B-METRİK
UZAYLARDA GERAGHTY DARALTAN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI ÜZERİNE

Oğuzhan AYTEMİZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN

2019

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

B-METRİK UZAYLARDA GERAGHTY DARALTAN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI ÜZERİNE

Oğuzhan AYTEMİZ

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2019

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

_B_-METRİK UZAYLARDA GERAGHTY DARALTAN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI ÜZERİNE

Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN danışmanlığında, Oğuzhan AYTEMİZ tarafından hazırlanan bu çalışma 11/ 12 / 2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **Oy birliği ile** kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI	*İmza*	:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Arzu GÖRMEZ
Enstitü Müdürü

Bu tez çalışması ……………. tarafından …………. nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

11 / 12 / 2019

Oğuzhan AYTEMİZ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

B- METRİK UZAYLARDA GERAGHTY DARALTAN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI ÜZERİNE

Oğuzhan AYTEMİZ

Erzurum Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN

Son yıllarda metrik uzaylar çeşitli yönlerden genelleştirilerek var olan çalışmalar yeni tanımlanan bu uzaylara taşınmaktadır. Bu uzayların en önemlilerinden biri 1989 yılında Bakhtin tarafından tanımlanan b-metrik uzaylardır. Diğer yandan sabit nokta teorisinde büyük öneme sahip olan Banach sabit nokta teoreminin genelleştirmeleri dikkat çeken çalışmalardır. Bu amaçla Geraghty 1973 yılında yeni bir dönüşüm sınıfı tanımlamış ve tam metrik uzaylarda tanımlı bu dönüşümün sabit noktasının varlık ve tekliğini ispatlamıştır.

Bu tezde b- metrik uzaylarda Geraghty ve genelleştirilmiş Geraghty daraltan dönüşümler olan α-Geraghty, (α, β)-Geraghty, $\alpha - \varphi$-Geraghty ve (B) tipli genelleştirilmiş α-φ- Geraghty daraltan dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili makaleler derlenmiştir. Tezde verilen teoremlerin integral denklemlere olan uygulaması ele alınmış ve bulunan sonuçlar, sonuç ve öneriler bölümünde incelenmiştir.

2019, 62 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta teoremleri, b-metrik uzay, Geraghty daraltan dönüşüm

ABSTRACT

MS. Thesis

ON FIXED POINTS OF GERAGHTY CONTRACTION MAPPINGS IN B-METRIC SPACES

Oğuzhan AYTEMİZ

Erzurum Technical University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Assist. Prof. Dr. İbrahim KARAHAN

In recent years metric spaces ara generalized in various aspects and existing studies are carried to these newly defined spaces. One of the most important of these spaces is the b-metric spaces defined by Bakhtin in 1989. On the other hand generalizations of Banach fixed point theorem which is of great importance in fixed point theory are remarkable studies. To this end Geraghty defined a new class of mapping in 1973 and proved the existence and uniqueness of the fixed point of this mapping defined in complete metric spaces.

In this thesis, articles about the fixed points of the Geraghty and α-Geraghty, (α, β)-Geraghty, α-φ-Geraghty and (B) type α-φ-Geraghty mappings which are generalized Geraghty mappings in b-metric spaces are compiled. The applications of theorems to integral equations is discussed in the thesis and the results are discussed in the conclusion and recommendations section.

2019, 62 page

Keywords: Fixed point theorems, b-metric space, Geraghty contraction mappings

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her türlü kolaylığı sağlayan, her zaman arkamda duran çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN'a sonsuz teşekkür eder şükranlarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım ve benden hiçbir desteğini esirgemeyen Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri'ne teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatım boyunca hep yanımda olan, desteğini esirgemeyen ve bana güvenen başta babam olmak üzere değerli ailem ile maddi ve manevi desteğini esirgemeyen dedem Reşat SARITAŞ'a yürekten teşekkür ederim.

Oğuzhan AYTEMİZ
11 / Aralık / 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$d_b(x, y)$	x ve y noktaları arasında ki b-metrik
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
(X, d)	d metriği ile donatılmış metrik uzay
(X, d_b)	b metriği ile donatılmış b-metrik uzay
$l_p(\mathbb{R})$	p. kuvveti toplanabilir olan reel dizilerin uzayı
$\mathcal{F}$	$\alpha(t_n) \to 1$ iken $t_n \to 0$ şartını sağlayan tüm $\alpha: [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonlarının ailesi
$\mathcal{F}_s$	$\alpha(t_n) \to \frac{1}{s}$ iken $t_n \to 0$ şartını sağlayan tüm $\alpha: [0, \infty) \to \left[0, \frac{1}{s}\right)$ fonksiyonlarının ailesi

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Genelleştirilmiş metrik uzaylar son yıllarda sabit nokta teorisi içinde sıkça çalışılan konulardandır. Bu uzaylar arasında öne çıkan ve diğerlerinin birçoğundan daha eski olan 1989 yılında Bakhtin tarafından tanımlanan b-metrik uzaylardır. Bu uzay bilinen metrik uzayın üçgen eşitsizliğine $s \geq 1$ olmak üzere bir s çarpanı eklenmesiyle tanımlanmıştır. Böylece her metrik uzayın $s = 1$ çarpanı ile birlikte bir b-metrik uzay olduğunu görmek kolaydır. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani b-metrik uzay olup metrik uzay olmayan örnekler mevcuttur. Bilinen metrik uzaylardaki özelliklerin bir kısmı b-metrik uzaylarda geçerli değildir. Örneğin metrik uzaylarda yakınsak bir dizinin limiti tek iken b-metrik uzaylarda bu limit tek olmayabilir. Bu uzaylarla ilgili önemli çalışmalardan biri Czerwik tarafından yapılmıştır. Hatta bazı kaynaklarda b-metrik uzay kavramını Czerwik (1993) in tanımladığı yazılmaktadır. Ancak Czerwik bahsi geçen makalesinde sadece $s = 2$ alarak özel bir b-metrik uzayda bazı daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlık ve tekliği ile ilgili teoremler ispatlamış ve Banach sabit nokta teoreminin bir genelleşmesini elde etmiştir. Bu uzayın tanımlanmasından ardından birçok yazar bu uzaylarda çeşitli çalımalar yapmış, metrik uzaylarda var olan birçok teoremi bu uzaylara aktarmışlardır. Yakın zamanda Boriceanu et al. (2010) fraktal operatör teorisini b-metrik uzaylarda çok değerli fraktallar için genelleştirmişler, Bota et al. (2011) ise bu uzaylarda Ekeland varyasyonel eşitsizliğinin bir versiyonu ile Caristi sabit nokta teoremini ispatlamışlardır.

Diğer taraftan sabit nokta teorisinde büyük öneme sahip ve birçok uygulama alanı olan Banach sabit nokta teoreminin genelleştirilme çalışmaları bu alanda dikkat çeken çalışma alanlarındandır. Geraghty (1973) bu amaçla yeni bir daraltan dönüşüm sınıfı tanımlamıştır. $\alpha(t_n) \to 1$ iken $t_n \to 0$ şartını sağlayan tüm $\alpha\colon [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonlarının ailesi $\mathcal{F}$ olmak üzere bir X metrik uzayda tanımlı T dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\big(d(x, y)\big)d(x, y)$$

şartını sağlarsa T ye Geraghty daraltan dönüşüm adı verilir. Geraghty bu tip dönüşümlerin tam metrik uzaylarda tek bir sabit noktasının var olduğunu ispatlamıştır. Bu çalışmanın ardından birçok yazar bu teoremi çeşitli yönlerden genelleştirmeye çalışmıştır. Örneğin Gordji et al. (2012) ψ-Geraghty dönüşümleri, Babu et al. (2014) ψ-zayıf daraltan Geraghty dönüşümleri, Ravi and Eldred (20016) genelleştirilmiş $\alpha-\psi$-Geraghty dönüşümleri, Acar ve Altun (2017) ψ_F-Geraghty daraltan dönşüümleri, Sastry et al. (2017) genelleştirilmiş Geraghty daraltan dönüşümleri, Farazadeh et al. (2018) genelleştirilmiş $\alpha-\eta-\psi$-Geraghty dönüşümleri ve Alqahtani et al. (2018) $E_{S,T}$ tipli Geraghty daraltan dönüşümleri tanımlamışlar ve bu dönüşümlerin çeşitli tam metrik uzaylarda sabit noktalarının varlık ve tekliğini ispatlamışlardır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm olan giriş bölümünün ardından ikinci bölüm olan kaynak özetlerinde tezde incelenen konuyla ilgili yapılan çalışmalar özet halinde verilmiştir. Üçüncü bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde b- metrik uzaylarda Geraghty ve genelleştirilmiş Geraghty daraltan dönüşümler olan α-Geraghty, (α,β)-Geraghty, $\alpha-\varphi$-Geraghty ve (B) tipli $\alpha-\varphi$-Geraghty daraltan dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir. Son bölümde ise verilen teoremlerden elde edilen sonuçlar incelenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu makalede Geraghty, Banach sabit nokta teoremini genelleştirebilmek için yeni bir daraltan dönüşüm sınıfı tanımlamış ve bu dönüşümlerin tam metrik uzaylarda tek bir sabit noktaya sahip olduklarını ispatlamıştır (Geraghty 1973).

2012 yılında yeni bir α-ψ-daralma tipi dönüşüm konsepti tanıtılmıştır ve bu tür dönüşümler için tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri oluşturulmuştur. Banach daralma ilkesinden başlayarak, sunulan teoremler literatürde mevcut birçok sonucu genelleştirmiş ve geliştirmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların kullanılabilirliğini göstermek için bazı örnekler ve adi diferansiyel denklemlere uygulamalar burada verilmiştir (Samet et al. 2012).

2013 yılında bir metrik uzay ayarında α-Geraghty daralma tipi dönüşüm kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca, bu tür dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri kanıtlanmış ve sonuçları göstermek için bir örnek verilmiştir. Son olarak ana sonuçların uygulanmasını, adi diferansiyel denklemlerin araştırma alanlarındaki uygulamaları tartışılmıştır (Cho et al. 2013).

2014 yılında b-metrik uzayların kurulumunda yeni rasyonel Geraghty daralma dönüşüm sınıfları tanıtılmıştır. Ayrıca, sıralanan b-metrik uzaylarda bu tür dönüşümler için bazı sabit noktaların varlığı incelenmiştir. Ayrıca, burada sunulan sonuçları göstermek için bazı örnekler sağlanmıştır. Son olarak, ana sonucun bir uygulaması verilmiştir (Shahkoohi and Razani 2014).

Bu makalede b-metrik uzaylarda admissible dönüşümler için sabit nokta teoremleri elde edilmiş ve örnekler verilmiştir. Ayrıca lineer olmayan ikinci dereceden integral denkleminin uygulaması ele alınmıştır. Sonuçlar, b-metrik uzaylarda Geraghty daraltan dönüşümler için verilen teoremleri genelleştirmiştir (Pant and Panicker 2016).

Bu makalede b-metrik uzaylarda genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşüm kavramı tanıtılmış ve bu dönüşümün sabit noktasının varlığını ve tekliğini belirtmişlerdir. Elde edilen sonuçları desteklemek amacıyla bazı örnekler verilmiştir.

Daha sonra elde edilen teorem lineer olmayan integral denklemin çözümlerinin varlığını incelemek için kullanılmıştır (Hieu and Chac 2017).

Bu makalede yazarlar α-ψ- Geraghty daraltan dönüşümlerin bir genelleştirilmesini ele almış ve bu dönüşümlerin sabit noktasının varlık ve tekliğini araştırmışlardır. Özellikle bu konuda literatürde var olan bazı sonuçlar genelleştirilmiştir. Ana teoremlerinin bir uygulaması olarak bir integral denklemin çözümünün varlığını incelemişlerdir (Afshari et al.2018).

Bu makalede b-tam b-metrik uzaylarda tanımlanan Geraghty daraltan dönüşümlerin sabit noktalarıyla ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır. Üstelik sonuçların uyumluluğunu göstermek için iki nümerik örnek verilmiştir. Lineer olmayan integral denklemler için bazı uygulamalar ifade edilmiştir (Faraji et al. 2019).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu başlık altında çalışmalarımızda sıkça kullandığımız bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: X boş kümeden farklı bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii) $d(x,y) = d(y,x)$
iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını sağlarsa d ye X de bir metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir (Bayraktar 1994).

Tanım 3.1.2: (X,d) bir metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $n > n_0$ için

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyor denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ veya } x_n \to x \ (n \to \infty)$$

şeklinde gösterilir (Bayraktar 1994).

Tanım 3.1.3: (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $m,n > n_0$ için

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir. X deki her (x_n) Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir (Bayraktar 1994).

Tanım 3.1.4: (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $d(x,x_0) < \delta$ iken $\rho\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 3.1.5: X metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$O(x;n) = \{x, Tx, \dots, T^n x\} \text{ ve } O(x;\infty) = \{x, Tx, \dots, T^n x, \dots\}$$

olsun. Eğer $O(x;\infty)$ daki her Cauchy dizisi X de yakınsak ise $O(x;\infty)$ kümesi T nin yörüngesi olarak adlandırılır ve X metrik uzayı T-yörüngesel tamdır denir (Pant and Panicker 2016).

Şimdi en önemli genelleştirilmiş metrik uzaylardan biri olan b-metrik uzayın tanımı verilecektir. Bu uzay ilk olarak 1989 yılında Bakhtin (1989) tarafından verilmiştir.

Tanım 3.1.6: X boş olmayan bir küme ve $s \geq 1$ olsun. $d: X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

(i) $d_b(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d_b(x,y) = d_b(y,x)$

(iii) $d_b(x,y) \leq s[d_b(x,z) + d_b(z,y)]$ (b-üçgen eşitsizliği)

şartları sağlarsa d ye X üzerinde b-metrik ve (X,d) ikilisine de b-metrik uzay denir (Bakhtin 1989).

Açıkça görüleceği üzere b-metrik uzayda $s = 1$ alınırsa alışılmış metrik uzay elde edilir. Ancak genel olarak b-metrik uzayın, alışılmış metrik uzay olması gerekmemektedir.

Aşağıda bazı b-metrik uzay örneklerine yer verilmiştir.

Örnek 3.1.7: (X,d) metrik uzay, $\beta > 1, \theta \geq 0$ ve $\mu > 0$ olsun. $x, y \in X$ olmak üzere $\rho(x,y) = \theta d(x,y) + \mu d(x,y)^\beta$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X,ρ) , $s = 2^{\beta-1}$ parametresi ile b-metrik uzaydır ancak bir metrik uzay değildir (Kirk and Shadzad 2014).

Örnek 3.1.8: $X = \{1,2,3\}$ olmak üzere $d_b: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü

(i) $d_b(1,2) = d_b(2,1) = 1,$

(ii) $d_b(1,3) = d_b(3,1) = \frac{1}{9},$

(iii) $d_b(2,3) = d_b(3,2) = \frac{6}{9}$

(iv) $d_b(1,1) = d_b(2,2) = d_b(3,3) = 0$

şeklinde tanımlansın. X in $s = \frac{3}{2}$ sabiti ile birlikte bir b-metrik uzay olduğunu görmek kolaydır (Faraji et al. 2019).

Örnek 3.1.9: $X = [0,1]$ ve $d_b: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü her $x, y \in [0,1]$ için $d_b(x,y) = |x-y|^2$ şeklinde tanımlansın. (X, d_b) $s = 2$ parametresi ile bir b-metrik uzaydır (Faraji et al. 2019).

Örnek 3.1.10: $X = \{0,1,2\}$ ve $d_b: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü her $x, y \in X$ için $d_b(x,x) = 0$ ve $d_b(x,y) = d_b(y,x)$ olmak üzere $d_b(0,1) = 1$, $d_b(0,2) = \frac{1}{2}$ ve $d_b(1,2) = 2$ şeklinde verilsin. $d_b(1,2) > d_b(1,0) + d_b(0,2)$ olduğundan d_b bir metrik değildir. Fakat $s \geq \frac{4}{3}$ ile d_b nin b-metrik olduğunu görmek kolaydır (Afshari et al. 2018).

Örnek 3.1.11: X, $[0,1]$ aralığında $\int_0^1 |x(t)|\, dt < 1$ olacak şekilde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların kümesi olsun. $d_b: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü

$$d_b(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)| dt \right)^2$$

şeklinde tanımlansın. Buradan d_b, $s = 2$ ile X de b- metriktir (Afshari et al. 2018).

Örnek 3.1.12: $\mathrm{X} = \{\mathrm{x}_1, x_2, x_3\}$ ve $n, k, i \in \{1,2,3\}$ olmak üzere $d_b: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü

$$d_b(\mathrm{x}_1, x_2) = a > 2\ ,\ \ d_b(\mathrm{x}_1, x_3) = d_b(x_2, x_3) = 1\ ,\ \ d_b(x_n, x_n) = 0$$

şekilde verilsin.

$$d_b(x_n, x_k) = d_b(x_k, x_n),\ \ d_b(x_n, x_k) \leq \frac{a}{2}[d_b(x_n, x_i) + d_b(x_i, x_k)]$$

olduğundan (X, d_b) b- metrik uzaydır (Pant and Panicker 2016).

Örnek 3.1.13: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $0 < p < 1$ için $l_p(\mathbb{R}) = \{\{x_n\} \subset \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ olsun. Her $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\} \in l_p(\mathbb{R})$ için

$$d_b(x, y) \coloneqq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanmış $d_b: l_p(\mathbb{R}) \times l_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $s = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ olmak üzere $l_p(\mathbb{R})$ üzerinde bir b-metriktir (Boriceanu et al. 2010).

Şimdi b-metrik uzayda b-yakınsaklık, b-Cauchy dizisi ve b-tam uzay tanımları verilecektir.

Tanım 3.1.14: X bir b-metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Bu durumda

(a) Eğer $\lim_{n\to\infty} d_b(x_n, z) = 0$ olacak şekilde $z \in X$ mevcutsa, $\{x_n\}$ dizisi z ye b-yakınsaktır denir.

(b) Eğer $\lim_{n,m\to\infty} d_b(x_n, x_m) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine b-Cauchy dizisi denir.

(c) Eğer X de ki her b-Cauchy dizisi b-yakınsak ise X uzayına b-tamdır denir (Pant and Panicker 2016).

3.2. Sabit Nokta Kavramı ve Bazı Dönüşüm Sınıfları

Bu başlık altında sabit nokta kavramı ve bazı özel dönüşüm sınıflarını vereceğiz.

Tanım 3.2.1: X boş kümeden farklı bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Yani $F(T) = \{x \in X: Tx = x\}$ dir (Agarwal *et al.* 2007).

Örnek 3.2.2:

i) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = x^2 + 2x$ fonksiyonunun sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{0, -1\}$ dir.

ii) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = x^3 + 3x^2 - x - 2$ fonksiyonunun sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{1\}$ dir.

X boş kümeden farklı bir küme olsun. $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için x in T altında ki n. iterasyonunu $T^n x$ şeklide gösterilir ve $T^n x = T(T^{n-1}x)$ şeklinde tanımlanır.

Aşağıda çeşitli admissible dönüşüm sınıflarının tanımı ve bu tanımlar arasında ki ilişki verilmiştir.

Tanım 3.2.3: $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için $\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1$ şartını sağlayan T dönüşümüne α-admissible dönüşüm denir (Samet et al. 2012).

Tanım 3.2.4: X b-metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha, \beta: X \times X \to [0, \infty)$ birer fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ ve $\beta(x, y) \geq 1$ iken $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ ve $\beta(Tx, Ty) \geq 1$ ise T dönüşümüne (α, β)-admissible dönüşüm denir (Chandok 2015).

Tanım 3.2.5: Aşağıdaki şartları sağlayan $T: X \to X$ dönüşümüne üçgensel α-admissible dönüşüm denir:

(T1) T α-admissible bir dönüşümdür.

(T2) $x, y, z \in X$ için $\alpha(x, z) \geq 1$, $\alpha(z, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(x, y) \geq 1$ dir (Karapınar et al. 2013).

Tanım 3.2.6: $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

(T3) $\alpha(x, Tx) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, T^2x) \geq 1$

şartını sağlayan T dönüşümüne α-yörüngesel admissible dönüşüm denir (Popescu 2014).

Tanım 3.2.7: $T: X \to X$ bir α-yörüngesel admissible dönüşüm olsun. Eğer Her $x, y \in X$ için

(T4) $\alpha(x, y) \geq 1$ ve $\alpha(y, Ty) \geq 1 \Rightarrow \alpha(x, Ty) \geq 1$

ise T dönüşümüne üçgensel α-yörüngesel admissible dönüşüm denir (Popescu 2014).

Yukarıdaki tanımlardan her α-admissible dönüşüm, α- yörüngesel admissible dönüşüm ve her üçgensel α-admissible dönüşüm, üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşüm olduğu görülür. Bunların tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 3.2.8: (X, d_b) b-metrik uzay ve $\alpha: X \times X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer X de $x_n \to x \in X$ ve her n için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olacak şekilde ki her $\{x_n\}$ dizisinin her k için $\alpha(x_{n(k)}, x) \geq 1$ olacak şekilde bir $\{x_{n(k)}\}$ alt dizisi varsa X e α-regüler denir (Popescu 2014).

Tanım 3.2.9: $\{x_n\}$, X b-metrik uzayında bir dizi ve $\alpha, \beta: X \times X \to [0, \infty)$ her n için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $\beta(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ eşitsizliklerini sağlayan birer fonksiyon olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right) \geq 1$ ve $\beta(x_{n_k}, x_{n_k+1}) \geq 1$ olacak şekilde $\{x_n\}$ nin $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi mevcutsa X uzayına (α, β)-regülerdir denir (Chandok 2015).

Tanım 3.2.10: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sabit sayısı varsa T ye daraltan dönüşüm denir (Agarwal *et al.* 2007).

Şimdi Geraghty ve genelleştirilmiş Geraghty dönüşümlerden bazılarının tanımı verilecektir.

Tanım 3.2.11: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\alpha(t_n) \to 1$ iken $t_n \to 0$ şartını sağlayan tüm $\alpha: [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonlarının ailesi $\mathcal{F}$ olmak üzere T dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\big(d(x, y)\big)d(x, y)$$

şartını sağlarsa T ye X metrik uzayında Geraghty daraltan dönüşüm denir (Geraghty 1973).

Tanım 3.2.12: (X, d_b) bir b-metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\alpha(t_n) \to \frac{1}{s}$ iken $t_n \to 0$ şartını sağlayan tüm $\alpha: [0, \infty) \to \left[0, \frac{1}{s}\right)$ fonksiyonlarının ailesi $\mathcal{F}_s$ olmak üzere T dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d_b(Tx, Ty) \leq \alpha\big(d_b(x, y)\big) d_b(x, y)$$

şartını sağlarsa T ye b-metrik uzayda Geraghty daraltan dönüşüm denir (Dukic et al. 2011).

Tanım 3.2.13: (X, d_b) b-metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ ve $L \geq 0$ bir sayı olsun.

$$M(x, y) = max\left\{d_b(x, y), d_b(x, Tx), d_b(y, Ty), \frac{d_b(x, Ty) + d_b(y, Tx)}{2s}\right\},$$

$$N(x, y) = min\{d_b(x, Tx), d_b(y, Tx)\}$$

şeklinde tanımlansın. Her $x, y \in X$ için $\beta \in \mathcal{F}_s$ ve $\varphi, \phi \in \Psi$ olmak üzere

$$\alpha(x, y)\varphi\big(s^3 d(Tx, Ty)\big) \leq \beta\left(\varphi\big(M(x, y)\big)\right)\varphi\big(M(x, y)\big) + L\phi(N(x, y)) \qquad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlayan T dönüşümüne genelleştirilmiş α-φ- Geraghty daraltan dönüşüm denir (Afshari et al. 2018).

Tanım 3.2.14: (X, d_b) b-metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$, $\beta \in \mathcal{F}_s$ ve $\varphi \in \Psi$ için

$$M(x, y) = \max\left\{d_b(x, y), d_b(x, Tx), d_b(y, Ty), \frac{d_b(x, Ty) + d_b(y, Tx)}{2s}\right\}$$

olmak üzere

$$\alpha(x, y)\varphi\big(s^3 d_b(Tx, Ty)\big) \leq \beta\left(\varphi\big(M(x, y)\big)\right)\varphi\big(M(x, y)\big)$$

eşitsizliği sağlanırsa T dönüşümüne (B) tipli genelleştirilmiş α-φ-Geraghty daraltan dönüşümü denir (Afshari et al. 2018).

Tanım 3.2.15: (X, d_b) b-metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha, \beta: X \times X \to [0, \infty)$ birer fonksiyon olsun. Her sınırlı pozitif reel $\{t_n\}$ dizisi için $\theta(t_n) \to 1$ iken $t_n \to 0$ şartını sağlayan tüm $\theta: [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonlarının ailesi Θ; sürekli, kesin artan ve $\psi(0) = 0$ şartını sağlayan tüm $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonların ailesi ise Ψ olsun.

$$N(x,y) = \max\left\{d_b(x,y), d_b(x,Tx), d_b(y,Ty), \frac{d_b(x,Ty) + d_b(y,Tx)}{2s}\right\}$$

ve $\psi \in \Psi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,Tx)\beta(y,Ty)\psi(s^3 d(Tx,Ty)) \leq \theta(\psi(N(x,y)))\psi(N(x,y))$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\theta \in \Theta$ varsa T dönüşümüne (α, β)-Geraghty daraltan dönüşüm denir (Pant and Panicker 2016).

Tanım 3.2.16: (X, d_b) b-metrik uzay, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

$$C_s(x,y) = \max\left\{d_b(x,y), d_b(x,Tx), d_b(y,Ty), \frac{d_b(x,Ty) + d_b(y,Tx)}{2s}, \frac{d_b(T^2x,x) + d_b(T^2x,Ty)}{2s}, d_b(T^2x,Tx), d_b(T^2x,Ty), d_b(T^2x,y)\right\}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ ve $\beta \in \mathcal{F}_s$ için

$$s\alpha(x,y)d_b(Tx,Ty) \leq \beta(C_s(x,y))C_s(x,y) \tag{3.2}$$

eşitsizliğini sağlayan T dönüşümüne genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşüm denir (Hieu and Chac 2017).

3.3. Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Dönüşümlerin bazılarının sabit noktası bulunamadığı halde bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası bulunabilmektedir. Bu bölümde hangi dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının mevcut olduğunu ve bununla beraber sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğunu ifade eden teorem ve örnekleri vereceğiz. Aşağıdaki teorem analizde ki en basit sabit nokta teoremi olarak bilinmektedir.

Teorem 3.3.1: $[a,b]$**,** $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık olmak üzere $f:[a,b] \to [a,b]$ ye sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde en az bir $c \in [a,b]$ sayısı mevcuttur (Agarwal *et al*. 2007).

İspat: Her $x \in [a,b]$ için $Tx = x - f(x)$ şeklinde bir $T:[a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise $T(a) \leq 0$ ve $f(b) \leq b$ ise $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c) = 0$ olacağından $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ vardır.

Teorem 3.3.2 (Banach Sabit Nokta Teoremi): X bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümünün X uzayında bir tek sabit noktası vardır (Banach 1922).

İspat: (X,d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Yani her $x,y \in X$ ve $q \in (0,1)$ olmak üzere $d(T(x),T(y)) \leq qd(x,y)$ dir. Öncelikle sabit noktanın varlığı gösterilecektir. $T(x) \neq x$ olmak üzere $x \in X$ olsun. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için d metriğine art arda üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} d(T^k(x),x) &\leq d\left(T^k(x),T^{k-1}(x)\right) + d(T^{k-1}(x),x) \\ &\leq d\left(T^k(x),T^{k-1}(x)\right) + d\left(T^{k-1}(x),T^{k-2}(x) + d(T^{k-2}(x),x)\right) \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} d\left(T^i(x),T^{i-1}(x)\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

olur. T daraltan dönüşüm olduğundan her $i \in \{1,2,\dots,k\}$ için

$$d\left(T^i(x),T^{i-1}(x)\right) \leq qd\left(T^{i-1}(x),T^{i-2}(x)\right) \leq \cdots \leq q^{i-1}d(T(x),x) \tag{3.4}$$

olur. (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinden ve $0 < 1 - q^k < 1$ olduğundan

$$d(T^k(x),x) \leq \sum_{i=1}^{k} q^{i-1}d(T(x),x) \leq \frac{1-q^k}{1-q} d(T(x),x) \leq \frac{d(T(x),x)}{1-q}$$

elde edilir. Yani herhangi bir $k > m$ için

$$d\left(T^k(x), T^m(x)\right) \leq q^m d(T^{k-m}(x), x) \leq \frac{q^m d(T(x), x)}{1-q}$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin. Buradan $k > m \geq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{N}$ seçilebilir. Bu durumda $\frac{q^m d(T(x),x)}{1-q} < \varepsilon$ olur. Yani $k > m \geq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{N}$ vardır. Öyle ki $d\left(T^k(x), T^m(x)\right) < \varepsilon$ dur. Böylece $(T^n(x))_{n=1}^{\infty}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $(T^n(x))_{n=1}^{\infty}$ dizisi $x^* \in X$ noktasına yakınsar. Üstelik

$$T(x^*) = T\left(\lim_{n\to\infty} T^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = x^*$$

olur. Bu durumda x^*, X in bir sabit noktasıdır. Şimdi X in x^* ve x^{**} gibi iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. O zaman

$$d(x^*, x^{**}) = d(T(x^*), T(x^{**})) \leq q d(x^*, x^{**})$$

elde edilir. $q \in (0,1)$ olduğundan $d(x^*, x^{**}) = 0$ olur. Böylece $x^* = x^{**}$ bulunmuş olur. O halde T nin tek bir sabit noktası vardır.

Teorem 3.3.3: X tam metrik uzay olsun. $T: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere X de her $x, y \in X$ için $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ olsun. $x_0 \in X$ ve $n > 0$ için $x_n = T(x_{n-1})$ olsun. Bu durumda X de $x_n \to x_\infty$ olup x_∞, T nin tek sabit noktasıdır. Üstelik $x_{h_n} \neq x_{k_n}$ şartını sağlayan her $\{x_{h_n}\}$ ve $\{x_{k_n}\}$ alt dizileri için $d_n = d(x_n, y_n)$ ve $\Delta_n = \frac{d(T(x_n),T(y_n))}{d_n}$ olmak üzere

$$\Delta_n \to 1 \Rightarrow d_n \to 0$$

dır (Geraghty 1973).

Teorem 3.3.4: X tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm, $x_0 \in X$ ve $n > 0$ için $x_n = T(x_{n-1})$ olsun. Bu durumda x_∞, X de T nin tek sabit noktası olmak üzere $x_n \to x_\infty$ olması için gerek ve yeter şart her n, m için

$$d(T(x_n), T(x_m)) \leq \alpha\left(d(x_n, x_m)\right) d(x_n, x_m) \tag{3.5}$$

olacak şekilde $\alpha \in \mathcal{F}$ nin var olmasıdır (Geraghty 1973).

İspat: Sadece $\mathcal{F}$ de böyle bir α nın varlığının Teorem 3.3.3 ün dizisel şartına denk olduğunu göstermemiz gerekir. Önce böyle bir α olduğunu varsayalım. x_{h_n} ve x_{k_n}, $x_{h_n} \neq x_{k_n}$ olmak üzere iki alt dizi olsun. $\Delta_n \to 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.5) eşitsizliğinden $\alpha(d(x_{h_n}, x_{k_n})) \to 1$ bulunur. Ancak $\alpha \in S$ olduğundan $d(x_{h_n}, x_{k_n}) \to 0$ elde edilir. Şimdi ise dizisel şartın sağlandığını varsayalım. $\alpha: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\alpha(t) = \sup\left\{\frac{d(T(x_n), T(x_m))}{d(x_n, x_m)} : d(x_n, x_m) \geq t\right\}$$

şeklinde tanımlansın. T daraltan olduğundan, oranların tümü 1 den küçüktür ve bu nedenle α, her $t > 0$ için tanımlı olup $\alpha \leq 1$ dir. Şimdi $t_n \in \mathbb{R}^+$ için $\alpha(t_n) \to 1$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca genelliği kaybetmeden $1 - \frac{1}{n} < \alpha(t_n) \leq 1$ olduğu kabul edilebilir. $t_n \to 0$ olduğunu göstermeliyiz. Ancak $\alpha(t_n)$ en küçük üst sınırdır. Yani her $n > 0$ için

$$d(x_{h_n}, x_{k_n}) \geq t_n$$

ve

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{d(T(x_{h_n}), T(x_{k_n}))}{d(x_{h_n}, x_{k_n})} \leq \alpha(t_n)$$

olacak şekilde $\{x_n\}$ de x_{h_n} ve x_{k_n} çifti vardır. Bu nedenle $\Delta_n \to 1$ dir. Dolayısıyla Teorem 3.3.3 ün dizisel şartından $d(x_{h_n}, x_{k_n}) \to 0$ bulunur. Bu nedenle $t_n \to 0$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde b-metrik uzaylarda genelleştirilmiş Geraghty daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlık ve tekliği ile ilgili bazı çalışmalar derlenmiştir.

4.1. Genelleştirilmiş Geraghty Daraltan Dönüşümler

Bu başlık altında Faraji (2019) tarafından b-metrik uzaylarda genelleştirilmiş Geraghty daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği ile ilgili ispatlanan teoremler verilecektir.

Teorem 4.1.1: (X, d_b), $s \geq 1$ parametresi ile b-tam b-metrik uzay olsun ve $T: X \to X$ dönüşümü

$$M(x,y) = \max\left\{d_b(x,y), d_b(x,Tx), d_b(y,Ty), \frac{1}{2s}\left(d_b(x,Ty) + d_b(y,Tx)\right)\right\}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d_b(Tx,Ty) \leq \beta\big(M(x,y)\big)M(x,y) \tag{4.1}$$

şartını sağlasın. Bu durumda T nin tek sabit noktası vardır (Faraji et al. 2019).

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir sabit olsun. $\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$$

şeklinde tanımlansın. $x_{n+1} = x_n$ ise bu durumda x_n , T nin sabit noktasıdır ve ispat sona erer. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $d_b(x_{n+1}, x_n) > 0$ olduğunu kabul edelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için (4.1) den

$$d_b(x_{n+1}, x_n) = d_b(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \beta\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)M(x_{n-1}, x_n) \tag{4.2}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} M(x_{n-1}, x_n) &= \max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \\ &\qquad d_b(x_n, Tx_n), \frac{d_b(x_{n-1}, Tx_n) + d_b(x_n, Tx_{n-1})}{2s}\right\} \end{aligned}$$

$$= \max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_{-1}, x_n),$$
$$d_b(x_n, x_{n+1}), \frac{d_b(x_{n-1}, x_{n+1}) + d_b(x_n, x_n)}{2s}\Big\}$$
$$\leq \max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_{n+1}),$$
$$\frac{s(d_b(x_{n-1}, x_n) + d_b(x_n, x_{n+1})}{2s}\Big\}$$
$$= \max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_{n+1})\}$$

bulunur. Eğer $d_b(x_{n-1}, x_n) \leq d_b(x_n, x_{n+1})$ ise $M(x_{n-1}, x_n) = d_b(x_n, x_{n+1})$ olur. (4.2) den $n \in \mathbb{N}$ için

$$d_b(x_n, x_{n+1}) \leq \beta\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)M(x_{n-1}, x_n)$$
$$\leq \frac{1}{s} d_b(x_n, x_{n+1})$$

elde edilir. Bu çelişkidir. Bu nedenle

$$M(x_{n-1}, x_n) = d_b(x_n, x_{n-1})$$

olur. Burada (4.2) den $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_{n+1}) &\leq \beta\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)d_b(x_{n-1}, x_n) \\ &< d_b(x_{n-1}, x_n) \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. Böylece $\{d_b(x_{n-1}, x_n)\}$ dizisi negatif olmayan reel sayılar için azalan dizidir. Bu yüzden $n \to \infty$ iken $d_b(x_{n-1}, x_n) \to r$ olacak şekilde $r \geq 0$ vardır. $r = 0$ olduğu iddia ediliyor. Aksine $r > 0$ olduğu kabul edilirse (4.3) den

$$r \leq \limsup_{n\to\infty} \beta\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)r$$

elde edilir.

$$\frac{1}{s} \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty} \beta\big(M(x_{n-1}, x_n)\big) \leq \frac{1}{s}$$

ve $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} M(x_{n-1}, x_n) = 0$ olur. Böylece $\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, x_n) = 0$ dır ki bu çelişkidir. Buradan $r = 0$ dır. Şimdi $\{x_n\}$ in b-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Aksine $\{x_n\}$ dizisinin b-Cauchy dizisi olmadığını kabul edelim. $\{x_n\}$ in en küçük $n(k) > m(k) > k$ olacak şekilde $\{x_{m(k)}\}$ ve $\{x_{n(k)}\}$ alt dizileri için $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki

$$d_b(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon \tag{4.4}$$

ve

$$d_b(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \varepsilon \tag{4.5}$$

bulunur. (4.5) ten ve b-üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\varepsilon \leq d_b\big(x_{m(k)}, x_{n(k)}\big) \leq s\left(d_b\big(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}\big) + d_b\big(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}\big)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\big(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}\big) \tag{4.6}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} M(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \max\Big\{d_b\big(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\big), d_b\big(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}\big), \\
&\quad d_b\big(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1}\big), \frac{d_b\big(x_{m(k)}, Tx_{n(k)-1}\big) + d_b\big(x_{n(k)-1}, Tx_{m(k)}\big)}{2s}\Big\} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \max\Big\{d_b\big(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\big), d_b\big(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}\big), \\
&\quad d_b\big(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\big), \frac{d_b\big(x_{m(k)}, x_{n(k)}\big) + d_b\big(x_{n(k)-1}, x_{m(k)+1}\big)}{2s}\Big\} \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \max\Big\{d_b\big(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\big), d_b\big(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}\big), d_b\big(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\big), \\
&\quad \frac{sd_b\big(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\big) + sd_b\big(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\big)}{2s}, \\
&\quad \frac{sd_b\big(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\big) + sd_b\big(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}\big)}{2s}\Big\} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. (4.6) ve (4.1) den

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{s} &\leq \limsup d_b\big(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}\big) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \beta\left(M\big(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\big)\right) M(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&\leq \varepsilon \limsup_{k\to\infty} \beta\left(M\big(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\big)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\frac{1}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} \beta(M(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})) \leq \frac{1}{s}$ olur. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan, $M(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \to 0$ olur ki sonuç olarak $d_b(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \to 0$ dır. (4) ten ve b- üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\varepsilon \leq d_b(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq s\left(d_b(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d_b(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})\right)$$

elde edilir. Bu yüzden $\lim_{k\to\infty} d_b(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = 0$ olur. Bu (4.4) ile çelişir. Buradan $\{x_n\}$ b-Cauchy dizisidir. X in tamlığından $x_n \to u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. u nun T nin sabit noktası olduğunu gösterelim. b-üçgen eşitsizliği ve (4.1) den

$$\begin{aligned} d_b(u, Tu) &\leq s\big(d_b(u, Tx_n) + d_b(Tx_n, Tu)\big) \\ &\leq s d_b(u, Tx_n) + s\beta\big(M(x_n, u)\big)M(x_n, u). \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned} d_b(u, Tu) &\leq s \limsup_{n\to\infty} d_b(u, x_{n+1}) \\ &+ \limsup_{n\to\infty} \beta\big(M(x_n, u)\big) \limsup_{n\to\infty} M(x_n, u) \end{aligned} \tag{4.7}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} M(x_n, u) &= \limsup_{n\to\infty} \max\{d_b(x_n, u), d_b(x_n, Tx_n), \\ &\quad d(u, Tu), \frac{1}{2s}(d_b(x_n, Tu) + d_b(u, Tx_n))\Big\} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \max\{d_b(x_n, u), d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(u, Tu), \\ &\quad \frac{1}{2s}\big(sd_b(x_n, u) + sd_b(u, Tu) + d_b(u, x_{n+1})\big)\Big\} \\ &\leq d_b(u, Tu). \end{aligned}$$

olur. (4.7) den

$$d_b(u, Tu) \leq s \limsup \beta(M(x_n, u))\, d_b(u, Tu).$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\frac{1}{s} \leq \limsup_{n\to\infty} \beta\big(M(x_n, u)\big) \leq \frac{1}{s}$ bulunur. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} M(x_n, u) = 0$ sonucunu buluruz. Buradan $Tu = u$ dur. $u \in X$ in tek sabit nokta olduğunu görmek için $Tv = v$ olacak şekilde X de $v \neq u$ olduğunu kabul edelim. (4.1) den

$$d_b(u, v) = d_b(Tu, Tv) \leq \beta\big(M(u, v)\big)M(u, v)$$

olur.

$$\begin{aligned} M(u,v) &= \max\{d_b(u,v), d_b(u,Tu), d_b(v,Tv), \\ &\quad \frac{1}{2s}(d_b(u,Tv)+d_b(v,Tu))\Big\} \\ &\le d_b(u,v) \end{aligned}$$

olduğundan $d_b(u,v) < \frac{1}{s} d_b(u,v)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $u = v$ elde edilir. Yani T nin bir tek sabit noktası vardır.

Aşağıdaki teorem iki dönüşümün ortak sabit noktalarının varlığı ve tekliği ile ilgilidir.

Teorem 4.1.2: (X, d_b), $s \ge 1$ parametresi ile b-tam b-metrik uzay olsun. $T, S: X \to X$ dönüşümleri

$$M(x,y) = \max\{d_b(x,y), d_b(x,Tx), d_b(y,Sy)\}$$

ve $\beta \in \mathcal{F}_s$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$s d_b(Tx, Sy) \le \beta\big(M(x,y)\big) M(x,y) \tag{4.8}$$

eşitsizliğini sağlayan dönüşümler olsun. Eğer T veya S sürekli ise T ve S nin bir tek ortak sabit noktası vardır (Faraji et al. 2019).

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir sabit olsun. X deki $\{x_n\}$ dizisi her $n = 0,1, \ldots$ için $x_{2n+1} = Tx_{2n}$ ve $x_{2n+2} = Sx_{2n+1}$ şeklinde tanımlansın. (4.8) den

$$\begin{aligned} s d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= s d_b(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \\ &\le \beta(M(x_{2n}, x_{2n+1})) M(x_{2n}, x_{2n+1}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. Buradan $n = 0,1,2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} M(x_{2n}, x_{2n+1}) &= max\{d_b(x_{2n}, x_{2n+1}), d_b(x_{2n}, Tx_{2n}), d_b(x_{2n+1}, Sx_{2n+1})\} \\ &= max\{d_b(x_{2n}, x_{2n+1}), d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})\} \end{aligned}$$

olur. $M(x_{2n}, x_{2n+1}) = d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})$ ise buradan

$$s d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le \beta(M(x_{2n}, x_{2n+1})) d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) < \frac{1}{s} d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

olur ki bu çelişkidir. Bu nedenle $M(x_{2n}, x_{2n+1}) = d_b(x_{2n}, x_{2n+1})$ elde edilir.(4.9) dan

$$\begin{aligned} d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &\leq \beta(M(x_{2n}, x_{2n+1}))d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) \\ &\leq \frac{1}{s} d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Bu durumda, $d_b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq d_b(x_{2n}, x_{2n+1})$ olur. Benzer şekilde $d_b(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq d_b(x_{2n+2}, x_{2n+1})$ olur. Böylece $d_b(x_n, x_{n+1}) \leq d_b(x_{n-1}, x_n)$ elde edilir. $n \to \infty$ iken $d_b(x_n, x_{n+1}) \to r$ olacak şekilde $r \geq 0$ vardır. Bu nedenle $\{d_b(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi artmayan dizidir. Aksine $r > 0$ olduğunu farzedelim. (4.10) da $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$r \leq \limsup_{n\to\infty} \beta(M(x_{2n}, x_{2n+1}))r$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{s} \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty} \beta(M(x_{2n}, x_{2n+1})) \leq \frac{1}{s}$$

olur. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} M(x_{2n}, x_{2n+1}) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$r = \lim_{n\to\infty} d_b(x_{2n}, x_{2n+1}) = 0$$

olur ki bu çelişkidir. Şimdi $\{x_{2n}\}$ in b-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Aksine $\{x_{2n}\}$ in b- Cauchy dizisi olmadığını kabul edelim. $\{x_{2n}\}$ in $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle $n(k) > m(k) > k$ olacak şekilde $\{x_{2m(k)}\}$ ve $\{x_{2n(k)}\}$ alt dizileri vardır ki

$$d_b(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}) \geq \varepsilon \tag{4.11}$$

ve

$$d_b(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-2}) < \varepsilon \tag{4.12}$$

olur. (4.8), (4.11) ve b-üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d_b\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}\big) \\ &\leq sd_b\big(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}\big) + sd_b\big(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)}\big) \\ &= sd_b\big(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}\big) + sd_b\big(Tx_{2n(k)}, Sx_{2m(k)-1}\big) \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\leq sd_b\big(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}\big)$$
$$+\ \beta(M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big))M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big)$$

elde edilir. Buradan

$$M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big) \quad = \max\{d_b\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big),$$
$$d_b\big(x_{2n(k)}, Tx_{2n(k)}\big), d_b(x_{2m(k)-1},, Sx_{2m(k)-1})\}$$

olur. $k \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\limsup_{k\to\infty} M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big) = \limsup_{k\to\infty} d_b\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big)$$

elde edilir. b-üçgen eşitsizliğinden

$$d_b\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big) \leq s(d_b\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-2}\big) + d_b\big(x_{2m(k)-2},, x_{2m(k)-1}\big))$$

bulunur. Tekrar eşitsizlikte $k \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\limsup_{k\to\infty} d_b\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big) \leq s\varepsilon \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.13) ve (4.14) ten

$$\begin{aligned}\varepsilon \quad &\leq \limsup_{k\to\infty}(\beta(M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big))M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big)\\ &= \limsup_{k\to\infty} \beta(M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big)) \limsup_{k\to\infty} d(M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big))\\ &\leq s\varepsilon \limsup_{k\to\infty}(\beta(M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big))\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\frac{1}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} \beta(M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big)) \leq \frac{1}{s}$$

olur. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} M\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big) = 0$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\lim_{k\to\infty} d_b\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big) = 0 \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.11) den ve b-üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\varepsilon \leq d_b\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}\big) \leq s(d_b\big(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}\big) + d_b\big(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}\big))$$

bulunur. Eşitsizlikte $k \to \infty$ iken limit alınır ve (4.15) kullanılırsa ,

$$\limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}\right) = 0$$

elde edilir. (4.11) den bu çelişkidir. $\{x_{2n}\}$ ve böylece $\{x_n\}$ in b-Cauchy dizisi olduğu açıktır. $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır. T nin sürekliliğinden

$$Tx^* = \lim_{n\to\infty} Tx_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = x^*$$

elde edilir. (4.8) den

$$sd_b(x^*, Sx^*) = sd_b(Tx^*, Sx^*) \leq \beta(M(x^*, x^*))M(x^*, x^*)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} M(x^*, x^*) &= \max\{d_b(x^*, x^*), d_b(x^*, Tx^*), d_b(x^*, Sx^*)\} \\ &= d_b(x^*, Sx^*) \end{aligned}$$

dır. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan

$$sd_b(x^*, Sx^*) \leq \beta(M(x^*, x^*))d_b(x^*, Sx^*) \leq \frac{1}{s} d_b(x^*, Sx^*)$$

elde edilir. Buradan $Sx^* = x^*$ dır. S nin sürekliliğinden benzer düşünce ile T ve S nin ortak sabit noktası olduğu gösterilebilir. Şimdi, ortak sabit noktanın tekliğini ispatlayalım. $y = Ty = Sy$, T ve S nin farklı ortak sabit noktası olsun. (4.8) den

$$sd_b(x^*, y) = sd_b(Tx^*, Sy) \leq \beta(M(x^*, y))M(x^*, y)$$

elde edilir. Burada

$$M(x^*, y) = \max\{d_b(x^*, y), d_b(x^*, Tx^*), d_b(y, Sy)\} = d_b(x^*, y)$$

dır. O halde $x^* = y$ ve T ve S nin ortak sabit noktası tektir.

4.2. Genelleştirilmiş α-φ- Geraghty Daraltan Dönüşümler

Bu başlıkta Afshari et al. (2018) tarafından b-metrik uzaylarda tanımlı genelleştirilmiş α-φ- Geraghty daraltan ve (B) tipli genelleştirilmiş α-φ- Geraghty daraltan dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili teoremlere yer verilecektir. Öncelikle bu teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan aşağıdaki lemma ve notu vereceğiz.

Lemma 4.2.1: $T: X \to X$ üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşüm olsun. $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ olduğunu kabul edelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$

dizisini $x_{n+1} = Tx_n$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ için $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ dir (Popescu 2014).

Not 4.2.2. $\mathcal{F}_s$ e ait olan fonksiyonlar $\frac{1}{s}$ den daha küçük olduğundan (3.1) eşitsizliğinden her $x, y \in X, x \neq y$ için

$$\beta\left(\varphi\big(M(x,y)\big)\right) < \frac{1}{s}$$

elde edilir (Afshari et al. 2018).

Teorem 4.2.3: (X, d_b) tam b-metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü

(i) T üçgensel α-yörüngesel admissible dönüşümdür.

(ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

(iii) T süreklidir.

şartlarını sağlayan genelleştirilmiş α-φ- Geraghty daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır (Afshari et al. 2018).

İspat. $x_0 \in X$ için $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olsun. $\{x_n\}$ dizisini $x_{n+1} = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ şeklinde oluşturalım. Eğer $Tx_{n_0} = x_{n_0}$ olacak şekilde n_0 varsa, x_{n_0} T nin sabit noktasıdır ki bu ispatı tamamlar. Böylece genelliği kaybetmeden her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_n \neq x_{n+1} \tag{4.16}$$

olduğunu kabul edebiliriz. T dönüşümü üçgensel α- yörüngesel admissible olduğundan, Lemma 4.3 den her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \tag{4.17}$$

elde ederiz. (3.1) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alınırsa, (4.17) eşitsizliği ve φ nin artan fonksiyon olduğu kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\varphi\big(d_b(x_n, x_{n+1})\big) &= \varphi(d_b(Tx_{n-1}, Tx_n)\\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n)\varphi(s^3 d(Tx_{n-1}, Tx_n))\\ &\leq \beta\left(\varphi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)\right)\varphi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big) + L\phi(N(x_{n-1}, x_n))\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. Burada

$$M(x_{n-1}, x_n) \quad = \max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_{n-1}, Tx_{n-1}),$$

$$d_b(x_n, Tx_n), \frac{d_b(x_{n-1}, Tx_n) + d_b(x_n, Tx_{n-1})}{2s}\Bigg\}$$
$$= \max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_{n+1}),$$
$$\frac{d_b(x_{n-1}, x_{n+1}) + d_b(x_n, x_n)}{2s}\Bigg\}$$
$$= \max\left\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_{n+1}), \frac{d_b(x_{n-1}, x_{n+1})}{2s}\right\}$$

olur ve

$$\begin{aligned} N(x_{n-1}, x_n) &= \min\{d_b(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d_b(x_n, Tx_{n-1})\} \\ &= \min\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_n)\} = 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d_b(x_{n-1}, x_{n+1})}{2s} &\le \frac{s[d_b(x_{n-1}, x_n) + d_b(x_n, x_{n+1})]}{2s} \\ &\le \max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_{n+1})\} \end{aligned}$$

olur ve

$$M(x_{n-1}, x_n) \le \max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_{n+1})\}$$

elde edilir. (4.19) ve (4.18) hesaba katılırsa (4.17) den

$$\begin{aligned} \varphi\big(d_b(x_n, x_{n+1} &\le \varphi(s^3 d_b(x_n, x_{n+1})) \\ &\le \alpha(x_{n-1}, x_n)\varphi(s^3 d_b(x_n, x_{n+1})) \\ &\le \beta\left(\varphi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)\right)\varphi(\max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_{n+1})\}) \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\max\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_{n+1})\} = d_b(x_n, x_{n+1})$ elde edilir. Burada (4.20) ve Not 4.2.2 den

$$\begin{aligned} \varphi(d_b(x_n, x_{n+1})) &\le \beta(\varphi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)\varphi(d_b(x_n, x_{n+1})) \\ &< \frac{1}{s}\varphi(d_b(x_n, x_{n+1})) < \varphi(d_b(x_n, x_{n+1})) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu çelişkidir. Bu nedenle (4.20) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \varphi\big(d_b(x_n, x_{n+1})\big) &\le \beta\left(\varphi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)\right)\varphi\big(d_b(x_{n-1}, x_n)\big) \\ &< \frac{1}{s}\varphi\big(d_b(x_{n-1}, x_n)\big) \\ &< \varphi(d_b(x_{n-1}, x_n)) \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{\varphi(d_b(x_n, x_{n+1}))\}$ negatif olmayan azalan bir dizidir. φ artan olduğundan $\{d_b(x_n, x_{n+1})\}$ artmayan dizidir. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} d_b(x_n, x_{n+1}) = \delta$ olacak şekilde $\delta \ge 0$ vardır. $\delta = 0$ olduğu iddia ediliyor. Kabul edelim ki aksine

$$\lim_{n\to\infty} d_b(x_n, x_{n+1}) = \delta > 0$$

olsun. $s \geq 1$ olduğundan (4.21) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}\varphi(d_b(x_n, x_{n+1})) &\leq \varphi\big(d_b(x_n, x_{n+1})\big) \\ &\leq \beta\left(\varphi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)\right)\varphi(d_b(x_{n-1}, x_n)) \end{aligned} \tag{4.22}$$

olduğu hesaplanmıştır. (4.16) ve (4.22) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{s}\frac{\varphi(d_b(x_n, x_{n+1}))}{\varphi(d_b(x_{n-1}, x_n))} \leq \beta\left(\varphi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)\right) < \frac{1}{s}$$

elde edilir. Burada $\lim_{n\to\infty}\beta\left(\varphi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big)\right) = \frac{1}{s}$ olur. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi\big(M(x_{n-1}, x_n)\big) = 0$ elde edilir ve

$$\lim_{n\to\infty}\varphi\big(d_b(x_n, x_{n+1})\big) = 0$$

sonucu çıkarılır. Bu nedenle, φ nin sürekliliği ve $d_b(x_n, x_{n+1}) \to \delta$ olduğu hesaba katılarak $\varphi(\delta) = 0$ elde edilir. $\varphi^{-1}((\{0\}) = \{0\}$ olduğundan $\delta = 0$ elde edilir ki bu çelişkidir. Bu nedenle

$$\lim_{n\to\infty} d_b(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{4.23}$$

bulunur. Şimdi

$$\lim_{m,n\to\infty} d_b(x_n, x_m) = 0$$

olduğu gösterilecektir. Aksine bir $\varepsilon > 0$ için $n_i > m_i \geq i$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisinin

$$d_b(x_{m_i}, x_{n_i}) \geq \varepsilon \tag{4.24}$$

eşitsizliğini sağlayan $\{x_{m_i}\}$ ve $\{x_{n_i}\}$ alt dizilerinin olduğunu kabul edelim. Buna ek olarak her m_i için $n_i > m_i \geq i$ olmak üzere ve n_i, (4.24) ü sağlayacak şekilde en küçük tam sayı seçilebilir. Buradan

$$d_b(x_{m_i}, x_{n_{i-1}}) < \varepsilon \tag{4.25}$$

olur. (4.24) ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq d_b\big(x_{n_i}, x_{m_i}\big) &\leq s d_b\big(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}\big) + s d_b(x_{n_{i+1}}, x_{m_i}) \\ &\leq s d_b\big(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}\big) + s^2 d_b\big(x_{n_{i+1}}, x_{m_{i+1}}\big) + s^2 d_b(x_{m_{i+1}}, x_{m_i}) \end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. $i \to \infty$ için limit alınır ve (4.23) göz önüne alınırsa (4.26) eşitsizliğinden

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leq \limsup_{i\to\infty} d_b(x_{n_{i+1}}, x_{m_{i+1}}) \tag{4.27}$$

bulunur. Lemma 4.2.1 den, $\alpha(x_{m_i}, x_{n_i}) \geq 1$ olduğunu hatırlayalım. Sonuç olarak, (3.1) den

$$\begin{aligned} \varphi\left(d_b(x_{n_{i+1}}, x_{m_{i+1}})\right) &= \varphi\left(d_b(Tx_{n_i}, Tx_{m_i})\right) \\ &\leq \varphi(s^3 d_b(Tx_{n_i}, Tx_{m_i})) \\ &\leq \alpha(x_{m_i}, x_{n_i})\varphi(s^3 d_b(Tx_{n_i}, Tx_{m_i})) \\ &\leq \beta\left(\varphi\left(M(x_{n_i}, x_{m_i})\right)\right)\varphi\left(M(x_{n_i}, x_{m_i})\right) + L\phi\left(d_b(x_{m_i}, Tx_{n_i})\right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} M(x_{n_i}, x_{m_i}) &= \max\Big\{d_b(x_{n_i}, x_{m_i}), d_b(x_{n_i}, Tx_{n_i}), \\ &\qquad d_b(x_{m_i}, Tx_{m_i}), \frac{d_b(x_{n_i}, Tx_{m_i}) + d_b(x_{m_i}, Tx_{n_i})}{2s}\Big\} \\ &= \max\Big\{d_b(x_{n_i}, x_{m_i}), d_b(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}), \\ &\qquad d_b(x_{m_i}, x_{m_{i+1}}), \frac{d_b(x_{n_i}, x_{m_{i+1}}) + d_b(x_{m_i}, x_{n_{i+1}})}{2s}\Big\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N(x_{n_i}, x_{m_i}) &= \min\{d_b(x_{n_i}, Tx_{n_i}), d_b(x_{m_i}, Tx_{n_i})\} \\ &= \min\{d_b(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}), d_b(x_{m_i}, x_{n_{i+1}})\} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d_b(x_{n_i}, x_{m_{i+1}}) + d_b(x_{m_i}, x_{n_{i+1}})}{2s} &\leq \frac{1}{2s}\{s[d_b(x_{n_i}, x_{m_i}) + d_b(x_{m_i}, x_{m_{i+1}})] \\ &\qquad + s[d_b(x_{m_i}, x_{n_i}) + d_b(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}]\} \end{aligned} \tag{4.29}$$

ve

$$d_b(x_{n_i}, x_{m_i}) \leq s[d_b(x_{n_i}, x_{n_{i-1}}) + d_b(x_{n_{i-1}}, x_{m_i})] < s d_b(x_{n_i}, x_{n_{i-1}}) + s\varepsilon \tag{4.30}$$

elde edilir. (4.24), (4.29) ve (4.30) göz önüne alınırsa

$$\limsup_{i\to\infty} M(x_{n_i}, x_{m_i}) \leq s\varepsilon \tag{4.31}$$

ve

$$\lim_{i\to\infty} N(x_{n_i}, x_{m_i}) = 0 \tag{4.32}$$

olur. $i \to \infty$ için üst limit alınır ve (4.27),(4.31) ve (4.32) ifadeleri ile birlikte (T4) şartı kullanılarsa (4.28) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\varphi(s\varepsilon) \leq \varphi(s\varepsilon) \quad &\leq \limsup_{i\to\infty} \varphi(s^3 d_b(x_{n_{i+1}}, x_{m_{i+1}})) \\
&\leq \limsup_{i\to\infty} \alpha(x_{m_i}, x_{n_i})\varphi(s^3 d_b(x_{n_{i+1}}, x_{m_{i+1}})) \\
&= \limsup_{i\to\infty} \alpha(x_{m_i}, x_{n_i})\varphi(s^3 d_b(Tx_{n_i}, x_{m_i})) \\
&\leq \limsup_{i\to\infty} \left[\beta\left(\varphi\left(M(x_{n_i}, x_{m_i})\right)\right)\varphi\left(M(x_{n_i}, x_{m_i})\right) + L\phi(N\left(d_b(x_{n_i}, x_{m_i})\right))\right] \\
&\leq \varphi(s\varepsilon) \limsup_{i\to\infty} \beta(\varphi\left(M(x_{n_i}, x_{m_i})\right)) \\
&\leq \frac{1}{s}\varphi(s\varepsilon)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lim_{i\to\infty} sup\, \beta\left(\varphi\left(M(x_{n_i}, x_{m_i})\right)\right) = \frac{1}{s}$ dir. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan,

$$\limsup_{i\to\infty} \varphi\left(M(x_{n_i}, x_{m_i})\right) = 0$$

olur. Bu nedenle

$$\lim_{i\to\infty} \varphi\left(d_b(x_{n_i}, x_{m_i})\right) = 0$$

sonucu bulunur.φ nin sürekliliği ve $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ olduğundan,

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{n_i}, x_{m_i}) = 0$$

elde edilir ki bu (4.24) ile çelişir. $\{x_n\}$ dizisi (X, d_b) uzayında bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varılır. (X, d_b) tam b-metrik uzay olduğundan, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır. T dönüşümünün sürekli ve $Tx^* = x^*$ olduğu açıktır.

Teorem 4.2.4: (X, d_b) tam b-metrik uzay ve $T: X \to X$ aşağıdaki özellikleri sağlayan genelleştirilmiş α-φ- Geraghty daralma dönüşümü olsun:

(i) T üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşümdür.

(ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

(iii) X α-regülerdir.

Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir (Afshari et al. 2018).

İspat. Teorem 4.2.3 ün ispatından hareketle, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ dır. X α-regüler ve $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olduğundan her k için

$$\alpha(x_{n_k}, x^*) \geq 1 \tag{4.33}$$

olacak şekilde $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d_b(x^*, Tx^*) &\leq s d_b(x^*, x_{n_k+1}) + s d_b(x_{n_k+1}, Tx^*) \\ &= s d_b(x^*, x_{n_k+1}) + s d_b(Tx_{n_k}, Tx^*) \end{aligned}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$d_b(x^*, Tx^*) \leq \lim_{k\to\infty} inf\, s d_b(Tx_{n_k}, Tx^*) \tag{4.34}$$

bulunur. $\varphi \in \Psi$, (4.33) ve (4.34) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \varphi(s^2 d_b(x^*, Tx^*)) &\leq \lim_{k\to\infty} \varphi(s^3 d_b(Tx_{n_k}, Tx^*)) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \alpha(x_{n_{k+1}}, x^*)\varphi(s^3 d_b(Tx_{n_k}, Tx^*)) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \left[\beta\left(\varphi\left(M(x_{n_k}, x^*)\right)\right)\varphi\left(M(x_{n_k}, x^*)\right) + L\phi(N(x_{n_k}, x^*))\right] \end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} M(x_{n_k}, x^*) &= \max\Big\{d_b(x_{n_k}, x^*), d_b(x_{n_k}, Tx_{n_k}), \\ &\qquad d_b(x^*, Tx^*), \frac{d_b(x_{n_k}, Tx^*) + d_b(x^*, Tx_{n_k})}{2s}\Big\} \\ &= \max\Big\{d_b(x_{n_k}, x^*), d_b(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}), \\ &\qquad d_b(x^*, Tx^*), \frac{d_b(x_{n_k}, Tx^*) + d_b(x^*, x_{n_{k+1}})}{2s}\Big\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N(x_{n_k}, x^*) &= min\{d_b(x_{n_k}, Tx_{n_k}), d_b(x^*, Tx_{n_k})\} \\ &= min\{d_b(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}), d_b(x^*, x_{n_{k+1}})\} \end{aligned}$$

bulunur. Hatırlanırsa

$$\frac{d_b(x_{n_k}, Tx^*) + d_b(x^*, x_{n_{k+1}})}{2s} \leq \frac{s d_b(x_{n_k}, x^*) + s d_b(x^*, Tx^*) + d_b(x^*, x_{n_{k+1}})}{2s}$$

şeklindedir. (4.21) den

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{d_b\left(x_{n_k}, Tx^*\right) + d_b\left(x^*, x_{n_{k+1}}\right)}{2s} \leq \frac{d_b(x^*, Tx^*)}{2}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{k\to\infty} M\left(x_{n_k}, x^*\right) = d_b(x^*, Tx^*)$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} N\left(x_{n_k}, x^*\right) = 0$$

sonucuna varılır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\beta\left(\varphi\left(M\left(x_{n_k}, x^*\right)\right)\right) \leq \frac{1}{s}$ olduğundan ve (4.35) den

$$\varphi(s^2 d_b(x^*, Tx^*)) \leq \frac{1}{s}\varphi(d_b(x^*, Tx^*)) \leq \varphi(d_b(x^*, Tx^*))$$

elde edilir. $\varphi \in \Psi$ olduğundan, $d_b(x^*, Tx^*) = 0$ dır. Burada $Tx^* = x^*$ ve x^* T nin sabit noktasıdır.

Genelleştirilmiş α-φ- daralma dönüşümünün sabit noktasının tekliği için, aşağıdaki hipotezi göz önüne alalım.

(H) Her $x, y \in F(T)$ için ya $\alpha(x, y) \geq 1$ veya $\alpha(y, x) \geq 1$ dir.

Teorem 4.2.5: Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.4 ün ifadelerine (H) hipotezi eklenirse, T nin sabit noktasının tekliği elde edilir (Afshari et al. 2018).

İspat. T nin x^* ve y^* gibi iki sabit noktasının olduğunu kabul edelim. $M(x^*, y^*) = d(x^*, y^*)$ ve $N(x^*, y^*) = 0$ olduğu açıktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\varphi(d(x^*, y^*)) &\leq \varphi(s^3 d(Tx^*, Ty^*)) \\
&\leq \alpha(x^*, y^*)\varphi(s^3 d(Tx^*, Ty^*)) \\
&\leq \beta\left(\varphi\left(M(x^*, y^*)\right)\right)\varphi\left(M(x^*, y^*)\right) + L\phi\left(N(x^*, y^*)\right) \\
&< \frac{1}{s}\varphi(d(x^*, y^*)) \\
&\leq \varphi\left(d(x^*, y^*)\right)
\end{aligned}$$

olur ki bu ise bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup T nin sabit noktası tektir.

Teorem 4.2.3, 4.2.4 ve 4.2.5 in ispatlarından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.6: (X, d_b) tam b-metrik uzay ve $T: X \to X$ dönşümü

(i) T üçgensel α-yörüngesel admissible dönüşümdür.

(ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

(iii) T sürekli veya X α-regülerdir.

şartlarını sağlayan (B) tipli genelleştirilmiş α-φ- Geraghty daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T nin bir sabit noktası vardır (Afshari et al. 2018).

Teorem 4.2.7: Teorem 4.2.6 in ifadesine (H) hipotezi eklenirse T nin sabit noktasının tekliği elde edilir.

4.3. Genelleştirilmiş α-Geraghty Daraltan Dönüşümler

Şimdi Hieu and Chac (2017) tarafından genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili ispatlanan teoremler verilecektir. Bu teoremlerden önce ana teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan Aghajani et al. (2014) ve Popescu (2014) tarafından ispatlanan aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 4.3.1: (X, d_b) b-metrik uzay ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ olsun. Bu durumda

1. $\frac{1}{s^2} d_b(x, y) \leq \liminf_{n\to\infty} d_b(x_n, y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} d_b(x_n, y_n) \leq s^2 d_b(x, y)$dir. Özellikle $x = y$ ise $\lim_{n\to\infty} d_b(x_n, y_n) = 0$ dır.
2. Her $z \in X$ için $\frac{1}{s} d_b(x, z) \leq \liminf_{n\to\infty} d_b(x_n, z) \leq \limsup_{n\to\infty} d_b(x_n, z) \leq s d_b(x, z)$ dir (Aghajani et al. 2014).

Lemma 4.3.2: $T: X \to X$ bir üçgensel α-yörüngesel admissible dönüşüm olsun. $\alpha(x_1, Tx_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_1 \in X$ olduğunu kabul edelim ve $\{x_n\}$ dizisi her $n \geq 1$ için $x_{n+1} = Tx_n$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $m > n \geq 1$ için $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ dir (Popescu 2014).

Şimdi ana teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.3.3: (X, d_b) tam b-metrik uzay, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ ve $T: X \to X$ dönüşümleri

1. T genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşümdür.
2. T üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşümdür.
3. $\alpha(x_1, Tx_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_1 \in X$ vardır.
4. T süreklidir.

şartlarını sağlasın. Bu durumda T nin $z \in X$ sabit noktası vardır ve $\{T^n x_1\}$, z ye yakınsar (Hieu and Chac 2017).

İspat. $x_1 \in X$, $\alpha(x_1, Tx_1) \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan nokta olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi her $n \geq 1$ için $x_{n+1} = Tx_n$ şeklinde tanımlansın. Lemma 4.3.2 kullanılarak her $n \geq 1$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ elde edilir. T genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} sd_b(x_{n+1}, x_{n+2}) &= sd_b(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq s\alpha(x_n, x_{n+1}) d_b(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq \beta(C_s(x_n, x_{n+1})) C_s(x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} &\max\{d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_{n+1}, x_{n+2})\} \\ &\leq C_s(x_n, x_{n+1}) \\ &= \max\{d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_n, Tx_n), \\ &\quad d_b(x_{n+1}, Tx_{n+1}), \frac{d_b(x_n, Tx_{n+1}) + d_b(x_{n+1}, Tx_n)}{2s}, \\ &\quad \frac{d_b(T^2x_n, x_n) + d_b(T^2x_n, Tx_{n+1})}{2s}, d_b(T^2x_n, Tx_n), \\ &\quad d_b(T^2x_n, Tx_{n+1}), d_b(T^2x_n, x_{n+1}\} \\ &= \max\{d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_{n+1}, x_{n+2}), \\ &\quad \frac{d_b(x_n, x_{n+2}) + d_b(x_{n+1}, x_{n+1})}{2s}, \\ &\quad \frac{d_b(x_{n+2}, x_n) + d_b(x_{n+2}, x_{n+2})}{2s}, \\ &\quad d_b(x_{n+2}, x_{n+1}), d_b(x_{n+2}, x_{n+2}), d_b(x_{n+2}, x_{n+1})\} \\ &= \max\left\{d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_{n+1}, x_{n+2}), \frac{d_b(x_n, x_{n+2})}{2s}\right\} \\ &\leq \max\{d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_{n+1}, x_{n+2}), \end{aligned}$$

$$\left.\frac{d_b(x_n,x_{n+1})+d_b(x_{n+1},x_{n+2})}{2}\right\}$$

$$=\max\{d_b(x_n,x_{n+1}),d_b(x_{n+1},x_{n+2})\}$$

bulunur. Bu ise

$$C_s(x_n,x_{n+1})=\max\{d_b(x_n,x_{n+1}),d_b(x_{n+1},x_{n+2})\} \tag{4.37}$$

olmasını gerektirir. (4.36) ve (4.37) den

$$\begin{aligned} sd_b(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \{\beta(\max\{d_b(x_n,x_{n+1}),d_b(x_{n+1},x_{n+2})\}) \\ &\max\{d_b(x_n,x_{n+1}),d_b(x_{n+1},x_{n+2})\} \end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir. $\max\{d_b(x_n,x_{n+1}),d_b(x_{n+1},x_{n+2})\}=d_b(x_{n+1},x_{n+2})$ olacak şekilde $n\geq 1$ varsa, (4.38) den

$$\begin{aligned} sd_b(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \beta(d_b(x_{n+1},x_{n+2}))d_b(x_{n+1},x_{n+2}) \\ &< \frac{1}{s}d_b(x_{n+1},x_{n+2}) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{s^2-1}{s}d_b(x_{n+1},x_{n+2})<0$$

dır. Bu ise $s\geq 1$ olması ile çelişir. Bu nedenle, her $n\geq 1$ için $\max\{d_b(x_n,x_{n+1}),d_b(x_{n+1},x_{n+2})\}=d_b(x_n,x_{n+1})$ bulunur. (4.38) den

$$\begin{aligned} sd_b(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \beta(d_b(x_n,x_{n+1}))d_b(x_n,x_{n+1}) \\ &< \frac{1}{s}d_b(x_n,x_{n+1}) \\ &\leq sd_b(x_n,x_{n+1}) \end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. Buradan $\{d_b(x_n,x_{n+1})\}$ nin negatif olmayan reel sayıların azalan olmayan bir dizisi olduğu çıkar. Bu nedenle, $\lim_{n\to\infty} d_b(x_n,x_{n+1})=r$ olacak şekilde $r\geq 0$ vardır. $r=0$ olduğunu gösterelim. Aksine $r>0$ olduğunu kabul edelim. (4.39) dan

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}d_b(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \beta(d_b(x_n,x_{n+1}))d_b(x_n,x_{n+1}) \\ &< \frac{1}{s}d_b(x_n,x_{n+1}) \end{aligned} \tag{4.40}$$

elde edilir. (4.40) da $n\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\frac{1}{s}r \leq \ \mathrm{r}\lim_{n\to\infty} \beta(d_b(x_n, x_{n+1})) \leq \frac{1}{s}r$$

bulunur. Bu ise $\lim_{n\to\infty} \beta\big(d_b(x_n, x_{n+1})\big) = \frac{1}{s}$ olmasını gerektirir. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} d_b(x_n, x_{n+1}) = 0$$

olur ki bu durum $r = 0$ olması ile çelişir. Bu nedenle,

$$\lim_{n\to\infty} d_b(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{4.41}$$

bulunur. Şimdi $\{x_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayacağız. Aksine $\{x_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olmadığını kabul edelim. Buradan bir $\varepsilon > 0$ için $m(k)$, $m(k) > n(k) > k \geq 1$ şartını sağlayan en küçük indis olmak üzere $\{x_n\}$ nin

$$d_b(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \varepsilon \tag{4.42}$$

olacak şekilde $\{x_{n_k}\}$ ve $\{x_{m_k}\}$ alt dizileri vardır. Buradan

$$d_b(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}) < \varepsilon \tag{4.43}$$

dur. Bu durumda (4.42) ve (4.43) den

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d_b\big(x_{n(k)}, x_{m(k)}\big) \\ &\leq s d_b\big(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}\big) + s d_b\big(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}\big) \\ &< \varepsilon s + s d_b\big(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}\big) \end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir. (4.44) de $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.41) kullanılırsa

$$\varepsilon \leq \liminf_{k\to\infty} d_b\big(x_{n(k)}, x_{m(k)}\big) \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\big(x_{n(k)}, x_{m(k)}\big) \leq \varepsilon s \tag{4.45}$$

olur. (4.42) den tekrar

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d_b\big(x_{m(k)}, x_{n(k)}\big) \\ &\leq s d_b\big(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}\big) + s d_b\big(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\big) \\ &\leq s d_b\big(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}\big) + s^2 d_b\big(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}\big) + s^2 d_b\big(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\big) \end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir. (4.46) da $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.41) kullanılırsa

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leq \liminf_{k\to\infty} d_b\big(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\big) \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\big(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\big) \tag{4.47}$$

bulunur. (4.43) den, ayrıca

$$\begin{aligned} d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) &\leq s d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right) + s d_b\left(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}\right) \\ &< s d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right) + s\varepsilon \end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.48) de $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.41) kullanılırsa,

$$\liminf_{k\to\infty} d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) \leq \varepsilon s \tag{4.49}$$

olur. (4.47) ile (4.49) birleştirilirse,

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leq \liminf_{k\to\infty} d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) \leq \varepsilon s \tag{4.50}$$

bulunur. (4.42) den ayrıca

$$\varepsilon \leq d_b\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq s d_b\left(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}\right) + s d_b\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right) \tag{4.51}$$

elde edilir. (4.51) de $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.41) kullanılarak,

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \liminf_{k\to\infty} d_b\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right) \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right) \leq \varepsilon s \tag{4.52}$$

bulunur. Ayrıca

$$\varepsilon \leq d_b\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq s d_b\left(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\right) + s d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right) \tag{4.53}$$

ve

$$d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right) \leq s d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) + s d_b\left(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}\right) \tag{4.54}$$

olur. (4.53) ve (4.54) de $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.41) ile (4.50) kullanılırsa

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \liminf_{k\to\infty} d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right) \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right) \leq \varepsilon s^2 \tag{4.55}$$

elde edilmiş olur. Buradan

$$\varepsilon \leq d_b\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) \leq s d_b\left(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}\right) + s d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)}\right) \tag{4.56}$$

ve

$$d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)}\right) \leq s d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}\right) + s d_b\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) \tag{4.57}$$

dir. (4.56) ve (4.57) de $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.41) ile (4.45) kullanılırsa

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \liminf_{k\to\infty} d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)}\right) \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)}\right) \leq \varepsilon s^2 \tag{4.58}$$

bulunur. Ayrıca

$$d_b\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right) \leq s d_b\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)+1}\right) + s d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}\right) \tag{4.59}$$

ve

$$d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)-1}\right) \leq s d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}\right) + s d_b\left(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}\right) \tag{4.60}$$

dır. (4.59),(4.60) da $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.41), (4.43), (4.52) kullanılırsa

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leq \lim_{k\to\infty} \inf d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)-1}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sup d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)-1}\right) \leq \varepsilon s \tag{4.61}$$

elde edilir. $m(k)-1 > n(k)-1$ olduğundan ve Lemma 4.3.2 den $\alpha(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) \geq 1$ elde edilir. Bu durumda (3.1) den

$$\begin{aligned} s d_b\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) &= s d_b\left(T x_{n(k)-1}, T x_{m(k)-1}\right) \\ &\leq s\alpha(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) d_b\left(T x_{n(k)-1}, T x_{m(k)-1}\right) \\ &\leq \beta(C_s\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right)) C_s\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) \end{aligned} \tag{4.62}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} C_s\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right) &= \max\Big\{d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right), d_b\left(x_{n(k)-1}, T x_{n(k)-1}\right), \\ &\quad d_b\left(x_{m(k)-1}, T x_{m(k)-1}\right), \\ &\quad \frac{d_b\left(x_{n(k)-1}, T x_{m(k)-1}\right) + d_b\left(x_{m(k)-1}, T x_{n(k)-1}\right)}{2s}, \\ &\quad \frac{d_b\left(T^2 x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}\right) + d_b\left(T^2 x_{n(k)-1}, T x_{m(k)-1}\right)}{2s} \\ &\quad d_b\left(T^2 x_{n(k)-1}, T x_{n(k)-1}\right), d_b\left(T^2 x_{n(k)-1}, T x_{m(k)-1}\right), \\ &\quad d_b(T^2 x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\Big\} \\ &= \max\Big\{d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}\right), d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right), \\ &\quad d_b\left(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}\right), \\ &\quad \frac{d_b\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right) + d_b\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right)}{2s}, \\ &\quad \frac{d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{n(k)-1}\right) + d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)}\right)}{2s}, \\ &\quad \left(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}\right), d_b\left(x_{n(k)+1}, x_{m(k)}\right), \\ &\quad d_b(x_{n(k)+1}, x_{m(k)-1}\Big\} \end{aligned} \tag{4.63}$$

dir. (4.63) de $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.41), (4.50), (4.52), (4.55), (4.58) ve (4.61) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{s^2} &= \max\left\{\frac{\varepsilon}{s^2},0,0,\frac{\frac{\varepsilon}{s}+\frac{\varepsilon}{s}}{2s},\frac{0+\frac{\varepsilon}{s}}{2s},0,\frac{\varepsilon}{s},\frac{\varepsilon}{s^2}\right\} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} C_s\left(x_{n(k)-1},x_{m(k)-1}\right) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} C_s\left(x_{n(k)-1},x_{m(k)-1}\right) \\
&\leq \max\left\{\varepsilon s,0,0,\frac{\varepsilon s^2+\varepsilon s^2}{2s},\frac{0+\varepsilon s^2}{2s},0,\varepsilon s^2,\varepsilon s\right\} \\
&= \varepsilon s^2 \qquad (4.64)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.62) de $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.64) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
s\varepsilon &\leq \limsup_{n\to\infty} \beta(C_s(x_n,x_{n+1})) \limsup_{n\to\infty} C_s(x_n,x_{n+1}) \\
&\leq \varepsilon s^2 \limsup_{n\to\infty} \beta(C_s(x_n,x_{n+1}))
\end{aligned}$$

olur. Bu $\limsup_{n\to\infty} \beta(C_s(x_n,x_{n+1})) \geq \frac{1}{s}$ olmasını gerektirir. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan,

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(C_s(x_n,x_{n+1})) \leq \frac{1}{s}$$

elde edilir. Buradan

$$\limsup_{n\to\infty} \beta\left(C_s(x_n,x_{n+1})\right) = \frac{1}{s} \qquad (4.65)$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde

$$\liminf_{n\to\infty} \beta\left(C_s(x_n,x_{n+1})\right) = \frac{1}{s} \qquad (4.66)$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.65) ile (4.66) birleştirilirse $\lim_{n\to\infty} \beta\left(C_s(x_n,x_{n+1})\right) = \frac{1}{s}$ olduğu görülür. (4.64) ün aksine $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} C_s(x_n,x_{n+1}) = 0$ elde edilir. Böylece (X,d) uzayında $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X,d) tam uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. T sürekli olduğundan $z = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tz$ elde edilir. Buradan z, T nin sabit noktasıdır. $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z$ ve $x_{n+1} = Tx_n = T^n x_1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} T^n x_1 = z$ elde edilir.

Aşağıdaki teoremde, Teorem 4.3.3 de ki T dönüşümün sürekliliği başka bir şartla değiştirilmiştir.

Teorem 4.3.4: (X, d_b) tam b-metrik uzay, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ ve $T: X \to X$ dönüşümleri için aşağıdaki şartlar sağlansın:

1. T genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşümdür.
2. T üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşümdür.
3. $\alpha(x_1, Tx_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_1 \in X$ vardır.
4. $\{x_n\}$ her $n \geq 1$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ şartlarını sağlayan X de bir dizi ise bu durumda her $k \geq 1$ için $\alpha(x_{n(k)}, x) \geq 1$ olacak şekilde $\{x_n\}$ nin bir $\{x_{n(k)}\}$ alt dizisi vardır.

Bu durumda T nin $z \in X$ sabit noktası vardır ve $\{T^n x_1\}$, z ye yakınsar (Hieu and Chac 2017).

İspat. Teorem 4.3.3 ün ispatındaki satırlar takip edilerek $n \geq 1$ için $x_{n+1} = Tx_n$ tarafından oluşturulan $\{x_n\}$ dizisinin $z \in X$ yakınsadığı sonucuna varılır. (4) şartından $\alpha(x_{n(k)}, z) \geq 1$ olacak şekilde $\{x_n\}$ nin $\{x_{n(k)}\}$ alt dizisi vardır. T genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} sd_b(x_{n(k)+1}, Tz) &= sd_b(Tx_{n(k)}, Tz) \\ &\leq s\alpha(x_{n(k)}, z) d_b(Tx_{n(k)}, Tz) \\ &\leq \beta(C_s(x_{n(k)}, z)) C_s(x_{n(k)}, z) \end{aligned} \tag{4.67}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} C_s(x_{n(k)}, z) &= \max\Big\{d_b(x_{n(k)}, z), d_b(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}), d_b(z, Tz), \\ &\quad \frac{d_b(x_{n(k)}, Tz) + d_b(z, Tx_{n(k)})}{2s}, \\ &\quad \frac{d_b(T^2x_{n(k)}, x_{n(k)}) + d_b(T^2x_{n(k)}, Tz)}{2s}, \\ &\quad d_b(T^2x_{n(k)}, Tx_{n(k)}), d_b(T^2x_{n(k)}, Tz), d_b(T^2x_{n(k)}, z)\Big\} \\ &= \max\Big\{d_b(x_{n(k)}, z), d_b(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d_b(z, Tz), \\ &\quad \frac{d_b(x_{n(k)}, Tz) + d_b(z, x_{n(k)+1})}{2s} \\ &\quad \frac{d_b(x_{n(k)+2}, x_{n(k)}) + d_b(x_{n(k)+2}, Tz)}{2s}, \\ &\quad d_b(x_{n(k)+2}, x_{n(k)+1}), d_b(x_{n(k)+2}, Tz), d_b(x_{n(k)+2}, z)\Big\} \end{aligned} \tag{4.68}$$

dır. Aksine, $Tz \neq z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d_b(Tz, z) > 0$ dır. (4.68) de $k \to \infty$ için limit alınır ve (4.69) kullanılırsa Lemma 4.3.2 den

$$\frac{1}{s^2} d_b(z, Tz) \leq \liminf_{n\to\infty} C_s(x_{n(k)}, z) \leq \limsup_{n\to\infty} C_s(x_{n(k)}, z) \leq s d_b(z, Tz) \qquad (4.69)$$

elde edilir. (4.67) de $k \to \infty$ için limit alınır ve (3.35) kullanılırsa Lemma 4.3.1 den,

$$d_b(z, Tz) = s(\frac{1}{s} d_b(z, Tz) \leq s d_b(z, Tz) \limsup_{n\to\infty} \beta(C_s(x_{n(k)}, z))$$

olur. Bu $\limsup_{n\to\infty} \beta(C_s(x_{n(k)}, z)) \geq \frac{1}{s}$ olmasını gerektirir. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(C_s(x_{n(k)}, z)) \leq \frac{1}{s}$$

dir. Buradan

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(C_s(x_{n(k)}, z)) = \frac{1}{s} \qquad (4.70)$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde

$$\liminf_{n\to\infty} \beta(C_s(x_{n(k)}, z)) = \frac{1}{s} \qquad (4.71)$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.70) ile (4.71) birleştirilirse $\lim_{n\to\infty} \beta\left(C_s(x_{n(k)}, z)\right) = \frac{1}{s}$ elde edilir. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} C_s(x_{n(k)}, z) = 0$ olur ve (4.69) dan $d_b(z, Tz) = 0$ elde edilir. Bu ise $Tz = z$ olmasını gerektirir. Bu durumda z, T nin sabit noktası olur. $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z$ ve $x_{n+1} = Tx_n = T^n x_1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} T^n x_1 = z$ sonucu elde edilir.

Aşağıdaki teorem b-metrik uzaylarda genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşümünün sabit noktasının tekliği için yeterli bir koşul verir.

Teorem 4.3.5: (X, d_b) tam b-metrik uzay, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ ve $T: X \to X$ dönüşümleri için aşağıdaki şartlar sağlansın:

1. Teorem 4.3.3 veya Teorem 4.3.4 de ki bütün hipotezler sağlansın.
2. x ve y, T nin iki farklı sabit noktası ise $\alpha(x, v) \geq 1$, $\alpha(y, v) \geq 1$ ve $\alpha(v, Tv) \geq 1$ olacak şekilde $v \in X$ vardır.

Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir (Hieu and Chac 2017).

İspat. Teorem 4.3.3 ve Teorem 4.3.4 den T sabit noktaya sahiptir. x ve y, $x \neq y$ olmak üzere T nin iki sabit noktası olsun. Teoremdeki 2. şartdan dolayı $\alpha(x,v) \geq 1$, $\alpha(y,v) \geq 1$ ve $\alpha(v,Tv) \geq 1$ olacak şekilde $v \in X$ vardır. $\alpha(x,v) \geq 1$ ve $\alpha(v,Tv) \geq 1$ olduğundan $\alpha(x,Tv) \geq 1$ elde edilir. $\alpha(v,Tv) \geq 1$ olduğundan ayrıca $\alpha(Tv,T^2v) \geq 1$ elde edilir. Bu $\alpha(x,T^2v) \geq 1$ olmasını gerektirir. İşlemlere devam edilerek her $n \geq 1$ için $\alpha(x,T^nv) \geq 1$ bulunur. Benzer şekilde her $n \geq 1$ için $\alpha(y,T^nv) \geq 1$ olduğunu görmek kolaydır. $\alpha(x,T^nv) \geq 1$ ve T genelleştirilmiş α-Geraghty daralma tipi dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} sd_b(x,T^{n+1}v) &= sd_b(Tx,T^{n+1}v) \\ &\leq s\alpha(x,T^nv)d_b(x,T^nv) \\ &\leq \beta\big(C_s(x,T^nv)\big)C_s(x,T^nv) \end{aligned} \tag{4.72}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} C_s(x,T^nv) &= \max\Big\{d_b(x,T^nv), d_b(x,Tx), d_b(T^nv,T^{n+1}v), \\ &\frac{d_b(x,T^{n+1}v)+d_b(T^nv,Tx)}{2s}, \frac{d_b(T^2x,x)+d_b(T^2x,T^{n+1}v)}{2s} \\ &d_b(T^2x,Tx), d_b(T^2x,T^{n+1}v), d_b(T^2x,T^nv)\Big\} \\ &= \max\Big\{d_b(x,T^nv), d_b(T^nv,T^{n+1}v), \\ &\frac{d_b(x,T^{n+1}v)+d_b(T^nv,x)}{2s}, d_b(x,T^{n+1}v)\Big\} \end{aligned} \tag{4.73}$$

dur. Teorem 4.3.3 veya Teorem 4.3.4 de x_1 yerine v yazılırsa $\lim_{n\to\infty} T^nv = z$ ve $Tz = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Aksine $x \neq z$ olduğu kabul edilsin. (4.73) de $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\frac{1}{s}d_b(x,z) \leq \liminf_{n\to\infty} C_s(x_n,x_{n+1}) \leq \limsup_{n\to\infty} C_s(x_n,x_{n+1}) = sd_b(x,z) \tag{4.74}$$

elde edilir. (4.72) de $n \to \infty$ için limit alınır ve (4.74) kullanılırsa

$$d_b(x,z) = \frac{1}{s}sd_b(x,z) \leq \limsup_{n\to\infty} \beta\big(C_s(x_n,x_{n+1})\big)sd_b(x,z) \tag{4.75}$$

olur. Bu ise $\limsup_{n\to\infty} \beta\big(C_s(x_n,x_{n+1})\big) \geq \frac{1}{s}$ olmasını gerektirir. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} \beta\big(C_s(x_n,x_{n+1})\big) \leq \frac{1}{s}$$

dur. Buradan

$$\limsup_{n\to\infty} \beta\big(C_s(x_n, x_{n+1})\big) = \frac{1}{s} \tag{4.76}$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde

$$\liminf_{n\to\infty} \beta\big(C_s(x_n, x_{n+1})\big) = \frac{1}{s} \tag{4.77}$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.76) ve (4.77) birleştirilirse $\lim_{n\to\infty} \beta\big(C_s(x_n, x_{n+1})\big) = \frac{1}{s}$ olur. $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} C_s(x_n, x_{n+1}) = 0$ olur bu ise (4.74) ile çelişir. Bu $x = z$ olmasını gerektirir ve buradan $\lim_{n\to\infty} T^n v = x$ olur. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty} T^n v = y$ olduğunu görmek kolaydır. Buradan $x = y$ sonucuna varılır ve T nin tek bir sabit noktası vardır.

4.4. (α, β)-Geraghty Daraltan Dönüşümler

Bu başlık altında Pant and Panicker (2016) tarafından tam b-metrik uzaylarda (α, β)-Geraghty daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği ile ilgili ispatlanan teoremler verilecektir.

Teorem 4.4.1: (X, d_b) tam b-metrik uzay, $T: X \to X$ ve $\alpha, \beta: X \times X \to [0, \infty)$ birer dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu kabul edelim.

1. T (α, β)-admissible dönüşümdür.
2. T (α, β)-Geraghty daraltan dönüşümdür.
3. $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ ve $\beta(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.
4. T sürekli ya da X (α, β)-regülerdir.

Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir (Pant and Panicker 2016).

İspat. $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ ve $\beta(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var olduğunu kabul edelim. $\{x_n\}$ dizisi $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0 = Tx_{n-1}$ şeklinde tanımlansın. Bazı $n_k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} = x_{n_k+1}$ ise x_{n_k} nın T nin sabit noktası olduğu açıktır ve bu durumda ispat biter. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. T (α, β)-admissible olduğundan

$$\begin{aligned} \alpha(x_0, Tx_0) = \alpha(x_0, x_1) \geq 1 \quad &\Rightarrow \alpha(Tx_0, Tx_1) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1 \\ &\Rightarrow \alpha(Tx_1, Tx_2) = \alpha(x_2, x_3) \geq 1 \end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam ederek her $n \geq 0$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde her $n \geq 0$ için $\beta(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ dir. (α, β)-Geraghty daraltan dönüşüm tanımından

$$\begin{aligned}
\psi\big(d_b(x_{n+1}, x_{n+2})\big) &= \psi\big(d_b(Tx_n, Tx_{n+1})\big) \\
&\leq \psi\big(s^3 d_b(Tx_n, Tx_{n+1})\big) \\
&\leq \alpha(x_n, Tx_n)\beta(x_{n+1}, Tx_{n+1})\psi\big(s^3 d_b(Tx_n, Tx_{n+1})\big) \\
&\leq \theta(\psi\big(N(x_n, x_{n+1})\big))\psi\big(N(x_n, x_{n+1})\big)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
N(x_n, x_{n+1}) &= \max\Big\{d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_n, Tx_n), \\
&\qquad d_b(x_{n+1}, Tx_{n+1}), \frac{d_b(x_n, Tx_{n+1}) + d_b(x_{n+1}, Tx_n)}{2s}\Big\} \\
&= \max\Big\{d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_n, x_{n+1}), \\
&\qquad d_b(x_{n+1}, x_{n+2}), \frac{d_b(x_n, x_{n+2}) + d_b(x_{n+1}, x_{n+1})}{2s}\Big\} \\
&= \max\{d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_{n+1}, x_{n+2})\}
\end{aligned}$$

dir. Şimdi $N(x_n, x_{n+1}) = d_b(x_{n+1}, x_{n+2})$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}
\psi\big(d_b(x_{n+1}, x_{n+2})\big) &\leq \theta\left(\psi\big(N(x_n, x_{n+1})\big)\right)\psi\big(N(x_n, x_{n+1})\big) \\
&= \theta\left(\psi\big(N(x_n, x_{n+1})\big)\right)\psi\big(d_b(x_{n+1}, x_{n+2})\big) \\
&< \psi\big(d_b(x_{n+1}, x_{n+2})\big)
\end{aligned}$$

olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu nedenle $N(x_n, x_{n+1}) = d_b(x_n, x_{n+1})$ dir. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi\big(d_b(x_{n+1}, x_{n+2})\big) &\leq \theta\left(\psi\big(N(x_n, x_{n+1})\big)\right)\psi\big(N(x_n, x_{n+1})\big) \\
&= \theta\left(\psi\big(N(x_n, x_{n+1})\big)\right)\psi\big(d_b(x_n, x_{n+1})\big) \\
&< \psi\big(d_b(x_n, x_{n+1})\big) \qquad (4.78)
\end{aligned}$$

elde edilir. ψ kesin artan dönüşüm olduğundan, $\{d_b(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi azalan ve alttan sınırlıdır. Böylece $\lim_{n\to\infty} d_b(x_n, x_{n+1}) = r$ olacak şekilde $r \geq 0$ vardır. (4.78) den

$$\frac{\psi\big(d_b(x_{n+1},x_{n+2})\big)}{\psi\big(N(x_n,x_{n+1})\big)} \leq \theta\Big(\psi\big(N(x_n,x_{n+1})\big)\Big) < 1 \tag{4.79}$$

elde edilir. (4.79) da $n \to \infty$ alınırsa $1 \leq \lim_{n\to\infty} \theta\Big(\psi\big(N(x_n,x_{n+1})\big)\Big) < 1$ bulunur. Burada, $\lim_{n\to\infty} \theta\Big(\psi\big(N(x_n,x_{n+1})\big)\Big) = 1$ ve $\theta \in \Theta$ iken $\lim_{n\to\infty} \psi\big(N(x_n,x_{n+1})\big) = 0$ olur ve

$$r = \lim_{n\to\infty} d_b(\,x_n,x_{n+1}) = 0 \tag{4.80}$$

elde edilir. $\{x_n\}$ nin X de Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda $n_k > m_k > k$ olmak üzere

$$d_b(x_{n_k},x_{m_k}) \geq \epsilon \tag{4.81}$$

olacak şekilde $\{x_n\}$ nin $\{x_{m_k}\}$ ve $\{x_{n_k}\}$ alt dizileri ve $\epsilon > 0$ sayısı vardır. Burada n_k (4.81) i sağlayan en küçük sayıdır. (4.81) den

$$d_b(x_{n_k-1},x_{m_k}) < \epsilon \tag{4.82}$$

elde edilir. (4.81), (4.82) ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\epsilon &\leq d_b\big(x_{n_k},x_{m_k}\big)\\ &\leq s\big[d_b\big(x_{n_k},x_{n_k-1}\big)+d_b(x_{n_k-1},x_{m_k})\big]\\ &< s\big[d_b\big(x_{n_k},x_{n_k-1}\big)+\epsilon\big]\end{aligned} \tag{4.83}$$

elde edilir. (4.83) de $k \to \infty$ için üst limit alınır ve (4.80) kullanılırsa

$$\epsilon \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\big(x_{n_k},x_{m_k}\big) < s\epsilon \tag{4.84}$$

bulunur. Üçgen eşitsizliğinden

$$d_b\big(x_{n_k},x_{m_k}\big) \leq s\big[d_b\big(x_{n_k},x_{n_k+1}\big)+d_b(x_{n_k+1},x_{m_k})\big] \tag{4.85}$$

ve

$$d_b(x_{n_k+1},x_{m_k}) \leq s\big[d_b\big(x_{n_k+1},x_{n_k}\big)+d_b(x_{n_k},x_{m_k})\big] \tag{4.86}$$

elde edilir. (4.85) de $k \to \infty$ iken üst limit alınır ve (4.80) uygulanırsa (4.84) eşitsizliği

$$\epsilon \leq s(\limsup_{k\to\infty} d_b(x_{n_k+1},x_{m_k}))$$

haline gelir ve (4.86) da $k \to \infty$ iken üst limit alınarak

$$\limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k}\right) \leq s.s\epsilon = s^2\epsilon$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\epsilon}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k}\right) \leq s^2\epsilon \tag{4.87}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\frac{\epsilon}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n_k}, x_{m_k+1}\right) \leq s^2\epsilon \tag{4.88}$$

olduğu elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k}\right) \leq s\left[d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right) + d_b(x_{m_k+1}, x_{m_k})\right] \tag{4.89}$$

olur. (4.89) da $k \to \infty$ iken üst limit alınarak, (4.80) ve (4.87) den

$$\frac{\epsilon}{s} \leq s \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right)$$

bulunur. Yani

$$\frac{\epsilon}{s^2} \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right) \tag{4.90}$$

dir. Tekrar yukarıdaki süreci takip ederek

$$\limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right) \leq s^3\epsilon \tag{4.91}$$

elde edilir. (4.90) ve (4.91) den

$$\frac{\epsilon}{s^2} \leq \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right) \leq s^3\epsilon$$

bulunur.X (α, β)-regüler olduğundan, (α, β)-Geraghty daraltan dönüşüm tanımından

$$\begin{aligned}\psi\left(s^3 d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right)\right) &= \psi\left(s^3 d_b\left(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}\right)\right)\\ &\leq \alpha\left(x_{n_k}, Tx_{n_k}\right)\beta(x_{m_k}, Tx_{m_k})\psi\left(s^3 d_b\left(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}\right)\right)\\ &\leq \theta(\psi\left(N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right))\psi\left(N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) \quad = \max\{d_b\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right), d_b\left(x_{n_k}, Tx_{n_k}\right), d_b\left(x_{m_k}, Tx_{m_k}\right),$$

$$\left.\frac{d_b\left(x_{n_k}, Tx_{m_k}\right) + d_b\left(x_{m_k}, Tx_{n_k}\right)}{2s}\right\}$$

$$= \max\left\{d_b\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right), d_b\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right), d_b\left(x_{m_k}, x_{m_k+1}\right),\right.$$

$$\left.\frac{d_b\left(x_{n_k}, x_{m_k+1}\right) + d_b\left(x_{m_k}, x_{n_k+1}\right)}{2s}\right\}$$

dir. Yukarıdaki denklemde $k \to \infty$ için üst limit alınırsa ve (4.80), (4.84), (4.87) ve (4.88) kullanılırsa

$$\epsilon = \max\left\{\epsilon, \frac{\frac{\epsilon}{s} + \frac{\epsilon}{s}}{2s}\right\} \leq \limsup_{k\to\infty} N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) \leq \max\left\{s\epsilon, \frac{s^2\epsilon + s^2\epsilon}{2s}\right\} = s\epsilon$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\epsilon = \max\left\{\epsilon, \frac{\frac{\epsilon}{s} + \frac{\epsilon}{s}}{2s}\right\} \leq \lim_{k\to\infty} N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) \leq \max\left\{s\epsilon, \frac{s^2\epsilon + s^2\epsilon}{2s}\right\} = s\epsilon$$

olduğu gösterilebilir. (4.90) dan

$$\begin{aligned}
\psi(s\epsilon) &= \psi\left(s^3\left(\frac{\epsilon}{s^2}\right)\right) \\
&\leq \psi(s^3 \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right)) \\
&\leq \alpha\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right)\beta(x_{m_k}, x_{m_k+1})\psi(s^3 \limsup_{k\to\infty} d_b\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right)) \\
&\leq \theta(\psi(\limsup_{k\to\infty} N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)))\ \psi(\limsup_{k\to\infty} N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)) \\
&\leq \theta\left(\psi(s\epsilon)\right)\psi(s\epsilon) \\
&< \psi(s\epsilon)
\end{aligned}$$

olur ki bu çelişkidir. Bu nedenle $\{x_n\}$ Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x_n \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır. Öncelikle, T nin sürekli olduğunu kabul edelim. Buradan

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T \lim_{n\to\infty} x_n = Tx^*$$

elde edilir. Şimdi X in (α, β)-regüler olduğunu kabul edelim. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_{n_k+1}, x_{n_k}) \geq 1$ ve $\beta(x_{n_k+1}, x_{n_k}) \geq 1$ ve $\alpha(x^*, Tx^*) \geq 1$ ve $\beta(x^*, Tx^*) \geq 1$ olacak şekilde $\{x_n\}$ nin $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Şimdi (α, β)-Geraghty daraltan dönüşüm tanımında $x = x_{n_k}$ ve $y = x^*$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\psi\left(d_b\left(x_{n_k+1}, Tx^*\right)\right) &= \psi\left(d_b\left(Tx_{n_k}, Tx^*\right)\right) \\
&\leq \psi\left(s^3 d_b\left(Tx_{x_{n_k}n_k}, Tx^*\right)\right) \\
&\leq \alpha(x_{n_k}, Tx_{n_k})\beta(x^*, Tx^*)\psi\left(s^3 d_b\left(Tx_{n_k}, Tx^*\right)\right) \\
&\leq \theta(\psi(N\left(x_{n_k}, x^*\right))\psi(N\left(x_{n_k}, x^*\right)) \qquad (4.92)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
N\left(x_{n_k}, x^*\right) &= \max\left\{d_b\left(x_{n_k}, x^*\right), d_b\left(x_{n_k}, Tx_{n_k}\right), d_b(x^*, Tx^*),\right. \\
&\qquad \left.\frac{d_b\left(x_{n_k}, Tx^*\right) + d_b(x^*, Tx_{n_k})}{2s}\right\} \\
&= \max\left\{d_b\left(x_{n_k}, x^*\right), d_b\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right), d_b(x^*, Tx^*),\right. \\
&\qquad \left.\frac{d_b\left(x_{n_k}, Tx^*\right) + d_b(x^*, x_{n_k+1})}{2s}\right\} \\
&\leq \max\left\{d_b\left(x_{n_k}, x^*\right), s\left[d_b\left(x_{n_k}, x^*\right) + d_b\left(x_{n_k+1}, x^*\right)\right],\right. \\
&\qquad \left. d_b(x^*, Tx^*), \frac{s\left[d_b\left(x_{n_k}, x^*\right) + d_b(x^*, Tx^*)\right] + d_b(x^*, x_{n_k+1})}{2s}\right\}
\end{aligned}$$

dir. $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} N\left(x_{n_k}, x^*\right) &\leq \max\left\{d_b(x^*, Tx^*), \frac{d_b(x^*, Tx^*)}{2}\right\} \\
&= d_b(x^*, Tx^*)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle (4.92) de $k \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\psi\left(d_b(x^*, Tx^*)\right) \leq \lim_{k\to\infty} \theta(\psi\left(N\left(x_{n_k}, x^*\right)\right))\psi\left(d_b(x^*, Tx^*)\right)$$

bulunur. Burada $1 \leq \lim_{k\to\infty} \theta(\psi\left(N\left(x_{n_k}, x^*\right)\right))$ olur ki bunun anlamı $\lim_{k\to\infty} \theta(\psi\left(N\left(x_{n_k}, x^*\right)\right)) = 1$ olmasıdır. Sonuç olarak $\lim_{k\to\infty} N\left(x_{n_k}, x^*\right) = 0$ olur. Buradan $d_b(x^*, Tx^*) = 0$ yani $x^* = Tx^*$ olur. Üstelik, kabul edelim ki x^* ve y^* T nin $x^* \neq y^*$ ve $\alpha(x^*, Tx^*) \geq 1$, $\alpha(y^*, Ty^*) \geq 1$ ve $\beta(x^*, Tx^*) \geq 1$, $\beta(y^*, Ty^*) \geq 1$ olacak şekilde iki sabit noktası olsun. (α, β)-Geraghty daraltan dönüşüm tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\psi\left(d_b(x^*, y^*)\right) &= \psi(d_b(Tx^*, Ty^*)) \\
&\leq \psi\left(s^3 d_b(Tx^*, Ty^*)\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \alpha(x^*, Tx^*)\beta(y^*, Ty^*)\psi\big(s^3 d_b(Tx^*, Ty^*)\big)$$
$$\leq \theta(\psi\big(N(x^*, y^*)\big))\psi\big(N(x^*, y^*)\big)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} N(x^*, y^*) &= \max\Big\{d_b(x^*, y^*), d_b(x^*, Tx^*), d_b(y^*, Ty^*), \\ &\quad \frac{d_b(x^*, Ty^*) + d_b(y^*, Tx^*)}{2s}\Big\} \\ &= d_b(x^*, y^*) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\psi\big(d_b(x^*, y^*)\big) \leq \theta(\psi\big(N(x^*, y^*)\big))\psi\big(N(x^*, y^*)\big) < \psi\big(d_b(x^*, y^*)\big)$ bulunmuş olur ki bu $d_b(x^*, y^*) = 0$ olmaması durumunda bir çelişkidir. Dolayısıyla T tek bir sabit noktaya sahiptir.

4.5. Sabit Nokta Teoremlerinin İntegral Denklemlere Uygulamaları

Bu başlıkta önceki bölümde verilen bazı teoremlerin lineer olmayan integral denklemlere uygulamalarına yer verilecektir.

Aşağıdaki örnek Hieu and Chac (2017) tarafından ispatlanan Teorem 4.3.4 ün bir uygulamasıdır.

Örnek 4.5.1: $C[a, b]$, $[a, b]$ üzerinde bütün sürekli fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda her $u, v \in C[a, b]$ ve bazı $p > 1$ için

$$d(u, v) = \sup_{t \in [a,b]} |u(t) - v(t)|^p$$

olmak üzere d, $s = 2^{p-1}$ ile bir b-metriktir. $t \in [a, b]$ ve her $u \in C[a, b]$ için $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ ve $K: [a, b] \times [a, b] \times u[a, b] \to \mathbb{R}$ birer dönüşüm olmak üzere

$$u(t) = g(t) + \int_a^b K\big(t, x, u(x)\big)dx \qquad (4.93)$$

lineer olmayan integral denklemini ele alalım. Aşağıdaki ifadelerin geçerli olduğunu varsayalım.

1. g, $[a, b]$ de sürekli ve $K\big(t, x, u(x)\big)$, $[a, b]$ de x ile integrallenebilir olsun.

2. Her $t \in [a,b]$ için $Tu(t) = g(t) + \int_a^b K\big(t,x,u(x)\big)dx$ olmak üzere her $u \in [a,b]$ için $Tu \in C[a,b]$ olsun.
3. Her $u \in C[a,b]$ ve her $x \in [a,b]$ için $u(x) \geq 0$ iken $T^2u(x) \geq 0$ olsun.
4. $u(x), v(x) \in [0,\infty)$ olacak şekildeki her $x,t \in [a,b]$ ve her $u,v \in C[a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\big|K\big(t,x,u(x)\big) - K\big(t,x,v(x)\big)\big| \\ &\leq \xi(t,x)\max\{|u(x)-v(x)|, |u(x)-Tu(x)|, |v(x)-Tv(x)|, \\ &\quad \frac{|u(x)-Tv(x)| + |v(x)-Tu(x)|}{2^p}, \\ &\quad \frac{|T^2u(x)-u(x)| + |T^2u(x)-Tv(x)|}{2^p}, \\ &\quad |T^2u(x)-Tu(x)|, |T^2u(x)-Tv(x)|, |T^2u(x)-v(x)|\}\end{aligned}$$

olsun. Burada $\xi: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\sup_{t\in[a,b]} \Big(\int_a^b \xi^p(t,x)dx\Big) < \frac{1}{2^{2p-2}(b-a)^{p-1}}$$

şartını sağlayan sürekli bir fonksiyondur.

5. Her $t \in [a,b]$ için $u_1(t) \geq 0$ ve $Tu_1(t) \geq 0$ olacak şekilde $u_1 \in C[a,b]$ vardır.

Bu durumda (4.93) lineer olmayan integral denkleminin $C[a,b]$ de tek çözümü vardır.

Gerçekten $T: C[a,b] \to C[a,b]$, her $u \in C[a,b]$ ve her $t \in [a,b]$ için

$$Tu(t) = g(t) + \int_a^b K\big(t,x,u(x)\big)dx$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm olsun. Hipotez (1) ve (2) den T iyi tanımlıdır. Dikkat edilirse (4.93) ün çözümünün varlığı T nin sabit noktasının varlığına eş değerdir. Şimdi Teorem 4.3.4 ün bütün hipotezlerinin sağlandığını gösterelim. $\alpha: C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\alpha(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{Her } x \in [a,b] \text{ için } u(x), v(x) \in [0,\infty) \text{ise} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

1. T nin genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşüm olduğu gösterilecektir. Gerçekten $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekildeki $q>1$ sayısını alalım. (4) şartından her $x\in[a,b]$ için $u(x),v(x)\in[0,\infty)$ olacak şekildeki her $u,v\in[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
&2^{p-1}\alpha(u,v)|Tu(x)-Tv(x)|^p\\
&=2^{p-1}|Tu(x)-Tv(x)|^p\\
&\leq 2^{p-1}\left|\int_a^b K\big(t,x,u(x)\big)dx-\int_a^b K\big(t,x,v(x)\big)dx\right|^p\\
&\leq 2^{p-1}\left|\int_a^b \big(K\big(t,x,u(x)\big)-K\big(t,x,v(x)\big)\big)dx\right|^p\\
&\leq 2^{p-1}(\int_a^b \left|K\big(t,x,u(x)\big)-K\big(t,x,v(x)\big)\right|dx)^p\\
&\leq \left[2^{p-1}(\int_a^b dx)^{\frac{1}{q}}(\int_a^b \left|K\big(t,x,u(x)\big)-K\big(t,x,v(x)\big)\right|^p dx)^{\frac{1}{p}}\right]^p\\
&\leq 2^{p-1}(b-a)^{p-1}\left(\int_a^b \xi^p(t,x)dx\right)\max\{|u(x)-v(x)|,\\
&\quad |u(x)-Tu(x)|,|v(x)-Tv(x)|,\frac{|u(x)-Tv(x)|+|v(x)-Tu(x)|}{2^p},\\
&\quad \frac{|T^2u(x)-u(x)|+|T^2u(x)-Tv(x)|}{2^p},|T^2u(x)-Tu(x)|,\\
&\quad |T^2u(x)-Tv(x)|,|T^2u(x)-v(x)|\\
&=2^{p-1}(b-a)^{p-1}\left(\int_a^b \xi^p(t,x)dx\right)C_s(u,v)\\
&\leq 2^{p-1}(b-a)^{p-1}\sup_{t\in[a,b]}\left(\int_a^b \xi^p(t,x)dx\right)C_s(u,v)\\
&=\lambda C_s(u,v)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\lambda=2^{p-1}(b-a)^{p-1}\sup_{t\in[a,b]}\left(\int_a^b \xi^p(t,x)dx\right)<\frac{1}{2^{p-1}}$ dir. Bu her $t\geq 0$ için $\beta(t)=\lambda$ ile (3.2) şartının sağlanması demektir. Bu yüzden T genelleştirilmiş α-Geraghty daraltan dönüşümdür.

2. T nin üçgensel α-yörüngesel admissible dönüşüm olduğunu gösterelim. Gerçekten, $\alpha(u,Tu)\geq 1$ olacak şekildeki $u\in C[a,b]$ ve her $x\in[a,b]$ için $u(x)\geq 0$ dır. Şart (3) den $T^2u(x)\geq 0$ olur. Bu nedenle $\alpha(u,T^2u)\geq 1$ ve

buradan T, α-yörüngesel admissible dönüşümdür. Üstelik $\alpha(u,v) \geq 1$ ve $\alpha(v,Tv) \geq 1$ olacak şekilde her $u,v \in C[a,b]$ ve her $x \in [a,b]$ için $u(x), v(x), Tv(x) \geq 0$ dır. Bu $\alpha(u,Tv) \geq 1$ olmasını gerektirir. Böylelikle T üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşümdür.

3. Hipotez (5) den $\alpha(u_1, Tu_1) \geq 1$ elde edilir.
4. $\alpha(u_n, u_{n+1}) \geq 1$ ve $\lim_{n\to\infty} u_n = u \in C[a,b]$ olacak şekilde $\{u_n\} \subset C[a,b]$ olsun. Buradan her $x \in [a,b]$ ve $n \geq 0$ için $u(x), u_n(x) \in [0,\infty)$ olur. Bu nedenle her $n \geq 1$ için $\alpha(u_n, u) \geq 1$ elde edilir.

Buradan Teorem 4.3.4 deki tüm hipotezlerin sağlandığı sonucuna varılır. Böylelikle $u \in C[a,b]$, T nin sabit noktasıdır ve buradan (4.93) denkleminin $u \in C[a,b]$ çözümü vardır.

Aşağıdaki örnek, Örnek 4.5.1 de ki tüm hipotezleri sağlayan K ve g fonksiyonlarının varlığını garanti eder.

Örnek 4.5.2: $C[0,1]$, $[0,1]$ üzerinde bütün sürekli fonksiyonların kümesi olmak üzere, her $u,v \in C[0,1]$ için

$$d(u,v) = \sup_{t\in[0,1]} |u(t) - v(t)|^2$$

tarafından tanımlanmış d, $s = 2$ ile bir b-metriktir. Her $t \in [0,1]$ ve $u \in C[0,1]$ için

$$u(t) = -\frac{t^2}{2\sqrt{14}} + t + \int_0^1 \frac{(x+1)t^2 u(x)}{2\sqrt{14}(1+u(x))} dx$$

şeklindeki lineer olmayan integral denklemini ele alalım. Her $x,t \in [0,1]$ ve $u \in C[0,1]$ için $g(t) = -\frac{t^2}{2\sqrt{14}} + t$ ve $K\big(t,x,u(x)\big) = \frac{(x+1)t^2 u(x)}{2\sqrt{14}(1+u(x))}$ olsun. Bu durumda;

(1). g, $[0,1]$ de süreklidir. $u \in C[0,1]$ olduğundan $K\big(t,x,u(x)\big)$, $[0,1]$ de x e göre integrallenebilirdir.

(2). Her $x,t \in [0,1]$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ olacak şekildeki $t_n \in [0,1]$ dizisi için,

$$\begin{aligned}|Tu(t_n) - Tu(t)| &\leq |g(t_n) - g(t)| + \frac{1}{2\sqrt{14}} \int_0^1 (1+x)|t_n^2 - t^2| \left|\frac{u(x)}{1+u(x)}\right| dx \\ &\leq |g(t_n) - g(t)| + \frac{1}{2\sqrt{14}} \int_0^1 (1+x)|t_n^2 - t^2| dx\end{aligned}$$

$$= |g(t_n) - g(t)| + \frac{3}{\sqrt{224}}|t_n^2 - t^2|$$

elde edilir. Bu ise her $u \in C[0,1]$ için $Tu \in C[0,1]$ olmasını gerektirir.

(3). $t \in [0,1]$ için $g(t) \geq 0$ olduğunu görmek kolaydır. Üstelik her $x \in [0,1]$ için $u(x) \geq 0$ olacak şekildeki $u \in C[0,1]$ ve her $x, t \in [0,1]$ için $K\big(t, x, u(x)\big) \geq 0$ elde edilir. Bu ise her $u \in C[0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için $Tu(t) \geq 0$ olmasını gerektirir. Bu da her $t \in [0,1]$ ve $u \in C[0,1]$ için

$$T^2u(x) = g(t) + \int_0^1 K\big(t, x, Tu(x)\big)dx \geq 0$$

olması demektir.

(4). Her $x \in [0,1]$ için $u, v \in C[0,1]$ ve $u(x), v(x) \in [0, \infty)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\big|K\big(t,x,u(x)\big) - K\big(t,x,v(x)\big)\big| &= \frac{(1+x)t^2}{2\sqrt{14}}\left|\frac{u(x)}{1+u(x)} - \frac{v(x)}{1+v(x)}\right| \\ &= \frac{(1+x)t^2}{2\sqrt{14}}\left|\frac{u(x)-v(x)}{[1+u(x)][1+v(x)]}\right| \\ &\leq \frac{(1+x)t^2}{2\sqrt{14}}|u(x) - v(x)|\end{aligned}$$

elde edilir. $\xi(t,x) = \frac{(x+1)t^2}{2\sqrt{14}}$ seçilirse, ki bu durumda ξ süreklidir, $\sup_{t\in[0,1]}(\int_0^1 \xi^2(t,x)dx) < \frac{1}{4}$, $\quad 0 \leq \big|K\big(t,x,u(x)\big) - K\big(t,x,v(x)\big)\big| \leq \xi(t,x)|u(x) - v(x)|$ ve buradan

$$\begin{aligned}&\big|K\big(t,x,u(x)\big) - K\big(t,x,v(x)\big)\big| \\ &\leq \xi(t,x)\max\{|u(x)-v(x)|, |u(x)-Tu(x)|, |v(x)-Tv(x)|, \\ &\quad \frac{|u(x)-Tv(x)| + |v(x)-Tu(x)|}{2^p}, \frac{|T^2u(x)-u(x)| + |T^2u(x)-Tv(x)|}{2^p}, \\ &\quad |T^2u(x)-Tu(x)|, |T^2u(x)-Tv(x)|, |T^2u(x)-v(x)|\}\end{aligned}$$

dır.

(5). Her $t \in [0,1]$ için $u_1(t) = t$ seçilirse $Tu_1(t) = t$ elde edilir. Buradan her $t \in [0,1]$ için $u_1(t) \geq 0$ ve $Tu_1(t) \geq 0$ olur. Bu ise $\alpha(u_1, Tu_1) \geq 1$ olmasını gerektirir.

Yukarıdakilerden, Örnek 4.5.1 de ki K ve g ye yönelik tüm hipotezlerin sağlandığı anlaşılmaktadır.

Şimdi ise Afshari et al. (2018) tarafından verilen Teorem 4.2.6 nın integral denklemlere uygulamasını vereceğiz.

Örnek 4.5.3: X, $[0,1]$ aralığında $\int_0^1 |x(t)|\, dt < 1$ olacak şekilde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların kümesi olsun. $d_b: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü

$$d_b(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)| dt \right)^2$$

şeklinde tanımlansın. Buradan d_b, $s = 2$ ile X de b- metriktir. $T: X \to X$ operatörü

$$Tx(t) = \frac{1}{4} \ln(1 + |x(t)|)$$

şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$, $\beta: [0,\infty) \to \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ve $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ dönüşümlerini ele alalım:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{Her } t \in [0,1] \text{ için } x(t) \geq y(t) \text{ ise,} \\ 0, & \text{Diğer durumlarda,} \end{cases} \quad \beta(t) = \frac{(\ln(1+\sqrt{t}))^2}{2t} \text{ ve } \varphi(t) = t$$

$\varphi \in \Psi$ ve $\beta \in \mathcal{F}_s$ olduğu açıktır. Ayrıca, T üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşüm ve $\alpha(1, T1) \geq 1$ dir. Şimdi, T nin genelleştirilmiş α-φ- Geraghty daraltan dönüşüm olduğunu ispatlayalım. Gerçekten, her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha(x(t),y(t))\varphi(s^3 d(Tx(t),Ty(t)))} &\leq \sqrt{2^3 \left(\int_0^1 |Tx(t) - Ty(t)| dt\right)^2} \\
&\leq 2\sqrt{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{4} \ln\,(1 + |x(t)| - \frac{1}{4} \ln\,(1 + |y(t)|) \right| dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left| \ln\,(\frac{1 + |x(t)|}{1 + |y(t)|}) \right| dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left| \ln\,(1 + \frac{|x(t)| - |y(t)|}{1 + |y(t)|}) \right| dt \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 |\ln\,(1 + |x(t)| - |y(t)|)| dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_0^1 |\ln(1+|x(t)|-|y(t)|)|dt \le \ln\left(\int_0^1 (1+|x(t)-y(t)|)dt\right)$$
$$= \ln\left(1+\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt\right)$$

bulunur. Bu yüzden,

$$\sqrt{\alpha(x(t),y(t))\varphi(s^3 d(Tx(t),Ty(t)))} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt\right)$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{\mathrm{d(x,y)}}\right)$$

dir. Böylece

$$\alpha\big(x(t),y(t)\big)\varphi(s^3 d\big(Tx(t),Ty(t)\big)) \le \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{d(x,y)}\right)\right)^2$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{M(x,y)}\right)\right)^2$$
$$= \frac{\left(\ln\left(1+\sqrt{M(x,y)}\right)\right)^2}{2M(x,y)} M(x,y)$$
$$= \beta(\varphi\big(M(x,y)\big))\varphi\big(M(x,y)\big)$$

bulunur. Bu durumda Teorem 4.8 den T nin sabit noktaya sahip olduğu görülür.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde bir önceki bölümde verilen teoremlerden elde edilen sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.1.2 de $T = S$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1: (X, d_b), $s \geq 1$ parametresi ile b-tam b-metrik uzay ve $M(x,y) = \max\{d_b(x,y), d_b(x,Tx), d_b(y,Ty)\}$ olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$sd_b(Tx,Ty) \leq \beta(M(x,y))M(x,y) \tag{5.1}$$

şartını sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T nin bir tek sabit noktası vardır (Faraji et al. 2019).

Her metrik uzay $s = 1$ ile bir b-metrik uzay olduğundan Teorem 4.3.3, Teorem 4.3.4 ve Teorem 4.3.5 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2: (X, d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $T: X \to X$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun.

1. Her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \leq \beta\big(C(x,y)\big)C(x,y)$$

olacak şekilde bir $\beta \in \mathcal{F}$ vardır. Burada

$$\begin{aligned} C(x,y) \; &= \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \\ &\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}, \frac{d(T^2x,x)+d(T^2x,Ty)}{2}, \\ &d(T^2x,Tx), d(T^2x,Ty), d(T^2x,y)\} \end{aligned}$$

dir.

2. T üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşümdür.
3. $\alpha(x_1, Tx_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_1 \in X$ vardır.
4. T süreklidir.

Bu durumda T nin $z \in X$ sabit noktası vardır ve $\{T^n x_1\}$, z ye yakınsar (Hieu and Chac 2017).

Hieu and Chac (2017) aşağıdaki örnekle Sonuç 5.2 nin uygulanabilir olduğunu göstermiştir.

Örnek 5.3: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \text{ ise} \\ 2, & (x,y) \in \{(1,4),(4,1),(1,5),(5,1)\} \text{ ise} \\ 1, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \left\{ \begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,5),(2,1),(2,2), \\ (2,5),(3,5),(4,5),(5,4) \end{matrix} \right\} \text{ ise} \\ 0, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde ve $T: X \to X$ dönüşümü $T1 = T2 = T3 = T4 = 1$ ve $T5 = 2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda T üçgensel α-yörüngesel admissible dönüşümdür. Gerçekten, $\alpha(x,Tx) \geq 1$ olacak şekildeki $x \in X$ için $x \in \{1,2\}$ dir. Buradan $\alpha(T1, T^2 1) = \alpha(1,1) = 1$ olur. Bu T nin α- yörüngesel admissible dönüşüm olduğunu gösterir. $\alpha(x,y) \geq 1$ ve $\alpha(y,Ty) \geq 1$ olacak şekilde $x, y \in X$ için $x, y \in \{1,2\}$ olur. Bu ise $\alpha(x,Ty) = \alpha(1,1) = 1$ olmasını gerektirir. Bu durumda T üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşümdür. $x = 2$, $y = 5$ seçilirse $\alpha(2,5) = 1$, $d(Tx,Ty) = d(1,2) = 1$ ve

$$M_T(2,5) = \max\left\{ d(2,5), d(2,1), d(5,2), \frac{d(2,2) + d(5,1)}{2} \right\} = 1$$

elde edilir. Her $t \geq 0$ için $\beta(t) = \frac{2}{3}$ ve $x, y \in X$ olmak üzere $L = \alpha(x,y)d(Tx,Ty)$, $R = \beta\big(C(x,y)\big)C(x,y) = \frac{2}{3}C(x,y)$ olsun. Buradan aşağıdaki tablo elde edilir.

Çizelge 5.1: Bazı özel x, y değerlerine karşılık dönüşümlerin aldığı değerler tablosu

x	y	$\alpha(x,y)$	$d(Tx,Ty)$	L	$C(x,y)$	R
1	1	1	0	0	0	0
1	2	1	0	0	1	$\frac{2}{3}$
1	3	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$
1	4	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$
1	5	1	1	1	2	$\frac{4}{3}$

2	1	1	0	0	1	$\frac{2}{3}$
2	2	1	0	0	1	$\frac{2}{3}$
2	3	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$
2	4	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$
2	5	1	1	1	2	$\frac{4}{3}$
3	1	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$
3	2	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$
3	3	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$
3	4	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$
3	5	1	1	1	2	$\frac{4}{3}$
4	1	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$
4	2	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$
4	3	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$
4	4	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$
4	5	1	1	1	2	$\frac{4}{3}$
5	1	0	1	0	2	$\frac{4}{3}$
5	2	0	1	0	1	$\frac{2}{3}$
5	3	0	1	0	$\frac{3}{2}$	1
5	4	1	1	1	2	$\frac{4}{3}$
5	5	0	0	0	2	$\frac{4}{3}$

Bu tablodan Sonuç 5.2 de Hipotez (1) in sağlandığı görülmektedir. Bu nedenle Sonuç 5.2 de bütün hipotezler sağlanır ve buradan Sonuç 5.2; T, (X, d), α ve β için uygulanabilir olduğu sonucuna varılır.

Sonuç 5.4: (X, d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $T: X \to X$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun.

1. Her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \leq \beta\big(C(x,y)\big)C(x,y)$$

olacak şekilde bir $\beta \in \mathcal{F}$ vardır. Burada

$$\begin{aligned} C(x,y) \; &= \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \\ &\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}, \frac{d(T^2x,x)+d(T^2x,Ty)}{2}, \\ &d(T^2x,Tx), d(T^2x,Ty), d(T^2x,y)\} \end{aligned}$$

dir.

2. T üçgensel α- yörüngesel admissible dönüşümdür.
3. $\alpha(x_1, Tx_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_1 \in X$ vardır.
4. Her $n \geq 1$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olacak şekilde X de $\{x_n\}$ dizisi var ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ ise her $k \geq 1$ için $\alpha(x_{n(k)}, x) \geq 1$ olacak şekilde $\{x_n\}$ nin $\{x_{n(k)}\}$ alt dizisi vardır.

Bu durumda T nin $z \in X$ sabit noktası vardır ve $\{T^n x_1\}$, z ye yakınsar (Hieu and Chac 2017).

Sonuç 5.5: (X, d) bir metrik uzay, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $T: X \to X$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun.

1. Sonuç 5.2 ya da Sonuç 5.3 de ki bütün hipotezler sağlansın.
2. $x \neq y$, T nin iki sabit noktası ise, $\alpha(x, v) \geq 1, \alpha(y, v) \geq 1$ ve $\alpha(v, Tv) \geq 1$

olacak şekilde $v \in X$ vardır.

Bu durumda T nin tek bir sabit noktası vardır (Hieu and Chac 2017).

Aşağıdaki sonuç Pant and Panicker (2016) tarafından ispatlanan Teorem 4.4.1 den elde edilmiştir.

Sonuç 5.5: (X, d_b) tam b-metrik uzay, $T: X \to X$ ve $\alpha, \beta: X \times X \to [0, \infty)$ olsun. Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu kabul edelim.

(a) T α-admissible dönüşüm

(b) T α-Geraghty tipli daraltan dönüşüm

(c) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

(d) T sürekli ya da X α-regülerdir.

Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir (Pant and Panicker 2016)

KAYNAKLAR

Acar, Ö., Altun, I., 2017. A fixed point theorem for ψ_F-Geraghty contraciton on metric like-spaces, Fasciculi Mathematici, DOI:10.1515/fascmath-2017-0013.

Afshari, H., Aydi, H. and Karapınar, E., 2018. On generalized $\alpha - \psi$-Geraghty contractions on b-metric spaces.

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, J. Nonlinear Convex Anal., 8 (1), 61-79.

Aghajani A., Abbas M. and Roshan J. R., 2014. Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces. Math. Slovaca. 64 (4), 941 – 960.

Alqahtani, B., Fulga, A., Karapınar, E., 2018. A short note on the common fixed points of the Geraghty contraction of type $E_{S,T}$, Demonstr. Math., 51, 233–240.

Babu, G.V.R., Sarma, K.K.M., Kumari, V.A., 2014. Common fixed points of ψ-weak generalized Geraghty contractions in partially ordered metric spaces, International Journal of Mathematics and Scientic Computing, 4(2), 88-93.

Bakhtin, I.A., 1989. The contraction mapping principle in almost metric space. In Functional Analysis, Ulýanovsk Gos. Ped. Inst.: Ulýanovsk, 26–37, Russia.

Banach, S., 1922. Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations, integrals, Fund. Math., 3, 133–181.

Bayraktar, M., 1994. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 314, Erzurum.

Boriceanu, M., Bota, M. & Petrusel, A., 2010. Multivalued fractals in b-metric spaces, Cent. Eur. J. Math., 8(2), 367-377.

Bota, M., Molnar, A., Varga, C., 2011. On Ekeland's variational principle in b-metric spaces, Fixed Point Theory, 12(2), 21-28.

Chandok S., 2015. Some fixed point theorems for (α,β)-admissible Geraghty type contractive mappings and related results, Math. Sci. (Springer), 9 , 127-135.

Cho S. H., Bae J. S. and Karapinar E., 2013. Fixed point theorems for Geraghty contraction type maps in metric spaces. Fixed Point Theory Appl. 2013:329, 1-11.

Czerwik, S., 1993. Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis 1(1), 5-11.

Czerwik S.,1998. Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces. Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena. 46 , no. 2, 263 – 276.

Dukic, D., Kadelburg, Z., Radenovi´c, S., 2011. Fixed points of Geraghty-type mappings in various generalized metric spaces. Abstr. Appl. Anal., 561245.

Faraji, H., Savic, D. and Radenovic, S., 2019. Fixed point theorems for Geraghty contraction type mappings in b-metric spaces and applications, Axioms 8 (34).

Farazadeh, A., Noytaptim, C., Kaewcharoen, A., 2018. Some Fixed Point Theorems for Generalized $\alpha-\eta-\psi$-Geraghty Contractive Type Mappings in Partial b-Metric Spaces, Journal of Informatics and Mathematical Sciences, 10 (3), 455-478.

Geraghty, M.A., 1973. On contractive mappings. Proc. Am. Math. Soc., 40, 604–608.

Gordji, M.E., Ramezani, M., Cho, Y.J., Pirbavafa, S., 2012. A generalization of Geraghty's theorem in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations, Fixed Point Theory Appl., 2012, 74.

Hieu, N.T., Chac L.T., 2017. Some fixed point theorems For generalized α-Geraghty contraction type mappings in b-metric spaces and some applications to the nonlinear integral equation, 32(2), 231-253.

Khamsi, M. A. and Kirk W. A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.

Kirk, W., Shahzad, N., 2014. Fixed Point Theory in Distance Spaces. Springer, Berlin, Germany.

Kumam P., Dung N. V., Sitthithakerngkiet K., 2015. A generalization of Ciric fixed point theorems, Filomat, 29 ,1549-1556.

Latif A., Parvaneh V., Salimi P., Al-Mazrooei A. E., 2015. Various Suzuki type theorems in b-metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl., 8 , 363-377.

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları Tic. Ltd. Sti., Kütahya.

Pant, R., Panicker, R., 2016. Geraghty and Ciric type fixed point theorems in b- metric spaces, 9 , 5741-5755.

Popescu O., 2014. Some new fixed point theorems for α-Geraghty contraction type maps in metric spaces, Fixed Point TheoryAppl. , Paper No. 190 , 1-12.

Ravi, S.A., Eldred, A.A., 2016. Best proximity points for generalized $\alpha-\psi$-Geraghty contractive mappings, International Journal of Mathematics And its Applications, 4(3-A), 173-180.

Samet B., Vetro C. and Vetro P., 2012. Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings, Nonlinear Anal. 75 , no. 4, 2154–2165.

Shahkoohi, R.J., Razani, A., 2014. Some fixed point theorems for rational Geraghty contractive mappings in ordered b-metric spaces. J. Inequal. Appl., 373.

ÖZGEÇMİŞ

<u>Kişisel Bilgiler</u>

Adı-Soyadı	:	Oğuzhan AYTEMİZ
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	:	31.10.1992 – Erzurum
Medeni Hali	:	Bekar
Telefon	:	+90 (555) 899 32 31
e–mail	:	oguzhanaytemiz0@gmail.com

<u>Eğitim</u>

Derece	**Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Atatürk Üniversitesi	2014
Lise	Aşkale Anadolu Lisesi	2010