sonlu sayıda belirli integralin toplamı olarak yazılabilir.Burada her bir integralde integrant r, θ ve θ' nin sürekli fonksiyonudur.Ayrıca bu integrantların kısmi türevleri r ve θ nın sürekli fonksiyonlarıdır ve r ve θ ya göre alınan kısmi türevlerin sırası değiştirilebilir.P harmonik olduğundan Laplace denkleminin kutupsal formu olan

$$r^2 P_{rr} + rP_r + P_{\theta\theta} = 0$$

denklemini sağlar.Ayrıca u da harmonik olduğundan yukarıdaki Laplace denklemini sağlar.(4.4.2) koşulunu ispatlamak için her pozitif ε sayısına karşılık

$$0 < r_0 - r < \delta \qquad (4.4.3)$$

olduğunda

$$|u(r,\theta) - F(\theta)| < 2\varepsilon$$

kalacak şekilde bir δ sayısının varlığını göstereceğiz. P nin (4.1.10.) özelliğinin ışığında, buradaki son eşitsizlik

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\theta'-\theta)[F(\theta')-F(\theta)]d\theta'\right| < 2\varepsilon \qquad (4.4.4.)$$

olarak yazılabilir.

F yi periyodik düşünürsek, integrantı da θ *ile* θ' ye göre periyodiktir.θ noktasında F sürekli olduğundan verilen ε sayısına karşılık

$$|\theta'-\theta| < \sigma \text{ için } |F(\theta')-F(\theta)| < \varepsilon$$

kalacak şekilde bir σ sayısı vardır.

$$I_1(r,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\sigma}^{\theta+\sigma} P(r_0,r,\theta'-\theta)[F(\theta')-F(\theta)]d\theta'$$

$$I_2(r,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\sigma}^{2\pi+\theta-\sigma} P(r_0,r,\theta'-\theta)[F(\theta')-F(\theta)]d\theta'$$

yazalım. Buna göre, $u(r,\theta)-F(\theta) = I_1 + I_2$ dır.P>0 olduğundan

$$|I_1| \le \int_{\theta-\sigma}^{\theta+\sigma} |F(\theta')-F(\theta)|Pd\theta' < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} pd\theta' = \varepsilon$$

elde edilir. $p = \dfrac{(r_0^2-r^2)}{|z'-z|^2}$ olduğunu hatırlayarak z' nün θ' argümanı θ+σ dan 2π+(θ-σ) ye kadar değiştikçe $|z'-z|^2$ fonksiyonunun pozitif bir m(σ) minimum değerine sahip olduğunu Şekil 4.1.1 den görürüz.Eğer θ ile θ′ nün tam değeri için $|F(\theta'-F(\theta)|$ nın bir sınırına M dersek, bu durumda, $r_0 - r < \dfrac{m(\sigma)\varepsilon}{2Mr_0}$ için

$$|I_2| < \frac{2\pi M}{2\pi m(\sigma)}(r_0^2-r^2) \le \frac{2Mr_0}{m(\sigma)}(r_0-r) < \varepsilon$$

kalır. Bu nedenle

$$\delta = \frac{m(\sigma)\varepsilon}{2Mr_0}$$

denirse $r_0 - r < \delta$ için $|I_1|+|I_2| < 2\varepsilon$ olur. Bu, (4.4.3) koşulunu sağlayan bir δ sayısıdır.

r=0 olduğunda (4.4.1) eşitliği,

$$u(0,\theta)=\int_0^{2\pi}F(\theta')d\theta' \qquad (4.4.5)$$

biçimine indirgenir. Böylece harmonik bir fonksiyonun çemberin merkezindeki değeri onun çember üzerindeki sınır değerlerinin ortalamasıdır.

Burada belirttiğimiz P ve u harmonik fonksiyonları $r^n \cos n\theta$ ve $r^n \sin n\theta$ şeklindeki harmonik fonksiyonların bir serisi şeklinde ifade edilebilir.Bu seriler

$$P(r_0,r,\theta'-\theta)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta'-\theta)$$

ve

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n (a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

şeklindedir.Burada a_n ve b_n katsayıları

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta')\cos n\theta' d\theta'$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta')\sin n\theta' d\theta'$$

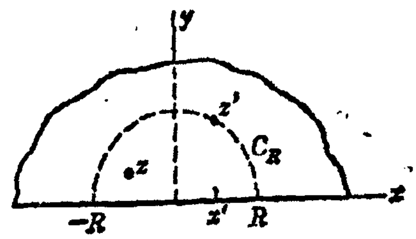
integralleri ile belirtilmiştir.

4.5.Yarı Düzlem İçin İntegral Formülleri

z nin $y\geq 0$, yarı düzleminin her yerinde analitik olup belli k ve M sabitler için

$$\left|z^k f(z)\right|<M \quad (y\geq 0,\ k>0) \qquad (4.5.1.)$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon f olsun. x-ekseni üzerinde belirlenmiş bir z noktası için $R>|z|$ olmak ve θ' sıfırdan π ye kadar değişmek üzere bir $z'=\mathrm{Re}^{i\theta'}$ yarı çemberine C_R diyelim (Şekil.4.5.1)



Şekil 4.5.1

Bu durumda Cauchy integral formülüne göre,

$$2\pi i f(z) = \int_{C_R} \frac{f(z')dz'}{z'-z} + \int_{-R}^{R} \frac{f(x')dx'}{x'-z} \qquad (4.5.2)$$

dır. $|f(z')| < M/R^k$ olduğu için bu integrallerin birincisinin, R sonsuza giderken sıfır olduğunu görürüz.Bu nedenle

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x'-z} \qquad (y>0) \qquad (4.5.3)$$

elde edilir.(4.5.1) koşulu gereği buradaki has.olmayan integral yakınsaktır. bundan dolayı esas değeri ile aynıdır.

(4.5.3) eşitliği yarı düzlem için bir Cauchy integral formülüdür.z noktasının x-eksenin altında bulunması durumunda (4.5.2) eşitliğinin sağ yanı ve dolaysıyla (4.5.3) integrali, sıfır olur.Sonuç olarak, z noktası x-eksenin üst yanında olduğunda, herbir c sabiti için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x'-z} + \frac{c}{x'-z} \right) f(x')dx' \qquad (y>0) \qquad (4.5.4)$$

gibi değişik bir formül elde ederiz.c=1 ve c=-1 durumlarında bu formül sırayla

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(x')}{|x'-z|^2} dx' \qquad (y>0) \qquad (4.5.5)$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x'-x)f(x')}{|x'-z|^2} dx' \qquad (y>0) \qquad (4.5.6)$$

formüllerine indirgenir. Eğer f=u+iv ise harmonik eşlenik u ve v fonksiyonlarının y>0 yarı düzleminde u nun sınır değerleri türünden

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yu(x',0)}{|x'-z|^2}dx'=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x',0)}{(x'-x)^2+y^2}dx' \qquad (y>0)\ (4.5.7)$$

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x'-x)u(x',0)}{|x'-z|^2}dx' \qquad (y>0) \qquad (4.5.8)$$

eşitlikleri ile gösterildiği (4.5.5) ve(4.5.6) eşitliklerinden elde edilir.(4.5.7) eşitliği yarı düzlem için Poisson integral formülü ya da Schwarz formülü olarak bilinir.

4.6.Yarı Düzlem İçin Dirichlet Problemi

Tüm x ler için sınırlı bulunan ve ancak sonlu sayıdaki sonlu sıçramalar hariç sürekli olan, x in gerçel değerli bir fonksiyonuna F diyelim. Herhangi bir pozitif ε sabiti için $y\geq\varepsilon$ ve $|x|\leq\frac{1}{\varepsilon}$ olduğunda

$$I(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x')dx'}{(x'-x)^2+y^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x+t)dt}{t^2+y^2}$$

ve integrali x ve y ye göre düzgün yakınsar.Ayrıca her bir integral F nin sürekli olduğu aralıklar üzerinde sonlu sayıda has olmayan yada belirli integrallerin toplamıdır,dolaysıyla $y\geq\varepsilon$ için bileşen integralleden her birinin integrantı x' ,x ve y nin bir sürekli fonksiyonudur.Sonuç olarak,I(x,y) nin kısmi türevlerinden herbir y>0 olduğu zamanlar integrantı aynı türden türevinin integraliyle gösterilir.

$U=\frac{yI}{\pi}$ yazalım. O halde U,F nin (4.5.7) Schwarz integral dönüşümüdür, demek ki

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yF(x')dx'}{(x'-x)^2+y^2} \qquad (y>0) \qquad (4.6.1)$$

Buradaki $y|x'-z|^{-2}$ çekirdeği y>0 için z ye göre analitik olan $\frac{1}{x'-z}$ fonksiyonun sanal bileşenidir. Şu halde çekirdek, harmonik olup x ve y ye göre Laplace denklemini sağlar. Türev alma ile integralleme sırası yer değiştirebileceği için (4.6.1) foksiyonu aynı eşitliği sağlar. Sonuç olarak y>0 için U harmoniktir.

F nin sürekli olduğu her bir belirlenmiş x için

$$\lim_{y \to 0} U(x,y) = F(x) \qquad (y > 0) \qquad (4.6.2)$$

olduğunu belirlemek amacıyla (4.6.1) eşitliğini

$$U(x,y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(x + y \tan \tau) d\tau \qquad (y > 0) \qquad (4.6.3)$$

olarak yazmak için $x' - x = \tan \tau$ değiştirmesini yapalım. $\Delta F = F(x + y \tan \tau) - F(x)$ denirse ve σ küçük pozitif bir sabit ise

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{(-\pi/2)+\sigma} \Delta F d\tau \quad , \; I_2 = \int_{(-\pi/2)+\sigma}^{\pi/2-\sigma} \Delta F d\tau \quad , \; I_3 = \int_{(\pi/2)-\sigma}^{\pi/2} \Delta F d\tau$$

olmak üzere,

$$\sigma[U(x,y) - F(x)] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta F d\tau = I_1 + I_2 + I_3 \qquad (4.6.4)$$

bulunur. $|F|$ nin bir üst sınırı M ise bu zaman $|\Delta F| \leq 2M$ olur. Verilen bir ε sayısı σ yı $6M_\sigma < \varepsilon$ olacak şekilde seçelim. Buna göre

$$I_1 \leq 2M_\sigma < \frac{\varepsilon}{3} ve |I_3| < \frac{\varepsilon}{3}$$

kalır. Şimdi ε a karşılık

$$0 < y < \delta \; için \; |I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

kalacak şekilde bir δ sayısının varlığını göstereceğiz ki ; o zaman (4.6.2) koşulu (4.6.4) eşitliğinden çıkar. x noktasında F(x) sürekli olduğundan

$$y|\tan \tau| < \delta' \; için \; |F(x + y \tan \tau) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3\pi}$$

kalacak şekilde bir δ' sayısı vardır ve eğer $|\tan \tau|$ nin maksimum değeri olan $\tan(\frac{\pi}{2} - \sigma) = \cot \sigma$ kullanılırsa, yani eğer $y < \delta' \tan \sigma$ ise I_2 ile ilgili olan τ ların tümü için $y|\tan \tau| < \delta'$ koşulu sağlanır. Öyleyse $\delta = \delta' \tan \sigma$ olmak üzere ,

$$0<y<\delta \text{ için } |I_2| < (\pi - 2\sigma)\frac{\varepsilon}{3\pi} < \frac{\varepsilon}{3}$$

kalır. Böylece (4.6.2) koşulu oluşturulur.

Bu nedenle (4.6.1) ye de (4.6.3) Schwarz formülü,y>0 yarı düzlemi için (4.6.2) koşunu sağlayan Dirichlet problemini çözümü elde edilir.Ayrıca U nun sınırlı olduğunu yani $|F(x)|$ in bir üst sınırı M olmak üzere y>0 yarı düzleminde $|U(x,y)| \le M$ olduğunu da gösterir.Ayrıca F_0 bir sabit olmak üzere $F(x) = F_0$ için $U = F_0$ olur.

4.7.Neumann Problemleri

Neumann problemi C eğrisinin sınırı üzerinde daha önceden belirlenen değerler alan $\frac{\partial u}{\partial r}$ normal doğrultudaki türev ile Laplace denklemini sağlayan u(x,y) fonksiyonunu elde etme problemidir. Bu problem Dirichlet problemi gibi bir çember veya yarı düzlemde çözülür.

4.8.Dairesel Bölgeler İçin Neumann Problemi

Şekil(4.1.1) de olduğu gibi $r < r_0$ olmak üzere, $z' = r_0 e^{i\theta'}$ ve $z = re^{i\theta}$ yazıyoruz. z' belirlenince

$$\varphi = -2r_0 Log|z'-z| = -r_0 Log\left[r_0^2 - 2r_0 r\cos(\theta'-\theta) + r^2\right] \qquad (4.8.1)$$

fonksiyonu $|z_0| = r_0$ çemberinin içinde harmoniktir,çünkü o, $-2r_0 \log(z-z')$ nün gerçel bileşenidir.Buradaki $\log(z-z')$ nün $(0,2\pi]$ aralığındaki bir dalı olsun. z' noktasından dışa doğru bir ışındır. Üstelik eğer P, (4.1.7.) Poisson çekirdeği ise o zaman

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{-r_0}{r}\frac{2r^2 - 2r_0 r\cos(\theta''-\theta)}{r_0^2 - 2r_0 r\cos(\theta'-\theta) + r^2} = \frac{r_0}{r}\left[P(r_0, r, \theta'-\theta) - 1\right] \qquad (4.8.2).$$

elde edilir.Bu gözlemler φ nun $r = r_0$ çemberi üzerindeki $\frac{\partial u}{\partial r}$ normal türevi belli g(θ) değerlerini alan harmonik bir u fonksiyonunu gösterecek olan bir integral formülündeki bir çekirdek olarak kullanılabileceğini gösteren ipuçlarıdır.

Eğer g parçası sürekli ve u_0 herhangi bir sabit ise

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(r_0,r,\theta'-\theta)g(\theta')d\theta'+u_0 \qquad (r<r_0) \tag{4.8.3}$$

fonksiyonu harmoniktir. çünkü integrantı (r,θ) nın harmonik bir fonksiyonudur. Eğer g nin çember üzerindeki ortalama değeri sıfır ise yani

$$\int_0^{2\pi} g(\theta')d\theta'=0 \tag{4.8.4}$$

ise bu zaman (4.8.2) eşitliği ile birlikte düşünülürse

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{r_0}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(p-1)gd\theta'=\frac{r_0}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\theta'-\theta)g(\theta')d\theta'$$

(4.4.1) ve (4.4.2) eşitliklerine göre g nin sürekli olduğu θ ların her biri için

$$\lim_{r\to r_0}\frac{\partial u}{\partial r}g(\theta) \qquad (r<r_0) \tag{4.8.5}$$

elde edilir r=0 için φ bir sabittir.Dolayısıyla (4.8.3) ile (4.8.4)eşitliklerinden u nun çember merkezindeki değerinin u_0 olduğu çıkar, yani

$$u_0=(0,\theta) \tag{4.8.6}$$

dir. Bu nedenle

$$u(r,\theta)=\frac{-r_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}Log\left[r_0^2-2r_0r\cos(\theta'-\theta)+r^2\right]g(\theta')d\theta'+u_0,\ (r<r_0) \tag{4.8.7}$$

formülü çemberin iç bölgesi için Neumann problemini çözer. Buradaki $g(\theta)$, bu harmonik fonksiyonun (4.8.5) koşulu anlamında sınırdaki normal türevidir.

4.9.Yarı Düzlem İçin Bir Neumann Problemi

g(x) fonksiyonu, ancak sonlu sayıdaki sonlu sıçramalar hariç gerçel x lerin tümü için sürekli olsun ve

$$|x^k g(x)|<M \quad (k>1,-\infty<x<\infty) \tag{4.9.1}$$

gibi bir sıralama özelliğini sağlasın. Eğer z=x+iy ise x' lerin herbiri için $Log|z-x'|$ fonksiyonu y>0 yarı düzleminde harmonik olur. Sonuç olarak, B gerçel bir sabit olmak üzere

$$U(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Log|z - x'|g(x')dx' + B$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Log\left[(x' - x)^2 + y^2\right]g(x')dx' + B \qquad (y > 0) \qquad (4.9.2)$$

fonksiyonu bu yarı düzlemde harmoniktir.(4.9.2) eşitliği (4.5.8) Schwarz formülü akılda tutularak yazılmıştır. Çünkü (4.9.2) den

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yg(x')}{(x' - x)^2} dx' \quad (y > 0) \qquad (4.9.3)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.6.1) ve (4.6.2) eşitliklerine göre g nin sürekli olduğu x noktalarının her birinde

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = g(x) \quad (y > 0) \qquad (4.9.4)$$

olur. Dolayısıyla (4.9.2) integral formülü y>0 yarı düzlemi için (4.9.7) sınır koşullu Neumann problemini çözer.

KAYNAKLAR

(1)**BAŞKAN**, T. 1991-a.Kompleks Analiz. Anadolu Üniversitesi. ESKİŞEHİR.

(2)**BAŞKAN**, T. 1996-b.Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi. Basımevi.BURSA.

(3)**CHURCHİLL,R.V**. 1989.Complex Variables and Applications. Mc Graw- Hill.Inc.Literatür Yayıncılık İSTANBUL.

(4)**DETTMAN,J.W**. 1965.Applied Complex Variables. Dover Publications, NEWYORK.

ÖZGEÇMİŞİM

1980 yılında Batman'da doğdu.İlk,Orta ve Lise öğrenimini Batman'da tamamladı.1996-2000 yıllarında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü Okudu.2000 yılında Dicle Üniversitesi Fen –Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans çalışmasına başladı aynı yılda Batman Yavuz Selim İlköğretim Okulunda Matematik öğretmeni olarak başlamış olup, 2002-2003 eğitim-öğretim yılı başından itibaren Yahya Kemal Bayatlı Lisesinde matematik öğretmeni olarak göreve başladı, hala aynı okulda görevine devam etmektedir.