SABİT NOKTA VE DENGE PROBLEMLERİNİN ORTAK ÇÖZÜMLERİ İÇİN İTERATİF METOTLAR

Yüksek Lisans Tezi

Muhammed Furkan ÖZDEMİR

Mart 2017

ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SABİT NOKTA VE DENGE PROBLEMLERİNİN ORTAK ÇÖZÜMLERİ İÇİN İTERATİF METOTLAR

Muhammed Furkan ÖZDEMİR

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İbrahim KARAHAN

Matematik Anabilim Dalı

Mart, 2017

ERZURUM

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

SABİT NOKTA VE DENGE PROBLEMLERİNİN ORTAK ÇÖZÜMLERİ İÇİN İTERATİF METOTLAR

Yrd. Doç. Dr. İbrahim KARAHAN danışmanlığında, Muhammed Furkan ÖZDEMİR tarafından hazırlanan bu çalışma 27/03/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Hüseyin AYDIN	*İmza* :	
Üye	: Doç. Dr. İsa YILDIRIM	*İmza* :	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İbrahim KARAHAN	*İmza* :	

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Doç. Dr. Arzu GÖRMEZ
Enstitü Müdürü

ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

ETÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "SABİT NOKTA VE DENGE PROBLEMLERİNİN ORTAK ÇÖZÜMLERİ İÇİN İTERATİF METOTLAR" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

27 / 03 / 2017

Muhammed Furkan ÖZDEMİR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SABİT NOKTA VE DENGE PROBLEMLERİNİN ORTAK ÇÖZÜMLERİ İÇİN İTERATİF METOTLAR

Muhammed Furkan ÖZDEMİR

Erzurum Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İbrahim KARAHAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde literatür bilgisi verilmiş, ikinci bölümde ise kullanılan temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde sabit nokta teorisinde kullanılan temel iterasyonlar, sabit nokta teorisi ile bağlantılı olan minimizasyon ve varyasyonel eşitsizlik problemleri ve bazı temel lemmalar yer almaktadır. Dördüncü bölümünde konveks fizibilite problemleri, parçalı eşitlik, denge ve sabit nokta problemleri ile ilgili yapılan bazı çalışmalar derlenmiştir. Son bölümde ise bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

2017, 92 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, denge problemleri, varyasyonel eşitsizlik, konveks fizibilite problemleri, parçalı eşitlik problemleri

ABSTRACT

MASTER THESIS

ITERATIVE METHODS FOR COMMON SOLUTIONS OF FIXED POINT PROBLEMS AND EQUILIBRIUM PROBLEMS

Muhammed Furkan OZDEMIR

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ibrahim KARAHAN

This thesis consists of five parts. Literature is given in the introduction and the basic definitions and theorems are given in the second part. In the third part, there exist basic iterations used in fixed point theory, minimization and variational inequality problems associated with fixed point theory, and some basic lemmas. In the fourth part, some studies about convex feasibility problems, split equality, equilibrium and fixed point problems have been compiled. In the last section, the results obtained from these studies are expressed.

2017, 92 pages

Anahtar Kelimeler: Fixed point, equilibrium problems, variational inequality, convex feasibility problems, split equality problems

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. İbrahim KARAHAN'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e ve Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed Furkan ÖZDEMİR

Mart 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
c_o	Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
l_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$\mathcal{F}$	T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi
X^*	X uzayının normlu duali
P_C	Metrik izdüşüm operatörü
∇f	f nin gradyen operatörü
∂C	C kümesinin sınırı
C^o	C kümesinin içi
$N_C(v)$	C kümesinde tanımlı normal koni
$VI(C,A)$	Varyasyonel eşitsizlik
Ω	Varyasyonel eşitsizliğin çözüm kümesi

Kısaltmalar

$GMEP$	Genelleştirilmiş karışık denge problemi
$SEMEP$	Parçalı eşitlik karışık denge problemi
$SEGMEP$	Parçalı eşitlik genelleştirilmiş karışık denge problemi
SEP	Parçalı denge problemi
$SEEP$	Parçalı eşitlik denge problemi
$SECMP$	Parçalı eşitlik konveks minimizasyon problemi
SFP	Parçalı fizibilite problemi
$SCMP$	Parçalı konveks minimizasyon problemi

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi modern matematiğin en önemli konularından biridir. Bu teori analiz, topoloji ve geometrinin bir sentezidir. Özel olarak sabit nokta teorisi matematik mühendisliği, fizik, ekonomi, oyun teorisi, biyoloji ve kimya gibi birçok alanda uygulaması olan bir teoridir. Bu alanda ilk çalışmayı 1886 yılında Poincare yapmıştır. Ardından, 1912 de Brouwer, $f(x) = x$ denkleminin çözümü yani sabit noktanın bulunması için Brouwer sabit nokta teoremini ispatlamıştır. Brouwer'in bu teoremi Kakutani tarafından genelleştirilmiştir. Aynı yıllarda fonksiyonel analizin temel teoremlerinden biri olan Banach sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. 1922 de Banach tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin tek bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir. Browder, Schauder ve Caristi sabit nokta teoremleri önemli sabit nokta teoremlerinden bazılarıdır.

Bilgisayar ve hızlı hesaplama yazılımların ortaya çıkmasıyla sabit nokta teorisi yeni bir boyut kazanmıştır. Bu yeni çalışma alanı uygulamalı matematik, nümerik analiz ve algoritma çalışmalarını ileri seviyeye taşımıştır. Mann ve Ishikawa'nın çalışmalarının ardından sabit noktaya yaklaşım ve iteratif dizilerin yakınsaklığının incelenmesi konuları sabit nokta teorisine ivme kazandırmıştır. Denklemlerin kesin bir sonuca sahip olmadıklarında yaklaşık nümerik çözümler bulma ihtiyacından dolayı birçok yazar tarafından yaklaşım yöntemleri ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Picard, Krasnoselskij, Kirk, Noor ve S iterasyon yöntemleri sabit noktaya yaklaşmak için kullanılan temel iterasyonlardan bazılarıdır.

Sabit nokta teorisi oyun teorisi, matematiksel ekonomi, optimizasyon teorisi, yaklaşım teorisi ve varyasyonel eşitsizlikler gibi matematiksel bilimlerin çeşitli disiplinlerine uygulaması olan disiplinler arası bir teori olması açısından da oldukça önemlidir. Yine ekonominin temel konularından biri olan denge problemleri de bu teori ile bağlantılıdır. Denge problemleri optimizasyon ve varyasyonel eşitsizlik problemlerinin genelleştirmesi olarak Blum ve Oettli tarafından verilmiş ardından da bir çok yazar tarafından çalışılmıştır. Yine uygulamalı matematiğin merkezi konularından biri olan konveks fizibilite problemleri de denge problemlerinin özel bir halidir. Bu problem, kapalı konveks kümelerin ortak noktalarını bulma, genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktalarını bulma, konveks fonksiyonların ortak minimumlarını bulma ve varyasyonel eşitsizlik sistemlerini çözme gibi problemler ile formülize edilebilir. Diğer taraftan parçalı fizibilite ve parçalı eşitlik problemleri, konveks fizibilite problemlerinin birer genelleştirilmesidir. Bunlardan parçalı fizibilite problemleri medikal görüntü onarımı ve faz alımı gibi alanlarda ortaya çıkan ters problemleri modelleme için ilk olarak Censor ve Elfing tarafından tanımlanmış olup günümüzde birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm olan giriş bölümünde tezde çalışılan konuların literatür bilgisi verilmiş ikinci bölüm olan kuramsal temeller bölümünde ise kullanılan temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde sabit nokta teorisinde kullanılan temel iterasyonlar, sabit nokta teorisi ile bağlantılı olan minimizasyon ve varyasyonel eşitsizlik problemleri ve bazı temel lemmalar yer almaktadır. Dördüncü bölüm olan araştırma bulguları bölümünde konveks fizibilite problemleri, parçalı eşitlik, denge ve sabit nokta problemleri ile ilgili yapılan bazı çalışmalar derlenmiştir. Son bölümde ise bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde öncelikle daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanımlar, teoremler ve çalışmamızda kullanacağımız uzaylar hakkında bilgi vereceğiz.

2.1. Banach Uzayı ve Hilbert Uzayı

Tanım 2.1.1: Bir X lineer uzayında $\|\cdot\|: \mathrm{X} \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, $x \mapsto \|x\|$ şeklinde tanımlanan fonksiyon her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ve

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X de bir norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine veya sadece X e **normlu uzay** denir. $x \in X$ elemanının normu $\|x\|$ (veya $\|x\|_X$) ile gösterilir.

n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ reel Euclid uzayında bir $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörünün normu

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2: (x_n), $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $n, m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Teorem 2.1.3: Aşağıda verilen önermeler doğrudur.

i) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

ii) Normlu uzaydaki her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

iii) (x_n) Cauchy dizisinin X normlu uzayında $x_0 \in X$ elemanına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi varsa, (x_n) Cauchy dizisi de x_0 a yakınsar.

iv) (x_n) ve (y_n), X normlu uzayında birer Cauchy dizisi ise, $(x_n + y_n)$ dizisi de X de bir Cauchy dizisidir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.1.4: $(X, \|.\|_X)$ bir normlu uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X e **tam normlu uzay** veya **Banach uzayı** denir.

Tanım 2.1.5: X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzayı ve $D_T \subset X$ olsun. $T: D_T \subset X \to Y$ dönüşümü D_T nın herbir elemanını Y nin yalnız bir elemanına karşılık getiriyorsa, T ye D_T den Y ye bir **operatör,** D_T ye T operatörünün **tanım kümesi**, $R(T) = \{y \in Y: y = T(x), x \in D_T\}$ kümesine de T operatörünün **görüntü kümesi** denir.

Tanım 2.1.6: X ve Y aynı F cismi ($F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$) üzerinde iki lineer uzay ve $T: D_T \subset X \to Y$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in D_T$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartını sağlayan T operatörüne **lineer operatör** denir.

Tanım 2.1.7: $D_T \subset X$ ve $T: D_T \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x \in D_T$ için

$$\|Tx\|_Y \leq c\, \|x\|_X$$

şartını sağlayan bir $c > 0$ sabit sayısı varsa T operatörüne D_T üzerinde sınırlıdır denir. Eğer $D_T = X$ ise T operatörüne **sınırlıdır** denir.

Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan $c > 0$ sayılarının infumumuna $\boldsymbol{T: X \to Y}$ **sınırlı lineer operatörünün normu** denir. Buna göre

$$\|T\| = \inf\{c > 0: \ x \in D_T \text{ için } \|Tx\|_Y \leq c\, \|x\|_X\}$$

dir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlik $x \neq 0$ için

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq c$$

şeklinde yazılabilir. Demek ki c, $D_T - \{0\}$ kümesi üzerinde yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafının supremumu kadar küçük olur. Bu eşitsizlikte mümkün olan en küçük c değerine T operatörünün normu denir ve

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D_T \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

ile gösterilir. X den Y ye tanımlanan bütün sınırlı ve lineer operatörlerin oluşturduğu uzay $B(X, Y)$ ile gösterilir. Eğer Y bir Banach uzay ise $B(X, Y)$ uzayı da bir Banach uzaydır.

Tanım 2.1.8: X lineer uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona **fonksiyonel** denir. Eğer f fonksiyoneli aynı zamanda lineer ise f ye lineer fonksiyonel denir.

Tanım 2.1.9: X normlu uzayı üzerinde tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonellerden oluşan uzaya X vektör uzayının **dual uzayı** denir ve X^* ile gösterilir. Bu X^* dual uzayı $f, g \in X^*$ ve $c \in F$ için $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (toplama) ve $(cf)(x) = cf(x)$ (skalerle çarpma) işlemleri ile bir vektör uzayıdır. Bu uzayda bir $f \in X^*$ elemanın normu

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X}$$

olarak tanımlanır. $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.10: X^* normlu uzayının duali olan $X^{**} = (X^*)^*$ vektör uzayına X uzayının **ikinci duali** denir. X^{**} ikinci dual uzayı da bir Banach uzayıdır. Sabit bir $x \in X$ elemanı ve $f \in X^*$ için $g: X^* \to F$, $f \to g_x(f) = f(x)$ şeklinde bir g_x fonksiyoneli tanımlayalım. Her $x \in X$ elemanına bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden $T: X \to X^{**}$, $x \to T(x) = g_x(f)$ şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüme **kanonik dönüşüm** adı verilir. Eğer bu dönüşüm üzerine ise X uzayına **yansımalı uzay** adı verilir. X yansımalı bir uzay ise $X = X^{**}$ dir.

Teorem 2.1.11: X Banach uzayı yansımalı uzay ise her alt uzayı da yansımalıdır (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.1.12: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve (x_n) de X de bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa, (x_n) dizisi x_0 a **güçlü yakınsıyor** denir ve $x_n \to x_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve (x_n) de X de bir dizi olmak üzere her $f \in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0 a **zayıf yakınsıyor** denir ve $x_n \rightharpoonup x_0$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.14: (x_n), X normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere

- **i)** (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsak ise yakınsadığı x_0 tektir.
- **ii)** (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsak ise $(\|x_n\|_X)$ dizisi sınırlıdır.
- **iii)** (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsak ise (x_n) dizisinin her alt dizisi de x_0 a zayıf yakınsaktır.
- **iv)** (x_n) dizisi x_0 a güçlü yakınsak ise (x_n) dizisi x_0 a zayıf yakınsak olur. Bunun tersi genel olarak doğru değildir.
- **v)** Boy$X < \infty$ ise (x_n) dizisinin x_0 a güçlü yakınsak olması için gerek ve yeter şart (x_n) dizisinin x_0 a zayıf yakınsamasıdır. Yani sonlu boyutlu uzaylarda zayıf yakınsaklık ile güçlü yakınsaklık tanımları çakışır (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 2.1.15: (x_n) dizisi X yansımalı Banach uzayında sınırlı bir dizi ise bu dizinin X de güçlü yakınsak bir alt dizisi vardır (Wang 2002).

Tanım 2.1.16: X normlu bir uzay ve X in bir K ($K \subset X$) alt kümesi verilsin. Eğer K nın elemanlarından oluşan her bir (x_n) dizisinin yakınsadığı değer, X uzayının bir elemanı ise K kümesine X uzayında **yoğundur** denir.

Tanım 2.1.17: Bir X normlu uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, X e **ayrılabilir uzay** denir.

Teorem 2.1.18: X ayrılabilir yansımalı bir Banach uzay ve (x_n), X^*da sınırlı bir dizi ise bu dizi X^* da zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir (Wang 2002).

Tanım 2.1.19: $X,\ F$ cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to F$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için

i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ ($\bar{c}, c \in \mathbb{C}$ nin eşleneğidir)

iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

iv) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

şartlarını sağlıyorsa $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ye X de bir iç çarpım ve $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ikilisine de **iç çarpım uzayı** adı verilir. $F = \mathbb{R}$ olması durumunda **ii)** özelliği $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ şeklindedir.

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ iç çarpım uzayında bir x vektörünün normu

$$\|x\|_X = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak n-buyutlu $\mathbb{R}^n$ reel Euclid uzayındaki $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.20: $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ iç çarpım uzayı bir Banach uzay ise, bu uzaya **Hilbert uzayı** denir.

Bundan sonraki bölümlerde Hilbert uzayını H ile göstereceğiz.

2.2. Normlu Uzaylarda Kompaktlık

Tanım 2.2.1: X normlu bir uzayda açık kümelerin bir sınıfı $\mathcal{D} = (D_j)_{\mathrm{j\in J}}$ olmak üzere bir $K \subset X$ alt kümesi için $K \subset \bigcup_{j\in J} D_j$ oluyorsa $\mathcal{D}$ sınıfına ***K* nin açık bir örtüsü** denir. Eğer $J_0 \subset J$ sonlu ve $K \subset \bigcup_{j\in J_0} D_j$ ise $\mathcal{D}_0 = \bigcup_{j\in J_0} D_j$ sınıfına ***K* nin sonlu alt örtüsü** denir. K kümesini örten $\mathcal{D}$ sınıfının her kümesinin çapı bir $\varepsilon > 0$ dan büyük değilse, $\mathcal{D}$ örtüsüne ***K* nin *ε* örtüsü** denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.2.2: X normlu uzay ve $K \subset X$ olmak üzere K kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa K kümesine X uzayında **kompakt bir küme** denir. Eğer K kümesinin $\overline{K}$ kapanışı X uzayında kompakt bir küme ise K kümesine X uzayında bir **ön-kompakt küme** denir. X kompakt (ön-kompakt) bir küme ise X e **kompakt (ön-kompakt) normlu uzay** denir.

Tanım 2.2.3: X normlu uzay ve K, X in bir alt kümesi olmak üzere K daki her dizinin limiti yine K da olan yakınsak bir alt dizisi varsa K kümesine X de **dizisel kompakt küme** denir. Eğer K nın $\overline{K}$ kapanışı X de dizisel kompakt küme ise K ya X de **dizisel ön-kompakt** küme adı verilir. X dizisel kompakt (dizisel ön-kompakt) bir küme ise bu uzaya **dizisel kompakt (dizisel ön-kompakt) normlu uzay** denir.

Bu tanıma göre X de dizisel kompakt bir $K \subset X$ alt kümesi içinde alınan herhangi bir (x_n) dizisinin bir $x \in K$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Bu $x \in K$ noktası (x_n) dizisi için bir limit noktasıdır. Ayrıca $K \subset X$ alt kümesi içinde alınan herhangi bir (x_n) dizisinin bir $x \in K$ limit noktası varsa, (x_n) dizisinin bu x noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi bulunabilir.

Teorem 2.2.4 (Heine-Borel teoremi): $K \subset \mathbb{R}$ nin kompakt olması için gerek ve yeter şart K kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır (Wang 2002).

Heine-Borel teoreminden, $\mathbb{R}$ içindeki her kompakt kümenin $\mathbb{R}$ içinde kapalı ve sınırlı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca $\mathbb{R}$ de bir kümenin kompakt olması için gerek ve yeter şart bu kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır. Fakat sonsuz boyutlu Banach uzaylarda kapalılık ve sınırlılık koşulu kompaktlık için gereklidir ancak yeterli değildir.

Lemma 2.2.5: X normlu uzay ve $K \subset X$ olmak üzere K kümesi X de kompakt bir küme ise K kümesi X de dizisel kompakttır (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.2.6: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X < r\}$$

kümesine $\boldsymbol{x_0}$ **merkezli ve** $\boldsymbol{r}$ **yarıçaplı açık yuvar**,

$$\overline{B_r}(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X \leq r\}$$

kümesine $\boldsymbol{x_0}$ **merkezli ve** $\boldsymbol{r}$ **yarıçaplı kapalı yuvar,**

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X = r\}$$

kümesine $\boldsymbol{x_0}$ **merkezli ve** $\boldsymbol{r}$ **yarıçaplı yuvar yüzeyi** denir.

İlerleyen bölümlerde X normlu uzayının açık birim yuvarını B_X, kapalı birim yuvarını $\overline{B}_X$ ve birim yuvar yüzeyini de S_X ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.7: X normlu uzay ve $K \subset X$ olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için K kümesinin sonlu sayıda açık yuvarlardan oluşan ε-örtüsü varsa K ya X de **tamamen sınırlı bir küme** denir.

Teorem 2.2.8: X Banach uzayı ve $K \subset X$ olmak üzere K kümesinin X de ön-kompakt olması için gerek ve yeter şart K kümesinin X de tamamen sınırlı olmasıdır (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 2.2.8 den kapalı bir kümenin tamamen sınırlı bir küme olması için gerek ve yeter şart bu kümenin kompakt olmasıdır. Böylece sonlu boyutlu uzaylarda doğru olan "kapalılık + sınırlılık = kompaktlık" özelliği yerine sonsuz boyutlu uzaylarda "kapalılık + tamamen sınırlılık = kompaktlık" özelliği ortaya çıkmaktadır.

Tanım 2.2.9: X Banach uzayı ve $K \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer K içindeki her sonsuz (x_n) dizisinin bir $x \in K$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa K ya X de **zayıf kompakt (veya dizisel zayıf kompakt) küme** denir.

Teorem 2.2.10: X Banach uzayının zayıf kompakt her kümesi sınırlıdır (Willem 1996).

2.3. Operatörler ve Bazı Özel Uzaylar

Tanım 2.3.1: X ve Y normlu uzaylar, $T: X \to Y$ bir operatör, $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Eğer, $n \to \infty$ iken

$$\|x_n - x_0\|_X \longrightarrow 0 \quad (x_n \to x_o)$$

olduğunda

$$\|T(x_n) - T(x_o)\|_Y \to 0 \quad \big((Tx_n) \to T(x_0)\big)$$

oluyorsa T operatörüne x_0 noktasında **süreklidir (**veya **dizisel süreklidir)** denir. Lineer operatörler için sınırlılık ve süreklilik kavramları denktir. Lineer olmayan operatörler için bu ifade geçerli değildir (Willem 1996).

Tanım 2.3.2: $T: X \to Y$ operatör ve $x_0 \in X$ olmak üzere X de $x_n \rightharpoonup x_0$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer

- **i)** $n \to \infty$ iken Y de $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$ ise T operatörüne x_0 noktasında **zayıf süreklidir**
- **ii)** $n \to \infty$ iken Y de $T(x_n) \to T\,(x_0)$ ise T operatörüne x_0 noktasında **güçlü süreklidir** denir.

Norma göre güçlü yakınsak olan bir T operatörü aynı zamanda zayıf yakınsak olduğundan T operatörü güçlü sürekli ise aynı zamanda süreklidir. Bu nedenle güçlü süreklilik kavramı süreklilikten daha güçlü bir kavramdır.

Tanım 2.3.3: $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \to x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

şartı sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **alttan yarı-süreklidir** denir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik $x_n \rightharpoonup x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi için sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **alttan zayıf yarı-süreklidir** denir.

Tanım 2.3.4: $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \to x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x_0)$$

şartı sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **üstten yarı-süreklidir** denir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik $x_n \rightharpoonup x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi için sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **üstten zayıf yarı-süreklidir** denir.

f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise bu noktada alttan ve üstten yarı-süreklidir. Eğer f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında zayıf sürekli ise bu durumda f, $x_0 \in X$ noktasında alttan ve üstten zayıf yarı-süreklidir.

Tanım 2.3.5: X, Y iki Banach uzay ve $T: X \to Y$ lineer operatör olmak üzere T operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir ön kompakt kümesine dönüştürüyorsa, T ye **kompakt lineer operatör (tamamen sürekli lineer operatör)** denir.

Tanım 2.3.6: K, bir X Banach uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. K daki (x_n) dizisi x^* a zayıf ve (Tx_n) dizisi p ye güçlü yakınsadığında $Tx^* = p$ oluyorsa T dönüşümüne p de **demi-kapalıdır** denir. I, X in özdeş operatörü olmak üzere K daki her (x_n) sınırlı dizisi için $((I - T)x_n)$ nin güçlü yakınsak bir alt dizisi varsa, T ye **demi-kompakttır** denir (Goebel ve Kirk 1990).

Tanım 2.3.7 (Opial Şartı): Bir X Banach uzayında $x_n \rightharpoonup x$ zayıf yakınsaması her $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, bu durumda X uzayı Opial şartını sağlar denir (Opial 1967).

Bu eşitsizlikte "$<$" yerine "$\leq$" alınırsa zayıf Opial şartı olarak adlandırılan şart elde edilir.

Örnek 2.3.8: Her Hilbert uzayı Opial şartını sağlar. Yani bir H Hilbert uzayında (x_n) dizisi $x \in H$ noktasına zayıf yakınsak ise her $y \in H$ ve $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|$$

dir. Her zayıf yakınsak dizi sınırlı olduğundan $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\|$ ve $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|$ sonludur.

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle$$

olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|^2 > \limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2$$

elde edilir.

Tanım 2.3.9: X, Y iki Banach uzay, $f: X \to Y$ bir operatör ve $x \in X$ olmak üzere her $h \in X$ için

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|f(x + th) - f(x)\|_Y}{t} = T_x\,(h)$$

olacak şekilde bir $T \in L(X,Y)$ sınırlı lineer operatörü varsa f ye $x \in X$ noktasında ve h yönünde **Gâteaux diferansiyellenebilirdir** denir. T ye f nin $x \in X$ noktasındaki **Gâteaux türevi** adı verilir. Eğer bu eşitlik her $x \in X$ için sağlanırsa, f operatörüne **Gâteaux diferansiyellenebilirdir** denir (Schechter 2007).

Tanım 2.3.10: X, Y iki Banach uzay, $f: X \to Y$ bir operatör ve $x \in X$ olmak üzere her $h \in X$ için

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T_x(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olacak şekilde bir $T \in L(X,Y)$ sınırlı lineer operatörü varsa, f operatörüne $x \in X$ noktasında **Fréchet diferansiyellenebilir** denir. T operatörüne de f nin $x \in X$ noktasındaki **Fréchet türevi** denir. Eğer yukarıdaki eşitlik her $x \in X$ için sağlanırsa f operatörüne **Fréchet diferansiyellenebilir** denir (Papageorgiou ve Kyritsi-Yiallourou 2009).

Teorem 2.3.11: Eğer $f: X \to Y$ operatörü $x \in X$ de Fréchet diferansiyellenebilirse f operatörü $x \in X$ de süreklidir (Papageorgiou ve Kyritsi-Yiallourou 2009).

Teorem 2.3.12: Eğer $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonelinin X de Gâteaux türevi sürekli ise bu durumda f fonksiyoneli Fréchet diferansiyellenebilirdir ve $f \in C^1(X,Y)$ dir (Willem 1996).

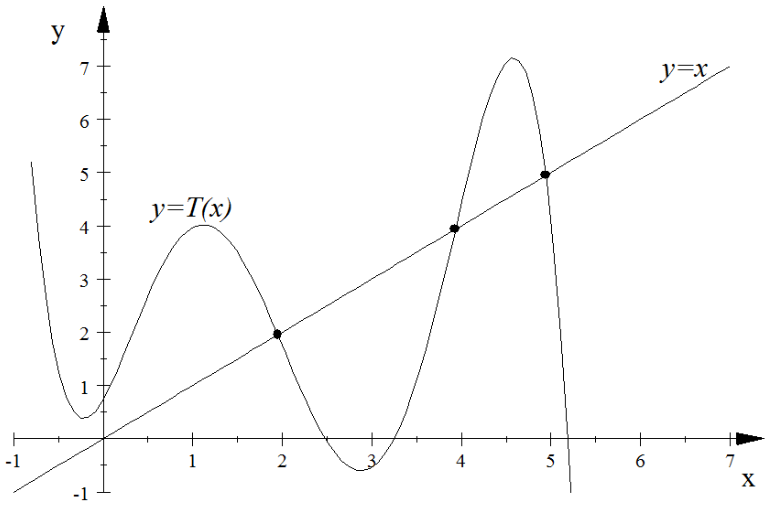
Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru değildir.

2.4. Sabit Nokta Kavramı ve Bazı Dönüşüm Sınıfları

Bu başlık altında sabit nokta kavramı ve bazı özel dönüşüm sınıflarını vereceğiz.

Tanım 2.4.1: X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin **sabit noktası** denir (Agarwal vd. 2007).

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Yani $F(T) = \{x \in X \colon Tx = x\}$ dir. Özel olarak $T \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = Tx$ fonksiyonunun grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişme noktalarının apsisleri T nin sabit noktalarıdır. Aşağıdaki şekle göre T nin üç sabit noktası vardır.



Şekil 2.1

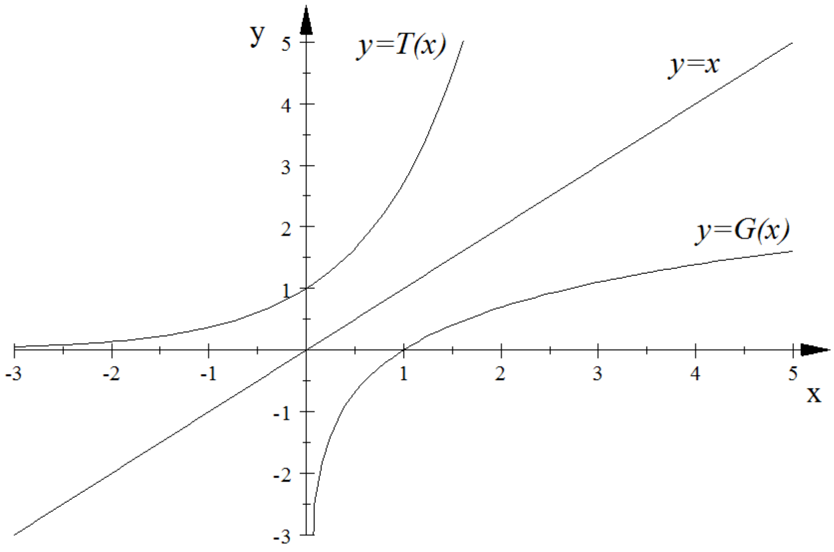
Aşağıda bazı dönüşümlerin sabit noktalarıyla ilgili örnekler verilmiştir.

Örnek 2.4.2: i) $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I \colon X \to X$ özdeş dönüşümü için X in her bir noktası bir sabit noktadır.

ii) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T \colon X \to X$, $Tx = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 18$ fonksiyonunun sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3\}$ dir.

iii) $X = \mathbb{R}$ ve $Y = \mathbb{R}^n$ olmak üzere herhangi bir $T \colon X \to Y$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

iv) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T \colon X \to X$, $Tx = e^x$ ve $Y = \mathbb{R}^+$ olmak üzere $G \colon Y \to Y$, $Gx = \ln x$ fonksiyonlarının sabit noktası yoktur.



Şekil 2.2

v) $T: (0,1] \to (0,1]$, $Tx = \sin x$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bu dönüşüm için $x = 0$ tek sabit nokta olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dir.

X boş kümeden farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için x in T altındaki n. iterasyonu $T^n x$ ile gösterilir ve $T^{n+1}x = T(T^n x)$ olarak tanımlanır.

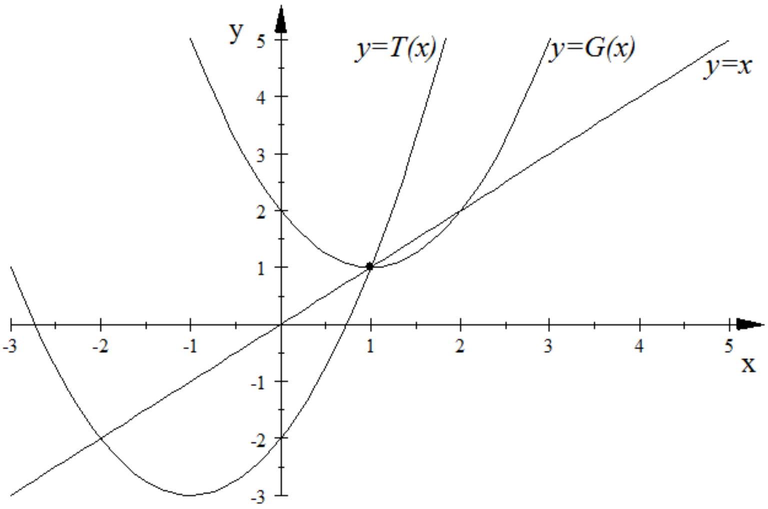
$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

i) Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.

ii) Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise, $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T: \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ dönüşümü $Ta = c$, $Tb = b$, $Tc = a$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{a, b, c\}$ olduğu halde $F(T) = \{b\}$ dir.

X boş kümeden farklı bir küme ve $T, G: X \to X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $Tx = Gx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T ve G nin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T) \cap F(G)$ ile gösterilir. Aşağıda birden fazla dönüşümün ortak sabit noktalarıyla ilgili örnekler verilmiştir.

Örnek 2.4.3: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T, G: X \to X$, $Tx = x^2 + 2x - 2$ ve $Gx = x^2 - 2x + 2$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T) \cap F(G) = \{1\}$ dir.



Şekil 2.3

Örnek 2.4.4: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T, G: X \to X$, $Tx = x - \cos x$ ve $Gx = x - \cot x$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T) \cap F(G) = \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Tanım 2.4.5: $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

i) Her $x, y \in X$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\| \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabit sayısı varsa T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

ii) Eğer (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (contraction) denir.

iii) Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$$

ise T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

iv) Her $x, y \in X$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

ise T ye genişlemeyen dönüşüm (nonexpansive) denir (Agarwal vd. 2009).

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olup yukarıdaki dönüşüm sınıfları da düzgün süreklidir. Dolayısıyla eğer T sürekli değilse, daraltan ve genişlemeyen dönüşüm de olamaz.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının mevcut olması gerekmez. Bunun için ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerine bazı ek koşullar konulması gereklidir.

Tanım 2.4.6: H bir Hilbert uzayı, T bu uzayda $D(T)$ tanım ve $R(T)$ görüntü kümelerine sahip lineer olmayan bir dönüşüm olsun.

i) Her $x, y \in D(T)$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T ye monoton dönüşüm denir.

ii) Her $x, y \in D(T)$ ve $x \neq y$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle > 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T ye kesin monoton dönüşüm denir.

iii) Her $x, y \in D(T)$ ve $x \neq y$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq \eta\|x - y\|^2$$

olacak şekilde $\eta > 0$ sabiti varsa, T ye η-kuvvetli monoton dönüşüm denir.

iv) Her $x, y \in D(T)$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq v\|Tx - Ty\|^2$$

olacak şekilde $v > 0$ sabiti varsa, T ye v-ters kuvvetli monoton dönüşüm denir.

v) Bir T monoton dönüşümün $G(T)$ grafiği başka bir monoton dönüşümün grafiği tarafından içerilmiyorsa T ye maksimal monoton dönüşüm denir (Zeidler 1986).

Yukarıdaki tanımdan her v-ters kuvvetli monoton dönüşümün monoton ve $\frac{1}{v}$-Lipschitzian dönüşüm olduğu açıktır. Gerçekten ters kuvvetli monoton dönüşümün tanımından

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \frac{1}{v}\langle Tx - Ty, x - y\rangle \leq \frac{1}{v}\|Tx - Ty\|\|x - y\|$$

olduğundan

$$\|Tx - Ty\| \leq \frac{1}{v}\|x - y\|$$

dir.

Örnek 2.4.7: $H = \mathbb{R}$ ve $K = [0,1]$ olmak üzere $T: K \to K$ dönüşümü

i) $Tx = \frac{x+1}{2}$ olarak tanımlanırsa

$$(Tx - Ty)(x - y) = \left(\frac{x+1}{2} - \frac{y+1}{2}\right)(x - y) = \frac{(x - y)^2}{2} \geq 0$$

dır. Bu halde T dönüşümü monotondur.

ii) $Tx = 5x$ olarak tanımlanırsa

$$(Tx - Ty)(x - y) = 5(x - y)^2$$

olduğundan her $x, y \in K$ için $(Tx - Ty)(x - y) \geq 5$ yazılabilir. Dolayısıyla T dönüşümü 5-kuvvetli monotondur.

iii) $Tx = 3x + 1$ olarak tanımlanırsa bu dönüşüm $\frac{1}{3}$-ters kuvvetli monotondur. Gerçekten

$$(Tx - Ty)(x - y) = 3(x - y)^2 \geq 9v(x - y)^2$$

eşitsizliği $v = \frac{1}{3}$ için sağlanır.

Tanım 2.4.8: (Konveks Küme): X bir vektör uzay ve $C \subset X$ olsun. Her $x, y \in C$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$ ise C ye konveks küme denir.

Tanım 2.4.9: H bir reel Hilbert uzayı ve C de H nın boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi olmak üzere $T: C \to C$ dönüşümü verilsin.

i) Her $x, y \in C$ için

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle Tx - Ty, x - y \rangle$$

ise T ye sıkı genişlemeyendir (firmly nonexpansive) sdenir.

ii) Her $x, y \in C$ için

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \kappa \|(x - Ty) - (y - Ty)\|^2$$

olacak şekilde bir $\kappa \in [0,1)$ sabiti varsa T ye κ-kesin pseudocontractivdir denir. Bu dönüşüm sınıfı Brower ve Petryshyn tarafından teşkil edilmiştir. Her genişlemeyen dönüşümün 0-kesin pseudocontraction olduğu açıktır.

Tanım 2.4.10: X bir lineer uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun.

i) Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye konveks dönüşüm denir.

ii) Her $x, y \in X$, $x \neq y$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye kesin konveks dönüşüm denir.

iii) Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{1}{2}\alpha\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı varsa f ye kuvvetli konveks dönüşüm denir (Cegielski 2012).

2.5. Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Daraltan, kesin daraltan, genişlemeyen ve Lipschitzian dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası olabilir. Bu bölümde hangi dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının var ve bu sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğunu teorem ve örneklerle ifade edeceğiz.

Aşağıdaki teorem analizdeki en basit sabit nokta teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.5.1: $[a, b]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık ve $f: [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde en az bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

Teorem 2.5.2 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): $\bar{B}_r(x_0)$, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda $f: \bar{B}_r(x_0) \to \bar{B}_r(x_0)$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Brouwer 1912).

Brouwer'ın bu teoremi herhangi bir sonsuz boyutlu Banach uzayında geçerli değildir. Bu durumu bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.5.3: $\bar{B}_{c_0}$, $c_0 = \left\{(x_n): \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$ Banach uzayında kapalı birim yuvar olmak üzere

$$T: \bar{B}_{c_0} \to \bar{B}_{c_0},\ Tx = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \dots)$$

dönüşümünü alalım. Her $x, y \in \bar{B}_{c_0}$ için

$$\|Tx - Ty\|_\infty = \|x - y\|_\infty$$

olduğundan T süreklidir. Ancak $Tx = x$ denkleminin $\bar{B}_{c_0}$ da bir çözümü yoktur.

Teorem 2.5.4 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, $C \subseteq X$ boş kümeden farklı kompakt konveks bir alt küme ve $f: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Schauder 1930).

Teorem 2.5.5 (Banach Daralma İlkesi): X bir Banach uzayı ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir (Banach 1922).

Örnek 2.5.6: $X = [a, b]$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için

$$|T'x| \leq k < 1$$

şartı sağlanıyorsa T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten Ortalama Değer Teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (a, b)$ olmak üzere

$$|Tx - Ty| = T'(c)|(x - y)| \leq k|x - y|$$

olur. Böylece Banach Daralma İlkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

Aşağıdaki örnek ile tam metrik uzay üzerinde tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 2.5.7: c_0 Banach uzayında her $x \in \bar{B}_{c_0}$ için

$$T(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = (3, x_1, x_2, x_3, \dots) \in \bar{B}_{c_0}$$

şeklinde tanımlanan $T: \bar{B}_{c_0} \to \bar{B}_{c_0}$ dönüşümünü alalım. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $x = (3,3,3, \dots)$, T nin bir sabit noktasıdır. Fakat $x = (3,3,3, \dots) \notin c_0$ dır. Yani T genişlemeyen dönüşümü, c_0 uzayında bir sabit noktaya sahip değildir.

Teorem 2.5.8: X bir Banach uzayı ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi ve Kirk 2001).

Teorem 2.5.9: X bir kompakt Banach uzayı ve $T: X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, bir tek p sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için

$$\lim_{n \to \infty} T^n x = p$$

dir (Khamsi ve Kirk 2001).

Tanım 2.5.10 (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa X e düzgün konveks uzay denir (Clarcson 1936).

Bu tanım, $x, y \in \bar{B}_X$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $(x + y)/2$ orta noktasının S_X den bir δ uzaklığında ve $\bar{B}_X$ kapalı birim yuvar içinde olduğunu ifade eder.

Örnek 2.5.11: Her H Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $x, y \in H$ için paralel kenar kuralından

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$$

dir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in \bar{B}_H$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|x+y\|^2 \leq 4-\varepsilon^2$$

olur. Eğer $\delta(\varepsilon)=1-\sqrt{1-\varepsilon^2/4}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1-\delta(\varepsilon)$$

elde edilir. O halde H düzgün konveks bir uzaydır.

Örnek 2.5.12: $\ell_1=\{(x_n): \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty\}$ ve $\ell_\infty=\{(x_n): \sup_n|x_n|<\infty\}$ uzayları sırasıyla $\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ve $\|x\|=\sup\{|x_n|: n\in\mathbb{N}\}$ normlarına göre düzgün konveks uzay değildir. Bunu göstermek için $\varepsilon=1$ olmak üzere $x=(1,0,0,0,\dots), y=(0,-1,0,0,\dots)\in\ell_1$ alalım. Bu durumda $\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ normuna göre

$$\|x\|_1=1,\ \|y\|_1=1,\ \|x-y\|_1=2>1=\varepsilon$$

olur. Ancak $\|(x+y)/2\|_1=1$ olduğundan $\|(x+y)/2\|_1\leq 1-\delta$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı yoktur. Dolayısıyla ℓ_1 uzayı düzgün konveks değildir. Benzer olarak, $\varepsilon=1$ ve $x=(1,1,1,0,0,\dots)$, $y=(1,1,-1,0,0,\dots)\in\ell_\infty$ olarak alalım. Böylece $\|x\|=\sup\{|x_n|: n\in\mathbb{N}\}$ normuna göre

$$\|x\|_\infty=1,\ \|y\|_\infty=1,\ \|x-y\|_\infty=2>1=\varepsilon$$

elde edilir. $\|(x+y)/2\|_\infty=1$ olduğundan ℓ_∞ uzayı düzgün konveks değildir.

Agarwal *vd.* (2007) düzgün konveks bir Banach uzayının boş kümeden farklı, kapalı, konveks ve sınırlı alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen dönüşümün bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir.

2.6. Metrik İzdüşüm Operatörü

Bu bölümde metrik izdüşümün Hilbert uzayındaki tanımı ve bazı temel özellikleri verilecektir.

Tanım 2.6.1: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $x\in H$ olsun. Eğer her $z\in C$ için

$$\|y - x\| \leq \|z - x\|$$

olacak şekilde bir $y \in C$ noktası varsa y ye x in C üzerine metrik izdüşümü denir ve $P_C x$ ile gösterilir. $s = P_C x - x$ vektörüne de x in C üzerine izdüşüm vektörü adı verilir. Eğer her $x \in H$ için $P_C x$ mevcut ve tek olarak tanımlıysa bu durumda $P_C: H \to C$ operatörüne (C üzerine) metrik izdüşüm operatörü denir (Cegielski 2012).

Metrik izdüşümün tanımından her $x \in C$ için $P_C x = x$ dir. Eğer $x \notin C$ ve $P_C x$ metrik izdüşümü mevcutsa bu durumda $P_C x \in \partial C$ dir. Gerçekten eğer $P_C x \in C^o$ ise $B(P_C x, \varepsilon) \subseteq C$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir açık yuvar vardır. Bu durumda z noktası

$$z := x + (1 - \frac{\varepsilon}{\|P_C x - x\|})(P_C x - x) \in B(P_C x, \varepsilon) \subseteq C$$

şeklinde tanımlanırsa $\|z - P_C x\| = \varepsilon$ olacağından $z \in B(P_C x, \varepsilon) \subseteq C$ ve

$$\|z - x\| = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|P_C x - x\|}\right) \|P_C x - x\| < \|P_C x - x\|$$

olur ki bu eşitsizlik metrik izdüşümünün tanımı ile çelişir. Dolayısıyla $P_C x \in \partial C$ dir.

Tanım 2.6.1, herhangi bir $C \subseteq H$ alt kümesi ve $x \in H$ noktası için $P_C x$ metrik izdüşümünün varlık ve tekliğini garanti etmez. C kümesinin kompakt olması durumunda metrik izdüşümünün varlığı Weierstrass Teoremi'nden elde edilir. Üstelik burada $P_C x$ birden fazla değer de alabilir. Örneğin, $[a, b]$ aralığının orta noktası olan $x = \frac{a+b}{2}$ nin $C = \{a, b\}$ kümesi üzerine metrik izdüşümleri $a, b \in H$ noktalarıdır. Dolayısıyla herhangi bir $x \in H$ noktası için tanımlanan $P_C x$ metrik izdüşümünün tekliği için C nin konveks olduğu kabul edilmelidir. Üstelik metrik izdüşümünün tanımından ve normun sürekliliğinden $P_C x$ in mevcut olması durumunda C nin kapanışına ait olduğu açıktır. Yani $x \notin C$ ise $P_C x \in \partial C$ dir. Bu nedenle herhangi bir $x \in H$ noktası için tanımlanan $P_C x$ metrik izdüşümünün varlığı için C nin kapalı olması gerektiği görülür. Bir Hilbert uzayında C nin kapalılığı ve konveksliği her $x \in H$ için $P_C x$ metrik izdüşümünün varlık ve tekliği için yeterlidir. Böylece metrik izdüşümünün varlık ve tekliği ile ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.6.2: C, H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda her $x \in H$ için $P_C x$ metrik izdüşümü var ve tektir (Cegielski 2012).

İç çarpım uzaylarında bu durum aşağıdaki minimum vektör teoremi ile ifade edilir.

Teorem 2.6.3: X bir iç çarpım uzayı ve C, X in tam ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in X$ keyfi fakat sabit olmak üzere

$$\delta = \|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$$

olacak şekilde bir tek $y_0 \in C$ vardır (Bayraktar 1994).

Sonuç 2.6.4: X bir iç çarpım uzayı ve C, X in tam ve konveks alt kümesi olsun. Bu durumda C, normu minimum olan bir vektör içerir (Bayraktar 1994).

Bu teoremden sonra akla ilk olarak teoremin tersinin geçerli olup olmadığı sorusu gelir. Öklid uzaylar için cevap olumludur ve Motzkin Teoremi olarak bilinir. Ancak genel Hilbert uzaylar için bu durum açık bir problemdir.

Aşağıdaki teorem bir $y \in C$ nin $x \in H$ noktasının C konveks kümesi üzerine metrik izdüşümü olabilmesi için gerekli olan bir kriter sunmaktadır.

Teorem 2.6.5 (Karakterizasyon Teoremi): C, H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi, $x \in H$ ve $y \in C$ olsun. Bu durumda her $z \in C$ için aşağıdakiler denktir.

i) $y = P_C x$ dir.

ii) $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ (veya denk olarak $\langle y, z - y \rangle \geq \langle x, z - y \rangle$) dir (Cegielski 2012).

İspat: (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) $y = P_C x$, $z \in C$ ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$z_\lambda = y + \lambda(z - y)$$

olarak tanımlansın. C konveks olduğundan $z_\lambda \in C$ olduğu açıktır. (i) şıkkı ve iç çarpımın özelliklerinden

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 \le \|x-z_\lambda\|^2 &= \|x-y-\lambda(z-y)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 - 2\,\lambda\langle x-y, z-y\rangle + \lambda^2\|z-y\|^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. $\lambda > 0$ olduğu göz önüne alınırsa, yukarıdaki eşitsizlikten

$$\langle x-y, z-y\rangle \le \frac{\lambda}{2}\|z-y\|^2$$

bulunur. Buradan $\lambda \to 0$ için (ii) elde edilir.

$(\mathbf{ii}) \Rightarrow (\mathbf{i})$ İç çarpımın özelliklerinden ve (ii) şıkkından herhangi bir $z \in C$ için

$$\begin{aligned} \|z-x\|^2 &= \|z-y+y-x\|^2 \\ &= \|z-y\|^2 + \|y-x\|^2 + 2\langle z-y, y-x\rangle \\ &\ge \|y-x\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik, metrik izdüşümü tanımından (i) şıkkını verir.

Teorem 2.6.5 in (ii) şıkkı, $x-y$ ve $z-y$ nin sıfırdan farklı vektörler olması durumunda aralarındaki açının $\frac{\pi}{2}$ den büyük olduğunu ifade eder.

Lemma 2.6.6: H bir Hilbert uzay ve $x, y, z \in H$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i) $\langle x-y, z-y\rangle \le 0$ dir.
ii) $\langle z-x, y-x\rangle \ge \|y-x\|^2$ dir.
iii) $\|z-y\|^2 \le \|z-x\|^2 - \|y-x\|^2$ dir.
iv) $\langle z-x, z-y\rangle \ge 0$ dir (Cegielski 2012).

Sonuç 2.6.7: C, H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda P_C izdüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür. Yani her $x, x^* \in H$ için

$$\|P_C x - P_C x^*\| \le \|x - x^*\|$$

dir (Cegielski 2012).

İspat: $x, x^* \in H$ olmak üzere $y = P_C x$ ve $y^* = P_C x^*$ olsun. Teorem 2.6.5 den $y \in C$ ve her $z \in C$ için

$$\langle y, z - y \rangle \geq \langle x, z - y \rangle \tag{2.2}$$

ve $y^* \in C$ için

$$\langle y^*, z - y^* \rangle \geq \langle x^*, z - y^* \rangle \tag{2.3}$$

yazılabilir. (2.2) eşitsizliğinde $z = y^*$, (2.3) eşitsizliğinde de $z = y$ alınır ve çıkan eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa Schwarz eşitsizliğinden

$$\|y - y^*\|^2 = \langle y - y^*, y - y^* \rangle \leq \langle x - x^*, y - y^* \rangle \leq \|x - x^*\| \|y - y^*\|$$

yazılır. Buradan

$$\|y - y^*\| \leq \|x - x^*\|$$

elde edilir. O halde metrik izdüşüm, genişlemeyen bir dönüşümdür.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon metotları kullanılır. Bunlardan bazıları Picard iterasyonu, Kirk iterasyonu, Krasnoselskij iterasyonu, Mann iterasyonu, Ishikawa iterasyonu, Noor iterasyonu, S iterasyonu ve Picard-Mann hybrid iterasyonudur.

Picard İterasyonu: (X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T : C \to C$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in C$ olmak üzere Picard iterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \;\; n = 1,2,... \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon, literatürde ardışık yaklaşıklar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da bilinir (Picard 1890).

Tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılan iterasyonlardan biri de Picard iterasyonudur. Daraltan dönüşüm yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa bu iterasyon, dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Örnek 3.1.1: $X = [0,1]$ olmak üzere $T: [0,1] \to [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olsun. T genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için (3.1) Picard iterasyonu

$$\begin{aligned}
x_1 &= Tx_0 = 1 - a \\
x_2 &= Tx_1 = T^2x_0 = a \\
x_3 &= Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = 1 - a \\
&\vdots \\
x_n &= Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^n x_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup $(a, 1-a, a, 1-a, \dots)$ dizisine karşılık gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla aranan sabit noktayı bulmak için diğer iterasyon metotlarını göz önüne almak gerekir.

Krasnoselskij İterasyou: X bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0,1,2, \dots \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon $\lambda = 1$ için (3.1) Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955).

Kirk İterasyonu: X bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_k T^k x_n \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $i = 0,1,2, \dots, k$ için $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$$

dir. (3.3) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu $k = 1$ için Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk 1971).

Mann İterasyonu: Mann tarafından kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n , \quad n = 0,1,2, \dots \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada (α_n), $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir (Mann 1953).

(3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

Mann'ın sonuçları Franks ve Marzec (1971) tarafından aynı şekilde Franks ve Marzec'in sonuçları da Rhoades (1974) tarafından genişletilmiştir. Yine Rhoades 1974 yılında yapmış olduğu çalışmasıyla herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm (self-map) için Mann iterasyonunun bu dönüşümün sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Örnek 3.1.2: $X = [1,3]$ kümesi üzerinde $T: X \to X,\ Tx = \frac{2}{x}$ olarak tanımlanırsa Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktası olan $x = \sqrt{2}$ ye yakınsar.

Ishikawa İterasyonu: S. Ishikawa tarafından teşkil edilmiş, Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyonunun yetersiz olduğu durumlarda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya güçlü yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır.

X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n\ , \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n,\ \ n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada (α_n) ve (β_n), $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\ ,\quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan dizilerdir (Ishikawa 1974).

(3.5) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

Rhoades ve Şoltuz, 2003-2004 yıllarında dönüşümlerin çeşitli sınıfları için Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının Mann iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir.

Noor İterasyonu: Noor tarafından kurulmuştur. X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \,, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n \,, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada (α_n), (β_n), $(\gamma_n) \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \,, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dur (Noor 2000).

Xu ve Noor, bu iterasyonunun düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinden kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktasına yakınsaklığını çalışmışlardır (Xu ve Noor 2002).

S İterasyonu: X bir lineer uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere S-iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(\alpha_n), (\beta_n) \in (0,1)$ dir (Agarwal vd. 2007).

Bu iterasyon, Mann ve Ishikawa iterasyonundan bağımsızdır. Agarwal, O’Regan ve Sahu, daraltan dönüşümler için S iterasyonunun yakınsama hızının, Picard iterasyonunun yakınsama hızına denk ve diğer sabit nokta iterasyonların yakınsama hızlarından daha iyi olduğunu göstermiş ve çeşitli dönüşümler için S iterasyonunun, dönüşümün sabit noktasına güçlü ve zayıf yakınsamasını çalışmışlardır (Agarwal vd. 2007).

Picard-Mann Hybrid İterasyonu: Khan ve Sahu tarafından birbirinden bağımsız olarak tanımlanmış ve Khan tarafından Picard-Mann hybrid (PMH) iterasyonu olarak adlandırılmıştır. Bu iterasyon, X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Khan, Banach uzaylarda genişlemeyen bir T dönüşümü için (3.6) iterasyonunun zayıf ve kuvvetli yakınsaklığını incelemiştir. Ayrıca bu iterasyonun daraltan dönüşümler için Picard, Mann ve Ishikawa iterasyonlarından daha hızlı yakınsadığını göstermiştir (Khan 2013).

3.2. Özel Problemler

Bu başlık altında sabit nokta teorisiyle bağlantılı bazı özel problemleri tanıtacağız. Öncelikle konveks minimizasyon problemini vereceğiz.

A) Konveks Minimizasyon Problemi

Tanım 3.2.1: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $f: H \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. f nin C üzerindeki yerel minimum noktalarının bulunmasına minimizasyon problemi denir. Eğer her $x \in C$ için $f(x^*) \leq f(x)$ ise x^* noktasına f dönüşümünün genel minimum noktası ya da

$$\min_{x \in C} f(x) \tag{3.7}$$

probleminin optimal çözümü denir ve bu noktaların kümesi $\underset{x \in C}{\operatorname{Argmin}} f(x)$ ile gösterilir. $f(x^*)$ değerine de f nin C üzerindeki minimumu denir.

(3.7) deki C kümesi genellikle $c_i : H \to \mathbb{R},\ i \in I = \{1,2, \ldots, m\}$ olmak üzere $C \coloneqq \{x \in H:\ c_i(x) \leq 0,\ \ i \in I\}$ şeklinde verilir. Bu durumda (3.7) problemi, aşağıdaki kısıtlı (yan şartlı) minimizasyon problemine denktir:

$$\min_{\substack{c_i(x) \leq 0, i \in I \\ x \in H}} f(x). \tag{3.8}$$

(3.8) problemindeki c_i fonksiyonlarına problemin kısıtları denilir. Eğer f ve $c_i,\ i \in I$ fonksiyonları konveks ise bu durumda (3.8) problemine konveks minimizasyon problemi, diferensiyellenebilir ise kısıtlı diferensiyellenebilir minimizasyon problemi denir.

Bir minimizasyon probleminde problemin kısıtlarını sağlayan tüm noktaların kümesine feasible küme, problemdeki f fonksiyonuna ise amaç (objektif) fonksiyonu denir.

Teorem 3.2.2: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı konveks bir alt kümesi ve $f: H \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Eğer x^*, f nin C üzerindeki yerel minimum noktası ise aynı zamanda bir genel minimum noktasıdır. Üstelik f kesin konveks ise bu durumda minimum nokta tektir. Eğer f sürekli, kuvvetli konveks bir dönüşüm ve C kapalı ise $\underset{x \in C}{\operatorname{Argmin}} f(x) \neq \emptyset$ dir (Cegielski 2012).

Örnek 3.2.3: 1) $H = \mathbb{R}$ ve $C = (0,1]$ olmak üzere $f: C \to C, f(x) = x^3$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonu konvekstir. Ancak C kapalı olmadığından

$$\min_{x \in C} f(x) = \min_{x \in (0,1]} x^3$$

konveks minimizasyon probleminin çözümü yoktur.

2) $H = \mathbb{R}$ ve $C = [-1,3]$ olmak üzere $f: C \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + |x-2|$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonu konveks olup

$$\min_{x\in C} f(x) = \min_{x\in[-1,3]} (|x| + |x-2|)$$

konveks minimizasyon probleminin çözüm kümesi [0,2] dir.

Örnek 3.2.4: $\mathbb{R}^2$ de

$$\min_{\substack{1\le x_1\le 10\\ 5\le x_2\le 12\\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2}} (x_1^2 + x_2^4)$$

şeklinde verilen problemi ele alalım. Bu problem için feasible küme $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x_1 \le 10, 5 \le x_2 \le 12\}$, amaç fonksiyonu ise $f(x) = x_1^2 + x_2^4$ dir.

B) Varyasyonel Eşitsizlik Problemi

Tanım 3.2.5: C, $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ Öklid uzayının boş kümeden farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $A: C \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ sürekli bir dönüşüm olsun. Her $x \in C$ için

$$Ax^*(x - x^*) \ge 0 \tag{3.9}$$

eşitsizliğini sağlayan x^* elemanlarının bulunmasına, sonlu boyutlu varyasyonel eşitsizlik problemi denir ve $VI(C, A)$ sembolüyle gösterilir. Varyasyonel eşitsizlik probleminin çözüm kümesi ise Ω ile gösterilir.

Geometrik olarak (3.9) varyasyonel eşitsizliği, Ax^* ın x^* noktasında C kümesine dik olduğunu ifade eder.

Örnek 3.2.6: $C = [0,1]$ olmak üzere $A: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $Ax = 3x$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $x \in [0,1]$ için

$$Ax^*(x - x^*) = 3x^*(x - x^*) \ge 0$$

varyasyonel eşitsizliğinin çözümü $x^* = 0$ noktasıdır.

Şimdi varyasyonel eşitsizlik problemlerinin çözümünün varlık ve tekliği ile ilgili bazı teorem ve sonuçları verelim.

Teorem 3.2.7 (Kompaktlık ve Süreklilik Altında Varlık): C, $\mathbb{R}^n$ nin kompakt konveks bir alt kümesi ve A, C üzerinde sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda varyasyonel eşitsizlik probleminin en az bir çözümü vardır (Nagurney 2002).

İspat: Brouwer Sabit Nokta Teoremi'nden $A: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere $x^* = Ax^*$ olacak şekilde en az bir $x^* \in C$ vardır. I özdeş dönüşüm ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere P_C ve $(I - \gamma A)$ sürekli olduğundan $P_C(I - \gamma A)$ de süreklidir. O halde $P_C(I - \gamma A)$ dönüşümünün en az bir sabit noktası vardır. O halde $P_C(I - \gamma A)$ dönüşümünün sabit noktası varyasyonel eşitsizlik probleminin bir çözümüdür.

C kümesinin sınırsız olması durumunda Brouwer Sabit Nokta Teoremi uygulanabilir değildir. Dolayısıyla varyasyonel eşitsizlik probleminin çözümünün varlığını gösterebilmek için bazı şartlara ihtiyaç vardır.

Varlık ve tekliğin özellikleri, kesin monotonluk şartı altında kolayca elde edilebilir. Şimdi bununla ilgili sonuçları verelim.

Lemma 3.2.8: C, bir H Hilbert uzayının boş kümeden farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $A: C \to H$ v-ters kuvvetli monoton dönüşüm olsun. Bu durumda $VI(C, A)$ varyasyonel eşitsizlik probleminin en az bir çözümü vardır (Takahashi ve Toyoda 2003).

İspat: $0 < \lambda \leq 2\alpha$ olmak üzere $T: C \to C$ dönüşümünü $Tx = P_C(x - \lambda Ax)$ şeklinde tanımlayalım. P_C genişlemeyen olduğundan T dönüşümü de genişlemeyendir. Buradan $F(T)$ boş kümeden farklıdır. Her $\lambda > 0$ için

$$u \in \Omega \Leftrightarrow u = P_C(u - \lambda Au)$$

olduğundan $VI(C, A)$ nın en az bir çözümü vardır.

Teorem 3.2.9 (Teklik): A, C üzerinde tanımlı kesin monoton bir operatör olsun. Bu durumda $VI(C, A)$ nin bir çözümü varsa tektir (Nagurney 2002).

İspat: x_1 ve x_2 birbirinden farklı iki çözüm olsun. Bu durumda her $x \in C$ için x_1 ve x_2 sırasıyla

$$A(x_1)(x - x_1) \geq 0 \tag{3.10}$$

ve

$$A(x_2)(x - x_2) \geq 0 \tag{3.11}$$

eşitsizliklerini sağlar. (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinde x yerine sırasıyla x_2 ve x_1 yazılırsa

$$\big(A(x_1) - A(x_2)\big).(x_2 - x_1) \geq 0$$

elde edilir. Fakat bu eşitsizlik kesin monotonluk tanımıyla çelişir. Dolayısıyla $x_1 = x_2$ dir.

Teorem 3.2.10: A kuvvetli monoton bir operatör olsun. Bu durumda $VI(C, A)$ nin bir tek x^* çözümü vardır (Nagurney 2002).

O halde C kümesinin sonsuz olması halinde A operatörünün kuvvetli monotonluğu, çözümün varlık ve tekliğini garanti eder. C nin kompakt olması halinde A nın sürekliliği çözümün varlığı garanti ederken, A nn kesin monotonluğu da tekliği garanti etmektedir.

Teorem 3.2.11: α ve L, $0 < \gamma < \frac{\alpha}{L^2}$ eşitsizliğini sağlayan sabitler olmak üzere A, α-kuvvetli monoton ve L-Lipschitz sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in C$ için $(1 - \gamma\alpha)^2 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\|P_C(x - \gamma Ax) - P_C(y - \gamma Ay)\| \leq \beta\|x - y\|$$

dir. Yani $P_C(I - \gamma A)$, β-daraltan bir dönüşümdür (Nagurney 2002).

Teorem 3.2.11 ve Banach Sabit Nokta Teoremi’nden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.12: $P_C(I - \gamma A)$ dönüşümünün tek sabit noktası vardır (Nagurney 2002).

Teorem 3.2.13: A, v-ters kuvvetli monoton bir dönüşüm ve $\gamma \in (0,2v)$ olsun. Bu durumda her $x, y \in C$ için

$$\|P_C(x - \gamma Ax) - P_C(y - \gamma Ay)\| \leq \|x - y\|$$

dir. Yani $P_C(I - \gamma A)$ genişlemeyen bir dönüşümdür (Nagurney 2002).

Örnek 3.2.14: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ birinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

eşitliğini sağlayan $x_0 \in [a, b]$ noktalarını araştıralım. Burada üç durum söz konusudur.

1. $a < x_0 < b$ ise $f'(x_0) = 0$ dır.
2. $x_0 = a$ ise $f'(x_0) > 0$ dır.
3. $x_0 = b$ ise $f'(x_0) < 0$ dır.

Bu üç durum her $x \in [a, b]$ için

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

şeklinde tek bir eşitsizlikle özetlenebilir. Bu eşitsizliğe $\mathbb{R}$ de varyasyonel eşitsizlik denir.

Örnek 3.2.15: f, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının kapalı ve konveks bir C alt kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Örnek 3.2.14 deki gibi yine

$$f(x_0) = \min_{x \in C} f(x)$$

eşitliğini sağlayan $x_0 \in C$ elemanlarını araştıralım. x_0, f fonksiyonunu minimum yapan değer ve $x \in C$ olsun. C konveks olduğundan $(1 - t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0), 0 \leq t \leq 1$, C nin bir elemanıdır. Φ fonksiyonunu

$$\Phi(t) = f\big(x_0 + t(x - x_0)\big), \quad 0 \leq t \leq 1$$

şeklinde tanımlayalım. Φ fonksiyonu minimum değerini $t = 0$ noktasında alır. Dolayısıyla her $x \in C$ için

$$\Phi'(0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

olur. Sonuç olarak x_0 noktası her $x \in C$ için

$$x_0 \in C: \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \tag{3.12}$$

şeklindeki varyasyonel eşitsizliği sağlar. Eğer C sınırlı ise (3.12) varyasyonel eşitsizliğini sağlayan en az bir x_0 noktası mevcuttur.

Bir minimizasyon problemi, minimum yapılacak olan özel amaç fonksiyonu ile karakterize edilir. Muhtemel amaç fonksiyonları, kar, fiyat, pazar payı ve portfolyo riski gibi ifadeleri içerir. Genelde bir minimizasyon problemi tek amaç fonksiyonundan oluşur.

Hem kısıtlı hem de kısıtsız minimizasyon problemleri, varyasyonel eşitsizlik problemleri şeklinde ifade edilebilir. Aşağıdaki iki lemma minimizasyon problemi ile varyasyonel eşitsizlik problemi arasındaki bağlantıyı göstermektedir.

Lemma 3.2.16: f, kapalı ve konveks bir C kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli diferansiyellenebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer x^*, (3.7) minimizasyon probleminin bir çözümü ise aynı zamanda her $x \in C$ için (3.12) varyasyonel eşitsizlik probleminin de bir çözümüdür (Nagurney 2002).

Lemma 3.2.17: f konveks bir fonksiyon ve x^*, $VI(C, \nabla f)$ varyasyonel eşitsizlik probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda x^*, (3.7) minimizasyon probleminin de bir çözümüdür (Nagurney 2002).

C) Sabit Nokta Problemleri

Sabit nokta teorisi, ekonomik denge problemlerinin çözümlerini formüle etmek, analiz etmek ve hesaplamak için de kullanılmaktadır. Varyasyonel eşitsizlik ve sabit nokta problemleri arasındaki bağıntı izdüşüm operatörleri kullanılarak aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 3.2.18: C, kapalı ve konveks bir küme olsun. Bu durumda $x^* \in C$ nin $VI(C, A)$ varyasyonel eşitsizlik probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $\gamma > 0$ için x^* ın $P_C(I - \gamma A): C \to C$ dönüşümünün sabit noktası olması yani

$$P_C(x^* - \gamma A x^*) = x^*$$

olmasıdır (Nagurney 2002).

İspat: x^*, varyasyonel eşitsizliğin bir çözümü olsun. Bu durumda her $x \in C$ için

$$A(x^*).(x - x^*) \geq 0$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik önce $-\gamma < 0$ ile çarpılır ve her iki tarafa $x^*(x - x^*)$ eklenirse

$$x^*(x - x^*) \geq [x^* - \gamma A x^*](x - x^*)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 2.3.7 den $P_C(x^* - \gamma A x^*) = x^*$ elde edilir. Tersine $\gamma > 0$ için $P_C(x^* - \gamma A x^*) = x^*$ olduğu kabul edilirse her $x \in C$ için

$$x^*(x - x^*) \geq [x^* - \gamma A x^*](x - x^*)$$

ve buradan her $y \in C$ için

$$A(x^*).(y - x^*) \geq 0$$

elde edilir.

3.3. Bazı Önemli Lemmalar

Bu başlık altında 4. Bölümde yer alan ana teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan Lemmaları vereceğiz.

Lemma 3.3.1: C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan konveks ve kapalı alt kümesi ve $S: C \to C$, kesin pseudocontraction dönüşüm olsun. Bu durumda $I - S$ demi-kapalıdır yani (x_n), C de $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde bir dizi ve $x_n - Sx_n \to 0$ ise $x \in F(S)$ dir (Browder F. E., Petryshyn W. V. 1967).

Lemma 3.3.2: C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan konveks ve kapalı alt kümesi ve $S: C \to C$, κ-kesin pseudocontraction dönüşüm olsun. λ, $(0,1)$ aralığında bir sabit olmak üzere $T = \lambda I + (1 - \lambda)S$ olarak tanımlansın. Eğer $\lambda \in [\kappa, 1)$ ise T genişlemeyen ve $F(T) = F(S)$ dir (Browder F. E., Petryshyn W. V. 1967).

Lemma 3.3.3: (x_n) ve (y_n), bir H reel Hilbert uzayında sınırlı diziler ve (β_n), $(0,1)$ aralığında $0 < \liminf_{n\to\infty}\beta_n \le \limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1$ şartını sağlayan bir dizi olsun. Her $n \ge 0$ için $x_{n+1} = (1 - \beta_n)y_n + y_n x_n$ olmak üzere

$$\limsup_{n\to\infty}(\|y_n - y\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \le 0$$

ise $\lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0$ dır (Suzuki, T. 2005).

Lemma 3.3.4: C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan kapalı konveks alt kümesi ve T, C de tanımlı genişlemeyen dönüşüm olsun. Eğer $F\,(T) \neq \emptyset$ ise $I - T$ demi-kapalıdır. Yani C deki (x_n) dizisi bir $x \in C$ zayıf yakınsak ve $((I - T\,)x_n)$ dizisi de $y \in C$ güçlü yakınsak iken $(I - T\,)x = y$ dir. Burada I, H nın özdeş operatörüdür (Goebel, K., Kirk, W. A. 1990).

Lemma 3.3.5: H bir reel Hilbert uzayı ve (μ_n), H da boş kümeden farklı $W \subset H$ kümesinin varlığı ile aşağıdaki şartları sağlayan bir dizi olsun:

- **i)** her $\mu \in W$ için $\lim_{n\to\infty}\|\mu_n - \mu\|$ mevcuttur.
- **ii)** (μ_n) dizisinin herhangi bir zayıf kapanış noktası W ya aittir.

Bu durumda (μ_n) nin zayıf yakınsadığı bir $w^* \in W$ mevcuttur (Opial, Z. 1967).

Lemma 3.3.6: H bir reel Hilbert uzayı olsun. Bu durumda her $x, y \in H$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\langle x - y, y\rangle$$

ve

$$\|\lambda x-(1-\lambda)y\|^2=\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)\|y\|^2-\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$$

dir (Marino, G, Xu, H. K. 2000).

Lemma 3.3.7: (γ_n), $(0,1)$ aralığında bir dizi, (δ_n) ve (e_n) reel dizileri de

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\infty$,
ii) $\sum_{n=1}^{\infty}|e_n|<\infty$ ve
iii) $\limsup_{n\to\infty}\frac{\delta_n}{\gamma_n}\leq 0$ veya $\sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n|<0$

şartlarını sağlayan diziler olmak üzere (α_n),

$$\alpha_{n+1}\leq (1-\gamma_n)\alpha_n+\delta_n+e_n$$

şartını sağlayan negatif olmayan reel bir dizi olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ dır (Liu, L. S. 1995).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Konveks Fizibilite Problemlerinin Çözümü İçin Bir Viskozite Metot

Sabit nokta ve denge problemleri, nonlineer analiz, mühendislik, optimizasyon, ekonomi, ulaştırma, ağ ve yapısal analiz, Oyun teorisindeki Nash denge problemi, bilgisayarlı tomografi, radyoterapi tedavi planlama, fizik, ters problemler gibi birçok çalışma alanı ile dolaylı ya da dolaysız olarak ilişkili olduğundan iteratif algoritmalar temel alınarak geniş bir şekilde incelenmiştir. Bunlardan bazıları (Bin Dehaish, B. A. vd. 2015), (Cho, S. Y. vd. 2011, 2013, 2014), (Jung, J. S. 2006), (Censor, Y, vd. 2005-2007) dir. Viskozite algoritmalar, (Moudafi, A. 2000) tarafından Hilbert uzaylarında genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarını incelemek üzere başlatılmıştır. Viskozite algoritmaları son zamanlarda farklı alanlardaki birçok yazar tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bunlardan bazıları (Chang, S. S. 2009), (Cho, S. Y. vd. 2011, 2014), (He, Z., Chen, C. 2008), (Jung, J. S. 2006), (Qin, X., Cho, S. Y., Wang, L. 2014), (Qing, Y., Lv, S. 2014), (Qin, X., Su, Y., Wang, L. 2013), (Chang, S.S vd. 2009), (Qin, X. 2010), (Chang, S. S, Agarwal, R. 2014) dir,

H bir reel Hilbert uzayı ve C, H nın boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olmak üzere $A: C \to H$ bir dönüşümü verilsin. Bu durumda klasik varyasyonal eşitsizlik problemi her $y \in C$ için

$$\langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \tag{4.1}$$

olacak şekilde $x \in C$ yi bulma şeklindedir. Son zamanlarda Hilbert uzaylarında (4.1) varyasyonel eşitsizliğini çözmek için projeksiyon yöntemleri bir çok yazar tarafından yoğun bir şekilde araştırılmaktadır. F, $C \times C$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bifonksiyon ve $A: C \to H$, ters kuvvetli monoton dönüşüm olsun. Her $y \in C$ için

$$F(x, y) + \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \tag{4.2}$$

olacak şekilde $x \in C$ yi bulma problemine genelleştirilmiş denge problemi denir. Bu $x \in C$ noktalarının kümesi $EP(F, A)$ ile gösterilir. Yani

$$EP(F,A) = \{x \in C: F(x,y) + \langle Ax, y-x\rangle \geq 0, \;\; \forall y \in C\}$$

dir. (4.2) problemini çalışmak için F nin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

(I1) Her $x \in C$ için $F(x,x) = 0$ dır;

(I2) F monotondur yani her $x, y \in C$ için $F(x,y) + F(y,x) \leq 0$ dır;

(I3) Her bir $x, y, z \in C$ için

$$\limsup_{t \to 0} F(tz + (1-t)x, y) \leq F(x,y)$$

dir;

(I4) Her bir $x \in C$ için $y \mapsto F(x,y)$, konveks ve alttan yarı-süreklidir.

Eğer $F \equiv 0$ ise (4.2) genelleştirilmiş denge problemi (4.1) klasik varyasyonel eşitsizliğine indirgenir. Eğer $A \equiv 0$ ise (4.2) genelleştirilmiş denge problemi her $y \in C$ için

$$F(x,y) \geq 0 \tag{4.3}$$

eşitsizliğini sağlayan $x \in C$ yi bulma şeklinde verilen denge problemine indirgenir. Bu $x \in C$ noktalarının kümesi $EP(F)$ ile gösterilir. Yani

$$EP(F) = \{x \in C: F(x,y) \geq 0, \;\; \forall y \in C\}$$

dir.

Lemma 4.1.1: C bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan konveks ve kapalı alt kümesi olsun. $F: C \times C \to \mathbb{R}$, (I1)-(I4) şartlarını sağlayan bifonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir $r > 0$ ve $x \in H$ için

$$F(z,y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq 0, \;\;\; \forall y \in C$$

olacak şekilde $z \in C$ mevcuttur. Ayrıca her $r > 0$ ve $x \in H$ için

$$T_r x = \left\{z \in C: F(z,y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq 0, \;\; \forall y \in C\right\}$$

olarak tanımlanırsa aşağıdakiler geçerlidir.

(a) T_r tek değerlidir;

(b) T_r sıkı genişlemeyendir yani her $x, y \in C$ için

$$\|T_r x - T_r y\|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y\rangle$$

dir;

(c) $F(T_r) = EP(F)$ dir;

(d) $EP(F)$, kapalı ve konvekstir (Blum, E., Oettli, W. 1994).

Lemma 4.1.2: C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan konveks ve kapalı alt kümesi olsun. $F: C \times C \to \mathbb{R}$, (I1)-(I4) şartlarını sağlayan bifonksiyon ve T_r, Lemma 4.1.1 deki gibi tanımlı olsun. Bu durumda

$$\|T_s x - T_t x\| \leq \frac{|s-t|}{s} |T_s x - x|$$

dir (Takahashi, S., Takahashi, W. 2007).

İspat: $u = T_s x$ ve $v = T_t x$ dersek $F(u,v) + \frac{1}{s}\langle v-u, u-x\rangle \geq 0$ ve $F(v,u) + \frac{1}{t}\langle u-v, v-x\rangle \geq 0$ olur. Böylece

$$\frac{1}{s}\langle v-u, u-x\rangle + \frac{1}{t}\langle u-v, v-x\rangle \geq 0$$

olup bu $\langle u-v, u-x-\frac{t}{s}(u-x)\rangle \geq 0$ olmasını gerektirir. Buradan

$$\|u-v\|^2 \leq \frac{s-t}{s}\langle u-v, u-x\rangle$$

çıkar. Bu ise lemmayı ispatlar.

Yunpeng Zhang ve Yanling Li, kesin pseudocontractionların sabit nokta kümelerinin ortak bir elemanı ile genelleştirilmiş denge problemlerinin çözüm kümelerinin ortak çözümüne yaklaşma problemini ele almış ve aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Teorem 4.1.3: C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan konveks ve kapalı alt kümesi, $A: C \to H$ bir α-ters kuvvetli monoton dönüşüm ve $F: C \times C \to \mathbb{R}$ de (I1)-(I4) şartlarını sağlayan bifonksiyon olsun. $S: C \to C$ κ-kesin pseudocontraction ve $f: C \to C$ bir μ-daraltan dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $F(S) \cap EP(F, A) \neq \emptyset$ dir. Ayrıca (r_n) bir pozitif reel dizi ve (α_n), (β_n), (δ_n) ve (λ_n) de $(0,1)$ aralığında reel diziler olsun. (x_n) aşağıdaki iterasyon şeması ile üretilmiş bir dizi olsun:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ F\,(y_n, y) + \langle Ax_n, y - y_n \rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle y - y_n, y_n - x_n \rangle \geq 0, \ \ \forall y \in C, \\ x_{n+1} \ = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n(\lambda_n y_n + (1-\lambda_n)Sy_n) + \delta_n e_n. \end{cases}$$

Burada (e_n), C de sınırlı bir dizidir. Kontrol dizilerinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

a. $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n = 1$,
b. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$,
c. $0 < \liminf_{n\to\infty}\beta_n \leq \limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1$,
d. $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty}|r_{n+1} - r_n| = \lim_{n\to\infty}|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 0$ ve
e. λ, r, r' reel sabitleri için $0 < \kappa < \lambda_n \leq \lambda < 1$ ve $0 < r \leq r_n \leq r' < 2\alpha$ dır.

Bu durumda (x_n), $\bar{x} = P_{F(S)\cap EP(F,A)} f(\bar{x})$ ye güçlü yakınsar (Zhang, Y., Li, Y. 2016).

İspat: Öncelikle (x_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. $p \in F(S) \cap EP(F, A)$ keyfi sabit olsun. Herhangi $x, y \in C$ için

$$\begin{aligned} \|(I - r_nA)x - (I - r_nA)y\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2r_n\langle x - y, Ax - Ay \rangle + r_n^2\|Ax - Ay\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - r_n(2\alpha - r_n)\|Ax - Ay\|^2 \end{aligned}$$

olur. e şartı kullanılarak $\|(I - r_nA)x - (I - r_nA)y\| = \|x - y\|$ olduğu görülür. Bu $I - r_nA$ nin genişlemeyen olduğunu gösterir. $S_n = \lambda_n I + (1-\lambda_n)S$ denirse Lemma 3.3.2 den S_n genişlemeyen ve $F(S_n) = F(S)$ dir. Böylece

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \alpha_n\|f(x_n) - p\| + \beta_n\|x_n - p\| + \gamma_n\|S_n y_n - p\| + \delta_n\|e_n - p\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \alpha_n\mu\|x_n - p\| + \alpha_n\|f(p) - p\| + \beta_n\|x_n - p\| + \gamma_n\|y_n - p\| + \delta_n\|e_n - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n(1-\mu))\|x_n - p\| + \alpha_n\|f(p) - p\| + \delta_n\|e_n - p\| \\
&\leq \max\left\{\|x_n - p\|, \tfrac{\|f(p)-p\|}{1-\mu}\right\} + \delta_n\|e_n - p\| \\
&\leq \max\left\{\|x_{n-1} - p\|, \tfrac{\|f(p)-p\|}{1-\mu}\right\} + \delta_{n-1}\|e_{n-1} - p\| + \delta_n\|e_n - p\| \\
&\leq \cdots \\
&\leq \max\left\{\|x_1 - p\|, \tfrac{\|f(p)-p\|}{1-\mu}\right\} + M\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{i_n}
\end{aligned}
$$

olur. Burada $M = \sup\limits_{n\geq 1}\{\|e_n - p\|\}$ dir. Bu ise (x_n) ve aynı zamanda (y_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. $z_n = (I - r_nA)x_n$ dersek

$$
\begin{aligned}
\|z_{n+1} - z_n\| &\leq \|(I - r_{n+1}A)x_{n+1} - (I - r_{n+1}A)x_n\| \\
&\quad + \|(I - r_{n+1}A)x_n - (I - r_nA)x_n\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x_n\| - |r_{n+1} - r_n|\|Ax_n\|
\end{aligned}
$$

olur. Lemma 4.1.2 den

$$
\begin{aligned}
\|y_{n+1} - y_n\| &= \left\|T_{r_{n+1}}z_{n+1} - T_{r_n}z_n\right\| \\
&\leq \left\|T_{r_{n+1}}z_{n+1} - T_{r_{n+1}}z_n\right\| + \left\|T_{r_{n+1}}z_n - T_{r_n}z_n\right\| \\
&\leq \|z_{n+1} - z_n\| + \tfrac{|r_{n+1}-r_n|}{r_{n+1}}\left\|T_{r_{n+1}}z_n - z_n\right\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x_n\| + |r_{n+1} - r_n|\|Ax_n\| + \tfrac{|r_{n+1}-r_n|}{r_{n+1}}\left\|T_{r_{n+1}}z_n - z_n\right\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\|S_{n+1}y_{n+1} - S_ny_n\| &\leq \|S_{n+1}y_{n+1} - S_{n+1}y_n\| + \|S_{n+1}y_n - S_ny_n\| \\
&\leq \|y_{n+1} - y_n\| + \|S_{n+1}y_n - S_ny_n\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x_n\| + |r_{n+1} - r_n|\|Ax_n\| \\
&\quad + \frac{|r_{n+1} - r_n|}{r_{n+1}}\left\|T_{r_{n+1}}z_n - z_n\right\| \\
&\quad + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|\|Sy_n - y_n\| \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

olur. $\zeta_n = \frac{x_{n+1}-\beta_nx_n}{1-\beta_n}$ olsun. Buradan

$$\zeta_{n+1}-\zeta_n=\frac{\alpha_{n+1}f(x_{n+1})+\gamma_{n+1}S_{n+1}y_{n+1}+\delta_{n+1}e_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}$$
$$-\frac{\alpha_n f(x_n)+\gamma_n S_n y_n+\delta_n e_n}{1-\beta_n}$$
$$=\frac{\alpha_{n+1}(f(x_{n+1})-S_{n+1}y_n)+(1-\beta_{n+1})S_{n+1}y_{n+1}+\delta_{n+1}(e_{n+1}-S_{n+1}y_n)}{1-\beta_{n+1}}$$
$$-\frac{\alpha_n(f(x_n)-S_n y_n)+(1-\beta_n)S_n y_n+\delta_n(e_n-S_n y_n)}{1-\beta_n}$$
$$=\frac{\alpha_{n+1}(f(x_{n+1})-S_{n+1}y_{n+1})}{1-\beta_{n+1}}+\frac{\delta_{n+1}(e_{n+1}-S_{n+1}y_{n+1})}{1-\beta_{n+1}}$$
$$-\frac{\alpha_n(f(x_n)-S_n y_n)}{1-\beta_n}-\frac{\delta_n(e_n-S_n y_n)}{1-\beta_n}+S_{n+1}y_{n+1}-S_n y_n$$

yazılır. (4.4) den

$$\|\zeta_{n+1}-\zeta_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|$$
$$\leq\frac{\alpha_{n+1}\|f(x_{n+1})-S_{n+1}y_{n+1}\|}{1-\beta_{n+1}}+\frac{\delta_{n+1}\|e_{n+1}-S_{n+1}y_{n+1}\|}{1-\beta_{n+1}}$$
$$+\frac{\alpha_n\|f(x_n)-S_n y_n\|}{1-\beta_n}+\frac{\delta_n\|e_n-S_n y_n\|}{1-\beta_n}\|x_{n+1}-x_n\|$$
$$+|r_{n+1}-r_n|\|Ax_n\|+\frac{|r_{n+1}-r_n|}{r_{n+1}}\left\|T_{r_{n+1}}z_n-z_n\right\|$$
$$+|\lambda_{n+1}-\lambda_n|\|Sy_n-y_n\|$$

ve b-e şartlarından

$$\limsup_{n\to\infty}(\|\zeta_{n+1}-\zeta_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|)\leq 0$$

yazılabilir. Lemma 3.3.3 den $\lim_{n\to\infty}\|\zeta_n-x_n\|=0$ olur ki buradan

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0 \qquad (4.5)$$

dır.

$$\|y_n-p\|^2\leq\|(x_n-p)-r_n(Ax_n-Ap)\|^2$$
$$=\|x_n-p\|^2-2r_n\langle x_n-p,Ax_n-Ap\rangle+r_n^2\|Ax_n-Ap\|^2$$

$$\leq \|x_n - p\|^2 - r_n(2\alpha - r_n)\|Ax_n - Ap\|^2 \tag{4.6}$$

olduğuna dikkat edelim. $\|\cdot\|^2$ konveks olduğundan (4.6) dan

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 &\leq \alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 + \beta_n\|x_n - p\|^2 + \gamma_n\|S_n y_n - p\|^2 + \delta_n\|e_n - p\|^2 \\
&\leq \alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 + \beta_n\|x_n - p\|^2 + \gamma_n\|y_n - p\|^2 + \delta_n\|e_n - p\|^2 \\
&\leq \alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 + \|x_n - p\|^2 - r_n(2\alpha - r_n)\gamma_n\|Ax_n - Ap\|^2 \\
&\quad +\delta_n\|e_n - p\|^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise

$$\begin{aligned}
&r_n(2\alpha - r_n)\gamma_n\|Ax_n - Ap\|^2 \\
&\quad \leq \|x_n - p\|^2 + \alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 + \delta_n\|e_n - p\|^2 \\
&\quad \leq (\|x_n - p\| - \|x_{n+1} - p\|)\|x_{n+1} - x_n\| + \alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 + \delta_n\|e_n - p\|^2
\end{aligned}$$

sonucunu verir. b-e şartları göz önüne alındığında (4.5) den

$$\lim_{n\to\infty}\|Ax_n - Ap\| = 0 \tag{4.7}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\|^2 &= \left\|T_{r_n}(x_n - r_nAx_n) - T_{r_n}(p - r_nAp)\right\|^2 \\
&\leq \langle (x_n - r_nAx_n) - (p - r_nAp), y_n - p\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}(\|(x_n - r_nAx_n) - (p - r_nAp)\|^2 + \|y_n - p\|^2 \\
&\quad -(\|(x_n - r_nAx_n) - (p - r_nAp) - (y_n - p)\|^2) \\
&\leq \tfrac{1}{2}(\|x_n - p\|^2 + \|y_n - p\|^2 - (\|x_n - y_n - r_n(Ax_n - Ap)\|^2) \\
&\leq \tfrac{1}{2}(\|x_n - p\|^2 + \|y_n - p\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - r_n^2(\|Ax_n - Ap\|^2 \\
&\quad +2r_n\|x_n - y_n\|\|Ax_n - Ap\|) \\
&\leq \tfrac{1}{2}(\|x_n - p\|^2 + \|y_n - p\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 + 2r_n\|x_n - y_n\|\|Ax_n - Ap\|)
\end{aligned}$$

yani

$$\|y_n - p\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 + 2r_n\|x_n - y_n\|\|Ax_n - Ap\|)$$

yazılır. Ayrıca bu

$$\|x_{n+1} - p\|^2 \leq \alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 + \beta_n\|x_n - p\|^2 + \gamma_n\|S_n y_n - p\|^2 + \delta_n\|e_n - p\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 + \gamma_n \|y_n - p\|^2 + \delta_n \|e_n - p\|^2 \\
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - p\|^2 + \|x_n - p\|^2 - \gamma_n \|x_n - y_n\|^2 + \delta_n \|e_n - p\|^2 \\
&\quad +2r_n\gamma_n \|x_n - y_n\| \|Ax_n - Ap\|
\end{aligned}
$$

ve bu son ifade de

$$
\begin{aligned}
\gamma_n \|x_n - y_n\|^2 &\leq \alpha_n \|f(x_n) - p\|^2 + \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 \\
&\quad +2r_n\gamma_n \|x_n - y_n\| \|Ax_n - Ap\| + \delta_n \|e_n - p\|^2 \\
&\leq \alpha_n \|f(x_n) - p\|^2 + (\|x_n - p\| + \|x_{n+1} - p\|)\|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad +2r_n\gamma_n \|x_n - y_n\| \|Ax_n - Ap\| + \delta_n \|e_n - p\|^2
\end{aligned}
$$

olmasını gerektirir. b-e şartları göz önüne alındığında, (4.5) ve (4.7) den

$$
\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - y_n\| = 0 \tag{4.8}
$$

olur. Not edelim ki

$$
\gamma_n(Sy_n - x_n) = (x_{n+1} - x_n) + \alpha_n\big(x_n - f(x_n)\big) + \delta_n(x_n - e_n)
$$

dir. b-d şartlarını kullanarak (4.5) den

$$
\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - S_n y_n\| = 0 \tag{4.9}
$$

olur. $\|S_n x_n - x_n\| \leq \|S_n x_n - S_n y_n\| + \|S_n y_n - x_n\|$ ve S_n genişlemeyen olduğundan (4.8) ve (4.9) dan

$$
\lim_{n\to\infty} \|x_n - S_n x_n\| = 0 \tag{4.10}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\|S_n x_n - x_n\| &\leq \|S_n x_n - (\lambda_n x_n + (1-\lambda_n)Sx_n)\| + \|(\lambda_n x_n + (1-\lambda_n)Sx_n) - x_n\| \\
&\leq \lambda_n \|S_n x_n - x_n\| + \|S_n x_n - x_n\|
\end{aligned}
$$

dir. (4.10) ve e şartından

$$
\lim_{n\to\infty} \|x_n - Sx_n\| = 0 \tag{4.11}
$$

olur. Şimdi $\limsup_{n\to\infty}\langle f(\bar{x})-\bar{x},x_n-\bar{x}\rangle\leq 0$ olduğunu gösterelim. Burada

$$\bar{x}=\ P_{F(S)\cap EP(F,A)}f(\bar{x})$$

dir. Bunu göstermek için

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(\bar{x})-\bar{x},x_n-\bar{x}\rangle=\lim_{i\to\infty}\langle f(\bar{x})-\bar{x},x_{n_i}-\bar{x}\rangle$$

olacak şekilde (x_n) nin bir $\left(x_{n_i}\right)$ alt dizisini seçelim. $\left(x_{n_i}\right)$ sınırlı olduğundan bu dizinin bir x noktasına zayıf yakınsayan $\left(x_{n_{i_j}}\right)$ alt dizisini seçilebilir. Genelliği bozmadan $\left(x_{n_i}\right)$ nin x noktasına zayıf yakınsadığını kabul edebiliriz. Şimdi $x\in F(S)\cap EP(F,A)$ olduğunu göstermeliyiz. Lemma 3.3.1 i kullanarak $x\in F(S)$ olduğunu görürüz. Şimdi $x\in EP(F,A)$ olduğunu gösterelim. (4.8) den $\left(y_{n_i}\right)$ nin x noktasına zayıf yakınsadığını görürüz. Buradan

$$F\ (y_n,y)+\langle Ax_n,y-y_n\rangle+\frac{1}{r_n}\langle y-y_n,y_n-x_n\rangle\geq 0,\ \ \forall y\in C$$

dir. (I2) şartından

$$\langle Ax_n,y-y_n\rangle+\frac{1}{r_n}\langle y-y_n,y_n-x_n\rangle\geq F\ (y,y_n),\ \ \forall y\in C$$

dir. n yerine n_i alınırsa

$$\langle Ax_{n_i},y-y_{n_i}\rangle+\frac{1}{r_n}\langle y-y_{n_i},\frac{y_{n_i}-x_{n_i}}{r_{n_i}}\rangle\geq F\left(y,y_{n_i}\right),\ \ \forall y\in C \tag{4.12}$$

eşitsizliği elde edilir. $0<t\leq 1$ ve $y\in C$ için $u_t=ty+(1-t)x$ olsun. $y\in C$ ve $x\in C$ olduğundan $u_t\in C$ dir. (4.12) den

$$\begin{aligned}\langle u_t-y_{n_i},Au_t\rangle &\geq\langle u_t-y_{n_i},Au_t\rangle-\langle Ax_{n_i},u_t-y_{n_i}\rangle\\ &\quad-\langle u_t-y_{n_i},\frac{y_{n_i}-x_{n_i}}{r_{n_i}}\rangle+F\left(u_t,y_{n_i}\right)\\ &=\langle u_t-y_{n_i},Au_t-Ay_{n_i}\rangle+\langle u_t-y_{n_i},Ay_{n_i}-Ax_{n_i}\rangle\\ &\quad-\langle u_t-y_{n_i},\frac{y_{n_i}-x_{n_i}}{r_{n_i}}\rangle+F\left(u_t,y_{n_i}\right)\end{aligned}$$

bulunur. A monoton olduğundan $\langle u_t - y_{n_i}, Au_t - Ay_{n_i}\rangle \geq 0$ dır. I4 şartını kullanarak

$$\langle u_t - x, Au_t\rangle \geq F\ (u_t, x) \tag{4.13}$$

ifadesine ulaşılır. (I1) ve (I4) şartları kullanılarak (4.13) den

$$\begin{aligned} 0 = F\ (u_t, u_t) &\leq tF\ (u_t, y) + \langle 1-t\rangle F\ (u_t, x) \\ &\leq tF\ (u_t, y) + \langle 1-t\rangle\langle u_t - x, Au_t\rangle \\ &= tF\ (u_t, u) + \langle 1-t\rangle t\langle y - x, Au_t\rangle \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $F\ (u_t, y) + \langle 1-t\rangle\langle y - x, Au_t\rangle \geq 0$ olup $t \to 0$ için limit alınırsa

$$F(x, y) + \langle y - x, Ax\rangle \geq 0$$

bulunur ki bu $x \in EP(F, A)$ olmasını gerektirir. Buradan

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(\bar{x}) - \bar{x}, x_n - \bar{x}\rangle \leq 0$$

çıkar. Not edelim ki

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 &\leq \alpha_n\langle f(x_n) - \bar{x}, x_{n+1} - \bar{x}\rangle + \beta_n\|x_n - \bar{x}\|\|x_{n+1} - \bar{x}\| \\ &\quad +\gamma_n\|S_n y_n - \bar{x}\|\|x_{n+1} - \bar{x}\| + \delta_n\|e_n - \bar{x}\|\|x_{n+1} - \bar{x}\| \\ &\leq \alpha_n\langle f(x_n) - f(\bar{x}), x_{n+1} - \bar{x}\rangle + \alpha_n\langle f(\bar{x}) - \bar{x}, x_{n+1} - \bar{x}\rangle \\ &\quad +\beta_n\|x_n - \bar{x}\|\|x_{n+1} - \bar{x}\| + \gamma_n\|x_n - \bar{x}\|\|x_{n+1} - \bar{x}\| \\ &\quad +\delta_n\|e_n - \bar{x}\|\|x_{n+1} - \bar{x}\| \\ &\leq \tfrac{\alpha_n\mu + \beta_n + \gamma_n}{2}(\|x_n - \bar{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \bar{x}\|^2) + \alpha_n\langle f(\bar{x}) - \bar{x}, x_{n+1} - \bar{x}\rangle \\ &\quad +\tfrac{\delta_n}{2}(\|e_n - \bar{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \bar{x}\|^2) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 \leq \big(1 - \alpha_n(1-\mu)\big)\|x_n - \bar{x}\|^2 + 2\alpha_n\langle f(\bar{x}) - \bar{x}, x_{n+1} - \bar{x}\rangle + \delta_n\|e_n - \bar{x}\|$$

elde edilir. Lemma 3.3.7 kullanılarak $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \bar{x}\| = 0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

4.2. Parçalı Eşitlik Genelleştirilmiş Karışık Denge Problemi İçin Güçlü ve Zayıf Yakınsama Teoremleri

(4.3) Denge problemi ilk olarak (Blum, E., Oettli, W. 1994) tarafından geniş olarak çalışılmıştır. 2014 yılında Ahmad ve Rahaman, her $y, z \in C$ ve $\lambda \in (0,1]$ için

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y, z) \nsubseteq -C\backslash\{0\}$$

olmak üzere bir $x \in C$ noktasını bulma şeklindeki genelleştirilmiş vektör denge problemini oluşturmuşlardır. Burada $F: C \times C \to 2^H$, $F(\lambda x + (1-\lambda)y, x) \supseteq \{0\}$ şartını sağlayan küme değerli bir dönüşümdür. Skalar halde genelleştirilmiş denge problemi, her $y, z \in C$ ve $\lambda \in (0,1]$ için $F(\lambda x + (1-\lambda)z, x) = 0$ şartı ile

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y, z) \geq 0 \tag{4.14}$$

olacak şekilde bir $x \in C$ noktasını bulma formunu alır. Eğer $\lambda = 1$ ise (4.14) problemi (4.3) problemine indirgenir.

$T: C \to C$ sürekli bir dönüşüm ve $\phi: C \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. (Rahaman vd. 2015), her $y, z \in C$ ve $\lambda \in (0,1]$ için

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y, z) + \langle Tx, y - x\rangle + \phi(y) - \phi(x) \geq 0 \tag{4.15}$$

olmak üzere bir $x \in C$ noktasını bulma şeklindeki genelleştirilmiş karışık denge problemini göz önüne almışlardır. (4.15) probleminin çözüm kümesi $GMEP(F, T, \phi)$ ile gösterilir.

H_1, H_2 ve H_3 reel Hilbert uzayları, C ve Q sırasıyla H_1 ve H_2 nin boş olmayan kapalı ve konveks alt kümeleri olsun. $F: C \times C \to \mathbb{R}$ ve $G: Q \times Q \to \mathbb{R}$ bifonksiyonlar, $T: C \to C$ ve $S: Q \to Q$ nonlineer dönüşüm, $\phi: C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ve $\varphi: Q \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $C \cap dom\phi \neq \emptyset$ ve $Q \cap dom\varphi \neq \emptyset$ olacak şekilde has alttan yarı sürekli konveks dönüşümler, $A: H_1 \to H_3$ ve $B: H_2 \to H_3$ sınırlı lineer dönüşüm olsun. (Rahaman vd. 2015), her $x, b \in C$, $y, c \in Q$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1]$ için

$$\begin{gathered} F(\lambda_1 x^* + (1-\lambda_1)b, x) + \langle Tx^*, x - x^*\rangle + \phi(x) - \phi(x^*) \geq 0, \\ G(\lambda_2 y^* + (1-\lambda_2)c, y) + \langle Sy^*, y - y^*\rangle + \varphi(y) - \varphi(y^*) \geq 0 \text{ ve} \end{gathered} \tag{4.16}$$

$$Ax^* = By^*$$

olacak şekilde $x^* \in C$ ve $y^* \in Q$ bulma şeklinde tanımlanan parçalı eşitlik genelleştirilmiş karışık denge problemini teşkil etmişlerdir $(SEGMEP)$. (4.16) probleminin çözüm kümesi $SEGMEP(F, G, T, S, \phi, \varphi)$ ile gösterilir. Bu problem diğer tüm problemleri aşağıda ki şekillerde genelleştirir. (4.16) ile tanımlı $SEGMEP$ probleminde

(1) $T = S = 0$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ alınırsa, $(SEGMEP)$ parçalı eşitlik genelleştirilmiş karışık denge problemi $(SEMEP)$ parçalı eşitlik karışık denge problemine indirgenir. Ma vd. tarafından teşkil edilen $(SEMEP)$ problemi,

$$\begin{aligned} &F(x^*, x) + \phi(x) - \phi(x^*) \geq 0, \ \forall x \in C, \\ &G(y^*, y) + \varphi(y) - \varphi(y^*) \geq 0, \ \forall y \in Q \ \text{ ve} \\ &Ax^* = By^* \end{aligned} \tag{4.17}$$

olacak şekilde $x^* \in C$ ve $y^* \in Q$ bulma şeklinde tanımlıdır.

(2) $T = S = \phi = \varphi = 0, B = I, H_2 = H_3$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ alınırsa, (4.16) problemi (He 2012) tarafından teşkil edilen (SEP) parçalı denge problemine indirgenir. (SEP) problemi, her $x \in C$ ve $y \in Q$ için

$$\begin{aligned} &F(x^*, x) \geq 0 \ \text{ ve} \\ &Ax^* = y^* \in Q, G(y^*, y) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

olacak şekilde $x^* \in C$ bulma şeklinde tanımlanır.

(3) $T = S = \phi = \varphi = 0$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ alınırsa, (4.16) problemi $(SEEP)$ parçalı eşitlik denge problemine indirgenir. $(SEEP)$ problemi,

$$\begin{aligned} &F(x^*, x) \geq 0, \ \forall x \in C, \\ &G(y^*, y) \geq 0, \ \forall y \in Q \ \text{ ve} \\ &Ax^* = By^* \end{aligned} \tag{4.19}$$

olacak şekilde $x^* \in C$ ve $y^* \in Q$ bulma şeklinde tanımlanır.

(4) $F = G = T = S = 0$ alınırsa, (4.16) problemi $(SECMP)$ parçalı eşitlik konveks minimizasyon problemine indirgenir. $(SECMP)$ problemi,

$$\phi(x) \geq \phi(x^*),\ \forall x \in C;\ \varphi(y) \geq \varphi(y^*),\ y \in Q \text{ ve } Ax^* = By^* \tag{4.20}$$

olacak şekilde $x^* \in C$ ve $y^* \in Q$ bulma şeklinde tanımlanır.

(5) $F = G = T = S = 0$, $B = I$ ve $H_2 = H_3$ alınırsa, (4.16) problemi $(SCMP)$ parçalı konveks minimizasyon problemine indirgenir. $(SCMP)$ problemi,

$$\phi(x) \geq \phi(x^*),\ \forall x \in C;\ \varphi(y) \geq \varphi(y^*),\ y \in Q \text{ ve } Ax^* = y^* \in Q \tag{4.21}$$

olacak şekilde $x^* \in C$ bulma şeklinde tanımlanır.

(6) $F = G = \phi = \varphi = T = S = 0$ alınırsa, (4.16) problemi (SEP) parçalı denge problemine indirgenir. (SEP) problemi,

$$x^* \in C \text{ ve } y^* \in Q \text{ için } Ax^* = By^* \tag{4.22}$$

olacak şekilde x^*ve y^* bulma şeklinde tanımlanır.

(7) $F = G = \phi = \varphi = T = S = 0$, $B = I$ ve $H_2 = H_3$ alınırsa, (4.16) problemi (SFP) parçalı fizibilite problemine indirgenir. (SFP) problemi,

$$x^* \in C \text{ ve } Ax^* \in Q \tag{4.23}$$

olacak şekilde bir x^* bulma şeklinde tanımlanır. Bu problem, (Censor ve Elfving 1994) tarafından teşkil edilmiştir.

Şimdi yukarıdaki problemlerle ilgili öne çıkan bazı çalışmaları verelim:

2015 yılında Ma vd., $(SEMEP)$ için güçlü ve zayıf yakınsama teoremleri elde etmek amacıyla aşağıdaki eşzamanlı iteratif algoritmayı teşkil ettiler: Her $u \in C,\ v \in Q$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{cases} F(u_n, u) + \phi(u) - \phi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \\ G(v_n, v) + \varphi(v) - \varphi(v_n) + \frac{1}{r_n}\langle v - v_n, v_n - y_n\rangle \geq 0, \\ x_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n)T\left(u_n - \gamma_n A^*(Au_n - Bv_n)\right), \\ y_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n)S\left(v_n - \gamma_n B^*(Au_n - Bv_n)\right). \end{cases} \tag{4.24}$$

Burada $T: H_1 \to H_1$ ve $S: H_2 \to H_2$, genişlemeyen dönüşümlerdir. Aynı yıl (Rahaman vd. 2015), (4.24) algoritmasının bir genellemesi olarak aşağıdaki metodu vermişlerdir. Her $u, b \in C,\ v, c \in Q$ ve $n \geq 1$ için

$$\begin{cases} F\,(\lambda_1 u_n + (1-\lambda_1)b, u) + \ \phi(u) - \phi\,(u_n) + \langle Tu_n, u - u_n \rangle \\ \qquad + \frac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \\ G(\lambda_2 v_n + (1-\lambda_2)c, v) + \ \varphi(v) - \varphi\,(v_n) + +\langle Sv_n, v - v_n \rangle \\ \qquad + \frac{1}{r_n}\langle v - v_n, v_n - y_n \rangle \geq 0, \\ x_{n+1} \ = (1-\alpha_n)(u_n - \delta_n A^*(Au_n - \ Bv_n) + \alpha_n P\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - \ Bv_n)\big)\,, \\ y_{n+1} \ = (1-\alpha_n)(v_n + \delta_n B^*(Au_n - \ Bv_n) + \alpha_n Q\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - \ Bv_n)\big). \end{cases} \tag{4.25}$$

Burada $P: H_1 \to H_1$ ve $Q: H_2 \to H_2$, iki demi-daraltan dönüşümdür. Yazarlar (4.25) algoritması ile üretilmiş $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisinin uygun şartlar altında (4.16) parçalı eşitlik genelleştirilmiş karışık denge probleminin çözümüne zayıf ve güçlü yakınsadığını ispat etmişlerdir.

2016 yılında Karahan, (4.25) algotritmasından esinlenerek parçalı eşitlik genelleştirilmiş karışık denge problemi için zayıf ve güçlü yakınsama sonuçları elde etmek amacıyla modifiye bir algoritma oluşturdu. Ayrıca parçalı eşitlik problemi, parçalı fizibilite problemi, parçalı eşitlik karışık konveks diferansiyellenebilir optimizasyon problemi, parçalı eşitlik konveks minimizasyon problemi ve parçalı eşitlik karışık denge problemi için bazı sonuç ve uygulamalar verdi. Karahan'ın elde ettiği sonuçlar, birçok yazarın karşılık gelen sonuçlarını genelleştirmektedir.

$F: C \times C \to \mathbb{R}$ bifonksiyonunun ve $T: C \to C$, $\phi: C \to \mathbb{R}$ dönüşümlerinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim.

(A1) Her $x \in C$ için $F\,(\lambda x + (1-\lambda)b, x) = 0$ dır.

(A2) F monotondur yani her $x, y \in C$ için

$$F\,(\lambda x + (1-\lambda)b, y) + F\,(\lambda y + (1-\lambda)b, x) \leq 0$$

dır.

(A3) T monotondur yani her $x, y \in C$ için $\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0$ dır.

(A4) Her $x \in C$ için $y \longmapsto F\ (\lambda x + (1-\lambda)b, y)$, konveks ve alttan yarı süreklidir.

(A5) F, ilk bileşenine göre hemi süreklidir.

(A6) T, zayıf üstten yarı süreklidir.

(A7) Her $x \in C, \lambda \in (0,1]$ ve $r > 0$ için sınırlı bir $D \subseteq C$ alt kümesi ve $a \in C$ mevcuttur, öyle ki herhangi bir $z \in C \backslash D$ ve her $b \in C$ için

$$-F\ (\lambda a + (1-\lambda)b, z) + \langle Tz, a - z\rangle + \phi(a) - \phi\ (z) + \frac{1}{r}\langle a - z, z - x\rangle < 0$$

dır.

Lemma 4.2.1: C, bir H_1 Hilbert uzayının boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F: C \times C \to \mathbb{R}$ bifonksiyonu ve $T: C \to C$ dönüşümünün (A1)-(A7) şartlarını sağladığını kabul edelim. $\phi: C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $C \cap dom\phi = \emptyset$ olacak şekilde bir has alttan yarısürekli ve konveks fonksiyon olsun. $r > 0$, $\lambda_1 \in (0,1]$ ve $x \in H_1$ için

$$J_r^{F,T}(x) = \left\{ \begin{matrix} z \in C:\ F\ (\lambda_1 z + (1-\lambda_1)b, y) + \langle Tz, y - z\rangle + \phi(y) - \phi\ (z) \\ + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq 0, \ \ \forall b, y \in C \end{matrix} \right\} \tag{4.26}$$

şeklinde tanımlı $J_r^{F,T}: H_1 \to C$ bir operatör, F ve T nin rezolvent operatörü olsun. Bu durumda

i) Her $x \in H_1$ için $J_r^{F,T} \neq \emptyset$ dir.

ii) $J_r^{F,T}$ tek değerlidir.

iii) $J_r^{F,T}$ sıkı genişlemeyendir. Yani her $x, y \in H_1$ için $\left\|J_r^{F,T}x - J_r^{F,T}y\right\|^2 \leq \langle J_r^{F,T}x - J_r^{F,T}y, x - y\rangle$ dir

iv) $F(J_r^{F,T}) = \ GMEP\ (F, T, \phi)$ ve $F(J_r^{F,T})$, kapalı ve konvekstir (Rahaman vd. 2015),

$G: Q \times Q \to \mathbb{R}$ bifonksiyonu ve $S: Q \to Q$ dönüşümü (A1)-(A7) şartlarını sağlasın. $\varphi: Q \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $Q \cap dom\varphi = \emptyset$ olacak şekilde bir has alttan yarısürekli ve konveks fonksiyon olsun. $s > 0$, $\lambda_2 \in (0,1]$ ve $u \in H_1$ için $J_s^{G,S}: H_2 \to Q$,

$$J_s^{G,S}(u) = \left\{ \begin{matrix} v \in Q: \; G\,(\lambda_2 v + (1-\lambda_2)c, w) + \langle Sv, w - v\rangle + \varphi(w) - \varphi\,(v) \\ + \frac{1}{s}\langle w - v, v - u\rangle \geq 0, \;\; \forall w, c \in Q \end{matrix} \right\} \quad (4.27)$$

şeklinde tanımlı $J_s^{G,S}$ operatörü, G ve S nin rezolvent operatörü olsun. Bu durumda $J_s^{G,S}$ nin Lemma 4.2.1 in (i)-(iv) şartlarını sağladığı ve $F(J_s^{G,S}) = GMEP\;(G,S,\varphi)$ olduğu açıktır.

Karahan, 2016 da parçalı eşitlik genelleştirilmiş karışık denge problemini çözmek için aşağıdaki yeni bir modifiye iteratif algoritma vermiş ve bu algoritmanın yakınsaklığını ispat etmek için

(B1) H_1, H_2 ve H_3 reel Hilbert uzayları, $C \subseteq H_1$ ve $Q \subseteq H_2$ boş olmayan kapalı konveks alt kümelerdir.

(B2) $F: C \times C \to \mathbb{R}$ ve $G: Q \times Q \to \mathbb{R}$ bifonksiyonları (A1), (A2), (A4), (A5) ve (A7) şartlarını sağlar.

(B3) $T: C \to C$ ve $S: Q \to Q$ dönüşümleri (A3), (A6) ve (A7) şartlarını sağlar.

(B4) $\phi: C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ve $\varphi: Q \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $C \cap dom\phi = \emptyset$ ve $Q \cap dom\varphi = \emptyset$ olacak şekilde has alttan yarı sürekli ve konveks fonksiyonlardır.

(B5) $P_1, P_2 : H_1 \to H_1$ ve $P_3, P_4: H_2 \to H_2$, genişlemeyen dönüşümlerdir.

(B6) $A: H_1 \to H_3$ ve $B:\; H_2 \to H_3$, sınırlı lineer dönüşümlerdir.

şartlarını sağladığını kabul etmiştir. Keyfi bir $(x_1, y_1) \in C \times Q$ başlangıç değeri için $C \times Q$ daki $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi her $u, b \in C,\;\; v, c \in Q$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1]$ için

$$\begin{cases} F(\lambda_1 u_n + (1-\lambda_1)b, u) + \phi(u) - \phi(u_n) + \langle Tu_n, u - u_n\rangle \\ \quad + \frac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \\ G(\lambda_2 v_n + (1-\lambda_2)c, v) + \varphi(v) - \varphi(v_n) + \langle Sv_n, v - v_n\rangle \\ \quad + \frac{1}{r_n}\langle v - v_n, v_n - y_n\rangle \geq 0, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) + \alpha_n P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big), \\ y_{n+1} = (1-\alpha_n)P_3\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) + \alpha_n P_4\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) \end{cases} \quad (4.28)$$

olarak tanımlanmış olsun. Burada (δ_n), (α_n) ve (r_n) aşağıdaki şekilde tanımlanan dizilerdir.

(C1) (δ_n), yeterince küçük bir ε için $\delta_n \in \left(\varepsilon, \frac{2}{\lambda_A - \lambda_B} - \varepsilon\right)$ olacak şekilde pozitif reel dizidir. Burada λ_A ve λ_B ise sırasıyla A^*A ve B^*B nin spektral yarıçaplarıdır.

(C2) (α_n), uygun $\alpha, \beta \in (0,1)$ için $0 < \alpha \leq \alpha_n \leq \beta < 1$ şartını sağlayan dizidir.

(C3) $(r_n) \subset (0, \infty)$ dizisi de $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n > 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$ şartlarını sağlar.

Teorem 4.2.2: H_1, H_2, H_3, F, G, T, S, P_1, P_2, P_3, P_4, ϕ, φ, A ve B, (B1)-(B6) şartlarını sağlasın ve $\big((x_n, y_n)\big)$, (4.28) ile üretilmiş bir dizi olsun. Eğer $\mathcal{F} \coloneqq \bigcap_{i=1}^{4} F(P_i) \cap SEGMEP\ (F, G, P_i, \phi, \varphi) \neq \emptyset$ ise bu durumda

(i) $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.16) probleminin çözümüne zayıf yakınsar.

(ii) Eğer $i = 1,2,3,4$ için P_i ler demikompakt ise $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.16) probleminin çözümüne güçlü yakınsar (Karahan, İ. 2016).

İspat: (i) $(x, y) \in \mathcal{F}$ olsun. Bu halde $x \in F(P_1) \cap F(P_2)$ ve $y \in F(P_3) \cap F(P_4)$ olup Lemma 4.2.1 den

$$\|u_n - x\| = \left\|J_{r_n}^{F,T}(x_n) - J_{r_n}^{F,T}(x)\right\| \leq \|x_n - x\| \tag{4.29}$$

ve

$$\|v_n - y\| = \left\|J_{r_n}^{F,T}(y_n) - J_{r_n}^{F,T}(y)\right\| \leq \|y_n - y\| \tag{4.30}$$

olur. $i = 1,2,3,4$ için P_i ler genişlemeyen olduğundan $x, y \in H$ için

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle y, x\rangle$$

eşitsizliği dikkate alındığında Lemma 3.3.6 dan

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x\|^2 &= \big\|(1 - \alpha_n)P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&\quad +\alpha_n P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) - x\big\|^2 \\
&= \big\|(1 - \alpha_n)\big(P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) - x\big) \\
&\quad +\alpha_n\big(P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) - x\big)\big\|^2 \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n) - x\|^2 \\
&\quad +\alpha_n\|u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n) - x\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\alpha_n(1-\alpha_n)\big\|P_1\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\\
&-P_2\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\big\|^2\\
&=\|u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)-x\|^2\\
&-\alpha_n(1-\alpha_n)\big\|P_1\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\\
&-P_2\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\big\|^2\\
&=\|u_n-x\|^2+\delta_n^2\|A^*(Au_n-Bv_n)\|^2\\
&-2\delta_n\langle A^*(Au_n-Bv_n),u_n-x\rangle\\
&-\alpha_n(1-\alpha_n)\big\|P_1\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\\
&-P_2\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\big\|^2\\
&\le\|x_n-x\|^2+\delta_n^2\|A^*(Au_n-Bv_n)\|^2\\
&-2\delta_n\langle A^*(Au_n-Bv_n),u_n-x\rangle\\
&-\alpha_n(1-\alpha_n)\big\|P_1\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\\
&-P_2\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\big\|^2 \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

olur. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\delta_n^2\|A^*(Au_n-Bv_n)\|^2&=\delta_n^2\langle Au_n-Bv_n,AA^*(Au_n-Bv_n)\rangle\\
&\le\lambda_A\delta_n^2\|Au_n-Bv_n\|^2 \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

dir. Böylece (4.31) ve (4.32) den

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x\|^2\le\|x_n-x\|^2&+\lambda_A\delta_n^2\|Au_n-Bv_n\|^2\\
&-2\delta_n\langle Au_n-Bv_n,Au_n-Ax\rangle\\
&-\alpha_n(1-\alpha_n)\big\|P_1\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\\
&-P_2\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)\big\|^2 \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\|y_{n+1}-y\|^2\le\|y_n-y\|^2&+\lambda_B\delta_n^2\|Au_n-Bv_n\|^2\\
&+2\delta_n\langle Au_n-Bv_n,Bv_n-By\rangle\\
&-\alpha_n(1-\alpha_n)\big\|P_3\big(v_n+\delta_n B^*(Au_n-Bv_n)\big)\\
&-P_4\big(v_n+\delta_n B^*(Au_n-Bv_n)\big)\big\|^2 \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

olur. (4.33) ve (4.34) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa $Ax = By$ olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x\|^2 + \|y_{n+1} - y\|^2 \leq{}& \|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2 + \delta_n^2(\lambda_A + \lambda_B)\|Au_n - Bv_n\|^2 \\
&-2\delta_n\|Au_n - Bv_n\|^2 - \alpha_n(1-\alpha_n)\Big\{\big\|P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&-P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|^2 + \big\|P_3\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&-P_4\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|^2\Big\} \\
={}& \|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2 - \delta_n\big(2 - \delta_n(\lambda_A + \lambda_B)\big)\|Au_n - Bv_n\|^2 \\
&-\alpha_n(1-\alpha_n)\Big\{\big\|P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&-P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|^2 + \big\|P_3\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&-P_4\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|^2\Big\} \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\xi_n(x,y) = \|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2$ olsun. Böylece (4.35) den

$$\begin{aligned}
\xi_{n+1}(x,y) \leq{}& \xi_n(x,y) - \delta_n\big(2 - \delta_n(\lambda_A + \lambda_B)\big)\|Au_n - Bv_n\|^2 \\
&-\alpha_n(1-\alpha_n)\Big\{\big\|P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&-P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|^2 + \big\|P_3\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&-P_4\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|^2\Big\} \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

olur. $\alpha_n \in (0,1)$ ve $\delta_n \in \left(\varepsilon, \frac{2}{\lambda_A + \lambda_B} - \varepsilon\right)$ olduğundan $2 - \delta_n(\lambda_A + \lambda_B) > 0$ olur. Böylece (4.36) dan

$$\xi_{n+1}(x,y) \leq \xi_n(x,y)$$

olur. O halde $\big(\xi_n(x,y)\big)$ dizisi artmayan ve 0 ile alttan sınırlıdır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}\xi_n(x,y)$ limiti mevcuttur. $\lim_{n\to\infty}\xi_n(x,y) = \sigma(x,y)$ olsun. Buradan $\mu_n = (x_n, y_n)$, $\mu^* = (x,y)$ ve $W = \mathcal{F}$ ile Lemma 3.3.5 in (i) şartı sağlanır. $\big(\xi_n(x,y)\big)$ dizisi yakınsak olduğundan (4.36) eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\|Au_n - Bv_n\| = 0, \qquad (4.37)$$

$$\lim_{n\to\infty}\big\|P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) - P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\| = 0 \qquad (4.38)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left\|P_3\big(v_n+\delta_n B^*(Au_n-Bv_n)\big)-P_4\big(v_n+\delta_n B^*(Au_n-Bv_n)\big)\right\|=0 \qquad (4.39)$$

elde edilir. Ayrıca $\|x_n-x\|^2\le\xi_n(x,y)$ ve $\|y_n-y\|^2\le\xi_n(x,y)$ olduğundan (x_n) ve (y_n) dizileri sınırlı ve $\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x\|$ ve $\limsup_{n\to\infty}\|y_n-y\|$ mevcuttur. (4.29) ve (4.30) dan aynı zamanda $\limsup_{n\to\infty}\|u_n-x\|$ ve $\limsup_{n\to\infty}\|v_n-y\|$ mevcuttur. Kabul edelim ki (x_n) ve (y_n) dizileri sırasıyla x^* ve y^* noktalarına zayıf yakınsar. Böylece (4.37) den $\big(u_n-\delta_n A^*(Au_n-Bv_n)\big)$ dizisi x^* a ve $\big(v_n+\delta_n B^*(Au_n-Bv_n)\big)$ dizisi y^* a zayıf yakınsar. Lemma 3.3.6 kullanılarak

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\|^2&=\|x_{n+1}-x-x_n+x\|^2\\&=\|x_{n+1}-x\|^2-\|x_n-x\|^2-2\langle x_{n+1}-x_n,x_n-x\rangle\\&=\|x_{n+1}-x\|^2-\|x_n-x\|^2\\&\quad-2\langle x_{n+1}-x^*,x_n-x\rangle+2\langle x_n-x^*,x_n-x\rangle\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0 \qquad (4.40)$$

ve benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty}\|y_{n+1}-y_n\|=0. \qquad (4.41)$$

bulunur. $u_n=J_{r_n}^{F,T}(x_n)$ ve $u_{n+1}=J_{r_{n+1}}^{F,T}(x_{n+1})$ olduğundan Lemma 4.2.1 den her $u\in C$ için

$$\begin{aligned}&F(\lambda_1u_n+(1-\lambda_1)b,u)+\langle Tu_n,u-u_n\rangle\\&\quad+\phi(u)-\phi(u_n)+\tfrac{1}{r_n}\langle u-u_n,u_n-x_n\rangle\ge0\end{aligned} \qquad (4.42)$$

ve

$$\begin{aligned}&F(\lambda_1u_{n+1}+(1-\lambda_1)b,u)+\langle Tu_{n+1},u-u_{n+1}\rangle\\&\quad+\phi(u)-\phi(u_{n+1})+\tfrac{1}{r_{n+1}}\langle u-u_{n+1},u_{n+1}-x_{n+1}\rangle\ge0\end{aligned} \qquad (4.43)$$

yazılabilir. (4.43) de $u=u_n$ ve (4.42) de $u=u_{n+1}$ alır ve bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$0\le F(\lambda_1u_n+(1-\lambda_1)b,u_{n+1})+F(\lambda_1u_{n+1}+(1-\lambda_1)b,u_n)$$

$$+\langle Tu_n, u_{n+1} - u_n\rangle + \langle Tu_{n+1}, u_n - u_{n+1}\rangle$$
$$+\frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n\rangle + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle.$$

bulunur. (A2)-(A3) şartları kullanılarak

$$0 \le \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle + \frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n\rangle$$
$$\le \left\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}}\right\rangle$$
$$= \left\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1})\right\rangle$$
$$= \langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1}\rangle + \left\langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + \left(1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}\right)(u_{n+1} - x_{n+1})\right\rangle$$
$$= -\|u_{n+1} - u_n\|^2 + \left\langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + \left(1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}\right)(u_{n+1} - x_{n+1})\right\rangle$$

olup buradan

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 \le \|u_{n+1} - u_n\|\left(\|x_{n+1} - x_n\| + \left|1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1} - x_{n+1}\|\right)$$

ve

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le \|x_{n+1} - x_n\| + \left|1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \tag{4.44}$$

bulunur. (4.40) ve (C3) kullanılarak (4.44) den

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{n+1} - u_n\| = 0 \tag{4.45}$$

ve benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty}\|v_{n+1} - v_n\| = 0 \tag{4.46}$$

olur. Diğer taraftan (4.33) ve (4.34) den

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x\|^2 \le \|u_n - x\|^2 &+ \delta_n^2\lambda_A\|Au_n - Bv_n\|^2 \\ &-2\delta_n\langle Au_n - Bv_n, Au_n - Ax\rangle \\ &-\alpha_n(1-\alpha_n)\big\|P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) \\ &-P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|^2\end{aligned} \tag{4.47}$$

ve

$$\begin{aligned}\|y_{n+1}-y\|^2 \le\ & \|v_n-y\|^2+\delta_n^2\lambda_B\|Au_n-Bv_n\|^2\\ & +2\delta_n\langle Au_n-Bv_n, Bv_n-By\rangle\\ & -\alpha_n(1-\alpha_n)\big\|P_2\big(v_n+\delta_nB^*(Au_n-Bv_n)\big)\\ & -P_4\big(v_n+\delta_nB^*(Au_n-Bv_n)\big)\big\|^2 \qquad (4.48)\end{aligned}$$

elde edilir. $Ax = By$ olduğu kullanılarak (4.47) ve (4.48) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x\|^2+\|y_{n+1}-y\|^2 \le\ & \|u_n-x\|^2+\|v_n-y\|^2\\ & -\delta_n\big(2-\delta_n(\lambda_A+\lambda_B)\big)\|Au_n-Bv_n\|^2\\ & -\alpha_n(1-\alpha_n)\big\{\big\|P_1\big(u_n-\delta_nA^*(Au_n-Bv_n)\big)\\ & -P_2\big(u_n-\delta_nA^*(Au_n-Bv_n)\big)\big\|^2\\ & +\big\|P_3\big(v_n+\delta_nB^*(Au_n-Bv_n)\big)\\ & -P_4\big(v_n+\delta_nB^*(Au_n-Bv_n)\big)\big\|^2\big\} \qquad (4.49)\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\|u_n-x\|^2 &= \big\|J_{r_n}^{F,T}(x_n)-J_{r_n}^{F,T}(x)\big\|^2\\ &\le \langle x_n-x, u_n-x\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}\{\|x_n-x\|^2+\|u_n-x\|^2-\|x_n-u_n\|^2\} \qquad (4.50)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|v_n-y\|^2 &= \big\|J_{r_n}^{G,S}(y_n)-J_{r_n}^{F,T}(y)\big\|^2\\ &\le \langle y_n-y, v_n-y\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}\{\|y_n-y\|^2+\|v_n-y\|^2-\|y_n-v_n\|^2\} \qquad (4.51)\end{aligned}$$

dir. (4.49)-(4.51) den

$$\begin{aligned}\|x_n-u_n\|^2+\|y_n-v_n\|^2 \le\ & \|x_n-x\|^2-\|x_{n+1}-x\|^2+\|y_n-y\|^2-\|y_{n+1}-y\|^2\\ & -\delta_n\big(2-\delta_n(\lambda_A+\lambda_B)\big)\|Au_n-Bv_n\|^2\\ & -\alpha_n(1-\alpha_n)\big\{\big\|P_1\big(u_n-\delta_nA^*(Au_n-Bv_n)\big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|^2 \\
&+\big\|P_3\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&-P_4\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|^2\Big\}
\end{aligned} \tag{4.52}
$$

sonucuna varılır. (4.37)-(4.41) kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0 \tag{4.53}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - v_n\| = 0 \tag{4.54}$$

elde edilir. Böylece $u_n \rightharpoonup x^*$ ve $v_n \rightharpoonup y^*$ dir. $i = 1,2,3,4$ için P_i ler genişlemeyem olduğundan

$$
\begin{aligned}
\|u_n - P_1 u_n\| &= \|u_n - x_{n+1} + x_{n+1} - P_1 u_n\| \\
&\le \|u_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - P_1 u_n\| \\
&= \|u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_{n+1}\| \\
&\quad +\big\|(1-\alpha_n)P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&\quad +\alpha_n P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) - P_1 u_n\big\| \\
&\le \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \\
&\quad +\big\|P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) - P_1 u_n\big\| \\
&\quad +\alpha_n\big\|P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&\quad -P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\| \\
&\le \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \\
&\quad +|\delta_n|\|A^*\|\|Au_n - Bv_n\| \\
&\quad +\alpha_n\big\|P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
&\quad -P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big)\big\|
\end{aligned}
$$

olur. (4.37), (4.38), (4.45) ve (4.53) kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - P_1 u_n\| = 0 \tag{4.55}$$

bulunur. Benzer şekilde P_2, P_3 ve P_4 için yukarıdaki aynı adımlar takip edilerek

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - P_2u_n\| = 0,\ \lim_{n\to\infty}\|v_n - P_3v_n\| = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\|v_n - P_4v_n\| = 0 \qquad (4.56)$$

olur.

$$\begin{aligned}\|x_n - P_1x_n\| &= \|x_n - u_n + u_n - P_1u_n + P_1u_n - P_1x_n\| \\ &\le \|x_n - u_n\| + \|u_n - P_1u_n\| + \|u_n - x_n\| \\ &= 2\|x_n - u_n\| + \|u_n - P_1u_n\|,\end{aligned}$$

olduğundan (4.53) ve (4.55) den

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - P_1x_n\| = 0 \qquad (4.57)$$

ve benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - P_2x_n\| = 0,\ \lim_{n\to\infty}\|y_n - P_3y_n\| = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\|y_n - P_4y_n\| = 0 \qquad (4.58)$$

bulunur. (x_n) ve (y_n), sırasıyla x^* ve y^* a zayıf yakınsak ve $i = 1,2,3,4$ için $(I - P_i)$, sıfıra demi-kapalı olduğundan (4.57) ve (4.58) den $x^* \in F(P_1) \cap F(P_2)$ ve $y^* \in F(P_3) \cap F(P_4)$ dir. Diğer taraftan her Hilbert uzayı Opial şartını sağladığından $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisinin zayıf alt dizisel limiti tektir.

Şimdi $x^* \in GMEP(F,T,\phi)$ ve $y^* \in GMEP(G,S,\varphi)$ olduğunu gösterelim. $u_n = J_{r_n}^{F,T}(x_n)$ kullanılarak $b, u \in C$ ve $\lambda \in (0,1]$ için

$$F(\lambda_1u_n + (1-\lambda_1)b, u) + \langle Tu_n, u - u_n\rangle + \phi(u) - \phi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n\rangle \ge 0$$

yazılabilir. (A2) ve (A3) şartlarından

$$\begin{aligned}\phi(u) - \phi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n\rangle &\ge -F(\lambda_1u_n + (1-\lambda_1)b, u) - \langle Tu_n, u - u_n\rangle \\ &\ge F(\lambda_1u + (1-\lambda_1)b, u_n) + \langle Tu, u_n - u\rangle\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}&\phi(u) - \phi(u_{n_k}) + \frac{1}{r_{n_k}}\langle u - u_{n_k}, u_{n_k} - x_{n_k}\rangle \\ &\qquad \ge F\big(\lambda_1u + (1-\lambda_1)b, u_{n_k}\big) + \big\langle Tu, u_{n_k} - u\big\rangle\end{aligned}$$

ele edilir. (4.53) den $u_{n_k} \rightharpoonup x^*$ olduğu kolayca görülür. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|u_{n_k} - x_{n_k}\|}{r_{n_k}} = 0$$

yazılabilir. ϕ nin alt yarı sürekliliğinden her $b, u \in C$ için

$$F(\lambda_1 u + (1-\lambda_1)b, x^*) + \langle Tu, x^* - u\rangle + \phi(x^*) - \phi(u) \leq 0 \tag{4.59}$$

olur. Her $t \in (0,1]$ ve $u \in C$ için $u_t = tu + (1-t)x^*$ diyelim. C, konveks olup $u_t \in C$ dir. (4.59) dan

$$F(\lambda_1 u_t + (1-\lambda_1)b, x^*) + \langle Tu_t, x^* - u_t\rangle + \phi(x^*) - \phi(u_t) \leq 0 \tag{4.60}$$

olur. (4.60) eşitsizliği, ϕ nin konveksliği ve $(A1) - (A4)$ şartları kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= F(\lambda_1 u_t + (1-\lambda_1)b, u_t) + (1-t)\langle Tu_t, u_t - u_t\rangle + \phi(u_t) - \phi(u_t) \\
&\leq tF(\lambda_1 u_t + (1-\lambda_1)b, u) + (1-t)F(\lambda_1 u_t + (1-\lambda_1)b, x^*) \\
&\quad + t\phi(u) + (1-t)\phi(x^*) - \phi(u_t) + (1-t)\langle Tu_t, u_t - x^*\rangle \\
&\quad + (1-t)\langle Tu_t, x^* - u_t\rangle \\
&= t\{F(\lambda_1 u_t + (1-\lambda_1)b, u) + (1-t)\langle Tu_t, u - x^*\rangle + \phi(u) - \phi(u_t)\} \\
&\quad + (1-t)\{F(\lambda_1 u_t + (1-\lambda_1)b, x^*) + \langle Tu_t, x^* - u_t\rangle + \phi(x^*) - \phi(u_t)\} \\
&\leq t\{F(\lambda_1 u_t + (1-\lambda_1)b, u) + (1-t)\langle Tu_t, u - x^*\rangle + \phi(u) - \phi(u_t)\}
\end{aligned}$$

yazılır. Bu ise her $b, u \in C$ için

$$F(\lambda_1 u_t + (1-\lambda_1)b, u) + (1-t)\langle Tu_t, u - x^*\rangle + \phi(u) - \phi(u_t) \geq 0$$

olmasını gerektirir. u_t nin tanımından $t \to 0$ için $u_t \to x^*$ olduğu açıktır. (A5), (A6) şartları ve ϕ nin has alt yarı sürekliliğinden her $b, u \in C$ için

$$F(\lambda_1 x^* + (1-\lambda_1)b, u) + (1-t)\langle Tx^*, u - x^*\rangle + \phi(u) - \phi(x^*) \geq 0$$

elde edilir ve bu $x^* \in GMEP(F, T, \phi)$ olduğunu gösterir. Benzer adımlar takip edilerek $y^* \in GMEP(G, S, \varphi)$ olduğu da görülür.

Diğer taraftan $A: H_1 \to H_3$ ve $B: H_2 \to H_3$, sınırlı lineer dönüşümler ve (u_n) ve (v_n), dizileri sırasıyla x^* ve y^* a zayıf yakınsadığından keyfi $f \in H_3^*$ için $f(Au_n) \to f(Ax^*)$ ve benzer şekilde $f(Bv_n) \to f(By^*)$ dir. Böylece

$$Au_n - Bv_n \rightharpoonup Ax^* - By^*$$

olup buradan

$$\|Ax^* - By^*\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|Au_n - Bv_n\| = 0$$

yani $Ax^* = By^*$ olur. O halde $(x^*, y^*) \in SEGMEP(F, G, T, S, \phi, \varphi)$ olup $(x^*, y^*) \in \mathcal{F}$ dir.

Son olarak her bir $(x^*, y^*) \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty}(\|x_n - x^*\| + \|y_n - y^*\|)$ mevcut ve $\|(x^*, y^*)\|$ dizisinin herbir zayıf kapanış noktası $\mathcal{F}$ ye aittir. $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ normu ile $H = H_1 \times H_2$, $W = \mathcal{F}$, $\mu_n = (x_n, y_n)$ ve $\mu = (x^*, y^*)$ olsun. Lemma 3.3.5 den $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ ve $y_n \rightharpoonup \bar{y}$ olacak şekilde $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{F}$ vardır. Böylece (4.28) iteratif algoritması ile oluşturulmuş $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi $\mathcal{F}$ de (4.16) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsar. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) Şimdi (4.28) iteratif şeması ile üretilmiş $((x_n, y_n))$ dizisinin demikompaktlık şartı altında güçlü yakınsak olduğunu ispat edelim: $i = 1,2,3,4$ için P_i ler demikompakt, (x_n) ve (y_n) dizileri sınırlı, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - P_1x_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - P_2x_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|y_n - P_3y_n\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\|y_n - P_4y_n\| = 0$ olduğundan bu dizilerin sırasıyla u^* ve v^* noktalarına güçlü yakınsayan $\big(x_{n_k}\big)$ ve $\big(y_{n_k}\big)$ alt dizileri mevcuttur. $\big(x_{n_k}\big)$ ve $\big(y_{n_k}\big)$ nın sırasıyla x^* ve y^* noktalarına zayıf yakınsaması $x^* = u^*$ ve $y^* = v^*$ olmasını gerektirir. P_i lerin demikompaktlığından $x^* \in F(P_1) \cap F(P_2)$ ve $y^* \in F(P_3) \cap F(P_4)$ dır. Önceki benzer adımlar takip edilerek $x^* \in GMEP(F, T, \phi)$ ve $y^* \in GMEP(G, S, \varphi)$ dir. Böylece

$$\|Ax^* - By^*\| = \lim_{k\to\infty}\big\|Ax_{n_k} - By_{n_k}\big\| = 0$$

olup $Ax^* = By^*$ dir. O halde $(x^*, y^*) \in \mathcal{F}$ dir. Diğer taraftan herhangi bir $(x, y) \in \mathcal{F}$ için $\xi_n(x, y) = \|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2$ olduğundan $\lim_{k\to\infty}\xi_{n_k}(x^*, y^*) = 0$ olduğunu biliyoruz. (i) varsayımından $\lim_{n\to\infty}\xi_n(x^*, y^*)$ limitinin mevcut ve böylece $\lim_{n\to\infty}\xi_n(x^*, y^*) = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak (4.28) iteratif şeması (4.16) probleminin çözümüne güçlü yakınsar. Bu da (ii) varsayımını ispatlar.

C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan kapalı konveks alt kümesi ve $\psi: C \to C$ konveks ve diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bilindiği gibi konveks diferansiyellenebilir minimizasyonon problemi

$$\min_{x \in C} \psi(x) = \psi(x^*) \tag{4.61}$$

olacak şekilde bir $x^* \in C$ bulma problemidir. Yine iyi bilindiği gibi x^* ın (4.61) probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart her $y \in C$ için

$$\langle \nabla \psi(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \tag{4.62}$$

olmasıdır. (4.62) problemine klasik varyasyonel eşitsizlik problemi denir. Eğer $F(x^*, y) = \langle \nabla \psi(x^*), y - x^* \rangle$ alırsak bu durumda (4.3) denge problemi ve (4.62) varyasyonel eşitsizlik problemi aynı çözüme sahip olur.

(2015 de Rahaman ve Ahmad [3]),

$$\begin{aligned} &\langle \nabla \psi(x^*), x - x^* \rangle + \langle T(x^*), x - x^* \rangle + \phi(x) - \phi(x^*) \geq 0, \ \forall x \in C \\ &\langle \nabla \sigma(y^*), y - y^* \rangle + \langle S(y^*), y - y^* \rangle + \varphi(y) - \varphi(y^*) \geq 0, \ \forall y \in Q, \\ &Ax^* = By^* \end{aligned} \tag{4.63}$$

olmak üzere $x^* \in C$ ve $y^* \in Q$ bulma şeklindeki parçalı eşitlik karışık konveks diferansiyellenebilir optimizasyon problemini oluşturmuşlardır. Burada $\psi: C \to H_1$ ve $\sigma: Q \to H_2$, konveks diferensiyellenebilir dönüşümlerdir. (4.63) parçalı eşitlik karışık konveks diferansiyellenebilir optimizasyon probleminin çözüm kümesi $SEMCDOP(\psi, \sigma, T, S, \phi, \varphi)$ ile gösterilir. Eğer $T = 0$ ise bu problem (Ma vd. 2015) tarafından oluşturulan parçalı eşitlik karışık varyasyonel eşitsizlik problemine indirgenir. Eğer $B = I$ ve $H_2 = H_3$ alınırsa bu durumda (4.63) problemi,

$$\langle \nabla \psi(x^*), x - x^* \rangle + \langle T(x^*), x - x^* \rangle + \phi(x) - \phi(x^*) \geq 0, \ \ \forall x \in C$$

olacak şekilde $x^* \in C$ bulma ve $Ax^* = y^* \in Q$ nin

$$\langle \nabla \sigma(y^*), y - y^* \rangle + \langle S(y^*), y - y^* \rangle + \varphi(y) - \varphi(y^*) \geq 0, \ \forall y \in Q \tag{4.64}$$

eşitsizliğini çözmesi şeklindeki parçalı karışık konveks diferansiyellenebilir optimizasyon problemine indirgenir. Bu problemin çözüm kümesi de $SMCDOP(\psi, \sigma, T, S, \phi, \varphi)$ ile gösterilir.

$\nabla\psi$ ve $\nabla\sigma$ gradyenleri monoton dönüşümlerdir, Eğer $F(x^*, y) = \langle \nabla\psi(x^*), x - x^* \rangle$, $G(x, y^*) = \langle \nabla\sigma(y^*), y - y^* \rangle$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ alırsak bu durumda F ve G, (B2) şartını sağlar. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.3: $H_1, H_2, H_3, T, S, \phi, \varphi, P_1, P_2, P_3, P_4, A$ ve B, (B2) şartı hariç (B1)-(B6) şartlarını sağlasın. $\psi: C \to H_1$ ve $\sigma: Q \to H_2$ konveks ve diferansiyellenebilir dönüşümler olsun. Keyfi bir $(x_1, y_1) \in C \times Q$ başlangıç değeri için $C \times Q$ da $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi her $u \in C$, $v \in Q$ için

$$\begin{cases} \langle \nabla\psi(u_n), u - u_n \rangle + \phi(u) - \phi(u_n) + \langle Tu_n, u - u_n \rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \\ \langle \nabla\sigma(v_n), v - v_n \rangle + \varphi(v) - \varphi(v_n) + \langle Sv_n, v - v_n \rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle v - v_n, v_n - y_n \rangle \geq 0, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) + \alpha_n P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big), \\ y_{n+1} = (1 - \alpha_n)P_3\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) + \alpha_n P_4\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada (δ_n), (α_n) ve (r_n) dizileri sırasıyla (C1)-(C3) şartlarını sağlar. Eğer $\mathcal{F} := \cap_{i=1}^{4} F(P_i) \cap SEMCDOP(\psi, \sigma, T, S, \phi, \varphi) \neq \emptyset$ ise bu durumda

(i) $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.63) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsar.

(ii) $i = 1,2,3,4$ için P_i ler demikompakt ise $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.63) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsar (Karahan, İ. 2016).

Teorem 4.2.2 de F, G, T ve S dönüşümlerini $F = G = T = S = 0$ olarak alırsak, (4.20) parçalı eşitlik konveks minimizasyon problemi için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.4: $H_1, H_2, H_3, \phi, \varphi, P_1, P_2, P_3, P_4, A$ ve B, (B1), (B4), (B5) ve $(B6)$ şartlarını sağlasın. Keyfi bir $(x_1, y_1) \in C \times Q$ başlangıç değeri için $C \times Q$ da $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi her $u \in C$, $v \in Q$ için

$$
\begin{cases}
\phi(u) - \phi(u_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \\
\varphi(v) - \varphi(v_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle v - v_n, v_n - y_n\rangle \geq 0, \\
x_{n+1} = (1-\alpha_n)P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) + \alpha_n P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) \\
y_{n+1} = (1-\alpha_n)P_3\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) + \alpha_n P_4\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big)
\end{cases}
$$

olarak tanımlansın. Burada (δ_n), (α_n) ve (r_n) dizileri sırasıyla (C1)-(C3) şartlarını sağlar. Eğer $\mathcal{F} := \cap_{i=1}^{4} F(P_i) \cap SECMP(\phi,\varphi) \neq \emptyset$ ise bu durumda

(i) $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.20) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsar.

(ii) $i = 1,2,3,4$ için P_i ler demikompakt ise $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.20) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsar (Karahan, İ. 2016).

Teorem 4.2.2 de T ve S dönüşümlerini $T = S = 0$ şeklinde ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ olarak alınırsa, (4.17) parçalı eşitlik karışık denge problemi için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.5: $H_1, H_2, H_3, F, G, \phi, \varphi, P_1, P_2, P_3, P_4, A$ ve B, (B3) şartı hariç (B1)-(B6) şartlarını sağlasın. Keyfi bir $(x_1, y_1) \in C \times Q$ başlangıç değeri için $C \times Q$ da $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi her $u \in C$, $v \in Q$ için

$$
\begin{cases}
F(u_n, u) + \phi(u) - \phi(u_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \\
G(v_n, v) + \varphi(v) - \varphi(v_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle v - v_n, v_n - y_n\rangle \geq 0, \\
x_{n+1} = (1-\alpha_n)P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big) + \alpha_n P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - Bv_n)\big), \\
y_{n+1} = (1-\alpha_n)P_3\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big) + \alpha_n P_4\big(v_n + \delta_n B^*(Au_n - Bv_n)\big)
\end{cases}
$$

olarak tanımlayalım. Burada (δ_n), (α_n) ve (r_n) dizileri sırasıyla (C1)-(C3) şartlarını sağlar. Eğer $\mathcal{F} := \cap_{i=1}^{4} F(P_i) \cap SEMEP(F, G, \phi, \varphi) \neq \emptyset$ ise bu durumda

(i) $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.17) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsar.

(ii) $i = 1,2,3,4$ için P_i ler demikompakt ise $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.17) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsar (Karahan, İ. 2016).

4.3. Operatör Normlarından Bağımsız Olarak Parçalı Eşitlik Probleminin Çözümü

H_1, H_2 ve H_3 reel Hilbert uzayları, $C \subset H_1$ ve $Q \subset H_2$ boş olmayan kapalı ve konveks kümeler ve $A: H_1 \to H_3$, $B: H_2 \to H_3$ iki sınırlı lineer operatör olsun. (4.22) ile numaralandırılan (SEP) parçalı denge problemi, bir konveks fizibilite problemi dolayısıyla da bir optimizasyon problemidir.

Moudafi, (4.22) (SEP) in çözümü için aşağıdaki alterne CQ algoritmasını (ACQA) teşkil etmiştir:

$$\begin{cases} x_{k+1} = P_C\big(x_k - \gamma_k A^*(Ax_k - By_k)\big), \\ y_{k+1} = P_Q\big(y_k + \beta_k B^*(Ax_{k+1} - By_k)\big). \end{cases} \tag{4.65}$$

Burada $\lambda_A$ve λ_B sırasıyla A^*A ve B^*B nin spektral yarıçapları olmak üzere $\gamma_k, \beta_k \in \left(\varepsilon, \min\left(\frac{1}{\lambda_A}, \frac{1}{\lambda_B}\right) - \varepsilon\right)$ dir. $B = I$, $\beta_k = 1$ alındığında (4.65) algoritması tam olarak (Byrne 2002) tarafından verilen CQ algoritmasıdır.

(SEP), bir çözüme sahip olduğunda aşağıdaki konveks minimizasyon problemi gibi görülebilir:

$$\min_{x \in C, y \in Q} \frac{1}{2}\|Ax - By\|^2. \tag{4.66}$$

Şimdi (SEP) in tutarlı yani bir çözüme sahip olduğunu ve çözüm kümesinin de

$$\Gamma = \{x \in C, y \in Q : Ax = By\}$$

olduğunu kabul edelim. (4.66) için klasik projeksiyon gradyen algoritması (PGA) (veya projeksiyon algoritması)

$$\begin{cases} x_{k+1} = P_C\big(x_k - \gamma_k A^*(Ax_k - By_k)\big), \\ y_{k+1} = P_Q\big(y_k + \gamma_k B^*(Ax_k - By_k)\big) \end{cases} \tag{4.67}$$

dir. Burada γ_k, $\left(\varepsilon, \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} - \varepsilon\right)$ aralığından seçilmiştir. Kolayca görülebileceği gibi (4.65) alterne CQ algoritması dizisel fakat (4.67) algoritması eş zamanlıdır. $B = I$ alınırsa (4.67) algoritması (Byrne 2002) tarafından verilen orijinal CQ algoritmasına benzemekle birlikte bu algoritmaya denk olamaz. Buna rağmen aynı problemi çözer. Yukarda bahsedilen (4.65) ve (4.67) algoritmalarında γ_k adım boyutunun belirlenmesi $\|A\|$ ve $\|B\|$ operatör (matris) normlarına (veya A^*A ve B^*B nin en büyük özdeğerlerine) bağlı olduğunu görülebilir. Bu yüzden (4.65) alterne CQ algoritmasını ve (4.67) projeksiyon algoritmasını uygulanması için öncelikle A ve B normlarının hesaplanması gerekir. Bu ise pratikte kolay bir iş değildir.

Bu zorluğun üstesinden gelmek için, (López vd. 2012) ve (Zhao vd. 2013) sırasıyla parçalı fizibilite ve multiple-set parçalı fizibilite problemlerini çözmek için operatör normlarına ihtiyaç duymadan γ_k adım boyutunu belirleyecek faydalı bir yöntem sundular. Onlardan esinlenerek, (4.67) projeksiyon algoritması için (γ_k) adım boyutu dizisinin,

$$\gamma_k = \sigma_k \min\left\{\frac{\|Ax_k - By_k\|^2}{\|A^*(Ax_k - By_k)\|^2}, \frac{\|Ax_k - By_k\|^2}{\|B^*(Ax_k - By_k)\|^2}\right\}. \tag{4.68}$$

şeklinde yeni bir seçimini sunmuşlardır. Burada $\sigma_k \in (0,1)$ dir. (4.68) seçiminin avantajı, A ve B nin operatör normları hakkında önceden bilgi verilmesi gerekmemesi ve hala yakınsamanın garanti edilmesi gerçeğidir.

H bir Hilbert uzayı olmak üzere $f: H \to \mathbb{R}$, diferansiyellenebilir fonksiyonel ise ∇f, f nin gradyenini ve $f: H \to \mathbb{R}$, alt diferansiyellenebilir fonksiyonel ise ∂f, f nin alt diferansiyelini göstersin. $H_1 \times H_2$ deki (x_k, y_k) dizisi verildiğinde $\omega_w(x_k, y_k)$ zayıf topolojideki kapanış noktalarının kümesini temsil etsin. Şimdi aşağıdaki tanımları verelim:

Tanım 4.3.1: Bir (x_k) dizisi için eğer

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0$$

ise bu diziye asimptotik regülerdir denir.

Tanım 4.3.2: $y_n \in T(x_n)$ olmak üzere (y_n), y ye güçlü ve (x_n) de x e zayıf yakınsarken $y \in T(x)$ ise T operatörünün grafiğine zayıf-güçlü kapalıdır denir.

Aşağıdaki lemma, maksimal monoton operatörlerin zayıf-güçlü kapalı olduğunu gösterir.

Lemma 4.3.3: H bir Hilbert uzayı ve $T: H \rightrightarrows H$ maksimal monoton dönüşüm olsun. Eğer H daki (x_k) dizisi norma göre sınırlı ve bir x noktasına zayıf yakınsak ve H daki (w_k) dizisi bir w noktasına güçlü yakınsak ve her k için $w_k \in T(x_k)$ ise bu durumda $w \in T(x)$ dir (Tseng 2000).

SEP, aşağıdaki minimizasyon problemi olarak yazılabilir:

$$\min_{x \in H_1, y \in H_2} \iota_C(x) + \iota_Q(y) + \frac{1}{2}\|Ax - By\|^2.$$

Burada $\iota_C(x)$,

$$\iota_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı C nin indikatör fonksiyonudur.

$$\nabla_x\left(\frac{1}{2}\|Ax - By\|^2\right) = A^*(Ax - By), \quad \nabla_y\left(\frac{1}{2}\|Ax - By\|^2\right) = -B^*(Ax - By)$$

ve $\partial\iota_C(x) = N_C(x)$, $\partial\iota_Q(y) = N_Q(y)$ olduğuna dikkat ediniz. Burada N_C ve N_Q, sırasıyla C ve Q konveks kümelerinin normal konileridir. Optimallik şartlarını yazarak

$$\begin{cases} 0 \in \nabla_x\left\{\frac{1}{2}\|Ax - By\|^2\right\} + \partial\iota_C(x) = A^*(Ax - By) + N_C(x), \\ 0 \in \nabla_y\left\{\frac{1}{2}\|Ax - By\|^2\right\} + \partial\iota_Q(y) = -B^*(Ax - By) + N_Q(y) \end{cases}$$

elde edilir ki bu da $\gamma > 0$, $\beta > 0$ için

$$\begin{cases} x - \gamma A^*(Ax - By) \in x + \gamma N_C, \\ y + \beta B^*(Ax - By) \in y + \beta N_Q, \end{cases}$$

olmasını gerektirir. Bu son ifade bizi

$$\begin{cases} x = (I + \gamma N_C)^{-1}(x - \gamma A^*(Ax - By)), \\ y = \left(I + \beta N_Q\right)^{-1}(y + \beta B^*(Ax - By)) \end{cases}$$

şeklindeki sabit nokta formülasyonuna götürür. $(I+\gamma N_C)^{-1} = P_C$ ve $\left(I+\beta N_Q\right)^{-1} = P_Q$ olduğundan

$$\begin{cases} x = P_C(x-\gamma A^*(Ax-By)), \\ y = P_Q(y+\beta B^*(Ax-By)) \end{cases} \tag{4.69}$$

olur. (4.69) sabit nokta denkleminin çözümlerinin tam olarak SEP in çözümleri olduğu aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 4.3.4: $x^* \in H_1$ ve $y^* \in H_2$ verilsin. Bu durumda (x^*, y^*) ın SEP i çözmesi için gerek ve yeter şart (x^*, y^*) ın (4.69) sabit nokta denklemini çözmesidir (Qiao-Li Dong, vd. 2015).

İspat: SEP in çözümlerinin (4.69) sabit nokta teoreminin de çözümü olduğu zaten gösterildi. Tersine (x^*, y^*) ın, (4.69) sabit nokta denklemini çözdüğünü kabul edelim. $x^* \in C$ ve $y^* \in Q$ olduğu açıktır. (4.69) ve Teorem 2.6.5 den

$$\begin{cases} \langle x^* - \gamma A^*(Ax^* - By^*) - x^*, u - x^* \rangle \leq 0, \;\; u \in C, \\ \langle y^* + \beta B^*(Ax^* - By^*) - y^*, v - y^* \rangle \leq 0, \;\; v \in Q \end{cases}$$

yani

$$\begin{cases} \langle A^*(Ax^* - By^*), x^* - u \rangle \leq 0, \;\; u \in C, \\ \langle B^*(Ax^* - By^*), v - y^* \rangle \leq 0, \;\; v \in Q \end{cases}$$

olur. Böylece

$$\begin{cases} \langle Ax^* - By^*, Ax^* - Au \rangle \leq 0, \;\; u \in C, \\ \langle Ax^* - By^*, Bv - By^* \rangle \leq 0, \;\; v \in Q \end{cases} \tag{4.70}$$

yazılır. (4.70) deki iki eşitsizlik toplanarak

$$\langle Ax^* - By^*, Bv - Au + Ax^* - By^* \rangle \leq 0, \;\; u \in C, v \in Q$$

bulunur. Buradan $(u, v) \in \Gamma$ yani $Au = Bv$ olup $Ax^* = By^*$ elde edilir. Bu ise $(x^*, y^*) \in \Gamma$ demektir.

Önerme 4.3.4 de SEP ve (4.69) sabit nokta denkleminin denkliğini gördük. Dolayısıyla SEP i çözmek için sabit nokta denklemlerini kullanabiliriz. Basitleştirmek için $\beta = \gamma$ alacağız.

Daha önce açıklandığı gibi (4.65) alterne CQ algoritması ve (4.67) projeksiyon algoritmasının uygulanmasındaki zorluk, γ_k adım boyutunun seçiminin A ve B operatör normlarına bağlı olmasıdır. (Qiao-Li Dong, vd. 2015). $\|A\|$ ve boyutunun $\|B\|$ operatör normlarına bağlı olmadığı aşağıdaki projeksiyon algoritmasını oluşturmuşlardır.

Algoritma 4.3.5: Keyfi $x_0 \in H_1$ ve $y_0 \in H_2$ başlangıç tahminleri seçin. $x_k \in C$ ve $y_k \in Q$ $k.$ iterasyonları teşkil edilmiş ve $Ax_k - By_k \neq 0$ dır. Bu durumda $(k+1).$ (x_{k+1}, y_{k+1}) iterasyonunu

$$\begin{cases} x_{k+1} = P_C\big(x_k - \gamma_k A^*(Ax_k - By_k)\big), \\ y_{k+1} = P_Q\big(y_k + \gamma_k B^*(Ax_k - By_k)\big) \end{cases} \tag{4.71}$$

formülü ile hesaplarız. Burada γ_k adım boyutu $0 < \sigma_k < 1$ için

$$\gamma_k = \sigma_k \min\left\{\frac{\|Ax_k - By_k\|^2}{\|A^*(Ax_k - By_k)\|^2}, \frac{\|Ax_k - By_k\|^2}{\|B^*(Ax_k - By_k)\|^2}\right\}. \tag{4.72}$$

şeklinde seçilir. Eğer $Ax_k - By_k = 0$ ise $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k)$, SEP in bir çözümüdür ve iteratif işlem durur; aksi halde $k := k+1$ alınarak (4.71) e gidilir ve bir sonraki (x_{k+2}, y_{k+2}) hesaplanır. Not ediniz ki (4.72) deki γ_k adım boyutu seçimi, $\|A\|$ ve $\|B\|$ normlarından bağımsızdır (Qiao-Li Dong, vd. 2015).

(Schöpfer vd. 2008), Banach uzaylarının daha genel sınıfları ve katlı konveks kümeler için Algoritma 4.3.5 i incelemiştir. Burada adım boyutu satır arama metodu ile seçilmiştir.

Lemma 4.3.6: (x_k, y_k) dizisi Algoritma 4.3.5 ile oluşturulmuş olsun. Bu durumda

(i) $(x^*, y^*) \in \Gamma$ olmak üzere $\|x_k - x^*\|^2 + \|y_k - y^*\|^2$ yakınsaktır.

(ii) (x_k) ve (y_k) sınırlıdır (Qiao-Li Dong, vd. 2015).

İspat: $(x^*, y^*) \in \Gamma$ yani $x^* \in C, y^* \in Q, Ax^* = By^*$ alarak ve P_C projeksiyonunun genişlemeyen olduğunu kullanarak (4.71) in ilk eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x_k - x^* - \gamma_k A^*(Ax_k - By_k)\|^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \gamma_k^2 \|A^*(Ax_k - By_k)\|^2 - 2\gamma_k \langle A^*(Ax_k - By_k), x_k - x^* \rangle \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \gamma_k^2 \|A^*(Ax_k - By_k)\|^2 - 2\gamma_k \langle Ax_k - By_k, Ax_k - Ax^* \rangle\end{aligned}$$

olur.

$$-2\langle Ax_k - By_k, Ax_k - Ax^* \rangle = -\|Ax_k - By_k\|^2 - \|Ax_k - Ax^*\|^2 - \|By_k - Ax^*\|^2$$

eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 &+ \gamma_k^2 \|A^*(Ax_k - By_k)\|^2 - \gamma_k \|Ax_k - By_k\|^2 \\ &- \gamma_k \|Ax_k - Ax^*\|^2 + \gamma_k \|By_k - Ax^*\|^2\end{aligned}$$

ve benzer şekilde (4.71) in ikinci eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|y_{k+1} - y^*\|^2 \leq \|y_k - y^*\|^2 &+ \gamma_k^2 \|B^*(Ax_k - By_k)\|^2 - \gamma_k \|Ax_k - By_k\|^2 \\ &- \gamma_k \|By_k - By^*\|^2 + \gamma_k \|Ax_k - By^*\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Son iki eşitsizlik taraf tarafa toplanır ve $Ax^* = By^*$ olduğu hesaba katılırsa sonuç olarak

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \|y_{k+1} - y^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + \|y_k - y^*\|^2& \\ -\gamma_k (\|Ax_k - By_k\|^2 - \gamma_k \|A^*(Ax_k - By_k)\|^2)& \\ -\gamma_k (\|Ax_k - By_k\|^2 - \gamma_k \|B^*(Ax_k - By_k)\|^2)& \qquad (4.73)\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi

$$\Gamma_k(x^*, y^*) = \|x_k - x^*\|^2 + \|y_k - y^*\|^2$$

alınırsa

$$\begin{aligned}\Gamma_{k+1}(x^*, y^*) \leq \Gamma_k(x^*, y^*) &- \gamma_k (\|Ax_k - By_k\|^2 - \gamma_k \|A^*(Ax_k - By_k)\|^2) \\ &- \gamma_k (\|Ax_k - By_k\|^2 - \gamma_k \|B^*(Ax_k - By_k)\|^2) \qquad (4.74)\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. (4.72) den $\Gamma_k(x^*, y^*)$ dizisi azalan ve alttan 0 ile sınırlı olup sonlu bir limite sahiptir. Bu limit $I(x^*, y^*)$ olsun. Böylece (x_k) ve (y_k) sınırlıdır.

Lemma 4.3.7: (x_k, y_k) dizisi Algoritma 4.3.5 ile oluşturulmuş olsun. $\sigma_k \in (\varepsilon, 1-\varepsilon)$ alalım. Bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} \|Ax_k - By_k\| = 0, \tag{4.75}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|A^*(Ax_k - By_k)\| = 0 \text{ ve } \lim_{k\to\infty} \|B^*(Ax_k - By_k)\| = 0, \tag{4.76}$$

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k \|A^*(Ax_k - By_k)\| = 0 \text{ ve } \lim_{k\to\infty} \gamma_k \|B^*(Ax_k - By_k)\| = 0 \tag{4.77}$$

dır (Qiao-Li Dong, vd. 2015).

İspat: İspatı iki bölüme ayıracağız:

1.Durum: Kabul edelim ki her $k \geq k_0$ için $\|A^*(Ax_k - By_k)\| \geq \|B^*(Ax_k - By_k)\|$ olacak şekilde bir k_0 vardır. Bu durumda

$$\gamma_k = \sigma_k \frac{\|Ax_k - By_k\|^2}{\|A^*(Ax_k - By_k)\|^2}$$

dır. Lemma 4.3.6 (i) ve (4.74) den

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k (1 - \sigma_k) \frac{\|Ax_k - By_k\|^4}{\|A^*(Ax_k - By_k)\|^2} = 0$$

olup σ_k nın seçilişinden

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|Ax_k - By_k\|^2}{\|A^*(Ax_k - By_k)\|} = 0$$

olur.

$$\gamma_k \|A^*(Ax_k - By_k)\| = \sigma_k \frac{\|Ax_k - By_k\|^2}{\|A^*(Ax_k - By_k)\|}$$

eşitliğinden

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k \|A^*(Ax_k - By_k)\| = 0$$

yazılır. $\|A^*(Ax_k - By_k)\| \geq \|B^*(Ax_k - By_k)\|$ kabulünden

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k \|B^*(Ax_k - By_k)\| = 0$$

olur.

$$\|Ax_k - By_k\| \leq \|A\| \frac{\|Ax_k - By_k\|^2}{\|A^*(Ax_k - By_k)\|}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Sonuç olarak

$$\lim_{k\to\infty} \|Ax_k - By_k\| = 0$$

elde edilir. $\|A^*(Ax_k - By_k)\| \leq \|A\|\|Ax_k - By_k\|$ olduğundan $\lim_{k\to\infty}\|A^*(Ax_k - By_k)\| = 0$ ve böylece $\lim_{k\to\infty}\|B^*(Ax_k - By_k)\| = 0$ olur. Tersine kabul edelim ki her $k \geq k_1$ için $\|A^*(Ax_k - By_k)\| \leq \|B^*(Ax_k - By_k)\|$ olacak şekilde bir k_1 vardır. Bu durumda yukarıdaki işlemi takip ederek istenilen sonuçlar elde edilir.

2.Durum: Kabul edelim ki her $k \geq k_0$ için

$$\|A^*(Ax_k - By_k)\| \geq \|B^*(Ax_k - By_k)\|$$

veya

$$\|A^*(Ax_k - By_k)\| \leq \|B^*(Ax_k - By_k)\|$$

olacak şekilde bir k_0 vardır. $\left(A^*(Ax_k - By_k)\right)$ dizisini iki alt diziye bölelim. $\left(A^*\left(Ax_{k_m} - By_{k_m}\right)\right)$ ile göstereceğimiz ilk alt dizi

$$\|A^*(Ax_k - By_k)\| \geq \|B^*(Ax_k - By_k)\|$$

eşitsizliğini ve $\left(A^*\left(Ax_{k_n} - By_{k_n}\right)\right)$ ile göstereceğimiz ikinci alt dizi de

$$\|A^*(Ax_k - By_k)\| < \|B^*(Ax_k - By_k)\|$$

eşitsizliğini sağlasın. 1. Durum işlemlerinden k_m ve k_n indisli alt diziler için sonuçların geçerli olduğunu görürüz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.8: $\sigma_k \in (\varepsilon, 1-\varepsilon)$ olsun. Bu durumda Algoritma 4.3.5 ile oluşturulmuş (x_k, y_k) dizisi SEP in çözümüne zayıf yakınsar ve (x_k), (y_k) dizilerinin her ikisi de asimptotik regülerdir (Qiao-Li Dong, vd. 2015).

İspat: İlk olarak (x_k) ve (y_k) dizilerinin asimptotik regüler olduğunu göstereceğiz. (4.71) in birinci eşitliği bize

$$\|x_{k+1}-x_k\| \leq \gamma_k \|A^*(Ax_k - By_k)\|$$

verir ki bu da (4.76) ve (4.77) ile birlikte

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-x_k\|}{\gamma_k} = 0 \tag{4.78}$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{k+1}-x_k\| = 0$$

olur. Benzer şekilde (4.71) in birinci eşitliğinden

$$\|y_{k+1}-y_k\| \leq \gamma_k \|B^*(Ax_k - By_k)\|$$

ve bu da (4.76) ve (4.77) ile birlikte,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|y_{k+1}-y_k\|}{\gamma_k} = 0 \tag{4.79}$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \|y_{k+1}-y_k\| = 0$$

olur. Böylece (x_k) ve (y_k) asimptotik regülerdir.

$(\hat{x},\hat{y}) \in \omega_w(x_k, y_k)$ olsun. Bu durumda (x_k) nın (benzer şekilde (y_k) nın) $\hat{x}$ ya ($\hat{y}$ ya) zayıf yakınsayan bir alt dizisi vardır. (4.71) deki iki eşitlik

$$\begin{cases} \frac{x_{k+1}-x_k}{\gamma_k} - A^*(Ax_k - By_k) + N_C(x_{k+1}), \\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\gamma_k} + B^*(Ax_k - By_k) + N_Q(y_{k+1}) \end{cases} \tag{4.80}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada N_C ve N_Q maksimal monoton operatörlerin grafikleri zayıf-güçlü kapalıdır. Son işlemlerdeki limitleri geçerek ve (4.76) yı kullanırsak $0 \in N_C(\hat{x})$ ve $0 \in N_Q(\hat{y})$ elde edilir ki bu da

$$\hat{x} \in C \ \text{ ve } \ \hat{y} \in Q$$

olmasına denktir. Ayrıca $(Ax_k - By_k)$ in $A\hat{x} - B\hat{y}$ ya zayıf yakınsak olması ve karesel normun alttan yarı sürekliliğinden

$$\|A\hat{x} - B\hat{y}\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|Ax_k - By_k\| = 0$$

olur. Burada (4.75) kullanılmıştır. Böylece den $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Gamma$ dır.

Zayıf kapanış noktalarının tekliğini göstermek için meşhur Opial Lemmasını kullanacağız. $(\bar{x}, \bar{y})$, (x_k, y_k) nın diğer bir zayıf kapanış noktası olsun. Bağıntıdaki limiti atlayarak

$$\Gamma_k(\hat{x}, \hat{y}) = \Gamma_k(\bar{x}, \bar{y}) + \|\hat{x} - \bar{x}\|^2 + \|\hat{y} - \bar{y}\|^2 + 2\langle \mathrm{x}_k - \bar{x}, \bar{x} - \hat{x}\rangle + 2\langle \mathrm{y}_k - \bar{y}, \bar{y} - \hat{y}\rangle$$

ve buradan

$$I(\hat{x}, \hat{y}) = I(\bar{x}, \bar{y}) + \|\hat{x} - \bar{x}\|^2 + \|\hat{y} - \bar{y}\|^2$$

elde edilir. $(\hat{x}, \hat{y})$ ve $(\bar{x}, \bar{y})$ nin rollerini tersine çevirirsek

$$I(\bar{x}, \bar{y}) = I(\hat{x}, \hat{y}) + \|\hat{x} - \bar{x}\|^2 + \|\hat{y} - \bar{y}\|^2$$

olur. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$\|\hat{x} - \bar{x}\|^2 + \|\hat{y} - \bar{y}\|^2 = 0$$

elde edilir. Böylece $(\hat{x}, \hat{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$ olup bu (x_k, y_k) dizisinin, SEP in bir çözümüne zayıf yakınsadığını gösterir ve bu sonuç ispatı tamamlar.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde Araştırma Bulgularında yer verdiğimiz teoremlerin bazı sonuçlarını vereceğiz. İlk olarak Teorem 4.1.3 den aşağıdaki sonucu yazabiliriz..

Sonuç 5.1: C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan konveks ve kapalı alt kümesi, $A: C \to H$ bir α-ters kuvvetli monoton dönüşüm ve $F: C \times C \to \mathbb{R}$ de (I1)-(I4) şartlarını sağlayan bifonksiyon olsun. $S: C \to C$ genişlemeyen ve $f: C \to C$ bir μ-daraltan dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $F(S) \cap EP(F, A) \neq \emptyset$ dir. Ayrıca (r_n) bir pozitif reel dizi ve (α_n), (β_n), (γ_n), (δ_n) ve (λ_n) de $(0,1)$ aralığında reel diziler olsun. (x_n) aşağıdaki iterasyon şeması ile üretilmiş bir dizi olsun:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ F\,(y_n, y) + \langle Ax_n, y - y_n \rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle y - y_n, y_n - x_n \rangle \geq 0, \ \ \forall y \in C, \\ x_{n+1} \ = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S y_n + \delta_n e_n. \end{cases}$$

Burada (e_n), C de sınırlı bir dizidir. Kontrol dizilerinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

a. $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n = 1,$
b. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty,$
c. $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1,$
d. $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} |r_{n-1} - r_n| = 0$ ve
e. r, r' reel sabitler olmak üzere $0 < r \leq r_n \leq r' < 2\alpha$ dır.

Bu durumda (x_n), $\bar{x} = P_{F(S)\cap EP(F,A)} f(\bar{x})$ ye güçlü yakınsar (Zhang, Y., Li, Y. 2016).

S, C de özdeş dönüşüm olarak alınırsa, yine Teorem 4.1.3 den (4.2) genelleştirilmiş denge problemi ile ilgili aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.2: C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan konveks ve kapalı alt kümesi, $A: C \to H$ bir α-ters kuvvetli monoton dönüşüm, $F: C \times C \to \mathbb{R}$ de (I1)-(I4) şartlarını sağlayan bifonksiyon ve $f: C \to C$ bir μ-daraltan dönüşüm olsun. Kabul edelim ki

$EP(F,A) \neq \emptyset$ dır. Ayrıca (r_n) bir pozitif reel dizi ve (α_n), (β_n), (γ_n), (δ_n) ve (λ_n) de (0,1) aralığında reel diziler olsun. (x_n) aşağıdaki iterasyon şeması ile üretilmiş bir dizi olsun:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ F\,(y_n, y) + \langle Ax_n, y - y_n \rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle y - y_n, y_n - x_n \rangle \geq 0, \;\; \forall y \in C, \\ x_{n+1} \;= \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n y_n + \delta_n e_n. \end{cases}$$

Burada (e_n), C de sınırlı bir dizidir. Kontrol dizilerinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

a. $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n = 1$,
b. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$,
c. $0 < \liminf_{n\to\infty}\beta_n \leq \limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1$,
d. $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty}|r_{n-1} - r_n| = 0$,
e. r, r' reel sabitler olmak üzere $0 < r \leq r_n \leq r' < 2\alpha$ dır.

Bu durumda (x_n), $\bar{x} = P_{EP(F,A)}f(\bar{x})$ ye güçlü yakınsar (Zhang, Y., Li, Y. 2016).

Şimdi (4.3) denge problemi üzerine bir sonuç vereceğiz.

Sonuç 5.3: C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan konveks ve kapalı alt kümesi ve $F: C \times C \to \mathbb{R}$ de (I1)-(I4) şartlarını sağlayan bifonksiyon olsun. $S: C \to C$ κ-kesin pseudocontraction ve $f: C \to C$ bir µ-daraltan dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $F(S) \cap EP(F) \neq \emptyset$ dir. Ayrıca (r_n) bir pozitif reel dizi ve (α_n), (β_n), (γ_n), (δ_n) ve (λ_n) de (0,1) aralığında reel diziler olsun. (x_n) aşağıdaki iterasyon şeması ile üretilmiş bir dizi olsun:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ F\,(y_n, y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - y_n, y_n - x_n \rangle \geq 0, \;\; \forall y \in C, \\ x_{n+1} \;= \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n(\lambda_n y_n + (1-\lambda_n)Sy_n) + \delta_n e_n. \end{cases}$$

Burada (e_n), C de sınırlı bir dizidir. Kontrol dizilerinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

a. $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n = 1$,

b. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$,

c. $0 < \liminf_{n\to\infty}\beta_n \leq \limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1$,

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty}|r_{n-1} - r_n| = \lim_{n\to\infty}|\lambda_{n-1} - \lambda_n| = 0$ ve

e. λ, r, r' reel sabitler olmak üzere $0 < \kappa < \lambda_n \leq \lambda < 1$ ve $0 < r \leq r_n$ dır.

Bu durumda (x_n), $\bar{x} = P_{F(S)\cap EP(F)}f(\bar{x})$ ye güçlü yakınsar (Zhang, Y., Li, Y. 2016).

(4.1) varyasyonel eşitsizliğinin çözüm kümesi ile sıkı pseudocontractionun sabit nokta kümesinin ortak çözüm kümesi üzerine bir sonuç vereceğiz.

Sonuç 5.4: C, bir H reel Hilbert uzayının boş olmayan konveks ve kapalı alt kümesi ve $A: C \to H$ bir α-ters kuvvetli monoton dönüşüm olsun. $S: C \to C$ κ-kesin pseudocontraction ve $f: C \to C$ bir μ-daraltan dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$ dir. Ayrıca (r_n) bir pozitif reel dizi ve (α_n), (β_n), (γ_n), (δ_n) ve (λ_n) de $(0,1)$ aralığında reel diziler olsun. (x_n) aşağıdaki iterasyon şeması ile üretilmiş bir dizi olsun:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ y_n = P_C\,(x_n - r_n A x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n(\lambda_n y_n + (1 - \lambda_n) S y_n) + \delta_n e_n. \end{cases}$$

Burada (e_n), C de sınırlı bir dizidir. Kontrol dizilerinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

a. $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n = 1$,

b. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$,

c. $0 < \liminf_{n\to\infty}\beta_n \leq \limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1$,

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty}|r_{n-1} - r_n| = \lim_{n\to\infty}|\lambda_{n-1} - \lambda_n| = 0$ ve

e. λ, r, r' reel sabitler olmak üzere $0 < \kappa < \lambda_n \leq \lambda < 1$ ve $0 < r \leq r_n \leq r' < 2\alpha$ dır.

Bu durumda (x_n), $\bar{x} = P_{F(S)\cap VI(C,A)}f(\bar{x})$ ye güçlü yakınsar (Zhang, Y., Li, Y. 2016).

Diğer taraftan Teorem 4.2.2 de $F = G = T = S = \phi = \varphi = 0$ alarak aşağıdaki (4.22) parçalı eşitlik problemi için yakınsaklık sonucunu verebiliriz.

Sonuç 5.5: $H_1, H_2, H_3, P_1, P_2, P_3, P_4, A$ ve B, (B1), (B5) ve (B6) şartlarını sağlasın. Keyfi bir $(x_1, y_1) \in C \times Q$ başlangıç değeri için $C \times Q$ da $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisini

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)P_1\big(x_n - \delta_n A^*(Ax_n - By_n)\big) + \alpha_n P_2\big(x_n - \delta_n A^*(Ax_n - By_n)\big) \\ y_{n+1} = (1-\alpha_n)P_3\big(y_n + \delta_n B^*(Ax_n - By_n)\big) + \alpha_n P_4\big(y_n + \delta_n B^*(Ax_n - By_n)\big), \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Burada (δ_n) ve (α_n) dizileri sırasıyla (C1) ve (C2) şartlarını sağlar. Eğer $\mathcal{F} := \cap_{i=1}^{4} F(P_i) \cap SEP \neq \emptyset$ ise bu durumda

(i) $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.22) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsar.

(ii) $i = 1,2,3,4$ için P_i ler demikompakt ise $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.22) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsar (Karahan, İ. 2016).

Sonuç 5.5 de $B = I$ ve $H_2 = H_3$ alarak (4.23) parçalı fizibilite problemi için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.6: $A: H_1 \to H_2$.olmak üzere $H_1, H_2, P_1, P_2, P_3, P_4$ ve A yukarıdaki (B1), (B5) ve (B6) şartlarını sağlasın. Keyfi bir $(x_1, y_1) \in C \times Q$ başlangıç değeri için $C \times Q$ da $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisini

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)P_1\big(x_n - \delta_n A^*(Ax_n - y_n)\big) + \alpha_n P_2\big(x_n - \delta_n A^*(Ax_n - y_n)\big) \\ y_{n+1} = (1-\alpha_n)P_3\big(y_n + \delta_n(Ax_n - y_n)\big) + \alpha_n P_4\big(y_n + \delta_n(Ax_n - y_n)\big), n \geq 1, \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Burada (α_n), (C2) şartını sağlayan bir dizi ve (δ_n) de λ_A, A^*A nın spektral yarıçapını göstermek üzere yeteri kadar küçük ε için $\delta_n \in \left(\varepsilon, \frac{1}{\lambda_A} - \varepsilon\right)$ olacak şekilde pozitif reel dizidir. Eğer $\mathcal{F} := \cap_{i=1}^{4} F(P_i) \cap SFP \neq \emptyset$ ise bu durumda

(i) $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.23) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsar.

(ii) $i = 1,2,3,4$ için P_i ler demikompakt ise $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.23) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsar (Karahan, İ. 2016).

Teorem 4.2.3 de $B = I$ ve $H_2 = H_3$ alırsak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.7: $H_1, H_2, T, S, \phi, \varphi, P_1, P_2, P_3, P_4$ ve $A, A: H_1 \to H_2$ olmak üzere (B2) şartı hariç (B1)-(B6) şartlarını sağlasın. Kabul edelim ki $\psi: C \to H_1$ ve $\sigma: Q \to H_2$ konveks ve diferansiyellenebilir dönüşümlerdir. Keyfi bir $(x_1, y_1) \in C \times Q$ başlangıç değeri için $C \times Q$ da $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisini her $u \in C$, $v \in Q$ için

$$\begin{cases} \langle \nabla\psi(u_n), u - u_n\rangle + \phi(u) - \phi(u_n) + \langle Tu_n, u - u_n\rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \\ \langle \nabla\sigma(v_n), v - v_n\rangle + \varphi(v) - \varphi(v_n) + \langle Sv_n, v - v_n\rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle v - v_n, v_n - y_n\rangle \geq 0, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - v_n)\big) + \alpha_n P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - v_n)\big) \\ y_{n+1} = (1-\alpha_n)P_3\big(v_n + \delta_n(Au_n - v_n)\big) + \alpha_n P_4\big(v_n + \delta_n(Au_n - v_n)\big) \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Burada (δ_n) dizisi λ_A, A^*A nın spektral yarıçapını göstermek üzere yeteri kadar küçük ε için $\delta_n \in \left(\varepsilon, \frac{1}{\lambda_A} - \varepsilon\right)$ olacak şekilde pozitif reel dizi ve (α_n) ve (r_n), sırasıyla (C2) ve (C3) şartlarını sağlar. $\mathcal{F} := \cap_{i=1}^{4} F(P_i) \cap SMCDOP(\psi, \sigma, T, S, \phi, \varphi) \neq \emptyset$ ise bu durumda

- **(i)** $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.65) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsar.
- **(ii)** $i = 1,2,3,4$ için P_i ler demikompakt ise $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.65) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsar (Karahan, İ. 2016).

Teorem 4.2.4 de $B = I$ ve $H_2 = H_3$ olarak alırsak, (4.21) parçalı konveks minimizasyon problemi için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.8: $H_1, H_2, P_1, P_2, P_3, P_4, \phi, \varphi$ ve A, $A: H_1 \to H_2$ olmak üzere (B1), (B4), (B5) ve (B6) şartlarını sağlasın. Keyfi bir $(x_1, y_1) \in C \times Q$ başlangıç değeri için $C \times Q$ da $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisini her $u \in C$, $v \in Q$ için

$$
\begin{cases}
\phi(u) - \phi(u_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle u - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \\
\varphi(v) - \varphi(v_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle v - v_n, v_n - y_n\rangle \geq 0, \\
x_{n+1} = (1-\alpha_n)P_1\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - v_n)\big) + \alpha_n P_2\big(u_n - \delta_n A^*(Au_n - v_n)\big), \\
y_{n+1} = (1-\alpha_n)P_3\big(v_n + \delta_n(Au_n - v_n)\big) + \alpha_n P_4\big(v_n + \delta_n(Au_n - v_n)\big)
\end{cases}
$$

olarak tanımlayalım. Burada (δ_n) dizisi λ_A, A^*A nın spektral yarıçapını göstermek üzere yeteri kadar küçük ε için $\delta_n \in \left(\varepsilon, \frac{1}{\lambda_A} - \varepsilon\right)$ olacak şekilde pozitif reel dizi ve (α_n) ve (r_n), sırasıyla (C2) ve $(C3)$ şartlarını sağlar. Eğer $\mathcal{F} := \cap_{i=1}^{4} F(P_i) \cap SCMP(\phi, \varphi) \neq \emptyset$ ise bu durumda

(i) $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.21) probleminin bir çözümüne zayıf yakınsar.

(ii) $i = 1,2,3,4$ için P_i ler demikompakt ise $\big((x_n, y_n)\big)$ dizisi (4.21) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsar (Karahan, İ. 2016).

KAYNAKLAR

Ahmad, R.., Rahaman, M., 2014. Generalized strongly vector equilibrium problem for set-valued mappings. Filomat 28 (9), 1783-1790.

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, Series Topological Fixed point Theory and Its Applications, Springer, New York.

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, J. Nonlinear Convex Anal., 8 (1), 61-79.

Banach, S., 1922. Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations, integrals, Fund. Math., 3, 133–181.

Bayraktar, M., 1994. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 314, Erzurum.

Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Math., Springer.

Brouwer L., 1912. Uber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 70, pp. 97-115.

Browder F. E., Petryshyn W. V., 1967. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space, J. Math. Anal. Appl., 20, 197-228.

Blum, E. , Oettli, W., 1994. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, Math. Student, 63, 123-145.

Byrne C., 2002. Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem. Inverse Prob. 18: 441–453.

Cegielski, A., 2012. Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces, Lecture notes in mathemaics. Springer, 298 p, Heidelberg New York Dordrecht London.

Censor, Y, Elfving, T., 1994. A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space. Numer. Algorithms 8, 221-239.

Censor, Y., Elfving, T., Kopf, N., Bortfeld, T., 2005. The multiple-sets split feasibility problem and its applications. Inverse Problem 21, 2071–2084.

Censor, Y., Motova, A., Segal, A., 2007. Pertured projections and subgradient projections for the multiple-sets split feasibility problem. J. Math. Anal. Appl. 327, 1244–1256.

Cegielski, A., 2012. Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces, Lecture notes in mathemaics. Springer, 298 p, Heidelberg New York Dordrecht London.

Chang, SS., Agarwal, R., 2014. Strong convergence theorems of general split equality problems for quasi-nonexpansive mappings. J. Inequal. Appl., 367.

Chang, SS, Lee, HWJ., Chan, CK., 2009. A new method for solving equilibrium problem fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization. Nonlinear Anal. 70, 3307-3319.

Chang, S. S., Lee, H. W. J., Chan, C. K., 2009. Strong convergence theorems by viscosity approximation methods for accretive mappings and nonexpansive mappings, J. Appl. Math. Informatics, 27, 59–68.

Cho, S. Y., Kang, S. M., 2011. Approximation of fixed points of pseudocontraction semigroups based on a viscosity iterative process, Appl. Math. Lett., 24, 224–228.

Cho, S. Y., Qin, X., 2014. On the strong convergence of an iterative process for asymptotically strict pseudocontractions and equilibrium problems, Appl. Math. Comput., 235, 430–438.

Cho, S. Y., Qin, X., Kang, S. M., 2013. Iterative processes for common fixed points of two different families of mappings with applications, J. Global Optim., 57, 1429–1446.

Clarcson, J. A., 1936. Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40, 396-414.

Dehaish, B. A., Qin, X., Latif, A., Bakodah, H., 2015. Weak and strong convergence of algorithms for the sum of two accretive operators with applications, J. Nonlinear Convex Anal., 16, 1321–1336.

Duc, D. M., Vu, N.T., 2005. Nonuniformly elliptic equations of p-Laplacian type. Nonlinear Anal., 61, 1483-1495.

Franks, R. L. and Marzec, R. P., 1971. A theorem on mean value iterations, Proc. Amer. Math. Soc., 30, 324-326.

Goebel, K. and Kirk, W. A., 1990. Topics on Metric Fixed-Point Theory, Cambridge University Press, Cambridge, England.

Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150.

Jung, J. S., 2006. Viscosity approximation methods for a family of finite nonexpansive mappings in Banach spaces, Nonlinear Anal., 64, 2536–2552.

Kakutani S., 1968. A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, Duke Math. J. 8, pp. 457-459.

Kannan R., 1968. Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. 60, pp.71-78.

Karahan, İ., 2016. Strong and weak convergence theorems for split equality generalized mixed equilibrium problem, Fixed Point Theory and Applications. 2016: 101, doi: I 10.1186/s13663-016-0592-6

Khan, S. H., 2013. A Picard-Mann hybrid iterative process, Fixed Point Theory and Appl., doi: 10.1186/1687-1812-2013-69.

Khamsi, M. A. and Kirk W. A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.

Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, Uspehi Mat. Nauk., 10, 123-127.

Liu, L. S., 1995. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 194, 114-125.

Ma, Z., Wang, L., Chang, SS., Duan, W., 2015. Convergence theorems for split equality mixed equilibrium problems with applications. Fixed Point Theory Appl. 2015, 31. doi: 10.1186/s13663-015-0281-x

Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proceedings of the American Mathematical Society, 4, 506-510.

Marino, G., Xu, HK., 2007. Weak and strong convergence theorems for strict-pseudocontractions in Hilbert space. J. Math. Anal. Appl. 329, 336-346.

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları Tic. Ltd. Sti., Kütahya

Moudafi, A., 2000. Viscosity approximation methods for fixed-points problems, J. Math. Anal. Appl., 241, 46–55.

Nagurney, A., 2002. Variational Inequalities, Technical report, Isenberg School of Management University of Massachusetts Amherst, MA 01003, 23.

Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251, 217–229.

Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bull. Am. Math. Soc. 73, 591-597.

Papageorgiou, N. S., Kyritsi-Yiallourou S. T., 2009. Handbook of Applied Analysis (Vol. 19). Springer Science & Business Media Press.

Picard, E. (Charles), 1890. Jour. de Math., 6 (4), 145-210.

Poincare H., 1886. Surless courbes define barles equations differentiate less, J.de Math., 2, pp. 54-65.

Rahaman, M., Liou, YC, Ahmad, R, Ahmad, I., 2015. Convergence theorems for split equality generalized mixed equilibrium problems for demi-contractive mappings. J. Inequal. Appl. 2015: 418.

Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using in finite matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 196, 161-176.

Schauder, J., 1930. Der Fixpunktsatzin Funktionalraiimen, Studia Mathematika, 2, 171–180.

Schechter, M., 2007. The use of cerami sequences in critical point theory. In Abstract and Applied Analysis (Vol.2007). Hindawi Publishing Corporation.

Suzuki, T., 2005. Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semi-groups without Bochner integrals, J. Math. Anal. Appl., 305, 227-239.

Takahashi, W. and Toyoda, M., 2003. Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl., 118, 417-428.

Takahashi, S. and Takahashi, W., 2007. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., 331, 506-515.

Tseng P., 2000. A modified forward C backward splitting method for maximal monotone mappings. SIAM J. Control Optim. 38: 431–446.

Qiao-Li Dong, Songnian He & Jing Zhao, 2015. Solving the split equality problem without prior knowledge of operator norms, Optimization, 64:9, 1887-1906, doi: 10.1080/02331934.2014.895897

Qin, X., Cho, S. Y., Wang, l., 2014. A regularization method for treating zero points of the sum of two monotone operators, Fixed Point Theory Appl., 2014, 10 pages.

Qin, X., Chang, SS., Cho, YJ., 2010. Iterative methods for generalized equilibrium problems and fixed point problems with applications, Nonlinear Anal. 11, 2963-2972.

Qin, X., Su, Y., S. Y., Wang, l., 2013. Iterative algorithms with errors for zero points of m-accretive operators, Fixed Point Theory Appl., 2013, 17 pages.

Qing, Y., Lv, S., 2014. Strong convergence of a parallel iterative algorithm in a reflexive Banach space, Fixed Point Theory Appl., 2014, 9 pages.

Wang, H. C., 2002. On the compactness and the minimization. Taiwanese J. Math., 6 (4), 441-464.

Willem, M., 1996. Minimax Theorems. Birkhäuser, 165, Boston.

Xu, B. and Noor M. A., 2002. Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 267, 444-453.

Zeidler, E., 1986. Nonlinear Functional Analysis and its Applications, III: Variational Methods and Applications, Springer, New York.

Zhang, Y. and Li, Y., 2016. A viscosity method for solving convex feasibility problems, J. Nonlinear Sci. Appl. 9, 641-651.

ÖZGEÇMİŞ

1993 yılı Erzurum doğumlu olan Muhammed Furkan ÖZDEMİR, ilk ve orta öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2011 yılında kayıt yaptığı Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2015 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı ve 2017 yılında bu eğitimini tamamladı.