

**ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DÜĞÜM TABLOLARI İÇİN YENİ BİR METOD:**

**DÜĞÜM DİGRAFI NOTASYONU**

**Tuğçe KUNDURACI**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Aralık, 2017**

**ERZURUM**

**Her Hakkı Saklıdır**

**T.C.**  
**ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEZ ONAY FORMU**

---

**DÜĞÜM TABLOLARI İÇİN YENİ BİR METOD:  
DÜĞÜM DİGRAF NOTASYONU**

Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI danışmanlığında, Tuğçe KUNDURACI tarafından hazırlanan bu çalışma 20/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Tamer UĞUR *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

**Doç. Dr. Arzu GÖRMEZ**  
**Enstitü Müdürü**

# ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

ETÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “DÜĞÜM TABLOLARI İÇİN YENİ BİR METOD: DÜĞÜM DİGRAF NOTASYONU” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

20/12/ 2017

Tuğçe KUNDURACI

## ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

### DÜĞÜM TABLOLARI İÇİN YENİ BİR METOD: DÜĞÜM DİGRAF NOTASYONU

Tuğçe KUNDURACI

Erzurum Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Düğüm tabloları oluşturmak için yeni bir metod geliştirildi. Düğüm digraf notasyonu adını verdiğimiz bu metotta düğüm grafindan elde edilen digraflara quasi-pseudo metrik vasıtasıyla bir bitopoloji eşlendi. Bu bitopolojiler sınıflandırılarak yeni düğüm tabloları elde edildi. Giriş bölümünde literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde ise düğüm, graf, digraf, bitopolojik uzay gibi temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde düğümden graf, dual graf ve digrafın elde edilişi ve bunlara bağlı olarak quasi- pseudo metrik vasıtasıyla bitopolojilerin elde edilişi yer almaktadır. Dördüncü bölümünde,  $m = 3,4, \dots, 10$  ve  $n = 1,2,3$  olmak üzere,  $m_n$  düğümlerinden elde edilen grafların; digraflarıyla oluşturulan bitopolojilerin herbirinin tek tek elde edilmesi verilmiştir. Son bölümde ise elde edilen bitopolojilere bağlı olarak  $m = 3,4, \dots, 10$  ve  $n = 1,2,3$  olmak üzere,  $m_n$  düğümlerinin çeşitli sınıflandırmaları verilmiştir.

**2017, 60 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Düğüm, bitopolojik uzay, graf, digraf, düğüm grafi, düğüm digrafi

## ABSTRACT

MASTER THESIS

### A NEW METHOD FOR KNOT TABLES: KNOT DIGRAPH NOTATION

Tuğçe KUNDURACI

Erzurum Technical University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

A new method for creating knot tables was developed. In this method, which we call the knot digraph notation, a bitopology is matched to the digraphs obtained from the knot graph by quasi-pseudo metric. By classifying these bitopologies, new knot tables were obtained. Literature was given in the introduction. In the second part, fundamental definitions and theorems such as knot, graph, digraph, bitopological space are expressed. In the third part, knot graph, dual graph and digraphs are obtained, and depending on these, bitopologies are obtained by means of quasi-pseudo metric. In the fourth section, the graphs obtained from knots  $m_n$ , with  $m = 3,4, \dots, 10$  and  $n = 1,2,3$  each of the bitopologies created by the digraphs is given individually. In the last section, various classifications of  $m_n$  knots are given, with  $m = 3,4, \dots, 10$  and  $n = 1,2,3$  depending on the bitopologies obtained.

**2017, 60 pages**

**Anahtar Kelimeler:** Knot, bitopological spaces, graph, digraph, knot graph, knot digraph

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alıŐma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana bilgi ve tecrübesiyle her türlü desteği sağlayan, değerli danıŐmanım Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Sayın Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya en içten dileklerle sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Bu alıŐma sürecinde bilgi ve desteğini esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Prof. Dr. Tamer UĞUR'a sonsuz teŐekkürü borç bilirim. Ayrıca tezin hazırlanması sürecinde değerli bilgilerinden yararlandığım Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölüm'ü ve Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölüm'ü hocalarıma sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans süresince benden sevgisini ve her türlü desteğini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

**Tuğçe KUNDURACI**

**Aralık 2017**

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	viii
SİMGELER DİZİNİ .....	ix
1. GİRİŞ .....	1
2. KURAMSAL TEMELLER .....	5
2.1. Topolojik Kavramlar.....	5
2.2. Düğüm.....	7
2.3. Regüler Diyagram .....	8
2.4. Temel (Basit) Düğüm Hareketleri.....	10
2.5. Reidemeister Hareketleri.....	11
2.6. Graf .....	12
2.7. Digraf (Yönlendirilmiş Graf) .....	13
2.8. Graf Hareketleri .....	14
2.9. Bitopolojik Uzay .....	17
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	22
3.1. Düğümünden Graf ve Dual Grafın Elde Edilişi.....	22
3.2. Graftan Digrafın Elde Edilişi .....	23
3.3. Digraf ile Eşlenen Bitopolojinin Bulunması.....	25
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA .....	32
4.1. Bazı Düğümlerin Bitopolojilerinin Hesaplanmaları .....	32
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	51
KAYNAKLAR .....	58
ÖZGEÇMİŞ .....	60

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Königsberg köprüleri .....	1
1.2. Königsberg köprüleri ve graf gösterimi .....	2
2.1. Düğüm .....	7
2.2. Sağ-el ve sol-el trefoil düğüm.....	7
2.3. Düğümün izdüşümü .....	8
2.4. Katlı noktalar .....	9
2.5. Regüler diyagramlar .....	9
2.6. Temel düğüm hareketleri .....	10
2.7. Temel düğüm hareketleri .....	11
2.8. Reidemeister hareketleri .....	12
2.9. Basit düğüm hareketi .....	12
2.10. Graf örneği .....	13
2.11. Digraf örneği.....	13
2.12 1. Graf bozması.....	14
2.13. 2. Graf bozması.....	15
2.14. 3. Graf bozması.....	15
2.15. 4. Graf bozması.....	16
2.16. 5. Graf bozması.....	16
2.17. 6. Graf bozması.....	17
2.18. 7. Graf bozması.....	17
2.19. Digraf .....	18
3.1. Trefoil düğümün regüler izdüşümü .....	22
3.2. Graf ve dual graf .....	23
3.3. Düğüm geçitleri .....	23
3.4. İşaretlenmiş graf .....	23
3.5. İşaretlenmiş dual graf.....	24
3.6. İşaretlerin yönlendirmesi .....	24



3.7. Digraf ve dual digraf .....	24
3.8. Etiketlenmiş digraf ve dual digraf .....	25
3.9 Cycle bozması.....	25
3.10. Üçgen bozması.....	26
3.11. Trefoil düğüm digrafı.....	26
3.12. Dual digrafa yapılan cycle bozma .....	29
4.1. $3_1$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	32
4.2. Dual digrafa yapılan cycle bozma .....	32
4.3 $4_1$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	33
4.4 Digrafa yapılan üçgen bozma .....	33
4.5 $5_1$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	34
4.6 Dual digrafa yapılan cycle bozma .....	34
4.7. $5_2$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	35
4.8. Digrafa yapılan cycle bozma .....	35
4.9. $6_1$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	36
4.10. Digrafa yapılan cycle bozma .....	36
4.11. $6_2$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	37
4.12. Digrafa yapılan üçgen bozma .....	37
4.13. $6_3$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	38
4.14. Digrafa yapılan üçgen bozma .....	38
4.15. $7_1$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	39
4.16. Dual digrafa yapılan cycle bozma .....	39
4.17. $7_2$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	40
4.18. Digrafa yapılan cycle bozma .....	40
4.19. $7_3$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	41
4.20. Dual digrafa yapılan cycle bozma .....	41
4.21. $8_1$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	42
4.22. Digrafa yapılan cycle bozma .....	42
4.23. $8_2$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	43
4.24. Digrafa yapılan üçgen bozma .....	43
4.25. $8_3$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	44

4.26. Digrafa yapılan cycle bozma .....	44
4.27. $9_1$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	45
4.28. Dual digrafa yapılan cycle bozma .....	45
4.29. $9_2$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	46
4.30. Dual digrafa yapılan cycle bozma .....	46
4.31. $9_3$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	47
4.32. Dual digrafa yapılan cycle bozma .....	47
4.33. $10_1$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	48
4.34. Digrafa yapılan cycle bozma .....	48
4.35. $10_2$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	49
4.36. Digrafa yapılan üçgen bozma .....	49
4.37. $10_3$ düğümü, digrafı ve dual digrafı .....	50
4.38. Digrafa yapılan cycle bozma .....	50

## ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
5.1. $m_1$ ( $m$ tek, $m \geq 3$ ) düğümleri ve bitopolojileri.....	52
5.2. $m_1$ ( $m$ çift, $m \geq 4$ ) düğümleri ve bitopolojileri .....	53
5.3. $m_2$ ( $m$ tek, $m \geq 5$ ) düğümleri ve bitopolojileri.....	54
5.4. $m_2$ ( $m$ çift, $m \geq 6$ ) düğümleri ve bitopolojileri .....	55
5.5. $m_3$ ( $m$ tek, $m \geq 7$ ) düğümleri ve bitopolojileri.....	56
5.6. $m_3$ ( $m$ çift, $m > 6$ ) düğümleri ve bitopolojileri .....	57
5.7. $m_3$ ( $m$ çift, $m = 6$ ) düğümü ve bitopolojisi.....	57

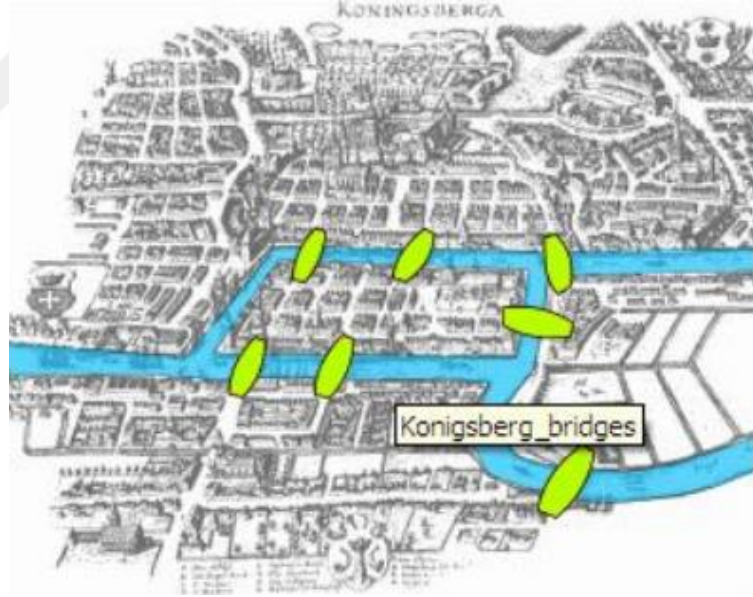
## SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$K$	Herhangi bir düğüm
$K^*$	$K$ düğümünün ayna görüntüsü
$\mathbb{R}^2$	2-boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu Öklid Uzayı
$S^1$	1-Boyutlu Küre
$S^3$	$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ şeklinde oluşturulan uzay
$\pi$	$K$ düğümünün standart izdüşümü
$\Omega_i$	$i = 1,2,3$ için Reidemeister Hareketleri
$\Omega_i^{-1}$	$i = 1,2,3$ için Reidemeister Hareketlerinin tersi
$g(\pi)$	Bir düğümün grafi
$g'(\pi)$	Bir düğümün dual grafi
$\varepsilon_a^{bc}$	$b - c$ kenarı arasında $a$ tane bozma

## 1. GİRİŞ

Tezimizin ilk materyali olan düğüm grafına geçmeden önce graf teorisi ile ilgili çalışmalara bakalım. Graf teorisinin başlangıcı, Leonhard Euler tarafından, 1736 yılında, Königsberg'in yedi köprüsü (Die Sieben Brücken von Königsberg) başlığı ile yayımlanan ve günümüzde hala popülerliğini koruyan bir problem ile ilgili olarak yazılan makaledir.

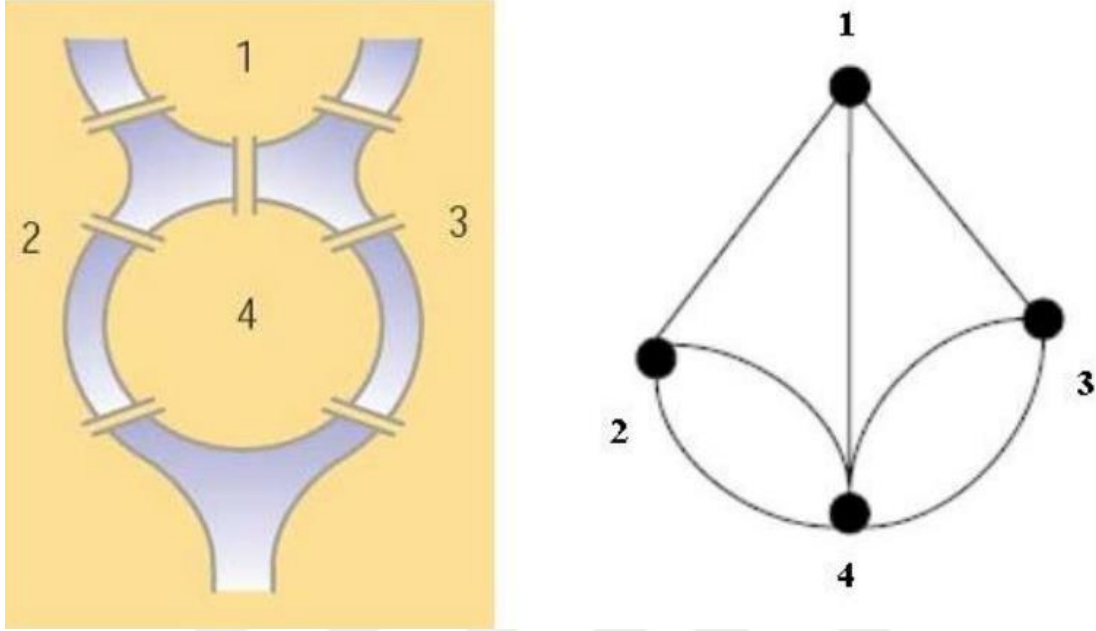
Bu problem şöyledir: Königsberg kentinde Eski ve Yeni Pregel nehirleri birleşerek Pregel (Pregolya) nehrini oluşturmaktadır. Bu nehirler, şehri dört bölüme ayırmaktadır ve nehir üzerinde bu bölgeleri birleştiren yedi köprü bulunmaktadır. Merak edilen ise şudur: Bütün köprülerden bir ve yalnız bir defa geçmek koşulu ile bir yürüyüş yapılabilir mi?



Şekil 1.1. Königsberg köprüleri

Euler problemin çözümüne kara parçalarının noktalar, köprülerin ise bu noktaları birleştiren çizgiler olacak şekilde graf (çizge) çizimiyle başlamıştır. Grafın elemanları; köşe adı verilen noktalar, ve bu köşeleri birbirine bağlayan kenarlardır. Ayrıca bir köşeye bağlı olan elemanların sayısı ise o köşenin derecesi olarak adlandırılır. Bu

doğrultuda soru, grafin herhangi bir köşesinden başlayarak yedi elemanın her birini bir ve yalnız bir kere kullanarak dolaşma problemine dönüşmüş olur.



**Şekil 1.2.** Königsberg köprüleri ve graf gösterimi

Euler'in çalışmaları böyle bir gezintinin mümkün olmadığını kanıtlamıştır. Leonhard Euler'in çalışmaları matematikte tamamıyla yeni bir dal olan graf teorisinin ilk teoremi ve topolojinin keşfinin habercisi olmuştur.

Düğüm grafinin ana unsuru düğümdür. Bir düğüm  $S^1$  in 3 boyutlu Euclidean uzayı  $\mathbb{R}^3$  (veya  $S^3$ ) e gömülmesi ile elde edilen basit kapalı bir eğridir. Düğümlerle ilk olarak kimin ne zaman ilgilendiğini söylemek zor olsa da son döneminde Gauss un bu alana ilgi duyduğu bilinmektedir. Amerikalı matematikçi Alexander düğüm teorisinin 3-boyutlu topoloji çalışmalarında ne kadar önemli olduğunu gösteren ilk kişidir. Ayrıca Alman matematikçi Seifert 1920 lerin başından 1930 lara kadar bu teorisinin önemini ortaya koyan eserler vermiştir. Özellikle bu dönemde Bankwitz, Aumann, Yajima, Kinoshita, Murasugi gibi isimler düğüm teorisine önemli katkılar sağlamışlardır.

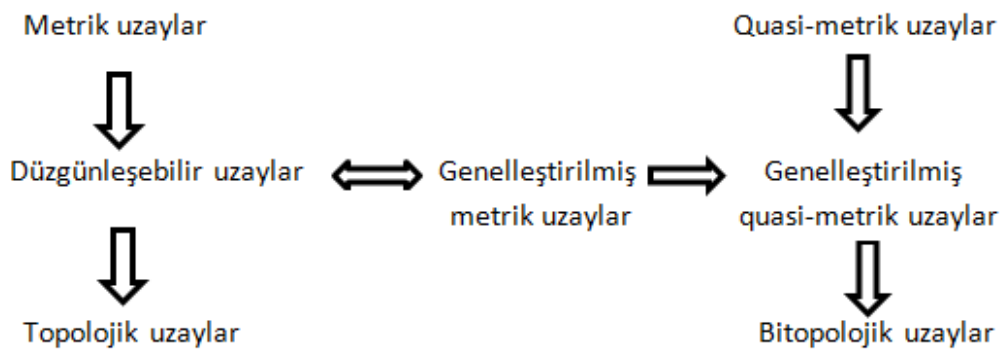
Tarihsel olarak düğüm teorisi ve graf teorisinin geçmişi çok eskilere dayanmasına rağmen düğüm grafi kavramının başlangıcı 1930'lara Bankwitz' in çalışmalarına

dayanmaktadır. Bankwitz, bizimde bu çalışmada kullandığımız düğüm grafi kavramını ilk olarak literatüre kazandırmıştır. Düğüm grafları düğüm teorisiyle graf teorisinin ortak çalışma alanı olarak düşünülebilir.

Daha sonra Aumann (1956) alterne düğümler çalışmasında bu konuya yer vermiştir. Yajima ve Kinoshita (1957) bu kavramın grafiksel davranışlarını incelemişlerdir. İlerleyen dönemlerde de bu çalışmalar sürmüştür ve 1980'den sonra ise Jones (1987) kendi ismini verdiği polinomu keşfinden sonra düğüm graflarının önemi bir kat daha artmıştır.

Teorik ve uygulamalı matematikte değişik yapılarla verilen kümelerle çalışılmıştır. Ortaya atılan bir problemi çözerken bazen bir kümeyi belirli bir yapıda göz önüne almanın yeterli olmadığı görülmüştür. Çözümüne ulaşmak için, bir küme üzerinde ilave bir yapının tanımlanması ihtiyacı oluşmuştur. Bu ihtiyaç doğrultusunda topolojik uzaylarda kullanılan teoriler bitopolojik uzaylara taşınmıştır. Bitopolojik uzaylarda çalışmanın en büyük yararı; tek ve aynı küme üzerinde iki veya daha fazla yapının göz önüne alınması ve matematiksel kavramların uzaylar üzerinde ayırt edilmesini sağlamasıdır.

Bitopolojik uzaylar ilk defa, J. C. Kelly tarafından 1963 yılında yayınladığı “Bitopolojik Uzaylar” adlı makalesinde incelenmiştir. Kelly bu makalede,  $X$  kümesini boştan farklı herhangi bir küme,  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  topolojilerini de,  $X$  üzerinde herhangi iki topoloji olarak alarak bitopolojik uzayı  $(X, \tau_1, \tau_2)$  üçlüsü ile tanıtmıştır. Aşağıdaki diyagram bitopoloji uzay ile diğer uzaylar arasındaki ilişkiyi göstermektedir.



1983 yılında Acharya tarafından bir grafa dönüşümler yardımıyla bir bitopoloji eşleyerek bitopolojik graf kavramını literatüre kazandırmıştır.

Bu çalışmanın giriş bölümünde literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölüm olan kuramsal temellerde ise düğüm, graf, digraf, bitopolojik uzay gibi temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölüm olan materyel ve yöntem de ise düğümden graf, dual graf ve digrafın elde edilişi ve bunlara bağlı olarak quasi- pseudo metrik vasıtasıyla bitopolojilerin elde edilişi yer almaktadır. Dördüncü bölüm olan araştırma bulguları ve tartışma da,  $m = 3,4, \dots, 10$  ve  $n = 1,2,3$  olmak üzere,  $m_n$  düğümlerinden elde edilen grafların; digraflarıyla oluşturulan bitopolojilerin herbirinin tek tek elde edilişi verilmiştir. Son bölüm olan Sonuç ve Önerilerde ise elde edilen bitopolojilere bağlı olarak  $m = 3,4, \dots, 10$  ve  $n = 1,2,3$  olmak üzere,  $m_n$  düğümlerinin çeşitli sınıflandırmaları verilmiştir.

Bu çalışma ile düğümlerin tablosunu oluşturmak için yeni bir metod geliştirildi. Düğüm digraf notasyonu adını verdiğimiz bu metod ile düğümlerin grafindan elde edilen düğüm digrafına quasi-pseudo metrik vasıtasıyla bir bitopoloji eşlendi. Böylece Acharya' nın tanımı gözönüne alındığında bitopolojik düğüm grafi kavramı literatüre kazandırılmış oldu. Ayrıca bu bitopolojileri sınıflandırarak yeni düğüm tabloları elde edildi.



## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

### 2.1. Topolojik Kavramlar

**Tanım 2.1.1:**  $X$ , boştan farklı bir küme olmak üzere,  $\tau$  da  $X$  in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer  $\tau$  aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $\tau$  ya  $X$  üzerinde bir topoloji denir.

- i)  $X, \emptyset \in \tau$
- ii)  $\tau$  ya ait olan kümelerin herhangi bir sayıdaki birleşimi yine  $\tau$  ya ait olmalıdır.
- iii)  $\tau$  ya ait olan kümelerin sonlu sayıdaki kesişimleri yine  $\tau$  ya ait olmalıdır.

$X$  ile birlikte  $\tau$  ya **topolojik uzay** denir ve  $(X, \tau)$  ile gösterilir (Kocak 2006).

**Tanım 2.1.2:**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $\beta$  da  $X$  in açık alt kümelerinin bir sınıfı olsun.  $\tau$  nun her elemanı  $\beta$  koleksiyonuna ait olan elemanların birleşimi olarak yazılabiliyorsa  $\beta$  ya  $\tau$  topolojisinin bir **tabanı (bazı)** denir (Kocak 2006).

**Tanım 2.1.3:**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $\delta$  da  $X$  in açık alt kümelerinin bir sınıfı olsun.  $\delta$  ya ait bütün sonlu sayıdaki kümelerin arakesiti  $\tau$  nun bir tabanı oluyorsa  $\delta$  ya  $\tau$  topolojisinin bir **alt tabanı** denir (Kocak 2006).

**Tanım 2.1.4:**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $p \in X$  olsun.  $p \in G \subseteq N$  olacak şekilde bir  $G$  açık kümesi varsa  $N$  ye  $p$  noktasının bir **komşuluğu** denir (Kocak 2006).

**Tanım 2.1.5:**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay,  $A \subseteq X$  ve  $x \in A$  olsun. Eğer  $x \in G \subseteq A$  olacak şekilde bir  $G \in \tau$  açık kümesi varsa, yani  $A$  kümesi  $x$  in bir komşuluğu ise,  $x$  elemanına  $A$  nın bir **iç noktası** denir.  $A$  nın tüm iç noktalarının kümesine  $A$  nın **içi** denir (Kocak 2006).

**Tanım 2.1.6:**  $X$ , boştan farklı bir küme ve  $p: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü her  $x, y, z \in X$  için,

$$(p1): p(x, x) = 0$$

$$(p2): p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$$

$$(p3): p(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$(p4): p(x, y) = p(y, x)$$

koşullarını sağlıyorsa,  $p$ ' ye  $X$  üzerinde metrik denir.  $(X, p)$  ikilisine de **metrik uzay** denir (Uluçay 2006).

Eğer  $p$ ,

(p1) ve (p2) koşullarını sağlıyorsa  $p$ 'ye  $X$  üzerinde **quasi-pseudo metrik** denir.  $(X, p)$  ikilisine de **quasi- pseudo metrik** uzay denir.

(p1), (p2) ve (p3) koşullarını sağlıyorsa  $p$ 'ye  $X$  üzerinde **quasi metrik** denir.  $(X, p)$  ikilisine de **quasi metrik uzay** denir.

(p1), (p2) ve (p4) koşullarını sağlıyorsa  $p$ 'ye  $X$  üzerinde **pseudo metrik** denir.  $(X, p)$  ikilisine de pseudo metrik uzay denir.

**Tanım 2.1.7:**  $p$ ,  $X$  kümesi üzerindeki quasi- pseudo metrik ve  $q: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü her  $x, y \in X$  için,

$$q(x, y) = p(y, x)$$

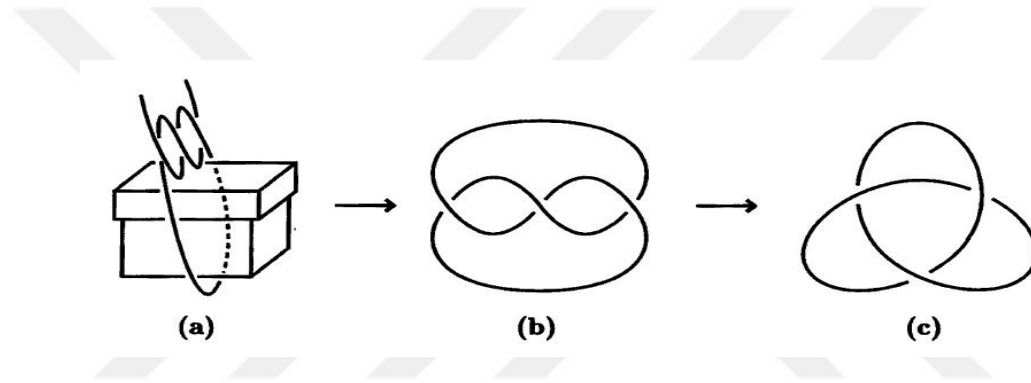
olarak tanımlansın. Bu durumda  $q$ 'ya  $p$ 'nin eşleniği denir.  $(X, p, q)$  ile gösterilen bu uzaya da **quasi- pseudo metrik uzay** denir ve kısaca  $p - q$  metrik uzay yazılır (Mucuk 2010).

**Tanım 2.1.8:**  $(X, p)$  bir metrik uzay olsun.  $x \in X$  ve  $r > 0$  olmak üzere  $d(x, y) < r$  olacak şekilde  $y$  noktalarının kümesine  $x$  in  $r$  komşuluğu denir (Kocak 2006).

**Tanım 2.1.9:**  $(X, p)$  bir metrik uzay ve  $x \in G \subseteq X$  olsun. Eğer  $B(x, r) \subset G$  oluca şekilde bir  $r > 0$  sayısı varsa  $x$  e  $G$  nin **iç noktası** denir (Kocak 2006).

## 2.2. Düğüm

Bir parça ip Şekil 2.1(a) da gösterildiği gibi kutuya gevşek şekilde bağlayalım. Elde edilen düğümün basit bir tipidir. Şekil 2.1(b) de bu ipin iki ucu yapıştırılmıştır. Kutu sadece destek amaçlı kullanılmıştır. İşlem tamamlandığında Şekil 2.1(c) de verilen ip ile meydana getirilen bir düğümleşmiş ilmektir. Matematikte bu ilmeğe **düğüm** denir.



Şekil 2.1. Düğüm

Başka bir ifadeyle düğüm tek bir eğri olarak düşünülebilir. O halde düğüm uzayda basit kapalı bir eğridir. Eğer yukarıdaki sağ el ile yapılan işlem sol el ile yapılırsa yine düğüm elde edilir. Ancak bu iki düğümüne dikkatle bakıldığında bazı farklılıklar olduğu görülmektedir. Aslında bu iki düğümün her biri trefoil düğüm (yonca yaprağı) dır. Yukarıda yapılan işlemlerle elde edilen iki düğümü ayırt etmek için birine sağ-el trefoil düğümü, diğerine ise sol-el trefoil düğümü adı verilmiştir (Murasugi 1996).

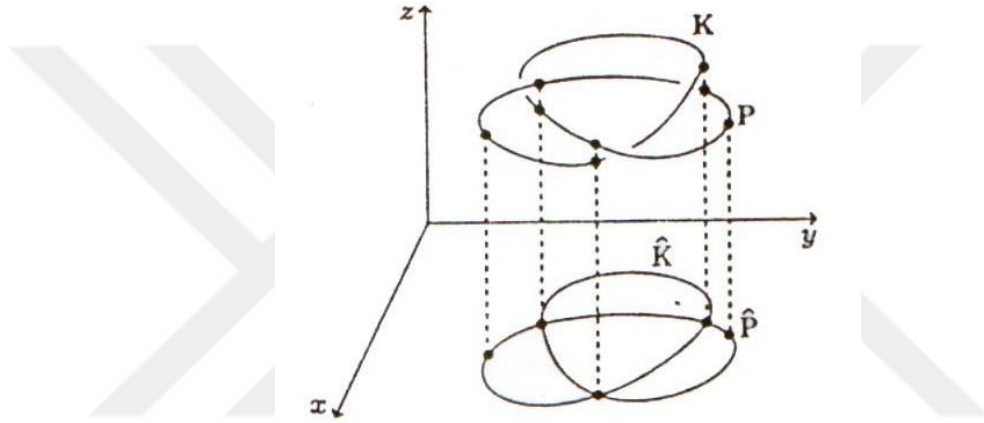


Şekil 2.2. Sağ-el ve sol-el trefoil düğüm

**Tanım 2.2.1:** Dügüm,  $S^1$  çemberinin  $S^3$  e gömülmesidir (Burde, Zieschang 2003). Burada  $S^3$ ,  $R^3$  e sonsuz noktanın eklenmesiyle elde edilir (Burde, Zieschang 1985).

### 2.3. Regüler Diyagram

$R^3$  deki  $P(x, y, z)$  noktasını Şekil 2.3 de görüldüğü gibi  $xy$ -düzlemindeki  $\hat{P}(x, y, 0)$  noktasına izdüşüren fonksiyon  $\pi$  olsun.

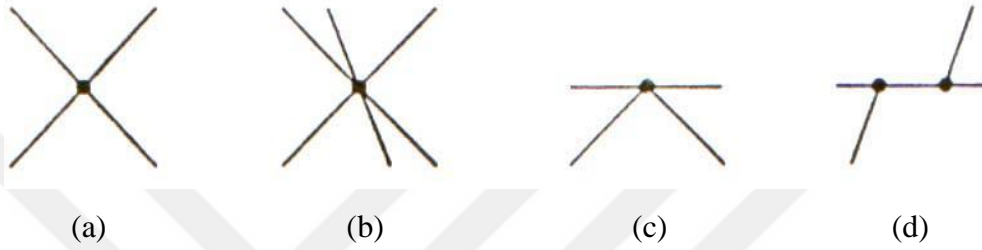


**Şekil 2.3.** Dügümün izdüşümü

Eğer  $K$  bir düğüm ise  $\pi(K) = \hat{K}$  ya  $K$  nın izdüşümü denir.  $K$  bir yönlendirmeye sahipse doğal olarak  $\hat{K}$  de  $K$  nın yönlendirmesinden doğan bir yönlendirmeye sahip olacaktır. Ancak  $\hat{K}$  nin birkaç arakesit noktası olduğundan düzlemde basit kapalı bir eğri değildir. Sezgisel olarak  $\hat{K}$  nin  $K$  ya benzerliğini görmek için uzayda  $K$  üzerinde birkaç düğüm hareketi yapılabilir. Aşağıdaki şartları uygulayalım.

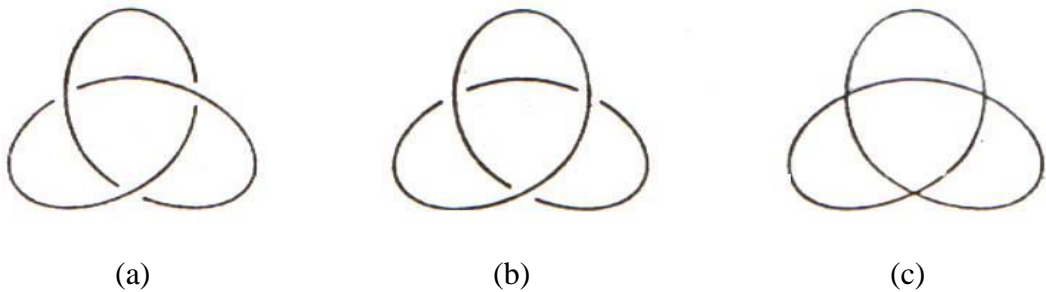
- i)  $\hat{K}$  sonlu sayıda arakesit noktasına sahiptir.
- ii) Eğer  $Q$ ,  $\hat{K}$  nin bir arakesit noktası ise  $Q$  nun ters görüntüsü  $K$  da iki farklı noktaya sahiptir. Yani  $Q$ ,  $\hat{K}$  nin bir katlı noktasıdır. (Bakınız Şekil 2.4(a). Şekil 2.4(b) de gösterildiği gibi ikiden fazla noktaya müsaade edilmez.

iii)  $K$  düğümü poligonal olarak düşünüldüğünde  $K$ 'nin bir köşesi  $\widehat{K}$ 'nin katlı noktasına dönüşmez. Şekil 2.4(c) ve (d) deki örneklerin ikisinde de, bir poligonal doğru  $\widehat{K}$ 'nin bir köşesine izdüşmüştür. Bu durumların ikisine de izin verilmez.



Şekil 2.4. Katlı noktalar

Yukarıdaki şartları sağlayan  $\widehat{K}$  düğümünün izdüşümünün bir regüler izdüşümüdür. Ancak izdüşümlerle ilgili çalışmalarda katlı noktalardan dolayı bazı önemli belirsizlikler olduğu görülür. İzdüşümün katlı noktasında düğümün kendi kendisinin altından mı yoksa üstünden mi geçtiği belli değildir. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için düğümün kesim noktası işaretlenerek, katlı nokta bölgesinde düğüm bir miktar değiştirilebilir. Böylece düğümün bu belirsizliği orjinaline uymasa da gerçek görüntüsü çizilir. Bu şekilde değiştirilmiş izdüşümler bir regüler diyagram olarak adlandırılır. Şekil 2.5(a),(b).



Şekil 2.5. Regüler diyagramlar

Bir regüler diyagram düğümün üç boyutlu uzayda nasıl varolduğunu verir. Yani düzlemde uzaysal bir çizimin yapılabilmesine olanak sağlar. Dahası izdüşümde kaybolan veriyi elde etmek için regüler diyagram kullanılır. Örneğin Şekil 2.5(c), Şekil 2.5(a) ve (b) farklı iki düğümün regüler izdüşümüdür (Murasugi 1996).

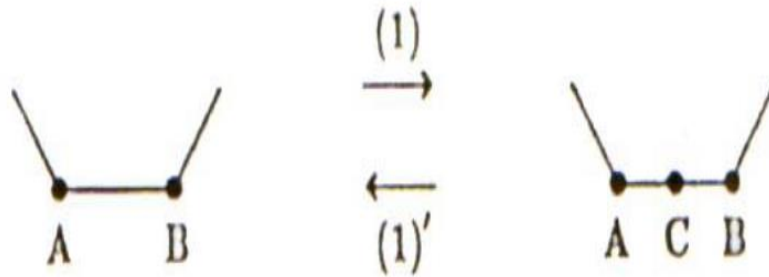
#### 2.4. Temel (Basit) Düğüm Hareketleri

Bir düğümün şeklinde kolayca değişiklik yapılabilir. Örneğin bir  $K$  düğümü üzerindeki  $AB$  kenarını  $AC$  ve  $CB$  kenarlarıyla değiştirmek mümkündür. Bu değişikliğin terside yapılabilir. Bu şekilde yer değiştirmeler basit düğüm hareketleri olarak adlandırılır. Bu değişim hareketleri detaylı olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Verilen bir  $K$  düğümü üzerinde aşağıdaki işlemler uygulanabilir.

(1) Şekil 2.6 görüldüğü gibi bir  $K$  düğümü üzerindeki  $AB$  kenarı bir  $C$  noktası referans alınarak  $AC$  ve  $CB$  şeklinde iki kenara bölünebilir.

(1)' ((1) in tersi) Şekil 2.6 da görüldüğü gibi bir  $K$  düğümü üzerinde bitişik  $AC$  ve  $CB$  kenarlarından oluşan bir doğru varsa bu  $C$  noktası silinerek bir  $AB$  kenarı elde edilebilir.

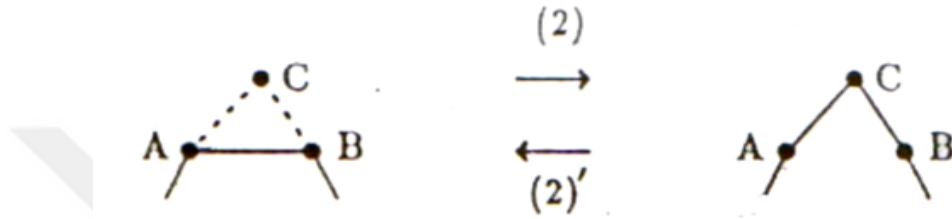


Şekil 2.6. Temel düğüm hareketleri

(2) Şekil 2.7 de görüldüğü gibi  $K$  düğümü üzerinde bulunmayan bir  $C$  noktasını düşünelim.  $AB$  ve  $C$  ile biçimlendirdiğimiz  $ABC$  üçgeni  $AB$  kenarı hariç  $K$  düğümünü

kesmezse bu durumda  $AB$  kenarı ortadan kaldırılabilir ve  $AC$  ve  $CB$  kenarları eklenebilir.

(2)' ((2) nin tersi)  $K$  düğümü üzerinde  $K$  nın  $AC$  ve  $CB$  bitişik iki kenarını ihtiva eden bir  $ABC$  üçgeni mevcutsa ve bu üçgen  $AC$  ve  $CB$  kenarlı hariç  $K$  düğümünü kesmezse, Şekil 2.7 de görüldüğü gibi  $AC$  ve  $CB$  kenarları silinebilir ve  $AB$  kenarı eklenebilir.



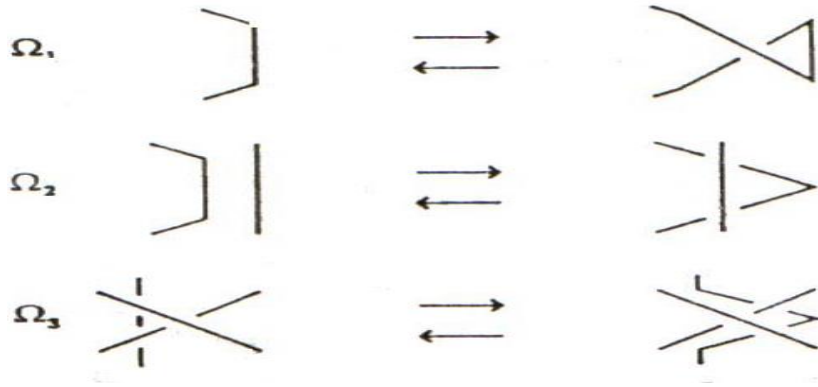
Şekil 2.7. Temel düğüm hareketleri

Bu işlemler basit düğüm hareketleri olarak adlandırılır (Murasugi 1996).

## 2.5. Reidemeister Hareketleri

İki düğüm diyagramı Şekil 2.8 de gösterilen Reidemeister hareketlerinin sonlu dizisi ile birbirleri üzerine dönüştürülebiliyorsa denktir. Reidemeister, aynı düğümler için herhangi iki diyagramın denk olduğunu gösterdi. Ayrıca Reidemeister hareketlerinin incelenmesiyle iki diyagram denkse aynı düğümü ifade ettiği de görülür. (Murasugi 1996)

İki düğüm  $i=1,2,3$  için  $\Omega_i$  veya onların tersi  $\Omega_i^{-1}$  Reidemeister hareketlerinin sonlu bir dizisi ile ilişkilendiriliyorsa bu iki düğümün denk olduğu söylenir (Burde, Zieschang 1985).



Şekil 2.8. Reidemeister hareketleri

Örneğin  $\Omega_1$  Şekil 2.9 da gösterildiği gibi,  $AC$   $UCB$  ile  $AB$  yi yer değiştiren regüler diyagram üzerinde bir basit düğüm hareketine karşılık gelen hareket olarak düşünülebilir (Murasugi 1996).

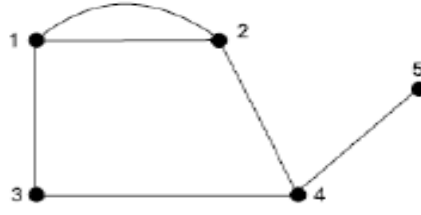


Şekil 2.9. Basit düğüm hareketi

## 2.6. Graf

**Tanım 2.6.1:**  $V$  ile gösterilen, köşe (veya tepe) noktaları kümesi adı verilen elemanlar kümesi ve  $V \times V$  kartezyen çarpımı kümesindeki sıralı ikililer ile tanımlanmış ayrıtların oluşturduğu  $E$  kümesinin birlikte oluşturduğu şemaya (diyagrama) **graf** denir. Graf  $G = (V, E)$  ile gösterilir (Bollobas 1998).





Şekil 2.10. Graf örneği

Şekil 2.10 daki grafın köşeleri;

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$

ve grafın kenarları;

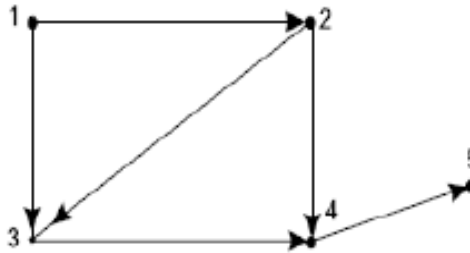
$$E = \{(1,2), (1,3), (3,4), (2,4), (4,5)\}$$

kümesidir.

**Tanım 2.6.5:**  $G$  bir graf,  $V(G)$  grafın köşeleri ve  $E(G)$  grafın kenarları olsun. Her bir kenarı + veya - ile işaretlenmiş olan  $G$  grafına **işaretlenmiş graf** denir (Gross ve Yellen 2005).

## 2.7. Digraf (Yönlendirilmiş Graf)

**Tanım 2.7.1:**  $G$  grafının kenarlı üzerinde yönlendirme varsa bu grafa **digraf** denir.  $D$  digrafının köşelerinin kümesi  $V(D)$ , kenarlarının kümesi ise  $A(D)$  dir. Digraf  $D = (V, A)$  ile gösterilir (Giriya ve Pilakkat 2013).



Şekil 2.11. Digraf örneği

Şekil 2.11 deki digrafın köşeleri;

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$

ve digrafın kenarları;

$$A = \{(1,2), (2,3), (1,3), (3,4), (2,4), (4,5)\}$$

kümesidir.

**Tanım 2.7.3:** Bir  $D$  digrafının köşelerinin sayısına digrafın **boyutu** denir(Gross ve Yellen 2005).

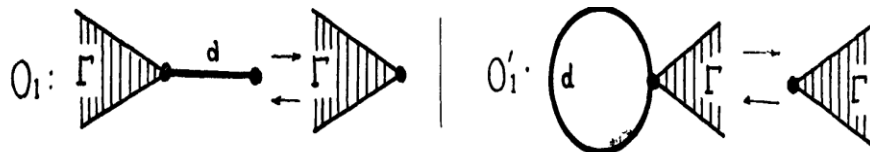
**Tanım 2.7.4:** Bir  $D$  digrafının kenarlarının sayısına digrafın **büyüküğü** denir (Gross ve Yellen 2005).

## 2.8. Graf Hareketleri

Bir düğümün her deformasyonu, Reidemeister Hareketlerine  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  denktir. Bu deformasyonlar, graflar üzerine uygulanabilir. Bir düğümün  $\pi$  regüler diyagramı  $\mathcal{G}(\pi)$  ve  $\mathcal{G}'(\pi)$  olmak üzere iki grafa sahip olduğundan, bir  $\Omega_i$  deformasyonu için  $O_i$  ve  $O_i'$  olarak iki graf deformasyonunu uygulayacağız.  $O_i$  ve  $O_i'$  birbirinin **dual operasyonlarıdır**.

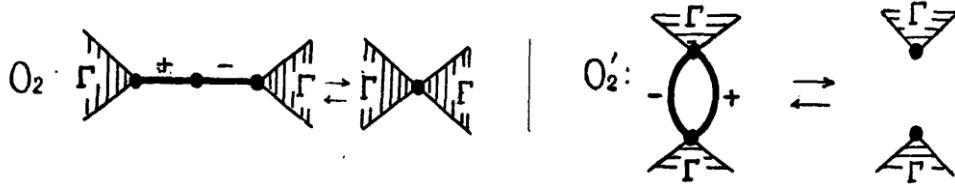
Bir graf üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlıdır:

1) Bir  $\mathcal{G}(\pi)$  grafı, bir  $\Gamma$  bloğundan ve bir kapalı  $d$  yayından oluşsun. Bu durumda  $\Gamma$  bloğu ile  $d$  kapalı yayının kesişimi bir tek noktadır ve  $d$  kapalı yayı ihmal edilebilir. Bu işlemin terside doğrudur .



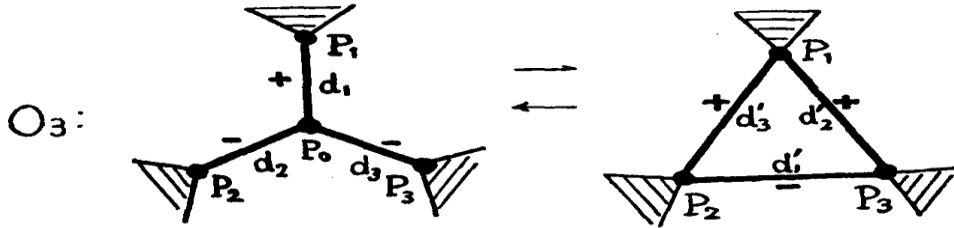
Şekil 2.12 1. Graf bozması

2) Bir  $\varphi(\pi)$  grafi, bir  $\Gamma$  bloğu ve  $d_1, d_2$  gibi iki zıt işaretli yayla;  $\Gamma, d_1, d_2, \Gamma$  olacak şekilde bir seriden meydana gelsin. Bu durumda,  $d_1, d_2$  zıt işaretli yayları ihmal edilerek  $\Gamma$  blokları birleştirilebilir. Eğer  $\varphi(\pi)$  grafi bir  $\Gamma$  bloğundan ve  $d_1, d_2$  gibi iki zıt işaretli birbirine paralel bağlı yaylardan oluşuyorsa, bu durumda yaylar ihmal edilebilir. Ayrıca bu işlemlerin tersleri de doğrudur.



Şekil 2.13. 2. Graf bozması

3)  $P_1, P_2, P_3$  köşeleri,  $P_0$  köşesiyle bağlantılı olacak şekilde, biri diğerinden zıt işaret olan  $d_1, d_2, d_3$  yayları ile bağlansın. Bu durumda,  $P_0$  ihmal edilebilir. ( $i=1,2,3$ ) için her  $d_i$  yayı,  $P_j, P_k$  köşelerini bağlayan zıt işaretli  $d_i'$  yayıyla yer değiştirir. Burada  $j, k$  nın işlevi  $i$  den ve diğerlerinden farklıdır. Bu işlemlerin tersi de doğrudur.



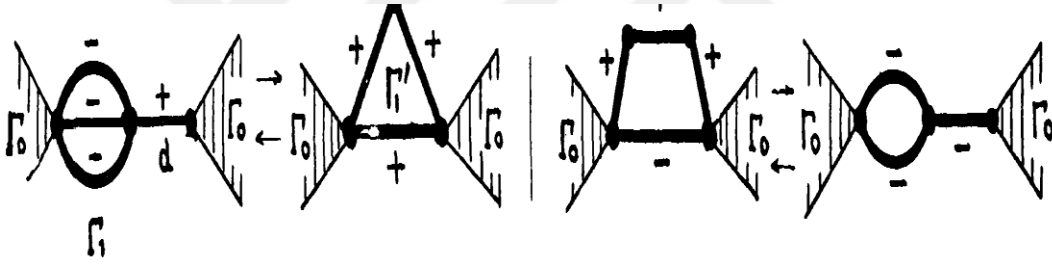
Şekil 2.14. 3. Graf bozması

4) Bir  $\varphi(\pi)$  grafi,  $\Gamma_0, \Gamma_1$  gibi iki blok,  $d$  bir yay olmak üzere  $\Gamma_0, \Gamma_1, d, \Gamma_0$  serisi şeklinde bağlansın. Burada  $\Gamma_1$ , paralel bağlantılı olan aynı işaretli iki yayı ihtiva eder ve  $d, \Gamma_1$  e zıt işaretlidir. Bu durumda  $d$  yayı ihmal edilebilir ve  $\Gamma_1$  işaret değiştirir. Burada bu işlemlerin tersi ve dual işlemleri de doğrudur.



Şekil 2.15. 4. Graf bozması

5)  $\Gamma_1$  bloğu, paralel bağlantılı olan aynı işaretli üç yayı ihtiva etsin ve  $d$ ,  $\Gamma_1$  e zıt işaretli olmak üzere bir  $G$  grafı,  $\Gamma_0, \Gamma_1, d, \Gamma_0$  serisi şeklinde bağlansın. Bu durumda,  $d$  ihmal edilebilir ve  $\Gamma_1, \Gamma_1$  den zıt işaretli olan  $\Gamma_1'$  üçgensel bloğu ile yer değiştirir. Bu işlemlerin tersi ve dual işlemleri de doğrudur.

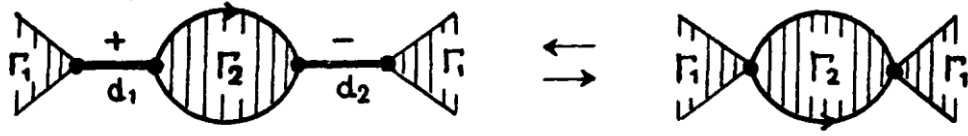


Şekil 2.16. 5. Graf bozması

6) Bir düğümün her  $\mathcal{G}(\pi)$  grafı esas işlemler yoluyla  $\mathcal{G}'(\pi)$  dual grafına denktir.

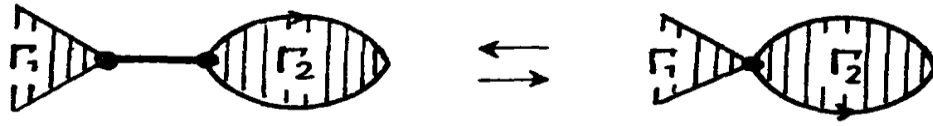
7) Bir  $\mathcal{G}(\pi)$  grafı paralel bağlantılı olan  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$  blokları ihtiva ediyorsa, bu durumda bir bloğu devirli bir düzende değiştirebiliriz.  $\mathcal{G}(\pi)$  grafı bir küre üzerinde bulunduğu için ifade sağlanır .

8)  $d_1, d_2$  yayları zıt işaretli yaylar,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  iki blok olmak üzere, bir  $\mathcal{G}(\pi)$  grafı,  $\Gamma_1, d_1, \Gamma_2, d_2, \Gamma_1$  serisi şeklinde bağlansın. Bu durumda yaylar,  $\Gamma_2$  nin ortak noktaları boyunca eksen çevresinde  $\Gamma_2$  nin  $180^\circ$  lik dönmesiyle ihmal edilebilir. Ters işlemler de doğrudur.



Şekil 2.17. 6. Graf bozması

9)  $\Gamma_1, \Gamma_2$  iki blok,  $d$  herhangi bir işaretli yay olmak üzere, bir  $\mathcal{G}(\pi)$  grafi,  $\Gamma_1, d, \Gamma_2$  serisi şeklinde bağlansın. Bu durumda  $d, \Gamma_2$  nin  $180^\circ$  lik dönmesiyle ihmal edilebilir. Ters işlemdedir (Yajima ve Kinoshita 1957).



Şekil 2.18. 7. Graf bozması

## 2.9. Bitopolojik Uzay

**Tanım 2.9.1:**  $X$  boştan farklı bir küme,  $\tau_1$  ve  $\tau_2$   $X$  üzerinde farklı iki topoloji olsunlar.  $(X, \tau_1, \tau_2)$  sıralı üçlüsüne bir **bitopolojik (ikili topolojik) uzay** denir (Kelly 1963).

Şimdi bir digrafa eşlenen bitopolojinin elde edilmesini inceleyelim.

**Tanım 2.9.2:**  $V$ , bir digrafın köşelerinin kümesi,  $p: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & y \text{ den } x \text{ e ulaşılabirirse} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon  $V$  üzerinde bir quasi-pseudo metriktir. Ayrıca  $p$ ,

$$S_p(x, \varepsilon) = \{y: p(x, y) < \varepsilon\}$$

kümesi yardımıyla  $V$  üzerindeki bir topoloji için taban oluşturur. Bu topolojiyi  $\tau_1$  ile gösterelim.

Benzer şekilde  $q: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere,

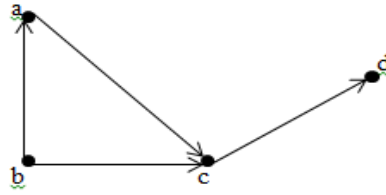
$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & x \text{ den } y' \text{ ye ulaşılabılırsa} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

Olarak tanımlanan fonksiyon  $V$  üzerinde diğer bir quasi-pseudo metriktir. Ayrıca  $q$ ,

$$S_q(x, \varepsilon) = \{y: q(x, y) < \varepsilon\}$$

kümesi yardımıyla  $V$  üzerindeki bir topoloji için taban oluşturur. Bu topolojiyi de  $\tau_2$  ile isimlendirelim. Görüldüğü üzere  $p(x, y) = q(y, x)$  olduğundan, bu  $p$  ve  $q$  quasi-pseudo metrikleri birbirinin eşleniğidir. Bu  $p$  ve  $q$  quasi-pseudo metrikleri yardımıyla  $V$  üzerinde oluşturulan  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  ile birlikte  $(V, \tau_1, \tau_2)$  bitopolojik uzayı tanımlanır (Giriya ve Pilakkat 2013).

**Örnek 2.9.3:** Köşeleri  $V = \{a, b, c, d\}$  olan digraf aşağıdaki gibi olsun.



**Şekil 2.19.** Digraf

Öncelikle  $p$  metriğini kullanarak komşuluklar yardımıyla aşağıdaki işlemleri yaparak  $\tau_1$  topolojisini bulalım.

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & y \text{ den } x \text{ e ulaşılabılıyorsa} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere  $B_p(x, \varepsilon) = \{y: p(x, y) < \varepsilon\}$  komşuluklarını teşkil edelim.

$x = a, \varepsilon < 1$  olsun. Bu durumda

$$B_p(a, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } a \text{ ya ulaşılabiliyorsa}\} = \{b\}$$

olur.

$x = a, \varepsilon = 2$  olarak alalım. Bu durumda

$$B_p(a, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } a \text{ ya ulaşılabiliyor veya ulaşılamıyorsa}\} = V$$

olur. Sırasıyla diğer noktaların da  $\varepsilon < 1$  ve  $\varepsilon = 2$  komşuluklarını teşkil edelim.

$x = b, \varepsilon < 1$

$$B_p(b, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } b \text{ ye ulaşılabiliyorsa}\} = \emptyset$$

$x = b, \varepsilon = 2$

$$B_p(a, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } b \text{ ye ulaşılabiliyor veya ulaşılamıyorsa}\} = V$$

$x = c, \varepsilon < 1$

$$B_p(c, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } c \text{ ye ulaşılabiliyorsa}\} = \{a, b\}$$

$x = c, \varepsilon = 2$

$$B_p(c, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } c \text{ ye ulaşılabiliyor veya ulaşılamıyorsa}\} = V$$

$x = d, \varepsilon < 1$

$$B_p(d, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } d \text{ ye ulaşılabiliyorsa}\} = \{a, b, c\}$$

$x = d, \varepsilon = 2$

$$B_p(c, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } d \text{ ye ulaşılabiliyor veya ulaşılamıyorsa}\} = V$$

elde edilir. Bu komşuluklar yardımıyla elde edilen taban tarafından doğrulan topoloji

$$\tau_1 = \{V, \emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b\}\}$$

şeklindedir.

Şimdi ise  $q$  metriğini kullanarak komşuluklar yardımıyla oluşturulan  $\tau_2$  topolojisini bulalım.

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & x \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere  $B_q(x, \varepsilon) = \{y: q(x, y) < \varepsilon\}$  komşuluklarını teşkil edelim.

$x = a, \varepsilon < 1$  olsun. Bu durumda

$$B_q(a, \varepsilon) = \{y: a \text{ dan } y \text{ ye ulaşılabilir} \} = \{c, d\}$$

olur.

$x = a, \varepsilon = 2$  olarak alalım. Bu durumda

$$B_q(a, \varepsilon) = \{y: a \text{ dan } y \text{ ye ulaşılabilir veya ulaşılabilir} \} = V$$

olur. Sırasıyla diğer noktaların da  $\varepsilon < 1$  ve  $\varepsilon = 2$  komşuluklarını teşkil edelim.

$x = b, \varepsilon < 1$

$$B_q(b, \varepsilon) = \{y: b \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir} \} = \{a, c, d\}$$

$x = b, \varepsilon = 2$

$$B_q(b, \varepsilon) = \{y: b \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir veya ulaşılabilir} \} = V$$

$x = c, \varepsilon < 1$

$$B_q(c, \varepsilon) = \{y: c \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir} \} = \{d\}$$

$x = c, \varepsilon = 2$

$$B_q(c, \varepsilon) = \{y: c \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir veya ulaşılabilir} \} = V$$

$x = d, \varepsilon < 1$

$$B_q(d, \varepsilon) = \{y: d \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir} \} = \emptyset$$



$$x = d, \varepsilon = 2$$

$$B_q(d, \varepsilon) = \{y: d \text{ den } y \text{ ye ulaşilabiliyor veya ulaşılamıyorsa}\} = V$$

elde edilir. Bu komşuluklar yardımıyla elde edilen taban tarafından doğrulan topoloji

$$\tau_2 = \{V, \emptyset, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{d\}\}$$

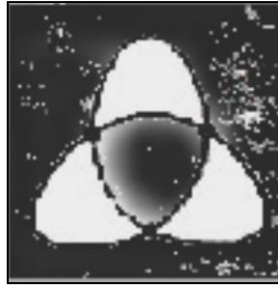
şeklindedir.



### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

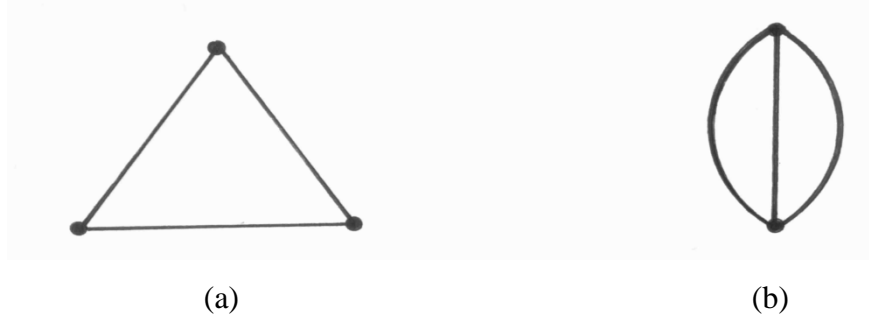
#### 3.1. Dügümden Graf ve Dual Grafın Elde Edilişi

Dügümlerin regüler izdüşümleri 2-boyutlu  $S$  küresini her biri açık bir diske homeomorf bölgelere böler. Bu bölgeler siyah-beyaz, taralı-taralı olmayan ya da iç-dış diye bölgelere ayrılır. En dışta bulunan bölgeden başlayarak bölgeler ya siyah ya da beyaz ile renklendirilir. Aslında komşu bölgeler aynı renk olmayacak şekilde yani bir kenarın her iki yanındaki renkler aynı olmayacak şekilde bölgeler renklendirilir. Sonra her bir beyaz bölge içinde noktalar seçilir. Bu noktalara beyaz bölgelerin merkezleri denir. Eğer iki beyaz bölge ortak geçite sahiptirler o zaman bu beyaz bölgelerin iki merkezi kenarlar vasıtasıyla birleştirilir. Her bir kenar sırasıyla bir ortak geçite karşılık gelir. Böylece düzlemsel graf elde edilir. Daha sonra her bir siyah bölge içinden noktalar seçilir. Eğer iki siyah bölge ortak geçite sahiptirler o zaman bu beyaz bölgelerin iki merkezi kenarlar vasıtasıyla birleştirilir. Her bir kenar sırasıyla bir ortak geçite karşılık gelir. Bu yolla düzlemsel dual graf elde edilir. Örneğin trefoil düğümünde en dıştaki (sınırsız) bölgeyi siyah ile renklendirelim Şekil 3.1.



Şekil 3.1. Trefoil düğümün regüler izdüşümü

Renklendirme işleminden sonra beyaz bölgeleri iki merkezi kenar vasıtasıyla birleştirdiğimizde trefoil düğümden **düzlemsel graf** Şekil 3.2(a) elde edilir (Leung 2008). Daha sonra her iki siyah bölge içinden noktalar seçip bu bölgeleri iki merkezi kenarlar vasıtasıyla birleştirdiğimizde **düzlemsel dual graf** Şekil 3.2(b) elde edilir (Lien ve Watkins 2000).



Şekil 3.2. Graf ve dual graf

### 3.2. Graftan Digrafın Elde Edilişi

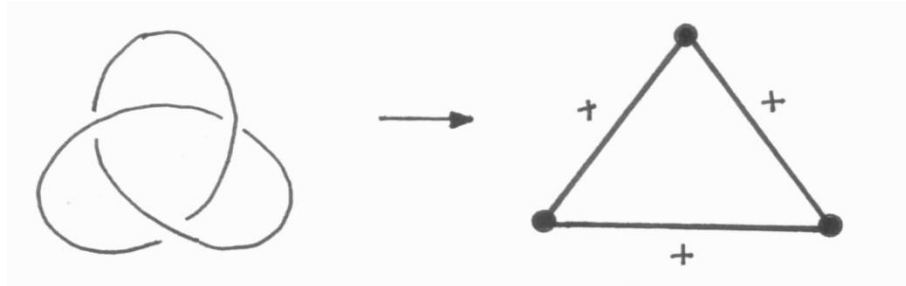
Düğüm graflarının bitopolojilerini bulmak için yönlendirilmiş grafa yani digrafa ihtiyaç duyulmaktadır. Bu bölümde digrafın nasıl elde edildiğine açıklık getirelim.

Şekil 3.3’de görüldüğü gibi; trefoil düğümü, geçit bölgelerinde sırasıyla, sağ yönlendirme veya sol yönlendirmeye bağlı olarak + veya - işareti alır.



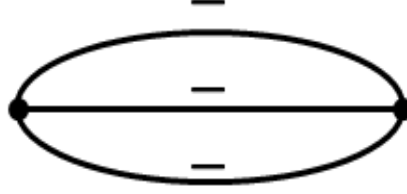
Şekil 3.3. Düğüm geçitleri

Örneğin seçmiş olduğumuz trefoil düğümünde sağ-el yönlendirmesiyle bu düğüme ait grafin kenarlarını + ile işaretleyip işaretlenmiş graf elde ederiz(Şekil 3.4).



Şekil 3.4. İşaretlenmiş graf

Grafın işaretini belirledikten sonra geriye kalan dual graf ise bu graf işaretin tersi olacaktır. Dikkat edilmelidir ki dual grafın işareti, grafın işaretinin zıttıdır(Şekil 3.5).



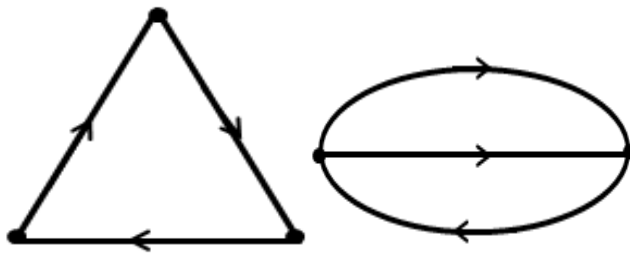
Şekil 3.5. İşaretlenmiş dual graf

Elde ettiğimiz işaretlenmiş graf ve işaretlenmiş dual grafın yönlendirmesi ise; Şekil 3.6 daki gibi graf üzerindeki işaret + ise yönlendirme sağa doğru, işaret - ise yönlendirme sola doğru seçilmelidir.



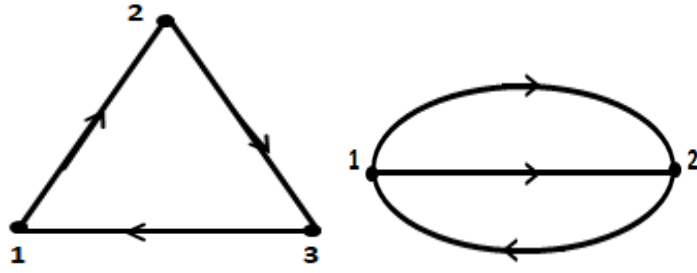
Şekil 3.6. İşaretlerin yönlendirmesi

Böylece sırasıyla elde ettiğimiz digraf ve yönlendirilmiş dual digraf Şekil 3.7 de gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Digraf ve dual digraf

Son olarakta digrafların köşelerini doğal sayılar veya harflerle etiketlersek Şekil 3.8 deki gibi bitopolojileri bulunmaya hazır hale gelmiş olur.



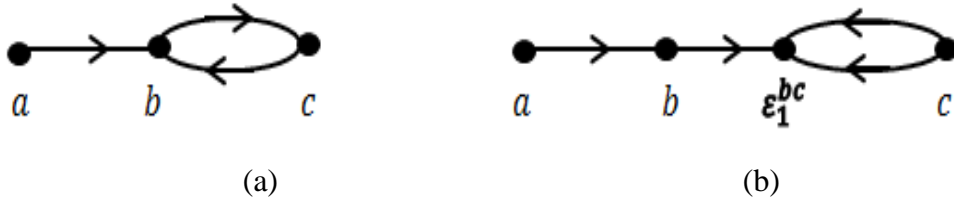
Şekil 3.8. Etiketlenmiş digraf ve dual digraf

### 3.3. Digraf ile Eşlenen Bitopolojinin Bulunması

Bu bölümde elde ettiğimiz digrafların bitopolojilerini nasıl bulacağımızı açıklayalım. Bunun için aşağıda kabul ettiğimiz kuralları sırasıyla uygulayalım.

1. Önce düğümün graf ve dual grafi çizilir.
2. Graflardaki döngü (cycle) de yönler zıt olacak şekilde başlangıç noktası(start point) seçilir.
3. Saat yönünde her kenardan bir kere geçilir.
4. Start-stop noktaları aynı olamaz, bitişiktir.
5. Oluşan döngülerde Şekil 3.9.(a), 3.10(a) yapılacak bozma işlemleri (graf hareketlerinin 4.sü) Şekil 3.9(b), 3.10.(b) aşağıdaki gibidir.

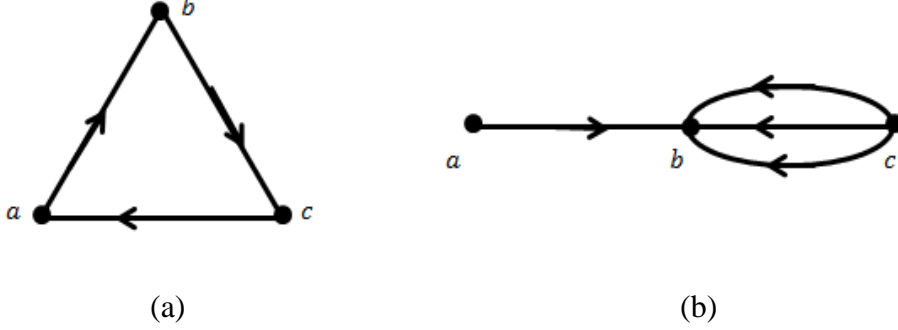
i) Cycle bozması:



Şekil 3.9 Cycle bozması

Burada  $\varepsilon_1^{bc}$ ;  $b - c$  kenarında yapılan 1 tane bozmayı gösteriyor.

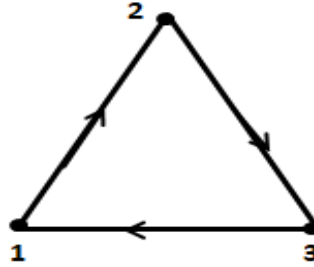
ii) Üçgen bozması:



Şekil 3.10. Üçgen bozması

- 6) İlk tercih digraftan bitopoloji bulunmasıdır. 4. madde sağlanmıyor veya bozma yaptıktan sonra döngü bozulmuyorsa (start-stop aynı nokta oluyorsa) dual grafa bakılır. Çünkü döngü oluşunca quasi-pseudo metrik hep indiskret topoloji oluşturur. Yani indiskret topolojiye sahip olan düğümler çemberdir.

Örneğin; Trefoil düğümün Şekil 3.11 de digrafının bitopolojisini bulalım.



Şekil 3.11. Trefoil düğüm digrafı

Şekildeki digrafın yönlendirmedeki başlangıç ve bitiş noktası aynıdır. Yani düğüm digraf notasyonundaki 4. maddeye göre bu durum istenmeyen durumdur. Digraf bu haliyle aşağıda gösterildiği üzere indiskret topoloji oluşturur.

Öncelikle  $p$  metriğini kullanarak komşuluklar yardımıyla aşağıdaki işlemleri yaparak  $\tau_1$  topolojisini bulalım.

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & y \text{ den } x \text{ e ulaşılabiliyorsa} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere  $B_p(x, \varepsilon) = \{y: p(x, y) < \varepsilon\}$  komşuluklarını teşkil edelim. Sırasıyla herbir noktanın  $\varepsilon < 1$  ve  $\varepsilon = 2$  için komşuluklarını elde edelim.

$x = 1, \varepsilon < 1$  için

$$B_p(1, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 1 \text{ e ulaşılabiliriyorsa}\} = X$$

$\varepsilon = 2$  için

$$B_p(1, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 1 \text{ e ulaşılabiliriyorsa veya ulaşılamiyorsa}\} = X$$

$x = 2, \varepsilon < 1$  için

$$B_p(2, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 2 \text{ ye ulaşılabiliriyorsa}\} = X$$

$\varepsilon = 2$  için

$$B_p(2, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 2 \text{ ye ulaşılabiliriyorsa veya ulaşılamiyorsa}\} = X$$

$x = 3, \varepsilon < 1$  için

$$B_p(3, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 3 \text{ e ulaşılabiliriyorsa}\} = X$$

$\varepsilon = 2$  için

$$B_p(3, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 3 \text{ e ulaşılabiliriyorsa veya ulaşılamiyorsa}\} = X$$

bulunur. Bu komşulukların doğurduğu topoloji

$$\tau_1 = \{X, \emptyset\}$$

olur.

Şimdi ise  $q$  metriğini kullanarak komşuluklar yardımıyla  $\tau_2$  topolojisini bulalım.

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & x \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliriyorsa} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere  $B_q(x, \varepsilon) = \{y: q(x, y) < \varepsilon\}$  komşuluklarını teşkil edelim. Sırasıyla her bir noktanın  $\varepsilon < 1$  ve  $\varepsilon = 2$  için komşuluklarını elde edelim.

$x = 1, \varepsilon < 1$  için

$$B_q(1, \varepsilon) = \{y: 1 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliriyorsa}\} = X$$

$\varepsilon = 2$  için

$$B_q(1, \varepsilon) = \{y: 1 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliriyorsa veya ulaşılamiyorsa}\} = X$$

$x = 2, \varepsilon < 1$  için

$$B_q(2, \varepsilon) = \{y: 2 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliriyorsa}\} = X$$

$\varepsilon = 2$  için

$$B_q(2, \varepsilon) = \{y: 2 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliriyorsa veya ulaşılamiyorsa}\} = X$$

$x = 3, \varepsilon < 1$  için

$$B_q(3, \varepsilon) = \{y: 3 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliriyorsa}\} = X$$

$\varepsilon = 2$  için

$$B_q(3, \varepsilon) = \{y: 3 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliriyorsa veya ulaşılamiyorsa}\} = X$$

bulunur. Bu komşulukların doğurduğu topoloji

$$\tau_2 = \{X, \emptyset\}$$

olur ve buradan

$$\tau_1 = \{X, \emptyset\} \text{ ve } \tau_2 = \{X, \emptyset\}$$

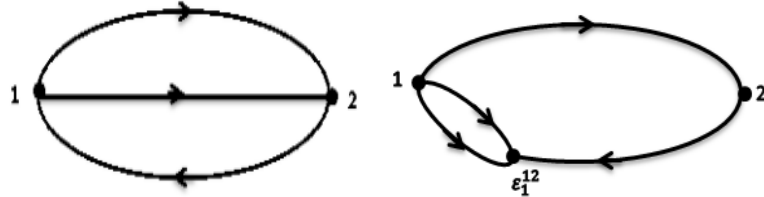
dir.



7) Son olarak çizilen digraflardan  $p$  ve  $q$  metriklerine bağlı olarak taban bulunur, tabandan  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  bitopolojileri bulunur.

**Notasyon 3.3.1:** Bu işlemlerin tamamına düğüm digraf notasyonu (knot digraph notation) denir.

Şimdi ise trefoil düğümün dual digrafın bitopolojisini hesaplayalım:



Şekil 3.12. Dual digrafa yapılan cycle bozması

Öncelikle  $p$  metriğini kullanarak komşuluklar yardımıyla aşağıdaki işlemleri yaparak  $\tau_1$  topolojisini bulalım.

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & y \text{ den } x \text{ e ulaşılabiliriyorsa} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere  $B_p(x, \varepsilon) = \{y: p(x, y) < \varepsilon\}$  komşuluklarını teşkil edelim. Sırasıyla herbir noktanın  $\varepsilon < 1$  ve  $\varepsilon = 2$  için komşuluklarını elde edelim.

$x = 1, \varepsilon < 1$  için

$$B_p(1, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 1 \text{ e ulaşılabiliriyorsa}\} = \emptyset$$

$\varepsilon = 2$  için

$$B_p(1, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 1 \text{ e ulaşılabiliriyorsa veya ulaşılamiyorsa}\} = X$$

$x = 2, \varepsilon < 1$  için

$$B_p(2, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 2 \text{ ye ulaşılabiliriyorsa}\} = \{1\}$$

$x = 2, \varepsilon = 2$  için

$$B_p(2, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } 2 \text{ ye ulaşılabilir veya ulaşılamıyorsa}\} = X$$

$x = \varepsilon_1^{12}, \varepsilon < 1$  için

$$B_p(\varepsilon_1^{12}, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } \varepsilon_1^{12} \text{ ye ulaşılabilir}\} = \{1, 2\}$$

$x = \varepsilon_1^{12}, \varepsilon = 2$  için

$$B_p(\varepsilon_1^{12}, \varepsilon) = \{y: y \text{ den } \varepsilon_1^{12} \text{ ye ulaşılabilir veya ulaşılamıyorsa}\} = X$$

bulunur. Bu komşulukların doğurduğu topoloji

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

olur. Şimdi ise  $q$  metriğini kullanarak komşuluklar yardımıyla  $\tau_2$  topolojisini bulalım.

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & x \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere  $B_q(x, \varepsilon) = \{y: q(x, y) < \varepsilon\}$  komşuluklarını teşkil edelim. Sırasıyla her bir noktanın  $\varepsilon < 1$  ve  $\varepsilon = 2$  için komşuluklarını elde edelim.

$x = 1, \varepsilon < 1$  için

$$B_q(1, \varepsilon) = \{y: 1 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir}\} = \{\varepsilon_1^{12}, 2\}$$

$x = 1, \varepsilon = 2$  için

$$B_q(1, \varepsilon) = \{y: 1 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir veya ulaşılamıyorsa}\} = X$$

$x = 2, \varepsilon < 1$  için

$$B_q(2, \varepsilon) = \{y: 2 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilir}\} = \{\varepsilon_1^{12}\}$$

$x = 2, \varepsilon = 2$  için

$$B_q(2, \varepsilon) = \{y: 2 \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliyor veya ulaşılamıyorsa}\} = X$$

$$x = \varepsilon_1^{12}, \varepsilon < 1 \text{ için}$$

$$B_q(\varepsilon_1^{12}, \varepsilon) = \{y: \varepsilon_1^{12} \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliyor}\} = \emptyset$$

$$x = \varepsilon_1^{12}, \varepsilon = 2 \text{ için}$$

$$B_q(\varepsilon_1^{12}, \varepsilon) = \{y: \varepsilon_1^{12} \text{ den } y \text{ ye ulaşılabiliyor veya ulaşılamıyorsa}\} = X$$

bulunur. Bu komşulukların doğurduğu topoloji

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$$

olur ve buradan

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\} \text{ ve } \tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$$

dir.

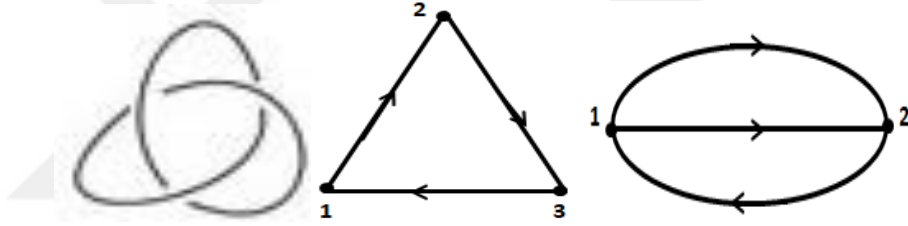
## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

### 4.1. Bazı Düğümlerin Bitopolojilerinin Hesaplanmaları

Bu bölümde  $m = 3, 4, \dots, 10$  ve  $n = 1, 2, 3$  olmak üzere  $m_n$  düğümlerinin, graf veya dual graflarından yararlanılarak oluşturacağımız digrafların bitopolojilerini hesaplayacağız.

Aşağıda sırasıyla düğümün regüler diyagramı, digraf, dual digraf ve bitopolojileri verilmiştir.

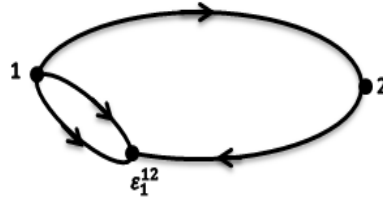
**3<sub>1</sub> düğümü:**



**Şekil 4.1.** 3<sub>1</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digraf, düğüm digraf notasyonuna uymadığı için dual digrafta bozma işlemi yapılır.

Dual digrafa yapılan bozma işlemi:

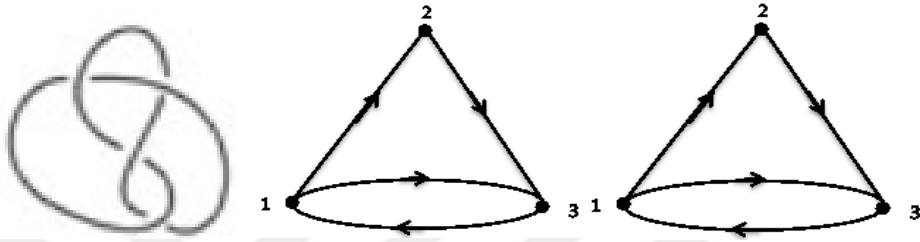


**Şekil 4.2.** Dual digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$$

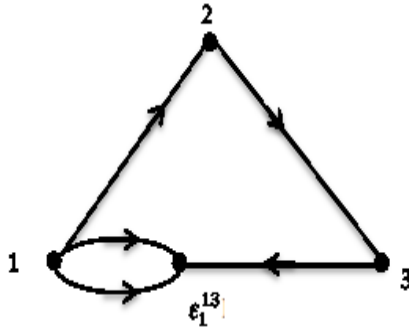
**4<sub>1</sub> düğümü:**



**Şekil 4.3** 4<sub>1</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

4<sub>1</sub> düğümü ayna görüntüsüne sahip olduğu için digrafı ile dual digrafı aynıdır.

Digrafıta yapılan bozma işlemi:

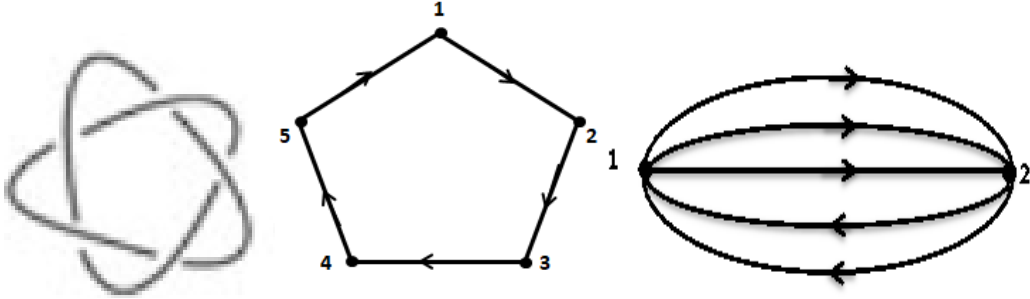


**Şekil 4.4** Digrafa yapılan üçgen bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3, \varepsilon_1^{13}\}, \{3, \varepsilon_1^{13}\}, \{\varepsilon_1^{13}\}\}$$

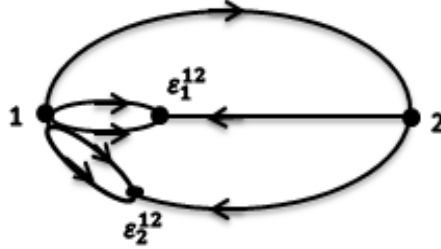
**5<sub>1</sub> düğümü:**



**Şekil 4.5** 5<sub>1</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digraf, düğüm digraf notasyonuna uymadığı için dual digrafta bozma işlemi yapılır.

Dual digrafta yapılan bozma işlemi:

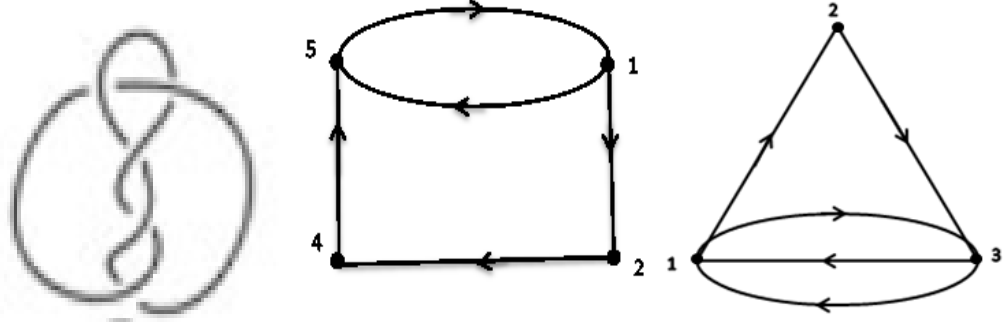


**Şekil 4.6** Dual digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

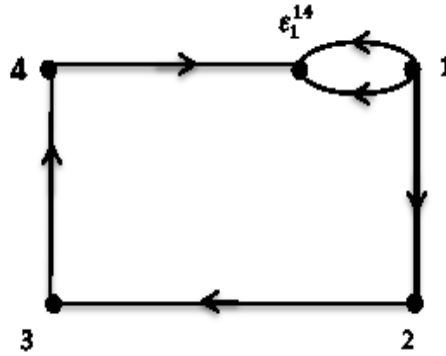
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}\}$$

**5<sub>2</sub> düğümü:**



**Şekil 4.7.** 5<sub>2</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digrafa yapılan bozma işlemi:

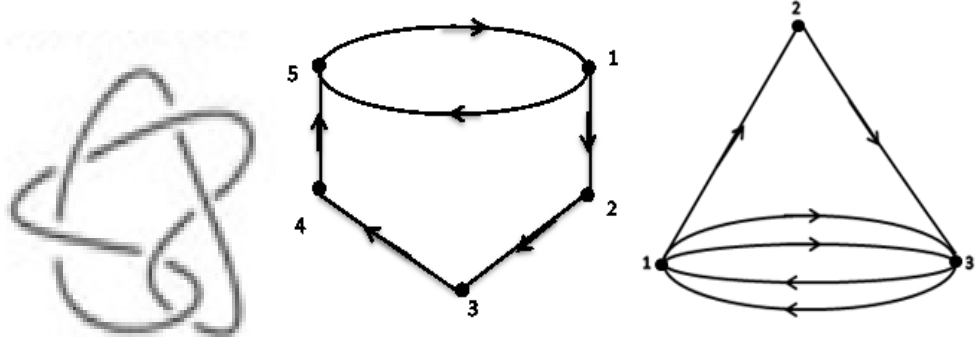


**Şekil 4.8.** Digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

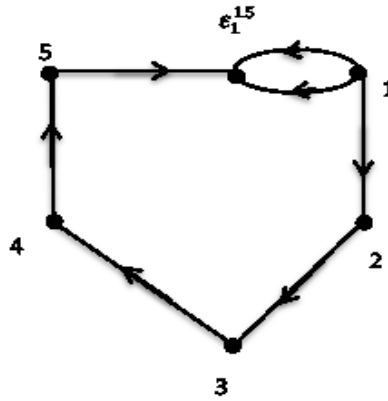
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}\}\}$$

**6<sub>1</sub> düğümü:**



**Şekil 4.9.** 6<sub>1</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digrafa yapılan bozma işlemi:



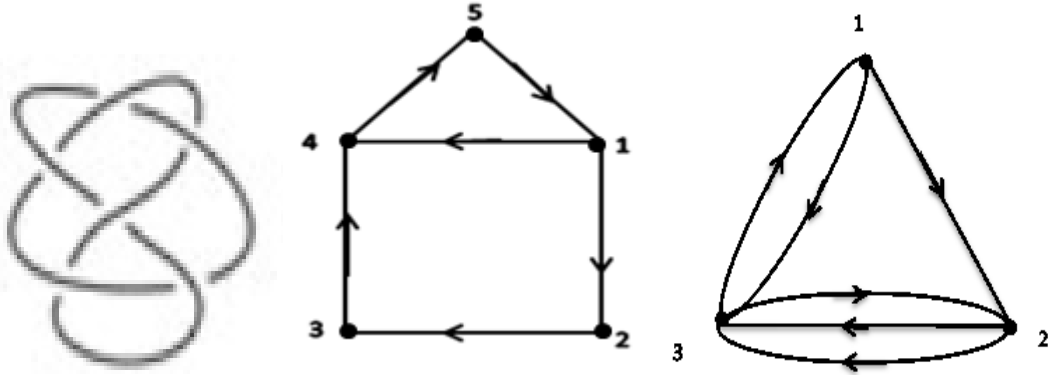
**Şekil 4.10.** Digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{5, \varepsilon_1^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}\}\}$$

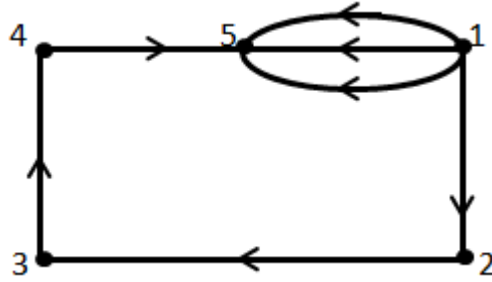


6<sub>2</sub> düğümü:



Şekil 4.11. 6<sub>2</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digrafa yapılan bozma işlemi:

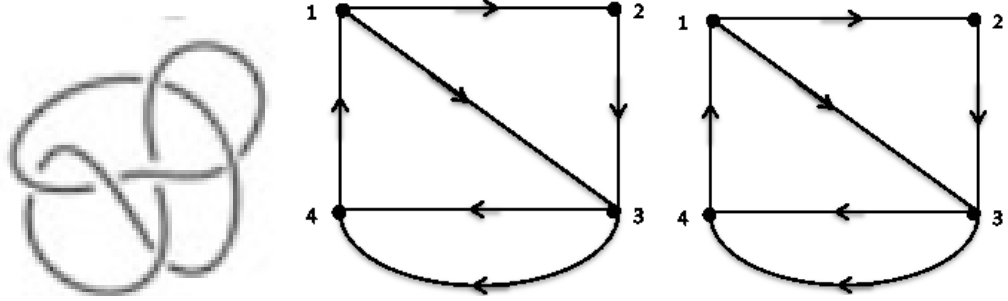


Şekil 4.12. Digrafa yapılan üçgen bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5\}, \{3,4,5\}, \{4,5\}, \{5\}\}$$

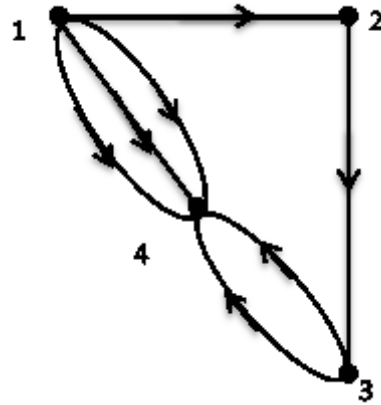
**6<sub>3</sub> düğümü:**



**Şekil 4.13.** 6<sub>3</sub> düğümü, digrafı ve dual digrafı

6<sub>3</sub> düğümü ayna görüntüsüne sahip olduğu için digrafı ve dual digrafı aynıdır.

Digrafa yapılan bozma işlemi:

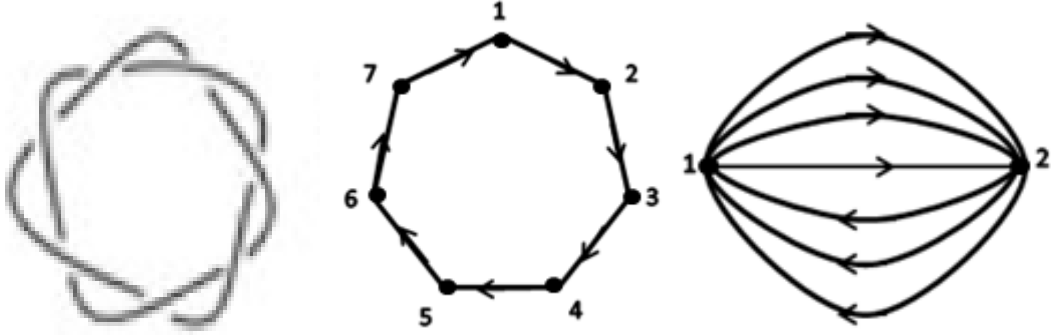


**Şekil 4.14.** Digrafa yapılan üçgen bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4\}, \{3,4\}, \{4\}\}$$

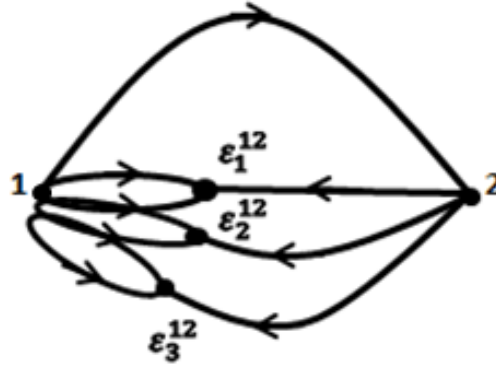
**7<sub>1</sub> düğümü:**



**Şekil 4.15.** 7<sub>1</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digraf, düğüm digraf notasyonuna uymadığı için dual digrafta bozma işlemi yapılır.

Dual digrafa yapılan bozma işlemi:

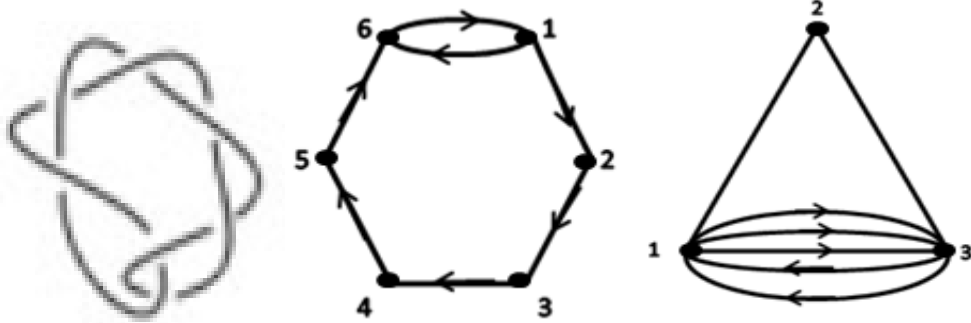


**Şekil 4.16.** Dual digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

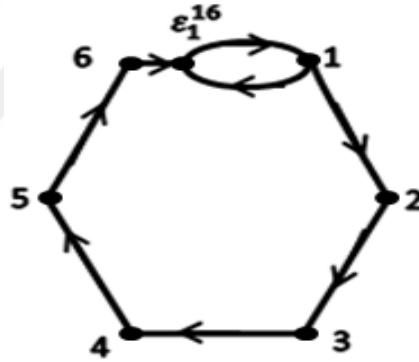
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}\}$$

**7<sub>2</sub> düğümü:**



**Şekil 4.17.** 7<sub>2</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digrafa yapılan bozma işlemi:

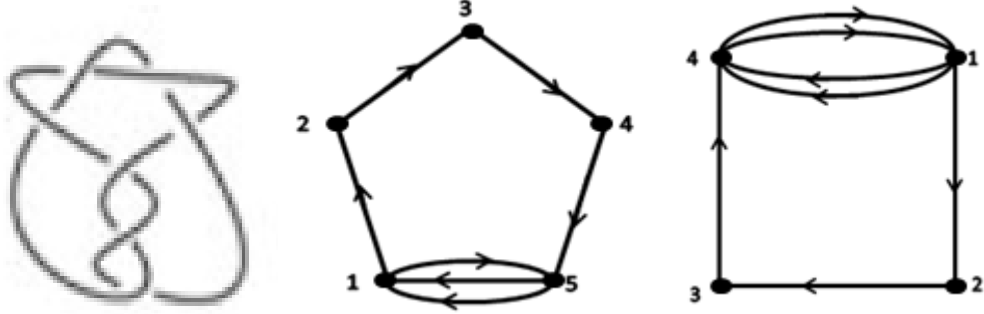


**Şekil 4.18.** Digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{6, \varepsilon_1^{16}\}, \{\varepsilon_1^{16}\}\}$$

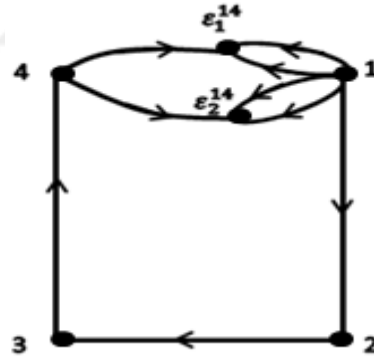
**7<sub>3</sub> düğümü:**



**Şekil 4.19.** 7<sub>3</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digraf, düğüm digraf notasyonuna uymadığı için dual digrafta bozma işlemi yapılır.

Dual digrafa yapılan bozma işlemi:

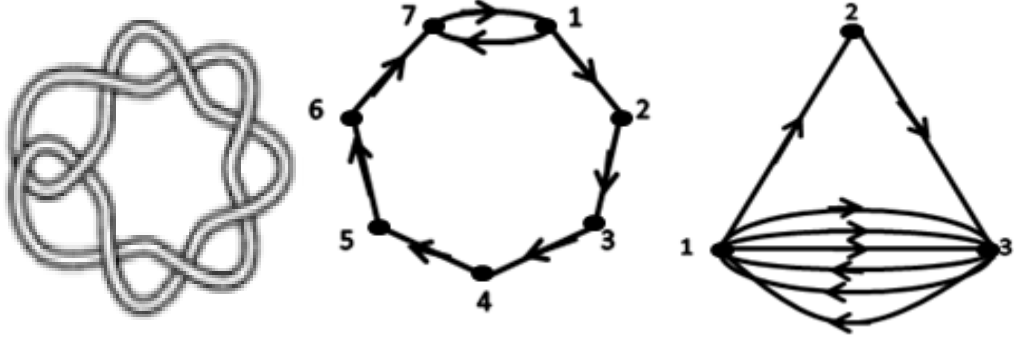


**Şekil 4.20.** Dual digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

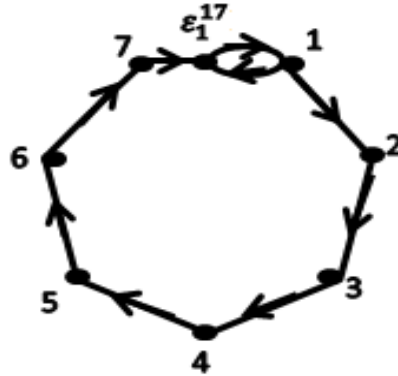
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}\}$$

**8<sub>1</sub> düğümü:**



**Şekil 4.21.** 8<sub>1</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digrafa yapılan bozma işlemi:

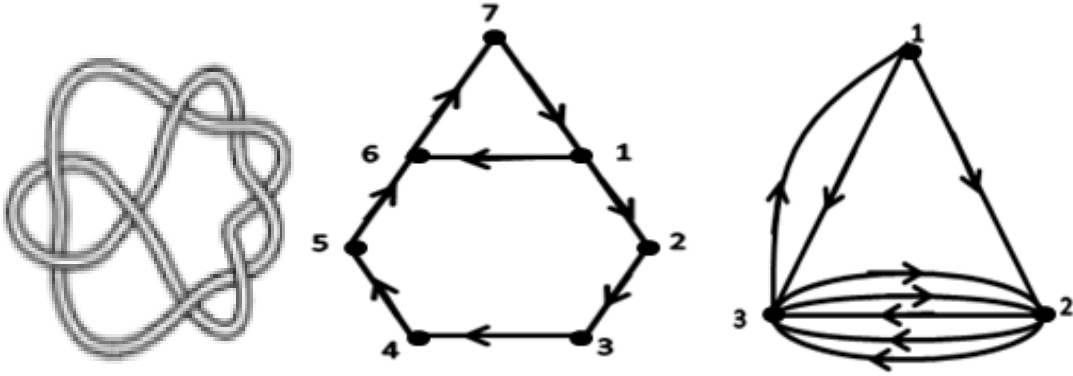


**Şekil 4.22.** Digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

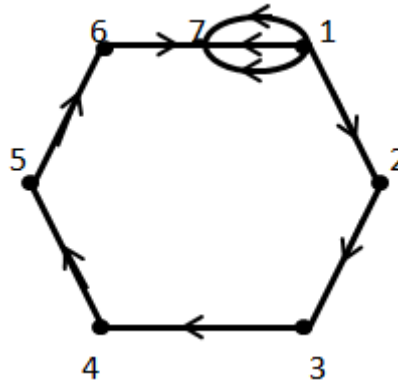
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \\ \{6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}\}\}$$

**8<sub>2</sub> düğümü:**



**Şekil 4.23.** 8<sub>2</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digrafa yapılan bozma işlemi:

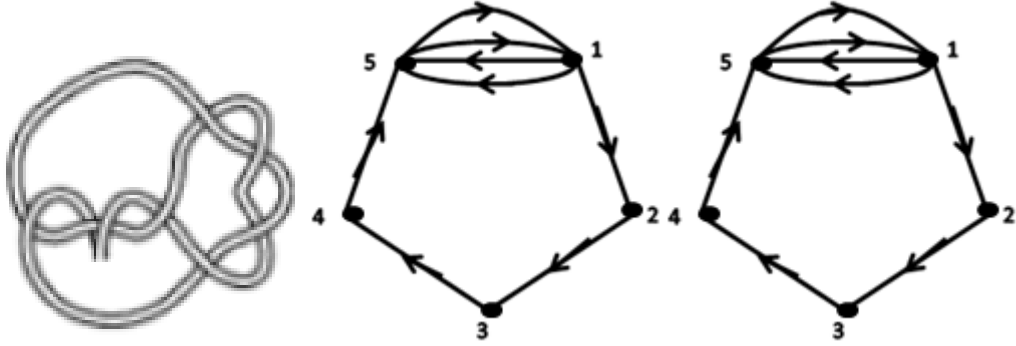


**Şekil 4.24.** Digrafa yapılan üçgen bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7\}, \{3,4,5,6,7\}, \{4,5,6,7\}, \{5,6,7\}, \{6,7\}, \{7\}\}$$

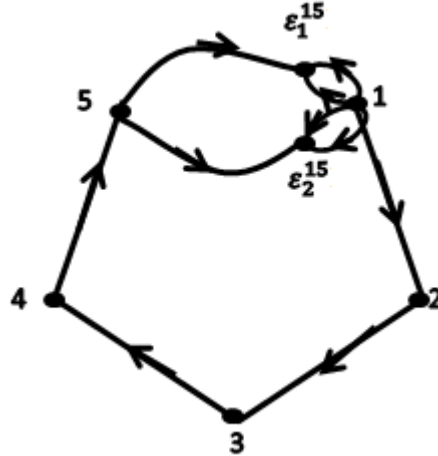
**8<sub>3</sub> düğümü:**



**Şekil 4.25.** 8<sub>3</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

8<sub>3</sub> düğümü ayna görüntüsüne sahip olduğu için digrafı ve dual digrafı aynıdır.

Digrafa yapılan bozma işlemi:



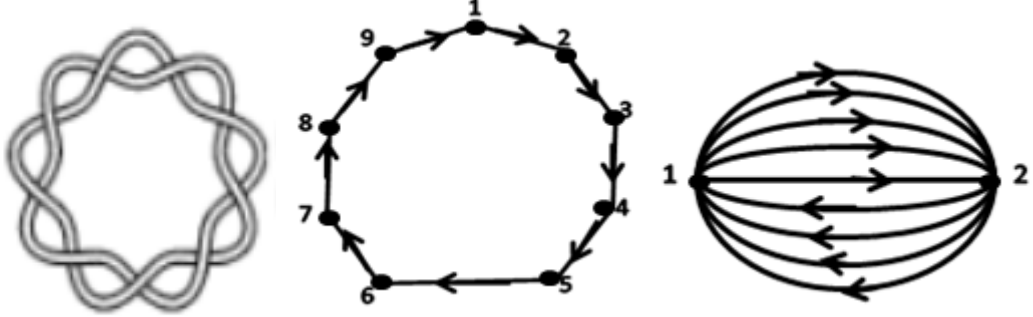
**Şekil 4.26.** Digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}\}$$



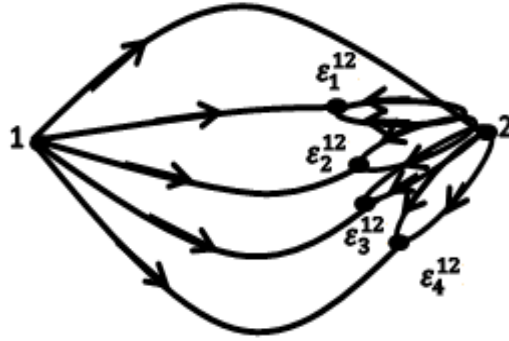
**9<sub>1</sub> düğümü:**



**Şekil 4.27.** 9<sub>1</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digraf, düğüm digraf notasyonuna uymadığı için dual digrafta bozma işlemi yapılır.

Dual digrafa yapılan bozma işlemi:

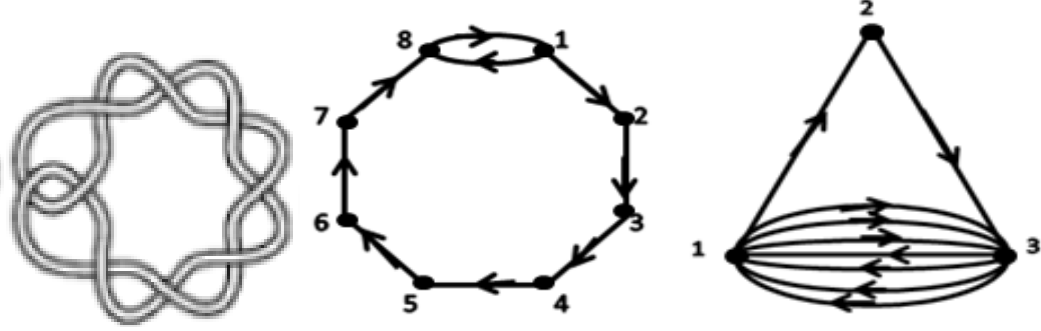


**Şekil 4.28.** Dual digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

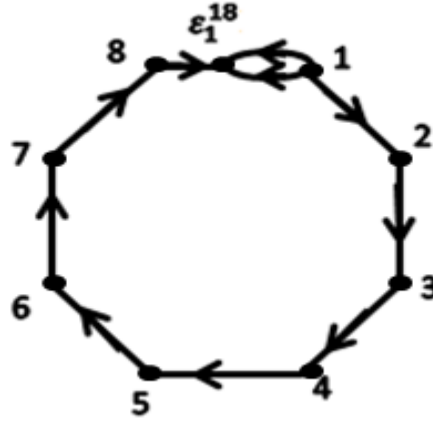
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}\}$$

9<sub>2</sub> düğümü:



Şekil 4.29. 9<sub>2</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Dual digrafa yapılan bozma işlemi:

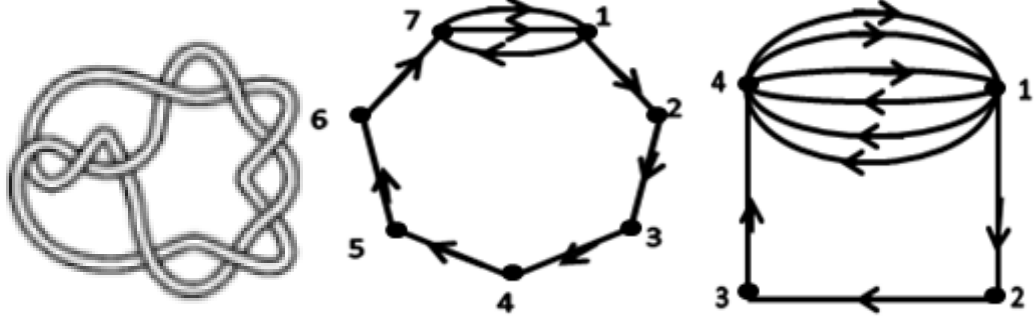


Şekil 4.30. Dual digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \left\{ \begin{array}{l} X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \\ \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \end{array} \right\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \\ \{6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{8, \varepsilon_1^{18}\}, \{\varepsilon_1^{18}\}\}$$

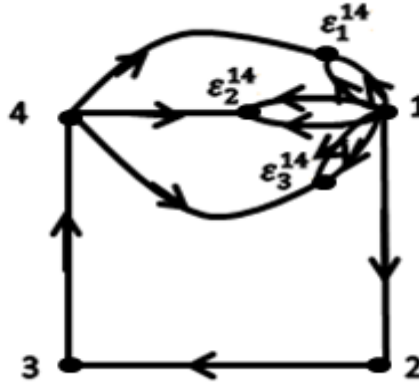
9<sub>3</sub> düğümü:



Şekil 4.31. 9<sub>3</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digraf, düğüm digraf notasyonuna uymadığı için dual digrafta bozma işlemi yapılır.

Dual digrafa yapılan bozma işlemi:

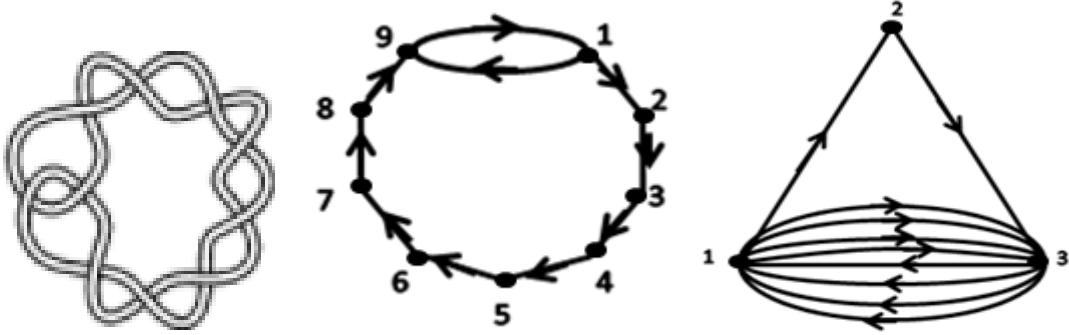


Şekil 4.32. Dual digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

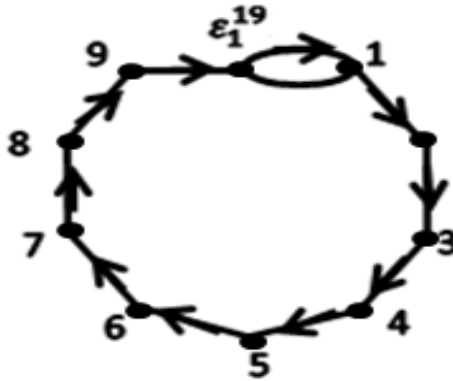
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}\}$$

**10<sub>1</sub> düğümü:**



**Şekil 4.33.** 10<sub>1</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digrafa yapılan bozma işlemi:

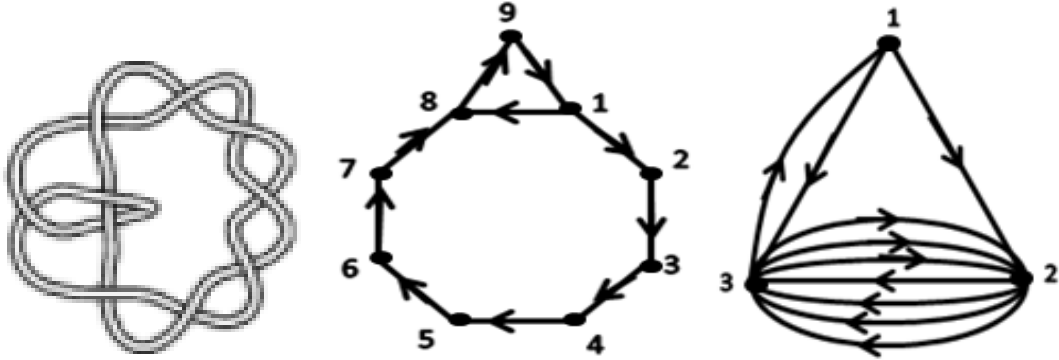


**Şekil 4.34.** Digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \left\{ X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}, \right. \\ \left. \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \right\}$$

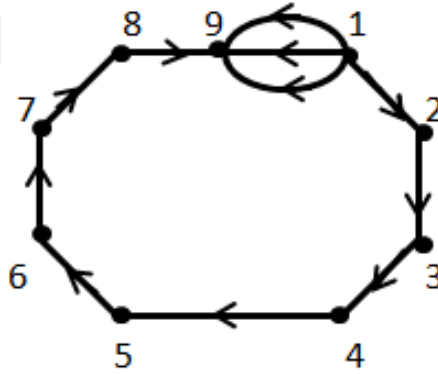
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{3,4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \\ \{6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{9, \varepsilon_1^{19}\}, \{\varepsilon_1^{19}\}\}$$

**10<sub>2</sub> düğümü:**



**Şekil 4.35.** 10<sub>2</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digrafa yapılan bozma işlemi:

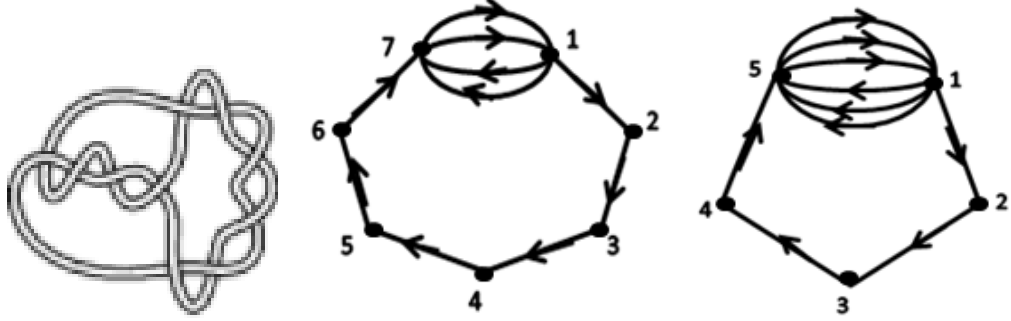


**Şekil 4.36.** Digrafa yapılan üçgen bozma

$$\tau_1 = \left\{ \begin{array}{l} X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \\ \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \end{array} \right\}$$

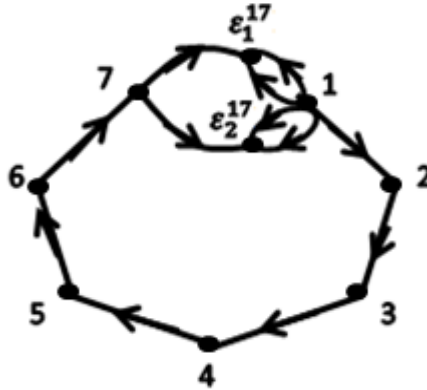
$$\tau_2 = \left\{ \begin{array}{l} X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8,9\}, \{3,4,5,6,7,8,9\}, \{4,5,6,7,8,9\}, \{5,6,7,8,9\}, \{6,7,8,9\}, \\ \{7,8,9\}, \{8,9\}, \{9\} \end{array} \right\}$$

**10<sub>3</sub> düğümü:**



**Şekil 4.37.** 10<sub>3</sub> düğümünün regüler diyagramı, digrafı ve dual digrafı

Digrafa yapılan bozma işlemi:



**Şekil 4.38.** Digrafa yapılan cycle bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \\ \{5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}\}$$

**Tanım 4.1.1:** Düğüm digraf notasyonu ile elde edilen graflara bitopolojik düğüm grafları denir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde Araştırma Bulgularında yer verdiğimiz  $m = 3, 4, \dots, 10$  ve  $n = 1, 2, 3$  olmak üzere,  $m_n$  düğümlerine karşılık gelen bitopolojileri sınıflandırarak elde ettiğimiz sonuçlar ve bu sınıflandırma doğrultusunda elde edilen tablolar verilmiştir.

**Sonuç 5.1:**  $m_1, m$  tek,  $m \geq 3$  için düğümler

$$3_1, 5_1, 7_1, 9_1, \dots$$

**Sonuç 5.2:**  $m_1, m$  çift,  $m \geq 4$  için düğümler

$$4_1, 6_1, 8_1, 10_1, \dots$$

**Sonuç 5.3:**  $m_2, m$  tek,  $m \geq 5$  için düğümler

$$5_2, 7_2, 9_2, \dots$$

**Sonuç 5.4:**  $m_2, m$  çift,  $m \geq 6$  için düğümler

$$6_2, 8_2, 10_2, \dots$$

**Sonuç 5.5:**  $m_3, m$  tek,  $m \geq 7$  için düğümler

$$7_3, 9_3, \dots$$

**Sonuç 5.6:**  $m_3, m$  çift,  $m > 6$  için düğümler

$$8_3, 10_3, \dots$$

**Sonuç 5.7:**  $m_3, m$  çift,  $m = 6$  için düğümler

$$6_3$$

şeklinde sınıflandırılır. Bu sınıflandırma doğrultusunda aşağıdaki düğüm tabloları elde edilir.

**Çizelge 5.1.**  $m_1$  ( $m$  tek,  $m \geq 3$ ) düğümleri ve bitopolojileri

$m_1$ ( $m$ tek, $m \geq 3$ )	Digraf ile eşlenen bitopoloji
$3_1$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$
$5_1$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}\}$
$7_1$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$m_1$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\tau_2 = \left\{ X, \emptyset, \left\{ 2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \dots, \varepsilon_{\frac{n-1}{2}}^{12} \right\}, \left\{ \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \dots, \varepsilon_{\frac{n-1}{2}}^{12} \right\} \right\}$



**Çizelge 5.2.**  $m_1$  ( $m$  çift,  $m \geq 4$ ) düğümleri ve bitopolojileri

$m_1$ ( $m$ çift, $m \geq 4$ )	Digraf ile eşlenen bitopoloji
$4_1$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3, \varepsilon_1^{13}\}, \{3, \varepsilon_1^{13}\}, \{\varepsilon_1^{13}\}\}$
$6_1$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}\},$ $\{5, \varepsilon_1^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}\}\}$
$8_1$	$\tau_1 = \left\{ X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \right.$ $\left. \{1,2,3,4,5,6,7\} \right\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{5,6,7, \varepsilon_1^{17}\},$ $\{6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}\}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$m_1$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots, \{1,2,3, \dots, m-1\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1m-1}\}, \{3,4, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1m-1}\},$ $\{4, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1m-1}\}, \dots, \{m-2, m-1, \varepsilon_1^{1m-1}\},$ $\{m-1, \varepsilon_1^{1m-1}\}, \{\varepsilon_1^{1m-1}\}\}$

**Çizelge 5.3.**  $m_2$  ( $m$  tek,  $m \geq 5$ ) düğümleri ve bitopolojileri

$m_2$ ( $m$ tek, $m \geq 5$ )	Digraf ile eşlenen bitopoloji
$5_2$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}\}\{4, \varepsilon_1^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}\}\}$
$7_2$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}\{4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{6, \varepsilon_1^{16}\}, \{\varepsilon_1^{16}\}\}$
$9_2$	$\tau_1 = \left\{ X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \right. \\ \left. \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \right\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}\{4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \\ \{5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{8, \varepsilon_1^{18}\}, \{\varepsilon_1^{18}\}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$m_2$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \dots, \{1,2, \dots, m-1\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1m-1}\}, \{3, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1m-1}\}, \dots, \\ \{m-2, m-1, \varepsilon_1^{1m-1}\}, \{m-1, \varepsilon_1^{1m-1}\}, \{\varepsilon_1^{1m-1}\}\}$

**Çizelge 5.4.**  $m_2$  ( $m$  çift,  $m \geq 6$ ) düğümleri ve bitopolojileri

$m_2$ ( $m$ çift, $m \geq 6$ )	Digraf ile eşlenen bitopoloji
$6_2$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5\}, \{3,4,5\}, \{4,5\}, \{5\}\}$
$8_2$	$\tau_1 = \left\{ X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \right. \\ \left. \{1,2,3,4,5,6\} \right\}$ $\tau_2 = \left\{ X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7\}, \{3,4,5,6,7\}, \{4,5,6,7\}, \{5,6,7\}, \right. \\ \left. \{6,7\}, \{7\} \right\}$
$10_2$	$\tau_1 = \left\{ X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \right. \\ \left. \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \right\}$ $\tau_2 = \left\{ X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8,9\}, \{3,4,5,6,7,8,9\}, \{4,5,6,7,8,9\}, \right. \\ \left. \{5,6,7,8,9\}, \{6,7,8,9\}, \{7,8,9\}, \{8,9\}, \{9\} \right\}$
$\vdots$	$\vdots$
$m_2$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \dots, \{1,2,3, \dots, m-2\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \dots, m-1\}, \{3,4, \dots, m-1\}, \\ \{4, \dots, m-1\}, \dots, \{m-1\}\}$

**Çizelge 5.5.**  $m_3$  ( $m$  tek,  $m \geq 7$ ) düğümleri ve bitopolojileri

$m_3$ ( $m$ tek, $m \geq 7$ )	Digraf ile eşlenen bitopoloji
$7_3$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}\}$
$9_3$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$m_3$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \left\{ X, \emptyset, \left\{ 2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \dots, \varepsilon_{\frac{m+1}{3}}^{14} \right\}, \left\{ 3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \dots, \varepsilon_{\frac{m+1}{3}}^{14} \right\}, \left\{ 4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \dots, \varepsilon_{\frac{m+1}{3}}^{14} \right\}, \left\{ \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \dots, \varepsilon_{\frac{m+1}{3}}^{14} \right\} \right\}$

**Çizelge 5.6.**  $m_3$  ( $m$  çift,  $m > 6$ ) düğümleri ve bitopolojileri

$m_3$ ( $m$ çift, $m > 6$ )	Digraf ile eşlenen bitopoloji
$8_3$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}\}$
$10_3$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$m_3$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2, \dots, m-3\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3, m-3, \varepsilon_1^{1m-3}, \varepsilon_2^{1m-3}\}, \dots, \{m-4, m-3, \varepsilon_1^{1m-3}, \varepsilon_2^{1m-3}\}, \{m-3, \varepsilon_1^{1m-3}, \varepsilon_2^{1m-3}\}, \{\varepsilon_1^{1m-3}, \varepsilon_2^{1m-3}\}\}$

**Çizelge 5.7.**  $m_3$  ( $m$  çift,  $m = 6$ ) düğümü ve bitopolojisi

$6_3$	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4\}, \{3,4\}, \{4\}\}$ <p>*<math>6_3</math> amphicerial olup üçgen bozması yapılmıştır.</p>
-------	--

## KAYNAKLAR

- Acharya, B.D. , 2001, Set-indexers of a graph and set-graceful graphs, Bull. Allahabad Math. Soc., 16, 1-23.
- Acharya, B.D., 1983, Set-valuations of Graphs and Their Applications, MRI Lecture Notes in Applied Mathematics, No.2, Mehta Research Institute of Mathematics and Mathematical Physics, Allahabad.
- Acharya, B.D., 1986, Set-valuations of Graphs and Their Applications, Proc. Sympos. On optimization, design of experiments and graph theory I.I.T. Bombay. 231-238.
- Alexander, J.W., G.B., 1927, On types of knotted curve. Ann. Math., 28, 562-586.
- Aumann, R. J., 1956, Asphericity of alternating knots. Ann. of Math., 64, 374-392.
- Bankwitz, C., 1930, Uber die Torsionszahlen der alternierenden Knoten. Math. Ann., 103, 145-161.
- Bing, R.H. and Martin, J.M., 1971, Cubes with knotted holes, Trans. Amer. Math. Soc., 155, 217-231.
- Burde, G., Zieschang, H., 1985. Knots. Walter de Gruyter, 399 s, Berlin-New York.
- Burde, G., Zieschang, H., 2003. Knots. Walter de Gruyter, 401 s, Berlin-New York.
- Flecher, P.,1969, Hoyle, H.B., III, and Patty, C. W., The Comparison of Topologies, Duke Math. J.
- Girija B., Pilakkat R., 2013, Bitopological spaces associated with digraphs, South Asian Journal of Mathematics, Vol.3 (1):56-65.
- Gross, J. L. and Yellen J., 2005. Graph Theory and Its Applications. Chapman & Hall / CRC, 800 s, USA.
- Ian E., Reilly L., 1975, On biological compactness, J. London Math Soc(2), 9, 518-522.
- Jones, V.F.R., 1987, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. Ann. of Math., 126, 335-388.
- Kelley J.C., 1963, Bitopological Spaces, Proc. London Math.(3), 13, 71-89
- Kim, Y. W., 1968, Pairwise Compactness. Publ. Math. Debrecen.

- Kinoshita, S., Terasaka, H., 1957, On Unions of knots. *Osaka Math J.*, 9, 131-153.
- Kocak, M., 2006. Genel Topolojiye Giriş I-II ve Problem Çözümleri, Gülen Ofset Yayıncılık, Eskişehir.
- Lien, M., Watkins, W., 2000. Dual graphs and knot invariants. *Linear algebra and its Appl.* 306, 123-130.
- Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- Murasugi, K., 1989, On invariants of graphs with applications to knot theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 314, 1-49.
- Murasugi, K., 1991, İnvariants of graphs and their applications tok not theory, İn: Algebraic topology (Poznan, 1989), 83-97, *Lecture Notes in Math.*, 1474, Springer Verlag.
- Murasugi, K., 1996. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhauser Verlag, 337 s, Boston.
- Patty, C. W., 1967, Bitopological Spaces, *Duke Math. J.*
- Peruin, W. J., 1967, Connectedness in Bitological Spaces, *Nederl. Arad. Wetensch Prof. Ser. A*.
- Raghavan T.G., Reilly I.L., 1977, Metrizable of quasi metric spaces, *J. London Math. Soc(2)*, 15, No. 1, 169-172.
- Reilly, Ivan L., 1970, Quasi-Gauges, Quasi-Uniformities and Bitopological Spaces, Unpublished Ph. D. Thesis, Urbana-Champaign, III, Library, University of Illinois.
- Romaguera, 1983, Two characterizations of quasi-psedometrizable bitopological spaces, *J. Australian Math. Soc.*, No.3, 327-333.
- Schubert, H., 1949, Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math. –nat. Kl.*, 3, 57-104.
- Uğur T., 2002, Düğüm grafları, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Uluçay, İlksel S., 2006. Süreklilik Uzayları ve İkili Topoloji, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.
- Walba, D.M., 1985, Topological Stereochemistry. *Tetrahedron*, 41, 3161-3212.
- Yajima T., Kinoshita S., 1957, On the graphs of knots, *Osaka Math. J.*, 9, 155-163.

## ÖZGEÇMİŞ

1990 yılı Malatya doğumlu olan Tuğçe KUNDURACI, ilk ve orta öğrenimini İzmir’de tamamladı. 2008 yılında kayıt yaptırdığı Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2012 yılında mezun oldu. 2014 yılında Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimine başladı ve halen bu eğitime devam etmektedir.

