170575

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

DOĞRUSAL OLMAYAN PARABOLİK VEYA HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE GLOBAL ÇÖZÜMLERİN YOKLUĞU (BLOW UP)

Necat POLAT

DOKTORA TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR

HAZİRAN – 2005

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Necat POLAT tarafından yapılan bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Prof.Dr.	Etibar PENAHOV
Üye (Birinci Danışman) :	Prof.Dr.	H. İlhan TUTALAR
Üye :	Prof.Dr.	Ali YILMAZ
Üye (İkinci Danışman) :	Doç.Dr.	Doğan KAYA
Üye :	Doç.Dr.	Abdulkadir ERTAŞ

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

22/02/2005

Doç. Dr. Necmettin Pirinççioğlu

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ V.

TEŞEKKÜR

Bu teze başlamamda, tezin devamında, bilgileri ve önerileri ile rehberlik eden, yardımlarını ve teşviklerini esirgemeyen hocalarım Sayın Prof. Dr. Hasan İlhan TUTALAR' a ve Doç. Dr. Doğan KAYA' ya teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Bu çalışmanın temel amacı doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik tipten kısmi diferansiyel denklemler için çözümlerin global yokluğu (blow up) problemini incelemektir. Bu amaçla sınırdaki değerleri sıfır olan doğrusal olmayan hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler üzerinde önemle durduk. Daha önce bu anlamdaki blow up çözümleri yapılmamış doğrusal damping ve doğrusal olmayan damping terimli dört problem ele aldık ve bu problemlerin çözümlerinin sonlu zamanda global olarak yok olduğu (blow up) nu ispatladık.

ÖZET

Bu tezde, sınırdaki değerleri sıfır olan bazı parabolik ve hiperbolik tipten diferansiyel denklemler için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin global yokluğu ele alınmıştır.

İlk bölümde, blow up ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle kısaca ele alınmıştır.

Tezin sonraki bölümleri için gerekli olan temel bilgiler ikinci bölümde verilmiştir.

Üçüncü bölümde, diferansiyel denklemlerde genellikle blow up olarak bilinen singularitenin oluşumu konusu ile ilgili bilgiler verilmiş ve blow up teorisi etrafında odaklanan klasik sorular ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, sonlu zamanda global olmayan (blow up) çözüm ve çözümlerin büyümesi metotları üzerinde durulmuştur.

Beşinci bölümde, damping terimli doğrusal olmayan bir dalga denkleminin bir sınıfı için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin global yokluğu açık eşitsizlik metotları kullanılarak ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde, damping terimli Boussinesq denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin global yokluğu açık eşitsizlik metotları kullanılarak ispatlanmıştır.

Yedinci bölümde, damping terimli geliştirilmiş Boussinesq denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin global yokluğu açık eşitsizlik metotları kullanılarak ispatlanmıştır.

Sekizinci bölümde, doğrusal olmayan damping terimli doğrusal olmayan bir dalga denkleminin bir sınıfı için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin global yokluğu açık eşitsizlik metotları kullanılarak ispatlanmıştır.

SUMMARY

In this thesis, the global nonexistence (blow up) of solutions to the initial boundary problems for some parabolic and hyperbolic type differential equations of which their boundary values equal to zero is investigated.

In the first chapter, so far the studies done with the historical developments are shortly given about the blow up.

Some notations and fundamental definitions which are necessary for the remaining chapters of the thesis are presented in the second chapter.

In the third chapter, the subject of singularity formation in differential equations usually known as blow up is presented and the classical questions addressed by the blow up theory is discussed.

In the fourth chapter, methods of establishing global nonexistence (blow up) and growth of solutions in finite time are presented.

In the fifth chapter, we proved the blow up of solutions to the initial boundary value problem for a class of nonlinear wave equations with a damping term by using explicit inequality methods.

In the sixth chapter, we proved the blow up of solutions to the initial boundary value problem for Boussinesq equation with damping term by using explicit inequality methods.

In the seventh chapter, we proved the blow up of solutions to the initial boundary value problem for the improved Boussinesq equation with damping term by using explicit inequality methods.

In the eighth chapter, we proved the blow up of solutions to the initial boundary value problem for a class of nonlinear wave equation with nonlinear damping term by using explicit inequality methods.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde, doğrusal olmayan parabolik ve hiperbolik tipten diferansiyel denklemler için global çözümlerin yokluğu (blow up) ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalara kısaca değineceğiz.

Blow-up konusu 1940 larda ve 1950 lerde Semenov'un "*chain reaction theory*", "*adiabatic explosion*" ve "*combustion theory*" bağlamında ortaya konmuştur [80].

Blow up konusunun **matematiksel teorisi** 1960 larda Kaplan [32], Fujita [17, 18], Friedman [16] ve diğer bazı yazarlar tarafından blow up için genel bir yaklaşım verildikten sonra aktif olarak araştırmacılar tarafından incelenmiştir.

Sınırlı bölgelerde reaksiyon – difüzyon için blow up olayı ilk olarak Kaplan [32] tarafından çalışılmıştır. Fujita [17, 18] $u_t = \Delta u + u^p$ denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlı bölgede negatif olmayan başlangıç verisi ile global olamayacağını gösterdi.

Kaplan ve Fujita' nın bu çalışmaları daha değişik durumlara genelleştirilmiştir.

$u_t - \Delta\phi(u) = f(u)$ denklemi üzerinde ϕ ve f nin farklı seçimlerine göre yoğun bir şekilde çalışmalar yapılmıştır. Bu konunun detayları için Samarskii ve arkadaşları [70] nın kitablarına bakılabilir.

Doğrusal olmayan $u_{tt} = \Delta u + |u|^p$, $p > 1$ tipindeki dalga denklemlerinin çözümlerinin blow up olması ile ilgili araştırmaların matematiksel tarihi 1957 lere dayanmaktadır [34].

Levine [38] konkavlık metodu ismiyle anılan bir teknik geliştirip $Pu_{tt} + Au = F(u)$ soyut denklemini inceleyerek çözümlerin global olmaması için gerekli koşulları vermiştir. Bu denklemde P ve A doğrusal, simetrik birer operatör olup P nin pozitif, A nın negatif olmayan bir operatör ve F nin belirli doğrusal olmayan koşulları sağlayan bir potansiyel operatör olması koşulları geçerlidir.

Daha sonra Kalantarov ve Ladyzhenskaya [30] konkavlık metodunu genelleştirerek genelleştirilmiş konkavlık metodu olarak adlandırılan bir lemma vermişler ve çalışmalarında bu metodu sık olarak kullanmışlardır.

Georgiev ve Todorova [22] $u_{tt} - \Delta u + au_t |u_t|^{m-1} = bu|u|^{p-1}$ denklemi için ilk defa doğrusal olmayan damping terimle doğrusal olmayan kaynak terim arasındaki etkileşimleri inceleyerek çözümlerin global yokluğunu gösterdiler.

Kalantarov [31] $Pu_{tt} + Qu_t + Au = B(u,u_t) + F(t,u)$ biçimindeki doğrusal olmayan denklemlerin bir sınıfı için çözümlerin global yokluğunu incelemiştir.

Levine ve arkadaşları [48] $Pu_{tt} + Q(t)u_t + A(t,u) = F(t,u)$ soyut evolution denklemi için başlangıç değer probleminin süreksizliğini ele alarak $E(u(0)) < 0$ olacak şekilde bir $u(t)$ çözümünün var olamayacağını gösterdiler.

Levine ve Serrin [47] $P(u_t)_t + Q(t,u_t) + A(u) = F(u)$ soyut denklemi için birkaç global yokluk teoremi verdiler.

Ono [60] $u_{tt} + M\left(\left\|A^{1/2}u\right\|^2\right)Au + |u_t|^\beta u_t = f(u)$ doğrusal olmayan damping terimli Kirchhoff denklemi için blow up sonucunu elde etti.

Pucci ve Serrin [67] $Pu_{tt} + Q(t)u_t + A(t,u) = F(t,u)$ denkleminin başlangıç enerjisi pozitif olduğunda çözümlerin global yokluğunu incelediler.

Godefroy [24] $u_{tt} = f(u)_{xx} + u_{xxtt}$ Boussinesq denkleminin başlangıç sınır değer probleminin global yokluğunu gösterdi.

Vitillaro [78] $P(u_t)_t + A(u) + Q(t,u_t) = F(u)$ soyut denkleminin pozitif enerjiyle global yokluğunu inceledi.

Erdem ve Kalantarov [14] $u_{tt}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(d_0+|\nabla u|^{m-2}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+h(u,\nabla u)=f(u)$ ve $u_t-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(d_0+|\nabla u|^{m-2}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+h(u,\nabla u)=f(u)$ hiperbolik ve parabolik tipten denklemlerin global yokluğunu genelleştirilmiş konkavlık metodu ile verdiler.

Rammaha ve Strei [68] Georgiev ve Todorova [22] nın çalıştığı denklemde $u_t|u_t|^{m-1}$ damping terimi yerine $|u|^{m-1}u_t$ damping terimini alarak bu başlangıç sınır değer problemini çalıştılar. Georgiev ve Todorova [22] nın çözüm yöntemlerine benzer bir teknik uygulayarak çözümün negatif başlangıç enerjisiyle sonlu zamanda blow up olduğunu ispatladılar.

Zhijian [83] $u_{tt}+\Delta^2 u+\lambda u_t=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i\left(u_{x_i}\right)$ doğrusal olmayan başlangıç sınır değer problemini çalıştı ve negatif başlangıç enerjisiyle bu problemin çözümünün $\lambda\geq 0$ ve bazı ek koşullar altında sonlu zamanda blow up olduğunu gösterdi.

Polat ve arkadaşları [65] $u_{tt}=div\sigma(\nabla u)+\Delta u_t-\Delta^2 u$ damping terimli doğrusal olmayan bir dalga denkleminin bir sınıfı için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin negatif başlangıç enerjisiyle global yokluğunu gerçekleştirdiler.

Polat ve arkadaşları [66] $u_{tt}-bu_{xx}+\delta u_{xxxx}-ru_{xxt}=(f(u))_{xx}$ damping terimli Boussinesq denkleminin başlangıç sınır değer problemi için çözümlerinin pozitif olmayan başlangıç enerjisiyle global yokluğunu gerçekleştirdiler.

2. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar ve eşitsizlikler verilecektir [1, 11, 56, 86].

2.1. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 2.1.1. Bir X vektör uzayından, negatif olmayan sayılara tanımlanan ve her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in R$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna *norm* denir;

i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Bu takdirde $(X, \|.\|)$ çiftine normlu uzay ve $\|x\|$ sayısına da x noktasının *normu* denir.

Verilen bir norm aracılığıyla

$$u(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanan u bir uzaklık fonksiyonudur ve böylece her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzay olur.

Tanım 2.1.2. $\{x_n\}$, $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.3. $\{x_n\}$, $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisine *yakınsaktır* denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *tam uzay* denir. $(X,\|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.5. X vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $A>0$, $B>0$ sabitleri için

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına *eşdeğer normlar* denir.

Tanım 2.1.6. K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(.,.): X \times X \to K$$

bir fonksiyonun her $x,y \in X$ ve $a,b \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

i) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (burada $\bar{c}$, $c \in \mathbb{C}$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),

ii) $(ax+by,z)=a(x,z)+b(y,z)$,

iii) $(x,x)\geq 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

$K=R$ halinde $(x,y)=(y,x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\|: X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 2.1.7. Normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya *Hilbert uzayı* denir. Başka bir ifadeyle, bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 2.1.8. n-boyutlu R^n gerçel Euclid uzayında bir nokta $x=(x_1,...,x_n)$ ve bu noktanın normu $|x|=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^{\ 2}\right)^{1/2}$ ile tanımlanır. x ve y nin iç çarpımı $x\cdot y=\sum_{j=1}^{n}x_j y_j$ şeklindedir.

Tanım 2.1.9. $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n-bileşenlisi ise α ya *çoklu-indis* denir ve x^α, $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, yani $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer şekilde $1\le j\le n$ için $D_j=\partial/\partial x_j$ ise, o zaman

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. $D^{(0,...,0)}u=u$ olur.

Tanım 2.1.10. Eğer $G\subset R^n$ ise R^n de G nin *kapanışı* $\overline{G}$ ile belirtilir. $\overline{G}\subset\Omega$ ve $\overline{G}$ R^n in kompakt (kapalı ve sınırlı) altkümesi ise $G\subset\subset\Omega$ şeklinde gösterilir. *u, G* de tanımlı bir fonksiyon ise, *u* fonksiyonun *desteği*

$$\operatorname{supp}u=\overline{\{x\in G:u(x)\neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. $\operatorname{supp}u\subset\subset\Omega$ ise *u* fonksiyonu Ω da *kompakt desteğe* sahiptir denir.

Tanım 2.1.11. Ω, R^n de bir bölge olsun. Negatif olmayan her m tamsayısı için Ω bölgesinde sürekli bütün ϕ fonksiyonları ve $|\alpha|\le m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha\phi$ kısmi türevleri sürekli olan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C^0(\Omega)\equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m(\Omega)$ olur. $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt destekli olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki bütün bu fonksiyonlardan ibarettir.

Tanım 2.1.12. Ω açık bir bölge olduğundan, $C^m(\Omega)$ deki fonksiyonların Ω bölgesinde sınırlı olması gerekmeyebilir. $C_B^m(\Omega)$ ile $0\le|\alpha|\le m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha\phi$ lerin sınırlı olduğu $\phi\in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)}=\max_{0\le|\alpha|\le m}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha\phi(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.13. Eğer $\phi \in C(\Omega)$ Ω bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli ise, Ω bölgesinin kapanışı olan $\overline{\Omega}$ bölgesinde de tek, sınırlı ve süreklidir. $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ ile $0 \leq |\alpha| \leq m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha \phi$ lerin sınırlı ve düzgün sürekli olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. (Eğer Ω bölgesi sınırsız ise simgelerin yanlış kullanımı belirsizliğe yol açar; örneğin, $\overline{R^n} = R^n$ olsa bile $C^m\left(\overline{R^n}\right) \neq C^m\left(R^n\right)$ dır.) $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır. Bu nedenle $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı da

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \left| D^\alpha \phi(x) \right|$$

aynı norm ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.14. Tam, metrik ve lokal olarak konveks uzaya *Fréchet uzayı* denir. Her normlu uzay aynı zamanda bir metrik doğrusal uzay ve her Banach uzayı *Fréchet uzayıdır.*

2.2. Lebesque Uzayı $L_p(\Omega)$

Tanım 2.2.1. Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif gerçel sayılar olsun. Ω bölgesinde tanımlı bütün *ölçülebilir u* fonksiyonlar sınıfına aşağıdaki koşul altında

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$$

$L_p(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna *hemen hemen sınırlıdır* denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki *esas (essential) supremumu* denir ve $ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzaya $L_\infty(\Omega)$ uzayı denir. $L_\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.3. Ω, R^n de bir bölge ve $1\le p\le\infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt altkümesinde *p.* kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_{p,loc}(\Omega)$ uzayı denir.

Tanım 2.2.4. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

i) X, Y nin bir alt uzayı,

ii) Her $x\in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X\to Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü doğrusal olduğundan ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \le M\|x\|_X, \quad x\in X$$

olacak şekilde bir $M>0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 2.2.5. $vol(\Omega)=\int_\Omega 1dx$ ve $1\le p\le q\le\infty$ olsun. Eğer $u\in L_q(\Omega)$ ise o zaman $u\in L_p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \le \left(vol(\Omega)\right)^{(1/p)-(1/q)}\|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L_q(\Omega)\to L_p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 2.2.6. $L_2(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.2.7. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|f(.)\|_X \in L_p(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b) den X e tanımlanmış ölçülebilir f fonksiyonları uzayına $L_p(a,b;X)$ *uzayı* denir. $L_p(a,b;X)$ uzayı

$$\|f\|_{L_p(a,b;X)} = \begin{cases} \left\{ \int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt \right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \underset{t\in(a,b)}{ess\sup} \|f(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $f \in L_p(c,d;X)$ ise, o zaman $f \in L_{p,loc}(a,b;X)$ yazılır ve $p = 1$ için *f lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 2.2.8. Her $t \in [0,T]$ için $[0,T]$ den X e tanımlanmış ve m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayına $C^m([0,T];X)$ *uzayı* denir. $C^m([0,T];X)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{t\in[0,T]} \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

2.3. Sobolev Uzayı $W^{m,p}(\Omega)$

Tanım 2.3.1. $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun *genelleştirilmiş türevi* olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^{\alpha}u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^{\alpha}u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^{\alpha}u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 2.3.2. Ω, R^n de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L_p(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^{\alpha}u\|_{L_p(\Omega)}^{p} \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^{\alpha}u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Aşikâr olarak $W^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L_p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 2.3.3. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^{\alpha}u\|_{L_2(\Omega)}^{2} \right)^{1/2}$$

ile verilir.

Tanım 2.3.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \left(D^\alpha u, D^\alpha v\right)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır, burada $(u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ olup $L_2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.

Eğer Ω bölgesi sınırlı ise, bütün $u\in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$$

olacak şekilde bir $C(\Omega)$ sabiti vardır. Bu eşitsizlik Poincare eşitsizliği olarak bilinmektedir. $H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 dx\right)^{1/2}$$

olur.

Tanım 2.3.5. Eğer Ω bölgesi açık ve Lipschitz sürekli sınıra sahipse, o zaman aşağıdakiler geçerlidir:

i) $1\leq p<n$ ise, $p^*=np/(n-p)$ olmak üzere her $q\in[p,p^*]$ için $W^{1,p}(\Omega)\to L_q(\Omega)$,

ii) $p=n$ ise her $q\in[p,\infty)$ için $W^{1,p}(\Omega)\to L_q(\Omega)$,

iii) $p>n$ ise $\alpha=(p-n)/p$ olmak üzere $W^{1,p}(\Omega)\to L_\infty(\Omega)\cap C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Ayrıca Ω bölgesi sınırlı ise, ii) ve iii) gömmeleri kompakttır. i) gömmesi $q\in[p,p^*)$ için kompakttır.

Eğer $W^{1,p}(\Omega)$ uzayı, $W_0^{1,p}(\Omega)$ uzayı ile değiştirilirse, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapmaksızın yukarıdaki gömmeler geçerli olur.

2.4. Operatörler

Tanım 2.4.1. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $A:D_A\subset X\rightarrow Y$ dönüşümü X deki bir x elemanını Y de bir tek elamana götürüyorsa A ya *operatör*, D_A ya da A operatörünün *tanım kümesi* denir.

Tanım 2.4.2. $D_A\subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere $A:D_A\subset X\rightarrow Y$ operatörüne her $x,y\in D_A$ ve her $\alpha,\beta\in K$ için

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(y)$$

koşuluyla birlikte *doğrusal operatör* denir.

Tanım 2.4.3. Bir H Hilbert uzayında tanımlı A operatörüne her $x,y\in D_A$ için

$$(Ax,y)=(x,Ay)$$

eşitliği ile birlikte *simetrik operatör* denir.

Tanım 2.4.4. $A:D_A\subset X\rightarrow Y$ operatörüne belli bir $M\geq 0$ sayısı ve her $x\in D_A$ için

$$\|Ax\|\leq M\|x\|$$

eşitsizliği ile birlikte *sınırlı operatör* denir.

Tanım 2.4.5. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal, simetrik bir A operatörüne her $x\in D_A\subset H$

$$(Ax,x)\geq 0$$

eşitsizliği ile birlikte negatif olmayan *operatör* denir. Negatif olmayan A operatörü için

$$(Ax,x)>0\Rightarrow x=0$$

ile pozitif operatör denir.

Tanım 2.4.6. X ve Y iki Hilbert uzayı ve $(.,.)$ X uzayının, $[.,.]$de Y uzayının iç çarpımı ve $A: X \to Y$ doğrusal, sınırlı operatörü tüm X Hilbert uzayında tanımlı olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için

$$[Ax, y] = (x, A^* y)$$

koşulunu sağlayan $A^*: Y \to X$ operatörüne, A operatörünün *eş operatörü* denir. Eğer $A = A^*$ ise böyle bir operatöre *öz-eşlenik (self-adjoint) operatör* denir.

Tanım 2.4.7. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal ve öz-eşlenik bir A operatörüne her $x \in H$ için

$$(Ax, x) \geq C\|x\|_H^2, \qquad C > 0$$

ile birlikte *pozitif belirli bir operatör* denir.

Tanım 2.4.8. X ve Y iki Banach uzayı ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olacak şekilde bir $A: X \to Y$ doğrusal sınırlı operatörü varsa f ye $x \in X$ noktasında *türevlenebilirdir* denir. A operatörüne f nin $x \in X$ noktasındaki *Fréchet türevi* denir ve $f'(x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.9. X Banach uzayı, X' X in dual uzayı ve $A: X \to X'$ bir operatör olmak üzere eğer her $x \in X$ için

$$\mathrm{A}'(x) = Ax$$

olacak şekilde $\mathrm{A}: X \to R^1$ fonksiyoneli varsa A fonksiyoneline *A operatörünün potansiyeli* denir.

2.5. Eşitsizlikler

Tanım 2.5.1. Cauchy Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0,\ a,b \in R^1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.5.2. Young Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0,\ a,b \in R^1,\ p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{|\varepsilon a|^p}{p} + \frac{|b/\varepsilon|^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.5.3. Hölder Eşitsizliği. $u \in L_p(\Omega),\ v \in L_q(\Omega),\ p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman $uv \in L_1(\Omega)$ olup

$$\|uv\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p = 1$ durumunda, $q = \infty$ ve $\|v\|_{L_q(\Omega)} = ess_{\Omega} \sup|v|$ alırız.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwartz-Bunyakowski eşitsizliği* denir.

Ayrıca $u \in L_r(\Omega),\ p \leq q \leq r$ ve $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olmak üzere

$$\|u\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L_p(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L_r(\Omega)}$$

ara değer eşitsizliği geçerlidir. Bunu görmek için $\alpha = \lambda q$ ve $\beta = (1-\lambda)q$ alınıp Hölder eşitsizliği uygulanarak $z = p/\lambda q$ ve $y = r/(1-\lambda)q$ için

$$\int_{\Omega}|u|^q dx = \int_{\Omega}|u|^{\alpha}|u|^{\beta} dx \leq \left(\int_{\Omega}|u|^{\alpha z} dx\right)^{1/z} \left(\int_{\Omega}|u|^{\beta y} dx\right)^{1/y}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu görülür.

Tanım 2.5.4. Minkowski Eşitsizliği. $u,v \in L_p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u+v\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.5.5. Sobolev Eşitsizliği. $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset R^n$ açık olsun. $n > p$, $p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L_{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L_p(\Omega)}$$

olacak şekilde $C = C(n,p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u \in C(\overline{\Omega})$ ve

$$\sup_{\Omega}|u| \leq C|\Omega|^{1/n-1/p}\|Du\|_{L_p(\Omega)}$$

olur.

Tanım 2.5.6. Jensen Eşitsizliği. $x_1, x_2 \in R^n$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $\Lambda : R^n \to R$ fonksiyonuna

$$\Lambda[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)\Lambda(x_1) + t\Lambda(x_2)$$

eşitsizliği ile birlikte konveks fonksiyon denir. Λ R^n de konveks bir fonksiyon ve $E \subset R^n$ sınırlı ölçülebilir bir küme ise, $f \in L_1(E)$ iken

$$\Lambda\left(\int_E f(x)dx\right) \leq \int_E \Lambda[f(x)]dx$$

olur.

Başka bir ifadeyle $w(x) \geq 0$ ise keyfi düzgün $f(x)$ ler ve Λ konveks fonksiyonu için

$$\Lambda\left(\frac{\left(\int_E f(x)w(x)dx\right)}{\int_E w(x)dx}\right) \leq \frac{\int_E \Lambda[f(x)]w(x)dx}{\int_E w(x)dx}$$

olup $\int_E w(x)dx = 1$ ise, o zaman $\Lambda\left(\int_E f(x)w(x)dx\right) \leq \int_E \Lambda[f(x)]w(x)dx$ elde edilir.

Tanım 2.5.7. Kısmi İntegral Alma Formülleri. $\Omega \subset R^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $A(x) = (A_1(x),...,A_n(x))$ vektörü $i = 1,...,n$ olmak üzere $A_i(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilsin. $divA(x) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ (R^n uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise,

$$\int_\Omega divA(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} A(x)\,n(x)\,dS$$

olup burada $n(x)$ Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektör olup bu formül *Ostrogradskii formülü* olarak bilinmektedir.

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ ve $\Delta u = div(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun. $v\Delta u = v \cdot div(\nabla u) = div(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$, $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + ... + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan Ostrogradskii formülüne göre

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$ olup bu formül *Green formülü* olarak bilinmektedir.

3. BÖLÜM

GLOBAL ÇÖZÜMLERİN YOKLUĞU (BLOW UP) PROBLEMİNE GENEL BİR BAKIŞ

3.1. Giriş

Bu bölümde, genellikle blow up olarak bilinen doğrusal olmayan diferansiyel denklemler problemlerinde singularitelerin oluşumu konusuna bir giriş yapacağız. Kısaca düzgün başlangıç verisinden başlayarak ve klasik gelişimin ilk periyodundan sonra çözümleri veya bazı durumlarda çözümlerin türevleri doğrusal olmayan terimlerin gittikçe artan etkisinden dolayı sonlu zamanda sonsuz olan durumlarla ilgileneceğiz. Parabolik ve hiperbolik tipten diferansiyel denklemleri içeren problemler üzerinde yoğunlaşacağız. Blow up teorisi ile ilgili klasik soruları tartışacağız ve sönme problemlerine de kısa bir giriş yapacağız.

Uygulamalı bilimlerde birçok işlem diferansiyel operatörler içeren evolution denklemlerle veya böyle denklemlerin sistemleriyle modellenebilmektedir. İyi tanımlı çözüm bulmak için denklemler uygun ilave edilen koşullarla (genellikle, başlangıç ve sınır koşullarıyla) verilmelidir. Standart diferansiyel teoriler doğrusal operatörleri içermekte ve bunlar için yoğun teoriler geliştirilmektedir. Doğrusal olmayan diferansiyel denklemler doğrusal teorilerde bulunmayan birçok özelliği barındırmaktadır; bu doğrusal olmayan özellikler çoğu zaman matematiksel modelleri tarif edilmesi gereken gerçek dünya olaylarının önemli özellikleri ile alakalıdır; aynı zamanda bu yeni özellikler matematiksel davranışın temel yeni zorluklarıyla yakın bir şekilde bağlantılıdır. Doğrusal olmayan işlemler çalışmaları yeni problemlerin kaynağı olmuştur ve matematiksel analiz, kısmi diferansiyel denklemler ve bunlarla bağlantılı diğer alanlarda yeni metotların takdimiyle güdülenmiş, bu yüzyılın son kısmında matematiksel araştırmaların en aktif alanlarından olmuştur. Modern analizin yeni metot bulma başarıları doğrusal olmayan dünyanın önemli sorularına matematikçilerin titiz cevaplar vermesini mümkün kılmıştır.

Doğrusal olmayan evolution problemleri doğrusal olanlardan ayıran en dikkat çekici özellik, tamamen düzgün verilerden kaynaklanan **singularitelerin** olası meydana gelmesinin mümkünlüğüdür. Daha dikkatle veri sınıflarından, varlık, teklik ve sürekli bağımlılık kısa zaman aralıklarında gerçeklenebilir ki bu da kısa zaman aralığında **iyi-tanımlılık** olarak adlandırılır. Oysa singulariteler doğrusal problemlerde de ortaya çıkabilir. Bu, katsayılarda, verilerde veya problemde (sabit singulariteler) yer alan singulariteler boyunca olur. Aksine, doğrusal olmayan sistemlerde singulariteler, matematiksel analizle tanımlanabilecek problemin doğrusal olmayan mekanizmasından, zamanından ve konumundan kaynaklanabilir.

3.2. Blow up ve Adi Diferansiyel Denklemler

Doğrusal olmayan problemlerde singularitelerin en basit formu, zamanın bazı sonlu $T>0$ limitine yaklaştığı zaman, değişken veya değişkenlerin sonsuza gitmesidir. Bu **blow up** olayı olarak adlandırılır. Blow up adi diferansiyel denklemlerin teorisinde temel (fakat oldukça temsili) formda meydana gelir. En basit örnek gerçel skaler değişkenli $u=u(t)$ için

$$u_t = u^2,\ t>0;\ \ u(0)=a \tag{3.1}$$

başlangıç değer problemidir. $a>0$ verisi için tek çözüm $0<t<T=1/a$ zaman aralığında mevcuttur. $u(t)=1/(T-t)$ formülü ile verilebildiğinden $t<T$ için düzgün çözüm ve $t\to T^-$ için $u(t)\to\infty$ olur. Bu durumda $t=T$ de çözüm **blow up** olur ve $u(t)$ de $t=T$ de **blow up** a sahiptir denir. Blow up Latin dillerinde **explosion** (patlama) olarak geçmekte ve gerçekten de ilgili matematik problemleri birçok durumda (kısmen) patlama olaylarını tasvir etmeyi amaçlamaktadır. Evolution işlemleri tanımlayan değişkenlerin sonsuz büyümesinden dolayı, çözümler zamanla global olarak yok olmaktadır. Buna binaen bu denklemden başlanarak blow up kavramı genelleştirilebilir ki adi diferansiyel denklemler (ADD) için ilk adım olarak $u_t = u^p$, $p>1$ denklemini verebiliriz. Daha genel olarak

$$u_t = f(u) \tag{3.2}$$

denklemini verebiliriz ki burada f pozitif ve

$$\int_1^{\infty} ds/f(s) < \infty \tag{3.3}$$

koşulu altında süreklidir. Bu ADD teorisinde 1898 de tespit edilen *Osgood* [62] koşulu olarak bilinmektedir. Bu koşul pozitif başlangıç verili herhangi bir çözümün sonlu zamanda blow up olması için *gerekli ve yeterli*dir. Daha genel olarak vektör değişkenli $u\in R^n$ için $u_t = f(t,u)$ sistemini düşünebiliriz. Bu durumda f, büyük $|u|$ için u ya göre süper doğrusal ise aynı mekanizmadan dolayı blow up a sahip olabiliriz ve bu nedenle t ye göre kesin belirli zamanlarda f nin singüler karakterinden dolayı blow up olur. ADD deki bu çalışmalar bütün blow up teorisi ve genelde de singülarite çalışmaları için esas anahtarlar ve esin kaynağı olmuştur.

3.3. Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Blow up

Günümüzde sonlu bir zamanda blow up olan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri konusunu ele alan aktivitelerde artış bulunmaktadır. Bunların matematiksel teorisi yoğundur. Yapılmış çalışmaların neticeleri Levine [46], Samarskii ve arkadaşları [70], Bandle ve Brunner [6], Deng ve Levine [12], Galaktianov ve Vázquez [20] ve diğer araştırmacıların çalışmalarında bulunabilir.

3.3.1. Reaksiyon-Difüzyon Denklemlerinde Blow up

Problem uzamsal yapıya ve bu nedenle bilinmeyenler sadece zaman değişkenine değil aynı zamanda yer değişkenine de sahip yani $u = u(x,t)$, $x \in \Omega \subset R^n$, $0 \leq t < T$ olduğu zaman ele alınan söz konusu problemlerin matematiksel zorluğu ve bu nedenle farklı bilim dallarındaki uygulamalar için ilginçliği artar. Isının yayılması ve yanma problemleri genel olarak A operatörü üzerindeki standart eliptik koşulları ve hem A hem de B üzerindeki büyüme ve düzenlilik koşulları ile

$$u_t = \nabla \cdot A(u, \nabla u, x, t) + B(u, \nabla u, x, t) \tag{3.4}$$

formunda düşünülmektedir. Bu denklem reaktif ortamda doğrusal olmayan ısı yayımı modeli olup u sıcaklığı belirtir. Açıktır ki gelişim işleminin bir modeli olarak (3.4) denklemi (3.2) denklemi ile karşılaştırıldığında çözümlerin uzamsal yapısını da hesaba katan yeni özellikleri içerir. Blow up kavramı aşağıdaki çerçevede en basit formda verilebilir.

(i) Belli bir çerçevede ve küçük zamanlar için matematiksel problemin iyi konumluluğundan başlanarak böylece A ve B üzerinde iyi düzgünlük koşulları kabul edilerek sınırlı ve negatif olmayan verilerin belli bir sınıfında Cauchy problemi veya başlangıç sınır değer problemleri için varlık ve teklik teorisine sahip olacağız. Buna göre çözümler $0 < t < T$ zamanı için sınırlı olarak gelişecek.

(ii) Aynı zamanda sınırlı çözümlerin lokal olarak zamanda sürekli olabilmesi için gerekli düzgünlüğe sahip olduğu bu çerçevede düzenlilik ve süreklilik teorisini elde ederiz. Parabolik denklemlerin klasik çözümleri için bu teori Schauder tahminlerine [6] dayalıdır. Buna göre eğer t bazı sonlu T zamanına yaklaşırken çözüm bazı noktalarda sonsuz oluyorsa blow up oluşur. Yani, *bir* $T<\infty$ *zamanı var ki bu da blow up zamanı olarak adlandırılır.* Bu nedenle çözüm bütün $0<t<T$ ler için iyi tanımlıdır. Oysa

$$t \to T^- \quad \text{iken} \qquad \sup_{x\in\Omega}|u(x,t)| \to \infty \tag{3.5}$$

olur.

Blow up konusu 1940 larda ve 1950 lerde Semenov' un "chain reaction theory", "adiabatic explosion" ve "combustion theory" bağlamında ortaya konmuştur [80]. Gaz dinamiklerinde blow up singularitelerinden dolayı yoğun patlama (odaklama) problemi 1940 larda Bechert ve arkadaşları tarafında incelenmiştir [7].

Kaplan [32], Fujita [17, 18], Friedman [16] ve diğerleri tarafından blow up için genel bir yaklaşım verildikten sonra blow up konusunun *matematiksel teorisi* 1960 larda aktif olarak araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Yukarıda bahsedildiği genellikte henüz teorisi tam oluşturulamamıştır fakat gittikçe artan karmaşık modeller için belli bir düzende detaylı çalışmalar gerçekleştirilmektedir ve hali hazırda bu konuda epey kaynak vardır. İki klasik skaler model vardır. Bunlardan birisi *katı yakıt modeli* (Frank-Kamenetsky denklemi) adı altında yanma teorisinde önemli olan

$$u_t = \Delta u + \lambda e^u, \quad \lambda > 0 \tag{3.6}$$

üstel reaksiyon modelidir [80]. Diferansiyel geometri ve diğer alanlarda da bu denklem ele alınmıştır. Blow up olayının oluşumu $\lambda>0$ parametresi, başlangıç değer ve tanım bölgesine bağlıdır. İkinci klasik blow up denklemi

$$u_t = \Delta u + u^p \tag{3.7}$$

şeklindedir. Her iki denklem de Fujita tarafından çalışılmıştır. $p>1$ için verilen sınıfta sadece bazı çözümler için değil aynı zamanda bütün çözümler için p nin değerlerine bağlı olarak bu denklemde blow up özelliği vardır. Doğrusal olmayan parabolik denklemleri (dejenere olabilir) içeren evolution problemleri için başka birçok popüler model vardır. *Gözenekli ortam* (*porous medium*) ve *p-laplace operatörleri* ile

$$u_t = \Delta u^m + u^p \ (m>0) \ \ ve \ \ u_t = \nabla\left(|\nabla u|^\sigma \nabla u\right) + u^p \ (\sigma > -1) \tag{3.8}$$

denklemleri için blow up sonuçları sırasıyla Galaktionov [19] ve Tsutsumi [73] tarafından ispatlandı. Bu tipten denklemler

$$u_t = \mathrm{A}(u) + f(u) \tag{3.9}$$

formunda alınabilir ki **A** *difüzyonu* temsil eden ikinci dereceden eliptik operatör (doğrusal olmayan ve dejenęre olabilir), $f(u)$ *reaksiyonu* temsil eden u nun *süper doğrusal* fonksiyonudur. Birçok yeni gelişmeler olan aktif bir alandır.

Belirli evolution işlemleri için gelişen *singülaritelerin* özel bir tipi olarak blow up çalışmasını daha genel bir çerçeveye dahil etmek daha kullanışlıdır. Örneğin, bir kurala ve başlangıç koşuluna göre tanımlanan

$$u_t = A(u) \quad t > 0 \text{ için}, \quad u(0) = u_0 \tag{3.10}$$

evolution işlemini ele alalım. $u(t) \in X$ belirli fonksiyonel uzayında tanımlı olan bir eğri iken $u = u(t)$ çözümlerinin varlığını araştıralım. Sık sık X uzayı $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ veya $H^1(\Omega)$ Sobolev uzayı olur. Genellikle $u_0 \in X$ başlangıç verisi için problemin küçük aralıkta (yani u_0 başlangıç verisiyle u çözümü iyi tanımlıdır ve bazı $0 < t < T = T(u_0) > 0$ zamanları için X uzayında kalır) iyi konumludur. Görüldüğü gibi singularite, olayı çevreleyen uzayın tipine ve kullanılan çözüm kavramına bağlı olarak bu görünümde olur. Bununla birlikte esas blow up çözümün bütün standart seçimlerine ve fonksiyonel çerçeveye karşı koyar. Bu blow up tipi *tam blow up* olarak adlandırılır.

Blow up ın fiziksel yorumu genel olarak kimyasal bir reaksiyonun yanmasına yol açan sıcaklıktaki çarpıcı artış olarak düşünülmektedir [6].

3.3.2. Dalga Denklemlerinde Blow up

Doğrusal olmayan

$$u_{tt} = \Delta u + |u|^p, \quad p > 1$$

tipindeki denklemlerde blow up çalışmaların matematiksel tarihi parabolik denklemlerinden daha eski olup 1957 lere dayanmaktadır [34]. *Karşılaştırma tekniği* ile bu tipteki dalga denklemlerinin çözümlerinin blow up davranışı incelenilirken uzamsal yapıya sahip olmayan

$$f_{tt} = f^p$$

denkleminin çözümlerinin büyümesi ile karşılaştırılmaktadır. $T > 0$ zamanında blow up olan bu denklemin çözümü

$$f(t)=\left(\frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\right)^{1/(p-1)}(T-t)^{-2/(p-1)}$$

şeklinde olup $t \to T^-$ iken $f(t)\to\infty$ olur.

Dalga denklemlerinde blow up problemleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda yapılan çalışmaların bir kısmı için aşağıdakilere bakınız.

Georgiev ve Todorova [22]

$$u_{tt}-\Delta u+au_t\left|u_t\right|^{m-1}=bu\left|u\right|^{p-1}$$

doğrusal olmayan damping terimle doğrusal olmayan kaynak terim arasında etkileşimleri inceleyerek çözümlerin global yokluğunu elde ettiler.

Ono [60]

$$u_{tt}+M\left(\left\|A^{1/2}u\right\|^2\right)Au+\left|u_t\right|^{\beta}u_t=f(u),\quad A=\Delta,\quad M(r)=a+br^{\gamma},\quad \gamma>0$$

doğrusal olmayan damping terimli Kirchhoff denklemi için blow up sonucunu elde etti.

Zhijian [83]

$$u_{tt}+\Delta^2u+\lambda u_t=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i\left(u_{x_i}\right)$$

doğrusal olmayan başlangıç sınır değer problemini çalıştı ve negatif başlangıç enerjisiyle bu problemin çözümünün $\lambda\geq 0$ ve bazı ek koşullar altında sonlu zamanda blow up olduğunu gösterdi.

Polat ve arkadaşları [65]

$$u_{tt}=div\sigma(\nabla u)+\Delta u_t-\Delta^2u$$

damping terimli doğrusal olmayan bir dalga denkleminin bir sınıfı için başlangıç sınır değer probleminin negatif başlangıç enerjisiyle çözümlerinin global yokluğunu gerçekleştirdiler.

Polat ve arkadaşları [66]

$$u_{tt}-bu_{xx}+\delta u_{xxxx}-ru_{xxt}=\left(f(u)\right)_{xx}$$

damping terimli Boussinesq denkleminin başlangıç sınır değer problemi için pozitif olmayan başlangıç enerjisiyle çözümlerinin global yokluğunu gerçekleştirdiler.

3.4. Sönme

Singülariteler olarak blow up problemlerini çalışmaya genel bir bakış *sönme* gibi ilginç problemlerin adresi olarak birleşik bir yaklaşım içerir. Sönme problemi ilk olarak 1975 yılında Kawarada tarafından verildi. Soğurmayla verilen

$$u_t = \Delta u - u^p, \ \ p < 1$$

ısı denklemini ele alalım. Burada pozitif verili çözümler düşünülmekte ve p üssünün $p \leq 0$ singüler bölgesini geçtiği varsayılır [44]. Blow up problemiyle farkı şudur. Verilen zamandan sonra çözümün devamını engelleyen singülerlik u nun blow up olması değil u_t türevlerinin ve $f(u)$ soğurma teriminin blow up olmasıdır. Türevleri blow up olan çözümlerinin gelişimi durabilen veya duramayan singülaritelerin geliştiği doğrusal olmayan evolution denklemleri çalışmak makul diğer bir yoldur.

Diğer bir durum da şudur; reaksiyon teriminin uzamsal gradiyente bağlı olduğu zaman çözümler sınırlı olsa bile uzamsal gradiyentin blow up olmasıdır.

Hemen belirtelim ki eliptik ve diğer durağan denklemler için belirli bir noktada (veya bazı noktalarda) blow up olan singularite çalışmalarında da büyük artış vardır.

3.5. Temel Sorular

Bu kısımda reaksiyon-difüzyon denklemlerinin blow up çalışmasında ortaya çıkan başlıca soruların analizi üzerinde yoğunlaşacağız. Bu liste diğer singülaritelerin oluşumu problemlerine de uyarlanabilir.

Örneğin Bebernes ve Eberly [8] ye göre temel liste *ne zaman, nerede, nasıl* sorularından ibarettir.

Bandle ve Brunner [6] ye göre bu liste şöyledir:

(1) Blow up ne zaman olur?

(2) Blow up noktaları nerededir?

(3) Blow up zamanında çözümlerin asimptotik davranışı nasıldır?

(4) Blow up zamanının ötesinde bazı zayıf anlamda çözümün genelleştirilmesi mümkün mü?

(5) Blow up çözümünü sayısal olarak hesaplamak mümkün mü?

İlk soru oldukça iyi anlaşılmıştır. Son yirmi yıldır blow up ölçütlerini oluşturmada büyük ilerlemeler olmuştur. Kaplan ve Fujita' nın sonuçları birçok duruma genelleştirilmiştir. Büyük zorluk blow up noktalarının yerini bulmada ve asimptotiklerin doğasının tartışılmasındadır.

Eğer blow up zamanından sonra u çözümü devam edebiliyorsa, gerçek yanma meydana gelmez. Blow up problemlerinin sayısal davranışı için birçok problem açık bulunmaktadır.

Galaktionov ve Vázquez [20] listeyi şu şekilde verdiler:

(1) Blow up oluşur mu?

(2) Ne zaman?

(3) Nerede?

(4) Nasıl?

(5) Sonra ne olur?

(6) Sayısal olarak nasıl hesaplarız?

Şimdi kısaca bu soruların ne anlamlara geldiğini açıklayalım.

(1) İlk soru: **Blow up oluşur mu?** Yalnız çözümlerin uygun bir sınıfı seçildiğinde blow up problemi uygun bir şekilde açık olarak belirtilir. Genellikle problemin çözümlerinin varlık ve tekliği farklı uzay ortamlarında belirtilebilir ve blow up tamamen bu çerçevede verilen zamana kadar veya verilen zamandan sonra çözümlerin devamının mümkünsüzlüğüdür. Klasik çözümleri ele almaktan kaçınılarak zayıf, viskozite ve diğer genelleştirilmiş çözümler verilmiş problem için daha doğal olabilir. Burada fonksiyonel çerçevede (başka bir çerçevede değil) blow up olan durumlar incelenebilir veya sadece klasik çözümler için (zayıf L_1 çözümler için değil) olabilir. Genel soru iki görüşe ayrılabilir.

(1.i) Hangi denklem ve problemler için sonlu zamanda blow up olabilir? Denklemin formu (katsayılardaki veya daha genel olarak yapısal koşullardaki terimlerden) ve verilerin formu cevabı belirler. Reaksiyon terimle oluşan patlama durumunda adi diferansiyel denklemlerin analizinde olduğu gibi süper doğrusallık gibi bir koşul gereklidir fakat yine de örnekler bulunabilir ki uzamsal yapılı bir problem adi diferansiyel denklem probleminden farklılık gösterir.

(1.ii) Önceki sorunun cevabı evet ise o zaman şu sorulabilir; hangi çözümler sonlu zamanda blow up olur? Bunun için iki durum söz konusudur. Verilen sınıfta bütün çözümler için veya yalnız bazı çözümler için (hangisi olduğu belirtilmeli) blow up olur. Eğer özel bir çözüm blow up olmazsa o zaman zamanda global olur. Bütün çözümleri blow up olan bir problem *Fujita problemi* olarak adlandırılır. Bunun için sınırlı bölgede sıfır Dirichlet koşuluyla verilmiş yarı doğrusal $u_t = \Delta u + u^p$ ısı denklemi verilir ki bütün klasik negatif olmayan çözümler $p \in \left(1, (n+2)/n\right)$ aralığında sonlu zamanda blow up olur. Üst sınır *Fujita üssü* olarak adlandırılır.

(2) İkinci soru: **Ne zaman?** Sonlu zamanda blow up olduğu garanti edildikten sonra blow up zamanını tahmin edebilir miyiz? Gerçekten blow up özelliği, az dikkat çeken bir formda, çözümlerin verilen fonksiyonel çerçevede bütün $0 < t < \infty$ ler için var olduğu fakat $t \to \infty$ iken sonsuz olduğunda, sonsuz zamanda olabilir. Bu nedenle sonlu zamanda blow up olma durumuna karşılık sonsuz durumda blow up olma durumuyla karşı karşıyayız. Gerçekten çözümler için aşağıdaki dört durum söz konusudur:

(2.**i**) zamanda düzgün bir şekilde sınırlı olan global çözümler (bu durumda blow up olmaz),

(2.**ii**) sonsuz zamanda blow up olan global çözümler (sonsuz zamanlı blow up),

(2.**iii**) sonlu zamanda çözümlerde blow up (standart blow up durumu),

(2.**iv**) *ani blow up* (çözüm $t = 0$ da blow up olur).

Ani blow up olayı çok az dikkat çeken doğrusal olmayan bir olaydır. Fakat Vázquez [77] böyle bir denklem olarak $u_t = \Delta u + \lambda e^u$ üstel reaksiyon denklemi için bu olayın oluştuğunu gösterdi.

(3) Üçüncü soru: **Nerede?** Öncelikle $Q_T = \Omega \times (0,T)$ bölgesinde tanımlı $T > 0$ zamanında blow up olan $u = u(x,t)$ çözümü için *blow up kümesi*

$$B(u_0) = \{x \in \Omega : \exists \{x_n, t_n\} \subset Q_T, t_n \to T^-, x_n \to x,\ u(x_n, t_n) \to \infty\} \tag{3.11}$$

gibi tanımlanır. Bu kapalı bir kümedir. Bu kümenin noktaları *blow up noktalarıdır*. En küçük blow up kümesi aşağıdaki gibidir;

$$B_1(u_0) = \{x \in \Omega : \exists \{t_n\} \subset (0,T), \{t_n\} \to T^-,\ u(x, t_n) \to \infty\}. \tag{3.12}$$

$\Omega = R^n$ olduğu zaman tipik alternatifler şunlardır: *tek nokta blow up* durumu olup, burada $B(u_0)$ kümesi bir nokta (veya sonlu sayıda nokta), bölgesel blow up olup, burada $B(u_0)$ kümesinin ölçümü sonlu ve pozitiftir, ve *global blow up* olup, burada $B(u_0) = R^n$ dır. Ω bölgesi bütün Euclid uzayı olmadığı zaman kavramlar doğal olarak uyarlanır. İlk iki durumda blow up çözümleri lokalleştirilmiştir denir.

(4) Dördüncü soru: **Blow up nasıl oluşur?** İki bakış açısı vardır:

(4.i) t blow up zamanına ve x blow up noktasına yaklaşırken ıraksayan u çözümünde *oranı* hesaplamak, (**4.ii**) blow up olmayan noktalarda $t \to T^{-}$ iken $u(x,t)$ nin limitleri olarak *son zaman blow up biçimlerini* hesaplamak.

Genellikle (3.7) gibi denklemler için ölçek değişimsizliği üslü oranda blow up olan çözümlerin varlığını ima eder. *Self similar blow up* o zaman genel blow up formu olur ve blow up oranlarını belirler. Bununla birlikte (3.7) denklemindeki p nin büyük değerleri için bulunmuştur ki gerçek blow up oranı self similar orandan daha hızlı olabilir. Bu olay *hızlı blow up* olarak adlandırılır. Bu biçimlerin kararsız olduğuna dikkat edilmelidir. Hızlı blow up birkaç problemde çalışılmıştır [4, 27] ve bunların oranlarını biçimlerini bulmak zordur [12].

(5) Beşinci soru: **Sonra ne olur?** Şimdiye kadar bu soru az dikkatleri çekmiştir fakat blow up içeren matematiksel modellerin pratik uygulaması için büyük öneme sahiptir. Bu blow up sonrası devam problemidir. Bunun için temel gereklilik devamlı çözümün uygun bir kavramını bulmaktır. Global çözümlere sahip olacak yaklaşık problemlerin olması için reaksiyon terimi ve verilerin monoton yaklaşımı ile bu gerçekleştirilir. Ondan sonra limite geçilerek çözümün T zamanından sonra aşikâr (yani aynı şekilde sonsuz) olup olmamasına karar verilir. Isının yayımı ve yanma uygulamalarındaki doğal bir yaklaşımdır. Bu metotla ilgili genelde üç durum söz konusudur.

(**5.i**) Çözüm, T zamanından sonra devam edemez. Eğer çözüm devamlıysa doğal anlamda her yerde sonsuz olmalıdır. Bu durum *tam blow up* olarak adlandırılır.

(**5.ii**) Çözüm, T zamanından sonra uzay-zamanın bazı bölgesinde devam edebilir fakat tamamında sonsuz olur. Bu durum *tam olmayan blow up* olarak adlandırılır.

(**5.iii**) Çözüm, T zamanından sonra tekrar sınırlı olur. Bu durum *geçici blow up* olarak adlandırılır. Bu çok kararsız bir olaydır. Masuda [54] $t = T$ den sonra belirli zaman dilimlerinde $u_t = \Delta u + u^2$ denkleminin devamı için singülerlikten kaçınarak kompleks düzlemde bir yol gösterdi. Ne yazık ki bu analitik devam tek değildir.

(6) Altıncı soru: **Sayısal olarak nasıl hesaplarız?** İlk problem şudur. Nasıl *sayısal çözüm* üretilir. Örneğin uzayda yarı discretization, doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemi için başlangıç değer problemine yol açar. Bundan sonra uzamsal türevleri ele almak için sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları kullanılabilir [6].

3.6. Doğrusal Olmayan Sınır Koşullarından Kaynaklı Blow up

Blow up, doğrusal olmayan Neumann tipi sınır koşullarıyla da oluşturulabilir. Örneğin $\Omega\times(0,T)$ bölgesinde tanımlı $u_{tt}=\Delta u$ ısı denklemi

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=g(u) \tag{3.13}$$

doğrusal olmayan Neumann sınır koşuluyla verilsin. Burada $\frac{\partial u}{\partial n}$ türev için $\partial\Omega$ sınırında dış normal ve $u\to\infty$ iken $g(u)$ süper doğrusal büyümeli doğrusal olmayan bir fonksiyondur. (3.8) deki denklemler için tekabül eden doğrusal olmayan Neumann koşulları aşağıdaki gibi

$$\left.\frac{\partial(\phi(u))}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=g(u) \quad \text{ve} \quad \left.\left(|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right)\cdot n\right|_{\partial\Omega}=g(u) \tag{3.14}$$

verilebilir.

Blow up davranışı ile ilgili ele alınan aynı altı soru bu durumlara da uygulanabilir.

Bu tip Neumann koşullarında damping ve / veya kaynak terim bulunduran denklemler için blow up problemleri bir çok yazar tarafından incelenmiştir [10, 79].

4. BÖLÜM

GLOBAL OLMAYAN (BLOW UP) ÇÖZÜM VE ÇÖZÜMLERİN BÜYÜMESİ METOTLARI

4.1. Giriş

Sonlu zamanda blow up olayını tanımlamak için $u = u(x,t)$, uzamsal türevleri içeren bazı kısmi türev operatörü L için

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \tag{4.1}$$

kısmi diferansiyel denklem (KDD) in çözümü olsun. Bu denklem, bazı $t > 0$ aralığı ve $\Omega \subseteq R^n$ uzamsal bölgesinde tanımlı olsun. (4.1) denkleminin çözümünün uygun başlangıç ve sınır değerlerini de sağlaması gerekir. Eğer T^* sayısını

$$T^* = \sup\left\{T > 0 : \Omega \times [0,T) \text{da sınırlı, burada } u \text{ (4.1) denklemini sağlar.}\right\}$$

ile tanımlarsak, sonlu zamanda blow up ın tanımı kolaylaşır. $T^* = \infty$ ise, o zaman sonlu zamanda blow up olmaz ve çözümlerin global olduğu söylenir. $T^* < \infty$ ise, o zaman

$$\limsup_{t \to T^*} \|u(t)\|_\infty = \infty$$

olup çözüm T^* zamanında blow up olur denir.

Matematiksel kaynaklarda bir KDD in çözümünün sonlu zamanda blow up olduğunu veya başka nedenlerden dolayı çözümün sona erdiğini gösteren birçok teknik bulunmaktadır. İki farklı yaklaşım arasındaki farkı belirtmeliyiz: birinci yaklaşım sonlu zamanda sonsuz olan çözüm için alt sınır oluşturmaktan ibarettir ve ikinci yaklaşım çözümü içeren zamana bağımlı integraller için diferansiyel eşitsizlikler çıkarmaktır. Biz genelde ikinci yaklaşımı kullanacağız. Buna göre çözümün blow up olması gibi, standart yolla böyle bir fonksiyonelin sonlu zamanda blow up olduğu bulunabilir [5]. Başarılı bir şekilde kullanılan bu metotlardan bazılarını basit örneklerle kısaca tanımlayacağız. Bunlardan bazıları aşağıya çıkarılmıştır [72].

4.2. Konkavlık Metodu

Bu metot Levine [37] tarafından verildi ve bu metot geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Konkavlık metodunun temel fikri, problemin lokal çözümünün varlığı koşulu altında tanımlanan, denklemi ve sınır koşullarını temsil eden pozitif bir $F(t)$ fonksiyonelini inşa etmek ve daha sonra bazı $\alpha>0$ sayısı için t zamanına bağlı bir $F^{-\alpha}$ konkav fonksiyonu göstermektir. Bu işlemlerde F fonksiyoneli

$$\frac{d^2F^{-\alpha}}{dt^2}\leq 0 \tag{4.2}$$

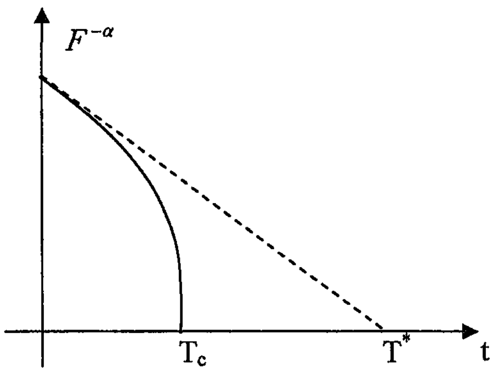
diferensiyel eşitsizliğini sağlar. Bu eşitsizliğin bir kez integralinin alınması ile $F(t)$ için alt sınır

$$F^{\alpha}(t)\geq\frac{F^{\alpha+1}(0)}{F(0)-t\alpha F'(0)} \tag{4.3}$$

eşitsizliği elde edilir. $F^{\alpha}(t)$ fonksiyonu bu yüzden $F'(0)>0$ koşuluyla sonlu zamanda blow up olan bir fonksiyon ile alttan sınırlıdır. O zaman blow up

$$T^{*}=\frac{F(0)}{\alpha F'(0)}>0 \tag{4.4}$$

T^{*} zamanından önce veya tam T^{*} zamanında olmalıdır. Bu tartışma kendi başına $F(t)$ fonksiyonelinin gerçekten blow up olduğunu tespit etmez fakat kesinlikle gösterir ki çözüm klasik anlamda bütün zamanlar için var olamaz.



Şekil 4.2. $F^{-\alpha}(t)$ fonksiyonu.

Şekil 4.2. de görüldüğü gibi konkavlık metodunun geometrik yorumu şöyledir. Bu grafikte; $F^{-\alpha}(t)$ nin grafiği, $y = F^{-\alpha-1}(0)[F(0)-\alpha t F'(0)]$ doğru grafiğinin altında kalır. $F'(0)>0$ iken bu doğrunun eğimi negatiftir ve $F^{-\alpha}$ fonksiyonu konkav olduğundan o zaman bu doğrunun altında kalır ve böylece çözümün bu noktaya kadar devam etmesi koşuluyla $T_c < \infty$ noktasında t eksenini keser.

Konkavlık metodunu bazı $T>0$ ve $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 1)$ sınırlı bir bölge olmak üzere $\Omega \times (0,T)$ de tanımlı

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^p \tag{4.5}$$

kısmi diferansiyel denklemine uygulayarak açıklamaya çalışalım. Sonlu zamanda blow up olması için $p>1$ olmalıdır. (Keyfi $p>1$ değerleri için u^p yerine $u|u|^{p-1}$ almalıyız.) $u = u(x,t)$ çözümü

$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t>0 \tag{4.6}$$

sınır koşulunu ve aynı zamanda

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \tag{4.7}$$

başlangıç değerini sağlasın. Yukarıda verilen (4.5) - (4.7) problemi için uygun bir $F(t)$ fonksiyoneli

$$F(t) = \int_0^t \|u\|_2^2 \, d\eta + (T-t)\|u_0\|_2^2 + \beta(t+\tau)^2 \tag{4.8}$$

şeklinde oluşturulur ve burada $T, \beta, \tau > 0$ sonra seçileceklerdir. Bu fonksiyonel Levine [37] tarafından Hilbert uzayında

$$Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$$

soyut denklemi ele alınırken seçilen fonksiyonel olup burada P ve A simetrik doğrusal (muhtemelen sınırsız) operatörler ve $\mathcal{F}(u)$ fonksiyonu da uygun doğrusal olmayan bir fonksiyondur. Belirtelim ki (4.5) - (4.7) probleminin doğrusallaştırılmış hali için çözümü kararlıdır ve gerçekten çözümler hızlı olarak sıfıra azalır. Böylece herhangi bir blow up doğrusal olmayan terimden dolayıdır.

Konkavlık metodunu uygulamak için fonksiyonelinin (4.2) ile verilen eşitsizliği sağladığını göstermek gereklidir. Bu yüzden $F > 0$ için

$$\frac{d^2F^{-\alpha}}{dt^2} = -\alpha F^{-\alpha-2}\left[F.F'' - (1+\alpha)(F')^2\right] \tag{4.9}$$

olduğundan, F fonksiyonelinin

$$FF'' - (1+\alpha)(F')^2 \geq 0 \tag{4.10}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağladığının gösterilmesinin gerekli olduğunu görürüz. Böylece (4.8) fonksiyonelinin diferansiyelini alarak

$$\frac{dF}{dt} = 2\int_0^t (u, u_\eta)\, d\eta + 2\beta(t+\tau) \tag{4.11}$$

elde ederiz. Burada $(.,.)$, $L_2(\Omega)$ uzayında iç çarpımı belirtir. (4.11) eşitliğinde (4.5) denkleminden u_η nın eşiti kullanılıp, Green formülünden de yararlanılıp, integral alınarak F' yeniden yazılırsa

$$\frac{dF}{dt} = -2\int_0^t \|\nabla u\|_2^2\, d\eta + 2\int_0^t \int_\Omega u^{p+1} dx d\eta + 2\beta(t+\tau) \tag{4.12}$$

elde edilir. Bu ifade diferansiyellenerek, biraz düzenlenir ve kısmi integrasyon (Green formülü) uygulanırsa

$$F''(t) = 4\int_0^t (\Delta u, u_\eta)\, d\eta - 2\|\nabla u_0\|_2^2 + 2\int_\Omega u^{p+1} dx + 2\beta \tag{4.13}$$

bulunur. (4.5) denkleminden Δu eşiti (4.11) eşitliğinde yerine yazılarak

$$F''(t) = 4\int_0^t \|u_\eta\|_2^2\, d\eta - \frac{4}{p+1}\int_\Omega u^{p+1} dx + \frac{4}{p+1}\int_\Omega {u_0}^{p+1} dx - 2\|\nabla u_0\|_2^2 + 2\int_\Omega u^{p+1} dx + 2\beta$$

bulunur. Bu son eşitlik, (4.10) eşitsizliğinin sol tarafı hesaba katılarak yeniden düzenlenirse

$$F''(t) = 4(\alpha+1)\left[\int_0^t \|u_\eta\|_2^2\, d\eta + \beta\right] - 4\alpha\int_0^t \|u_\eta\|_2^2\, d\eta - 2(2\alpha+1)\beta$$

$$+2\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\int_{\Omega}u^{p+1}dx+4\left[\frac{1}{p+1}\int_{\Omega}u_0^{\,p+1}dx-\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2\right] \tag{4.14}$$

elde edilir.

(4.10) eşitsizliğinin sol tarafını oluşturmak için (4.14), (4.8), (4.11) eşitliklerini kullanarak

$$FF''-(1+\alpha)(F')^2=4(\alpha+1)S^2+4(\alpha+1)(T-t)\|u_0\|_2^2\left(\int_0^t\|u_\eta\|_2^2\,d\eta+\beta\right)$$

$$+F\left\{-4\alpha\int_0^t\|u_\eta\|_2^2\,d\eta-2(2\alpha+1)\beta+2\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\int_{\Omega}u^{p+1}dx\right.$$

$$\left.+4\left[\frac{1}{p+1}\int_{\Omega}u_0^{\,p+1}dx-\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2\right]\right\} \tag{4.15}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada S^2 niceliği

$$S^2=\left[\int_0^t\|u\|_2^2\,d\eta+\beta(t+\tau)^2\right]\left[\int_0^t\|u_\eta\|_2^2\,d\eta+\beta\right]-\left[\int_0^t(u,u_\eta)\,d\eta+\beta(t+\tau)\right]^2$$

ile tanımlanıp Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliğinden dolayı negatif değildir.

(4.5) kısmi diferansiyel denklemini kullanarak ve kısmi integrasyon alarak gösterebiliriz ki

$$\int_0^t\|u_\eta\|_2^2\,d\eta=\int_0^t(u_\eta,\Delta u+u^p)\,d\eta$$

$$=-\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2+\frac{1}{p+1}\int_{\Omega}u^{p+1}dx-\frac{1}{p+1}\int_{\Omega}u_0^{\,p+1}dx \tag{4.16}$$

olur.

(4.15) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk iki terim negatif değildir ve bu sebeple onları ihmal ederiz. Daha sonra (4.16) eşitliğini (4.15) eşitliğinin sağ tarafındaki kıvrık parantez içindeki ilk terim yerine yazarak

$$FF''-(1+\alpha)(F')^2\geq 2\alpha F\|\nabla u\|_2^2+\left[2\left(\frac{p-1}{p+1}\right)-\frac{4\alpha}{p+1}\right]F\int_{\Omega}u^{p+1}dx$$

$$+F\left[\frac{4(1+\alpha)}{p+1}\int_{\Omega}{u_0}^{p+1}dx-2(1+\alpha)\|\nabla u_0\|_2^2-2(2\alpha+1)\beta\right]$$

elde ederiz. Sağ tarafın ikinci terimini yok etmek için

$$\alpha=\frac{p-1}{2}>0 \tag{4.17}$$

biçiminde seçeriz. Bu α değeri yerine yazılırsa bu eşitsizlik

$$FF''-(1+\alpha)(F')^2\geq 2\alpha F\|\nabla u\|_2^2-2\beta pF+2(p+1)F\left[\frac{1}{p+1}\int_{\Omega}{u_0}^{p+1}dx-\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2\right] \tag{4.18}$$

şekline getirilir. Şimdi başlangıç verilerini

$$\int_{\Omega}{u_0}^{p+1}dx>\left(\frac{p+1}{2}\right)\|\nabla u_0\|_2^2 \tag{4.19}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçelim. Daha sonra β sabitini o kadar küçük seçelim ki

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega}{u_0}^{p+1}dx-\left(\frac{p+1}{2p}\right)\|\nabla u_0\|_2^2>\beta \tag{4.20}$$

kısıtlamasını sağlasın. β sabiti bu anlamda seçildikten sonra hemen görülür ki (4.18) eşitsizliğinden $FF''-(1+\alpha)(F')^2\geq 0$ olup F fonksiyonelinin (4.2) eşitsizliğini sağladığı görülür. Böylece (4.5) - (4.7) probleminin $u(x,t)$ çözümü, klasik anlamda (4.4) eşitliği ile verilen T^* zamanının ötesinde mevcut olamaz. Mevcut durumda (4.4) eşitliğine göre

$$T^*=\frac{T\|u_0\|_2^2+\beta\tau^2}{\beta\tau(p-1)},\quad T^*\in(0,T)$$

olur. (4.8) eşitliğinde tanımlanan F fonksiyonelindeki T sayısı başlangıçta

$$T\geq T^*=\frac{T\|u_0\|_2^2+\beta\tau^2}{\beta\tau(p-1)}$$

olacak şekilde seçilmesi gerekecek. Bu yüzden T sayısı

$$T \geq \frac{\beta \tau^2}{\beta \tau (p-1) - \|u_0\|_2^2} \tag{4.21}$$

sağlanacak şekilde seçilmelidir. β katsayısı mevcut durumda (4.20) ile sınırlandırıldı. Şimdi

$$\tau > \frac{\|u_0\|_2^2}{\beta (p-1)} \tag{4.22}$$

olacak şekilde öyle büyük bir τ seçebiliriz ki bu durumda (4.21) eşitsizliği sağlanır.

Böylece, (4.5) - (4.7) probleminin çözümü T^* zamanında veya T^* zamanından önce F ölçümünde blow up olmalıdır veya düzenliliğin eksikliğinden çözümün varlığı yok olmalıdır. Bu durumda çözüm gerçekten blow up olur.

Konkavlık metodunun birçok ilginç genellemeleri mevcuttur. Örneğin, Levine ve Payne [40, 41] kısmi diferansiyel denklem doğrusal fakat sınır koşulları doğrusal olmadığında sonlu zamandaki blow up olayının nasıl olabileceğini gösterdiler. Levine [39] bir doğrusal olmayan Euler-Poisson-Darboux denkleminin çözümünün var olmaması teoremini oluşturarak, kısmi diferensiyel denklemlerdeki katsayıların singüler olması durumunda konkavlık metodunun nasıl uygulandığını gösterdi. Aynı zamanda, Kalantarov ve Ladyzhenskaya [30]

$$FF'' - (1+\alpha)(F')^2 \geq -aF^2 - bFF' \tag{4.23}$$

genelleştirilmiş konkavlık eşitsizliğinin çözümlerin var olmaması tartışmasına nasıl genişletileceğini gösterdiler.

$b = 0$ olduğu zaman niçin böyle olduğunu göstermek zor değildir. Bu durumda (4.23) eşitsizliğinin $-\alpha F^{-\alpha-2}$ ile çarpımından

$$\left(F^{-\alpha}\right)'' \leq a\alpha F^{-\alpha}$$

elde edilir. $\omega = \sqrt{a\alpha} > 0$ ve $X = F^{-\alpha}$ olsun. Böylece bu eşitsizlik

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\omega t}\left(\frac{dX}{dt} + \omega X\right)\right] \leq 0 \tag{4.24}$$

şeklinde düzenlenebilir. $X_0' + \omega X_0 = Q_0 < 0$ konarak (4.24) eşitsizliğinden integrasyonla

$$\frac{1}{X(t)} = F^{\alpha}(t) \geq \frac{1}{X_0 e^{-\omega t} + (Q_0/2a)(e^{\omega t} - e^{-\omega t})}$$

bulunabilir. Bu ifadenin sağ tarafı

$$T^* = \frac{1}{2\omega}\log\left(1 - \frac{2\omega X_0}{Q_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2\omega}\log\left(1 + \frac{2\omega F(0)}{\alpha F'(0) - \omega F(0)}\right)$$

olduğu zaman blow up olur. Böylece blow up

$$F'(0) > \frac{\omega}{\alpha}F(0) = \sqrt{\frac{a}{\alpha}}F(0)$$

şartıyla gerçekleşebilir. Kalantarov ve Ladyzhenskaya [30] kendi metotlarıyla kısmi diferansiyel denklemler için sonlu zamanda blow up olduğunu gösteren birçok örnek verdiler.

Konkavlık metodunun diğer bir gösterimi, Flavin ve Rionero' nun kitabının 108–115 sayfalarında verilmiştir [15]. Bu metodu göstermek için bu yazarlar, doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin bir çözümü ve doğrusal olmayan elastik rod denkleminin bir çözümü için konkavlık tekniğinin oluşturulan çözümlerin sonlu zamandan sonra yokluğunu göstermek amacıyla nasıl uygulanabileceğini açıklamışlardır. Bu yazarlar aynı zamanda, bu kitabın 305. sayfasında Monge-Ampère tipi bir denklemin çözümünün global olmamasını nasıl gerçekleştirebileceklerini açıklamışlardır.

Bu metotlardan farklı olarak Zhou [84, 85] bir teknik geliştirdi ve bu metotla birçok problemin çözümlerinin sonlu zamanda blow up olduğunu gösterdi.

4.3. Öz Fonksiyon Metodu

Bu metodu açıklamak için (4.5) - (4.7) başlangıç değer problemini tekrar ele alalım. $x \in \Omega$ için $u(x,t) > 0$ olsun. ϕ, Ω bölgesi için zar (membrane) probleminin ilk öz fonksiyonu olsun yani ϕ, aşağıdaki sınır değer problemini sağlar;

$$\Delta\phi + \lambda_1\phi = 0, \quad \Omega \text{ da},$$

$$\phi = 0, \quad \partial\Omega \text{ da} \tag{4.25}$$

burada λ_1 en düşük öz değerdir. Courant nodal line teoreminden biliniyor ki Ω bölgesinde $\phi > 0$ dır ve bu gerçek burada önemlidir.

Öz fonksiyon metodunu tanımlamak için F fonksiyonelini

$$F(t) = \int_\Omega \phi(x) u(x,t)\, dx = (\phi, u) \tag{4.26}$$

şeklinde inşa edelim. Bu fonksiyonel diferansiyellenerek, (4.5) kısmi diferansiyel denklemi, (4.6) sınır koşulu ve (4.25) deki sınır koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} F' &= (\phi, u_t) = (\phi, \Delta u + u^p) \\ &= -(\nabla\phi, \nabla u) + (\phi, u^p) = (\Delta\phi, u) + (\phi, u^p) \\ &= -\lambda_1 (\phi, u) + (\phi, u^p) \end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Sonra Hölder eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\int_\Omega \phi u dx \le \left(\int_\Omega \phi dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int_\Omega \phi u^p dx\right)^{1/p}$$

bulunur. Kabul edelim ki ϕ normalleştirilmiş yani $\int_\Omega \phi dx = 1$ olsun. O zaman Jensen eşitsizliğinden

$$\int_\Omega \phi u^p dx \ge \left(\int_\Omega \phi u dx\right)^p$$

olup bu eşitsizlik (4.27) eşitliğinde kullanılırsa

$$\frac{dF}{dt} \ge -\lambda_1 F + F^p \tag{4.28}$$

elde edilir.

İspatı çelişki ile elde etmeye çalışalım. Kabul edelim ki (4.5) - (4.7) probleminin çözümü bütün $t > 0$ lar için var olsun. Başlangıç verisini

$$F^p(0) - \lambda_1 F(0) > 0 \tag{4.29}$$

olacak şekilde alalım. Sürekliliğe göre $t_1 > 0$ sayısı vardır ki

$$Q(F) \geq F^p - \lambda_1 F$$

ile tanımlanan Q fonksiyonu $[0,t_1)$ aralığında pozitiftir. $[0,t_1)$ aralığında $Q' > 0$ olduğundan

$$Q(F(t_1)) \geq Q(F(0)) > 0$$

olur. Bu yüzden $t_1 = \infty$ veya çözümün varlık aralığının limitidir. Böylece (4.28) eşitsizliğinin sağ tarafı pozitiftir ve buradan değişkenlerin ayrılması ile

$$t \leq \int_{F(0)}^{F(t)} \frac{dF}{F^p - \lambda_1 F} \leq \int_{F(0)}^{\infty} \frac{dF}{F^p - \lambda_1 F} < \infty \tag{4.30}$$

bulunabilir. Açıkça t sonludur ve böylece çelişki gerçekleştirilmiş oldu.

Yukarıdaki iddianın birçok genellemesi vardır. Levine [42] çözümlerin pozitifliği kısıtlamasının gerekli olmadığını göstermiş ve bu fikirlerini diğer değişik yönlere genişletmiştir. Ni ve arkadaşları [58] da ilginç ve özenli bir biçimde öz fonksiyon metodunu kullanmışlardır. Öz fonksiyon metodunun ideal olarak konveks doğrusal olmayan terimlerin varlığında kullanılması uygundur. Örneğin, $f(u)$, u nun konveks fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u)$$

tipindeki kısmi diferansiyel denklemlere gayet iyi uygulanmaktadır. Örneğin patlama dinamiğinde bir $f(u)$ konveks fonksiyonu için $f(u) = e^u$ olur. Logan [53] kitabında öz fonksiyon metodunun uygulamalarından kısaca bahseder ve Gelfand problemi olarak bilinen, sınırda sıfır ve başlangıç verisi ile

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta e^u$$

kısmi diferansiyel denklemine atıfta bulunur.

4.4. Açık Eşitsizlik Metotları

Bu sınıfa birçok teknik girmektedir. Bu metodun temel fikri pozitif tanımlı bir fonksiyonel seçmek ve sonlu zamanda singüler olan t ye bağlı bir fonksiyonunun altında sınırlı olduğunu göstermektir. Bu metodu matematiksel kaynaklarda porous medium denklemi olarak bilinen, $m > 0$ bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\left(u^m\right) \tag{4.31}$$

kısmi diferansiyel denklemine uygulayarak nasıl çalıştığını gösterelim. Bu denklemi Levine ve Payne [40] de olduğu gibi zamanda geriye giderek çalışır ve daha sonra zamanı tersine çevirebiliriz. Bu nedenle (4.31) denklemi yerine $m > 1$, $T < \infty$ ve Ω, R^n de sınırlı bir bölge olmak üzere $\Omega \times (0,T)$ bölgesinde tanımlı

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta\left(u^m\right) \tag{4.32}$$

denklemini ele alalım. $\partial\Omega$, Ω bölgesinin sınırı olmak üzere

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.33}$$

olsun.

Levine ve Payne [40] denklemini bir boyutlu halde fakat uzamsal olarak tüm gerçel doğrusunda icelediler. Bu zor bir problemdir. Porous medium denklemi matematiksel biyolojide, özellikle böcekler ve diğer hayvanların dağılımlarını tanımlamak için uygulanmıştır [57]. (4.31) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m\nabla\left(u^{m-1}\nabla u\right)$$

gibi yazılabilir ve bu denklem doğrusal olmayan $\kappa = mu^{m-1}$ katsayılı yayınım (difüzyon) denklemi olarak bilinir. Yayılmaya bağlı çözüm standart doğrusal (yani $\kappa = 0$ iken) yayınım denkleminin çözümü ile ilgili bazen arzu edilmeyen etkileri çıkarır. Burada düzensizlik sonsuz hızla ilerler. Logan [53] porous medium denkleminin, porous katı matrisinde sıvı akışın akışkan dinamik denklemlerinden nasıl elde edilebileceğini göstermiştir.

(4.32) denkleminin çözümünün global yokluğunu göstermek için $m > 1$ olmak üzere bu denklemi u ile çarparak

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u\|_2^2 = m\int_\Omega u^{m-1}|\nabla u|^2\,dx = \frac{4m}{(m+1)^2}\left\|\nabla u^{(m+1)/2}\right\|_2^2$$

buluruz. λ_1 (4.25) zar denkleminin en düşük öz değeri olmak üzere Ω bölgesinde tanımlı ve sınırdaki değeri sıfır olan $f(x)$ fonksiyonu için

$$\|\nabla f\|_2^2 \geq \lambda_1 \|f\|_2^2$$

olan Poincaré eşitsizliğini yukarıdaki eşitliğin ikinci tarafında kullanırsak

$$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 \geq \frac{8m\lambda_1}{(m+1)^2}\int_\Omega u^{m+1}dx \tag{4.34}$$

elde ederiz. Ω bölgesinin Lebesque ölçümü $M(\Omega)$ olmak üzere

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \left[M(\Omega)\right]^{(m-1)/(m+1)}\left(\int_\Omega u^{m+1}dx\right)^{2/(m+1)}$$

formundaki Hölder eşitsizliğinin (4.34) eşitsizliğinde kullanımı ile

$$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 \geq \frac{8m\lambda_1}{(m+1)^2 M^{(m-1)/2}}\|u\|_2^{m+1} \tag{4.35}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik integrallenerek

$$\|u(t)\|_2 \geq \frac{1}{\left(\|u(0)\|_2^{(m-1)} - At\right)^{1/(m-1)}} \tag{4.36}$$

bulunup burada A sabiti

$$A = \frac{4m(m-1)\lambda_1}{(m+1)^2 M^{(m-1)/2}}$$

ile verilir. (4.36) eşitsizliğinin sağ tarafı $T^* = \frac{\|u_0\|_2^{m-1}}{A}$ noktasında blow up olur ve bu u fonksiyonunun varlık aralığı için üst sınırı temsil eder.

Hemen belirtelim ki (4.5) - (4.7) problemi bu kısımdaki benzer metotla çözülebilir. Bunu görmek için

$$F(t) = \|u(t)\|_2^2$$

olsun. Bu fonksiyonelin diferansiyeli alınırsa

$$F'(t) = -2\|\nabla u\|_2^2 + 2\int_\Omega u^{p+1}dx$$

elde edilir. (4.5) denklemi u_t ile çarpılıp integrallenirse

$$2\int_0^t \|u_\eta\|_2^2 d\eta + \|\nabla u\|_2^2 = \frac{2}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}dx + \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{2}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1}dx$$

elde edilir. Burada $\|\nabla u\|_2^2$ teriminin eşiti F' eşitliğindeki yerine yazılması ve $M(\Omega)$, Ω bölgesinin ölçümü olmak üzere Hölder eşitsizliğinden yararlanarak

$$\int_\Omega u^{p+1}dx \geq F^{(p+1)/2}\left[M(\Omega)\right]^{-(p-1)/2}$$

eşitsizliğinin kullanılması ile

$$F' = \frac{2(p-1)}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}dx + 4\int_0^t \|u_\eta\|_2^2 d\eta + 2\left[\frac{2}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1}dx - \|\nabla u_0\|_2^2\right]$$

$$\geq \frac{2(p-1)}{(p+1)\left[M(\Omega)\right]^{\frac{(p-1)}{2}}}F^{(p+1)/2} + 2\left[\frac{2}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1}dx - \|\nabla u_0\|_2^2\right]$$

eşitsizliği elde edilir. (4.19) koşulunun sağlanması şartıyla

$$F' \geq \frac{2(p-1)}{(p+1)\left[M(\Omega)\right]^{\frac{(p-1)}{2}}}F^{(p+1)/2}$$

eşitsizliği elde edilir. Kolayca görülür ki bu eşitsizlikten (4.36) eşitsizliğine benzer bir tahmin elde edilebilir ve bu nedenle varlık aralığı için bir üst sınır belirlenebilir.

4.5. Çok Katlı Öz Fonksiyon Metodu

Bu metot iletimli doğrusal olmayan terim olduğu zaman çalışır ve doğrusal olmayan iletimli terimler mekanikte sıklıkla meydana geldiğinden bu metot önemlidir. Bunu göstermek için bazı $\beta > 0$ ve her bir $\delta > 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u^{2+\delta}, \quad x \in (0,1),\, t > 0,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \qquad (4.37)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1)$$

başlangıç sınır değer problemini inceleyelim. $\{x : x \in (0,1)\}$ durumunda uzamsal bölge için zar probleminin ilk öz fonksiyonu ϕ ile belirtilsin. Buna göre

$$\phi = \sin \pi x$$

alabiliriz. Şimdi $F(t)$ fonksiyonelini $n > 1$ sayısı sonradan seçilmek üzere

$$F(t) = (\phi^n, u)$$

ile tanımlayalım. F fonksiyonelinin diferansiyellenmesi ve (4.37) probleminin kullanılması ile

$$\frac{dF}{dt} = (\phi^n, u_t) = (\phi^n, -uu_x + u_{xx} + \beta u^{2+\delta})$$

$$= -\pi^2 nF + n(n-1)\int_0^1 \phi^{n-2}\phi_x u^2 dx + \beta \int_0^1 \phi^n u^{2+\delta} dx + \frac{1}{2} n \int_0^1 \phi^{n-1}\phi_x u^2 dx \qquad (4.38)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim pozitif olup atılırsa ve ϕ_x alttan $-\pi$ ile sınırlı olup (4.38) eşitliğinde kullanılırsa

$$\frac{dF}{dt} = -\pi^2 nF + \beta \int_0^1 \phi^n u^{2+\delta} dx - \frac{1}{2} n\pi \int_0^1 \phi^{n-1} u^2 dx \qquad (4.39)$$

bulunur. Hölder eşitsizliğinden

$$\int_0^1 \phi^{2n/(2+\delta)} u^2 dx \le \left(\int_0^1 1 dx\right)^{\delta/(2+\delta)} \left(\int_0^1 \phi^n u^{2+\delta} dx\right)^{2/(2+\delta)}$$

olup $n = 1 + 2/\delta$ seçilirse

$$\int_0^1 \phi^{1+2/\delta} u^{2+\delta} dx \ge \left(\int_0^1 \phi^n u^{2+\delta} dx\right)^{2/(2+\delta)} \qquad (4.40)$$

olduğu görülür. (4.40) eşitsizliğinin (4.39) eşitsizliğinde kullanımından

$$\frac{dF}{dt} \ge -\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 F + \beta\left(\int_0^1 \phi^{2/\delta} u^2 dx\right)^{(2+\delta)/2} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\int_0^1 \phi^{2/\delta} u^2 dx \qquad (4.41)$$

bulunur. Cauchy-Schwartz-Bunyakowski eşitsizliği kullanılarak

$$\int_0^1 \phi^{2/\delta} u^2 dx \geq \frac{\left(\int_0^1 \phi^{2/\delta} u dx\right)^2}{\int_0^1 \phi^{2+2/\delta} dx} \geq \left(\int_0^1 \phi^{1+2/\delta} u dx\right)^2 \tag{4.42}$$

olduğu görülür. Eğer $G(t)$ ile

$$G(t) = \int_0^1 \phi^{2/\delta} u^2 dx$$

eşitliğini tanımlarsak, (4.42) eşitsizliğinden

$$G(t) \geq F^2(t)$$

olur. Böylece (4.41) eşitsizliğinden

$$\frac{dF}{dt} \geq -\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 G^{1/2} + \beta G^{(2+\delta)/2} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)G \tag{4.43}$$

olur. $R(F)$ ile

$$R(F) = \beta F^{2+\delta}(t) - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)F^2(t) - \left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 F(t) \tag{4.44}$$

eşitliğini tanımlayalım. Bu noktada kabul edelim ki $u_0(x)$ başlangıç değer fonksiyonu

$$R(F(0)) > 0$$

eşitsizliğini sağlasın. Sürekliliğe göre $t_1 > 0$ sayısı var ki $t \in [0, t_1)$ için

$$R(F(t)) > 0$$

olur. $R'(F)$ nin hesaplanması ile $t \in [0, t_1)$ için $R(F'(t)) > 0$ bulunur. Buna göre R fonksiyonu bu aralıkta artandır. Böylece $G^{1/2} \geq F$ olduğundan

$$R(G^{1/2}(t)) \geq R(F(t)), \quad t \in [0, t_1)$$

olur. Bu nedenle (4.43) eşitsizliğinden $t \in [0, t_1)$ için

$$\frac{dF}{dt} \geq R(F) \tag{4.45}$$

bulunur. Hem F' hem de $R(F)$, $[0,t_1)$ aralığında artan olup bu nedenle $R(F(t_1)) \neq 0$ dır. Böylece t_1 ya sonsuzdur ya da çözümün varlığının limitine eşittir. Şimdi (4.45) eşitsizliğinde değişkenlerin ayrılması ve integrasyon ile

$$t_1 \leq \int_{F(0)}^{F(t)} \frac{dF}{R(F)} \leq \int_{F(0)}^{\infty} \frac{dF}{R(F)} < \infty$$

olup t_1 in sonsuz olduğu durum düşünülürse bu bir çelişkidir. Buradan (4.37) probleminin çözümünün sonlu zamanda global olarak yok olduğu sonucu çıkar.

Levine ve arkadaşları [45] gerçekten (4.37) probleminin çözümünün sonlu zamanda blow up olduğunu göstermişlerdir.

Bu kısmın konusuyla bağlantılı olarak Howes [28, 29] küçük difüzyonlu parabolik denklemlerin sınır tabakalarının gelişiminde iletim terimlerinin etkisini detaylarıyla çalıştı. Howes [28]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,u) + \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,u) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty),$$

$$u(x,0,\varepsilon) = \psi(x,\varepsilon), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0,t,\varepsilon) = \alpha, \quad u(1,t,\varepsilon) = \beta, \quad t \geq 0$$

başlangıç sınır değer probleminin sınır tabakası çözümlerinin kararlığını inceledi. Howes [29] $\varepsilon \to 0$ iken

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x},t,u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(\mathrm{x},t,u) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}$$

kısmı diferansiyel denkleminin çözümünü inceledi.

4.6. Logaritmik Konvekslik Metodu

Bu bölümün amacı her ne kadar sonlu zamanda çözümleri blow up olan problemleri ele almak ise de birçok fiziki durum vardır ki çözümlerin çok hızlı büyümesi (üstel büyüme gibi) aynı şekilde önemlidir. Bu nedenle çözümlerin üstel büyümesine yol açan bir teknik ele alacağız ki bu logaritmik konvekslik olarak adlandırılmaktadır. Logaritmik konvekslik metodu bazen $\alpha \to 0$ iken konkavlık tekniğinin limitidir ve bu nedenle sonlu zamanda blow up tahminini vermez. Logaritmik konvekslik salt büyüme tahminlerinden ziyade birçok diğer faydalı sonuçlar üretebilen bir metottur. Birçok durumda sürekli bağımlılığı gerçekleştirmek için uygun olarak konulmamış problemlerde bu tekniğin kullanımı Ames ve Straughan [2] ve Payne [63] nın kitablarında detaylarıyla incelenmiştir. Burada Logaritmik konvekslik tekniğinin doğrusal bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü için nasıl bir büyüme tahminine yol açacağını göstereceğiz.

$\Omega \subset R^n$ sınırlı bir bölge, k pozitif bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + ku, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \tag{4.46}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

Başlangıç sınır değer problemini ele alalım.

Eğer k sabiti yeterince küçük ise iyi bilinmektedir ki (4.46) probleminin çözümü üstel olarak hızlı bir şekilde sıfıra azalır. Bu sebeple k sabiti üzerideki koşullar büyümeyi garanti edecek. Logaritması t değişkenine bağlı bir konveks fonksiyon oluşturalım. Bunun için F fonksiyonelini

$$F(t) = \|u(t)\|_2^2 \tag{4.47}$$

ile tanımlayalım. F fonksiyonelinin diferansiyeli

$$F' = 2(u, u_t)$$

olup bunun diferansiyeli ve (4.46) probleminde diferansiyel denklemin kullanımı ile

$$F'' = 2\|u(t)\|_2^2 + 2(u, u_{tt})$$

$$= 2\|u(t)\|_2^2 + 2(u, \Delta u_t + ku_t)$$

elde edilir. İki defa kısmi integral ve (4.46) probleminde diferansiyel denklemin kullanımı

$$F'' = 2\|u(t)\|_2^2 + 2(\Delta u, u_t) + 2k(u, u_t)$$

$$= 2\|u(t)\|_2^2 + 2(u_t, u_t - ku) + 2k(u, u_t)$$

$$= 4\|u(t)\|_2^2$$

eşitliğine yol açar. Böylece bu eşitliğin ve Cauchy-Schwartz-Bunyakowski eşitsizliğinin kullanımı ile

$$FF'' = 4\|u(t)\|_2^2 \|u(t)\|_2^2$$

$$\geq 4(u, u_t)^2$$

$$= (F')^2$$

elde edilir. Bu da

$$FF'' - (F')^2 \geq 0$$

demektir. $F > 0$ için bu eşitsizliğin F^2 ile bölünmesi ile

$$\frac{d^2}{dt^2} \log F \geq 0 \qquad (4.48)$$

bulunur. Burada $F(t)$ nin t değişkenine bağlı logaritmik olarak bir konveks fonksiyon olduğu görülmektedir.

(4.48) eşitsizliğinin integrali alınarak

$$F(t) \geq F(0) \exp\left[\frac{F'(0)}{F(0)} t\right] \qquad (4.49)$$

bulunur. Bu eşitsizlik

$$\|u(t)\|_2^2 \geq \|u_0(t)\|_2^2 \exp\left[\frac{2(u(0), u_t(0))}{\|u_0(t)\|_2^2} t\right] \qquad (4.50)$$

şeklinde yeniden yazılarak görülmektedir ki büyümenin olabilmesi için

$$\left(u(0),u_t(0)\right)>0$$

olması gerektiği veya (4.46) probleminde diferansiyel denklemin kullanımı ile bunun

$$k\|u_0\|_2^2 \geq \|\nabla u_0\|_2^2 \tag{4.51}$$

koşuluna denk olduğu görülür. Böylece k sabiti ve başlangıç verisi (4.51) eşitsizliğini sağlarsa çözüm en azından $L_2(\Omega)$ normunda üstel olarak büyüyecektir.

5. BÖLÜM

DAMPİNG TERİMLİ DOĞRUSAL OLMAYAN BİR DALGA DENKLEMİNİN BİR SINIFI İÇİN ÇÖZÜMLERİN GLOBAL OLMAMASI (BLOW UP)

5.1. Giriş

Bu bölümde damping terimli doğrusal olmayan bir dalga denkleminin bir sınıfı için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin global yokluğunu çalışacağız:

$$u_{tt} = div\sigma(\nabla u) + \Delta u_t - \Delta^2 u, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \tag{5.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \tag{5.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{5.3}$$

burada $\Omega \subset R^n$ sınırlı bir bölge, $\partial\Omega$ bu bölgenin yeterince düzgün sınırı, ν sınıra dış normal ve $\sigma(s)$ verilen doğrusal olmayan fonksiyondur.

Doğrusal damping veya dissipative terimli doğrusal olmayan evolution denklemleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır [3, 10, 59-61, 69, 83]. Bu çalışmada, (5.1) - (5.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin negatif enerjiyle global yokluğunu (blow up) gerçekleştirmekteyiz. İspat tekniğimiz [83] daki tekniğe benzerdir.

5.2. Çözümler İçin Blow up

Bu amaçla, enerji denklemini

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \int_\Omega \int_{[0,\nabla u]} \sigma(s)dsdx, \quad t \geq 0 \tag{5.4}$$

ile tanımlarız, burada

$$\sigma(s) \in \nabla\omega(s), \ \omega(s) \in C^1\left(R^n\right), \quad s \in R^n, \quad \sigma(s)s \leq k\int_{[0,s]} \sigma(\tau)d\tau \leq -k\beta|s|^{m+1} \tag{5.5}$$

(5.4) ve (5.5) teki integraller R^n de 0 ve ∇u (sırasıyla 0 ve s) yu birbirine bağlayan keyfi eğriler boyunca doğru integrallerdir, $k > 2$ ve $\beta > 0$, aynı zamanda $1 < m \leq 3$ sabitlerdir.

Teorem 5.2.1. u, (5.1) - (5.3) probleminin çözümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar geçerli olsun:

$$u_0 \in H_0^2(\Omega),\ u_1 \in L_2(\Omega),$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_2^2 + \int_\Omega \int_{[0,\nabla u]} \sigma(s)\,ds\,dx < 0. \tag{5.6}$$

O zaman u çözümü

$$T \le \begin{cases} \left[t_1^{\frac{3-m}{2}} + \dfrac{3-m}{2C_8(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)} \right]^{\frac{2}{3-m}}, & m < 3 \\ t_1 \exp \dfrac{1}{C_8(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)}, & m = 3 \end{cases}$$

olacak şekilde sonlu zamanda blow up olur, burada t_1 ve y sırasıyla (5.17) ve (5.18) ile tanımlanacak, C_8 ve $\alpha > 1$ sabitler olup sonradan tanımlanacaklardır.

İspat. (5.1) denklemini u_t ile çarpar ve yeni denklemin Ω üzerinde integralini alarak

$$E'(t) + \|\nabla u_t(t)\|_2^2 = 0, \tag{5.7}$$

$$E(t) \le E(0) < 0,\quad t \ge 0$$

buluruz. F fonksiyonelini

$$F(t) = \|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \tag{5.8}$$

ile tanımlayalım. O zaman

$$F'(t) = 2(u, u_t) + \|\nabla u(t)\|_2^2, \tag{5.9}$$

$$F''(t) = 2\left(\|u_t(t)\|_2^2 - \|\Delta u(t)\|_2^2 - \int_\Omega \sigma(\nabla u)\nabla u\,dx \right)$$

$$\ge 2\left(\|u_t(t)\|_2^2 - \|\Delta u(t)\|_2^2 - k\int_\Omega \int_{[0,\nabla u]} \sigma(s)\,ds\,dx \right)$$

$$\ge 2\left(2\|u_t(t)\|_2^2 - (k-2)\int_\Omega \int_{[0,\nabla u]} \sigma(s)\,ds\,dx - 2E(0) \right)$$

$$\geq 2\left(2\|u_t(t)\|_2^2+(k-2)\beta\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1}-2E(0)\right),\ t>0 \tag{5.10}$$

olup burada (5.5) teki kabuller ve

$$k\int_{\Omega}\int_{[0,\nabla u]}\sigma(s)dsdx\leq 2E(0)-\|u_t(t)\|_2^2+\|\Delta u(t)\|_2^2+(k-2)\int_{\Omega}\int_{[0,\nabla u]}\sigma(s)dsdx$$

gerçeği kullanılmıştır. (5.10) eşitsizliğini ele alıp bu eşitsizliği integrallersek

$$F'(t)\geq 2(k-2)\beta\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{m+1}^{m+1}d\tau-4E(0)t+F'(0),\ \ t>0 \tag{5.11}$$

buluruz. Bunu hesapladıktan sonra (5.10) ile (5.11) eşitsizliklerinin toplamından

$$F''(t)+F'(t)\geq 4\|u_t(t)\|_2^2+2(k-2)\beta\left(\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1}+\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{m+1}^{m+1}d\tau\right)-4E(0)(1+t)+F'(0)$$

$$=g(t),\quad t>0 \tag{5.12}$$

elde ederiz.

$p=\dfrac{m+3}{2}$ alırsak, açıkça $2<p<m+1$ ve $p'=\dfrac{m+3}{m+1}\ (<2)$ olur. Young eşitsizliği ve Sobolev-Poincaré eşitsizliğinden

$$|(u,u_t)|\leq\frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p+\frac{1}{p'}\|u_t(t)\|_{p'}^{p'}$$

$$\leq C_1\left[\left(\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1}\right)^{\mu}+\left(\|u_t(t)\|_2^2\right)^{\mu}\right],$$

$$|(u,u_t)|^{\frac{1}{\mu}}\leq C_2\left[\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1}+\|u_t(t)\|_2^2\right],\ \ t>0 \tag{5.13}$$

olup bu eşitsizlikte ve bu bölümde $C_i\ (i=1,2,...)$ pozitif sabitler olup t, $\mu=\dfrac{m+3}{2(m+1)}\ (<1)$ den bağımsızdır. Sobolev-Poincaré eşitsizliği ve Hölder eşitsizliğinden

$$\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1}\geq C_3\left(\|u(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}},\ \ t>0, \tag{5.14}$$

$$\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{m+1}^{m+1}d\tau\geq C_4 t^{\frac{1-m}{2}}\left(\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_2^2\,d\tau\right)^{\frac{m+1}{2}},\ \ t>0 \tag{5.15}$$

elde edilir. (5.13) - (5.15) eşitsizliklerini kullanarak,

$$g(t) \geq C_5\left(3\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1}+\|u_t(t)\|_2^2+\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{m+1}^{m+1}d\tau\right)-4E(0)t+F'(0)$$

$$\geq C_6\left(|(u,u_t)|^{\frac{1}{\mu}}+\left(\|u(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}+\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}+t^{\frac{1-m}{2}}\left(\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau\right)^{\frac{m+1}{2}}\right)$$

$$-4E(0)t+F'(0)$$

$$\geq C_7 t^{\frac{1-m}{2}}\left(|(u,u_t)|^{\alpha}+\left(\|u(t)\|_2^2\right)^{\alpha}+\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)^{\alpha}+\left(\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau\right)^{\alpha}\right)$$

$$-4E(0)t+F'(0)-C_7 t^{\frac{1-m}{2}}, \quad t\geq 1 \tag{5.16}$$

buluruz, bu eşitsizlikte ve bu bölümde $\alpha=\dfrac{1}{\mu}>1$ dır. $t\to\infty$ iken $-4E(0)t+F'(0)-C_7 t^{\frac{1-m}{2}}\to\infty$ olduğundan

$$t\geq t_1 \text{ iken } -4E(0)t+F'(0)-C_7 t^{\frac{1-m}{2}}\geq 0 \tag{5.17}$$

olacak şekilde bir $t_1\geq 1$ sayısı var olmalıdır.

$$y(t)=F'(t)+F(t) \tag{5.18}$$

olsun. Şu halde (5.11) eşitsizliği ve (5.8) eşitliğinden $t\geq t_1$ iken $y(t)>0$ buluruz. $a_i\geq 0$ $(i=1,...,l)$ ve $n>1$ gerçel sayılar olmak üzere

$$\left(a_1+...+a_l\right)^n\leq 2^{(n-1)(l-1)}\left(a_1^n+...+a_l^n\right)$$

eşitsizliğinin kullanımı, (5.17) gerçeği ve (5.16) eşitsizliğinin kullanımından

$$g(t)\geq C_8 t^{\frac{1-m}{2}}y^{\alpha}(t), \quad t\geq t_1 \tag{5.19}$$

elde ederiz. (5.12) ile (5.19) eşitsizliklerinin birleştirilmesinden

$$y'(t)\geq C_8 t^{\frac{1-m}{2}}y^{\alpha}(t), \quad t\geq t_1 \tag{5.20}$$

eşitsizliği çıkar. Böylece

$$T \leq \begin{cases} \left[t_1^{\frac{3-m}{2}} + \dfrac{3-m}{2C_8(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)} \right]^{\frac{2}{3-m}}, & m<3 \\ t_1 \exp \dfrac{1}{C_8(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)}, & m=3 \end{cases} \tag{5.21}$$

olacak şekilde bir pozitif T sabiti vardır ki

$$t \to T^- \text{ iken } y(t) \to \infty \tag{5.22}$$

olur. (5.8), (5.9) ve (5.22) den

$$t \to T^- \text{ iken } 2\left(\|u(t)\|_2^2\right) + \left(\|u_t(t)\|_2^2\right) + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 \, d\tau$$

$$\geq F'(t) + F(t) \to \infty \tag{5.23}$$

buluruz. Bu nedenle (5.23) eşitsizliği

$$t \to T^- \text{ iken } \|u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 \, d\tau \to \infty$$

olduğunu gösterir ki buradan ispat tamamlanmış olur.

Örnek 5.2.2. $a<0, 1<m<3$ gerçel sayılar olmak üzere $\sigma(s) = a|s|^{m-1}s$ olsun. Açıkça $\omega(s) = \dfrac{a}{m+1}|s|^{m+1} \in C^1(R^n)$, $s \in R^n$ olmak üzere $\sigma(s) = \nabla\omega(s)$ dır. Basit bir gerçekleme göstermektedir ki

$$\sigma(s)s = k\int_{[0,s]} \sigma(\tau) d\tau = -k\beta|s|^{m+1}$$

olup burada $k = m+1 > 2$ ve $\beta = -\dfrac{a}{m+1} > 0$ dır. Eğer $u_0 \in H_0^2(\Omega)$ ve $u_1 \in L_2(\Omega)$ başlangıç değerleri $E(0) < 0$ olacak şekilde varsa o zaman Teorem 5.2.1 e göre (5.1) - (5.3) probleminin çözümü sonlu zamanda blow up olur.

6. BÖLÜM

DAMPİNG TERİMLİ BOUSSİNESQ DENKLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN GLOBAL YOKLUĞU (BLOW UP)

6.1. Giriş

Bu bölümde damping terimli Boussinesq denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin global yokluğunu çalışacağız:

$$u_{tt} - bu_{xx} + \delta u_{xxxx} - ru_{xxt} = \left(f(u)\right)_{xx}, \ \ (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \tag{6.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \ \ t > 0, \tag{6.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in (0,1) \tag{6.3}$$

burada $b, \delta, r \geq 0$ sabitler ve f fonksiyonu $f(0) = 0$ ile verilen doğrusal olmayan bir fonksiyondur.

Scott Russell' ın [71] tek su dalgaları çalışması akışkanlarda, plazmada, elastik cisimlerde v.s. dalga olayını modellemek için doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin gelişmesine hız kazandırmıştır. Özellikle $r = 0$, $b = 1$ ve $f(u) = u^2$ olduğu zaman (6.1) denklemi aşağıdaki

$$u_{tt} - u_{xx} + \delta u_{xxxx} = \left(u^2\right)_{xx}$$

Boussinesq denklemine dönüşür ki bu denklem diğer Boussinesq denklemleri (u_{xxxx} teriminin yerine u_{xxtt} terimi olduğunda) gibi sığ suda uzun dalgaların yayılımını yaklaşık olarak tanımlayan önemli bir modeldir. Bu denklem, ilk olarak Boussinesq [9] tarafından çıkarılmıştır. $\delta > 0$ durumunda bu denklem doğrusal olarak kararlıdır ve elastik bim (beam) deki doğrusal olmayan enine salınımları ile ilgilidir ([76] ve içindeki referanslara bakınız) ve "iyi" Boussinesq denklemi olarak adlandırılır. Oysa $\delta < 0$ olduğunda doğrusal kararsızlığa sahip olduğundan "kötü" Boussinesq denklemi ismini alır.

Boussinesq denklemine dikkate değer matematiksel ilgi vardır ve bu denklem birçok değişik açıdan çalışılmıştır ([27, 52, 53] ve içindeki referanslara bakınız). Çeşitli sınır değer problemleriyle Boussinesq denklemlerinin global çözümlerinin olmamasını sağlayacak gerekli koşulları gerçekleştirmek için büyük çabalar verilmiştir [30, 51].

Levine ve Sleeman [43]

$$u_{tt} - u_{xx} - 3u_{xxxx} + 12\left(u^2\right)_{xx} = 0$$

denkleminin periyodik sınır koşullarıyla çözümlerinin global yokluğunu çalıştılar. Turitsyn [74]

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + \left(u^2\right)_{xx} = 0$$

ve

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + \left(u^2\right)_{xx} = 0$$

Boussinesq denklemlerinde global yokluğu periyodik sınır koşulları durumunda ispatladı ve dinamiklerin çöküşü için yeterli ölçütleri buldu.

Boussinesq denkleminin genelleştirilmeleri

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_{xxxx} + f(u)_{xx} = 0$$

birçok yazar tarafından çalışılmıştır [24, 25, 30, 38, 51, 52, 81, 82].

Liu [51, 52]

$$u_{tt} - u_{xx} + \left(f(u) + u_{xx}\right)_{xx} = 0$$

genelleştirilmiş Boussinesq tipi denklemi için tek dalgaların kararsızlıklarını çalıştı ve

$$u_{tt} - u_{xxtt} - f(u)_{xx} = 0$$

doğrusal olmayan Pochhammer-Chree denklemi için bazı blow up sonuçlarını gerçekleştirdi. Zhijian [81, 82]

$$u_{tt} - u_{xx} - bu_{xxxx} = \sigma(u)_{xx}$$

ve

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = \sigma(u)_{xx}$$

Boussinesq denklemleri için başlangıç sınır değer problemlerinin blow up olmasını çalıştı. Godefroy [24] aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin blow up olduğunu gösterdi;

$$u_{tt}=f(u)_{xx}+u_{xxtt},\ x\in R,\ t\geq 0,$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x)$$

$$u(+\infty,t)=u(-\infty,t)=0$$

burada $f:\ R\to R\ \ C^{\infty}$ ve $f(0)=0$ dır.

Boussinesq denklemlerinde küçük doğrusal olmayanlık ve ayrılmanın etkisi dikkate alınmaktadır fakat birçok gerçek durumda damping etkisi doğrusal olmayanlık ve ayrılmanın (dispersion) güçlü etkisi ile karşılaştırılmaktadır. Bu nedenle damping terimli Boussinesq denklemi aşağıdaki gibi

$$u_{tt}-2bu_{txx}=-\alpha u_{xxxx}+u_{xx}+\beta\left(u^2\right)_{xx}$$

düşünülmektedir, burada u_{txx} is damping terim ve $\alpha,\ b>0,\ \beta\in R$ sabitlerdir ([36, 50, 75, 76] ve içindeki referanslara bakınız).

Varlamov [75, 76] iki boyutlu uzayda damping terimli Boussinesq denklemi için başlangıç değer, uzamsal olarak periyodik ve başlangıç sınır değer problemleri için çözümlerin uzun zaman davranışını inceledi.

Mevcut çalışmadá, (6.1) - (6.3) damping terimli Boussinesq denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin pozitif olmayan başlangıç enerjisiyle global yokluğunu (blow up) gerçekleştirmekteyiz.

6.2. Çözümler İçin Blow up

İlk önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 6.2.1. Eğer $u(x,0)$ and $u_t(x,0)$ başlangıç değerleri bütün $t\in T$ ler için

$$u(x,0)=\left(w_0(x)\right)_x,\ u_t(x,0)=\left(v_0(x)\right)_x$$

ilişkisini sağlayan $w_0(x)\in H^3$ ve $v_0(x)\in H^1$ fonksiyonları var ise o zaman (6.1) - (6.3) probleminin $u(x,t)$ çözümü,

$$w_t(x,t)=v(x,t),$$

$$v_t-rv_{xx}=bw_{xx}-\delta w_{xxxx}+\left(f\left(w_x\right)\right)_x \tag{6.4}$$

sistemini sağlayan $w(x,t)$, $v(x,t)$ nin karşılık gelen gelişimiyle, $u(x,t)=\left(w(x,t)\right)_x$ eşitliğini sağlar.

İspat. (6.1) denklemini

$$u_t = z_x, \qquad z_t - rz_{xx} = \left(bu - \delta u_{xx} + f(u)\right)_x \tag{6.5}$$

formunda yazarak ve (6.5) deki ilk denklemi kullanarak $u(x,t)=u(x,0)+\int_0^t z_x(x,s)ds$ buluruz. $u(x,0)$ terimi hipoteze göre $x-$türevlidir ve $\int_0^t z_x(x,s)ds$ de $x-$türevlidir. Bu nedenle $u(x,t)=\left(w(x,t)\right)_x$ olacak şekilde bir $w(x,t)$ fonksiyonu vardır ve buna göre (6.1) denkleminden

$$u = w_x, \qquad w_{tt} - bw_{xx} + \delta w_{xxxx} - rw_{xxt} = \left(f(w_x)\right)_x \tag{6.6}$$

bulunur. Böylece (6.4) sistemi kolayca elde edilir.

Lemmaya göre (6.1) - (6.3) başlangıç sınır değer problemi aşağıdaki probleme

$$w_{tt} - bw_{xx} + \delta w_{xxxx} - rw_{xxt} = \left(f(w_x)\right)_x, \quad (x,t)\in(0,1)\times(0,+\infty), \tag{6.7}$$

$$w_x(0,t) = w_x(1,t) = w_{xxx}(0,t) = w_{xxx}(1,t) = 0, \quad t>0, \tag{6.8}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad x\in(0,1) \tag{6.9}$$

tekabül eder.

Teorem 6.2.2. u, (6.1) - (6.3) probleminin çözümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar geçerli olsun:

(i) $f(s)\in C(R)$, $f(s)s \le k\int_0^s f(\tau)d\tau \le -k\beta|s|^{m+1}$, $s\in R$, burada $k>2$ ve $\beta>0$, aynı zamanda $1<m\le 3$ sabitlerdir,

(ii) Bazı $w_0\in H^3[0,1]$ ve $v_0\in H^1[0,1]$ için $u(x,0)=\left(w_0(x)\right)_x$ ve $u_t(x,0)=\left(v_0(x)\right)_x$ olmak üzere

$$E(0)=\frac{1}{2}\|v(0)\|_2^2+\frac{b}{2}\|w_x(0)\|_2^2+\frac{\delta}{2}\|w_{xx}(0)\|_2^2+\int_0^1\int_0^{w_{0x}} f(s)dsdx \le 0.$$

O zaman u çözümü

$$T \leq \begin{cases} \left[t_1^{\frac{3-m}{2}} + \dfrac{3-m}{2C_5(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)} \right]^{\frac{2}{3-m}}, & m<3 \\ t_1 \exp \dfrac{1}{C_5(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)}, & m=3 \end{cases}$$

olacak şekilde sonlu zamanda blow up olur, burada t_1 ve y sırasıyla (6.22) ve (6.23) ile tanımlanacak, C_5 ve $\alpha > 1$ sabitler olup sonradan tanımlanacaklardır.

İspat. (6.7) denklemini w_t ile çarpar ve yeni denklemin (0,1) aralığında integralini alarak

$$\int_0^1 w_t w_{tt} dx - b\int_0^1 w_t w_{xx} dx + \delta \int_0^1 w_t w_{xxxx} dx - r\int_0^1 w_t w_{xxt} dx = \int_0^1 w_t \left(f(w_x)\right)_x dx,$$

$$E'(t) + r\|w_{xt}(t)\|_2^2 = 0,\ E(t) \leq E(0) \leq 0,\ t \geq 0 \tag{6.10}$$

buluruz, burada

$$E(t) = \frac{1}{2}\|w_t(t)\|_2^2 + \frac{b}{2}\|w_x(t)\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\|w_{xx}(t)\|_2^2 + \int_0^1 \int_0^{w_x} f(s) ds dx,\ t \geq 0 \tag{6.11}$$

dır. F fonksiyonelini

$$F(t) = \|w(t)\|_2^2 + r\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2 d\tau \tag{6.12}$$

ile tanımlayalım. O zaman

$$F'(t) = 2(w, w_t) + r\|w_x(t)\|_2^2, \tag{6.13}$$

$$F''(t) = 2\left(\|w_t(t)\|_2^2 - b\|w_x(t)\|_2^2 - \delta\|w_{xx}(t)\|_2^2 - \int_0^1 w_x f(w_x) dx\right)$$

$$\geq 2\left(\|w_t(t)\|_2^2 - b\|w_x(t)\|_2^2 - \delta\|w_{xx}(t)\|_2^2 - k\int_0^1\int_0^{w_x} f(s) ds dx\right)$$

$$\geq 2\left(2\|w_t(t)\|_2^2 - (k-2)\int_0^1\int_0^{w_x} f(s) ds dx - 2E(0)\right)$$

$$\geq 2\left(2\|w_t(t)\|_2^2 + (k-2)\beta\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} - 2E(0)\right),\ t>0 \tag{6.14}$$

olup burada teoremin (i) kabulü ve

$$k\int_0^1\int_0^{w_x} f(s)dsdx \le 2E(0)-\|w_t(t)\|_2^2 - b\|w_x(t)\|_2^2 - \delta\|w_{xx}(t)\|_2^2 + (k-2)\int_0^1\int_0^{w_x} f(s)dsdx$$

gerçeği kullanılmıştır. (6.14) eşitsizliğini ele alıp bunu integrallersek

$$F'(t) \ge 2(k-2)\beta\int_0^t \|w_x(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau - 4E(0)t + F'(0)\,, \quad t>0 \tag{6.15}$$

buluruz. Bunu hesapladıktan sonra (6.14) ile (6.15) eşitsizliklerinin toplamından

$$\begin{aligned} F''(t)+F'(t) &\ge 4\|w_t(t)\|_2^2 + 2(k-2)\beta\left(\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} + \int_0^t \|w_x(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau\right) \\ &\quad -4E(0)(1+t)+F'(0) \\ &= g(t)\,, \quad t>0 \end{aligned} \tag{6.16}$$

elde ederiz.

$p=\dfrac{m+3}{2}$ alırsak, açıkça $2<p<m+1$ ve $p'=\dfrac{m+3}{m+1}$ (<2) olur. Young eşitsizliği ve Sobolev-Poincaré eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |(w,w_t)| &\le \frac{1}{p}\|w(t)\|_p^p + \frac{1}{p'}\|w_t(t)\|_{p'}^{p'} \\ &\le C_1\left[\left(\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1}\right)^{\mu} + \left(\|w_t(t)\|_2^2\right)^{\mu}\right], \end{aligned}$$

$$|(w,w_t)|^{\frac{1}{\mu}} \le C_2\left[\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|w_t(t)\|_2^2\right], \quad t>0 \tag{6.17}$$

olup bu eşitsizlikte ve bu bölümde C_i $(i=1,2,...)$ pozitif sabitler olup t, $\mu=\dfrac{m+3}{2(m+1)}$ (<1) den bağımsızdır. Sobolev-Poincaré eşitsizliği ve Hölder eşitsizliğinden

$$\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} \ge \left(\|w(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad t>0\,, \tag{6.18}$$

$$\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} \ge \left(\|w_x(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad t>0\,, \tag{6.19}$$

$$\int_0^t \|w_x(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau \geq t^{\frac{1-m}{2}} \left(\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad t > 0 \tag{6.20}$$

elde edilir. (6.17) - (6.20) eşitsizliklerini kullanarak,

$$g(t) \geq C_3 \left(3\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|w_t(t)\|_2^2 + \int_0^t \|w_x(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau \right) - 4E(0)t + F'(0)$$

$$\geq C_4 \left(|(w,w_t)|^{\frac{1}{\mu}} + \left(\|w(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}} + \left(\|w_x(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}} + t^{\frac{1-m}{2}} \left(\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{m+1}{2}} \right)$$

$$-4E(0)t + F'(0)$$

$$\geq C_5 t^{\frac{1-m}{2}} \left(|(w,w_t)|^{\alpha} + \left(\|w(t)\|_2^2\right)^{\alpha} + \left(\|w_x(t)\|_2^2\right)^{\alpha} + \left(\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2 d\tau \right)^{\alpha} \right)$$

$$-4E(0)t + F'(0) - C_5 t^{\frac{1-m}{2}}, \quad t \geq 1 \tag{6.21}$$

buluruz, bu eşitsizlikte ve bu bölümde $\alpha = \frac{1}{\mu} > 1$ dır. $t \to \infty$ iken $-4E(0)t + F'(0) - C_5 t^{\frac{1-m}{2}} \to \infty$ olduğundan

$$t \geq t_1 \quad \text{iken} \quad -4E(0)t + F'(0) - C_5 t^{\frac{1-m}{2}} \geq 0 \tag{6.22}$$

olacak şekilde bir $t_1 \geq 1$ sayısı var olmalıdır.

$$y(t) = F'(t) + F(t) \tag{6.23}$$

olsun. Şu halde (6.15) eşitsizliği ve (6.12) eşitliğinden $t \geq t_1$ iken $y(t) > 0$ buluruz. $a_i \geq 0$ $(i = 1,...,l)$ ve $n > 1$ gerçel sayılar olmak üzere

$$(a_1 + ... + a_l)^n \leq 2^{(n-1)(l-1)} (a_1^n + ... + a_l^n)$$

eşitsizliğinin kullanımı, (6.22) gerçeği ve (6.21) eşitsizliğinin kullanımından

$$g(t) \geq C_5 t^{\frac{1-m}{2}} y^{\alpha}(t), \quad t \geq t_1 \tag{6.24}$$

elde ederiz. (6.16) ile (6.24) eşitsizliklerinin birleştirilmesinden

$$y'(t) \geq C_5 t^{\frac{1-m}{2}} y^{\alpha}(t), \quad t \geq t_1 \tag{6.25}$$

eşitsizliği çıkar. Böylece

$$T \leq \begin{cases} \left[t_1^{\frac{3-m}{2}} + \dfrac{3-m}{2C_5(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)} \right]^{\frac{2}{3-m}}, & m < 3 \\ t_1 \exp \dfrac{1}{C_5(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)}, & m = 3 \end{cases} \tag{6.26}$$

olacak şekilde bir pozitif T sabiti vardır ki

$$t \to T^- \text{ iken } y(t) \to \infty \tag{6.27}$$

olur. (6.12), (6.13) ve (6.27) den

$$\begin{aligned} t \to T^- \text{ iken } \quad & 2\|w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2 + r\|w_x(t)\|_2^2 + r\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2 \, d\tau \\ & \geq F'(t) + F(t) \to \infty \end{aligned} \tag{6.28}$$

buluruz. Bu nedenle (6.28) eşitsizliği

$$t \to T^- \text{ iken } \quad \|w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2 + \int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2 \, d\tau \to \infty$$

olduğunu gösterir ki buradan ispat tamamlanmış olur.

7. BÖLÜM

DAMPİNG TERİMLİ GELİŞTİRİLMİŞ BOUSSİNESQ DENKLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN GLOBAL YOKLUĞU (BLOW UP)

7.1. Giriş

Bu bölümde aşağıdaki damping terimli geliştirilmiş Boussinesq denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin global yokluğunu çalışacağız:

$$u_{tt} - bu_{xx} - \delta u_{xxtt} - ru_{xxt} = (f(u))_{xx}, \quad (x,t) \in (0,1)\times(0,+\infty), \tag{7.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{7.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), \; x \in (0,1) \tag{7.3}$$

burada $b, \delta, r \geq 0$ sabitler ve f fonksiyonu $f(0) = 0$ ile verilen doğrusal olmayan bir fonksiyondur.

Scott Russell' ın [71] tek su dalgaları çalışması akışkanlarda, plazmada, elastik cisimlerde v.s. dalga olayını modellemek için doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin gelişmesine hız kazandırmıştır. Özellikle $r = 0$, $b = \delta = 1$ ve $f(u) = u^2$ olduğu zaman (7.1) denklemi aşağıdaki

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = (u^2)_{xx}$$

Boussinesq denklemine dönüşür ki bu denklem diğer Boussinesq denklemleri (u_{xxtt} teriminin yerine u_{xxxx} terimi olduğunda) gibi sığ suda uzun dalgaların yayılımını yaklaşık olarak tanımlayan önemli bir modeldir. Bu denklem "geliştirilmiş" Boussinesq denklemi olarak adlandırılır. "Geliştirilmiş" terimi aşağıdaki $\delta < 0$ iken "zayıf-konumlu" Boussinesq denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} + \delta u_{xxxx} = (u^2)_{xx}$$

ile karşılaştırıldığında gelmektedir ki bu denklem doğrusal kararsızlığa sahip olduğundan "kötü" Boussinesq denklemi ismini alır. $\delta > 0$ durumunda bu denklem doğrusal olarak kararlıdır ve elastik bim (beam) deki doğrusal olmayan enine salınımları ile ilgili olup ([76]

ve içindeki referanslara bakınız) "iyi" Boussinesq denklemi olarak adlandırılır ve ilk olarak Boussinesq [9] tarafından çıkarılmıştır.

Boussinesq denklemine dikkate değer matematiksel ilgi vardır ve bu denklem birçok değişik açıdan çalışılmıştır ([27, 52, 53] ve içindeki referanslara bakınız). Çeşitli sınır değer problemleriyle Boussinesq denklemlerinin global çözümlerinin olmamasını sağlayacak gerekli koşulları gerçekleştirmek için büyük çabalar verilmiştir [30, 51].

Levine ve Sleeman [43]

$$u_{tt}-u_{xx}-3u_{xxxx}+12\left(u^2\right)_{xx}=0$$

denkleminin periyodik sınır koşullarıyla çözümlerinin global yokluğunu çalıştılar. Turitsyn [74]

$$u_{tt}-u_{xx}+u_{xxxx}+\left(u^2\right)_{xx}=0$$

ve

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\left(u^2\right)_{xx}=0$$

Boussinesq denklemlerinde global yokluğu periyodik sınır koşulları durumunda ispatladı ve dinamiklerin çöküşü için yeterli ölçütleri buldu.

Boussinesq denkleminin genelleştirilmeleri

$$u_{tt}-u_{xx}+\alpha u_{xxxx}+f(u)_{xx}=0$$

birçok yazar tarafından çalışılmıştır [24, 25, 30, 38, 51, 52, 81, 82].

Liu [51, 52]

$$u_{tt}-u_{xx}+\left(f(u)+u_{xx}\right)_{xx}=0$$

genelleştirilmiş Boussinesq tipi denklemi için tek dalgaların kararsızlıklarını çalıştı ve

$$u_{tt}-u_{xxtt}-f(u)_{xx}=0$$

doğrusal olmayan Pochhammer-Chree denklemi için bazı blow up sonuçlarını gerçekleştirdi. Zhijian [81, 82]

$$u_{tt}-u_{xx}-bu_{xxxx}=\sigma(u)_{xx}$$

ve

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = \sigma(u)_{xx}$$

Boussinesq denklemleri için başlangıç sınır değer problemlerinin blow up olmasını çalıştı. Godefroy [24] aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin blow up olduğunu gösterdi;

$$u_{tt} = f(u)_{xx} + u_{xxtt},\ x \in R,\ t \geq 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x)$$

$$u(+\infty,t) = u(-\infty,t) = 0$$

burada $f: R \to R$ C^∞ ve $f(0) = 0$ dır.

Boussinesq denklemlerinde küçük doğrusal olmayanlık ve ayrılmanın etkisi dikkate alınmaktadır fakat birçok gerçek durumda damping etkisi doğrusal olmayanlık ve ayrılmanın (dispersion) güçlü etkisi ile karşılaştırılmaktadır. Bu nedenle damping terimli Boussinesq denklemi aşağıdaki gibi

$$u_{tt} - 2bu_{txx} = -\alpha u_{xxxx} + u_{xx} + \beta\left(u^2\right)_{xx}$$

düşünülmektedir, burada u_{txx} is damping terim ve $\alpha, b > 0,\ \beta \in R$ sabitlerdir ([36, 50, 75, 76] ve içindeki referanslara bakınız).

Varlamov [75, 76] iki boyutlu uzayda damping terimli Boussinesq denklemi için başlangıç değer, uzamsal olarak periyodik ve başlangıç sınır değer problemleri için çözümlerin uzun zaman davranışını inceledi.

Polat ve arkadaşları [66] aşağıdaki problemin blow up olduğunu gerçekleştirdiler;

$$u_{tt} - bu_{xx} + \delta u_{xxxx} - ru_{xxt} = \left(f(u)\right)_{xx},\ (x,t) \in (0,1)\times(0,+\infty),$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in (0,1).$$

Mevcut çalışmada, (7.1) - (7.3) damping terimli geliştirilmiş Boussinesq denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin pozitif olmayan başlangıç enerjisiyle global yokluğunu (blow up) gerçekleştirmekteyiz.

7.2. Çözümler İçin Blow up

İlk önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 7.2.1. Eğer $u(x,0)$ and $u_t(x,0)$ başlangıç değerleri bütün $t \in T$ ler için

$$u(x,0) = \left(w_0(x)\right)_x, \ u_t(x,0) = \left(v_0(x)\right)_x$$

ilişkisini sağlayan $v_0(x), w_0(x) \in H^2$ fonksiyonları var ise o zaman (7.1) - (7.3) probleminin $u(x,t)$ çözümü,

$$w_t(x,t) = v(x,t),$$

$$v_t - rv_{xx} - \delta v_{xxt} = bw_{xx} + \left(f\left(w_x\right)\right)_x \tag{7.4}$$

sistemini sağlayan $w(x,t)$, $v(x,t)$ nin karşılık gelen gelişimiyle, $u(x,t) = \left(w(x,t)\right)_x$ eşitliğini sağlar.

İspat. (7.1) denklemini

$$u_t = z_x, \quad z_t - rz_{xx} - \delta z_{xxt} = \left(bu + f(u)\right)_x \tag{7.5}$$

formunda yazarak ve (7.5) deki ilk denklemi kullanarak $u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t z_x(x,s)ds$ buluruz. $u(x,0)$ terimi hipoteze göre $x-$türevlidir ve $\int_0^t z_x(x,s)ds$ de $x-$türevlidir. Bu nedenle $u(x,t) = \left(w(x,t)\right)_x$ olacak şekilde bir $w(x,t)$ fonksiyonu vardır ve buna göre (7.1) denkleminden

$$u = w_x, \quad w_{tt} - bw_{xx} - \delta w_{xxtt} - rw_{xxt} = \left(f(w_x)\right)_x \tag{7.6}$$

bulunur. Böylece (7.4) sistemi kolayca elde edilir.

Lemmaya göre (7.1) - (7.3) başlangıç sınır değer problemi aşağıdaki probleme

$$w_{tt} - bw_{xx} - \delta w_{xxtt} - rw_{xxt} = \left(f(w_x)\right)_x, \ (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \tag{7.7}$$

$$w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{7.8}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \ w_t(x,0) = w_1(x), \ x \in (0,1) \tag{7.9}$$

tekabül eder.

Teorem 7.2.2. u, (7.1) - (7.3) probleminin çözümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar geçerli olsun:

(i) $f(s) \in C(R)$, $f(s)s \leq k\int_0^s f(\tau)d\tau \leq -k\beta|s|^{m+1}$, $s \in R$, burada $k > 2$ ve $\beta > 0$, aynı zamanda $1 < m \leq 3$ sabitlerdir,

(ii) Bazı $w_0, v_0 \in H^2[0,1]$ için $u(x,0) = (w_0(x))_x$ ve $u_t(x,0) = (v_0(x))_x$ olmak üzere

$$E(0) = \frac{1}{2}\|v(0)\|_2^2 + \frac{b}{2}\|w_x(0)\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\|v_x(0)\|_2^2 + \int_0^1\int_0^{w_{0x}} f(s)dsdx \leq 0.$$

O zaman u çözümü

$$T \leq \begin{cases} \left[t_1^{\frac{3-m}{2}} + \dfrac{3-m}{2C_7(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)}\right]^{\frac{2}{3-m}}, & m < 3 \\ t_1 \exp\dfrac{1}{C_7(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)}, & m = 3 \end{cases}$$

olacak şekilde sonlu zamanda blow up olur, burada t_1 ve y sırasıyla (7.23) ve (7.24) ile tanımlanacak, C_7 ve $\alpha > 1$ sabitler olup sonradan tanımlanacaklardır.

İspat. (7.7) denklemini w_t ile çarpar ve yeni denklemin $(0,1)$ aralığında integralini alarak

$$\int_0^1 w_t w_{tt}dx - b\int_0^1 w_t w_{xx}dx - \delta\int_0^1 w_t w_{xxtt}dx - r\int_0^1 w_t w_{xxt}dx = \int_0^1 w_t\left(f(w_x)\right)_x dx,$$

$$E'(t) + r\|w_{xt}(t)\|_2^2 = 0\,,\; E(t) \leq E(0) \leq 0\,,\; t \geq 0 \tag{7.10}$$

buluruz, burada

$$E(t) = \frac{1}{2}\|w_t(t)\|_2^2 + \frac{b}{2}\|w_x(t)\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\|w_{xt}(t)\|_2^2 + \int_0^1\int_0^{w_x} f(s)dsdx,\quad t \geq 0 \tag{7.11}$$

dır. F fonksiyonelini

$$F(t) = \|w(t)\|_2^2 + \delta\|w_x(t)\|_2^2 + r\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2 d\tau \tag{7.12}$$

ile tanımlayalım. O zaman

$$F'(t) = 2(w, w_t) + 2\delta(w_x, w_{xt}) + r\|w_x(t)\|_2^2, \tag{7.13}$$

$$F''(t) = 2\left(\|w_t(t)\|_2^2 + \delta\|w_{xt}(t)\|_2^2 + \delta\int_0^1 w_x w_{xtt} dx\right)$$

$$+2\int_0^1 w\left(bw_{xx} + \delta w_{xxtt} + rw_{xxt} + (f(w_x))_x\right)dx + \frac{d}{dt} r\|w_x(t)\|_2^2$$

$$= 2\left(\|w_t(t)\|_2^2 + \delta\|w_{xt}(t)\|_2^2 - b\|w_x(t)\|_2^2 - \int_0^1 w_x f(w_x)dx\right)$$

$$\geq 2\left(\|w_t(t)\|_2^2 + \delta\|w_{xt}(t)\|_2^2 - b\|w_x(t)\|_2^2 - k\int_0^1\int_0^{w_x} f(s)dsdx\right)$$

$$\geq 2\left(2\|w_t(t)\|_2^2 + 2\delta\|w_{xt}(t)\|_2^2 - (k-2)\int_0^1\int_0^{w_x} f(s)dsdx - 2E(0)\right)$$

$$\geq 2\left(2\|w_t(t)\|_2^2 + 2\delta\|w_{xt}(t)\|_2^2 + (k-2)\beta\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} - 2E(0)\right),\ t > 0 \tag{7.14}$$

olup burada teoremin (i) kabulü ve

$$k\int_0^1\int_0^{w_x} f(s)dsdx \leq 2E(0) - \|w_t(t)\|_2^2 - b\|w_x(t)\|_2^2 - \delta\|w_{xt}(t)\|_2^2 + (k-2)\int_0^1\int_0^{w_x} f(s)dsdx$$

gerçeği kullanılmıştır. (7.14) eşitsizliğini ele alıp bunu integrallersek

$$F'(t) \geq 2(k-2)\beta\int_0^t \|w_x(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau - 4E(0)t + F'(0),\ \ t > 0 \tag{7.15}$$

buluruz. Bunu hesapladıktan sonra (7.14) ile (7.15) eşitsizliklerinin toplamından

$$F''(t) + F'(t) \geq 4\|w_t(t)\|_2^2 + 4\delta\|w_{xt}(t)\|_2^2 + 2(k-2)\beta\left(\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} + \int_0^t \|w_x(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau\right)$$

$$-4E(0)(1+t) + F'(0)$$

$$= g(t),\ \ t > 0 \tag{7.16}$$

elde ederiz.

$p = \dfrac{m+3}{2}$ alırsak, açıkça $2 < p < m+1$ ve $p' = \dfrac{m+3}{m+1}$ (< 2) olur. Young eşitsizliği ve Sobolev-Poincaré eşitsizliğinden

$$|(w,w_t)| \le \frac{1}{p}\|w(t)\|_p^p + \frac{1}{p'}\|w_t(t)\|_{p'}^{p'}$$

$$\le C_1\left[\left(\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1}\right)^{\mu} + \left(\|w_t(t)\|_2^2\right)^{\mu}\right],$$

$$|(w,w_t)|^{\frac{1}{\mu}} \le C_2\left[\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|w_t(t)\|_2^2\right], \quad t>0 \tag{7.17}$$

ve

$$|(w_x,w_{xt})| \le \frac{1}{p}\|w_x(t)\|_p^p + \frac{1}{p'}\|w_{xt}(t)\|_{p'}^{p'}$$

$$\le C_3\left[\left(\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1}\right)^{\mu} + \left(\|w_{xt}(t)\|_2^2\right)^{\mu}\right],$$

$$|(w_x,w_{xt})|^{\frac{1}{\mu}} \le C_4\left[\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|w_{xt}(t)\|_2^2\right], \quad t>0 \tag{7.18}$$

olup bu eşitsizlikte ve bu bölümde C_i $(i=1,2,...)$ pozitif sabitler olup t, $\mu = \dfrac{m+3}{2(m+1)}$ (<1) den bağımsızdır. Sobolev-Poincaré eşitsizliği ve Hölder eşitsizliğinden

$$\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} \ge \left(\|w(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad t>0, \tag{7.19}$$

$$\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} \ge \left(\|w_x(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad t>0, \tag{7.20}$$

$$\int_0^t \|w_x(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau \ge t^{\frac{1-m}{2}}\left(\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2 d\tau\right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad t>0 \tag{7.21}$$

elde edilir. (7.17) - (7.21) eşitsizliklerini kullanarak,

$$g(t) \ge C_5\left(4\|w_x(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|w_t(t)\|_2^2 + \|w_{xt}(t)\|_2^2 + \int_0^t \|w_x(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau\right)$$

$$-4E(0)t + F'(0)$$

$$\geq C_6\left(|(w,w_t)|^{\frac{1}{\mu}}+|(w_x,w_{xt})|^{\frac{1}{\mu}}+\left(\|w(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}+\left(\|w_x(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}\right.$$

$$\left.+t^{\frac{1-m}{2}}\left(\int_0^t\|w_x(\tau)\|_2^2\,d\tau\right)^{\frac{m+1}{2}}\right)-4E(0)t+F'(0)$$

$$\geq C_7 t^{\frac{1-m}{2}}\left(|(w,w_t)|^{\alpha}+|(w_x,w_{xt})|^{\alpha}+\left(\|w(t)\|_2^2\right)^{\alpha}+\left(\|w_x(t)\|_2^2\right)^{\alpha}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^t\|w_x(\tau)\|_2^2\,d\tau\right)^{\alpha}\right)-4E(0)t+F'(0)-C_7 t^{\frac{1-m}{2}},\quad t\geq 1 \tag{7.22}$$

buluruz, bu eşitsizlikte ve bu bölümde $\alpha=\dfrac{1}{\mu}>1$ dır. $t\to\infty$ iken $-4E(0)t+F'(0)-C_7 t^{\frac{1-m}{2}}\to\infty$ olduğundan

$$t\geq t_1 \text{ iken } -4E(0)t+F'(0)-C_7 t^{\frac{1-m}{2}}\geq 0 \tag{7.23}$$

olacak şekilde bir $t_1\geq 1$ sayısı var olmalıdır.

$$y(t)=F'(t)+F(t) \tag{7.24}$$

olsun. Şu halde (7.15) eşitsizliği ve (7.12) eşitliğinden $t\geq t_1$ iken $y(t)>0$ buluruz. $a_i\geq 0$ $(i=1,...,l)$ ve $n>1$ gerçel sayılar olmak üzere

$$(a_1+...+a_l)^n\leq 2^{(n-1)(l-1)}(a_1^n+...+a_l^n)$$

eşitsizliğinin kullanımı, (7.23) gerçeği ve (7.22) eşitsizliğinin kullanımından

$$g(t)\geq C_7 t^{\frac{1-m}{2}}y^{\alpha}(t),\quad t\geq t_1 \tag{7.25}$$

elde ederiz. (7.16) ile (7.25) eşitsizliklerinin birleştirilmesinden

$$y'(t)\geq C_7 t^{\frac{1-m}{2}}y^{\alpha}(t),\quad t\geq t_1 \tag{7.26}$$

eşitsizliği çıkar. Böylece

$$T \le \begin{cases} \left[t_1^{\frac{3-m}{2}} + \dfrac{3-m}{2C_7(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)} \right]^{\frac{2}{3-m}}, & m<3 \\ t_1 \exp \dfrac{1}{C_7(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)}, & m=3 \end{cases} \tag{7.27}$$

olacak şekilde bir pozitif T sabiti vardır ki

$$t \to T^- \text{ iken } y(t) \to \infty \tag{7.28}$$

olur. (7.12), (7.13) ve (7.28) den

$$t \to T^- \text{ iken } \quad 2\|w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2 + (r+2\delta)\|w_x(t)\|_2^2 + \delta\|w_{xt}(t)\|_2^2 + r\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2\, d\tau$$

$$\ge F'(t) + F(t) \to \infty \tag{7.29}$$

buluruz. Bu nedenle (7.29) eşitsizliği

$$t \to T^- \text{ iken } \quad \|w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2 + \|w_{xt}(t)\|_2^2 + \int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2\, d\tau \to \infty$$

olduğunu gösterir ki buradan ispat tamamlanmış olur.

8. BÖLÜM

DOĞRUSAL OLMAYAN DAMPİNG TERİMLİ DOĞRUSAL OLMAYAN BİR DALGA DENKLEMİNİN BİR SINIFI İÇİN ÇÖZÜMLERİN GLOBAL OLMAMASI (BLOW UP)

8.1. Giriş

Bu bölümde doğrusal olmayan damping terimli doğrusal olmayan bir dalga denkleminin bir sınıfı için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin global yokluğunu çalışacağız:

$$u_{tt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_i \left(u_{x_i}\right) - |u|^{\rho} u_t - \Delta^2 u, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \tag{8.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \tag{8.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{8.3}$$

burada $\rho \geq 0$ sabit, $\Omega \subset R^n$ sınırlı bir bölge, $\partial\Omega$ bu bölgenin yeterince düzgün sınırı, ν sınıra dış normal ve $\sigma_i(s)$ (i=1,...,n) verilen doğrusal olmayan fonksiyonlardır.

Doğrusal damping veya dissipative terimli doğrusal olmayan evolution denklemleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır [3, 10, 22, 38, 47, 55, 59, 60, 65, 66, 69, 83]. Doğrusal damping ile doğrusal olmayan kaynak terimleri arasındaki ilişki ilk olarak Levine [38] tarafından verildi ve çözümlerin negatif enerji ile global olmadığını gösterdi. Georgiev ve Todorova [22] Levine' nin sonuçlarını doğrusal olmayan damping durumuna genişlettiler. Onlar aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini çalıştılar;

$$u_{tt} - \Delta u + a u_t |u_t|^{m-1} = b u |u|^{p-1}, \quad (t,x) \in [0,t] \times \Omega,$$

$$u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,t] \times \partial\Omega,$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x)$$

burada $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$, $m > 1$ sabitler, $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$, sınırlı bir bölge, $\partial\Omega$ bu bölgenin yeterince düzgün sınırıdır. Bu problem için aşağıdaki sonuçlar iyi bilinmektedir:

(1) $a=0$ olduğu zaman $bu|u|^{p-1}$ kaynak terimi yeterince büyük başlangıç değerleri için sonlu zamanda blow up olmasına yol açar [5, 23, 38, 64, 73].

(2) $b=0$ olduğu zaman doğrusal olmayan $au_t|u_t|^{m-1}$ damping terimi büyük başlangıç değerleri için global varlık sonuçlarına yol açar [26, 35].

Georgiev ve Todorova [22] $p>m$ ise başlangıç enerjisi yeterince negatif olduğu zaman çözümün sonlu zamanda blow up olduğunu ispatladılar. Levine ve Serrin [47] doğrusal olmayan hiperbolik denklemlerin geniş bir sınıfı için çözümlerin global yokluğu üzerine birkaç soyut teorem ispatladılar. Messaoudi [55] Georgiev ve Todorova' nın blow up sonucunu çözümlerin negatif (yeterince negatif olması gerekli değil) başlangıç enerjisine sahip olması durumuna genişletti. Rammaha ve Strei [68] Georgiev ve Todorova [22] nın çalıştığı denklemde $u_t|u_t|^{m-1}$ damping terimi yerine $|u|^{m-1}u_t$ damping terimini alarak bu başlangıç sınır değer problemini çalıştılar. Georgiev ve Todorova [22] nın çözüm yöntemlerine benzer bir teknik uygulayarak çözümün negatif başlangıç enerjisiyle sonlu zamanda blow up olduğunu ispatladılar. Zhijian [83] aşağıdaki doğrusal olmayan başlangıç sınır değer problemini

$$u_{tt}+\Delta^2 u+\lambda u_t=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i\left(u_{x_i}\right) \text{ in } \Omega\times(0,+\infty),$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=0 \text{ on } (0,+\infty),$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega$$

çalıştı ve negatif başlangıç enerjisiyle bu problemin çözümünün $\lambda\geq 0$ ve bazı ek koşullar altında sonlu zamanda blow up olduğunu gösterdi.

Mevcut çalışmada (8.1) - (8.3) başlangıç sınır değer probleminin doğrusal olmayan terimleri arasındaki ilişkiyi ele almaktayız. Blow up olması için yeterli koşulları vererek negatif başlangıç enerjisi ile çözümlerin sonlu zamanda blow up olduğunu göstermekteyiz.

8.2. Çözümler İçin Blow up

Bu amaçla, enerji denklemini

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2+\sum_i\int_\Omega\int_0^{u_{x_i}}\sigma_i(s)\,ds\,dx,\ t\geq 0 \tag{8.4}$$

ile tanımlarız, burada

$$\sigma_i(s) \in C(R),\ s \in R,\ \sigma_i(s)s \le k\int_0^s \sigma_i(\tau)d\tau \le -k\beta|s|^{m+1} \tag{8.5}$$

$k > 2$ ve $\beta > 0$, aynı zamanda $1 < m \le 3$ sabitlerdir.

Teorem 8.2.1. u, (8.1) - (8.3) probleminin çözümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar geçerli olsun:

$$u_0 \in H_0^2(\Omega),\ u_1 \in L_2(\Omega),$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_2^2 + \sum_i \int_\Omega \int_0^{u_{0x_i}} \sigma_i(s)dsdx < 0\,. \tag{8.6}$$

O zaman u çözümü

$$T = \begin{cases} \left[t_1^{\frac{2\rho-m+3}{\rho+2}} + \dfrac{2\rho-m+3}{C_9(\alpha-1)(\rho+2)y^{\alpha-1}(t_1)} \right]^{\frac{\rho+2}{2\rho-m+3}}, & m < 2\rho+3 \\ t_1 \exp\dfrac{1}{C_9(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)}, & m = 2\rho+3 \end{cases}$$

olacak şekilde sonlu zamanda blow up olur, burada t_1 ve y sırasıyla (8.18) ve (8.19) ile tanımlanacak, C_9 ve $\alpha > 1$ sabitler olup sonradan tanımlanacaklardır.

İspat. (8.1) denklemini u_t ile çarpar ve yeni denklemin Ω üzerinde integralini alarak

$$E'(t) + \int_\Omega u_t^2(t)|u(t)|^\rho\, dx = 0\,, \tag{8.7}$$

$$E(t) \le E(0) < 0\,,\ \ t \ge 0$$

buluruz. F fonksiyonelini

$$F(t) = \|u(t)\|_2^2 + \frac{2}{\rho+2}\int_0^t \|u(\tau)\|_{\rho+2}^{\rho+2} d\tau \tag{8.8}$$

ile tanımlayalım. O zaman

$$F'(t) = 2(u,u_t) + \frac{2}{\rho+2}\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}\,, \tag{8.9}$$

$$F''(t) = 2\left(\|u_t(t)\|_2^2 - \|\Delta u(t)\|_2^2 - \sum_i \int_\Omega \sigma_i(u_{x_i}) u_{x_i} dx - \int_\Omega |u|^{p+1} u_t dx \right) + 2\int_\Omega |u|^{p+1} u_t dx$$

$$\geq 2\left(\|u_t(t)\|_2^2 - k\sum_i \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(s) ds dx - 2E(0) + \|u_t(t)\|_2^2 + 2\sum_i \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(s) ds dx \right)$$

$$= 2\left(2\|u_t(t)\|_2^2 - (k-2)\sum_i \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(s) ds dx - 2E(0) \right)$$

$$\geq 2\left(2\|u_t(t)\|_2^2 + (k-2)\beta \|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1} - 2E(0) \right),\ t > 0 \qquad (8.10)$$

olup burada (8.5) teki kabuller ve

$$-\|\Delta u(t)\|_2^2 \geq -2E(0) + \|u_t(t)\|_2^2 + 2\sum_i \int_\Omega \int_0^{u_{x_i}} \sigma_i(s) ds dx$$

gerçeği kullanılmıştır. (8.10) eşitsizliğini ele alıp bunu integrallersek

$$F'(t) \geq 2(k-2)\beta \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau - 4E(0)t + F'(0),\ t > 0 \qquad (8.11)$$

buluruz. Bunu hesapladıktan sonra (8.10) ile (8.11) eşitsizliklerinin toplamından

$$F''(t) + F'(t) \geq 4\|u_t(t)\|_2^2 + 2(k-2)\beta\left(\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1} + \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau \right)$$

$$-4E(0)(1+t) + F'(0) = g(t),\ t > 0 \qquad (8.12)$$

elde ederiz.

$r = \dfrac{m+3}{2}$ alırsak, açıkça $2 < r < m+1$ ve $s = \dfrac{m+3}{m+1}$ (< 2) olur. Young eşitsizliği ve Sobolev-Poincaré eşitsizliğinden

$$|(u,u_t)| \leq \frac{1}{r}\|u(t)\|_r^r + \frac{1}{s}\|u_t(t)\|_s^s$$

$$\leq C_1\left[\left(\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1} \right)^\mu + \left(\|u_t(t)\|_2^2 \right)^\mu \right],$$

$$|(u,u_t)|^{\frac{1}{\mu}} \leq C_2\left[\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|u_t(t)\|_2^2 \right],\ t > 0 \qquad (8.13)$$

olup bu eşitsizlikte ve bu bölümde C_i $(i=1,2,...)$ pozitif sabitler olup t, $\mu=\dfrac{m+3}{2(m+1)}$ (<1) den bağımsızdır. Sobolev-Poincaré eşitsizliği ve Hölder eşitsizliğinden

$$\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1} \geq C_3\left(\|u(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad t>0, \tag{8.14}$$

$$\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1} \geq C_4\left(\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}\right)^{\frac{m+1}{\rho+2}}, \quad t>0, \tag{8.15}$$

$$\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau \geq C_5 t^{\frac{\rho-m+1}{\rho+2}}\left(\int_0^t \|u(\tau)\|_{\rho+2}^{\rho+2} d\tau\right)^{\frac{m+1}{\rho+2}}, \quad t>0 \tag{8.16}$$

elde edilir. (8.13) - (8.16) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} g(t) &\geq C_6\left(\|u_t(t)\|_2^2 + 3\|\nabla u(t)\|_{m+1}^{m+1} + \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau\right) - 4E(0)t + F'(0) \\ &\geq C_7\left(|(u,u_t)|^{\frac{1}{\mu}} + \left(\|u(t)\|_2^2\right)^{\frac{m+1}{2}} + \left(\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}\right)^{\frac{m+1}{\rho+2}} + t^{\frac{\rho-m+1}{\rho+2}}\left(\int_0^t \|u(\tau)\|_{\rho+2}^{\rho+2} d\tau\right)^{\frac{m+1}{\rho+2}}\right) \\ &\quad -4E(0)t + F'(0) \\ &\geq C_8 t^{\frac{\rho-m+1}{\rho+2}}\left(|(u,u_t)|^{\alpha} + \left(\|u(t)\|_2^2\right)^{\alpha} + \left(\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}\right)^{\alpha} + \left(\int_0^t \|u(\tau)\|_{\rho+2}^{\rho+2} d\tau\right)^{\alpha}\right) \\ &\quad -4E(0)t + F'(0) - C_8 t^{\frac{1-m}{2}}, \quad t \geq 1 \end{aligned} \tag{8.17}$$

buluruz, bu eşitsizlikte ve bu bölümde $\alpha=\dfrac{1}{\mu}>1$ olup burada

$$m>1 \text{ için } \frac{m+1}{2}>\frac{1}{\mu}, \qquad m>2\rho+1 \text{ için } \frac{m+1}{\rho+2}>\frac{1}{\mu}$$

eşitsizlikleri kullanılmıştır. $t\to\infty$ iken $-4E(0)t+F'(0)-C_8 t^{\frac{\rho-m+1}{\rho+2}} \to \infty$ olduğundan

$$t\geq t_1 \quad \text{iken} \quad -4E(0)t+F'(0)-C_8 t^{\frac{\rho-m+1}{\rho+2}} \geq 0 \tag{8.18}$$

olacak şekilde bir $t_1 \geq 1$ sayısı var olmalıdır.

$$y(t)=F'(t)+F(t) \tag{8.19}$$

olsun. Şu halde (8.11) eşitsizliği ve (8.8) eşitliğinden $t \geq t_1$ iken $y(t)>0$ buluruz. $a_i \geq 0$ $(i=1,...,l)$ ve $n>1$ gerçel sayılar olmak üzere

$$(a_1+...+a_l)^n \leq 2^{(n-1)(l-1)}(a_1^n+...+a_l^n)$$

eşitsizliğinin kullanımı, (8.18) gerçeği ve (8.17) eşitsizliğinin kullanımından

$$g(t) \geq C_9 t^{\frac{\rho-m+1}{\rho+2}} y^{\alpha}(t), \quad t \geq t_1 \tag{8.20}$$

elde ederiz. (8.12) ile (8.20) eşitsizliklerinin birleştirilmesinden

$$y'(t) \geq C_9 t^{\frac{\rho-m+1}{\rho+2}} y^{\alpha}(t), \quad t \geq t_1 \tag{8.21}$$

eşitsizliği çıkar. Böylece

$$T=\begin{cases}\left[t_1^{\frac{2\rho-m+3}{\rho+2}}+\dfrac{2\rho-m+3}{C_9(\alpha-1)(\rho+2)y^{\alpha-1}(t_1)}\right]^{\frac{\rho+2}{2\rho-m+3}}, & m<2\rho+3\\ t_1 \exp\dfrac{1}{C_9(\alpha-1)y^{\alpha-1}(t_1)}, & m=2\rho+3\end{cases} \tag{8.22}$$

olacak şekilde bir pozitif T sabiti vardır ki

$$t \to T^- \text{ iken } y(t) \to \infty \tag{8.23}$$

olur. (8.8), (8.9) ve (8.23) den

$$t \to T^- \text{ iken } 2\|u(t)\|_2^2+\|u_t(t)\|_2^2+\frac{2}{\rho+2}\left(\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\int_0^t \|u(\tau)\|_{\rho+2}^{\rho+2}\,d\tau\right)$$

$$\geq F'(t)+F(t) \to \infty \tag{8.24}$$

buluruz. Bu nedenle (8.24) eşitsizliği

$$t \to T^- \text{ iken } \|u_t(t)\|_2^2+\int_0^t \|u(\tau)\|_{\rho+2}^{\rho+2}\,d\tau \to \infty$$

olduğunu gösterir ki buradan ispat tamamlanmış olur.

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezin son dört bölümünde doğrusal olmayan hiperbolik tipten denklemlerin bazı sınıfları için doğrusal ve doğrusal olmayan damping terim bulunduran, sınır koşullarındaki değerleri sıfır olan, başlangıç sınır değer problemlerinin sonlu zamanda global çözümlerinin yokluğu (blow up) problemleri ele alınmıştır. Bu denklemler için sınır koşullarının doğrusal olmaması dahil homojen olmayan durumlarıyla global çözümlerin yokluğu araştırılabilir.

Ele aldığımız problemlerde çözümlerin global yokluğunu açık eşitsizlik metotlarını kullanarak ispatladık. Ele alınan problemler ve bunlara benzer problemlerin çözümlerinin global yoklukları konkavlık metodu ve geliştirilmiş konkavlık metotlarıyla da gerçekleştirilebilir.

Altıncı ve yedinci bölümlerde ele alınan Boussinesq denklemlerinin çözümleri öz fonksiyon metodu ile de yapılabilir. Ayrıca bu denklemlerin çok boyutlu durumu için blow up olduğu araştırılabilir.

Beşinci bölümde ele aldığımız problemin doğrusal olmayan damping terimli durumu çalışılabilir.

Son dört bölümde ele aldığımız problemlerin kaynak fonksiyonlu durumları çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, *Academic Press*, New York, (1975).

[2] K. Ames, B. Straughan, Non-standard and improperly posed problems, mathematics in science and engineering, *Academic Pres,* New York, (1997).

[3] D. D. Ang and A. P. N. Dinh, On the strongly damped wave equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t + f(u) = 0$, *SIAM J. Math. Anal.*, **19** (1988), 1409–1418.

[4] S. B. Angenent and J. L. Velázquez, Asymptotic shape of cusp singularities in curve shortening, *Duke Math. J.*, **77** (1995), 71–100.

[5] J. Ball, Remarks on blow up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations, *Quart. J. Math.,* Oxford, **28** (2) (1977), 473-483.

[6] C. Bandle and H. Brunner, Blowup in diffusion equations: a survey, *J. Comp. Appl. Math.*, **97** (1998), 3-22.

[7] I. G. Barenblatt, Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, (1996).

[8] J. Bebernes and D. Eberly, Mathematical problems from combustion theory, *Appl. Math. Sci.,* Springer-Verlag, New York, **83** (1989).

[9] J. V. Boussinesq, Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal, *C. R. Acad. Sci.,* Paris, **73** (1871), 256–260.

[10] M. Can, S. R. Park and F. Aliyev, Nonexistence of global solutions of some quasilinear hyperbolic equations, *J. Math. Anal. Appl.,* **213** (1997), 540-553.

[11] T. Cazenave and A. Haraux, An Introduction to Semilinear Evolution Equations, *Oxford*, (1998).

[12] K. Deng and Levine, The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequels, *J. Math. Anal. Appl.*, **243** (2000), 85-126.

[13] D. Erdem, Blow-up of solutions to quasilinear parabolic equations, *Appl. Math. Let.,* **12** (1999), 65-69.

[14] D. Erdem and V. K. Kalantarov, A remark on nonexistence of global solutions to quasi-linear hyperbolic and parabolic equations, *Appl. Math. Let.,* **15** (2002), 585-590.

[15] J. N. Flavin and S. Rionero, Qualitative estimates for partial differential equations, *CRC Pres,* Boca Raton, (1995).

[16] A. Friedman, Remarks on nonlinear parabolic equations, applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics, *Amer. Math. Soc., Providence*, RI, (1965), 3–23.

[17] H. Fujita, On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math.*, **13** (1966), 109–124.

[18] H. Fujita, On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $v_t = \Delta v + e^v$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 132–135.

[19] V. A. Galaktionov, Boundary value problem for the nonlinear parabolic equation $u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^{\beta}$, *Diff. Eq.*, **17** (1981), 551–555.

[20] V. A. Galaktionov and J. L. Vázquez, The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations, *Discrete Cont. Dyn. S.*, **8** (2) (2002), 399-433.

[21] I. M. Gelfand, Some problems in the theory of quasilinear equations, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **29** (2) (1963), 295–381.

[22] V. Georgiev and G. Todorova, Existence of solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, *J. Diff. Eq.*, **107** (1994), 295-308.

[23] R.T. Glassey, Blow-up theorems for nonlinear wave equation, *Math. Z.*, **132** (1973), 183-203.

[24] A. D. Godefroy, Blow up of solutions for the damped Boussinesq equation, *IMA J. Appl. Math.*, **60** (1998), 123-138.

[25] C. Guowang and W. Shubin, Existence and nonexistence of global solutions for the generalized IMBq equation, *Nonlinear Anal.*, **36** (1999), 961-980.

[26] A. Haraux and E. Zuazua, Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **100** (1988), 191-206.

[27] M. A. Herrero, J. J. L. Velázquez, Explosion de solutions d'équations paraboliques semilinéaires supercritiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **319** (1994), 141–145.

[28] F. A. Howes, Some stability result for advection-diffusion equations, *Stud. Appl. Math.*, **74** (1986a), 35–53.

[29] F. A. Howes, Multi-dimensional initial boundary value problems with strong non-linearities, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **91** (1986b), 153–168.

[30] V. K. Kalantarov and O. A. Ladyzhenskaya, The occurance of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type, *J. Soviet Math.*, **10** (1978), 53-70.

[31] V.K. Kalantarov, Nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations, Turbulence Modeling and Vortex Dyanamics, Proceedings Ist., *Springer-Verlag*, (1996), 169-181.

[32] S. Kaplan, On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.,* **16** (1963), 305–330.

[33] H. Kawarada, On solution of initial boundary value problem $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$, *Publ. Res. Inst..Math. Sci.,* **10** (1975), 729-736.

[34] J. Keller, On solutions of nonlinear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.,* 10 (1957), 523–532.

[35] M. Kopackova, Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation, *Comment. Math. Univ. Carolin.,* **30** (4) (1989), 713-719.

[36] S. Lai and Y. Wu, The asymptotic solution of the Cauchy problem for a generalized Boussinesq equation, *Discrete Cont. Dyn. S . B*, **3** (3) (2003), 401-408.

[37] H. A. Levine, Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$, *Arch. Rational Mech. Anal.,* **51** (1973), 371–386.

[38] H. A. Levine, Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equations of the form, $Pu_{tt} = Au + F(u)$, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **192** (1974a), 1-21.

[39] H. A. Levine, On the non-existence of the global solutions to a non-linear Euler-Poisson-Darbox equation, *J. Diff. Eq.,* **48** (1974b), 646–651.

[40] H. A. Levine and L. E. Payne, Non-existence theorems for the heat equation with non-linear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time, *J. Diff. Eq.,* **16** (1974c), 319–334.

[41] H. A. Levine and L. E. Payne, Some non-existence theorems for initial boundary value problems with non-linear boundary constraints, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **46** (1974d), 277–284.

[42] H. A. Levine, Non-existence of global weak solutions to some properly and improperly posed problems of mathematical physics: the method of unbounded Fourier coefficients, *Math. Annalen*, **214** (1975), 205–220.

[43] H. A. Levine and B. D. Sleeman, A note on the non-existence of global solutions of initial boundary value problems for the Boussinesq equation $u_{tt} - u_{xx} - 3u_{xxxx} + 12(u^2)_{xx} = 0$, *J. Math. Anal. Appl.,* **107** (1985), 206–210.

[44] H. A. Levine, Quenching, nonquenching and beyond quenching for solutions of some parabolic equations, *Ann. Mat. Pura Appl.,* **155** (1989), 243–290.

[45] H. A. Levine, L. E. Payne, P. E. Sacks and B. Straughan, Analysis of a convective reaction-diffusion equation, *SIAM J. Math. Anal.*, **20** (1989), 133-147.

[46] H. A. Levine, The role of critical exponents in blow-up problems, *SIAM Review* **32** (1990), 262–288.

[47] H. A. Levine and J. Serrin, Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equation with dissipation, *Arch. Rational Mech. Anal.,* **137** (1997), 341-361.

[48] H. A. Levine, P. Pucci and J. Serrin, Some remarks on global nonexistence for Nonautonomous abstract evolution equations, Contemp. *Math.* **208** (1997), 253-263.

[49] H. A. Levine, S. R. Park and J. Serrin, Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolutions equations of formally parabolic type, *J. Diff. Eq.,* **142** (1998), 212–229.

[50] Y. A. Li and P. J. Olver, Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation, *J. Diff. Eq.,* **162** (2000), 27-63.

[51] Y. Liu, Instability of solitary waves for generalized Boussinesq equation, *J. Dynamics Diff. Eq.*, **5** (1993), 537-558.

[52] Y. Liu, Existence and Blow up of Solutions of a nonlinear Pochhammer – Chree equation, *Indiana Univ. Math. J.*, **45** (1996), 797-816.

[53] J. D. Logan, An introduction to nonlinear partial differential equations, *Wiley,* New York, (1994).

[54] K. Masuda, Analytic solutions of some nonlinear diffusion equations, *Math. Z.* **187** (1984), 61–73.

[55] S. A. Messaoudi, Blow up in a nonlinearly damped wave equation, *Math. Nach.,* **231** (2001), 105-111.

[56] V. Mikhailov, Partial differential equations, *Mir Publishers*, (1978).

[57] J. D. Murray, Mathematical biology, *Springer-Verlag,* (1990).

[58] W. M. Ni, P. E. Sacks and J. Tavantzis, On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic, *J. Diff. Eq.,* **54** (1984), 97–120.

[59] K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions of quasilinear hyperbolic equations with linear damping, *J. Diff. Eq.,* **137** (1997), 384–395.

[60] K. Ono, Global existence, decay, and blowup of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings, *J. Diff. Eq.,* **137** (1997), 273–301.

[61] K. Ono, Global existence, asymptotic behavior, and global non-existence of solutions for damped non-linear wave equations of Kirchhoff type in the whole space, *Math. Meth. Appl. Sci.,* **23** (2000), 535–560.

[62] W. F. Osgood, Beweis der existenz einer Lösung der differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ ohne hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen bedingung, *Monatshefte für Mathematik und Physik* (Vienna), **9** (1898), 331–345.

[63] L. E. Payne, Improperly posed problems in partial differential equations, *Regional Conf. Ser. Appl. Math. SIAM,* (1975).

[64] L. E. Payne and D. Sattinger, Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations, *Israel Math. J.,* **22** (1981), 273-303.

[65] N. Polat, D. Kaya, H.İ. Tutalar, Blow up of solution for a class of nonlinear wave equations, *2004-Dynamical Systems and Applications,* GBS Publishers and Distributors (India) (2005), 572-576.

[66] N. Polat, D. Kaya and H. Ilhan Tutalar, Blow up of Solutions for the damped Boussinesq equation, *Z. Naturforsch A,* 64**a,** (2005), 1-4.

[67] P. Pucci and J. Serrin, Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy, *J. Diff. Eq.,* **150** (1998), 203–214.

[68] M. A. Rammaha and T. A. Strei, Global existence and nonexistence for nonlinear wave equations with damping and source terms, *Trans. Amer. Math. Soc.,* (2002), 1-17.

[69] P. Rybka and K. H. Hoffman, Converge of solutions to the equation of quasi-static approximation of viscoelasticity with capillarity, *J. Math. Anal. Appl.*, **226** (1998), 61-81.

[70] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, Blow-up in quasilinear parabolic equations, Nauka, Moscow, 1987; English translation: *Walter de Gruyter,* Berlin/New York, (1995).

[71] J. Scott Russell, Report on water waves, *British Assoc. Report,* (1844).

[72] B. Straughan, Explosive instabilities in mechanics, *Springer-Verlag,* (1998).

[73] M. Tsutsumi, Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Kyoto Univ., **8** (1972/73), 211–229.

[74] S. K. Turitsyn, Blow-up in the Boussinesq equation, *Phys. Rev. E,* **47** (1993), 796-799.

[75] V. V. Varlamov, Asymptotic behavior of solutions of the damped Boussinesq equation in two space dimensions, *Int. J. Maths. & Math. Sci.*, **22** (1999), 131–145.

[76] V. V. Varlamov, Eigenfunction expansion method and the long-time asymptotics for the damped Boussinesq equation, *Discrete Cont. Dyn. S.*, 7 (4) (2001), 675-702.

[77] J. L. Vázquez, Domain of existence and blowup for the exponential reaction-diffusion equation, *Indiana Univ. Math. J.*, **48** (2) (1999), 677–709.

[78] E. Vitillaro, Some new result on global nonexistence and blow-up for evolution problems with positive initial energy, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste,* **31** (2000), 245–275.

[79] E. Vitillaro, Global existence for the wave equations with nonlinear boundary damping and source terms, *J. Diff. Eq.,* **186** (2002), 259–298.

[80] Ya. B. Zel'dovich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich, G. M. Makhviladze, The mathematical theory of combustion and explosions, *Consultants Bureau*, New York, (1985).

[81] Y. Zhijian, On local existence of solutions of initial boundary value problems for the "bad" Boussinesq-type equation, *Nonlinear Anal.*, **51** (2002), 1259-1271.

[82] Y. Zhijian and X. Wang, Blowup of solutions for improved Boussinesq type equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **278** (2003), 335-353.

[83] Y. Zhijian, Global existence, asymptotic behavior and blowup of solutions for a class of nonlinear wave equations with dissipative term, *J. Diff. Eq.,* **187** (2003), 520-540.

[84] Y. Zhou, A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping and vanishing initial energy in R^n, *Appl. Math. Let.,* **18** (2005), 281-286.

[85] Y. Zhou, Global nonexistence for a nonlinear wave equation with damping and source terms, *Math. Nacht.,* (2005), (in press).

[86] W. P. Ziemer, Weakly differentiable functions, Sobolev spaces and functions of bounded variation, *Springer-Verlag*, (1989).

ÖZGEÇMİŞ

03.03.1976 tarihinde Siirt'in Kurtalan ilçesinde doğdum. İlköğrenimimi Atatürk İlkokulunda, orta ve lise öğrenimimi Kurtalan Lisesinde tamamladım. Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünden 1997 yılında mezun oldum. Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansımı 2000 yılında tamamladım. 01.09.1998 tarihinde Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü "Uygulamalı Matematik" Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladım. Halen bu görevi yürütmekteyim. Evli olup İngilizce bilmekteyim.