770599

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE VE SOBOLEV UZAYLARINDA GÖMME TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bilal ÇEKİÇ

DOKTORA TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR
EYLÜL – 2005

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Bilal ÇEKİÇ tarafından yapılan bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan	: Prof.Dr.	Sezai OĞRAŞ (Danışman)
Üye	: Prof.Dr.	Rauf AMİROV
Üye	: Prof.Dr.	H.İlhan TUTALAR
Üye	: Prof.Dr.	Ali YILMAZ
Üye	: Doç.Dr.	Rabil MAŞİYEV (İkinci Danışman)

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

26./10/..2005

Doç. Dr. Necmettin PİRİNÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca, değerli bilgileriyle bana ışık tutan, her konuda yardımcı ve yol gösterici olan, ilgisini ve içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim saygıdeğer danışman hocam;

Prof.Dr. Sezai OĞRAŞ' a,

İkinci danışmanlığımı üslenerek, tez konumda çalışmamı sağlayan, önümde yeni ufuklar açan, geniş tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, beni yönlendiren ve rehberlik eden

Doç.Dr. Rabil MAŞİYEV' e

teşekkür ve şükranlarımı, ayrıca sonuçların değerlendirilip tartışılmasında katkı sunan saygıdeğer;

Prof.Dr. Stefan SAMKO , ***Doç.Dr. Peter Alexander HÄSTÖ***
(University of Algarve, Portugal) *(University of Helsinki, Finland)*

ve

Doç.Dr. Farman MAMEDOV'a
(Azerbaycan Teknik University, Bakü)

saygılarımı sunarım.

Bugüne ulaşmamda verdikleri emek ve sevgileri ile destekleri için sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Bilal ÇEKİÇ

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzayları teorisi son yıllarda, elastik mekanik, akışkanlar dinamiği, varyasyonel hesap ve $p(x)$ büyüme koşullu diferansiyel denklemler ile ilgili problemler için daha çok ilgi çekmektedir.

Bu çalışmanın temel amacı, değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında gömme tipli eşitsizlikleri elde etmektir. Bu amaçla öncelikle, ölçülebilir fonksiyonlar için en iyi üstlü Sobolev tipli gömme eşitsizliği ile kesirli (fractional) maksimal fonksiyonun sınırlılığını ve düzgünlüğünü (regülerliğini) göstereceğiz. Global log-Hölder süreklilik koşulu altında değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Hardy eşitsizliğini ve ayrıca test fonksiyonunun tanım bölgesinde tanımlı değişken üstlerin regülerlik koşulu ve bu üstlerin sınırdaki değerleri cinsinden ifade edilmiş global log-Hölder süreklilik koşulu altında kuvvet tipli Hardy eşitsizliğini ve son olarak da ağırlık fonksiyonlarının davranışları incelenerek, değişken üstlerin sınırdaki değerleri ve ağırlık fonksiyonları cinsinden ifade edilmiş global-Hölder süreklilik koşulu altında genelleştirilmiş Hardy eşitsizliğini değişken üstlü Lebesgue uzaylarında elde edeceğiz.

ÖZET

Bu tezde, değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında gömme tipli eşitsizlikler olan Sobolev ve ağırlıklı Hardy eşitsizlikleri elde edilmiştir.

İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının çıkış noktası ve fiziksel motivasyonu ile günümüze kadar yapılan çalışmalar kısaca ele alınmıştır.

Tezde kullanılan temel bilgiler ve değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarına temel teşkil eden uzaylar ikinci bölümde verilmiştir.

Üçüncü bölümde, değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzayları Teorisi verilmiş ve bu uzaylarda özellikle çalışma konumuzla ilgili sonuçlar üzerinde durulmuştur.

Değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında ölçülebilir fonksiyonlar için Sobolev tipli eşitsizlik ve kesirli maksimal fonksiyon ile Riesz potansiyel operatörü arasındaki ilişkiden yararlanarak, kesirli maksimal fonksiyon için Sobolev tipli eşitsizlik dördüncü bölümde ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde, değişken üstlü Lebesgue uzayında gömme teoremlerinin elde edilmesi için vazgeçilmez bir araç olan Hardy tipli eşitsizliklerle ilgilenilmiştir. Bu bölümde, değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Hardy Eşitsizliği global log-Hölder süreklilik koşulu altında ve kuvvet tipli Hardy eşitsizliği ise test fonksiyonunun tanım bölgesinde tanımlı değişken üstlerin regülerlik koşulu ve bu üslerin sınırdaki değerleri cinsinden ifade edilmiş global log-Hölder süreklilik koşulu altında elde edilmiştir.

Son olarak, ağırlık fonksiyonlarının davranışları incelenerek ve değişken üstlerin sınırdaki değerleri ve ağırlık fonksiyonları cinsinden ifade edilmiş global-Hölder süreklilik koşulu altında genelleştirilmiş Hardy eşitsizliği son bölümde ispatlanmıştır.

SUMMARY

In this thesis, the inequalities of embedding type, Sobolev and weighted Hardy type inequalities, are obtained in Lebesgue and Sobolev space with variable exponent.

In the first chapter, as an introduction chapter, the exit point and physical motivation of Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent, and the studies that have been carried out up to now are briefly dealt with.

The basic information used in the thesis and the spaces forming the basis of Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent are presented in the second chapter.

In the third chapter, theory of Lebesgue and Sobolev space with variable exponent is given, and in these spaces, especially the results about our studies are taken up.

We proved Sobolev type inequality for measurable functions in Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent and Sobolev type inequality for fractional maximal function by making use of the relation between fractional maximal function and Riesz potential operator in the fourth chapter.

In the fifth chapter, we were interested in Hardy type inequality, which is an indispensable tool for getting embedding theorems Lebesgue space with variable exponent. In this chapter, we obtained Hardy type inequality under the global log-Hölder continuity condition and also power type Hardy inequality under regularity condition of variable exponents defined in the domain of test function and the global log-Hölder continuity condition which is expressed in terms of boundary value of these exponents in Lebesgue spaces with variable exponent.

Finally, we proved generalized Hardy inequality by investigating behaviors of weight functions and under the global log-Hölder continuity condition which is expressed in terms of boundary value of variable exponents and weight functions in the last chapter.

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Son yıllarda elastik mekanik üzerinde yapılan çalışmalarla canlanmış varyasyonel problemlere ve $p(x)$- büyüme koşullu diferansiyel denklemlere olan ilgi artmıştır. Bilindiği gibi,

$$\int_\Omega F(\nabla u(x))dx$$

varyasyonel integralleri için regülerlik problemleri

$$c_1|\xi|^p \le F(\xi) \le c_2(1+|\xi|)^q, \qquad \xi \in R^n$$

koşulu altında çözülür. $p=q$ durumunda Sobolev uzayları teorisi bu tip problemler için doğal ve etkili bir araçtır. $p<q$ olduğu zaman durum dramatik bir biçimde değişir.

M.Giaguninta[36], P.Marcellini[60,61] ve N.Fusko[35], $p<q$ özellikli varyasyonel problemlerin düzgünlüğü(regülerliği) ile ilgilenmiş, V.V.Zihikov[84] ise

$$\int_\Omega (1+|\nabla u(x)|^2)^{\alpha(x)} dx$$

şeklindeki varyasyonel integralleri göz önüne almıştır.

Birçok materyal ve problem klasik Lebesgue ve Sobolev uzayları kullanılarak yeterli doğrulukla matematiksel olarak modellenebilir. Ancak homojen olmayan bazı materyaller için klasik Lebesgue ve Sobolev uzayları yeterli olmaz. Bu tip materyaller için p üstü değiştirilebilmelidir.

Yukarıdaki çalışmalar endüstriyel olarak çok ilgi duyulan ve altında yer alan enerjisi klasik Lebesgue uzayları cinsinden ifade edilemeyen homojen olmayan materyaller için model oluşturabilme yolunu açmıştır. M.Růžička[74] katsayıları değişken büyüme oranlı doğrusal olmayan sistem içeren electrorheological akışkanlar(EA) için matematiksel model üzerinde çalışmıştır. Bu akışkanlar bir elektrik alan uygulandığında katı hale geçebilme, elektrik alan uzaklaştırıldığında ise çok kısa bir sürede sıvı hale geçebilme gibi oldukça önemli ve tekrarlanabilir davranışlar sergilerler. Kendi içlerindeki bağıl devinime gösterdikleri direnme özelliği (viscosity) akışkana uygulanan elektrik alanına bağlıdır. Bu alan, alana paralel olan akışkanda şerite benzer formlara neden olur. Bu olay Winslow etkisi olarak bilinir. EA etkisi otomobil subapları, debriyajlar, damperler, hidrolik ve robot sistemleri gibi alanlarda kullanılmaktadır. Ayrıca, EA robot bilimi ve uzay teknolojisinde kullanılmakta ve deneysel araştırmalar Nasa laboratuarlarında yapılmaktadır.

Bu tür akışkanlar için, viscosity 1000 çarpanı ile değişebilir. Böyle bir durumda, Du, u hız alanının gradientinin simetrik kısmını ve p elektrik alanına bağlı materyal fonksiyonu göstermek üzere, altta yer alan enerjisi (etkin enerji) $\int |Du|^{p(x)}\,dx$ ile verilir. Benzer enerji, gerilme tensörü T sıcaklığının dağılımına bağlı olan, başka bir tip akışkan için Zhikov[84] tarafından hazırlanan bir modelde ve aynı zamanda standart olmayan büyümeli varyasyonel integrallerin incelenmesinde ortaya çıkar. Böyle materyallerin altında yer alan enerji için doğru uzaylar, genelleştirilmiş Orlicz uzaylarının özel bir durumu olan değişken üstlü Lebesgue uzaylarıdır. Yukarıdaki akışkan modeller için çözümlerin regülerliği ve varlığı sorusu hakkında daha ileri metotlar kullanabilmek amacıyla değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzayları durumunda da en iyi sonuçları elde edebilmek önemlidir. Ne yazık ki, bu uzaylar istenmeyen bazı özelliklere sahiptirler. Öteleme operatörü genel olarak değişken üstlü Lebesgue uzaylarında süreksizdir ve öteleme operatörünün genelde süreksiz olması $u \in L^1(\Omega)$ ile f fonksiyonun konvolüsyonunun genelde süreksiz olduğunu verir. Öteleme ve konvolüsyon gibi iki önemli aracın beklenen sonucu vermemesi, önemli ölçüde mevcut teknikleri sınırlar ve teorinin gelişimini yavaşlatır. Bu yüzden klasik Lebesgue ve Sobolev uzayları için standart sonuçların birçoğu değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında sağlanmaz. Düzgün fonksiyonların yoğunluğu, Sobolev gömme Teoremleri ve Hardy eşitsizlikleri gibi temel özelliklerin bile gösterilmesinin önemli olduğunu belirtmek gerekir. Bu şartlarda Hardy-Littlewood maksimal operatörü oldukça önemli bir araçtır.

Değişken üstlü Lebesgue uzayları literatürde ilk defa, 1931 yılında W.Orlicz[72] tarafından yazılan makalede görüldü. Bu makalede aşağıdaki soru göz önüne alınmıştır: (p_k) ve (x_k) dizileri $\sum x_k^{p_k}$ yakınsak olacak şekilde reel sayıların bir dizisi olsun. Bu halde $\sum x_k y_k$ ifadesinin yakınsak olması için y_k üzerindeki gerek ve yeter koşullar nelerdir? Bu soruya yanıt, en az bir $\lambda > 0$ ve $p_k^{/} = \dfrac{p_k}{p_k - 1}$ için $\sum (\lambda y_k)^{p_k^{/}}$ serisinin yakınsak olması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Orlicz aynı zamanda değişken üstlü Lebesgue uzayını reel aralıkta göz önüne almıştır ve bu uzayda Hölder eşitsizliğini ispatlamıştır. Bu makaleden sonra Orlicz değişken üstlü Lebesgue uzayını çalışmayı bırakıp, kendi ismi ile anılan Orlicz fonksiyon uzayları teorisi üzerinde yoğunlaşmıştır. Orlicz uzayları u, Ω bölgesinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere en az bir $\lambda > 0$ ve koşulları bilinen bir φ fonksiyonu için

$$\rho(\lambda u)=\int_{\Omega}\varphi\left(\lambda|u(x)|\right)dx<\infty$$

olacak şekildeki fonksiyonlardan oluşan uzaya denir. Ek olarak, eğer ρ fonksiyonu bazı koşulları sağlarsa böyle uzaylara da modüler uzaylar adı verilir. Bu uzaylar ilk defa sistematik olarak H.Nakano[66,67] tarafından çalışılmış ve değişken üstlü Lebesgue uzayını daha genel uzayların bir örneği olarak göz önüne almıştır. Daha sonra, özellikle H.Hudzik[45-49] ve J.Musielak[65] tarafından modüler uzaylar incelenmiştir. Eğer yukarıdaki φ fonksiyonu x değişkenine de bağlı ise bu durumda ***genelleştirilmiş Orlicz uzayları*** veya ***Musielak Orlicz uzayları*** adı verilen daha genel uzayları elde ederiz.

Reel aralıkta değişken üstlü Lebesgue uzayları, bağımsız olarak Rus araştırmacılar özellikle de I.Sharapudinov[80-82] tarafından geliştirildi. Bu araştırmacıların orijin noktası I.Tsenov[83] tarafından üretilen ve I.Sharapudinov[80] tarafından cevaplanan u sabit bir fonksiyon ve v, $L^{p(x)}([a,b])$ uzayının sonlu boyutlu alt uzayında değişmek üzere

$$\int_a^b|u(x)-v(x)|^{p(x)}\,dx$$

ifadesinin minimize problemine dayanır. 1980 li yılların ortasında V.Zhikov[84] değişken üstlü uzaylarla yakından ilişkili olan standart olmayan büyüme koşullu varyasyonel (variational) integralleri göz önüne alarak araştırmalar için yeni bir çizgi oluşturmuştur.

Değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının araştırılmasında bir sonraki büyük adım 90 lı yılların başlarında O.Kováčik ve J.Rákosník[58] tarafından atılmıştır. Bu makalede R^n de değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının birçok temel özelliği ortaya konmuştur. O.Kováčik ve J.Rákosník, değerlerini $[1,\infty]$ aralığında alan p fonksiyonu için değişken üstlü Lebesgue uzayının tanımını genişletmişlerdir. Bu tanıma göre Ω, R^n de açık bir bölge olmak üzere $\Omega_\infty=\{x\in\Omega:p(x)=\infty\}$ olsun.

$$\rho(f)=\int_{\Omega/\Omega_\infty}|f(x)|^{p(x)}+\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_\infty}|f(x)|$$

ve

$$\|f\|_{p(x)}=\inf\{\lambda>0:\rho(\frac{f}{\lambda})\leq 1\}$$

olarak alınsın. En az bir $\lambda>0$ için $\rho(\lambda f)<\infty$ olacak şekilde tüm fonksiyonların sınıfına ***değişken üstlü Lebesgue uzayı*** adı verilir.

Ayrıca O.Kováčik ve J.Rákosník, Ω, R^nde sınırlı bir bölge, $p:\overline{\Omega}\rightarrow[1,n)$ fonksiyonu sürekli ve

$$1\leq q(x)\leq\frac{np(x)}{n-p(x)}-\varepsilon=p^*(x)-\varepsilon \quad , \quad 0<\varepsilon<\frac{1}{n-1}$$

olmak üzere Sobolev tipli

$$\|u\|_{q(x)}\leq c\|\nabla u\|_{p(x)} \quad ; \quad u\in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.1}$$

eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Bu makaleden sonra uzun bir süre herhangi bir çalışma gözlenmemiştir. Daha sonra bu konu bağımsız olarak birçok araştırmacı tarafından yeniden ele alınmıştır.

S.Samko[75] Rus bilim adamlarının çalışmalarına dayalı olarak değişken üstlü Lebesgue uzayında konvolüsyon ve potansiyel tipli operatörleri incelemiştir. Konvolüsyon operatörleri bu uzaylarda istenmeyen özelliklere sahiptir. Bunun nedeni $K=k*f$ konvolüsyon operatörünün genel olarak bir f fonksiyonunun singüleritesini başka bir noktaya taşımasıdır. Bunun bir sonucu olarak Young tipli teorem bu uzaylarda genel olarak geçerli değildir. Bu çalışmasını takip eden ikinci çalışmasında [76] potansiyel operatörlerini de göz önüne alarak bu uzaylar için Young Teoreminin bazı çeşitlerini ispatlamış ve değişken üstlü Lebesgue uzayında Sobolev tipli teoremin geçerliliği sorusunu ele almıştır. Ω sınırlı bir bölge ve p ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere Riesz potansiyeli için Sobolev tipli eşitsizlik ve ayrıca p fonksiyonun

$$|p(x)-p(y)|\leq\frac{c}{-\log|x-y|}, \qquad |x-y|<\frac{1}{2} \tag{1.2}$$

koşulu ve maksimal fonksiyonun sınırlılığı koşulu altında optimal eşlenik üst için Sobolev tipli eşitsizliği ispatlamıştır. Bunun dışında değişken mertebeli potansiyel tip operatörleri incelemiştir.

D.E.Edmunds, J.Lang ve A.Nekvinda[21] $p^+=\infty$ durumu dahil olmak üzere, değişken üstlü Lebesgue uzayının sırasıyla, sürekli normlu, mutlak sürekli normlu fonksiyonların alt uzayı ve ayrıca sınırlı fonksiyonlar alt uzayı ile arasındaki ilişkileri ele almışlardır.

X.-L.Fan ve çalışma arkadaşları[32] standart olmayan büyüme koşullu varyasyonel problemler ve diferansiyel denklemlerin çalışılmasından[27-30,61] esinlenerek, H.Hudzik ve J.Musielak'ın çalışmalarına dayalı olarak değişken üstlü Lebesgue uzaylarının özelliklerini incelemişlerdir. Sınırlı bölgede (en iyi eşlenik üstlü olmayan) Sobolev gömme teoremini ve $C^{\infty}(\Omega)$ uzayının değişken üstlü Sobolev uzayında yoğunluğunu göstermişlerdir[32]. Daha sonra Ω, R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge ve p fonksiyonunun Lipschitz sürekli olma koşulu altında Sobolev tipli gömme teoremini[31] ve [33] çalışmalarında ise p düzgün sürekli bir fonksiyon ve $u(x)=u(|x|), \forall x \in \Omega$ radyal simetrik olmak üzere Strauss-Lions tipli kompakt gömme teoremini ispatlamışlardır.

G.Mingione ve arkadaşları ise diferansiyel denklemlerin çalışılmasından [60,61] esinlenerek $p(x)$ büyüme koşullu fonksiyoneller [1-4] üzerinde çalışmışlardır.

D.E.Edmunds ve J. Rákosník[25,26], p fonksiyonu Lipschitz sürekli ve Ω açık ve sınırlı bir bölge iken $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ özelliğine sahip $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ fonksiyonları için $1 \leq p(x) \leq q < n$ olmak üzere Sobolev tipli

$$\| u \|_{p^*(x)} \leq C \| \nabla u \|_{p(x)}$$

eşitsizliği ve Ω Lipschitz sınıra sahip iken Sobolev gömme teoremini vermişlerdir.

D.E.Edmuns ve A.Nekvinda[23], her $n \in Z$ için $p_n \geq 1$ ve $a=\{a_n\}, a_n \in R$ olmak üzere

$$\| a \|_{\{p_n\}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{n \in Z} \left|\frac{a_n}{\lambda}\right|^{p_n} \leq 1\right\}$$

ve

$$\ell^{p_n} = \left\{a : \| a \|_{\{p_n\}} < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan değişken üstlü Lebesgue uzayının ayrık benzerini de göz önüne alarak, her iki uzayın Banach fonksiyon uzayı olduğunu göstermişler ve ortalama operatörün ℓ^{p_n} ve $L^{p(x)}$ uzaylarında sınırlılığı üzerine çalışmışlardır.

Ayrıca A.Nekvinda[68] ℓ^{p_n} ve ℓ^{q_n} Banach uzaylarında normların eşdeğerliliği için p_n ve q_n üstlerine gerek ve yeter koşullar vererek, $(S_k a)_n = a_{n-k}$, $n \in \mathbb{Z}$ operatörünün sınırlılığı ile ilgilenmiştir.

L.Pick ve M.Růžička[73] genel p fonksiyonları için $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığına dair ters bir örnek sundular.

L.Diening[14,15] tarafından (1.2) koşulunu sağlayan ve yeteri kadar büyük yuvarın dışında sabit olan p fonksiyonu için Hardy-Littlewood maksimal operatörünün değişken üstlü Lebesgue uzayında sınırlılığı ispatlandı. Ayrıca, [16] çalışmasında Riesz potansiyel operatörünün sınırlılığını ve Sobolev gömme teoremini verdi.

Cruz-Uribe, Fiorenza ve Neugebaur[11] (1.2) ve

$$|p(x)-p(y)| \leq \frac{C}{\log\left(e+|x|\right)}, \qquad x, y \in \Omega, |y| \geq |x| \tag{1.3}$$

koşulu altında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün değişken üstlü Lebesgue uzayında sınırlılığını ve üstten yarı sürekli p fonksiyonu için (1.3) koşulunun gerekliliğini göstermişlerdir.

C.Capone, D.Cruz-Uribe ve A.Fiorenza[9] ise maksimal operatörün sınırlılığına bağlı olarak, kesirli (fractional) maksimal operatörün sınırlılığını ve Riesz potansiyel operatörü yardımıyla da Sobolev gömme teoremini ispatlamışlardır.

A.Nekvinda[24], p fonksiyonunun sağlaması gereken (1.3) koşulu yerine bir integral koşulu bırakarak, maksimal fonksiyonun sınırlılığı ile ilgili daha genel bir sonuç elde etmiştir. (1.2) ve (1.3) koşulları süreklilik modülü anlamında en iyiye yakındır. Eğer bu iki koşuldan biri zayıflatılırsa, bu durumda maksimal operatör sınırlı olmayacak şekilde bir p fonksiyonu vardır. Bu iki koşul birçok araştırmacı tarafından kabul gördü ve bazen yanlışlıkla gerekli koşul olarak ifade edildi. (1.2) ya da (1.3) koşulunun maksimal fonksiyonun sınırlılığı için gerekli olmadığına ilişkin bir örnek A.Nekvinda tarafından verildi.

Y.Mizuta ve çalışma arkadaşları[64], p fonksiyonu üzerindeki koşulu, $1<p_\infty<\infty$, $a>0$ ve $-\infty<b<\infty$ olmak üzere

$$p(x)=p_\infty+\frac{a\log\left(e+\log\left(e+|x|\right)\right)}{\log\left(e+|x|\right)}+\frac{b}{\log\left(e+|x|\right)}$$

şeklinde rahatlatarak, maksimal fonksiyonun sınırlılığı ile ilgili sonuçlar ve Riesz potansiyel operatörü için Sobolev tipli eşitsizlik elde etmişlerdir.

L.Diening[17], Muckenhoupt sınıfları kavramını genelleştirerek, maksimal operatörün sınırlılığı için gerek ve yeter koşullar vermiştir.

D.Edmunds ve M.Meskhi[22], ağırlıklı değişken üstlü Lebesgue uzayında bir boyutlu kesirli integrallerin (Riezs potansiyel operatör) sınırlılığı üzerine çalıştılar.

V.Kokilashvili ve S.Samko, sınırlı bölge üzerinde ağırlıklı Lebesgue uzayında singüler operatörün sınırlılığını [53,54] de; maksimal operatörün sınırlılığı ise [56] da ele almışlar ve Hardy operatörünün sınırlılığı ile ilgili bazı sonuçlar vermişlerdir. Ayrıca, S.Samko[78,79] sınırlı bölgede kesirli integraller için Hardy eşitsizliğini elde etmiştir.

P.Harjulehto, P.Hasto ve M.Koskenoja [42], V.Kokilashvili ve S.Samko nun [56] çalışmasından elde edilebilecek Hardy eşitsizliğini, maksimal operatörün lokal olarak sınırlı olmasından yararlanarak, farklı bir yöntem ile elde etmiş ve p fonksiyonunun sınırdaki davranışına bağlı olarak Hardy eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığını göstermişlerdir.

Değişken üstlü Lebesgue uzaylarında, genel ağırlıklı Hardy operatörünün sınırlılığı için integral tipli bir gerek koşul ve ayrıca bir yeter koşul D.Edmunds, V. Kokilashvili ve A.Meskhi[20] tarafından verildi. Bu koşullar, p fonksiyonun sabit olması durumunda çakışmaktadır.

2. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, önce ileriki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar ve teoremler verilecek, ardından değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarına temel teşkil eden uzaylar sunulacaktır.

2.1. Normlu Uzay

Bir X vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona ***fonksiyonel*** denir. Bir f fonksiyoneli

$$f(ax+by)=af(x)+bf(y), \qquad x,y\in X, \quad a,b\in\mathbb{C}$$

koşulu ile lineerdir.

X vektör uzayı üzerindeki tüm sürekli lineer fonksiyonellerin kümesine X vektör uzayının ***duali*** denir ve X' ile gösterilir. Bu uzay

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (cf)(x)=cf(x), \qquad f,g\in X',\ x\in X,\ c\in\mathbb{C}$$

şeklindeki noktasal toplam ve skaler çarpım altında bir vektör uzayıdır.

Bir X vektör uzayı üzerinde bir ***norm***

i) Her $x\in X$ için $f(x)\geq 0$ ve $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

ii) Her $x\in X$ ve $\lambda\in\mathbb{C}$ için $f(\lambda x)=|\lambda|f(x)$

iii) Her $x,y\in X$ için $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$

özelliklerini sağlayan reel değerli bir f fonksiyonelidir. Üzerinde bir norm tanımlanmış X vektör uzayına ***normlu uzay*** denir. Daha basit bir gösterim sunmadıkça, X vektör uzayı üzerindeki normu $\|\cdot\,;X\|$ ile göstereceğiz. X' dual uzayının normu ise $x'\in X'$ için

$$\|x';X'\|=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{|x'(x)|}{\|x;X\|}$$

şeklinde tanımlanabilir.

X vektör uzayı üzerinde tanımlı farklı iki norm, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ olsun. En az bir $c>0$ sabiti için

$$c\|x\|_1\leq\|x\|_2\leq\left(\frac{1}{c}\right)\|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına ***eşdeğer normlar*** denir.

X normlu uzayında bir $\{x_n\}$ dizisinin $x_0 \in X$ noktasına güçlü yakınsaması için gerek ve yeterli koşul

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0; X\| = 0$$

olmasıdır. Bu yakınsama $x_n \to x_0$ ile gösterilir. Eğer her $f \in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x_0$$

oluyorsa bu durumda, $\{x_n\}$ dizisine X normlu uzayında zayıf yakınsaktır denir ve bu durum $x_n \xrightarrow{z} x_0$ ile gösterilir.

S, X normlu uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer her bir $x \in X$, S kümesinin elemanlarının bir dizisinin limiti ise, bu durumda S kümesine X uzayında ***yoğundur*** denir. Eğer X normlu uzayı sayılabilir yoğun bir altkümeye sahip ise X uzayına ***ayrılabilirdir*** denir.

$\{x_n\}$, X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m; X\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir ***Cauchy dizisi*** denir.

Bir X normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya ***tam*** ve bir ***Banach uzay*** denir. Her normlu X uzayı ya Banach uzayıdır ya da normu her $x \in X$ için

$$\| x; Y \| = \| x; X \|$$

eşitliğini sağlayan bir Y Banach uzayının yoğun altkümesidir. Bu ikinci durumda Y uzayına X uzayının **tamlanmışı** adı verilir.

Bir X vektör uzayının X' duali de normlu vektör uzayı olduğundan, bu uzayın da duali tanımlanabilir. Bu durumda $(X')' = X''$ lineer vektör uzayına X in ***ikinci duali*** adı verilir.

Sabit bir $x \in X$ için X' uzayında

$$g_x(f) = f(x) \qquad (f \in X' \text{ değişken})$$

şeklinde bir g_x fonksiyoneli tanımlayalım. Her $x \in X$ için bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden, bu halde

$$C : X \to X''$$
$$x \mapsto g_x$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüme ***kanonik dönüşüm*** adı verilir. Eğer kanonik dönüşüm üzerine ise, bu durumda X uzayına ***yansımalı uzay*** adı verilir.

2.2. Operatörler ve Gömmeler (Embeddings)

X ve Y, aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $L: D_L \subset X \to Y$ dönüşümü D_L alt uzayındaki bir x elemanını Y uzayında bir tek elamana götürüyorsa, bu durumda L ye ***operatör***, D_L ye de L operatörünün ***tanım kümesi*** denir.

$D_L \subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere, $L: D_L \subset X \to Y$ operatörüne her $x, y \in D_L$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

koşuluyla birlikte ***lineer operatör*** adı verilir.

X ve Y normlu iki uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\| L(x); Y \| = \| x; X \|$$

özelliğine sahip X normlu uzayını Y normlu uzayı üzerine dönüştüren bire-bir bir lineer L operatörü varsa X ve Y normlu uzaylarına ***izometrik olarak izomorfizma*** ve L operatörüne de X ve Y normlu uzayları arasında ***izometrik izomorfizma*** denir. X ve Y normlu uzayları için böyle bir ilişkiyi $X \cong Y$ ile göstereceğiz. Bu özelliğe sahip uzaylara yapısal benzerlikleri nedeniyle aynı gözle bakılabilir.

$L: D_L \subset X \to Y$ operatörüne belli bir $M \geq 0$ sayısı ve her $x \in D_L$ için

$$\| Lx; Y \| \leq M \| x; X \|$$

eşitsizliği ile birlikte ***sınırlı operatör*** denir.

X, Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer A kümesi X normlu uzayının sınırlı bir altkümesi iken $L(A)$, Y normlu uzayında ön kompakt ise, bu durumda L operatörüne ***kompakt operatör*** denir. Eğer L sürekli ve kompakt ise ***tamamen sürekli*** denir. Her kompakt operatör sınırlıdır. Her sınırlı lineer operatör süreklidir. Böylece her kompakt lineer operatör tamamen süreklidir.

X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

i) X, Y nin bir alt uzayı,

ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X normlu uzayı Y normlu uzayına ***gömülür*** denir ve bu durum $X \to Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü lineer olduğundan (ii) koşulu

$$\|Ix;Y\| \leq M\|x;X\|, \quad x \in X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Eğer I birim operatörü kompakt ise X normlu uzayı Y normlu uzayına ***kompakt gömülür*** denir.

2.3. Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n-bileşenlisi ise α ya ***çoklu-indis*** denir ve x^α, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi olarak tanımlanır, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ olur.

Benzer şekilde $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \partial/\partial x_j$ ise, bu durumda

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Özel olarak, bir u fonksiyonunun gradientini $\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$ ile göstereceğiz.

Eğer $G \subset R^n$ ise R^n de G nin ***kapanışı*** $\overline{G}$ ile belirtilir. Ω, R^n de bir bölge olmak üzere $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ kümesi R^n in bir kompakt (kapalı ve sınırlı) altkümesi ise, bu durum $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. u, G de tanımlı bir fonksiyon ise, u fonksiyonun ***desteği***

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$ ise, u fonksiyonu Ω da ***kompakt desteğe*** sahiptir denir.

Ω, R^n de bir bölge olsun. Negatif olmayan herhangi m tamsayısı için Ω bölgesinde $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri sürekli olan ϕ fonksiyonlarından oluşan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Bunun yanında $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ ile gösterelim. $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki bütün fonksiyonlardan oluşur. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına ***test fonksiyonu*** adı verilir.

Ω açık bir bölge olduğundan, $C^m(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonların Ω bölgesinde sınırlı olması gerekli değildir. C_B^m gösterimi ile $|\alpha| \leq m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha \phi$ lerin sınırlı olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarının uzayını belirtelim. Bu durumda $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\left\| \phi; C^m(\overline{\Omega}) \right\| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \left| D^\alpha \phi(x) \right|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Eğer $\phi \in C(\Omega)$, Ω bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli ise, bu halde ϕ fonksiyonu Ω bölgesinin kapanışı olan $\overline{\Omega}$ bölgesine tek, sınırlı ve sürekli genişlemeye sahiptir. $C^m(\overline{\Omega})$ vektör uzayı, Ω bölgesinde $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $D^\alpha \phi$ sınırlı ve düzgün sürekli olan $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarını belirtir. Eğer Ω bölgesi sınırsız ise simgelerin yanlış kullanımı belirsizliğe yol açar (örneğin, $\overline{R^n} = R^n$ olduğu halde $C^m(\overline{R^n}) \neq C^m(R^n)$) ve $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır. Bu nedenle $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı da

$$\left\| \phi; C^m(\overline{\Omega}) \right\| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \left| D^\alpha \phi(x) \right|$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

2.4. Lebesgue Ölçümü ve İntegrali

Σ , R^n nin altkümelerinin bir topluluğu olsun. Eğer Σ sınıfı için

i) $R^n \in \Sigma$

ii) $A \in \Sigma$ ise $A^c = \{x \in R^n : x \notin A\} \in \Sigma$

iii) $A_j \in \Sigma, j = 1, 2, \ldots$, iken $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$

koşulları sağlanıyorsa, Σ topluluğuna σ *- cebir* adı verilir.

Σ sınıfını negatif olmayan reel sayılara dönüştüren

$$\mu : \Sigma \to R^+ \cup \{+\infty\}$$

fonksiyonu Σ sınıfındaki ayrık kümelerin bir $\{A_j, j \in \mathbb{N}\}$ topluluğunun sayılabilir her birleşimi için

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad , \quad \forall A_j \cap A_k = \varnothing, j \neq k$$

eşitliğini sağlıyorsa, bu durumda μ fonksiyonu Σ üzerinde bir ***ölçüm*** adını alır.

R^n nin altkümelerinin aşağıdaki özelliklere sahip bir σ- cebiri Σ nın ve Σ üzerinde bir μ ölçümünün varlığı kolayca gösterilebilir.

i) R^n de her açık küme Σ aittir.

ii) Eğer $A \subset B$, $B \in \Sigma$ ve $\mu(B) = 0$ ise, bu durumda $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = 0$.

iii) $A = \{x \in R^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1,2,\ldots,n\}$ ise, bu durumda $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = \prod_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)$.

iv) μ ötelemeye göre değişmeyen, yani, eğer $x \in R^n$ ve $A \in \Sigma$ iken

$x + A = \{x + y : y \in A\} \in \Sigma$ ve $\mu(x + A) = \mu(A)$.

Bu özelliklere sahip Σ topluluğunun elemanlarına R^n nin ***Lebesgue ölçülebilir*** altkümeleri; μ fonksiyonuna R^n de ***Lebesgue ölçümü*** ve $A \in \Sigma$ için $\mu(A)$ ifadesine de A nın ***ölçümü*** denir. Bundan sonra, bir $\Omega \subset R^n$ bölgesinin Lebesgue ölçümünü $|\Omega|$ ile göstereceğiz ve sadece ölçülebilir küme diye adlandıracağız.

Eğer $B \subset A \subset R^n$ ve $|B| = 0$ ise, bu durumda $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik A kümesinde ***hemen hemen her yerde (h.h.h.)*** geçerli bir özellik adını alır.

Ölçülebilir bir küme üzerinde tanımlı ve $R \cup \{\mp\infty\}$ kümesinden değerlerini alan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $a \in R$ için

$$\{x : f(x) > a\}$$

kümesi ölçülebilir ise f fonksiyonuna ***ölçülebilir fonksiyon*** denir.

$A \subset R^n$ kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad x \in A \\ 1 & \text{eğer} \quad x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. R^n de reel değerli bir s fonksiyonunun görüntü kümesi reel sayıların sonlu bir kümesi ise s fonksiyonuna bir ***basit fonksiyon*** denir. Eğer her x için $s(x) \in \{a_1, \ldots a_m\}$ ise bu durumda $A_j = \{x \in R^n : s(x) = a_j\}$ olmak üzere $s = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$ olur ve her bir A kümesinin ölçülebilir olması, s fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeterdir.

Eğer f fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli ise, bu durumda f fonksiyonunu her ikisi de ölçülebilir ve negatif olmayan $f^{+}=\max(f,0)$ ve $f^{-}=-\min(f,0)$ fonksiyonları cinsinden $f=f^{+}-f^{-}$ şeklinde yazabiliriz. $\int_{\Omega} f^{+}(x)dx$ ve $\int_{\Omega} f^{-}(x)dx$ integrallerden en az biri sonlu olmak üzere

$$\int_{\Omega} f(x)dx=\int_{\Omega} f^{+}(x)dx-\int_{\Omega} f^{-}(x)dx$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer her iki integral sonlu ise, f fonksiyonuna Ω bölgesinde ***Lebesgue integrallenebilir*** denir ve Ω bölgesinde integrallenebilir fonksiyonların sınıfı $L^{1}(\Omega)$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.1. (Monoton yakınsaklık)

A, R^{n} nin ölçülebilir bir alt kümesi ve $\{f_n\}$ her $x\in A$ için

$$0\le f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu halde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A} f_n(x)dx=\int_{A}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)dx$$

özelliği sağlanır[8].

Teorem 2.4.2. (Fatou's lemma)

A, R^{n} nin ölçülebilir bir alt kümesi ve $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\int_{A}\big(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\big)dx\le\liminf_{n\to\infty}\int_{A} f_n(x)\,dx$$

yazılabilir[8].

Teorem 2.4.3. f fonksiyonu R^{n+m} de ölçülebilir bir fonksiyon olsun ve kabul edelim ki

$$I_1=\int_{R^{n+m}}|f(x,y)|\,dx\,dy$$

$$I_2=\int_{R^{m}}\Big(\int_{R^{n}}|f(x,y)|\,dx\Big)dy$$

$$I_3=\int_{R^{n}}\Big(\int_{R^{m}}|f(x,y)|\,dy\Big)dx$$

integrallerinden en az biri var ve sonlu olsun.

Bu durumda

(a) hemen hemen her $y \in R^m$ için $f(\cdot, y) \in L^1(R^n)$,

(b) hemen hemen her $x \in R^n$ için $f(x, \cdot) \in L^1(R^m)$,

(c) $\int_{R^n} f(x,\cdot)dx \in L^1(R^m)$,

(d) $\int_{R^m} f(\cdot, y)dy \in L^1(R^n)$ ve

(e) $I_1 = I_2 = I_3$

özellikleri sağlanır[8].

2.5. $L^p(\Omega)$ Lebesgue Uzayı

Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif bir reel sayı olsun. Ω bölgesinde tanımlı

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \tag{2.5.1}$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfını $L^p(\Omega)$ ile gösterelim. Ω bölgesinde hemen hemen her yerde eşit fonksiyonları $L^p(\Omega)$ uzayında eşit kabul edelim. $L^p(\Omega)$ uzayının elemanları (2.5.1) ifadesini sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarıdır. Bu farkı göz ardı ederek, eğer u fonksiyonu (2.5.1) özelliğine sahip ise $u \in L^p(\Omega)$ ve Ω bölgesinde *h.h.h.* $u(x) = 0$ ise $L^p(\Omega)$ uzayında $u = 0$ yazacağız. Eğer $u \in L^p(\Omega)$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $cu \in L^p(\Omega)$ olduğu açıktır ve $u, v \in L^p(\Omega)$ için

$$|u(x) + v(x)|^p \le \left(|u(x)| + |v(x)|\right)^p \le 2^p \left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right)$$

olduğundan $u + v \in L^p(\Omega)$ yazılabilir. Böylece $L^p(\Omega)$ bir vektör uzayı olur.

$1 \le p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u\|_p = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \le K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna ***hemen hemen sınırlıdır*** denir. Böyle K sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki ***esas (essential) supremumu*** denir ve $\underset{x\in\Omega}{ess\sup}|u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

$L^{\infty}(\Omega)$ uzayı

$$\| u \|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} | u(x) |$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Eğer $1 < p < \infty$ ise $1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olacak şekilde $p' = \frac{p}{p-1}$ sayısına p nin ***eşleniği*** denir.

$1 < p < \infty$ ve $L \in \left[L^p(\Omega)\right]'$ olsun. Bu durumda her $u \in L^p(\Omega)$ için

$$L(u) = \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx$$

olacak şekilde bir $v \in L^{p'}(\Omega)$ vardır. Üstelik $\| v \|_{L^{p'}} = \| L \|_{[L^p(\Omega)]'}$ olur ki, buradan da $L^{p'}(\Omega) \cong \left[L^p(\Omega)\right]'$ özelliği çıkar. Dolayısıyla elemanları çok farklı bile olsa Banach uzayları olarak bu iki uzaya aynı gözle bakılabilir.

Eşitsizlikler matematiğin birçok branşı (fonksiyonel analiz, diferansiyel ve integral denklemler, interpolasyon teorisi v.b.) ve fizik, mekanik gibi diğer bilimlerin gelişimi için daima çok önemli olmuştur. Üstelik bu önem son on yılda çok hızlı artmıştır.

Ayrıca günümüzde eşitsizlikler teorisi matematiğin bağımsız bir branşı olarak göz önüne alınabilmektedir.

Şimdi çalışmamızda sıkça kullanacağımız bazı önemli eşitsizlikleri teorem halinde vereceğiz.

Teorem 2.5.1.(Hölder Eşitsizliği)

Eğer $1 < p < \infty$ ve $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega} | u(x)\, v(x) |\, dx \leq \| u \|_p \, \| v \|_{p'}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.5.2.(Minkowski Eşitsizliği)

i) Eğer $1 < p < \infty$ ise bu durumda

$$\| u + v \|_p \leq \| u \|_p + \| v \|_{p'}$$

yazılabilir.

ii) Benzer olarak, hepsi sıfır olmayan x_i , y_i, $i=1,2,\ldots$ sayılarını ve $1\le p<\infty$ sayısını göz önüne alalım. Bu durumda toplam için Minkowski eşitsizliği

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j+y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|y_m\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde ifade edilebilir.

iii) f fonksiyonunun $R^m\times R^n$ de ölçülebilir, hemen hemen her $y\in R^n$ için $f(\cdot,y)\in L^p(R^m)$ ve $y\to\left\|f(\cdot,y)\right\|_{p,R^m}$ fonksiyonunun $L^1(R^n)$ uzayına ait olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x\to\int_{R^n}f(x,y)dy$ fonksiyonu $L^p(R^m)$ uzayına ait olur ve integraller için Minkowski eşitsizliği

$$\left\|\int_{R^n}f(\cdot,y)dy\right\|_{p,R^m}\le\int_{R^n}\left\|f(\cdot,y)\right\|_{p,R^m}dy$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.5.3.(Gagliardo Eşitsizliği)

$\Omega\subset R^n$ ve $n\ge 2$ olsun. Bu durumda her $f\in C_0^{\infty}(\Omega)$ için

$$\left(\int_{\Omega}|f|^{\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\le C(n)\int_{\Omega}|\nabla f|dx$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir $C(n)$ sayısı vardır[63].

Teorem 2.5.4. (Young Eşitsizliği)

Eğer $\varepsilon>0$, $a,b\in R^1$, $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise, o zaman

$$|ab|\le\frac{|\varepsilon a|^p}{p}+\frac{|b/\varepsilon|^q}{q}$$

yazılabilir[86].

Teorem 2.5.5. $|\Omega|=\int_{\Omega}dx<\infty$ ve $1\le p\le q\le\infty$ olsun. Eğer $u\in L^q(\Omega)$ ise, bu halde $u\in L^p(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_p\le|\Omega|^{(1/p)-(1/q)}\|u\|_q$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla

$$L^q(\Omega)\to L^p(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir[6].

Teorem 2.5.6. Eğer $1 \le p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir ve $C_0(\Omega), C_0^\infty(\Omega)$ uzayları $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur. Bunun yanında, $L^p(\Omega)$ uzayı ancak ve ancak $1 < p < \infty$ ise yansımalıdır[6].

2.6. $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev Uzayı

Ω, R^n de bir bölge ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt altkümesinde *p.* kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki ölçülebilir bütün fonksiyonların uzayı $L_{loc}^p(\Omega)$ ile gösterilir.

$u \in L_{loc}^1(\Omega)$ ve α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi \, v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. ***zayıf türevi*** denir. Bu durumda v fonksiyonu, u fonksiyonunun ***genelleşmiş türevi*** olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \le |\alpha| \le m \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya ***Sobolev uzayı*** denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \quad ; \ 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_\infty \quad ; \ p = \infty$$

normları ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Teorem 2.6.1. Eğer $1 \le p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ ayrılabilirdir üstelik $1 < p < \infty$ için yansımalı ve düzgün konvekstir[5].

1938 de Sobolev kendi adıyla tanınan bazı eşitsizlikleri fonksiyonel analiz yöntemleri kullanarak ispatlamıştır. Sobolev ve ilgili eşitsizlikler matematik ve fizikte oldukça önemli uygulama alanı bulmuştur. Genellikle analitik çözümleri bulunamayan çok karışık problemlerin kalitatif olarak incelenmesi, yani operatörlerin normları üzerine bazı tahminlerin yapılması kaçınılmazdır. Bu analiz ise bizi genellikle Sobolev tipli eşitsizliklere götürür.

Teorem 2.6.2. (Sobolev Eşitsizliği)

Ω, R^n de açık bir bölge olsun. Eğer $1 \leq p < \infty$, $mp < n$ ve $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise, bu durumda

$$\| u \|_{p^*} \leq C \| u \|_{m,p}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $C(n,m,p)$ sabiti vardır[86].

Açık olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan, $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ yazılabilir. Bunun yanında herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

gömmeleri geçerli olur.

Bir Ω bölgesinde tanımlı Sobolev uzaylarının birçok özelliği ve özellikle bu uzayların en önemli karakteristiklerinden birisi olan gömülme özelliği, Ω bölgesinin düzgünlüğüne bağlıdır. R^n de $B_{r_1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{r_2}(y)$ açık yuvarlarını göz önüne alalım. $K_x = B_{r_1}(x) \cap \{x + \lambda(z - x) : z \in B_{r_2}(y), \lambda > 0\}$ kümesi, tepe noktası x olan bir ***sonlu koni*** adını alır. Bir $\Omega \subset R^n$ açık kümesinin her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir K sonlu konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa, bu halde Ω bölgesinin ***koni özelliği*** vardır denir.

Ω koni özelliğine sahip bir bölge ve X uzayı da Ω üzerinde tanımlı fonksiyonların bir Banach uzayı olsun. Bu durumda

$$W^{m,p}(\Omega) \to X$$

gömmesi her $u \in W^{m,p}(\Omega)$ için

$$\| u; X \| \leq C \| u \|_{m,p,\Omega}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde Ω, n ve K konisinin çeşitli parametrelerine bağlı bir $C > 0$ sabitinin varlığını gösterir.

Teorem 2.6.3.(Sobolev Gömme Teoremi)

Ω , R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda eğer;

i) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^* = \frac{np}{n-mp}$$

ya da özel olarak

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^* = \frac{np}{n-mp}$$

elde edilir.

ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

olur.

Üstelik $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+n,1}(\Omega) \to C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

iii) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega)$$

gömmesi yazılabilir[7].

Ayrıca Ω bölgesi sınırlı ise Teorem 2.5.5. ile birlikte $1 \leq q < p$ için de yukarıdaki gömmeler geçerli olur.

Diğer taraftan eğer $W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ gömmesi $1 \leq q < p$ için var ise bu durumda Ω bölgesi sınırlıdır.

Bunun yanında eğer W uzayı, W_0 uzayı ile değiştirilirse, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapmaksızın yukarıdaki gömmeler geçerli olur.

Teorem 2.6.4.(Rellich-Kondrachov Teoremi)

Ω , R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge, Ω_0, Ω bölgesinin sınırlı bir alt kümesi , $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun.

Bu durumda

i) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \le q < q^*$$

ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \le q \le \infty$$

iii) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega),$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \le q \le \infty$$

gömmeleri kompakttır[7].

Eğer Ω bölgesi sınırlı ise Teoremin ifadesinde $\Omega_0 = \Omega$ alınabilir ve Ω bölgesi R^n de keyfi bir bölge ise $W^{j+m,p}(\Omega)$ yerine $W_0^{j+m,p}(\Omega)$ konulması koşuluyla yukarıdaki gömmeler kompakt olur. Bunun yanında X,Y ve Z uzayları $X \to Y$ ve $Y \to Z$ gömmelerine sahip olsun. Eğer bu gömmelerden biri kompakt ise bu durumda $X \to Z$ bileşke gömmesi de kompakttır.

2.7. Konvolüsyon ve Riezs Potansiyel Operatörü

Her iki çarpan fonksiyondan lokal olarak daha iyi davranan bir fonksiyon üretmek için, her birinin düzensizliğini kaldıran iki fonksiyonun noktasal olmayan çarpımını oluşturmak genellikle kullanışlıdır. Bunlardan biri

$$f * g(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy \qquad (2.7.1)$$

integrali var olmak üzere (2.7.1) şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonlarının $f * g$ ***konvolüsyonudur***. f fonksiyonunun bir K çekirdeği ile konvolüsyonu

$$f * K(x) = \int_{R^n} f(y)K(x-y)dy$$

şeklindedir. Konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen tekilliği varsa ***singüler integral***, zayıf (integrallenebilen) tekilliği varsa ***potansiyel*** adı verilir. $0 < \alpha < n$ olmak üzere $I_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$ çekirdek fonksiyonuna ***Riesz çekirdek fonksiyonu*** adı verilir. Bu fonksiyonun koordinat başlangıcında zayıf tekilliği vardır. Böylece bir fonksiyonun ***Riesz potansiyeli*** konvolüsyon olarak

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha * f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.7.1. (Young Teoremi)

$1 \leq p < \infty$, $f \in L^1(R^n)$ ve $g \in L^p(R^n)$ olsun. Bu durumda

$$f * g(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy$$

ve

$$g * f(x) = \int_{R^n} g(x-y)f(y)dy$$

konvolüsyonları iyi tanımlı ve hemen hemen her $x \in R^n$ için eşittirler. Üstelik $f * g \in L^p(R^n)$ olur ve

$$\| f * g \|_p \leq \| f \|_1 \| g \|_p$$

eşitsizliği geçerlidir[7].

Sonuç 2.7.2.

Eğer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, $f \in L^p(R^n)$ ve $g \in L^q(R^n)$ ise, bu halde $f * g \in L^r(R^n)$ olur

ve

$$\| f * g \|_r \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

eşitsizliği elde edilir[7].

2.8.Maksimal Fonksiyon

R^n de lokal integrallenebilir bir f fonksiyonunun $r > 0$ yarıçaplı x merkezli $B(x,r) = \{ y : |x-y| < r \}$ ***açık yuvarı*** üzerinde ortalama değeri

$$\fint_B f(x)\,dx = \frac{1}{|B|} \int_B f(x)dx$$

şeklinde gösterilir.

Lokal integrallenebilir bir $f : R^n \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonunun ***Hardy-Littlewood maksimal*** fonksiyonu, $Mf : R^n \to [0, \infty]$,

$$Mf(x) = M_0 f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

$$= \sup_{r>0} \fint_{B(r,x)} |f(y)|\,dy$$

olarak tanımlanır.

Bu şekilde tanımlanan M operatörü alt lineerdir, yani, $f,g \in L^1_{loc}(R^n)$ ve $a,b \in R$ için

$$M(af+bg) \le |a| Mf + |b| Mg$$

eşitsizliği yazılabilir.

$0 \le \alpha < n$ olsun. Lokal integrallenebilir bir $f : R^n \to [-\infty,\infty]$ fonksiyonunun ***kesirli maximal*** fonksiyonu ise

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{r^\alpha}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

şeklinde tanımlanır. Kesirli Maximal fonksiyon kısmi diferansiyel denklemlerde ve potansiyel teoride birçok uygulamalara sahiptir. Özel olarak $\alpha = 0$ alınırsa Hardy – Littlewood maximal fonksiyonu elde edilir.

Teorem 2.8.1.(Hardy-Littlewood-Wiener)

$f \in L^p(R^n)$ ve $1 \le p \le \infty$ olsun. Bu durumda Mf fonksiyonu *h.h.h.* sonludur ve

i) $p=1$ ise,

$$|\{x : Mf(x) > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_1, \quad \forall \lambda > 0$$

ii) $1 < p \le \infty$ ise,

$$\| Mf \|_p \le C \| f \|_p$$

olacak şekilde sadece p ve n sayılarına bağlı bir C sabiti vardır[5].

J.Kinnunen ve E.Saksman[50] kesirli maksimal fonksiyonun şaşırtıcı regulerlik özelliklerini göstermişlerdir. Temel sonuçları, kesirli maksimal fonksiyonun L^p uzaylarını sınırlı olarak birinci mertebeden Sobolev uzayları içine resmettiğini ve kesirli maximal fonksiyonun birinci mertebeden Sobolev uzaylarını koruduğunu gösterir.

Teorem 2.8.2. $1 < p < n$,$1 \le \alpha < \frac{n}{p}$ ve $f \in L^p(R^n)$ olsun. Bu durumda

i) $i = 1,2,3,\dots,n,$ için $D_i M_\alpha f$ zayıf kısmi türevleri *h.h.h.* vardır ve R^n de *h.h.h.*

$$|D_i M_\alpha f| \le c M_{\alpha-1} f \ , \ i = 1,2,3,\dots,n,$$

yazılabilir.

ii) $q = \dfrac{np}{n-(\alpha-1)p}$ ve $q^* = \dfrac{np}{n-\alpha p}$ olmak üzere $M_\alpha f \in L^{q^*}(R^n)$ ve $i = 1,2,\dots,n,$ için $D_i M_\alpha f \in L^q(R^n)$ olur.

Üstelik,

$$\|M_\alpha f\|_{q^*} \le C\|f\|_p \text{ ve } \|D_i M_\alpha f\|_q \le C\|f\|_p$$

olacak şekilde $C = C(n,p,\alpha)$ sayısı vardır[50].

$0<\alpha<n, \beta<0$ ve $\delta>0$ olması durumunda

$$\int_{B(x,\delta)} \frac{|f(y)|dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \le C\delta^{\alpha} Mf(x)$$

ve

$$\int_{R^n - B(x,\delta)} \frac{|f(y)|dy}{|x-y|^{\beta+n}} \le C\delta^{-\beta} Mf(x)$$

yazılabileceğinden, Riesz potansiyeli için aşağıdaki Sobolev eşitsizliği elde edilebilir.

Teorem 2.8.3. $\alpha>0, 1<p<\infty$ ve $\alpha p<n$ olsun. Bu durumda, $f \in L^p(R^n)$ iken

$$\| I_\alpha f \|_{p^*} \le C \| f \|_p$$

olacak şekilde bir $C = C(n,p)$ sabiti vardır[86].

Bu teorem yardımıyla Sobolev eşitsizliğinin ispatı Hardy-Littlewood-Wiener maksimal teoremine dayalı olarak yapılabilir.

2.9.Modüler Uzay ve Genelleştirilmiş Orlicz Uzayı

X bir reel vektör uzayı olsun. Eğer $\rho : X \to [0,\infty]$ fonksiyoneli her $x, y \in X$ için

a) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\rho(x) = \rho(-x)$

c) $\alpha, \beta \ge 0, \alpha+\beta=1$ için $\rho(\alpha x+\beta y) \le \rho(x)+\rho(y)$

özelliklerini sağlıyor ise, ρ fonksiyoneline X üzerinde bir ***modüler*** denir. Eğer **c)** özelliği yerine $\alpha, \beta \ge 0, \alpha+\beta=1$ için

$$\rho(\alpha x+\beta y) \le \alpha\rho(x)+\beta\rho(y)$$

özelliği varsa, ρ modülerine X üzerinde bir ***konveks modüler*** adı verilir.

Örneğin X vektör uzayı, $[a,b]$ aralığı üzerinde L^p uzayı olarak alınsın. Bu durumda

$$\rho(x) = \int_a^b |x(t)|^p \, dt$$

fonksiyoneli $p \ge 1$ için X üzerinde konveks modülerdir.

Eğer ρ fonksiyoneli X üzerinde bir modüler ise, bu durumda

$$X_\rho = \{x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0\}$$

uzayına bir ***modüler uzay*** denir. X_ρ modüler uzayı X vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır. Genel olarak ρ modüleri alt toplamsal olmadığı için bir norm veya uzaklık gibi davranamaz. Eğer ρ fonksiyoneli X üzerinde konveks modüler ise, bu durumda

$$\|f\|_\rho = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho(\frac{f}{\lambda}) \leq 1\right\}$$

fonksiyoneli X_ρ üzerinde ***Lüxemburg normu*** adı verilen bir norm belirler.

Ω, R^n de ölçülebilir bir bölge olsun. $\varphi : \Omega \times [0,\infty) \to R$ fonksiyonu

a) $\forall t \in \Omega$ için $\varphi(t,u)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,

b) $\varphi(t,0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(t,u) > 0$ ve $\lim_{u \to \infty} \varphi(t,u) = \infty$,

c) Her $u \geq 0$ için $\varphi(t,u)$ ölçülebilir bir fonksiyon

özelliklerine sahip ise, φ fonksiyonuna Φ ***sınıfına aittir*** denir.

X, Ω bölgesinde reel değerli ölçülebilir fonksiyonların kümesi ve Ω bölgesinde *h.h.h.* eşit fonksiyonları X kümesinde eşit kabul edelim.

Eğer φ fonksiyonu Φ sınıfına ait ise, bu durumda $\forall x \in X$ için $\varphi(t, |x(t)|)$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğu ve $\rho(x) = \int_\Omega \varphi(t, |x(t)|)\, dt$ ifadesinin X de bir ρ modüleri tanımladığı kolayca görülebilir.

Eğer $\varphi(t,u)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için u nun konveks fonksiyonu ise ρ, X de konveks modülerdir.

$$X_\rho = \left\{x \in X : \lim_{\lambda \to 0^+} \int_\Omega \varphi(t, \lambda |x(t)|) = 0\right\}$$

modüler uzayına ***genelleştirilmiş Orlicz uzayı*** veya ***Musielak-Orlicz uzayı*** denir ve L^φ ile gösterilir.

Bunun yanında

$$L_0^\varphi = \left\{x \in X : \int_\Omega \varphi(t, |x(t)|) dt < \infty\right\}$$

kümesine ***genelleştirilmiş Orlicz sınıfı*** adı verilir.

Eğer her $\lambda > 0$ için $\lambda x \in L_0^\varphi$ ise $x \in X$ fonksiyonuna L^φ nin bir ***sonlu elemanı*** denir. X in tüm sonlu elemanlarının uzayı E^φ ile gösterilir. L^φ en az bir $\lambda > 0$ için

$\rho(\lambda x) < \infty$ olacak şekilde tüm $x \in X$ elemanlarının kümesidir. L_0^{φ} , L^{φ} nin bir konveks alt kümesi olup, L^{φ} uzayı X in L_0^{φ} kümesini kapsayan en küçük vektör alt uzayıdır. E^{φ}, X in L_0^{φ} kümesinde yer alan en büyük vektör alt uzayıdır.

Eğer $\varphi(t,u) = \varphi(u)$, yani φ fonksiyonu t değişkeninden bağımsız ise, L^{φ} ve L_0^{φ} kümelerine sırasıyla ***Orlicz uzayı*** ve ***Orlicz sınıfı*** adı verilir.

Eğer özel olarak $\varphi(t,u)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için u nun konveks fonksiyonu ve her $t \in \Omega$ için

$$(0): \lim_{u \to 0^+} \frac{\varphi(t,u)}{u} = 0 \quad , \quad (\infty): \lim_{u \to \infty} \frac{\varphi(t,u)}{u} = \infty$$

koşullarını sağlıyorsa φ fonksiyonuna bir N -fonksiyon adı verilir.

Modüler uzaylar teorisi H.Nakano tarafından kurulmuştur. H.Nakano modüleri genel olarak sürekli yarı-sıralı lineer uzay üzerinde tanımlamıştır. Bu uzaya Nakona uzayı adı verilmiştir ve $\varphi(u)$ fonksiyonunun yerine t parametresine bağlı $\varphi(t,u)$ fonksiyonunun uygulanmasından oluşan Orlicz uzayları teorisinin gelişimi H.Nakano orijinlidir. Daha sonra J.Musielak ve W.Orlicz tarafından modüler uzayların örnekleri verilerek geliştirilmiştir. Gerçekte bir modüler yarı-sıralı vektör uzayı bazı kısıtlamalar altında genelleştirilmiş Orlicz uzayıdır.

2.10.Ağırlıklı Lebesgue ve Sobolev Uzayları

w fonksiyonu hemen hemen her $x \in R^n$ için $w(x) > 0$ olacak şekilde R^n de lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda w fonksiyonuna bir ***ağırlık fonksiyonu*** denir.

Özel olarak, $x \in \Omega \subset R^n$ için

$$d(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

ve α reel bir sayı olmak üzere

$$w(x) = (d(x))^{\alpha}$$

ağırlık fonksiyonuna ***kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu*** denir.

Eğer $w(2x) \le C_1 w(x)$ olacak şekilde bir $1 < C_1 < \infty$ sayısı varsa w ağırlık fonksiyonuna ***çift katlı ağırlık fonksiyonu (D)*** ve eğer $w(x) \le C_2 w(2x)$ olacak şekilde $0 < C_2 < 1$ sayısı varsa w ağırlık fonksiyonuna ***ters çift katlı ağırlık fonksiyonu (RD)*** adı verilir.

w bir ağırlık fonksiyonu ve Ω, R^n de açık bir bölge olsun. Bu halde Ω bölgesinde

$$\left(\int_\Omega |u|^p w\right) < \infty$$

olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların kümesine ***ağırlıklı Lebesgue uzayı*** denir ve $L_w^p(\Omega)$ ile gösterilir. Ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_\Omega |u|^p w\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer olarak ***ağırlıklı Sobolev uzayı***, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W_w^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L_w^p(\Omega) : D^\alpha u \in L_w^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Ağırlıklı Sobolev uzayı

$$\|u\|_{m,p,w} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{p,w}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile ayrılabilir bir Banach uzayı olur.

2.11. Hardy Eşitsizliği

1920 de G.H.Hardy[37] tarafından, $a > 0$, $f(x) \geq 0$, $p > 1$ ve $\int_a^\infty [u(x)]^p dx$ yakınsak iken

$$\int_a^\infty \left(x^{-1} \int_a^\infty u(t)dt\right) dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^\infty [u(x)]^p dx \tag{2.11.1}$$

eşitsizliği ifade edildi. G.H.Hardy nin asıl amacı

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_1^\infty a_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^\infty b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindeki Hilbert eşitsizliğinin yeni ve daha basit bir ispatını bulmaktı. 1925 yılındaki ünlü makalesinde $p > 1$ ve $a_n \geq 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \tag{2.11.2}$$

şeklindeki (2.11.1) eşitsizliğinin ayrık versiyonunu ifade etmiştir[38].

Aynı makalede (2.11.1) eşitsizliğinin gerçekte $p>1$ olmak üzere

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x u(t)dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty [u(x)]^p dx \tag{2.11.3}$$

şeklinde sağlandığını ispatladı[39,59].

Bu eşitsizlik literatürde ***Hardy's eşitsizliği*** olarak bilinir. Daha sonra bu eşitsizlik üzerinde detaylı olarak çalışıldı ve daha genel integral eşitsizliklerinin incelenmesi için bir model örneği olarak kullanıldı.

Teorem 2.11.1. u fonksiyonu negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $p>1$ ve $\varepsilon<p-1$ olmak üzere

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x u(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \le \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \int_0^\infty [u(x)]^p x^\varepsilon dx \tag{2.11.4}$$

eşitsizliği sağlanır[39,59].

Bu eşitsizliğin dual versiyonu (2.11.4) eşitsizliğinden, $p>1$ ve $\varepsilon>p-1$ olmak üzere

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_x^\infty u(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \le \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^p \int_0^\infty [u(x)]^p x^\varepsilon dx \tag{2.11.5}$$

şeklinde elde edilebilir. Ayrıca (2.11.4) ve (2.11.5) eşitsizlikleri, $u'(t):=\frac{du}{dt}$, $p>1$ ve $\varepsilon\neq p-1$ olmak üzere $u\in C_0^\infty(0,\infty)$ için

$$\int_0^\infty |u(t)|^p t^{\varepsilon-p}dt \le \left(\frac{p}{|\varepsilon-p+1|}\right)^p \int_0^\infty |u'(t)|^p t^\varepsilon dt$$

şeklinde yazılabilir ve $\varepsilon=0$ için

$$\int_0^\infty \left|\frac{u(t)}{t}\right|^p dt \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |u'(t)|^p dt$$

biçimine indirgenebilir.

Teorem 2.11.2. $1<p<\infty$, $-1<\beta<\infty$ ve u fonksiyonu $\lim_{x\to\infty} u(x)=0$ özelliğine sahip $(0,\infty)$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_0^\infty |u(x)|^p x^\beta dx \le \left(\frac{p}{\beta+1}\right)^p \int_0^\infty |u'(x)|^p x^{\beta+p} dx, \tag{2.11.6}$$

eşitsizliği yazılabilir[39].

Teorem 2.11.3. $1<p\leq q<\infty, (\alpha-1)p+1>0$ ve u fonksiyonu $\lim_{x\to\infty} u(x)=0$ özelliğine sahip $(0,\infty)$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu halde

$$\left(\int_0^\infty \left| x^{\alpha-1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} u(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C(p,q,\alpha)\left(\int_0^\infty \left| x^\alpha u'(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.11.7}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde u fonksiyonundan bağımsız pozitif bir $C(p,q,\alpha)$ sayısı vardır[59].

Teorem 2.11.4. (Genelleştirilmiş Hardy Eşitsizliği)

ϑ , $\omega:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları ve u fonksiyonu $\lim_{x\to\infty} u(x)=0$ özelliğine sahip $(0,\infty)$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty \vartheta(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^x \omega(s)^{1-p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty$$

ve $1\leq p\leq q<\infty$ olmak üzere

$$\left\|\vartheta(x)^{\frac{1}{q}} u(x)\right\|_q \leq C(p,q,\vartheta,\omega)\left\|\omega(x)^{\frac{1}{p}} u'(x)\right\|_p \tag{2.11.8}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $u(x)$ fonksiyonundan bağımsız bir pozitif $C(p,q,\vartheta,\omega)$ sayısı vardır[63].

Birçok yazar $\int_a^x f(t)dt$ yerine, $R(x)$ ve $r(x)$ ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$(Hf)(x)=R(x)\int_a^x f(t)r(t)dt$$

şeklindeki daha genel operatörleri göz önüne almıştır. Bu operatörden Hardy eşitsizliği kolayca elde edilebilir.

3.BÖLÜM

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE VE SOBOLEV UZAYLARI

Bu bölümde değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının tanımı ve özellikleri verilecektir. L^p normunun alışılagelmiş tanımında p yerine $p(x)$ bırakılamayacağı açıktır. Bununla birlikte, Lebesgue uzayları modüler uzaylar adı verilen daha büyük bir aileye ait olan genelleştirilmiş Orlicz uzaylarının bir özel durumları olarak göz önüne alınabilir. Bu yaklaşım değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının tanımlanmasına ve değişken üstlü Lebesgue uzayında Lüksemburg ve Orlicz normlarının uygun benzerlerinin tanımlanmasına imkân verir.

3.1. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayı

Ω, R^n de ölçülebilir bir küme, $|\Omega|>0$ ve E kümesi Ω bölgesinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. E kümesinde $h.h.$ eşit fonksiyonları bir eleman olarak göz önüne alalım. p fonksiyonunu çalışmamız boyunca ölçülebilir bir fonksiyon yani $p \in E$ olarak kabul edeceğiz.

$$\varphi(x,s) = s^{p(x)}, \qquad \forall x \in \Omega,\ s \geq 0$$

şeklinde tanımlanan $\varphi : \Omega \times [0,\infty) \to R$ fonksiyonu

i) $\forall x \in \Omega$ için $\varphi(x,\cdot):[0,\infty) \to R$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,

ii) $\varphi(x,0)=0$, $s>0$ için $\varphi(x,s)>0$ ve $\lim\limits_{s\to\infty}\varphi(x,s)=\infty$,

iii) Her $s \geq 0$ için $\varphi(\cdot,s) \in E$

özelliklerine sahip olduğundan, φ fonksiyonu Φ sınıfına aittir. Ayrıca, $\varphi(x,s)$ fonksiyonu $\forall x \in \Omega$ için s nin bir konveks fonksiyonu olduğu açıktır. Bu nedenle $u \in E$ fonksiyonu için

$$\rho(u) = \rho_{p(x)}(u) = \int_\Omega \varphi\left(x,|u|\right)dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\,dx$$

şeklinde tanımlanan $\rho : E \to [0,\infty]$ fonksiyonu

a) $\rho(u)=0 \Leftrightarrow u=0$

b) $\rho(u)=\rho(-u)$

c) $\rho(\alpha u+\beta v) \leq \alpha\rho(u)+\beta\rho(v)$, $\forall u,v \in E$, $\forall \alpha,\beta>0, \alpha+\beta=1$

özelliklerini sağladığından, E kümesi üzerinde bir konveks modülerdir.

Böylece $E_\rho = L^{p(x)}(\Omega)$ modüler uzayı

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{u \in E : \lim_{\lambda \to 0^+} \rho(\lambda u) = 0\right\}$$

genelleştirilmiş Orlicz uzayının bir özel çeşididir ve E kümesinin lineer alt uzayıdır.

$\varphi(x,s)$ fonksiyonunun özelliklerinden, $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının en az bir $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda u) < \infty$ olacak şekilde tüm $u \in E$ fonksiyonlarının kümesi olduğu açıktır, yani,

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in E : \exists \lambda > 0, \rho(\lambda u) < \infty\}$$

yazılabilir.

$L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının bir konveks alt uzayı olan $L_0^{p(x)}(\Omega)$ uzayı

$$L_0^{p(x)}(\Omega) = \{u \in E : \rho(u) < \infty\},$$

genelleştirilmiş Orlicz sınıfının bir türüdür ve

$$L_1^{p(x)}(\Omega) = \{u \in E : \forall \lambda > 0, \rho(\lambda u) < \infty\}$$

uzayı da E nin $L_0^{p(x)}(\Omega)$ kümesinde kapsanan en büyük alt vektör uzayıdır. Bu uzaylar için genel olarak

$$L_1^{p(x)}(\Omega) \subset L_0^{p(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega)$$

yazılabilir.

Ω, R^n de açık bir bölge ve $\Omega' \subset \Omega$ olsun. $p : \Omega \to [1,\infty)$ ölçülebilir fonksiyonu için

$$p_{\Omega'}^- = \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega'} p(x) \quad \text{ve} \quad p_{\Omega'}^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega'} p(x)$$

gösterimlerini, ayrıca $p^- = p_\Omega^-$ ve $p^+ = p_\Omega^+$ kısaltmalarını kullanacağız. Bundan sonra, aksi söylenmedikçe, $1 \le p^- \le p^+ < \infty$ kabul edeceğiz ve bu durumu

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{u \in L^\infty(\Omega) : \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u \ge 1\right\}$$

olmak üzere, $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ile ifade edeceğiz.

Teorem 3.1.1. $L_1^{p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $p \in L_+^\infty(\Omega)$ olmasıdır[32].

Böylece $p \in L_{+}^{\infty}(\Omega)$ ise, $L^{p(x)}(\Omega) = L_{0}^{p(x)}(\Omega) = L_{1}^{p(x)}(\Omega) = E_{p}$ yazılabilir ve $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayını ***değişken üstlü Lebesgue uzayı,*** $p(\cdot)$ fonksiyonunu da ***sınırlı üst*** olarak adlandıracağız. p nin sabit ($p(x) = p$) olması durumunda değişken üstlü Lebesgue uzayı ile klasik Lebesgue uzayı çakışır. $p \in L_{+}^{\infty}(\Omega)$ olması durumunda modüler fonksiyon ek olarak aşağıdaki özelliklerine sahip olur.

i) $\rho(u+v) \le 2^{p^{+}}(\rho(u)+\rho(v))$

ii) $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için eğer $\lambda > 1$ ise

$$\rho(u) \le \lambda\rho(u) \le \lambda^{p^{-}}\rho(u) \le \rho(\lambda u) \le \lambda^{p^{+}}\rho(u)$$

ve eğer $0 < \lambda < 1$ ise

$$\lambda^{p^{+}}\rho(u) \le \rho(\lambda u) \le \lambda^{p^{-}}\rho(u) \le \lambda\rho(u) \le \rho(u)$$

elde edilir.

iii) Eğer hemen hemen her $x \in \Omega$ için $|u(x)| \le |v(x)|$ ve $\rho(v) < \infty$ ise, bu durumda $\rho(u) \le \rho(v)$ ve $|u| \ne |v|$ için kesin eşitsizlik vardır.

iv) Verilen bir $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ için, $\rho(\lambda u)$ fonksiyonu λ ya göre sürekli, konveks çift fonksiyondur ve $\lambda \in [0,\infty)$ için artandır.

ρ modüleri konveks olduğundan $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde

$$\| u \|_{p(x),\Omega} = \| u \|_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le 1\right\}$$

Lüksemburg normu tanımlanabilir. Bu norm ile birlikte $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayı olur. Eğer $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve *h.h.h.* $|u(x)| \le |v(x)|$ ise $\| u \|_{p(x)} \le \| v \|_{p(x)}$ yazılabilir. $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ olmak üzere $\| f \|_{p(x)} \le C_1$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(f) \le C_2$ olmasıdır. $\frac{C_1}{C_2}$ değeri alttan ve üstten p fonksiyonuna bağlı bir sabitle sınırlıdır.

Modüler fonksiyonun *(iv)* özelliğinden ve normun tanımından aşağıdaki teorem kolayca elde edilebilir.

Teorem 3.1.2. $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda $\| u \|_{p(x)} = a$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(\frac{u}{a}) = 1$ olmasıdır[32,58].

$\| u \|_{p(x)}$ normu ve $\rho(u)$ modüleri arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 3.1.3. $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ olsun. Bu halde

i) $\| u \|_{p(x)} < 1 (=1; >1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1 (=1; >1)$

ii) Eğer $\| u \|_{p(x)} > 1$ ise $\| u \|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \| u \|_{p(x)}^{p^+}$

iii) Eğer $\| u \|_{p(x)} < 1$ ise $\| u \|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \| u \|_{p(x)}^{p^-}$

ifadeleri geçerlidir [32,58,75].

Teorem 3.1.4. E kümesi Ω bölgesinin ölçülebilir bir alt kümesi ve χ_E de E kümesinin karakteristik fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$| E |^{\frac{1}{p^-}} \leq \| \chi_E \|_{p(x)} \leq | E |^{\frac{1}{p^+}}, \quad | E | < 1$$

$$| E |^{\frac{1}{p^+}} \leq \| \chi_E \|_{p(x)} \leq | E |^{\frac{1}{p^-}}, \quad | E | \geq 1$$

eşitsizlikleri yazılabilir[75].

Bu uzayların önemli özelliklerinden biri modüler yakınsaklık ile norm yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki sonuçtur.

Teorem 3.1.5. $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $k = 1,2,\ldots$ için $u_k \in L^{p(x)}(\Omega)$ olsun. Bu durumda

i) $\lim\limits_{k \to \infty} \| u_k - u \|_{p(x)} = 0$

ii) $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(u_k - u) = 0$

iii) u_k ölçümsel olarak Ω bölgesinde u fonksiyonuna yakınsar ve $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(u_k) = \rho(u)$

özellikleri eşdeğerdir[32,58].

Bu Teoremin bir sonucu olarak $L^{p(x)}(\Omega)$ uzaylarında aşağıdaki yoğunluk ile ilgili sonuç elde edilebilir.

Teorem 3.1.6. Ω üzerinde tanımlı tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi $(L^{p(x)}(\Omega), \| \cdot \|_{p(x)})$ uzayında yoğundur[32].

Teorem 3.1.7. $(L^{p(x)}(\Omega), \| \cdot \|_{p(x)})$ uzayı ayrılabilirdir[32,58].

Teorem 3.1.8. Ω üzerinde tanımlı tüm basit integral fonksiyonlarından oluşan S kümesi $(L^{p(x)}(\Omega),\|\cdot\|_{p(x)})$ uzayında yoğundur[32].

Teorem 3.1.9. Eğer $\Omega \subset R^n$ şeklindeki bir altküme ise, bu durumda $C(\Omega)\cap L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı, $(L^{p(x)}(\Omega),\|\cdot\|_{p(x)})$ uzayında yoğun olur. Ayrıca, eğer Ω bölgesi açık ise, bu halde $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $(L^{p(x)}(\Omega),\|\cdot\|_{p(x)})$ uzayında yoğundur[32,77].

Teorem 3.1.10. Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, bu durumda $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve dolayısıyla yansımalı bir uzay olur[32].

Klasik duruma benzer olarak p fonksiyonunun eşleniğini $p'(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$ olarak tanımlayalım.

Teorem 3.1.11. $\forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $\forall v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ için $c = 1 + \dfrac{1}{p^-} - \dfrac{1}{p^+}$ olmak üzere

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq c\|u\|_{p(x)}\|v\|_{p'(x)}$$

eşitsizliği yazılabilir[32,58,75].

$L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı üzerinde

$$\|u\|_{\rho} = \inf_{\lambda>0} \lambda\left(1+\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right)$$

şeklinde tanımlanan norma ***Amemiya normu*** denir. Basit bir hesaplamayla eğer $p(x) = p$ şeklindeki bir sabit ise, bu durumda

$$\|u\|_{\rho} = 2\|u\|_{p}$$

elde edilir. Dolayısıyla, bu iki norm eşdeğerdir. Yani, $\forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{p(x)} \leq \|u\|_{\rho} \leq 2\|u\|_{p(x)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Diğer taraftan $p^- > 1$ ise $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında

$$\|u\|'_{\rho} = \sup_{\rho_{p'(x)}(v)\leq 1} \left|\int_\Omega u(x)v(x)\,dx\right|$$

Orlicz normu tanımlanabilir ve $\forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{\rho} \leq \|u\|'_{\rho} \leq 2\|u\|_{\rho}$$

yazılabildiğinden, $\|u\|'_{\rho}$ normu $\|u\|_{\rho}$ ve $\|u\|_{p(x)}$ normlarına eşdeğerdir.

Teorem 3.1.12.(Minkowski Eşitsizliği)

$p^- > 1$ olsun. Bu durumda

$$\left\| \int_\Omega f(\cdot,y)\,dy \right\|_\rho^{\prime} \leq \int_\Omega \| f(\cdot,y) \|_\rho^{\prime}\, dy$$

ve

$$\left\| \int_\Omega f(\cdot,y)\,dy \right\|_{p(x)} \leq C \int_\Omega \| f(\cdot,y) \|_{p(x)}\, dy$$

eşitsizlikleri sağlanır[75].

$\alpha \in E$ ve a,b pozitif sabitler olmak üzere $0 < a \leq \alpha(x) \leq b < \infty$ olsun. $\varphi_\alpha : \Omega \times R^+ \to R^+$ fonksiyonunu

$$\varphi_\alpha(x,s) = \alpha(x)\varphi(x,s) = \alpha(x) s^{p(x)}$$

şeklinde tanımlayalım. ρ ve E_ρ nın tanımlarına benzer olarak

$$\rho_\alpha(u) = \int_\Omega \varphi_\alpha(x,|u(x)|)dx, \quad E_{\rho_\alpha} = \left\{ u \in E : \lim_{\lambda \to 0^+} \rho_\alpha(\lambda u) = 0 \right\}$$

gösterimlerinden

$$a\varphi(x,s) \leq \varphi_\alpha(x,s) \leq b\varphi(x,s)$$

ve

$$a\rho(u) \leq \rho_\alpha(u) \leq b\rho(u)$$

özellikleri ile birlikte $E_{\rho_\alpha} = E_\rho = L^{p(x)}(\Omega)$ elde ederiz. E_ρ uzayının $\|\cdot\|_{\rho_\alpha}$ normunu önceki gibi

$$\| u \|_{\rho_\alpha} = \inf \{ \lambda > 0 : \rho_\alpha(\frac{u}{\lambda}) \leq 1 \}$$

şeklinde tanımlarsak, $\|\cdot\|_{\rho_\alpha}$ ve $\|\cdot\|_{p(x)}$ normlarının E_ρ uzayı üzerinde eşdeğer oldukları kolayca görülebilir.

Şimdi de $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının dual uzayını tanımlamaya çalışalım. Yani, $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı üzerindeki tüm sürekli lineer fonksiyonellerden oluşan $(L^{p(x)}(\Omega))'$ uzayını belirleyelim. Bunun için, $p^- > 1$ ve $x \in \Omega$ için s ye göre konveks olan φ fonksiyonu

$$(0): \lim_{s \to 0^+} \frac{\varphi(x,s)}{s} = 0 \quad \text{ve} \quad (\infty): \lim_{s \to \infty} \frac{\varphi(x,s)}{s} = \infty$$

ifadelerini sağlar.

Diğer taraftan $\varphi_p(x,s)=\dfrac{1}{p(x)}s^{p(x)}$ olarak alınsın. Bu durumda φ_p fonksiyonu da Φ sınıfına ait olur ve

$$\rho_p(u)=\int_\Omega \varphi_p(x,|u(x)|)\,dx\,,$$

$$\|u\|_{\rho_p}=\inf\{\lambda>0:\rho_p(\frac{u}{\lambda})\leq 1\}$$

fonksiyonelleri yazılabilir. $\|u\|_{\rho_p}$ fonksiyonu $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında eşdeğer normdur. Açıkça, φ_p fonksiyonunun Young eşlenik fonksiyonu

$$\varphi_p^*(x,s)=\frac{1}{p'(x)}s^{p'(x)}$$

şeklindeki fonksiyonudur. $(\varphi_p^*)^*=\varphi_p$,

$$\rho_p^*(v)=\int_\Omega \frac{1}{p'(x)}|v(x)|^{p'(x)}\,dx \text{ ve } E_{\rho_p}^*=\left\{v\in E:\lim_{\lambda\to 0^+}\rho_p^*(\lambda v)=0\right\}$$

yazarak,

$$E_{\rho_p}^*=L^{p'(x)}(\Omega)=L_0^{p'(x)}(\Omega)=\{v\in E:\int_\Omega |v(x)|^{p'(x)}\,dx<\infty\}$$

elde ederiz.

Teorem 3.1.13. $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı $L^{p'(x)}(\Omega)$ uzayıdır. Yani,

i) Her $v\in L^{p'(x)}(\Omega)$ için

$$f(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx\,,\quad \forall u\in L^{p(x)}(\Omega) \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyoneli $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyoneldir.

ii) $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde tanımlı her sürekli lineer fonksiyonel için tek bir $v\in L^{p'(x)}(\Omega)$ vardır ve f fonksiyoneli (3.1.1) ile tanımlanır[32,58].

Bu teoremden $p^->1$ ise, $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının yansımalı olduğu sonucu elde edilebilir.

Tanım 3.1.14. $u\in L^{p(x)}(\Omega)$, D kümesi Ω bölgesinin ölçülebilir bir alt kümesi ve χ_D , D bölgesinin karakteristik fonksiyonu olsun. Eğer

$$\lim_{|D|\to 0}\|u(x)\chi_D(x)\|_{p(x)}=0$$

şeklinde ise, bu durumda u fonksiyonuna $\|\cdot\|_{p(x)}$ normuna göre ***mutlak süreklidir*** denir.

Teorem 3.1.15. $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu $\|\cdot\|_{p(x)}$ normuna göre mutlak süreklidir[21,32].

Teorem 3.1.16. Ω, R^n de sınırlı bir bölge ve $p,q \in L_+^\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^{q(x)}(\Omega) \to L^{p(x)}(\Omega)$ gömmesinin var olması için gerek ve yeter koşul hemen hemen her $x \in \Omega$ için $p(x) \le q(x)$ olmasıdır. Bu durumda

$$\| f \|_{p(x)} \le C(1+|\Omega|)\| f \|_{q(x)}$$

eşitsizliği yazılabilir[32,58].

Klasik Lebesgue uzaylarının en önemli özelliklerinden biri elemanlarının orta sürekliliğidir. $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının klasik Lebesgue uzayından farklı olduğu bu noktayı gösterelim.

Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $f_h(x) = f(x+h)$, $x \in R^n$ ve $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ olmak üzere, $|h| < \delta$ ve $h \in R^n$ için $\rho_p(f_h - f) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ fonksiyonuna $p(x)-$***orta sürekli*** adı verilir.

Örnek 3.1.17. $\Omega = (-1,1)$ ve $1 \le r < s < \infty$ olarak alınsın. Bu durumda p ve f fonksiyonlarını

$$p(x) = \begin{cases} r\,; & x \in [0,1) \\ s\,; & x \in (-1,0) \end{cases} \quad \text{ve} \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{-1}{s}}\,; & x \in [0,1) \\ 0\,; & x \in (-1,0) \end{cases}$$

şeklinde seçersek, $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ olur. Fakat $h \in (0,1)$ için

$$\rho_p\left(\frac{f_h}{\lambda}\right) \ge \lambda^{-1} \int_{-h}^{0} (x+h)^{-1} dx = \infty$$

olduğundan, $f_h \notin L^{p(x)}(\Omega)$ elde edilir[58].

Teorem 3.1.18. p, $B(x_0,r)$ yuvarında sürekli ve sabit olmayan bir fonksiyon ve Ω bölgesi $B(x_0,r)$ yuvarını içersin. Bu durumda $p(x)-$orta sürekli olmayacak şekilde bir $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu vardır[58].

A.Fiorenza[34] değişken üstlü Sobolev uzaylarında $p(x)-$orta sürekliliğin zayıf versiyonu üzerinde çalışmıştır.

Teorem 3.1.19. p fonksiyonu $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında sabit olmasın. Bu durumda $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ öteleme operatörü $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında süreksiz olacak şekilde $h \in R^n \backslash \{0\}$ vardır. Üstelik $\tau_h f \notin L^{p(x)}(\Omega)$ olacak şekilde $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ vardır[15].

Teorem 3.1.20. Ω, R^n de sınırlı ölçülebilir bir bölge olsun. Ω bölgesinde tanımlı p ve r fonksiyonları için $1<p^-\leq p^+<\infty$ ve $1<r^-\leq r^+<\infty$ özellikleri sağlansın. Bu durumda $*:(f,g)\to f*g$ konvolüsyonu $L^{p(x)}(\Omega)\times L^1(R^n)\to L^{r(x)}(\Omega)$ dönüşümü olarak sürekli olması için gerek ve yeter koşul $p^-\geq r^+$ olmasıdır[15].

Öteleme operatörünün genelde süreksiz olması $u\in L^1(\Omega)$ ile f fonksiyonun konvolüsyonunun genelde süreksiz olduğunu verir. Daha açıkçası genel olarak değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Young Teoremi beklenen sonucu vermez. Yani, genel olarak

$$\|v*u\|_{p(x)}\not\leq\|u\|_1\|v\|_{p(x)}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.21. $Q\geq 1$ ve $D=çap(\Omega)$ olmak üzere $k(x)\in L^Q(B(0,2D))$ olsun. $r(x)\geq 1$ olmak üzere eğer

$$\frac{1}{Q}\leq 1-\frac{1}{p^-}+\frac{1}{p^+},\qquad \frac{1}{r(x)}\geq\frac{1}{Q}+\frac{1}{p^+}-1$$

şeklinde ise, bu durumda

$$K_\Omega f=\int_\Omega k(x-y)f(y)dy$$

konvolüsyon operatörü $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayından $L^{r(x)}(\Omega)$ uzayına sınırlı olur[75].

3.2.Değişken Üstlü Sobolev Uzayı

Ω, R^n de bir bölge ve k negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. $|\alpha|\leq k$ özellikli her α çoklu indisi için Ω bölgesinde tanımlı $D^\alpha u\in L^{p(x)}(\Omega)$ olacak şekildeki tüm u fonksiyonlarının sınıfına,

$$\|u\|_{k,p(x),\Omega}=\|u\|_{k,p(x)}=\sum_{|\alpha|\leq k}\left\|D^\alpha u\right\|_{p(x)} \tag{3.2.1}$$

normu ile birlikte ***değişken üstlü Sobolev uzayı*** adı verilir ve bu uzay $W^{k,p(x)}(\Omega)$ ile gösterilir.

Klasik duruma benzer olarak, (3.2.1) normuna göre $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı olan $W^{k,p(x)}(\Omega)$ uzayının alt uzayını $W_0^{k,p(x)}(\Omega)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.2.1. $W^{k,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{k,p(x)}(\Omega)$ uzayları Banach uzaylardır. Eğer $p \in L^\infty(\Omega)$ ise $W^{k,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{k,p(x)}(\Omega)$ uzayları ayrılabilir ve $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise $W^{k,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{k,p(x)}(\Omega)$ uzayları yansımalı olur[32,58].

Teorem 3.1.9 un bir sonucu olarak, eğer hemen hemen her $x \in \Omega$ için $q(x) \le p(x)$ ise, bu durumda $W^{k,p(x)}(\Omega) \to W^{k,q(x)}(\Omega)$ gömmesi yazılabilir. Bu aşikâr gömmenin yanı sıra, $x \in \Omega$ için $\dfrac{1}{q(x)} = \dfrac{1}{p(x)} - \dfrac{1}{n}$ olmak üzere

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$$

gömmesinin ne zaman geçerli olduğunu bilmek önemlidir. O.Kováčik ve J.Rákosník[32] tarafından bu gömmenin genel olarak beklenemeyeceği bir örnek ile gösterilmiştir. Bu örneğin ana fikri p fonksiyonun süreksizliği ve süreksizlik noktalarının kümesinin regüler olmayışıdır. Sürekli fonksiyonlar için bu gömmenin geçerli olmadığı ise L.Diening, P.Hästö ve A.Nekvinda[19] tarafından verilmiştir. Düzgün sürekli üstler için ters bir örneğin varlığı açık bir problemdir.

Teorem 3.2.2. Ω, $R^n(n>1)$ de sınırlı bir bölge ve $p:\overline{\Omega} \to [1,n)$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu halde $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{n-1}$ ve her $x \in \Omega$ için $1 \le q(x) \le p^*(x) - \varepsilon$ olmak üzere

$$\|u\|_{q(x)} \le C \|\nabla u\|_{p(x)}, \qquad u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde u fonksiyonundan bağımsız pozitif bir C sayısı vardır[58].

Teorem 3.2.3. Ω, R^n de sınırlı bir bölge ve $p,q \in C(\overline{\Omega}) \cap L_+^\infty(\Omega)$ olsun. $\forall x \in \overline{\Omega}$ için $kp(x) < n$ ve $q(x) < p^*(x)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$W^{k,p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi vardır[32].

Teorem 3.2.4. Ω, R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge olsun. k, $kp < n$ özelliğindeki pozitif bir sayı, p fonksiyonu $\overline{\Omega}$ bölgesinde

$$1 < p^- \le p^+ < \frac{n}{k}$$

olacak şekilde Lipschitz sürekli bir fonksiyon ve $q:\overline{\Omega} \to R$ fonksiyonu hemen hemen her $x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) \le q(x) \le p^*(x)$ özelliğine sahip olsun.

Bu durumda

$$W^{k,p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$$

gömmesi vardır[31].

Teorem 3.2.5. Ω, R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge olsun. k, $kp<n$ özelliğindeki pozitif bir sayı, p fonksiyonu $\overline{\Omega}$ bölgesinde

$$1<p^- \le p^+ < \frac{n}{k}$$

olacak şekilde düzgün sürekli bir fonksiyon ve Ω bölgesinde tanımlı q fonksiyonu hemen hemen her $x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) \le q(x)$ ve

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\overline{\Omega}} (p^*(x) - q(x)) > 0$$

olsun. Bu halde

$$W^{k,p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$$

gömmesi yazılabilir[31].

Teorem 3.2.6. Ω, R^n de koni özelliğine sahip sınırlı bir bölge, $1<p^- \le p^+ < \frac{n}{k}$ olmak üzere, $p \in C(\overline{\Omega})$ ve q fonksiyonu Teorem 3.2.5. te ki gibi olsun. Bu durumda

$$W^{k,p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi vardır[31].

Teorem 3.2.7. $\Omega' \subset\subset \Omega$ ve $h < d(\Omega', \partial\Omega)$ olsun. p fonksiyonu $1<p^- \le p^+ < \infty$ olmak üzere $\forall x, y \in \overline{\Omega}$ için

$$-|p(x)-p(y)|\log|x-y| \le L$$

koşulunu sağlasın. e_i, x_i ekseninin birim vektörü ve $u(x)$ fonksiyonun i. bölümü

$$\Delta_h^i u(x) = \frac{1}{h}\big(u(x+he_i) - u(x)\big)$$

olsun. $D_i u(x) = (\partial / \partial x_i) u(x)$ olmak üzere, $\Delta_h^i u(x) \in L^{p(x)}(\Omega')$ olur ve

i) $\int_{\Omega'} |\Delta_h^i u(x)|^{p(x)} dx \le \int_{\Omega} |D_i u(x)|^{p(x)} dx$,

ii) $L^{p(x)}(\Omega')$ uzayında $\Delta_h^i u(x) \to D_i u(x)$,

sonuçları elde edilir[32].

3.3. Hardy-Littlewood Maksimal Fonksiyonu

Ω, R^n de açık bir bölge ve $p:\Omega \to [1,\infty)$ fonksiyonu sürekli olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ için,

$$|p(x)-p(y)| \le \frac{c}{-\log|x-y|}, \qquad |x-y| < \frac{1}{2} \tag{3.3.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir pozitif c sayısı varsa, p fonksiyonuna (lokal olarak) ***log-Hölder sürekli***[1] ve (3.3.1) ifadesine de ***log-Hölder süreklilik koşulu*** adı verilir.

L.Pick ve M.Růžička[73] genel p fonksiyonu için $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında maksimal operatörün sınırlılığı için ters bir örnek sundular. p fonksiyonu çok hızlı bir artış noktası olan x_0 a sahip ise, yani $x \to x_0$ için $-|p(x)-p(x_0)|\log|x-x_0| \to \infty$ oluyorsa bu durumda maksimal operatör $L^{p(x)}(\Omega)$ uzaylarında sürekli olamaz.

Yardımcı Teorem 3.3.1. $p:\Omega \to [1,\infty)$ fonksiyonu log-Hölder sürekli olsun. Bu halde her açık B yuvarı için $|B|^{p_B^- - p_B^+} \le C$ olur[15].

Yardımcı Teorem 3.3.2. p fonksiyonu R^n de sınırlı bir üst olsun. Bu durumda, her $\|f\|_{p(x)} \le 1$ için

$$(Mf(x))^{\frac{p(x)}{p^-}} \le C(p)|B|^{p_B^- - p_B^+}\left(M\left(|f|^{\frac{p}{p^-}}\right)(x)+1\right), \quad \forall x \in R^n \tag{3.3.2}$$

olacak şekilde bir pozitif $C(p)$ sabiti vardır[15].

Teorem 3.3.3. p fonksiyonu $1 < p^- \le p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli ve yeteri kadar büyük $B(0,r)$ yuvarının dışında sabit olsun. Bu durumda Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p(x)}(R^n)$ uzayında sınırlıdır, yani

$$\| Mf \|_{p(x)} \le C(p) \| f \|_{p(x)} \tag{3.3.3}$$

eşitsizliği yazılabilir[15].

---

[1] Bu tür fonksiyonlar için literatürde 0-Hölder sürekli, Dini-Lipschitz sürekli ve zayıf Lipschitz sürekli adları da kullanılmıştır.

Teorem 3.3.4. Ω, R^n de açık sınırlı bir bölge ve p fonksiyonu $1 \le p(x) \le p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda $C_0^\infty(\Omega) \cap W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayı $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayında yoğundur ve $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W^{m,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{m,1}(\Omega)$ uzayı ile çakışır[32].

Ω, R^n de açık ve sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda Teorem 3.3.3. den Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonun sürekli olması için $p:\Omega \to [1,\infty)$ fonksiyonun $1 < p^-$ olacak şekilde log-Hölder sürekli olması yeterlidir. Maksimal fonksiyonun sınırlılığının bir sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.3.5. Ω Lipschitz sınıra sahip sınırlı bir bölge ve p fonksiyonu, maksimal fonksiyon R^n de sınırlı olacak şekilde sınırlı bir üst olsun. Bu durumda $C^\infty(\overline{\Omega})$ uzayı $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur[15].

Aynı sonuç bağımsız olarak S.Samko[77] tarafından mollifier yardımıyla; D.E.Edmunds ve J.Rákosník[24] tarafından da p fonksiyonunun Lipschitz sürekli olması koşulu altında gösterilmiştir.

Ω, R^n de açık bir bölge ve $p:\Omega \to [1,\infty)$ fonksiyonu sürekli olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ için p fonksiyonu log-Hölder sürekli ve her x için

$$|p(x) - p_\infty| \le \frac{C}{\log(e + |x|)}$$

olacak şekilde $\lim_{|x| \to \infty} p(x) = p_\infty \in [1,\infty)$ ve $C > 0$ sabitleri var ise p fonksiyonuna ***global log-Hölder sürekli*** adı verilir.

Yardımcı Teorem 3.3.6. Bir G kümesi ve negatif olmayan $r(\cdot)$ ve $s(\cdot)$ fonksiyonları verilsin. Her bir $y \in G$ için $z: G \to R^n$ ve $t > 0$ için $R_t(x) = (e + |x|)^{-tn}$ olmak üzere

$$0 \le s(y) - r(y) \le \frac{C}{\log(e + |z(y)|)}$$

şeklinde olsun. Bu durumda her bir f fonksiyonu için

$$\int_G |f(y)|^{r(y)}\, dy \le C_t \int_G |f(y)|^{s(y)}\, dy + \int_G R_t(z(y))^{r_G^-}\, dy$$

olacak şekilde pozitif bir C_t sabiti vardır[11].

Teorem 3.3.7. Ω, R^n de açık bir bölge olsun. p fonksiyonu $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli olsun ve

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}, \qquad x, y \in \Omega, |y| \geq |x| \qquad (3.3.4)$$

koşulunu sağlasın. Bu halde Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında sınırlı olur[11].

(3.3.4) koşulu, sonsuzda (3.3.1) koşulunun doğal benzeridir. (3.3.4) koşulundan $|x| \to \infty$ iken $p(x) \to p_\infty$ olacak şekilde p_∞ sayısının varlığı elde edilir ve bu limit tüm doğrultularda düzgün olarak elde edilir. Bir sonraki teorem bir anlamda (3.3.4) koşulunun gerekliliğini verir.

Teorem 3.3.8. $p_\infty \in (1, \infty)$ olacak şekilde bir sabit ve $\Phi : [0, \infty) \to [0, p_\infty - 1)$ fonksiyonu $\Phi(0) = 0$, $[1, \infty)$ aralığında azalan, $x \to \infty$ için $\Phi(x) \to 0$ ve

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(x) \log(x) = \infty$$

özelliklerine sahip olsun. $p : R \to [1, \infty)$ fonksiyonunu

$$p(x) = \begin{cases} p_\infty & x \leq 0 \text{ ise} \\ p_\infty - \Phi(x) & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında sınırsızdır[11].

Teorem 3.3.7. de $p^+ < \infty$ koşulu (3.3.4) koşulu ile kendiliğinden sağlanır. Bununla birlikte $p^- > 1$ koşulu gereklidir.

Teorem 3.3.9. Ω, R^n de açık bir bölge ve $p : \Omega \to [1, \infty)$ fonksiyonu üstten yarı-sürekli olsun. Eğer $p^- = 1$ ise, bu durumda Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında sınırsızdır[11].

Güçlü tipli eşitsizliklerin aksine, maksimal operatör için zayıf tipli eşitsizliğin bir benzeri, ilk olarak D.Cruz-Uribe, A.Fiorenza ve C.J.Neugebauer[11] tarafından ispatlanmıştır. Bu sonuç, p fonksiyonun sürekliliğini gerektirmediğinden ve sınırsız fonksiyonlar tarafından da sağlandığından oldukça ilginçtir.

Teorem 3.3.10. Ω açık bölgesi verilsin ve kabul edelim ki $p:\Omega \to [1,\infty)$ fonksiyonu hemen hemen her $x \in B$ için

$$\frac{1}{p(x)} \leq \frac{C}{|B|} \int_B \frac{dy}{p(y)} \qquad (3.3.5)$$

özelliği sağlanacak şekilde R^n e genişletilebilsin. Bu durumda her $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ için

$$\left|\{x \in \Omega : Mf(x) > t\}\right| \leq C \int_\Omega \left(\frac{|f(y)|}{t}\right)^{p(y)} dy$$

eşitsizliği yazılabilir[11].

$p^- \geq 1$ olduğundan, eğer $p^+ < \infty$ ise, bu durumda (3.3.5) özelliği kendiliğinden sağlanır.

Teorem 3.3.11. $p \in L_+^\infty(R^n)$ fonksiyonu log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda her $k \geq 1$ için $C_0^\infty(R^n)$ uzayı, $W^{k,p(x)}(R^n)$ uzayında yoğundur[10].

Teorem 3.3.11 ilk olarak S.Samko[77] tarafından ispatlandı. L.Diening[15] ise $p^- > 1$ ve maksimal fonksiyonun sınırlılığı kabulü altında benzer teoremi vermiştir.

Teorem 3.3.12. $p^- > 1$, p fonksiyonu log-Hölder sürekli ve en az bir $c > 0$ için $\phi(x) = |p(x) - p_\infty|$ ile tanımlı ϕ fonksiyonu

$$\int_{R^n} \phi(x) c^{\frac{1}{\phi(x)}} dx < \infty$$

koşulunu sağlayacak şekilde $p_\infty > 1$ reel sayısı var olsun. Bu durumda Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $L^{p(x)}(R^n)$ uzayında sınırlıdır[69].

Teorem 3.3.13. Ω, R^n de açık bir bölge olsun. $0 < \alpha < n$ olmak üzere p fonksiyonu $1 < p^- \leq p^+ < \frac{n}{\alpha}$ olacak şekilde global log-Hölder sürekli ve $x \in \Omega$ için

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$$

özelliği ile $q:\Omega \to [1,\infty)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda kesirli maksimal fonksiyon $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(x)}(\Omega)$ uzayına sınırlı olur[9].

Teorem 3.3.14. Ω bölgesi ve p, q fonksiyonları Teorem 3.3.13. teki gibi olsun. Bu halde I_α Riesz operatörü $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(x)}(\Omega)$ uzayına sınırlı olur[9].

Teorem 3.3.14. den klasik durumdaki ispata benzer olarak aşağıdaki gömme teoremi elde edilir. İspat $C_0^\infty(R^n)$ uzayının $W^{k,p(x)}(R^n)$ uzayında yoğun olduğunu kabul eder. Bu sonuç Teorem 3.3.5. ve Teorem 3.3.11. de verilmiştir.

Teorem 3.3.15. $p: R^n \to [1,\infty)$ fonksiyonu $1 < p^- \le p^+ < n$ olacak şekilde global log-Hölder sürekli olsun. Eğer k, $p^+ < \frac{n}{k}$ olacak şekil bir tamsayı ve $x \in R^n$ için

$$\frac{1}{p^*(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{k}{n}$$

ise, bu durumda $W^{k,p(x)}(R^n) \to L^{p^*(x)}(R^n)$ gömmesi geçerlidir[9].

L.Diening[16], Teorem 3.3.3 ten yararlanarak benzer sonucu vermiştir.

3.4. Hardy Eşitsizlikleri

Teorem 3.4.1. $0 < \ell < \infty$ olmak üzere $\Omega = (0,\ell)$ ve her $x \in [0,\ell]$ için $1 \le p(x) \le p^+ < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu halde,

i) p fonksiyonu orijinin bir $[0,d]$ komşuluğunda log-Hölder ve $1 < p^- \le p^+ < \infty$ koşullarını sağlasın. Eğer

$$-\frac{1}{p(0)} < \beta < \frac{1}{p'(0)}$$

şeklinde ise, bu durumda $0 \le x \le \ell$ için $1 \le s(x) \le s^+ < \infty$, $s(0) = p(0)$ ve

$$|s(x) - p(x)| \le \frac{C}{-\log x}, \quad 0 < x < \delta, \delta > 0$$

özelliklerini sağlayan bir $s(x)$ için

$$H^\beta f(x) = x^{\beta-1}\int_0^x \frac{f(t)}{t^\beta}dt \text{ ve } H_*^\beta f(x) = x^\beta \int_0^\ell \frac{f(t)}{t^{\beta+1}}dt$$

şeklinde tanımlanan Hardy operatörleri $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayından $L^{s(x)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır.

ii) Eğer en az bir $d > 0$ için $0 \le x \le d$ iken $p(0) \le p(x)$ ise, bu durumda *i)* seçeneğinde $[0,d]$ komşuluğu üzerindeki koşullar yerine daha zayıf $p(0) > 1$ ve

$$|s(x) - p(0)| < \frac{C}{-\log x}, \quad 0 < x < \min(\ell, \frac{1}{2})$$

kabulleri bırakılırsa teoremin ifadesi değişmez[56].

Teorem 3.4.2. p fonksiyonu $(0,1)$ aralığında log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda her $f \in L^{p(x)}(0,1)$ için $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\left\| x^{-\alpha} \int_0^1 \frac{f(y)dy}{|x-y|^{\alpha-1}} \right\|_{p(x)} \leq C \|f\|_{p(x)}$$

şeklinde Riesz potansiyeli için Hardy tipli eşitsizlik elde edilir[22].

Teorem 3.4.3. Ω, R^n de sınırlı bir bölge ve p fonksiyonu $x \in \overline{\Omega}$ için $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olmak üzere log-Hölder sürekli olsun. Bu halde, $x_0 \in \overline{\Omega}$ ve

$$\alpha - \frac{1}{p(x_0)} < \beta < \frac{1}{q(x_0)}$$

aralığındaki her β için

$$\left\| |x-x_0|^{\beta-\alpha} \int_\Omega \frac{f(y)dy}{|y-x_0|^{\beta} |x-y|^{n-\alpha}} \right\|_{p(x)} \leq C \|f\|_{p(x)}$$

Riesz potansiyeli için Hardy tipli eşitsizliği sağlanır[78,79].

Teorem 3.4.4. $M < \infty$ olmak üzere $I = [0, M)$ olsun. $p : I \to [1,\infty)$ sınırlı, $p(0) > 1$ ve

$$\limsup_{x \to 0^+} (p(x) - p(0)) \log \frac{1}{x} < \infty$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (0,1)$ için $p^-_{(0,x_0)} = p(0)$ olsun. Eğer $a \in [0, 1 - \frac{1}{p(0)})$ ise, bu durumda

$$\left\| \frac{u(x)}{x^{1-a}} \right\|_{p(x)} \leq C \| u'(x) x^a \|_{p(x)}$$

Hardy eşitsizliği, $u(0) = 0$ özellikli her $u \in W^{1,p(x)}(I)$ için sağlanır[42].

Teorem 3.4.5. $p^+ < \infty$ olmak üzere p fonksiyonu $I = [0, \infty)$ aralığında tanımlansın. Eğer p fonksiyonu

$$\limsup_{x \to 0^+} (p(x) - p(0)) \log \frac{1}{x} = \infty$$

olacak şekilde 0 noktasında artan ise, bu durumda

$$\left\| \frac{u(x)}{x} \right\|_{p(x)} \leq C \| u'(x) \|_{p(x)}$$

şeklindeki Hardy eşitsizliği sağlanmaz[42].

Teorem 3.4.6. p ve q fonksiyonları $I=[0,1]$ aralığında ölçülebilir ve hemen hemen her $x \in I$ için $1 < p_I^- \le p_0(x) = \operatorname*{essinf}_{y\in[0,x]} p(y) \le q(x) \le q_I^+ < \infty$ olsun. Eğer

$$B = \sup_{0<t<1} B(t) = \sup_{0<t<1} \int_t^1 \vartheta(x)^{q(x)} \left(\int_0^t \omega^{(p_0)'(x)}(\tau)d\tau \right)^{\frac{q(x)}{(p_0)'(x)}} dx < \infty$$

ise, bu durumda

$$H_{\vartheta,\omega} f(x) = \vartheta(x) \int_0^x f(t)\omega(t)dt$$

Hardy operatörü $L^{p(x)}(I)$ uzayından $L^{q(x)}(I)$ uzayına sınırlı olur[20].

Teorem 3.4.7. p ve q fonksiyonları $I=[0,1]$ aralığında ölçülebilir ve hemen hemen her $x \in I$ için $1 < p_I^- \le p_I^+ < \infty$, $1 < q_I^- \le q_I^+ < \infty$ olsun. Eğer $H_{\vartheta,\omega}$ Hardy operatörü $L^{p(x)}(0,1)$ uzayından $L^{q(x)}(0,1)$ uzayına sınırlı ve $\rho_{p'}(\omega) < \infty$ ise, bu durumda

$$\overline{B} = \sup_{0<t<1} \overline{B}(t) = \left(\sup_{0<t<1} \int_t^1 \vartheta(x)^{q(x)} \left(\int_0^t \omega(\tau)^{(p)'(x)} d\tau \right)^{\frac{q(x)}{p'^+}} dx \right)^{\frac{1}{q^-}} < \infty$$

olur[20].

4. BÖLÜM

SOBOLEV TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde Ω, R^N $(N \geq 2)$ de sınırlı bir bölge olmak üzere, daha önce yapılan çalışmalardaki yöntemlerden farklı olarak, seriyel açılım yardımıyla süreklilik koşulu kullanılmadan ölçülebilir p fonksiyonları için en iyi üstlü Sobolev tipli eşitsizlik elde etmeye çalışacağız. Kolaylık olsun diye,

$$N^* = \frac{N}{N-1} \quad \text{ve} \quad \delta = \frac{q^+ - q^-}{N^*}$$

kısaltmalarını kullanacağız.

4.1. Sobolev Tipli Eşitsizlik

Teorem 4.1.1. Ω, R^N $(N \geq 2)$ de sınırlı bir bölge ve $x \in \Omega$ için

$$\sup_{x\in\Omega} q(x)\left[\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{N}\right] \leq 1-\delta$$

olacak şekilde $1 \leq q^- \leq q(x) \leq q^+ < \infty$ ve $1 \leq p^+ < N$ olarak alınsın. Bu durumda,

$$C(N,p,q,\Omega) = \begin{cases} C(N,p,q)|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^+}} & \text{eğer} \quad |\Omega| \leq 1 \\ C(N,p,q)|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p^+}+\frac{1}{q^-}} & \text{eğer} \quad |\Omega| > 1 \end{cases}$$

olmak üzere, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\|u\|_{q(x),\Omega} \leq C(N,p,q,\Omega)\|\nabla u\|_{p(x),\Omega} \tag{4.1.1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir $C(N,p,q,\Omega)$ sayısı vardır.

İspat : $\|u\|_{q(x),\Omega} = 1$ ve $|\Omega| = 1$ olduklarını varsayalım. O zaman Teorem 3.1.3. yardımıyla,

$E_t = \{x \in \Omega : |u(x)| > t\}$ olmak üzere

$$1 = \int_\Omega |u(x)|^{q(x)}\, dx = \int_{E_2} |u(x)|^{q(x)}\, dx + \int_{E_0/E_2} |u(x)|^{q(x)}\, dx = I_1 + I_2$$

yazabiliriz.

E_t kümesinin tanımı göz önüne alınarak,

$$I_2 = \int_{E_0/E_2} |u(x)|^{q(x)}\,dx \le 2^{q^+-1} \int_{\Omega} |u(x)|\,dx \tag{4.1.2}$$

ve $x \in E_2$ için

$$|u(x)|^{q(x)} - 1 \ge \frac{1}{2} |u(x)|^{q(x)}$$

olduğundan

$$I_1 = \int_{E_2} |u(x)|^{q(x)}\,dx \le 2 \int_{E_2} dx \left(\int_1^{|u(x)|} q(x)\, t^{q(x)-1}\,dt \right)$$

çıkar. Bu son ifadeye Fubini Teoremi uygulanarak

$$I_1 \le 2 \int_1^{\infty} dt \left(\int_{E_t} t^{q(x)-1} q(x)\,dx \right) \tag{4.1.3}$$

elde edilebilir. e^x fonksiyonun Taylor açılımı kullanılarak, (4.1.3) eşitsizliğinin sağ tarafı $a \in R^1$, $a < q^-$ olmak üzere

$$I_1 \le 2 \int_1^{\infty} t^{a-1} dt \left(\int_{E_t} t^{q(x)-a} q(x)\,dx \right) = 2 \int_1^{\infty} t^{a-1}\,dt \left(\int_{E_t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q(x)-a)^n q(x) \ln^n t}{n!} \right) dx \right)$$

$$= 2 \int_1^{\infty} t^{a-1} dt \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n t}{n!} \int_{E_t} q(x) (q(x)-a)^n\,dx \right) \tag{4.1.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan, w ağırlık fonksiyonu ve $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$ olmak üzere

$$\left(\int_{\Omega} |f(x)|^{N^*} w(x)\,dx \right)^{\frac{1}{N^*}} \le C(N) \int_{\Omega} |\nabla f(x)|\, w(x)^{\frac{1}{N^*}}\,dx$$

ağırlıklı Gagliardo eşitsizliğinden dolayı, $n=0,1,2,\ldots$ için $K(n,a) = \left(\frac{q^+-a}{q^- -a} \right)^n C(N)$

olmak üzere,

$$\left(\int_{\Omega} q(x) (q(x)-a)^n |f|^{N^*}\,dx \right)^{\frac{1}{N^*}} \le K^{\frac{1}{N^*}}(n,a) \left(\int_{\Omega} |\nabla f|\, q(x)^{\frac{1}{N^*}} (q(x)-a)^{\frac{n}{N^*}}\,dx \right) \tag{4.1.5}$$

eşitsizliğini görmek kolaydır.

(4.1.5) eşitsizliğinde f test fonksiyonu yerine $t>0$ olmak üzere

$$Z(x)=\min\left(\frac{|u(x)|-\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}},1\right)$$

alırsak, $G_t=\left\{x\in\Omega:\frac{t}{2}<|u(x)|\le t\right\}$ için

$$\int_{E_t} q(x)(q(x)-a)^n\,dx\le\frac{K(n,a)}{t^{N^*}}\left(\int_{G_t}|\nabla u|q(x)^{\frac{1}{N^*}}(q(x)-a)^{\frac{n}{N^*}}dx\right)^{N^*} \qquad (4.1.6)$$

elde ederiz. Böylece (4.1.4) ve (4.1.6) eşitsizliklerinden

$$I_1\le 2\int_1^{\infty} t^{a-1}\,dt\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K(n,a)\ln^n t}{n!t^{N^*}}\left(\int_{G_t}|\nabla u(x)|q(x)^{\frac{1}{N^*}}(q(x)-a)^{\frac{n}{N^*}}dx\right)^{N^*}\right) \qquad (4.1.7)$$

bulunur. Toplam için Minkowski eşitsizliği kullanarak $\beta(a)=K^{\frac{1}{n}}(n,a)$ olmak üzere

$$I_1\le 2\int_1^{\infty} t^{a-1-N^*}\,dt\left(\int_{G_t}|\nabla u|q(x)^{\frac{1}{N^*}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K(n,a)\ln^n t}{n!}(q(x)-a)^n\right]^{\frac{1}{N^*}}dx\right)^{N^*}$$

$$=2C^{N^*}(N)\int_1^{\infty} t^{a-1-N^*}\,dt\left(\int_{G_t}|\nabla u|q(x)^{\frac{1}{N^*}}t^{\frac{(q(x)-a)\beta(a)}{N^*}}dx\right)^{N^*} \qquad (4.1.8)$$

ve Minkowski integral eşitsizliği kullanarak

$$I_1\le 2C^{N^*}(N)\left(\int_{E_1}|\nabla u|q(x)^{\frac{1}{N^*}}dx\left(\int_{|u(x)|}^{2|u(x)|}t^{(q(x)-a)\beta(a)+a-1-N^*}dt\right)^{\frac{1}{N^*}}\right)^{N^*}$$

$$\le\frac{2q^+C^{N^*}(N)\left(2^{\frac{(q^+-a)\beta(a)}{N^*}+\frac{a}{N^*}-1}-1\right)}{(q^--a)\beta(a)+a-N^*}\left(\int_{E_1}|\nabla u||u|^{\frac{(q(x)-a)\beta(a)}{N^*}+\frac{a}{N^*}-1}dx\right)^{N^*} \qquad (4.1.9)$$

elde ederiz.

Böylece (4.1.2) ve (4.1.9) ifadelerinden

$$1 \le C(N,q^+,q^-,a)\left(\int_{E_1} |\nabla u||u|^{\frac{(q(x)-a)\beta(a)}{N^*}+\frac{a}{N^*}-1}dx\right)^{N^*} + 2^{q^+-1}\int_\Omega |u|dx \qquad (4.1.10)$$

bulunur ve $a \to -\infty$ için $C(N,q^+,q^-)$ sonlu olmak üzere

$$\frac{(q(x)-a)\beta(a)}{N^*}+\frac{a}{N^*}-1 \to \frac{q(x)}{N^*}-1+\frac{q^+-q^-}{N^*}, \qquad C(N,q^+,q^-,a) \to C(N,q^+,q^-)$$

elde ederiz. Eğer (4.1.10) ifadesine Fatou lemması uygulanırsa $C>0$ sayısı sadece n,q^+ ve q^- sayılarına bağlı olmak üzere

$$1 \le C\left(\int_{E_1} |\nabla u||u|^{\frac{q(x)}{N^*}-1+\delta}dx\right)^{N^*} + 2^{q^+-1}\left(\int_\Omega |u|^{N^*}dx\right)^{1/N^*} \qquad (4.1.11)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.11) eşitsizliğinin ilk terimine

$$db \le \varepsilon d^p + c(\varepsilon)b^{p'}; \quad d>0,\ b>0,\ \varepsilon>0,\ p>1$$

şeklindeki Young eşitsizliği ve (4.1.11) eşitsizliğinin ikinci terimine Gagliardo eşitsizliği uygulanırsa,

$$1 \le C\left(C(\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \varepsilon\int_\Omega |u|^{\left(\frac{q(x)}{N^*}-1+\delta\right)p'(x)}\right)^{N^*} + 2^{q^+-1}\int_\Omega |\nabla u|dx \qquad (4.1.12)$$

çıkar. Teoremin kabülünden dolayı

$$\left[\frac{q(x)}{N^*}-1+\delta\right]p'(x) \le q(x)$$

yazılabilir ve Young eşitsizliğini (4.1.12) eşitsizliğindeki son integrale uygularsak

$$1 \le C\left[C(\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \varepsilon\right]^{N^*} + C(\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \varepsilon 2^{q^+-1}$$

buluruz. Buradan da $1 \le p(x) < \infty$ olmak üzere yeteri kadar küçük $\varepsilon>0$ için

$$1 \le C\left[\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{N^*}}\right] \qquad (4.1.13)$$

sonucuna ulaşırız.

Eğer $C\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{N^*}}<\frac{1}{2}$ ise, bu durumda (4.1.13) eşitsizliğinden

$$1\leq C\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx \tag{4.1.14}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan, eğer $C\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{N^*}}\geq\frac{1}{2}$ ise, o zaman $2C\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx\geq 1$ olduğu sonucu hemen elde edilir. Dolayısıyla

$$2C\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{N^*}}\leq(2C)^{N^*}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)$$

yazılabilir ve (4.1.13) eşitsizliğinden tekrar (4.1.14) eşitsizliği elde edilir.

Böylece Teorem 3.1.3. den

$$1\leq C\|\nabla u\|_{p(x)}$$

yazılabilir ve normun homojenlik özelliği ile $u\in L^{q(x)}(\Omega)$ olmak üzere,

$$z=\frac{u}{\|u\|_{q(x),\Omega}}$$

olarak alındığında

$$\|u\|_{q(x),\Omega}\leq C(N,p,q)\|\nabla u\|_{p(x),\Omega} \tag{4.1.15}$$

sonucu elde edilir ki, bu da $|\Omega|=1$ için ispatı tamamlar.

Şimdi de $|\Omega|$ herhangi pozitif bir sayı, $x_0\in\Omega$ bir sabit nokta, $y\in\Omega^*$ ve $r>0$ olmak üzere, $x=Ty=x_0+ry$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bunun yanında $x=Ty$ dönüşümü için Ω bölgesinin görüntü kümesini Ω^*, $\tilde{u}(y)=u(x_0+ry)$, $\tilde{p}(y)=p(x_0+ry)$ ve $\tilde{q}(y)=q(x_0+ry)$ olduklarını kabul edelim, $|\Omega^*|=1$ olacak şekilde $r=C_N|\Omega|^{\frac{1}{N}}$ sayısı seçelim. Normun tanımından dolayı

$$\int_{\Omega^*}\left(\frac{|\tilde{u}(y)|}{\|u\|_{\tilde{q}(y),\Omega^*}}\right)^{\tilde{q}(y)}dy=1$$

şeklinde yazılabildiği açıktır.

Eğer $|\Omega|\leq 1$ ise, ters dönüşümü kullanarak

$$\int_{\Omega}\left(\frac{|u(x)|}{\|\tilde{u}\|_{\tilde{q}(y),\Omega^*}|\Omega|^{1/q^+}}\right)^{q(x)}dx\leq 1$$

elde edebiliriz ve buradan da,

$$\|u\|_{q(x),\Omega}\leq C_N|\Omega|^{\frac{1}{q^+}}\|\tilde{u}\|_{\tilde{q}(y),\Omega^*} \qquad (4.1.16)$$

yazılabilir. Yine bir fonksiyonun gradientinin normunun tanımı göz önüne alınarak

$$\int_{\Omega}\left(\frac{|\nabla u|}{\|\nabla u\|_{p(x),\Omega}}\right)^{p(x)}dx=1$$

elde edebiliriz. Bu durumda

$$|\Omega|\int_{\Omega^*}\left(\frac{|\nabla\tilde{u}|}{r\|\nabla u\|_{p(x),\Omega}}\right)^{\tilde{p}(y)}dy\leq 1$$

ve $|\Omega|\leq 1$ olmak üzere

$$\int_{\Omega^*}\left(\frac{|\nabla\tilde{u}|}{|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p^-}}\|\nabla u\|_{p(x),\Omega}}\right)^{\tilde{p}(y)}dy\leq 1 \qquad (4.1.17)$$

eşitsizliğini buluruz.

(4.1.17) eşitsizliğinin bir sonucu olarak,

$$\|\nabla\tilde{u}\|_{\tilde{p}(y),\Omega^*}\leq|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p^-}}\|\nabla u\|_{p(x),\Omega} \qquad (4.1.18)$$

olur. (4.1.15) , (4.1.16) ve (4.1.18) ifadelerinden $u\in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için, $|\Omega|\leq 1$ olmak üzere

$$\|u\|_{q(x),\Omega}\leq C(N,p,q)|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^+}}\|\nabla u\|_{p(x),\Omega},$$

elde edilebilir.

Benzer olarak $|\Omega|>1$ için

$$\|u\|_{q(x),\Omega}\leq C(N,p,q)|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p^+}+\frac{1}{q^-}}\|\nabla u\|_{p(x),\Omega}$$

çıkar ki, bu da ispatı tamamlar.

Açıklama 4.1.2. D ve E, R^2 de herhangi regüler sınırlı bölgeler ve $E \subset D$ olsun.

$$p(x) = \begin{cases} 4/3 & \text{eğer} \quad x \in E \\ 1 & \text{eğer} \quad x \in D/E \end{cases}$$

ve

$$q(x) = \begin{cases} 2 & \text{eğer} \quad x \in E \\ 1 & \text{eğer} \quad x \in D/E \end{cases}$$

şeklinde seçilen fonksiyonlar için S.Samko tarafından verilen Teorem 3.1.21. in koşulları sağlanmadığı halde, Teorem 4.1.1 geçerliliğini korumaktadır.

Teorem 4.1.3. Ω, R^n de Lipschitz sınırına sahip açık sınırlı bir bölge, $1 < p^- \le p^+ < n$ ve p fonksiyonu lokal olarak log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda en az bir $\delta > 0$ için $q(x) \le p^*(x) - \delta$ özelliğindeki ölçülebilir q fonksiyonu için

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi vardır.

İspat: $0 < p(p-m) < m(p-p^*)$ olmak üzere $q \le m \le p^*$ olacak şekilde bir m vardır. m fonksiyonunun sınırlı bir üst olduğunu belirtelim. $f_n \xrightarrow{z} f$ olacak şekilde $f_n, f \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ olarak alınsın. $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ uzayında $f_n \to f$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için Teorem 4.1.1. den

$$W^{1,p(x)} \to W^{1,m(x)} \to W^{1,m^-} \to L^{(m^-)^*} \to L^{q^*} \to L^{q(x)} \quad , (m^-)^* \ge q^*$$

zincir gömmesi dikkate alınarak

$$\|f_n - f\|_{m(\cdot)} \to 0 \ \text{ ya da } f_n \to f$$

yazılabilir. $q \le m \le p^*$ ve Ω sınırlı olduğundan $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ uzayında

$$f_n \to f$$

sonucu elde edilir ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi ,

$$\|f\|_{W^{m,p(x)}_{x_j}(\Omega)} = \|f\|_{p(x)} + \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right\|_{p(x)} \quad , \ (j = 1,\dots,n)$$

normuna sahip fonksiyonların $W^{p(x)}_{x_j}(\Omega)$ sınıfını göz önüne alalım.

Teorem 4.1.4. Ω, R^n de sınırlı bir bölge, $\Omega_{k|h|} \subset\subset \Omega$ ve $kh < \mathrm{d}(\Omega_{k|h|}, \partial\Omega)$ olsun. Eğer $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ve (lokal) log-Hölder sürekli olmak üzere $f \in W_{x_j}^{k,p(x)}(\Omega)$ ise, bu durumda $\Delta_{x_j,h}^k f(x) \in L^{p(x)}(\Omega_{k|h|})$ ve

$$\left\|\Delta_{x_j,h}^k f\right\|_{p(x),(\Omega_{k|h|})} \le C_k \left\|\frac{\partial^k f}{\partial x_j^k}\right\|_{p(x),(\Omega)}$$

olur.

İspat: $k = 1$ halinde $(x_1,\dots,x_n) \in \Omega_{|h|}$ ve $\Delta_{x_1,h} f(x) = \int\limits_0^h f_{x_1}'(x_1+t, x_2,\dots,x_n)dt$ için

$$\left\|\Delta_{x_1,h} f\right\|_{p(x),(\Omega_{|h|})} \le \left|\int\limits_0^h \left\|f_{x_1}'(x_1+t,x_2,\dots,x_n)\right\|_{p(x),(\Omega_{|h|})} dt\right| \le \left|\int\limits_0^h \left\|f_{x_1}'\right\|_{p(x),(\Omega)} dt\right| = C\left\|f_{x_1}'\right\|_{p(x),(\Omega)}$$

yazılabilir. Buradan da herhangi bir k için

$$\left\|\Delta_{x_j,h}^k f\right\|_{p(x),(\Omega_{k|h|})} = \left\|\Delta_{x_j,h}(\Delta_{x_j,h}^{k-1} f)\right\|_{p(x),(\Omega_{k|h|})} \le C_1 \left\|\Delta_{x_j,h}^{k-1} f_{x_j}'\right\|_{p(x),(\Omega_{(k-1)|h|})} \le \dots \le C_k \left\|f_{x_j}^{(k)}\right\|_{p(x),(\Omega)}$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

4.2. Kesirli Maksimal Fonksiyonun Regülerliği ve Sınırlılığı

$0 < \alpha < n$ olması durumunda kesirli maksimal fonksiyon ile

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

Riesz potansiyeli arasında çok yakın bir ilişki vardır. Ω_n birim yuvarın R^n deki ölçümü olmak üzere

$$M_\alpha f(x) \le \Omega_n^{-1} I_\alpha f(x)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu özellikten ve J.Kinnunen ve E.Saksman'ın yönteminden yaralanarak bu kesimde kesirli maksimal fonksiyonun değişken üstü Lebesgue uzayında regülerliğini ve sınırlılığını araştıracağız.

Teorem 4.2.1. $\alpha \ge 1$, p fonksiyonu R^n de $1 < p^- \le p^+ < \dfrac{n}{\alpha}$ olacak şekilde global log-Hölder sürekli ve $f \in L^{p(x)}(R^n)$ olsun. Bu durumda

i) $i = 1,2,3,\dots,n,$ için $D_i M_\alpha f$ zayıf kısmi türevleri *h.h.h.* vardır ve R^n de *h.h.h.*

$$|D_i M_\alpha f| \le c M_{\alpha-1} f \ , \ i = 1,2,3,\dots,n,$$

yazılabilir.

ii) $q(x)=\dfrac{np(x)}{n-(\alpha-1)p(x)}$ ve $q^{*}(x)=\dfrac{np(x)}{n-\alpha p(x)}$ olmak üzere $M_\alpha f\in L^{q^{*}(x)}(R^n)$

ve $i=1,2,...,n,$ için $D_iM_\alpha f\in L^{q(x)}(R^n)$ olur. Üstelik,

$$\|M_\alpha f\|_{q^{*}(x)}\le C\|f\|_{p(x)} \text{ ve } \|D_iM_\alpha f\|_{q(x)}\le C\|f\|_{p(x)}$$

olacak şekilde $C=C(n,p(x),\alpha)$ sayısı vardır.

İspat: Kabul edelim ki $f\in C_0^{\infty}(R^n)$ ve $f\neq 0$ olsun. $|h|<1$ olacak şekilde $h\in R^n$ ve $x\in R^n$ için

$$D^{+}M_\alpha f(x)=\limsup_{h\to 0}\frac{M_\alpha f(x+h)-M_\alpha f(x)}{|h|}$$

ifadesini göz önüne alalım. $M_\alpha f$ fonksiyonu Lipschitz sürekli olduğundan, $D^{+}M_\alpha f(x)<\infty$ ve $\forall x\in R^n$ için

$$D^{+}M_\alpha f(x)\le cM_{\alpha-1}f(x) \tag{4.2.1}$$

yazılabilir[50].

Şimdi, $f\in L^{p(x)}(R^n)$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.1.9 a göre C_0^{∞} uzayı $L^{p(x)}(R^n)$ uzayında yoğun olduğundan , $L^{p(x)}(R^n)$ uzayında $j\to\infty$ iken $f_j\to f$ olacak şekilde $f_j\in C_0^{\infty}(R^n)$, j = 1,2,... , seçelim. $M_\alpha f_j$ Lipschitz olduğundan hemen hemen her $x\in R^n$ noktasında diferansiyellenebilirdir. Her bir noktadaki diferansiyellenebilirlikten ve böylece R^n de $h.h.h.$, (4.2.1) eşitsizliği her bir $D_iM_\alpha f_j$ kısmi türevi için

$$|D_iM_\alpha f_j|\le D^{+}M_\alpha f_j\le cM_{\alpha-1}f_j$$

eşitsizliğini verir. Teorem 3.3.14. ün yardımıyla $C=C(n,p(x),\alpha)$ olmak üzere

$$\|D_iM_\alpha f_j\|_{q(x)}\le c\|M_{\alpha-1}f_j\|_{q(x)}\le C\|f_j\|_{p(x)}$$

yazılabilir. Böylece her $i=1,2,...,n,$ için $(D_iM_\alpha f_j)$, $L^{q(x)}(R^n)$ uzayında sınırlı bir dizi olur. Diğer taraftan, yine Riesz operatörünün sınırlılığından $C=C(n,p(x),\alpha)$ olmak üzere

$$\| M_\alpha f_j-M_\alpha f\|_{q^{*}(x)}\le\| M_\alpha(f_j-f)\|_{q^{*}(x)}\le C\| f_j-f\|_{p(x)}$$

eşitsizliği yazılabilir ve $L^{q(x)}(R^n)$ uzayında $j\to\infty$ iken $M_\alpha f_j\to M_\alpha f$ çıkar.

Diğer taraftan, $j \to \infty$ iken $L^{q(x)}(R^n)$ uzayında $D_i M_\alpha f_j \xrightarrow{z} D_i M_\alpha f$, $i = 1,2,...$, olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $D_i M_\alpha f \in L^{q(x)}(R^n)$ olduğu sonucunu elde ederiz. Bununla birlikte, zayıf limit tarafından korunan

$$\left| D_i M_\alpha f_j \right| \leq C M_{\alpha-1} f_j$$

noktasal eşitsizliğinin $h.h.h.$ yazılabildiğini görmek kolaydır. Böylece R^n de $h.h.h.$

$$\left| D_i M_\alpha f \right| \leq C M_{\alpha-1} f$$

elde ederiz ki, bu da ispatı tamamlar.

5.BÖLÜM

HARDY TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde (ağırlıklı) değişken üstlü Lebesgue uzayında gömme teoremlerinin elde edilmesi için vazgeçilmez bir araç olan Hardy tipli eşitsizliklerle ilgileneceğiz.

$\beta > -1$ ve p fonksiyonu $1 < p^- \le p^+ < \infty$ olacak şekilde lokal log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda μ pozitif sonlu bir sayı ve u fonksiyonu $(0,\mu)$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon olmak üzere Teorem 3.4.1. den

$$\left\| x^{\frac{\beta}{p(x)}} u \right\|_{p(x),(0,\mu)} \le C(p(x),\mu) \left\| x^{\frac{\beta}{p(x)}+1} u' \right\|_{p(x),(0,\mu)} \tag{5.1}$$

değişken üstlü Lebesgue uzayında Hardy tipli eşitsizliği üretilebilir.

5.1. $L^{p(x)}(0,\infty)$ Uzayında Hardy Tipli Eşitsizlik

Teorem 5.1. $p:(0,\infty) \to (1,\infty)$ fonksiyonu $1 < p^- \le p^+ < \infty$ olacak şekilde global log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda mutlak sürekli ve $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$ özelliğine sahip $u:(0,\infty) \to R$ fonksiyonu için $\beta > -1$ olmak üzere

$$\left\| x^{\frac{\beta}{p(x)}} u(x) \right\|_{p(x)} \le C \left\| x^{\frac{\beta}{p(x)}+1} u'(x) \right\|_{p(x)} \tag{5.1.1}$$

Hardy tipli eşitsizliği yazılabilir.

İspat : $a \ge 1$ olmak üzere $x \ge a$ için $p(x) \ge p_\infty$ olsun. (5.1.1) ifadesi homojen olduğundan, monoton azalan u fonksiyonu için

$$\left\| x^{\frac{\beta}{p(x)}+1} u'(x) \right\|_{p(x)} = 1$$

durumunu göz önüne almak yeterlidir.

Genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği yardımıyla $\beta > -1$ olduğundan,

$$u(1) = -\int_1^\infty u'(t)\,dt \le \left\| t^{\frac{\beta}{p(t)}+1} u'(t) \right\|_{p(t),(1,\infty)} \left\| t^{-\frac{\beta}{p(t)}-1} \right\|_{p'(t),(1,\infty)} \le C_1, \tag{5.1.2}$$

olacak şekilde sadece $p(x)$ ve β ifadelerine bağlı bir pozitif C_1 sayısı vardır. $x\in(a,\infty)$ için $u(x)\le C_1$ olduğundan

$$\int_a^\infty x^\beta u(x)^{p(x)}dx \le C_1^{p^+}\int_a^\infty x^\beta u(x)^{p_\infty}dx \le C_2\int_a^\infty x^\beta(-x u'(x))^{p_\infty}dx \tag{5.1.3}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\Omega=\{t\in(a,\infty):\ t|u'(t)|\ge 1\}$ olarak alalım. Bu halde, $R_a^+=(a,\infty)$ olmak üzere, (5.1.3) ifadesinin sağ tarafı

$$C_3\int_a^\infty t^\beta |t u'(t)|^{p(t)}dt+\int_{R_a^+/\Omega} t^\beta |t u'(t)|^{p_\infty}dt, \tag{5.1.4}$$

ile sınırlı olur.

Şimdi, (5.1.4) ifadesinin sağ tarafındaki terimi ve

$$\Omega_\beta=\left\{t\in R_a^+/\Omega:\ |t\,u'(t)|<\frac{1}{(1+t)^{\beta+2}}\right\}$$

bölgesini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_{R_a^+/\Omega} t^\beta |t u'(t)|^{p_\infty}dt &\le \int_{\Omega_\beta}\frac{t^\beta}{(1+t)^{(\beta+2)p_\infty}}dt+\int_{R_a^+/\Omega_\beta} t^\beta |t u'(t)|^{p_\infty}dt\\ &\le C_4+\int_{R_a^+/\Omega_\beta} t^\beta |t u'(t)|^{p_\infty}dt \end{aligned}\tag{5.1.5}$$

elde edilir. (5.1.5) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son terimin bir üst sınırını bulmaya çalışalım. Yardımcı Teorem 3.3.6. ve p fonksiyonunun global log-Hölder sürekli oluşundan

$$\begin{aligned}\int_{R_a^+/\Omega_\beta} t^\beta |t u'(t)|^{p_\infty}dt &\le \int_{R_a^+} t^\beta\left((1+t)^{\beta+2}|tu'(t)|\right)^{p(t)-p_\infty}|t u'(t)|^{p_\infty}dt\\ &=\int_{R_a^+} t^\beta (1+t)^{(\beta+2)(p(t)-p_\infty)}|t u'(t)|^{p(t)}dt\\ &\le C_5\int_{R_a^+} t^\beta |t u'(t)|^{p(t)}dt\\ &\le C_5\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Böylece (5.1.3) ve (5.1.5) eşitsizlikleri ile birlikte

$$\int_a^{\infty} t^{\beta} \,|\, u(t)|^{p(t)}\, dt \le C_6 \tag{5.1.6}$$

elde ederiz.

Diğer taraftan, $(0,a)$ aralığı için (5.1) eşitsizliği kullanılarak p fonksiyonun log-Hölder sürekliliğinin kabulü altında

$$\int_0^{a} t^{\beta} \,|\, u(t)|^{p(t)}\, dt \le C_7 \tag{5.1.7}$$

yazılır. Böylece (5.1.6) ve (5.1.7) eşitsizlikleri birleştirilerek

$$\int_0^{\infty} t^{\beta} \,|\, u(t)|^{p(t)}\, dt \le C_8 \tag{5.1.8}$$

bulunur. Norm ve modüler arasındaki ilişkiden kolayca

$$\left\| t^{\frac{\beta}{p(t)}} u(t) \right\|_{p(t)} \le C \tag{5.1.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak, (5.1.9) eşitsizliğinde $u(t)$ yerine

$$\frac{u(t)}{\left\| t^{\frac{\beta}{p(t)}+1} u'(t) \right\|_{p(t)}}$$

yazılarak istenen sonuç elde edilir.

5.2. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayında Kuvvet Tipli Ağırlıklı Hardy Eşitsizliği

Bu kesimde değişken üstlü Lebesgue uzayında kuvvet tipli Hardy eşitsizlikleri ele alınacaktır. $n \in \mathbb{N}$ için $\Omega_x = \left(2^{-n-1}x, 2^{-n}x\right]$ olmak üzere

$$p_x^- = \min\left\{ p(x)\,,\, \inf_{t\in\Omega_x} p(t) \right\},\quad x > 0$$

ve

$$p_x^+ = \max\left\{ p(x)\,,\, \sup_{t\in\Omega_x} p(t) \right\},\quad x > 0$$

ile gösterelim.

Yardımcı Teorem 5.2.1. Eğer $p:[0,\infty)\to[1,\infty)$ ve $\alpha:[0,\infty)\to R$ fonksiyonları sırasıyla

$$|\,p(x)-p(0)|\,\log\frac{1}{x}\le C_1\,,\quad 0<x\le\frac{1}{2} \tag{5.2.1}$$

$$|\,\alpha(x)-\alpha(0)|\,\log\frac{1}{x}\le C_1\,,\quad 0<x\le\frac{1}{2}$$

koşullarını sağlıyor ise, bu durumda herhangi $x\in[0,\infty)$ için

$$\text{(a)}\quad x^{\frac{p_x^- - p(x)}{p_x^-}}\le e^{\frac{3C_1}{p^-}}+2^{\left(\frac{p^+}{p^-}-1\right)}$$

$$(b)\quad x^{\left(\alpha(x)-\alpha_x^+\right)q(x)}\le e^{3C_1q^+}+2^{(\alpha^+-\alpha^-)q^+}$$

elde edilir.

İspat: Önce $p_x^- - p(x)$ terimini hesaplayalım. Kabul edelim ki herhangi $x\in[0,\frac{1}{2})$ için $p_x^-\ne p(x)$ olsun. Bu durumda

$$\left|\,p_x^- - p(x)\right|\le\left|\,p_x^- - p(0)\right|+\left|\,p(x)-p(0)\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi sabit bir $x\in\Omega_x$ seçelim. Bu halde, $\exists\, y\in\Omega_x$ için

$$p_x^-\le p(y)<\frac{C_1}{\log\frac{1}{x}} \tag{5.2.2}$$

eşitsizliği yazılabilir. (5.2.1) koşulu ve (5.2.2) eşitsizliği yardımıyla beraber,

$$\left|\,p_x^- - p(0)\right|\le\left|\,p_x^- - p(y)\right|+\left|\,p(y)-p(0)\right|$$

$$\le\frac{C_1}{\log\frac{1}{x}}+\frac{C_1}{\log\frac{1}{y}}$$

elde ederiz. $y<x$ olduğundan

$$\left|\,p_x^- - p(0)\right|\le\frac{2C_1}{\log\frac{1}{x}}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitsizliği ve (5.2.1) koşulunu kullanırsak,

$$\left|\,p_x^- - p(x)\right|\le\left|\,p_x^- - p(0)\right|+\left|\,p(x)-p(0)\right|$$

$$\le\frac{3C_1}{\log\frac{1}{x}}$$

buluruz.

Dolayısıyla,

$$x^{\frac{p_x^- - p(x)}{p_x^-}} \leq \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{p(x)-p_x^-}{p^-}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3C_1}{p^- \log\frac{1}{x}}} = e^{\frac{3C_1}{p^-}}$$

yazılabilir.

Şimdi $x \geq \frac{1}{2}$ olsun, bu durumda

$$x^{\frac{p_x^- - p(x)}{p_x^-}} = x^{1-\frac{p(x)}{p_x^-}} \leq 2^{\frac{p^+}{p^-}-1}$$

sonucu elde edilir ki bu da (a) seçeneğinin ispatını tamamlar. Teoremin (b) kısmının ispatı, yukarıda yapılanlara benzer olarak yapılabilir.

Yardımcı Teorem 5.2.2. p fonksiyonu $p_\infty \in [1,\infty)$ olacak şekilde $x \in (0,\infty)$ için

$$|\, p(x) - p_\infty | \log(e+x) \leq C_2 \tag{5.2.3}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda herhangi $x \in [0,\infty)$ için

$$(1+t^2)^{p(t)-p_x^-} \leq 2^{p^+-p^-}(e^{8C_2}+1), \qquad t \in \Omega_x$$

yazılabilir.

İspat : Öncelikle $t \in \Omega_x$, $x > 0$ için $p(t) - p_x^-$ terimini hesaplamayla başlayalım. $p_x^- \neq p(x)$ için

$$|p(t) - p_x^-| \leq |p(t) - p_\infty| + |p_\infty - p_x^-|$$

yazılabilir. Sabit bir $x \in \Omega_x$ ve $\exists y \in \Omega_x$ için

$$p_x^- \leq p(y) < p_x^- + \frac{C_2}{\log(e+t)} \tag{5.2.4}$$

yazılabilir. (5.2.3) koşulu ve (5.2.4) eşitsizliği yardımıyla,

$$|\, p_x^- - p_\infty | \leq |\, p_x^- - p(y)| + |\, p(y) - p_\infty | \leq \frac{C_2}{\log(e+t)} + \frac{C_2}{\log(e+y)}$$

elde ederiz.

Diğer taraftan, $\frac{t}{2} < y < 2t$ için

$$\frac{C_2}{\log(e+y)} \le \frac{2C_2}{2\log(e+\frac{t}{2})} = \frac{2C_2}{\log(e+\frac{t}{2})^2} \le \frac{2C_2}{\log(e+t)}$$

olur.

Böylece $p_x^- \neq p(x)$ için

$$\left|p(t) - p_x^-\right| \le \frac{4C_2}{\log(e+t)} \tag{5.2.5}$$

elde edilir.

Eğer $p_x^- = p(x)$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned} \left| p_x^- - p(t)\right| &= \left| p(x) - p(t)\right| \\ &\le \left| p(x) - p_\infty\right| + \left| p(t) - p_\infty\right| \\ &\le \frac{C_2}{\log(e+x)} + \frac{C_2}{\log(e+t)} \end{aligned}$$

ve $t \le x$ olduğundan,

$$\left| p_x^- - p(t)\right| \le \frac{2C_2}{\log(e+t)} \tag{5.2.6}$$

yazılabilir.

$t > 1$ için (5.2.5) ve (5.2.6) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \left(1+t^2\right)^{p(t)-p_x^-} &\le \left(2t^2\right)^{p(t)-p_x^-} \\ &\le 2^{p^+-p^-} t^{\frac{8C_2}{\log(e+t)}} \\ &\le 2^{p^+-p^-} e^{8C_2} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradan istenen sonuç hemen elde edilir.

Teorem 5.2.3. p ve α fonksiyonları (5.2.1) ve (5.2.3) koşullarını sağlasın. $x \in (0,\infty)$ için $1 < p^- \le p(x) \le q(x) \le q^+ < \infty$ ve $-\infty < \alpha^- \le \alpha(x) < \infty$ olmak üzere eğer

$$\delta = 1 - \alpha^+ (p^-)' > 0 \tag{5.2.7}$$

ise, bu durumda $[0,\infty)$ aralığında mutlak sürekli ve $u(0) = 0$ özelliğine sahip u

fonksiyonu için

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq C \left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)} \tag{5.2.8}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\delta, C_1, C_2, p^-, q^+$ ve α^- sayılarına bağlı $C > 0$ sayısı vardır.

İspat : u fonksiyonu mutlak sürekli olduğundan artmayan fonksiyonlar için yukarıdaki eşitsizliği göstermek ve (5.2.8) eşitsizliğinin pozitif homojenliğinden dolayı, $\left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)} = 1$ durumunu göz önüne almak yeterlidir. Bu durumda,

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq C \tag{5.2.9}$$

olacak şekilde u fonksiyonundan bağımsız pozitif bir C sayısının var olduğunu göstermemiz gerekir.

Minkowski eşitsizliği yardımıyla $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} &= \left\| \left[\sum_{n=0}^{m} \left(u\left(\frac{x}{2^n}\right) - u\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right) + u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right] x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} \right\|_{q(x)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{m} \left\| \left[u\left(\frac{x}{2^n}\right) - u\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right] x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} \right\|_{q(x)} \\ &\quad + \left\| u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} \right\|_{q(x)} \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

elde ederiz. (5.2.10) ifadesinin sağ tarafındaki her bir toplamı hesaplayabiliriz. Hölder eşitsizliği yardımıyla, $\alpha_x^+ = \max\left\{ \alpha(x), \sup_{t\in\Omega_x} \alpha(t) \right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x} |u'(t)|\, dt &= \int_{\Omega_x} t^{\alpha_x^+} \, |u'(t)| \, t^{-\alpha_x^+} dt \\ &\leq \left(\int_{\Omega_x} \left| t^{\alpha_x^+} u'(t) \right|^{p_x^-} dt \right)^{\frac{1}{p_x^-}} \left(\int_{\Omega_x} t^{-\alpha_x^+ (p_x^-)'} dt \right)^{\frac{1}{(p_x^-)'}} \end{aligned}$$

yazılabilir. (5.2.7) şartından $\left(p_x^-\right)'$, p_x^- in eşleniği ve $C(\delta) > 0$ sayısı x ve $u(x)$ ten bağımsız olmak üzere

$$\int_{\Omega_x} t^{-\alpha_x^+ (p_x^-)'} dt \le C(\delta)\left(2^{-n}x\right)^{1-\alpha_x^+ (p_x^-)'}$$

elde edebiliriz. Son eşitsizliğin yardımıyla,

$$x^{\left(\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)q(x)}\left(\int_{\Omega_x} |u'|dt\right)^{q(x)}$$

$$\le C(\delta)x^{\left(\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)q(x)}\left(2^{-n}x\right)^{\frac{\left(1-\alpha_x^+ (p_x^-)'\right)q(x)}{(p_x^-)'}}\left(\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}dt\right)^{\frac{q(x)}{p_x^-}} \qquad (5.2.11)$$

sonucunu buluruz.

Diğer taraftan

$$\frac{\left(1-\alpha_x^+ (p_x^-)'\right)q(x)}{(p_x^-)'}=\left(1-\alpha_x^+\right)q(x)-\frac{q(x)}{p(x)}+\frac{p_x^- - p(x)}{p_x^-}\cdot\frac{q(x)}{p(x)}$$

olduğundan,

$$x^{\left(\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)q(x)}\left(2^{-n}x\right)^{\frac{\left(1-\alpha_x^+ (p_x^-)'\right)q(x)}{(p_x^-)'}}\le x^{-1}x^{\frac{p_x^- - p(x)}{p_x^-}\cdot\frac{q(x)}{p(x)}}x^{\left(\alpha(x)-\alpha_x^+\right)q(x)}2^{-n\delta(p^- -1)} \qquad (5.2.12)$$

olur. Yardımcı Teorem 5.2.1 den dolayı (5.2.12) eşitsizliğinden, $C_3>0$ sayısı C_1,δ,p^-, q^+, α^+ ve α^- sayılarına bağlı olmak üzere

$$x^{\left(\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)q(x)}\left(2^{-n}x\right)^{\frac{\left(1-\alpha_x^+ (p_x^-)'\right)q(x)}{(p_x^-)'}}\le\frac{C_3}{x}2^{-n\delta(p^- -1)}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (5.2.11) ifadesi

$$x^{\left(\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)q(x)}\left(\int_{\Omega_x}|u'|dt\right)^{q(x)}\le\frac{C_3}{x}2^{-n\delta(p^- -1)}\left(\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}dt\right)^{\frac{q(x)}{p_x^-}} \qquad (5.2.13)$$

biçiminde yazılmış olur. Şimdi $G(t)=\frac{1}{1+t^2}$, $t>0$ alalım. $t\in\Omega_x$ için $G(t)^{p_x^- - p(t)}=\left(1+t^2\right)^{p(t)-p_x^-}$ olduğundan

$$\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}=\left|\frac{t^{\alpha_x^+}u'}{G(t)}\right|^{p_x^-}G(t)^{p_x^-}$$

$$\leq\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p(t)}G(t)^{p_x^- -p(t)}+G(t)^{p^-},\quad t\in\Omega_x \tag{5.2.14}$$

yazılabilir. Yardımcı Teorem 5.2.2 yardımıyla, (5.2.14) ifadesinden $C_4=2^{p^+-p^-}(e^{8C_2}+1)$ olmak üzere

$$\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}\leq\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p(t)}C_4+G(t)\ ,\quad t\in\Omega_x \tag{5.2.15}$$

elde ederiz. $t\in\Omega_x$, $x>0$ için $t^{\alpha_x^+}$ terimini $t^{\alpha(x)}$ terimi cinsinden yazalım. α fonksiyonu (5.2.3) koşulunu sağladığından, $0<t\leq 1$ için $t^{\alpha_x^+}\leq t^{\alpha(t)}$ ve $1\leq t<\infty$ için

$$t^{\alpha_x^+-\alpha(t)}t^{\alpha(t)}\leq t^{\left|\alpha_x^+-\alpha_\infty\right|+\left|\alpha(t)-\alpha_\infty\right|}t^{\alpha(t)}$$

$$\leq t^{\frac{3C_2}{\log(e+t)}}t^{\alpha(t)}\leq e^{3C_2}t^{\alpha(t)}$$

elde ederiz; yani, $t^{\alpha_x^+}\leq e^{3C_2}t^{\alpha(t)}$, $t\in\Omega_x$. Bu son değerlendirme ışığında (5.2.15) eşitsizliğinden $C_5>0$ sayısı, sadece C_1,C_2,p^-,q^+,α^- ve α^+ sayılarına bağlı olmak üzere

$$\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}\leq C_5\left|t^{\alpha(t)}u'\right|^{p(t)}+G(t)\ ,\quad t\in\Omega_x \tag{5.2.16}$$

ve

$$\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}dt\leq C_5\int_0^\infty\left|t^{\alpha(t)}u'\right|^{p(t)}dt+\int_0^\infty G(t)dt\leq C_5+\frac{\pi}{2}=C_6 \tag{5.2.17}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece (5.2.17) eşitsizliğinden

$$\left(\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}dt\right)^{\frac{q(x)}{p_x^-}}=\left(\frac{1}{C_6}\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}dt\right)^{\frac{q(x)}{p_x^-}}C_6^{\frac{q(x)}{p_x^-}}$$

$$\leq C_6^{\frac{q^+}{p^-}-1}\left(\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}dt\right)$$

sonucu bulunur.

Yine (5.2.16) eşitsizliği vasıtasıyla

$$\left(\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha_x^+}u'\right|^{p_x^-}dt\right)^{\frac{q(x)}{p_x^-}}\leq C_6^{\frac{q^+}{p^-}-1}\left(C_5\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha(t)}u'\right|^{p(t)}dt+\int_{\Omega_x}G(t)dt\right) \qquad (5.2.18)$$

yazabiliriz.

Diğer taraftan (5.2.13) ve (5.2.16) eşitsizliklerinden dolayı,

$$x^{\left(\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)q(x)}\left(\int_{\Omega_x}\left|u'\right|dt\right)^{q(x)}$$

$$\leq\frac{C_3}{x}2^{-n\delta(p^--1)}C_6^{\frac{q^+}{p^-}-1}\left(C_5\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha(t)}u'\right|^{p(t)}dt+\int_{\Omega_x}G(t)dt\right) \qquad (5.2.19)$$

elde ederiz. (5.2.19) ifadesinin her iki tarafının integrali alınır Fubini Teoremi kullanılırsa $C_8=C_7\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\log 2$ olmak üzere

$$\int_0^\infty x^{\left(\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)q(x)}\left(\int_{\Omega_x}\left|u'\right|dt\right)^{q(x)}dx$$

$$\leq C_3 2^{-n\delta(p^--1)}C_6^{\frac{q^+}{p^-}-1}\int_0^\infty\left(C_5\int_{\Omega_x}\left|t^{\alpha(t)}u'(t)\right|^{p(t)}dt+\int_{\Omega_x}G(t)dt\right)\frac{dx}{x}$$

$$=C_7 2^{-n\delta(p^--1)}\left(\int_0^\infty\left(\left|t^{\alpha(t)}u'(t)\right|^{p(t)}+G(t)\right)\left(\int_{2^n t}^{2^{n+1}t}\frac{dx}{x}\right)dt\right)$$

$$=C_7 2^{-n\delta(p^--1)}\log 2\left(\int_0^\infty\left|t^{\alpha(t)}u'(t)\right|^{p(t)}dt+\int_0^\infty G(t)dt\right)$$

$$=C_8 2^{-n\delta(p^--1)}$$

bulunur.

$p^{-}>1$ olduğundan, Teorem 3.1.3 den $C_9>0$ ve $\delta>0$ sayıları n ve u fonksiyonundan bağımsız olmak üzere

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} \int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} |u'(t)|\, dt \right\|_{q(x)} \le C_9 2^{-n\delta} \tag{5.2.20}$$

elde edilir. (5.2.20) eşitsizliğini

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} \left(u\left(\frac{x}{2^n}\right) - u\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right) \right\|_{q(x)} \le C_9 2^{-n\delta}$$

şeklinde yazarak (5.2.10) eşitsizliğinden

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \le \sum_{n=0}^{m} C_9 2^{-n\delta} + \left\| u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} \right\|_{q(x)} \tag{5.2.21}$$

bulunur. $m\to\infty$ için kabulümüz ve Lebesgue Teoreminden

$$\left| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right| \le \left| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right| \in L^{p(x)}$$

ve

$$\int_0^\infty \left(x^{\left(\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}\right)} u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right)^{q(x)} dx \to 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $m\to\infty$ için

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right\|_{q(x)} \to 0 \tag{5.2.22}$$

olur. Böylece $m\to\infty$ iken (5.2.21) ifadesinde (5.2.22) göz önüne alınarak

$$\left\| x^{\alpha(x)-\frac{1}{p'(x)}-\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \le \sum_{n=0}^{\infty} C_9 2^{-n\delta} = C_{10}$$

elde ederiz ki, bu teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 5.2.4. Teorem 5.2.3 te $q(x)=p(x)$ alınırsa, bu durumda $[0,\infty)$ aralığında mutlak sürekli ve $z(0)=0$ özelliğine sahip z fonksiyonu için

$$\left\| x^{\alpha(x)-1} z(x) \right\|_{p(x)} \leq C \left\| x^{\alpha(x)} z'(x) \right\|_{p(x)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.2.5. p ve α fonksiyonları (5.2.1) ve (5.2.3) koşullarını sağlasın. $1<p^- \leq p(x) \leq p^+ <\infty$ ve $0<\alpha(x)\leq \alpha^+ <\infty$ olmak üzere eğer

$$\delta_1 = \alpha^-(p^+)' - 1 > 0 \tag{5.2.23}$$

ise, bu durumda $[0,\infty)$ aralığında mutlak süreli ve $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)=0$ özelliğine sahip u fonksiyonu için

$$\left\| x^{\alpha(x)-1} u(x) \right\|_{p(x)} \leq C \left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)} \tag{5.2.24}$$

olacak şekilde δ_1, C_1, C_2, p^-, p^+ ve α^+ sayılarına bağlı $C>0$ sayısı vardır.

İspat: Normun homojenliğinden dolayı $\left\| x^{\alpha(x)} u(x) \right\|_{p(x)} = 1$ durumunu göz önüne almak yeterlidir. Bunun için z fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında mutlak sürekli ve $z(0)=0$ olsun. Ayrıca $r(x)=p'(x)$ ve $\beta(x)=1-\alpha(x)$ ile gösterelim, $\alpha^-(p^+)'>1$ koşulundan $\beta^+(r^-)'<1$ özelliği çıkar. r ve β fonksiyonlarının (5.2.1) ve (5.2.3) koşullarını sağladığı açıktır. Böylece, z fonksiyonu için Uyarı 5.2.4. ile birlikte

$$\left\| x^{\beta(x)-1} z(x) \right\|_{r(x)} \leq C_1 \left\| x^{\beta(x)} z'(x) \right\|_{r(x)}$$

yazılabilir. Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\left| \int_0^\infty u z' dx \right| = \left| -\int_0^\infty u' z dx \right| \leq C_0 \left\| x^{\beta(x)-1} z \right\|_{r(x)} \left\| x^{1-\beta(x)} u' \right\|_{r'(x)}$$

$$\leq C_0 C_1 \left\| x^{\beta(x)} z' \right\|_{r(x)} \left\| x^{1-\beta(x)} u' \right\|_{r'(x)}$$

elde ederiz.

Böylece Orlicz ve Lüksemburg normların eşdeğerliliğinden

$$\left\| x^{-\beta(x)}u(x) \right\|_{r'(x)} \le C_0C_1 \left\| x^{1-\beta(x)}u'(x) \right\|_{r'(x)}$$

ve

$$\left\| x^{\alpha(x)-1}u(x) \right\|_{p(x)} \le C_0C_1 \left\| x^{\alpha(x)}u'(x) \right\|_{p(x)} \le C_0C_1$$

sonuçları elde edilir ki bu da Teorem 5.2.5. in ispatını tamamlar.

Teorem 5.2.6. p, q ve α fonksiyonları (5.2.1) ve (5.2.3) koşullarını sağlasın. $x \in [0,\infty)$ için $1 < p^- \le p(x) \le q(x) \le q^+ < \infty$ ve $0 < \alpha(x) \le \alpha^+ < \infty$ olmak üzere, eğer

$$\delta_2 = \alpha^- - \frac{1}{(p^+)'} - \frac{1}{q^-} + \frac{1}{q^+} > 0, \tag{5.2.25}$$

ise, bu durumda $[0,\infty)$ aralığında mutlak süreli ve $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ özelliğine sahip u fonksiyonu için

$$\left\| x^{\alpha(x) - \frac{1}{p'(x)} - \frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \le C \left\| x^{\alpha(x)}u'(x) \right\|_{p(x)} \tag{5.2.26}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde δ_2, C_1, C_2, p^-, q^+ ve α^+ sayılarına bağlı $C > 0$ sayısı vardır.

İspat : z fonksiyonu $z(0) = 0$ olacak şekilde $[0,\infty)$ aralığında mutlak sürekli olsun. $q_1(x) = p'(x)$, $p_1(x) = q'(x)$ ve $\beta(x) = \dfrac{1}{p'(x)} + \dfrac{1}{q(x)} - \alpha(x)$ diyelim. Bu halde $\alpha^- > \dfrac{1}{(p^+)'} + \dfrac{1}{q^-} - \dfrac{1}{q^+}$ koşulundan $\beta^+(p_1^-)' < 1$ olduğu çıkar. q_1, p_1 ve β fonksiyonlarının (5.2.1) ve (5.2.3) koşullarını sağladığı açıktır ve böylece Teorem 5.2.3 z fonksiyonuna uygulanarak

$$\left\| x^{\beta(x) - \frac{1}{p_1'(x)} - \frac{1}{q(x)}} z(x) \right\|_{q_1(x)} \le C_1 \left\| x^{\beta(x)} z'(x) \right\|_{p_1(x)}$$

eşitsizliği elde edilebilir.

Hölder eşitsizliğinden

$$\left|\int_0^{\infty} u\, z' dx\right| = \left| -\int_0^{\infty} u' z dx\right|$$

$$\le C_0 \left\| x^{\beta(x) - \frac{1}{p_1'(x)} - \frac{1}{q_1(x)}} z(x) \right\|_{q_1(x)} \left\| x^{-\left(\beta(x) - \frac{1}{p_1'(x)} - \frac{1}{q_1(x)}\right)} u'(x) \right\|_{q_1'(x)}$$

$$\le C_0 C_1 \left\| x^{\beta(x)} z'(x) \right\|_{p_1(x)} \left\| x^{-\left(\beta(x) - \frac{1}{p_1'(x)} - \frac{1}{q_1(x)}\right)} u'(x) \right\|_{q_1'(x)}$$

yazılabilir. Orlicz ve Lüksemburg normların eşdeğerliliğinden

$$\left\| x^{-\beta(x)} u(x) \right\|_{p_1'(x)} \le C_0 C_1 \left\| x^{-\left(\beta(x) - \frac{1}{p_1'(x)} - \frac{1}{q_1(x)}\right)} u'(x) \right\|_{q_1'(x)}$$

ve

$$\left\| x^{\alpha(x) - \frac{1}{p'(x)} - \frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \le C_0 C_1 \left\| x^{\alpha(x)} u'(x) \right\|_{p(x)}$$

elde ederiz. Bu Teorem 5.2.6. nın ispatını tamamlar.

Uyarı 5. 2.7. Yukarıdaki tüm teoremlerde $[0,\infty)$ yerine $[0,A]$ alınırsa bu durumda (5.2.3) koşulu gerekli değildir.

6. BÖLÜM

GENEL AĞIRLIKLI HARDY EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde değişken üstlü Lebesgue uzayında genelleştirilmiş Hardy tipli eşitsizliği elde edeceğiz. Bir önceki bölümde olduğu gibi, $\Omega_x = \left(2^{-n-1}x, 2^{-n}x\right]$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$p_x^- = \min\left\{p(x)\,,\, \inf_{t\in\Omega_x} p(t)\right\},\quad x > 0$$

ve

$$p_x^+ = \max\left\{p(x)\,,\, \sup_{t\in\Omega_x} p(t)\right\},\quad x > 0$$

ile gösterelim. Ayrıca ω ve ϑ ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$\mu(x) = \int_0^x \omega^{1-p'(s)}(s)ds$$

ve

$$\tilde{\vartheta}(x) = \int_x^\infty \vartheta(s)ds$$

gösterimlerini kullanacağız.

6.1. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayında Genelleştirilmiş Hardy Eşitsizliği

Yardımcı Teorem 6.1.1. Eğer p fonksiyonu $0 < \mu(x) \leq \frac{1}{2}$ için

$$|\,p(x) - p(0)| \leq \frac{C_1}{\log\dfrac{1}{\mu(x)}} \tag{6.1.1}$$

koşulunu sağlıyor ise, bu durumda

$$\mu(x)^{\frac{p_x^- - p(x)}{p_x^-}} \leq 1 + e^{\frac{3C_1}{p^-}}$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat : p fonksiyonu (6.1.1) koşulunu sağlasın. İşe $p_x^- - p(x)$ terimini değerlendirmeyle başlayalım. Bunun için sabit bir $x \in \Omega_x$ seçelim. Bu durumda $\exists y \in \Omega_x$ için

$$p_x^- \le p(y) < p_x^- + \frac{C_1}{\log \frac{1}{\mu(x)}} \tag{6.1.2}$$

yazabiliriz. (6.1.1) koşulundan ve (6.1.2) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |p_x^- - p(0)| &\le |p_x^- - p(y)| + |p(y) - p(0)| \\ &\le \frac{C_1}{\log \frac{1}{\mu(x)}} + \frac{C_1}{\log \frac{1}{\mu(y)}} \end{aligned}$$

elde ederiz. μ fonksiyonu azalmayan fonksiyon; yani $\mu(y) \le \mu(x)$ olduğundan,

$$|p_x^- - p(0)| \le \frac{2C_1}{\log \frac{1}{\mu(x)}}$$

eşitsizliği ve buradan da

$$\begin{aligned} \mu(x)^{\frac{p_x^- - p(x)}{p_x^-}} &= \left(\frac{1}{\mu(x)}\right)^{\frac{p(x)-p_x^-}{p_x^-}} \\ &\le 1 + \left(\frac{1}{\mu(x)}\right)^{\frac{|p(x)-p(0)| + |p_x^- - p(0)|}{p_x^-}} \\ &\le 1 + \left(\frac{1}{\mu(x)}\right)^{\frac{3C_1}{\log\frac{1}{\mu(x)}} \frac{1}{p_x^-}} \\ &= 1 + e^{\frac{3C_1}{p^-}} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Yardımcı Teorem 6.1.2. p fonksiyonu her $t > 0$ için

$$|p(t) - p_\infty| \le \frac{C_2}{\log(e + \mu(t))} \tag{6.1.3}$$

koşulunu sağlasın ve $\mu(x) \ge \frac{1}{2}$ için

$$\mu \in D : \exists \theta > 0 \text{ için } \mu\left(\frac{x}{2}\right) \ge 2^{-\theta} \mu(x) \tag{6.1.4}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $t \in \Omega_x$, $x > 0$ için

$$(1+\mu^2(t))^{p(t)-p_x^-} \leq 2^{p^+-p^-}\left(1+e^{2C_2+(C_3+2)}\right) = C_4 \tag{6.1.5}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Benzer olarak, işe $t \in \Omega_x$, $x > 0$ için $p(t) - p_x^-$ terimini değerlendirmeyle başlayalım. En az bir $y \in \Omega_x$ için p_x^- in tanımından

$$p_x^- \leq p(y) < p_x^- + \frac{C_2}{\log(e+\mu(t))} \tag{6.1.6}$$

yazabiliriz. (6.1.3) koşulundan ve (6.1.6) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} |p_x^- - p_\infty| &\leq |p_x^- - p(y)| + |p(y) - p_\infty| \\ &\leq \frac{C_2}{\log(e+\mu(t))} + \frac{C_2}{\log(e+\mu(y))} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Diğer taraftan (6.1.4) kabulü kullanılarak $\frac{t}{2} < y < 2t$ için

$$\frac{C_2}{\log(e+\mu(t))} < \frac{C_2}{\log\left(e+\mu\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \leq \frac{C_2}{\log(e+2^{-\theta}\mu(t))} \tag{6.1.7}$$

yazılabilir. $2^{-\theta}C_3e^{C_3-1} \geq 1$ olacak şekilde $C_3 > 1$ seçelim. Bu durumda

$$\frac{C_2}{\log(e+\mu(y))} \leq \frac{C_2C_3}{\log(e+\mu(t))}$$

olduğu gösterilebilir. Gerçekten, (6.1.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{\log(e+\mu(y))} &\leq \frac{C_2}{\log(e+2^{-\theta}\mu(t))} \\ &= \frac{C_2C_3}{\log(e+2^{-\theta}\mu(t))^{C_3}} \\ &= \frac{C_2C_3}{\log e^{C_3}(1+\frac{2^{-\theta}}{e}\mu(t))^{C_3}} \end{aligned}$$

bulunur.

Bernoulli eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{C_2}{\log(e+\mu(y))} \le \frac{C_2 C_3}{\log e^{C_3}(1+\frac{C_3 2^{-\theta}}{e}\mu(t))}$$

$$\le \frac{C_2 C_3}{\log(e+C_3 e^{C_3-1} 2^{-\theta}\mu(t))}$$

$$\le \frac{C_2 C_3}{\log(e+\mu(t))}$$

çıkar. Böylece $p_x^- \neq p(x)$ için

$$|p(t)-p_x^-| \le |p(t)-p_\infty| + |p_x^- - p_\infty|$$

$$\le \frac{C_2(C_3+2)}{\log(e+\mu(t))} \quad , \quad t\in\Omega_x \tag{6.1.8}$$

elde ederiz.

Eğer $p_x^- = p(x)$ ise, bu halde (6.1.3) koşulundan

$$|p_x^- - p(t)| = |p(x)-p(t)|$$

$$\le |p(x)-p_\infty| + |p(t)-p_\infty|$$

$$\le \frac{C_2}{\log(e+\mu(x))} + \frac{C_2}{\log(e+\mu(t))}$$

ve $0<t<x$ için $\mu(t)\le\mu(x)$ olduğundan,

$$|p_x^- - p(t)| \le \frac{2C_2}{\log(e+\mu(t))} \tag{6.1.9}$$

yazılabilir. Böylece $t\in\Omega_x$, $x>0$ için (6.1.8) ve (6.1.9) eşitsizliklerinden

$$(1+\mu^2(t))^{p(t)-p_x^-} \le 2^{p^+-p^-} + (2\mu(t))^{p(t)-p_x^-}$$

$$\le 2^{p^+-p^-}\left(1+\mu(t)^{\frac{2C_2(C_3+2)}{\log(e+\mu(t))}}\right)$$

$$\le 2^{p^+-p^-}\left(1+e^{2C_2(C_3+2)}\right) = C_4$$

bulunur.

Teorem 6.1.3. p ve q fonksiyonları $1 < p^- \le p(x) \le q(x) \le q^+ < \infty$ olacak şekilde $[0,\infty)$ aralığında ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bunun yanında C_1, C_2 ve C_5 pozitif sabitleri x, p, q, ϑ ve ω ifadelerinden bağımsız olmak üzere en az bir $p(0)$, $p_\infty \in R$ için üst ve ağırlık fonksiyonları

$$(1)\ 0 < \mu(t) \le \frac{1}{2} \text{ için } |p(t) - p(0)| \le \frac{C_1}{\log \frac{1}{\mu(t)}} \tag{6.1.10}$$

$$(2)\ \text{Her } t > 0 \text{ için } |p(t) - p_\infty| \le \frac{C_2}{\log(e + \mu(t))} \tag{6.1.11}$$

$$(3)\ \sup_{x>0} \tilde{\vartheta}(x)^{\frac{1}{q(x)}} \mu(x)^{\frac{1}{p'(x)}} = C_5 < \infty \tag{6.1.12}$$

$$(4)\ x > 0 \text{ için } \tilde{\vartheta} \in D:\ \exists \eta > 0,\ \ \tilde{\vartheta}\left(\frac{x}{2}\right) \le 2^\eta \tilde{\vartheta}(x) \tag{6.1.13}$$

$$(5)\ \mu(x) \ge \frac{1}{2} \text{ için } \mu \in D: \exists \theta > 0,\ \ \mu\left(\frac{x}{2}\right) \ge 2^{-\theta} \mu(x) \tag{6.1.14}$$

$$(6)\ x > 0 \text{ için } \mu \in RD:\ \exists \delta > 0,\ \ \mu\left(\frac{x}{2}\right) \le 2^{-\delta} \mu(x) \tag{6.1.15}$$

koşullarını sağlasın.

Bu durumda $[0,\infty)$ aralığında mutlak sürekli ve $u(0) = 0$ özelliğine sahip u fonksiyonu için

$$\left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \le C \left\| \omega(x)^{\frac{1}{p(x)}} u'(x) \right\|_{p(x)} \tag{6.1.16}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde η, q^+, θ, p^- ve δ değerlerine bağlı bir $C > 0$ sayısı vardır.

İspat : $\left\| \omega(x)^{\frac{1}{p(x)}} u'(x) \right\|_{p(x)} = 1$ olsun. $\left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \le C$ olacak şekilde monoton u fonksiyonundan bağımsız bir $C > 0$ sayısının varlığını göstermek yeterlidir. Minkowski eşitsizliğinden,

$$\left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} = \left\| \sum_{n=0}^{m} \left\{ \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} \left[u\left(\frac{x}{2^n}\right) - u\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right] + u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right\} \right\|_{q(x)}$$

$$\le \sum_{n=0}^{m} \left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} \left[u\left(\frac{x}{2^n}\right) - u\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right] \right\|_{q(x)} + \left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right\|_{q(x)} \tag{6.1.17}$$

ve buradan da

$$\left\|\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u(x)\right\|_{q(x)} \leq \sum_{n=0}^{m}\left\|\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} \int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} u'(t)dt\right\|_{q(x)} + \left\|\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right)\right\|_{q(x)} \qquad (6.1.18)$$

yazabiliriz.

Şimdi (6.1.18) ifadesinin sağ tarafındaki her bir toplamı değerlendirelim. Bunun için basitlik olsun diye, $t \geq 0$ için $f(t) = \omega(t)^{p'(t)-1}\left|u'(t)\right|$ alacağız. $\mu(\Omega_x) = \int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} \omega(t)^{1-p'(t)}dt$, $x > 0$ ve $(p_x^-)'$, p_x^- in eşlenik fonksiyonu olmak üzere, Hölder eşitsizliğinden,

$$\int_{\Omega_x} f(t)d\mu(t) \leq \left(\int_{\Omega_x} f(t)^{p_x^-} d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p_x^-}} \mu(\Omega_x)^{\frac{1}{(p_x^-)'}} \,, \qquad (6.1.19)$$

elde ederiz. (6.1.19) ifadesinden dolayı

$$\int_0^\infty \left(\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} \int_{\Omega_x} \left|u'(t)\right|dt\right)^{q(x)} dx$$

$$\leq -\int_0^\infty \tilde{\vartheta}(x)\mu(\Omega_x)^{\frac{q(x)}{(p_x^-)'}} \left(\int_{\Omega_x} f(t)^{p_x^-} d\mu(t)\right)^{\frac{q(x)}{p_x^-}} \frac{d\tilde{\vartheta}(x)}{\tilde{\vartheta}(x)} \qquad (6.1.20)$$

yazabiliriz. $\mu(\Omega_x) \leq \mu\left(2^{-n}x\right)$ olduğundan ve (6.1.15) koşulundan

$$\mu(\Omega_x)^{\frac{q(x)}{(p_x^-)'}} \leq \left(\mu\left(2^{-n}x\right)\right)^{\frac{q(x)}{(p_x^-)'}}$$

$$\leq 2^{-n\delta(p_x^- -1)} \mu(x)^{\frac{q(x)}{(p_x^-)'}}$$

$$\leq 2^{-n\delta(p^- -1)} \mu(x)^{\frac{q(x)}{p'(x)}} \mu(x)^{\frac{p_x^- - p(x)}{p_x^-} \cdot \frac{q(x)}{p(x)}} \qquad (6.1.21)$$

elde ederiz.

Yardımcı Teorem 6.1.1. den, (6.1.21) eşitsizliği gereğince

$$\mu(\Omega_x)^{\frac{q(x)}{(p_x^-)'}} \leq 2^{-n\delta(p^- -1)} \mu(x)^{\frac{q(x)}{p'(x)}} \left(1 + e^{\frac{3C_1}{p^-}}\right)^{\frac{q^+}{p^-}} \,, \; x > 0 \qquad (6.1.22)$$

elde ederiz.

Şimdi de D.Cruz-Uribe, A.Fiorenza ve C.J.Neugebauer tarafından verilen Yardımcı Teorem 3.3.6. ya benzer olarak $\int\limits_{\Omega_x} f(t)^{p_x^-}\, d\mu(t)$ ifadesini hesaplayalım. Bunun için $G(t)=\dfrac{1}{1+\mu^2(t)}$, $t>0$ tanımlayalım. Bu durumda

$$\int\limits_{\Omega_x} f(t)^{p_x^-}\, d\mu(t) = \int\limits_{\Omega_x} \left(\frac{f(t)}{G(t)}\right)^{p_x^-} G(t)^{p_x^-}\, d\mu(t)$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_x} f(t)^{p(t)} G(t)^{p_x^- - p(t)}\, d\mu(t) + \int\limits_{\Omega_x} G(t)^{p_x^-}\, d\mu(t) \tag{6.1.23}$$

yazılabilir. Yardımcı Teorem 6.1.2. den dolayı (6.1.23) ifadesinden

$$\int\limits_{\Omega_x} f(t)^{p_x^-}\, d\mu(t) \leq C_4 \int\limits_{\Omega_x} f(t)^{p(t)}\, d\mu(t) + \int\limits_{\Omega_x} \frac{d\mu(t)}{\left(1+\mu^2(t)\right)^{p_x^-}}$$

$$\leq C_4 \int\limits_{\Omega_x} \omega(t) \left| u'(t) \right|^{p(t)} dt + \int\limits_{\Omega_x} \frac{d\mu(t)}{1+\mu^2(t)} \tag{6.1.24}$$

ve (6.1.24) den de kolayca

$$\int\limits_{\Omega_x} f(t)^{p_x^-}\, d\mu(t) \leq C_4 + \frac{\pi}{2} = C_6 \tag{6.1.25}$$

yazılabilir. (6.1.25) eşitsizliği ışığında ve $\dfrac{q(x)}{p_x^-} \geq 1$ oluşundan,

$$\left(\int\limits_{\Omega_x} f(t)^{p_x^-}\, d\mu(t) \right)^{\frac{q(x)}{p_x^-}} \leq C_5^{\frac{q^+}{p^-}-1} \int\limits_{\Omega_x} f(t)^{p_x^-}\, d\mu(t)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Diğer taraftan (6.1.24) eşitsizliğinden,

$$\left(\int\limits_{\Omega_x} f(t)^{p_x^-}\, d\mu(t) \right)^{\frac{q(x)}{p_x^-}} \leq C_6^{\frac{q^+}{p^-}-1} \left(C_4 \int\limits_{\Omega_x} \omega(t) \left| u'(t) \right|^{p(t)} dt + \int\limits_{\Omega_x} \frac{d\mu(t)}{1+\mu^2(t)} \right) \tag{6.1.26}$$

çıkar. (6.1.25) ve (6.1.26) eşitsizliklerini dikkate alarak, (6.1.20) ifadesini

$$C_7 = C_6^{\frac{q^+}{p^-}-1} \left(1 + e^{\frac{3C_1}{p^-}} \right)^{\frac{q^+}{p^-}}$$

olmak üzere,

$$\int_0^\infty \left(\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} \int_{\Omega_x} |u'(t)| dt \right)^{q(x)} dx$$

$$\leq -C_7 2^{-n\delta(p^- -1)} \int_0^\infty \tilde{\vartheta}(x) \mu(x)^{\frac{q(x)}{p'(x)}} \left(C_4 \int_{\Omega_x} \omega(t) |u'(t)|^{p(t)} dt + \int_{\Omega_x} \frac{d\mu(t)}{1+\mu^2(t)} \right) \frac{d\tilde{\vartheta}(x)}{\tilde{\vartheta}(x)} \qquad (6.1.27)$$

şeklinde yazabiliriz. (6.1.12) koşulundan dolayı (6.1.27) eşitsizliğinden $C_8 = C_4 C_5^{q^+} C_7$ olmak üzere

$$\int_0^\infty \left(\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} \int_{\Omega_x} |u'(t)| dt \right)^{q(x)} dx$$

$$\leq -C_8 2^{-n\delta(p^- -1)} \int_0^\infty \left(\int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} \omega(t) |u'(t)|^{p(t)} dt + \int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} \frac{d\mu(t)}{1+\mu^2(t)} \right) \frac{d\tilde{\vartheta}(x)}{\tilde{\vartheta}(x)} \qquad (6.1.28)$$

elde ederiz. Fubini Teoreminin yardımıyla (6.1.28) eşitsizliğini

$$\int_0^\infty \left(\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} \int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} |u'(t)| dt \right)^{q(x)} dx$$

$$\leq -C_6 2^{-n\delta(p^- -1)} \left(\int_0^\infty \omega(t) |u'(t)|^{p(t)} \left(\int_{2^n t}^{2^{n+1}t} \frac{d\tilde{\vartheta}(x)}{\tilde{\vartheta}(x)} \right) dt + \int_0^\infty \frac{d\mu(t)}{1+\mu^2(t)} \left(\int_{2^n t}^{2^{n+1}t} \frac{d\tilde{\vartheta}(x)}{\tilde{\vartheta}(x)} \right) \right)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece (6.1.13) koşuludan

$$-\int_{2^n t}^{2^{n+1}t} \frac{d\tilde{\vartheta}(x)}{\tilde{\vartheta}(x)} = \log \frac{\tilde{\vartheta}(2^n t)}{\tilde{\vartheta}(2^{n+1} t)} \leq \eta \log 2 \ , t > 0$$

ve $C_9 = C_8 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \eta \log 2$ olmak üzere

$$\int_0^\infty \left(\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} \int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} |u'(t)| dt \right)^{q(x)} dx \leq C_8 \eta 2^{-n\delta(p^- -1)} \log 2 \left(\int_0^\infty \omega(t) |u'(t)|^{p(t)} dt + \int_0^\infty \frac{d\mu(t)}{1+\mu^2(t)} \right)$$

$$= C_8 2^{-n\delta(p^- -1)} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \eta \log 2$$

$$= C_9 2^{-n\delta(p^- -1)} \qquad (6.1.29)$$

buluruz.. Yine Teorem 3.1.4. den dolayı, (6.1.29) eşitsizliği ile,

$$\left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} \int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} |u'(t)| dt \right\|_{q(x)} \leq C_9^{\frac{1}{q^-}} 2^{-\frac{n\delta(p^- -1)}{q^-}} \qquad (6.1.30)$$

yazabiliriz.

Dolayısıyla (6.1.30) yardımıyla (6.1.18) eşitsizliğinden

$$\left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq \sum_{n=0}^{m} C_9^{\frac{1}{q^-}} 2^{-\frac{n\delta(p-1)}{q^-}} + \left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u\left(2^{-m-1}x\right) \right\|_{q(x)} \tag{6.1.31}$$

elde ederiz.

Diğer taraftan Lebesgue Teoreminden dolayı $m \to \infty$ için

$$\left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) \right\|_{q(x)} \to 0 \tag{6.1.32}$$

ve integrand fonksiyonu $\vartheta(x)\ u(x)^{q(x)}$ fonksiyonu ile majorantlandığından

$$\int_0^\infty \left(\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u\left(2^{-m-1}x\right) \right)^{p(x)} dx \to 0 \tag{6.1.33}$$

çıkar. Böylece $m \to \infty$ için (6.1.31) ifadesinden

$$\left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq \sum_{n=0}^{m} C_9^{\frac{1}{q^-}} 2^{-\frac{n\delta(p-1)}{q^-}} = C_{10} < \infty \tag{6.1.34}$$

elde edilir ve buradan da

$$\left\| \vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} u(x) \right\|_{q(x)} \leq C_{10} \tag{6.1.35}$$

sonucu bulunur.

Diğer taraftan (6.1.16) eşitsizliğini göstermek için, (6.1.35) ifadesine

$$\frac{u(x)}{\left\| \omega(x)^{\frac{1}{p(x)}} u'(x) \right\|_{p(x)}}$$

fonksiyonunu uyguladığımızda Teorem 6.1.3 ün ispatı tamamlanır.

$p^- > 1$ kabulü önemlidir. (6.1.34) serisinin yakınsak olması için $p^- > 1$ kabulü gereklidir.

Teorem 6.1.3. ve değişken üstlü Lebesgue uzayının dual uzayı yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.1.4. p ve q fonksiyonları $1 < p^- \leq p(x) \leq q(x) \leq q^+ < \infty$ olacak şekilde $[0,\infty)$ aralığında ölçülebilir fonksiyonlar olsun. En az bir $q'(0)$, $q'_\infty \in R$ için üst ve ağırlık fonksiyonları, (1′) $0<\bar{\vartheta}(t)\leq\dfrac{1}{2}$ için $\left|q'(t)-q'(0)\right|\leq\dfrac{C_1}{\log\dfrac{1}{\bar{\vartheta}(t)}}$

(2′) Her $t>0$ için $\left|q'(t)-q'_\infty\right|\leq\dfrac{C_2}{\log(e+\bar{\vartheta}(t))}$

(3′) $\bar{\vartheta}(x)=\int_0^x\vartheta(s)ds$, $\bar{\mu}(x)=\int_x^\infty\omega(s)^{1-p'(s)}ds$ olmak üzere

$$\sup_{x>0}\bar{\vartheta}(x)^{\frac{1}{q(x)}}\,\bar{\mu}(x)^{\frac{1}{p'(x)}}=C_3<\infty$$

(4′) $\bar{\mu}\in D:\ \exists\eta>0$, $\bar{\mu}\left(\dfrac{x}{2}\right)\leq 2^{\eta}\bar{\mu}(x)$, $x>0$

(5′) $\bar{\vartheta}(x)>\dfrac{1}{2}$ için $\bar{\vartheta}\in D:\ \exists\theta>0,\ \bar{\vartheta}\left(\dfrac{x}{2}\right)\geq 2^{-\theta}\bar{\vartheta}(x)$

(6′) $\bar{\vartheta}\in RD:\ \exists\delta>0,\ \bar{\vartheta}\left(\dfrac{x}{2}\right)\leq 2^{-\delta}\bar{\vartheta}(x),\ x>0$

koşullarını sağlasın.

Bu durumda $[0,\infty)$ aralığında mutlak sürekli ve $\lim_{x\to\infty}u(x)=0$ özelliğine sahip u fonksiyonu için

$$\left\|\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}}\,u(x)\right\|_{q(x)}\leq C\left\|\omega(x)^{\frac{1}{p(x)}}\,u'(x)\right\|_{p(x)} \tag{6.1.36}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde C_1, C_2, C_3, η, p^- ve δ sayılarına bağlı bir $C>0$ sayısı vardır.

İspat : u, $z:[0,\infty)\to R$ fonksiyonları $u(0)=0$ ve $\lim_{x\to\infty}z(x)=0$ olacak şekilde herhangi mutlak sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\left|\int_0^\infty u'(t)z(t)dt\right|=\left|\int_0^\infty u(t)z'(t)dt\right| \tag{6.1.37}$$

yazabiliriz. C_0 sayısı u,z,ϑ ve ω dan bağımsız olmak üzere, (6.1.37) ifadesine Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_0^\infty u'(t)z(t)dt\right|\leq C_0\left\|\vartheta(t)^{\frac{1}{q(t)}}u(t)\right\|_{q(t)}\left\|\vartheta(t)^{\frac{1-q'(t)}{q'(t)}}\left|z'(t)\right|\right\|_{q'(t)}$$

elde ederiz. Diğer taraftan $p=p_1$, $q=q_1$ olmak üzere $\vartheta=\vartheta_1(x)$, $\omega=\omega_1(x)$ ve u Teorem 6.1.3. ün koşullarını sağlasın.

Bu durumda

$$\left|\int_0^\infty u'(t)z(t)dt\right| \le C_0C_1 \left\|\omega_1(t)^{\frac{1}{p(t)}}u'(t)\right\|_{p_1(t)} \left\|\vartheta_1(t)^{\frac{1-q_1'(t)}{q_1'(t)}} z'(t)\right\|_{q_1'(t)}$$

ve $L^{p(x)}$ uzayının dual uzayının varlığından

$$\left\|\omega_1(t)^{\frac{1-p_1'(t)}{p_1'(t)}} z(t)\right\|_{p_1'(t)} \le C \left\|\vartheta_1(t)^{\frac{1-q_1'(t)}{q_1'(t)}} z'(t)\right\|_{q_1'(t)}$$

yazabiliriz. $q = p_1'(x)$, $p = q_1'(x)$ olmak üzere $\vartheta(x) = \omega_1(x)^{1-p_1'(x)}$ ve $\omega(x) = \vartheta_1(x)^{1-q_1'(x)}$ ile tanımlı ϑ ve ω fonksiyonlarının Teorem 6.1.3. ün koşullarını sağladığını görmek kolaydır. Böylece

$$\left\|\vartheta(x)^{\frac{1}{q(x)}} z(x)\right\|_{q(x)} \le C \left\|\omega(x)^{\frac{1}{p(x)}} z'(x)\right\|_{p(x)}$$

elde ederiz. Bu Teorem 6.1.4. ün ispatını tamamlar.

Açıklama 6.1.5

$q^+ < \infty$ ve $p^- > 1$ olduğundan, en az bir $q(0)$, $q_\infty \in R$ için

(1′) $0 < \overline{\vartheta}(t) \le \frac{1}{2}$ için $|q(t) - q(0)| \le \dfrac{C_1}{\log \frac{1}{\overline{\vartheta}(t)}}$

(2′) $t > 0$ için $|q(t) - q_\infty| \le \dfrac{C_2}{\log(e + \overline{\vartheta}(t))}$

koşulları eşdeğerdir.

TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Çalışmamızın esasını oluşturan son üç bölümünde, değişken üstlü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında gömme teoremlerinin elde edilmesini sağlayan Sobolev ve ağırlıklı Hardy tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ölçülebilir fonksiyonlar için süreklilik koşulu kullanılmadan elde edilen Sobolev tipli eşitsizlik, bölgenin sınırsız olması durumunda da seri açılımı yardımıyla elde edilebilir. Ayrıca dördüncü bölümde ele alınan kesirli maksimal fonksiyonun

$$M_{\alpha(x)}f(x) = \sup_{r>0} \frac{r^{\alpha(x)}}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

şeklinde olması durumu ele alınarak, bu fonksiyon için Sobolev tipli eşitsizlik incelenebilir.

Beşinci ve altıncı bölümde ele alınan ağırlıklı Hardy tipli eşitsizliklerin elde edilmesi için kullanılan koşulların gerekli koşul olup olmadığı üzerinde çalışılabilir.

Bunun yanında

$$1 \le q(x) \le p(x) \le p^{+} < \infty$$

durumu göz önüne alınarak, ağırlıklı Hardy tipli eşitsizlikler üzerinde daha ileri çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] E. Acerbi and G. Mingione: Functionals with $p(x)$ growth and regularity, Atti Accad. Naz. Lincei Cl.Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 11 (2000), no. 3, 169–174 (2001).

[2] E. Acerbi and G. Mingione: Regularity results for a class of quasiconvex functionals with nonstandard growth. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 30 (2001), no. 2, 311–339.

[3] E. Acerbi and G. Mingione: Regularity results for a class of functionals with non-standard growth, Arch. Ration. Mech. Anal. 156 (2001), 121–140.

[4] E. Acerbi and G. Mingione: Regularity results for stationary electro-rheological fluids, Arch. Ration.Mech. Anal. 164 (2002), 213–259.

[5] D.R.Adams and L.I.Hedberg: Function Spaces and Potential Theory, Springer-Verlag, Berlin 1996.

[6] R.A.Adams: Sobolev Space, Academic Pres, New York,1975.

[7] R.A.Adams and J.J.Fournier: Sobolev Space, Elsevier Science, 2003.

[8] V.Burenkov: Sobolev Spaces on Domains, Teubner-Texte zur Mathematik 137, Stuttgart,1998.

[9] C. Capone, D. Cruz-Uribe, and A. Fiorenza: The fractional maximal operator on variable L^p spaces, preprint (2004).

[10] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza: Approximate identities in variable L^p spaces, preprint (2004).

[11] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer: The maximal function on variable L^p spaces, Ann.Acad. Sci. Fenn. Math. 28 (2003), 223–238; 29 (2004), 247–249.

[12] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. M. Martell and C. Pérez: The boundedness of classical operators in variable L^p spaces, preprint (2004).

[13] B. Çekiç, R. Mashiyev and S. Oğraş: Regularity of the Fractional Maximal operator in $L^{p(x)}(R^n)$, International Workshop on Analysis and Applications, 2004 Mersin-Turkey.

[14] L. Diening: Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids, Ph.D.thesis, University of Freiburg, Germany, 2002.

[15] L. Diening: Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$, Math. Inequal. Appl. 7 (2004), no. 2, 245–254.

[16] L. Diening: Riesz potential and Sobolev embeddings of generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. 263 (2004), no. 1, 31–43.

[17] L. Diening: Maximal function on Orlicz–Musielak spaces and generalized Lebesgue spaces, preprint (2003).

[18] L. Diening and M. Růžička: Calderón-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics, J. Reine Angew. Math. 563 (2003), 197–220.

[19] L. Diening, A. Nekvinda and P. Hästö: Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, FSDONA04 Proceedings (Drabek and Rakosnik (eds.); Milovy, Czech Republic, 2004) 38-58.

[20] D. E. Edmunds, V. Kokilashvili and A. Meskhi: A trace inequality for generalized potentials in Lebesgue spaces with variable exponents, J. Funct. Spaces Appl.(2004), no. 1, 55–69.

[21] D. E. Edmunds, J. Lang and A. Nekvinda: On $L^{p(x)}$ norms, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 455 (1999), no. 1981, 219–225.

[22] D. E. Edmunds and A. Meskhi: Potential-type operators in $L^{p(x)}$ spaces, Z. Anal. Anwendungen 21(2002), no. 3, 681–690.

[23] D. E. Edmunds and A. Nekvinda: Averaging operators on $\ell^{\{p_n\}}$ and $L^{p(x)}$, Math. Inequal. Appl. 5 (2002), no. 2, 235–246.

[24] D. E. Edmunds and J. Rákosník: Density of smooth functions in $W^{k,p(x)}$, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 437 (1992), 229–236.

[25] D. E. Edmunds and J. Rákosník: Sobolev embedding with variable exponent, Studia Math. 143 (2000), 267–293.

[26] D. E. Edmunds and J. Rákosník: Sobolev embedding with variable exponent, II, Math. Nachr. 246-247 (2002), 53–67.

[27] X.-L. Fan: The regularity of Lagrangians $f(x,\xi)=|\xi|^{\alpha(x)}$ with Hölder exponents $\alpha(x)$, Acta Math. Sinica (N.S.) 12 (1996), no. 3, 254–261.

[28] X.-L. Fan: Regularity of nonstandard Lagrangians $f(x,\xi)$, Nonlinear Anal. 27 (1996), no. 6, 669–678.

[29] X.-L. Fan: Regularity of integrands $f(x,\xi)=|\xi|^{\alpha(x)}$ with piecewise constant exponents $\alpha(x)$, (Chinese) J. Gansu Sciences 8 (1996), no. 1, 1–3.

[30] X.-L. Fan: Regularity of Lagrangians with $\alpha(x)$-growth conditions, (Chinese) J. Lanzhou Univ. Nat. Sci. 33 (1997), no. 1, 1–5.

[31] X.-L. Fan, J. Shen and D. Zhao: Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), 749–760.

[32] X.-L. Fan and D. Zhao: On the spaces spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 424–446.

[33] X.-L. Fan, Y. Zhao and D. Zhao: Compact imbedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 255 (2001), 333–348.

[34] A. Fiorenza: A mean continuity type result for certain Sobolev spaces with variable exponent, Commun.Contemp. Math. 4 (2002), no. 3, 587–605.

[35] N.Fusco and C.Sbordone : Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals, Comm. Partial Differential Equations 18 (1993) 153-167.

[36] M.Giaquinta: Growth conditions and regularity, a counterexample, Manuscripta Math. 59 (1987), 245-248.

[37] G.H.Hardy, Notes on a theorem Hilbert, Math. Z. 6 (1920), 314-317.

[38] G.H.Hardy, Notes on some points in the integral calculus (60), Messenger of Math. 54 (1925), 150-156.

[39] G.H.Hardy, J.E.Littlewood and G.Pólya, Inequalities, 2nd ed., Cambridge University Press, 1952 (1934).

[40] P. Harjulehto and P. Hästö: An overview of variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, Future Trends in Geometric Function Theory (D. Herron (ed.), RNC Workshop, Jyv¨askyl¨a, 2003), 85–93.

[41] P. Harjulehto, P. Hästö and M. Koskenoja: The Dirichlet energy integral on intervals in variable exponent Sobolev spaces, Z. Anal. Anwend. 22 (2003) no. 4, 911–923.

[42] P. Harjulehto, P. Hästö and M. Koskenoja: Hardy's inequality in variable exponent Sobolev spaces, Georgian Math. J. 12 (2005), no. 3, 431-442.

[43] P. Hästö: The maximal operator in Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1, preprint (2004).

[44] P. Hästö: On the density of smooth functions in variable exponent Sobolev space, preprint (2004).

[45] H. Hudzik: On generalized Orlicz-Sobolev space, Funct. Approx. Comment. Math. 4 (1976), 37–51.

[46] H. Hudzik: On problem of density of $C_0^\infty(\Omega)$ in generalized Orlicz–Sobolev space $W_M^k(\Omega)$ for every open set $\Omega \subset R^n$, Comment. Math. Parce Mat. 20 (1977), 65–78.

[47] H. Hudzik: On continuity of the imbedding operation from $W_{M_1}^k(\Omega)$ into $W_{M_2}^k(\Omega)$, Funct. Approx. Comment. Math. 6 (1978), 111–118.

[48] H. Hudzik: Density of $C_0^\infty(R^n)$ in generalized Orlicz–Sobolev space $W_M^k(R^n)$, Funct. Approx. Comment. Math. 7 (1979), 15–21.

[49] H. Hudzik: The problem of separability, duality, reflexivity and comparison for generalized Orlicz–Sobolev space $W_M^k(\Omega)$, Comment. Math. Parce Mat. 21 (1979), 315–324.

[50] J.Kinnunen and E.Saksman, Regularity of the fractional maximal function, Bull. London Math. Soc. 35 (2003), 529-535.

[51] V. Kokilashvili and S. Samko: Singular integrals and potentials in some Banach function spaces with variable exponent, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 129 (2002), 150–155.

[52] V. Kokilashvili and S. Samko: Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(x)}$ spaces, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 129 (2002), 145–149.

[53] V. Kokilashvili and S. Samko: Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent, Georgian Math. J. 10 (2003), no. 1, 145–156.

[54] V. Kokilashvili and S. Samko: Singular integrals and potentials in some Banach function spaces with variable exponent, J. Funct. Spaces Appl. 1 (2003), no. 1, 45–59.

[55] V. Kokilashvili and S. Samko: On Sobolev Theorem for Riesz-type potentials in Lebesgue spaces with variable exponents, Z. Anal. Anwend. 22 (2003) no. 4, 899–910.

[56] V. Kokilashvili and S. Samko: Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(x)}$ spaces, Rev. Mat.Iberoamericana 20(2) (2004), 493–515.

[57] O. Kováčik: Some properties of the spaces $L^{p(t)}(\Omega)$, (Russian) Functional and numerical methods in mathematical physics, 98–100, 267, "Naukova Dumka", Kiev, 1988.

[58] O. Kováčik and J. Rákosník: On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. 41(116) (1991),592–618.

[59] A.Kufner, Weighted Sobolev Spaces,Wiley, New York, 1985.

[60] P. Marcellini: Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non-standard growth conditions, Arch. Rational Mech. Anal. 105 (1989) 267-284.

[61] P. Marcellini: Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p, q-growth conditions, J.Differential Equations 50 (1991), no. 1, 1–30.

[62] R. Mashiyev, B. Çekiç and S. Oğraş : On the Sobolev-type inequality for Lebesgue spaces with a Variable Exponent, International Workshop on Analysis and Applications,2004 Mersin-Turkey

[63] V.G. Maz' ya : Sobolev spaces, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

[64] Y. Mizuta, T. Shimomura; Sobolev's inequality for Riesz potentials with variable exponent satisfying a log-Hölder condition at infinity, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005) 268–288.

[65] J. Musielak: Orlicz Spaces and Modular Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[66] H. Nakano: Modulared Semi-ordered Linear Spaces, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1950.

[67] H. Nakano: Topology and Topological Linear Spaces, Maruzen Co., Ltd., Tokyo,1951.

[68] A. Nekvinda: Equivalence of $\ell^{\{p_n\}}$ norms and shift operators, Math. Inequal. Appl. 5 (2002), no. 4,711–723.

[69] A. Nekvinda: Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(R^n)$, Math. Inequal. Appl. 7 (2004), no. 2, 255–266.

[70] A. Nekvinda: A note on maximal operator on ℓ^{p_n} and $L^{p(x)}(R^n)$, preprint (2004).

[71] A. Nekvinda: Imbeddings between weighted ℓ^{p_n} spaces, preprint (2004).

[72] W. Orlicz: Über konjugierte Exponentenfolgen, Studia Math. 3 (1931), 200–212.

[73] L. Pick and M. Růžička: An example of a space $L^{p(x)}$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded, Expo. Math. 19 (2001), 369–371.

[74] M. M. Růžička: Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[75] S. Samko: Convolution type operators in $L^{p(x)}$, Integr. Transform. Spec. Funct. 7 (1998), no. 1–2, 123–144.

[76] S. Samko: Convolution and potential type operators in $L^{p(x)}(R^n)$, Integr. Transform. Spec. Funct. 7(1998), no. 3–4, 261–284.

[77] S. Samko: Denseness of $C_0^\infty(R^n)$ in the generalized Sobolev spaces $W^{m,p(x)}(R^n)$, (Russian) Dokl. Akad. Nauk 369 (1999), 451-454; translated in Dokl. Math. 60 (1999), 382-385.

[78] S. Samko: Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces, Fract. Calc. Appl. Anal. 6 (2003), no. 4,355-362.

[79] S. Samko: Hardy–Littlewood–Stein–Weiss inequality in the Lebesgue spaces with variable exponent, Fract. Calc. Appl. Anal. 6 (2003), no. 4, 421–440.

[80] I. I. Sharapudinov: On the topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$, Math. Notes 26 (1979), no. 3–4, 796–806.[Translation of Mat. Zametki 26 (1978), no. 4, 613–632.]

[81] I. I. Sharapudinov: Approximation of functions in the metric of the space $L^{p(t)}([a,b])$ and quadrature formulas, (Russian) Constructive function theory '81 (Varna, 1981), 189–193, Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1983.

[82] I. I. Sharapudinov: The basis property of the Haar system in the space $L^{p(t)}([0,1])$ and the principle of localization in the mean, (Russian) Mat. Sb. (N.S.)130(172) (1986), no. 2, 275–283, 286.

[83] I. V. Tsenov: Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s,(Russian) Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ. 7 (1961), 25–37.

[83] D. Zhao, W. Quang and X.-L. Fan: On the generalized Orlicz spaces $L^{p(x)}(\Omega)$, (Chinese) J. Gansu Sciences 9 (1997), no. 2, 1–7.

[84] V. V. Zhikov: Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, Math. USSRIzv.29 (1987), no. 1, 33–66. [Translation of Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 50 (1986), no. 4, 675–710, 877.]

[85] V. V. Zhikov: On some variational problems, Russian J. Math. Phys. 5 (1997), no.1, 105–116 (1998).

[86] W.P.Ziemer,Weakly Differentable Functions, Grad. Texts in Math. 120, Springer,New York, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	: Bilal ÇEKİÇ
Doğum Tarihi	: 18.05.1975
Doğum Yeri	: Diyarbakır
Ünvanı	: Arş.Gör.
Anabilim Dalı	: Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Eğitimi

Orta Öğretim	: Diyarbakır Ziya Gökalp Lisesi
Lisans	: Dicle Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,1997
Yüksek Lisans	: Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,2001

Çalıştığı Kurumlar	: Milli Eğitim Bakanlığı Ergani Anadolu Öğr. Lisesi,1998-1999 Dicle Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2000-

Adres

Dicle Üniversitesi,
Fen- Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü,
21280-Diyarbakır
Tlf. No: 0 412 248 85 50 / 3149