GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

İrfan IŞIK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN

2019

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

İrfan IŞIK

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum
2019

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN danışmanlığında, İrfan IŞIK tarafından hazırlanan bu çalışma 17 / 07 / 2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **Oy birliği ile** kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI	*İmza*	:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Doç. Dr. Arzu GÖRMEZ
Enstitü Müdürü

Bu tez çalışması ……………. tarafından ………… nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

17 / 07 / 2019

İrfan IŞIK

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

İrfan IŞIK

Erzurum Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KARAHAN

Sabit nokta teorisi günümüz gelişen modern matematiğin en önemli konularından birisidir. Son zamanlarda metrik uzay kavramının çeşitli genelleştirilmeleri ile birlikte sabit nokta teoremleri genelleştirilmiş metrik uzaylara taşınmaktadır. Bu genelleştirilmiş metrik uzaylardan bazıları b-metrik, dikdörtgensel metrik, kısmi metrik ve $b_v(s)$ metrik uzaydır.

Bu tezde var olan genelleştirilmiş metrik uzayların birçoğundan daha genel olan kısmi $b_v(s)$, kısmi v-genelleştirilmiş ve $b_v(\theta)$ metrik uzayları tanımlanmıştır. Ayrıca tezde yeni tanımlanan uzaylarda ve $b_v(s)$ metrik uzayında Banach, Kannan, Reich ve Ciric gibi sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiştir.

2019, 55 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta teoremleri, genelleştirilmiş metrik uzay, $b_v(s)$ metrik uzay, kısmi $b_v(s)$ metrik uzay, kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay, $b_v(\theta)$ metrik uzay

ABSTRACT

MS. Thesis

FIXED POINT THEOREMS IN GENERALIZED METRIC SPACES

İrfan IŞIK

Erzurum Technical University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Assist. Prof. Dr. İbrahim KARAHAN

Fixed point theory is one of the most important subjects of todays developing modern mathematics. Recently, after various generalizations of the concept of metric space, fixed point theorems have been carried to generalized metric spaces. Some of these generalized metric spaces are b-metric, rectangular metric, partial metric, and $b_v(s)$ metric space.

In this thesis, partial $b_v(s)$, partial v-generalized and $b_v(\theta)$ metric spaces which are more general than the most of the generalized metric spaces are defined. Also, fixed point theorems such as Banach, Kannan, Reich and Ciric have been expressed and proved in the considered spaces and $b_v(s)$ metric spaces.

2019, 55 page

Keywords: Fixed point theorems, generalized metric space, $b_v(s)$ metric space, partial $b_v(s)$ metric space, partial v-generalized metric space, $b_v(\theta)$ metric space

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Akademik hayatımızda bize danışman olmanın yanı sıra bir ideale sahip olmayı ve o idealin peşinde koşmayı öğreten değerli hocam Sayın Dr.Öğr.Üyesi İbrahim KARAHAN'a sonsuz teşekkür eder şükranlarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım ve benden hiçbir desteğini esirgemeyen Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri'ne teşekkürü bir borç bilirim.

Hep yanımda olan, desteğini esirgemeyen ve bana güvenen ailem ile maddi ve manevi desteğini esirgemeyen dayım Arif YILMAZ'a canı gönülden, yürekten teşekkür ederim.

Bana yeni ufuklar açan, beni hep destekleyen, her zaman yanımda olan kıymetli büyüğüm Yiğit Cihan SÜER'e, hayatımda güzel izler bırakan Emrah PINAR, Ethem YEŞİLYURT ile ismini sayamayacağım tüm dostlarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İrfan IŞIK
17 / Temmuz / 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

Simgeler	**Açıklama**
$\delta(A)$	A kümesinin çapı
$BN(X)$	X in boş kümeden farklı sınırlı alt kümelerinin ailesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
(X,d)	d metriği ile donatılmış metrik uzay
$\Vert . \Vert$	Norm
l_p	p. kuvveti toplanabilir dizilerin uzayı
L_p	p. kuvveti integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$\mathcal{F}$	T_1 ve T_2dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi
$d(x,y)$	x ve y noktaları arasında ki metrik

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, birçok alanda uygulaması olan matematiğin önemli teorilerinden biridir. Bu önem matematikte var olan birçok problemin sabit nokta problemleri cinsinden ifade edilmesinden ve bu teorideki tekniklerin kullanılarak çözüm bulunmasından kaynaklanmaktadır. En önemli sabit nokta teoremi Banach Sabit Nokta Teoremi, Banach Daralma Prensibi ya da Büzülme Teoremi olarak bilinen teoremdir. Bu teorem 1922 yılında ispatlanmıştır ve metrik uzaylar teorisinde önemli bir yeri vardır. Caccioppoli ise Banach ’tan bağımsız olarak aynı teoremi 1931 yılında ifade ve ispat etmiştir. Birçok uygulaması olan bu teoremin uygulamalarından biri de adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlık ve tekliği ile ilgili olan Picard-Lindelöf teoreminin ispatıdır. Ayrıca bu teorem, ardışık yaklaşımların hangi Newton metodu altında çalışacağını garanti etmek maksadıyla, genel integral denklemlerin çözümünün varlık ve tekliğini göstermede, varyasyonel eşitsizlik ve optimizasyon problemlerinin çözümünü araştırmada da kullanılabilir.

Banach sabit nokta teoreminin ardından birçok alanda uygulamaya sahip olan farklı teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Örneğin Borel (1977) sabit nokta teoremi cebir geometri alanında, Browder (1967) sabit nokta teoremi oyun teorisi alanında, Kakutani (1941) sabit nokta teoremi ekonomideki Nash denge problemleri alanında ve Atiyah-Bott (1988) sabit nokta teoremi manifoldların geometri ve topolojisi alanında uygulaması olan teoremlerden bazılarıdır. Yine Schauder (1930), Brouwer (1912), Kannan (1968), Ciric (1974) ve Reich (1971) sabit nokta teoremleri büyük üne ve öneme sahip olan teoremlerdendir.

Matematikte var olan kavramların, uzayların, tanımların ve teoremlerin genelleştirilmesi önemli etkiye sahip bir çalışma alanıdır. Buradan yola çıkarak metrik uzay kavramı birçok farklı yönden genelleştirilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla yakın geçmişte Dhage (1992) D-metrik uzayı, Czerwik (1993) b-metrik uzayı, Matthews (1994) kısmi metrik uzayı, Branciari (2000) dikdörtgensel metrik uzayı ve v-genelleştirilmiş metrik uzayı, Mustafa and Sims (2006) G-metrik uzayı, Shukla (2014) kısmi b-metrik uzayı, George et al. (2015) dikdörtgensel b-metrik uzayı, Mitrovic and Radenovic (2017) $b_v(s)$ metrik uzayı tanımlamışlardır. Bu yeni uzaylarla birlikte bilinen sabit nokta teoremleri bu uzaylara taşınmaya çalışılmıştır. Bu alandaki çalışmaların bazıları şöyledir. 1993 yılında Berinde (1993) yarı metrik (quasimetric) uzaylarda genelleştirilmiş daraltan dönüşümlerin sabit noktalarını incelemiştir. 2001 yılında Rhoades (2001) zayıf daraltan dönüşümler için teoremler geliştirmiştir. 2009 yılında Harjani and Sadarangani (2009) kısmi sıralı kümelerde zayıf daraltan dönüşümler için sabit nokta teoremlerini ifade ve ispat etmişlerdir. 2012 yılında Cegielski (2012) Hilbert uzaylarda sabit nokta teoremleri için iterasyon metodlarını ele almıştır. 2014 yılında Aghajani ve Abbas (2014) kısmi sıralı b-metrik uzaylarda alışılmış sabit nokta teoremlerini ifade ve ispat etmişlerdir. 2016 yılında Dung (2016) b-metrik uzaylarda Caristi teoremini ispatlamıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümümüz olan Giriş bölümünün devamında ikinci bölümde Kaynak Özetleri, üçüncü bölümde kullanılan temel tanımları ve özellikleri barındıran Materyal ve Yöntem bölümü yer almaktadır. Dördüncü bölüm olan Araştırma Bulguları ve Tartışma bölümünde kısmi $b_v(s)$ metrik uzay, kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $b_v(\theta)$ metrik uzayları tanımlanmış, ardından Banach, Kannan, Reich ve Ciric sabit nokta teoremleri yeni tanımlanan bu uzaylara aktarılarak dönüşümlerin sabit noktalarının varlık ve tekliği ispatlanmıştır. Son bölüm olan Sonuç ve Öneriler kısmında ise çalışmalarımızdan elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

1974 yılında Ciric yapmış olduğu çalışmada yarı daraltan (quasi-contraction) dönüşümleri tanımlamış ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği için bazı gerek ve yeter şartlar ifade etmiştir. Ayrıca çok değerli yarı daraltan dönüşümler için de benzer teoremler vermiştir (Ciric 1974).

1993 yılında Czerwik metrik uzayların çok önemli bir genelleştirmesi olan *b*-metrik uzayları tanımlamış ve bu uzayda başta Banach sabit nokta teoremi olmak üzere bazı sabit nokta teoremleri ispatlamıştır (Czerwik 1993).

2009 yılında Azam ve arkadaşları konik dikdörtgensel metrik uzayları tanıtmış ve Banach sabit nokta teoremini tam normal konik dikdörtgensel metrik uzaylarda kanıtlamıştır (Azam et al. 2009).

2013 yılında Shukla kısmi b-metrik uzaylar kavramını kısmi metrik ve b-metrik uzayların genelleştirilmesi olarak tanıtmıştır. İfade edilen uzaylarda Banach sabit nokta teoreminin yanı sıra Kannan sabit nokta teoremini de ifade ve ispat etmiştir. Ayrıca sonuçları destekleyen örnekler de vermiştir (Shukla 2013).

2014 yılında Aghajani ve Abbas kısmi sıralı tam metrik uzaylarda zayıf daraltanlık şartını sağlayan dört dönüşüm için bazı alışılmış sabit nokta teoremleri ispatlamıştır. Elde ettikleri sonuçlar, mevcut literatürdeki bazı sonuçları genelleştirmiştir (Aghajani and Abbas 2014).

2014 yılında Shukla kısmi dikdörtgensel metrik uzay kavramını dikdörtgensel metrik ve kısmi metrik uzayların genelleştirilmesi olarak tanıtmıştır. Bu çalışmada kısmi dikdörtgensel metrik uzayların bazı özellikleri ve kısmi dikdörtgensel metrik uzaylarda yarı daraltan dönüşümler için bazı sabit nokta sonuçları kanıtlanmıştır. Ayrıca sonuçları destekleyen örnekler verilmiştir (Shukla 2014).

2015 yılında George ve arkadaşları eserlerinde dikdörtgensel b-metrik uzay kavramı, metrik uzayın, dikdörtgensel metrik uzayın ve b-metrik uzayın genelleştirilmesi olarak tanıtmışlardır. Bu uzayda Banach daralma prensibinin bir benzerini ve Kannan sabit nokta teoremini ispatlamışlardır. Elde ettikleri sonuçlar, sabit nokta teorisinde bilinen birçok sonucu genelleştirmektedir (George et al. 2015).

2017 yılında Kamran ve arkadaşları, Czerwik'in tanımladığı b-metrik uzay kavramını temel alarak genişletilmiş b-metrik uzay kavramını vermişlerdir. Geliştirdikleri bu uzayda bazı dönüşüm sınıfları için sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır (Kamran et al. 2017).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu başlık altında çalışmalarımızda sıkça kullandığımız bazı tanımları vereceğiz.

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: X boş kümeden farklı bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını sağlarsa d ye X de bir metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir (Bayraktar 1994).

Tanım 3.1.2: Bir X lineer uzayında $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $x \mapsto \|x\|$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ve

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlarsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X de bir norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir. $x \in X$ elemanının normu $\|x\|$ (veya $\|x\|_X$) ile gösterilir (Bayraktar 1994).

Tanım 3.1.3: (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $m, n > n_0$ için

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir. X deki her (x_n) Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir (Bayraktar 1994).

Tanım 3.1.4: X ve Y aynı F cismi ($F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$) üzerinde iki lineer uzay ve $T: D_T \subset X \to Y$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in D_T$ ve her $a, \beta \in F$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartını sağlayan T operatörüne lineer operatör denir (Bayraktar 1994).

Tanım 3.1.5: $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ birer normlu uzay, $D_T \subset X$ ve $T: D_T \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x \in D_T$ için

$$\|Tx\|_Y \leq c\, \|x\|_X$$

şartını sağlayan bir $c > 0$ sabit sayısı varsa T operatörüne D_T üzerinde sınırlıdır denir. Eğer $D_T = X$ ise T operatörüne sınırlıdır denir (Bayraktar 1994).

Tanım 3.1.6: (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $d(x, x_0) < \delta$ iken $\rho\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 3.1.7: X bir metrik uzay $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $A \subset X$ için $\delta(A) = sup\{d(a, b): a, b \in A\}$ ve her bir $x \in X$ için

$$O(x, n) = \{x, Tx, \dots, T^n x\}, \ \ n = 1,2, \dots$$
$$O(x, \infty) = \{x, Tx, \dots\}$$

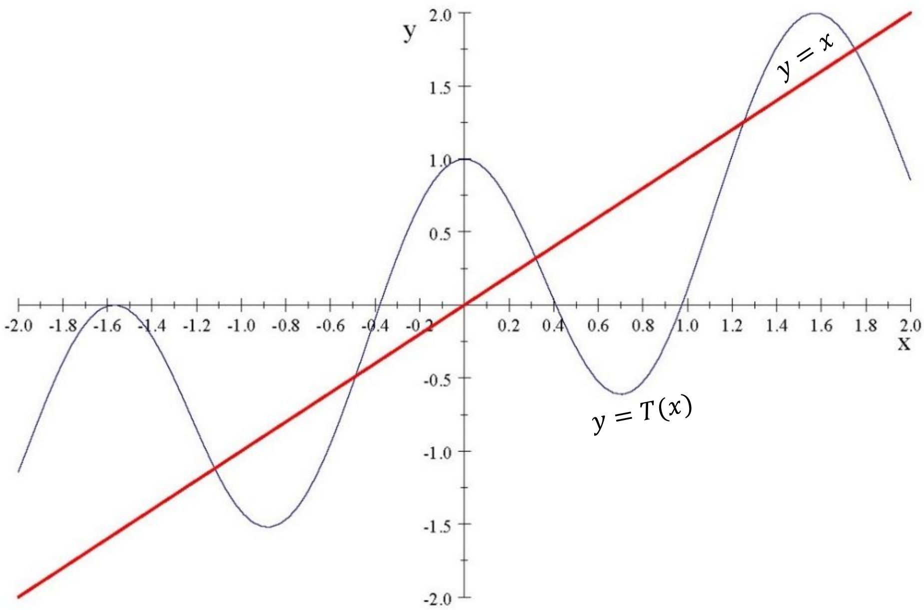
olsun. $O(x, \infty)$ da bulunun her Cauchy dizisi X teki bir $x \in X$ noktasına yakınsarsa X uzayına T-yörüngesel tamdır denir (Ciric 1974).

3.2. Sabit Nokta Kavramı ve Bazı Dönüşüm Sınıfları

Bu başlık altında sabit nokta kavramı ve bazı özel dönüşüm sınıflarını vereceğiz.

Tanım 3.2.1: X boş kümeden farklı bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Yani $F(T) = \{x \in X:\ Tx = x\}$ dir (Agarwal *et al.* 2007).

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümleri T nin sabit noktalarıdır. Ayrıca geometrik olarak $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = Tx$ fonksiyonunun grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişme noktalarının apsisleri T nin sabit noktalarıdır. Aşağıdaki grafiğe göre T nin beş sabit noktası vardır.



Şekil 3.1: $Tx = \tanh x^3 + \cos 4x$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri

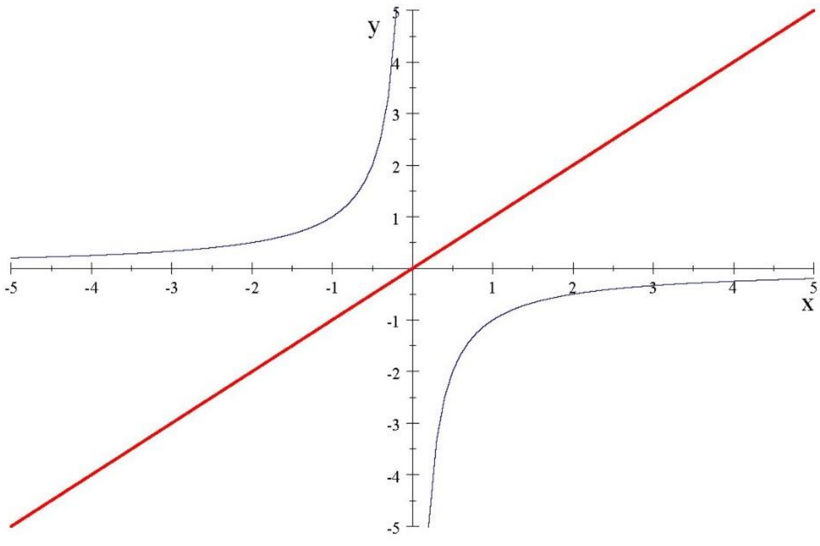
Aşağıda bazı dönüşümlerin sabit noktalarıyla alakalı örnekler verilmiştir.

Örnek 3.2.2:

i) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 13x + 24$ fonksiyonunun sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{1, -2, 3, -4\}$ dir.

ii) $X = \mathbb{R}^n$ ve $Y = \mathbb{R}^m$ $(n \neq m)$ olmak üzere herhangi bir $T: X \to Y$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

iii) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \backslash \{0\} \to X$, $Tx = -\frac{1}{x}$ fonksiyonunun sabit noktası yoktur.



Şekil 3.2: $Tx = -\frac{1}{x}$ dönüşümünün sabit noktalarının geometrik yeri

X boş kümeden farklı bir küme olsun. $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için x in T altında ki n. iterasyonunu $T^n x$ şeklide gösterilir ve $T^n x = T(T^{n-1} x)$ şeklinde tanımlanır.

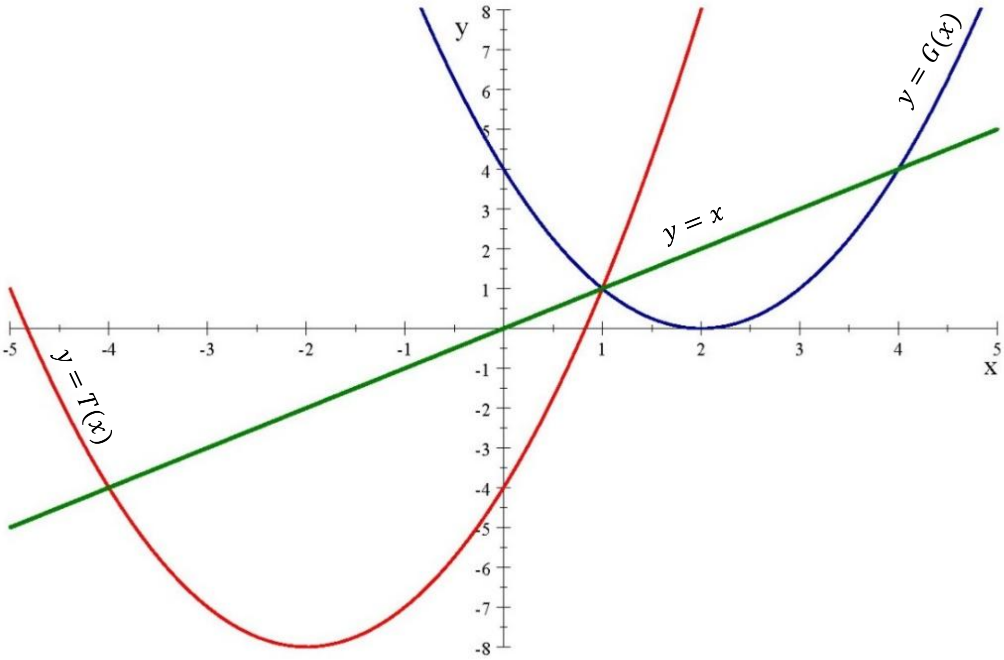
$T: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

i) Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.

ii) Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $F(T^n) = \{x\}$ ise, $F(T) = \{x\}$ dir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $T: \{m, n, k\} \to \{m, n, k\}$ dönüşümü $Tm = n$, $Tn = m$, $Tk = k$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{m, n, k\}$ olduğu halde $F(T) = \{k\}$ dır.

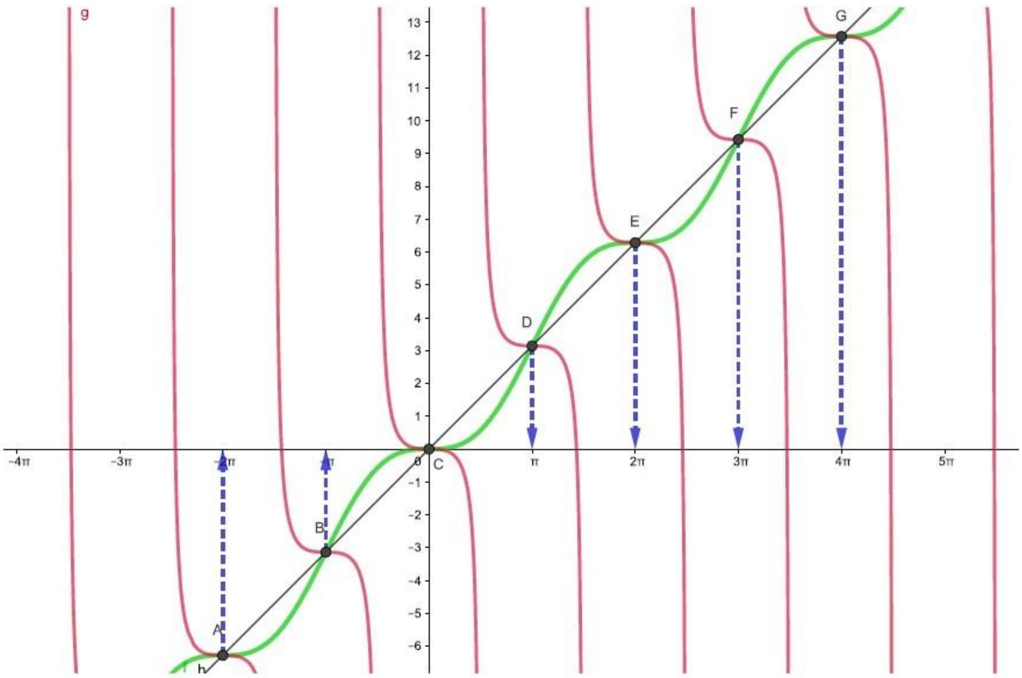
X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $T, S: X \to X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $Tx = Sx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa, bu x noktasına T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir. Bu ortak sabit noktaların kümesi $\mathcal{F} = F(T) \cap F(S)$ ile gösterilir. Aşağıda birden fazla dönüşümün ortak sabit noktalarıyla alakalı örnekler verilmiştir.

Örnek 3.2.3: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T, G: X \to X$, $Tx = x^2 + 4x - 4$ ve $Gx = x^2 - 4x + 4$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T) \cap F(G) = \{1\}$ dir.



Şekil 3.3: $Tx = x^2 + 4x - 4$ ve $Gx = x^2 - 4x + 4$ dönüşümlerinin sabit noktalarının geometrik yeri

Örnek 3.2.4: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T, G: X \to X$, $Tx = x - \sin x$ ve $Gx = x - \tan x$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T) \cap F(G) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ dir.



Şekil 3.4: $Tx = x - \sin x$ ve $Gx = x - \tan x$ dönüşümlerinin sabit noktalarının geometrik yeri

Tanım 3.2.5: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

i) Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir sabit $L \geq 0$ sayısı varsa T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (3.1) eşitsizliğine ise Lipschitz şartı denir. Bu şartı sağlayan en küçük L sayısına ise Lipschitz sabiti denir.

ii) Eğer (3.1) eşitsizliği $0 \leq L < 1$ olması durumunda sağlanıyorsa T ye daraltan dönüşüm başka bir deyişle daraltan dönüşümü (contraction) denir.

iii) Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ifadesi sağlanıyor ise T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

iv) Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ifadesi sağlanıyor ise T ye genişlemeyen dönüşüm (nonexpansive) denir (Agarwal *et al.* 2009).

Lipschitz şartını sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olmakla beraber yukarıdaki dönüşüm sınıfları da düzgün süreklidir. Dolayısıyla eğer T dönüşümü sürekli değilse, daraltan ve genişlemeyen dönüşüm de olamaz.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlanan genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının mevcut olması gerekmemektedir. Bunun için ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerine bazı ek koşullar konulmalıdır.

Tanım 3.2.6: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ dönüşümü için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y)) \tag{3.2}$$

şartı sağlanırsa T ye zayıf daraltan (weakly contractive) dönüşüm denir (Rhoades 2001).

Açıkça görüleceği gibi $c \in (0,1]$ için $\varphi(t) = ct$ alınırsa zayıf daraltan dönüşüm daraltan dönüşüme indirgenir.

Tanım 3.2.7: (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq qd(x,y) + rd(x,Tx) + sd(y,Ty) + t[d(x,Ty) + d(y,Tx)]$$

olacak şekilde $\sup\{q + r + s + 2t: x,y \in X\} < 1$ şartını sağlayan x ve y ye bağlı negatif olmayan q,r,s,t sayıları varsa T ye genelleştirilmiş daraltan (generalized contraction) dönüşüm denir (Ciric 1974).

Burada $r = s = t = 0$ alınırsa genelleştirilmiş daraltan dönüşüm daraltan dönüşüme indirgenmiş olur.

Tanım 3.2.8: (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $0 \leq q < 1$ olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq q\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

sağlanırsa T ye yarı daraltan (quasi-contraction) dönüşüm denir (Ciric 1974).

Rhoades (1977) yaptığı karşılaştırmalar sonucunda genelleştirilmiş daraltan dönüşümün yarı daraltan dönüşüm olduğunu ancak tersinin doğru olmadığını ifade etmiştir.

Örnek 3.2.9:

$$X_1 = \left\{\frac{m}{n}: m = 0,1,3,9, \dots; n = 1,4, \dots, 3k+1, \dots\right\},$$

$$X_2 = \left\{\frac{m}{n}: m = 1,3,9,27, \dots; n = 2,5, \dots, 3k+2, \dots\right\},$$

ve $X = X_1 \cup X_2$ alışılmış metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \frac{3x}{5}, x \in X_1 \text{ ise} \\ \frac{x}{8}, x \in X_2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda X, $q = 3/5$ ile yarı daraltan (quasi-contraction) dönüşümdür. Eğer x ve y, X_1 veya X_2 kümesindeyse bu durumda $d(Tx,Ty) \leq \frac{3}{5}d(x,y)$ dir. Şimdi x, X_1 veya X_2 kümesinde olsun. Bu durumda

$$x > \frac{5}{24}y \text{ ise } d(Tx,Ty) = \frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{24}y\right) \leq \frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{8}y\right) = \frac{3}{5}d(x,Ty),$$

$$x > \frac{5}{24}y \text{ ise } d(Tx,Ty) = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{24}y - x\right) \leq \frac{3}{5}(y - x) = \frac{3}{5}d(x,y)$$

olur. Üstelik T, X üzerinde

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{3}{5}\max\{d(x,y), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

şartını ve yarı daraltan dönüşüm şartını sağlar. T nin X uzayında genelleştirilmiş daraltan olmadığını göstermek için $x = 1$ ve $y = 1/2$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} & qd(x,y) + rd(x,Tx) + sd(y,Ty) + t[d(x,Ty) + d(y,Tx)] \\ & = q\frac{1}{2} + r\frac{2}{5} + s\frac{7}{16} + t\frac{83}{80} \\ & < (q + r + s + 2t)\frac{83}{160} < \frac{83}{160} < \frac{43}{80} \\ & = d(Tx,Ty) \end{aligned}$$

olup $(q + r + s + 2t) < 1$ dir. Açıkça görüldüğü üzere genelleştirilmiş daraltan şartını sağlamamaktadır (Ciric 1974).

Tanım 3.2.10: X bir vektör uzayı ve $K \subset X$ olmak üzere her bir $x, y \in K$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$ ise K ya konveks küme denir (Bayraktar 1994).

3.3. Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası olabilmektedir. Bu bölümde hangi dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının var olduğunu ve bununla beraber sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğunu ifade eden teorem ve örnekleri vereceğiz. Aşağıdaki teorem analizde ki en basit sabit nokta teoremi olarak bilinmektedir.

Teorem 3.3.1: $[a,b]$**,** $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık olmak üzere $f: [a,b] \to [a,b]$ ye sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde en az bir $c \in [a,b]$ sayısı mevcuttur (Agarwal *et al.* 2007).

İspat: Her $x \in [a,b]$ için $Tx = x - f(x)$ şeklinde bir $T: [a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise $T(a) \leq 0$ ve

$f(b) \leq b$ ise $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c) = 0$ olacağından $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ vardır.

Teorem 3.3.2: X bir kompakt Banach uzayı olmak üzere $T: X \to X$ e kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T nin bir tek p sabit noktası vardır. Ayrıca her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = p$$

dir (Khamsi and Kirk 2001).

Teorem 3.3.3 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): $\bar{B}_r(x_0)$, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olmak üzere bu durumda $f: \bar{B}_r(x_0) \to \bar{B}_r(x_0)$ sürekli dönüşümünün en az bir sabit noktası vardır (Brouwer 1912).

Teorem 3.3.4 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, $C \subseteq X$ boş kümeden farklı kompakt konveks bir alt küme ve $f: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere bu durumda f dönüşümünün en az bir sabit noktası mevcuttur (Schauder 1930).

Teorem 3.3.5 (Banach Sabit Nokta Teoremi): X bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümünün X uzayında bir tek sabit noktası vardır (Banach 1922).

İspat: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Yani her $x, y \in X$ ve $q \in (0,1)$ olmak üzere $d(T(x), T(y)) \leq q d(x, y)$ dir. Öncelikle sabit noktanın varlığı gösterilecektir. $T(x) \neq x$ olmak üzere $x \in X$ olsun. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için d metriğine art arda üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} d(T^k(x), x) &\leq d\left(T^k(x), T^{k-1}(x)\right) + d(T^{k-1}(x), x) \\ &\leq d\left(T^k(x), T^{k-1}(x)\right) + d\left(T^{k-1}(x), T^{k-2}(x) + d(T^{k-2}(x), x)\right) \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} d\left(T^i(x), T^{i-1}(x)\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

olur. T daraltan dönüşüm olduğundan her $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için

$$d\left(T^i(x), T^{i-1}(x)\right) \leq qd\left(T^{i-1}(x), T^{i-2}(x)\right) \leq \cdots \leq q^{i-1}d(T(x), x) \qquad (3.4)$$

olur. (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinden ve $0 < 1 - q^k < 1$ olduğundan

$$d(T^k(x), x) \leq \sum_{i=1}^{k} q^{i-1}d(T(x), x) \leq \frac{1 - q^k}{1 - q} d(T(x), x) \leq \frac{d(T(x), x)}{1 - q}$$

elde edilir. Yani herhangi bir $k > m$ için

$$d\left(T^k(x), T^m(x)\right) \leq q^m d(T^{k-m}(x), x) \leq \frac{q^m d(T(x), x)}{1 - q}$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin. Buradan $k > m \geq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{N}$ seçilebilir. Bu durumda $\frac{q^m d(T(x),x)}{1-q} < \varepsilon$ olur. Yani $k > m \geq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{N}$ vardır. Öyle ki $d\left(T^k(x), T^m(x)\right) < \varepsilon$ dur. Böylece $(T^n(x))_{n=1}^{\infty}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $(T^n(x))_{n=1}^{\infty}$ dizisi $x^* \in X$ noktasına yakınsar. Üstelik

$$T(x^*) = T\left(\lim_{n\to\infty} T^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = x^*$$

olur. Bu durumda x^*, X in bir sabit noktasıdır. Şimdi X in x^* ve x^{**} gibi iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. O zaman

$$d(x^*, x^{**}) = d(T(x^*), T(x^{**})) \leq qd(x^*, x^{**})$$

elde edilir. $q \in (0,1)$ olduğundan $d(x^*, x^{**}) = 0$ olur. Böylece $x^* = x^{**}$ bulunmuş olur. Bundan dolayı T nin tek bir sabit noktası vardır.

Örnek 3.3.6: $X = [a, b]$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için

$$|T'x| \leq k < 1$$

şartı sağlanıyorsa T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten Ortalama Değer Teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (a, b)$ olmak üzere

$$|Tx - Ty| = T'(c)|(x - y)| \leq k|x - y|$$

olur. Böylece Banach sabit nokta teoremi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 3.3.7 (Kannan Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümü

i) $d(T(x), T(y)) \leq \alpha\{d(x, T(x)) + d(y, T(y))\},\ 0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ve $x, y \in X$,

ii) T dönüşümü $z \in X$ noktasında süreklidir.

iii) $\{T^n(x)\}$ iterasyon dizisinin z noktasına yakınsayan bir $\{T^{n_i}(x)\}$ alt dizisi olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır.

şartlarını sağlasın. Bu durumda $z,\ T$ nin tek sabit noktasıdır (Kannan 1969).

İspat: T dönüşümü z noktasında sürekli olduğundan $\{T^{n_i+1}(x)\}$ dizisi $T(z)$ noktasına yakınsar. $T(z) = z$ olmadığını kabul edelim. z merkezli $S_1 = S_1(z, n)$ ve $T(z)$ merkezli $S_2 = S_2(T(z), n)$ iki açık yuvar alalım. $r > 0$ yarı çap olmak üzere $r < \frac{1}{3}d(z, T(z))$ olsun. $\{T^{n_i}(x)\}$ in z ye, $\{T^{n_i+1}(x)\}$ in $T(z)$ ye yakınsaklığından $i > N_1$ şartını sağlayan pozitif bir N_1 tam sayısı vardır. Buradan $T^{n_i}(x) \in S_1$ ve $T^{n_i+1}(x) \in S_2$ dir. Bundan dolayı

$$d\left(T^{n_i}(x), T^{n_i+1}(x)\right) > r, (i > N_1)$$

olur. Diğer taraftan

$$d\left(T^{n_i+1}(x), T^{n_i+2}(x)\right) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d\left(T^{n_i}(x), T^{n_i+1}(x)\right)$$

dir. $l > j > N_i$ için

$$\begin{aligned} d\left(T^{n_l}(x), T^{n_l+1}(x)\right) &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d\left(T^{n_l-1}(x), T^{n_l}(x)\right) \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 d\left(T^{n_l-2}(x), T^{n_l-1}(x)\right) \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{(n_l-n_j)} d\left(T^{n_j}(x), T^{n_j+1}(x)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat son ifade, $l \to \infty$ için 0 a yaklaşır ve çelişkili bir sonuç elde edilmiş olur. Bundan dolayı $T(z) = z$ dir ve z, T nin bir sabit noktasıdır. Eğer $m \in X$ ise $T(m) = m$ dir. Bu durumda

$$d(m, z) = d\left(T(m), T(z)\right) \leq \alpha\left\{d\left(z, T(z)\right) + d\left(m, T(m)\right)\right\} = 0$$

dır. Buradan $z = m$ olup ispat tamamlanır.

Tanım 3.3.8: X ve Y boş kümeden farklı iki küme olsun. 2^Y, Y nin kuvvet kümesi olmak üzere $T: X \to 2^Y$ şeklinde tanımlanan T dönüşümüne çok değerli dönüşüm denir.

Teorem 3.3.9 (Ciric Sabit Nokta Teoremi): (X,d) bir metrik uzay, A ve B, X in herhangi iki alt kümesi, $D(A,B) = \inf\{d(a,b): a \in A, b \in B\}$, $\rho(a,b) = \sup\{d(a,b): a \in A, b \in B\}$ ve $BN(X) = \{A: \emptyset \neq A \subset X \; ve \; \delta(A) = \sup\{d(a,b): a,b \in A\} < +\infty\}$ olsun. Ayrıca $T: X \to BN(X)$ dönüşümünün çok değerli bir dönüşüm olduğunu ve X in T-yörüngesel tam olduğunu kabul edelim. Eğer $r < 1$ ve her $x, y \in X$ için

$$\rho(Tx,Ty) \leq r \max\{d(x,y), \rho(x,Tx), \rho(y,Ty), D(x,Ty), D(y,Tx)\}$$

eşitsizliği sağlanırsa bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

i) T nin bir tek $s \in X$ sabit noktası vardır ve $Ts = \{s\}$ dir.

ii) Her bir $x_0 \in X$ için T nin x_0 da $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ yörüngesi vardır.

iii) $\alpha < 1$ herhangi bir sabit pozitif sayı olmak üzere $d(x_n, s) \leq \left(\frac{(q^{1-\alpha})^n}{(1-q^{1-\alpha})}\right) d(x_0, x_1)$ dır (Ciric 1974).

İspat: $a \in (0,1)$ herhangi bir sayı olsun. $K: X \to X$ tek değerli dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım. $d(x,Kx) \geq r^a \rho(x,Tx)$ ifadesini sağlayan her $x \in X$ için Kx, Tx in bir noktası olsun. K dönüşümü $r_1 = r^{1-a}$ ile yarı daraltandır. Gerçekten her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} d(Kx,Ky) &\leq \rho(Tx,Ty) \\ &\leq r.r^{-a}\max\{r^a d(x,y), r^a \rho(x,Tx), r^a \rho(y,Ty), r^a D(x,Ty), r^a D(y,Tx)\} \\ &\leq r^{1-a}\max\{d(x,y), d(x,Kx), d(y,Ky), d(x,Ky), d(y,Kx)\} \end{aligned}$$

olup buradan K nın yarı daraltanlığı anlaşılır. Açıkça $s = Ks$, $s \in Ts$ anlamına gelir. T teorem ifadesinde verilen eşitsizliği yerine getirdiğinden $s \in Ts$, $\rho(Ts,Ts) \leq r\rho(s,Ts)$ ifadesini sağlar. Bu yalnızca $Ts = \{s\}$ olursa olabilir. Üstelik $s \in X$ in K nın sabit noktası olması için s, T nin sabit noktası olmalıdır. Çünkü her $x \in X$ için $\{K^n x\}$ dizisi x te T yörüngeseldir.

Teorem 3.3.10 (Reich Sabit Nokta Teoremi): (X, d) tam metrik uzay ve a, b, c negatif olmayan ve $a + b + c < 1$ şartını sağlayan reel sayılar olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, y)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Reich 1971).

Bu tanımda eğer $a = b = 0$ alınırsa Banach sabit nokta teoremi, $a = b$, $c = 0$ alınırsa da Kannan sabit nokta teoremi elde edilir.

İspat: $x \in X$ herhangi bir nokta olmak üzere $\{T^n x\}$ dizisini alalım. $x = T^n x$ ve $y = T^{n-1} x$ olsun. $n \geq 1$ için

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq ad(T^n x, T^{n+1}x) + bd(T^{n-1}x, T^n x) + cd(T^n x, T^{n-1}x)$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq pd(T^n x, T^{n-1}x)$$

olup $p < 1$ olmak üzere burada $p = \frac{b+c}{1-a}$ dır. Ardından $d(T^{n+1}x, T^n x) \leq p^n d(x, Tx)$ ve herhangi $m > n$ için $d(T^m x, T^n x) \leq \frac{p^n d(x,Tx)}{1-p}$ dir. Böylece $\{T^n x\}$ bir Cauchy dizisidir. Ayrıca $T^n x \to z$ dir. Şimdi $T(z) = z$ olduğunu göstereceğiz. $T^{n+1}x \to Tz$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Gerçekten de teorem ifadesinde verilen eşitsizlikte $x = T^n x$ ve $y = z$ alınırsa

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}x, Tz) &\leq ad(T^{n+1}x, T^n x) + bd(Tz, z) + cd(T^n x, z) \\ &\leq ad(T^{n+1}x, T^n x) + bd(T^{n+1}x, Tz) + bd(T^{n+1}x, z) + cd(T^n x, z) \\ &\leq ap^n d(Tx, x) + bd(T^{n+1}x, Tz) + bd(T^{n+1}x, z) + cd(T^n x, z) \end{aligned}$$

dır. Bundan dolayı

$$d(T^{n+1}x, Tz) \leq \frac{\left(ap^n d\left(Tx, x\right) + bd\left(T^{n+1}x, z\right) + cd(T^n x, z)\right)}{1 - b} \to 0$$

dır. Son olarak sadece bir sabit nokta olduğunu ispatlayalım. x ve y gibi iki sabit nokta olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq ad(x, x) + bd(y, y) + cd(x, y) = cd(x, y)$$

dir. $d(x,y)$ sıfır olmadığından $1 \leq c$ olup bu bir çelişkidir. Bu teoremin Banach ve Kannan teoremlerinden daha güçlü olduğunu görmek için aşağıdaki örneği göz önünde bulunduralım: $X = [0,1]$, $0 \leq x < 1$ ve $T(1) = \frac{1}{6}$ için $Tx = \frac{x}{3}$ olsun. Bu durumda T Banach şartını sağlamıyor. Çünkü 1 noktasında sürekli değildir. Ayrıca Kannan şartı da sağlanmıyor. Çünkü $d\left(T(0), T(\frac{1}{3})\right) = \frac{1}{2}\left(d\big(0, T(0)\big) + d\left(\frac{1}{3}, T(\frac{1}{3})\right)\right)$ tür. Eğer $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{9}, c = \frac{1}{3}$ (bunlar mümkün olan en küçük değerler değil) alınırsa teorem ifadesinde verilen eşitsizlik sağlanır.

3.4. Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar

Bu başlık altında son yıllarda tanımlanmış olan bazı genelleştirilmiş metrik uzay kavramları verilecektir. 1993 yılında Czerwik aşağıdaki b-metrik uzayı tanımlamıştır.

Tanım 3.4.1: E boş kümeden farklı bir küme ve $\rho: E \times E \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u, v, w \in E$ için

i) $\rho(u,w) = 0 \Leftrightarrow u = w$
ii) $\rho(u,w) = \rho(w,u)$
iii) $\rho(u,w) \leq s[\rho(u,v) + \rho(v,w)]$

şartlarını sağlayan $s \geq 1$ reel sayısı varsa ρ ya bir b-metrik ve (E,ρ) ikilisine de b-metrik uzay adı verilir (Czerwik 1993).

Açıkça görüleceği üzere b-metrik uzayda $s = 1$ alınırsa alışılmış metrik uzay elde edilir. Ancak genel olarak b-metrik uzayın, alışılmış metrik uzay olması gerekmemektedir.

Örnek 3.4.2: $0 < p < 1$ olmak üzere l_p uzayı

$$l_p = \left\{(x_n) \subset \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$$

ve $d: l_p \times l_p \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde verilsin. Burada $x = (x_n),\ y = (y_n) \in l_p$ olup bu durumda (l_p, d) bir b-metrik uzaydır. Çünkü basit bir hesaplama ile

$$d(x,z) \leq 2^{\frac{1}{p}}[d(x,y) + d(y,z)]$$

ifadesi elde edilir. Burada $s = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ dir (Berinde 1993).

Örnek 3.4.3: $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$\int_0^1 |x(t)|^p\, dt < \infty.$$

şartını sağlayan tüm reel $x(t)$ fonksiyonlarının kümesi L_p $(0 < p < 1)$ olsun. Bu durumda her $x, y \in L_p$ için

$$d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda (L_p, d) bir b-metriktir. s sabiti bir önce ki örnekte olduğu gibi $2^{\frac{1}{p}}$ dir (Berinde 1993).

Örnek 3.4.4: (X,d) bir metrik uzay ve $p > 1$ bir reel sayı olmak üzere $\rho(u,w) = (d(u,w))^p$ olsun. Şimdi $s = 2^{p-1}$ sabiti ile ρ nun bir b-metrik olduğunu gösterelim. Açıkça b-metrik uzay tanımının i. ve ii. şartları sağlanmaktadır. $f(u) = u^p$ $(u > 0)$ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p)$$

ve dolayısıyla $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ olur. Böylece her bir $u, v, w \in X$ için

$$\begin{aligned}
\rho(u,w) = \big(d(u,w)\big)^p &\leq \big(d(u,v) + d(v,w)\big)^p \\
&\leq 2^{p-1}\big(d(u,v)\big)^p + \big(d(v,w)\big)^p \\
&= 2^{p-1}\big(\rho(u,v) + \rho(v,w)\big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla b-metrik uzay tanımının iii. şartı da sağlanmış olup ρ bir b-metriktir. Fakat bu uzay alışılmış metrik uzay değildir. Örneğin $X = \mathbb{R}$ ve $d(u,w) = |u - w|$ olmak üzere $\rho(u,w) = |u - w|^2$, $s = 2$ sabiti ile $\mathbb{R}$ üzerinde bir b-metriktir fakat $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik değildir (Aghajani and Abbas 2014).

Tanım 3.4.5: (X,d) bir b-metrik uzay olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n), X de bir dizi olsun. Bu durumda;

i) Herhangi bir $\varepsilon > o$ ve her $n, m \geq n(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine b-Cauchy dizisi denir.

ii) $x \in X$ olmak üzere herhangi bir $\varepsilon > o$ ve her $n \geq n(\varepsilon)$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine x noktasına b-yakınsaktır denir. Bu ifade $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.

iii) X de ki her (x_n) b-Cauchy dizisi x de b-yakınsak ise yani $x_n \to x \in X$ ise (X,d) b-metrik uzayına tam b-metrik uzay denir (Boriceanu 2009).

Aşağıda 2000 yılında Branciari tarafından tanımlanan dikdörtgensel metrik uzay kavramı verilmiştir.

Tanım 3.4.6: E boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\rho: E \times E \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u, v, w \in E$ ve tüm farklı $c, d \in E \backslash \{u, w\}$ için

i) $\rho(u,w) = 0 \Leftrightarrow u = w$

ii) $\rho(u,w) = \rho(w,u)$

iii) $\rho(u,w) \leq \rho(u,c) + \rho(c,d) + \rho(d,w)$

şartları sağlanırsa ρ ya bir dikdörtgensel metrik (rectangular metric) ve (E,ρ) ikilisine de dikdörtgensel metrik uzay adı verilir (Branciari 2000).

Burada $c = d$ olduğunda alışılmış metrik uzay elde edilir.

Tanım 3.4.7: E boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\rho: E \times E \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u, w \in E$ ve tüm farklı $c, d \in E \backslash \{u, w\}$ için

i) $\rho(u,w) = 0 \Leftrightarrow u = w$

ii) $\rho(u,w) = \rho(w,u)$

iii) $\rho(u,w) \leq s[\rho(u,c) + \rho(c,d) + \rho(d,w)]$

şartlarını sağlayan $s \geq 1$ reel sayısı varsa ρ ya bir dikdörtgensel b-metrik ve (E,ρ) ikilisine de dikdörtgensel b-metrik uzay adı verilir (George et al. 2015).

Dikkat etmek gerekirse her metrik uzay dikdörtgensel metrik uzay ve her dikdörtgensel metrik uzay ise $s = 1$ sabit sayısı ile dikdörtgensel b-metrik uzaydır. Ancak bunların tersinin mutlak surette doğru olması gerekmez.

Örnek 3.4.8: $E = \mathbb{N}$, $\rho: E \times E \to E$ dönüşümü

$$\rho(u,w) = \begin{cases} 0, & u = w \text{ ise} \\ 4a, & u,w \in \{1,2\}\ ve\ u \neq w \text{ ise} \\ a, & u \text{ veya } w \notin \{1,2\}\ ve\ u \neq w \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $a > 0$ sabit bir sayıdır. Bu durumda (E,ρ), $s = \frac{4}{3} > 1$ sabiti ile dikdörtgensel b-metrik uzaydır fakat (E,ρ), $\rho(1,2) = 4a > 3a = \rho(1,3) + \rho(3,4) + \rho(4,2)$ olduğundan dikdörtgensel metrik uzay değildir.

Örnek 3.4.9: $E = \mathbb{N}$, $\rho: E \times E \to E$ dönüşümü her $u,w \in E$ için $\rho(u,w) = \rho(w,u)$ olmak üzere

$$\rho(u,w) = \begin{cases} 0, & u = w \text{ ise} \\ 10a, & u = 1, w = 2 \text{ ise} \\ a, & u \in \{1,2\} \text{ ve } w \in \{3\} \\ 2a, & u \in \{1,2,3\} \text{ ve } w \in \{4\} \\ 3a, & u \text{ veya } w \notin \{1,2,3,4\} \text{ ve } u \neq w \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $a > 0$ sabit bir sayıdır. Bu durumda (E,ρ), $s = 2 > 1$ sabiti ile dikdörtgensel b-metrik uzaydır fakat dikdörtgensel metrik uzay değildir. Çünkü $\rho(1,2) = 10a > 5a = \rho(1,3) + \rho(3,4) + \rho(4,2)$ dir (George et al. 2015).

Aşağıda 2000 yılında Branciari tarafından tanımlanan v-genelleştirilmiş metrik uzay kavramı verilmiştir.

Tanım 3.4.10: E boş kümeden farklı bir küme, $\rho: E \times E \to [0, \infty)$ bir dönüşüm ve $v \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer her farklı $u, w, z_1, z_2, \dots, z_v \in E$ için

i) $\rho(u, w) = 0 \Leftrightarrow u = w$
ii) $\rho(u, w) = \rho(w, u)$
iii) $\rho(u, w) \leq \rho(u, z_1) + \rho(z_1, z_2) + \cdots + \rho(z_v, w)$

şartları sağlanırsa ρ ya v-genelleştirilmiş metrik ve (E, ρ) ikilisine de v-genelleştirilmiş metrik uzay denir (Branciari 2000).

Açıkça görüleceği gibi $v = 1$ alınırsa (E, ρ) alışılmış metrik uzay, $v = 2$ alınırsa (E, ρ) dikdörtgensel metrik uzay olacaktır. Aşağıda 2017 yılında Mitrovic and Radenovic tarafından tanımlanan $b_v(s)$ metrik uzay kavramı verilmiştir.

Tanım 3.4.11: E boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\rho: E \times E \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $v \in \mathbb{N}$, her $u, w \in E$ ve tüm farklı $z_1, z_2, \dots, z_v \in E \setminus \{u, w\}$ için

i) $\rho(u, w) = 0 \Leftrightarrow u = w$
ii) $\rho(u, w) = \rho(w, u)$
iii) $\rho(u, w) \leq s[\rho(u, z_1) + \rho(z_1, z_2) + \cdots + \rho(z_v, w)]$

şartlarını sağlayan $s \geq 1$ reel sayısı varsa ρ ya $b_v(s)$ metrik (E, ρ) ikilisine de $b_v(s)$ metrik uzay adı verilir (Mitrovic and Radenovic 2017).

$b_v(s)$ metrik uzay sadece b-metrik uzayı değil aynı zamanda dikdörtgensel metrik uzayı, v-genelleştirilmiş metrik uzayı ve dikdörtgensel b- metrik uzayı da aşağıda ki şekilde genelleştirir. Tanım 3.4.11 de;

i) $v = s = 1$ ise alışılmış metrik uzay
ii) $s = 1$ ise v-genelleştirilmiş metrik uzay
iii) $v = 2$ ve $s = 1$ ise dikdörtgensel metrik uzay
iv) $v = 2$ ise dikdörtgensel b-metrik uzay
v) $v = 1$ ise b-metrik uzay

elde edilir.

Örnek 3.4.12: $E = \mathbb{N}$ olmak üzere $\rho: E \times E \to [0, \infty)$ dönüşümü ve her bir $u, w \in \mathbb{N}$ için

$$\rho(u,w)=\begin{cases}0, & u=w \text{ ise}\\ 1, & u \text{ veya } w\notin\{1,2\} \text{ ve } u\neq w \text{ ise}\\ 10, & u,w\in\{1,2\} \text{ ve } u\neq w \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda açıkça görülür ki (E,ρ), $v=8$ ve $s=\frac{10}{9}$ ile $b_v(s)$ metrik uzaydır.

Aşağıda 1994 yılında Matthews tarafından tanımlanan kısmi metrik uzay kavramı verilmiştir.

Tanım 3.4.13: E boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\rho: E\times E\to[0,\infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u,v,w\in E$ için

i) $u=w \Leftrightarrow \rho(u,u)=\rho(u,w)=\rho(w,w)$

ii) $\rho(u,u)\leq\rho(u,w)$

iii) $\rho(u,w)=\rho(w,u)$

iv) $\rho(u,w)\leq\rho(u,v)+\rho(v,w)-\rho(v,v)$

şartları sağlanırsa ρ ya bir kısmi metrik (partial metric) ve (E,ρ) ikilisine de kısmi metrik uzay adı verilir (Matthews 1994).

Aşağıda 2014 yılında Shukla tarafından tanımlanan kısmi b-metrik uzay kavramı verilmiştir.

Tanım 3.4.14: E boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\rho: E\times E\to[0,\infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u,v,w\in E$ için

i) $u=w \Leftrightarrow \rho(u,u)=\rho(u,w)=\rho(w,w)$

ii) $\rho(u,u)\leq\rho(u,w)$

iii) $\rho(u,w)=\rho(w,u)$

iv) $\rho(u,w)\leq s[\rho(u,v)+\rho(v,w)]-\rho(v,v)$

şartlarını sağlayan $s\geq 1$ reel sayısı varsa ρ ya bir kısmi b-metrik (E,ρ) ikilisine de kısmi b-metrik uzay adı verilir (Shukla 2014).

Verilen tanımlardan açıkça görüleceği üzere her kısmi metrik uzay $s = 1$ sabit sayısı ile bir kısmi b-metrik uzay ve her b-metrik uzay aynı katsayı ve kendisine uzaklığı sıfır olan noktalar ile kısmi b-metrik uzay olmaktadır. Ancak bu ifadelerin tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 3.4.15: $E = \mathbb{R}^+$, $r > 1$ bir sabit ve $\rho: E \times E \to \mathbb{R}^+$ tanımlanan bir dönüşüm olmak üzere her $u, v \in E$ için

$$\rho(u, v) = [\max\{u, v\}]^r + |u - v|^r$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $s = 2^r > 1$ sabiti ile (E, ρ) kısmi b-metrik uzaydır fakat ne b-metrik uzay ne de kısmi metrik uzaydır. Aslında, herhangi bir $u > 0$ için $\rho(u, u) = u^r \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Üstelik ρ, E de bir b-metrik uzay değildir. Ayrıca $r > 1$ için, $u = 5$, $v = 1$, $w = 4$ için $\rho(u, v) = 5^r + 4^r$ ve $\rho(u, w) + \rho(w, v) - \rho(w, w) = 5^r + 1 + 4^r + 3^r - 4^r = 5^r + 1 + 3^r$ olup buradan $\rho(u, v) > \rho(u, w) + \rho(w, v) - \rho(w, w)$ olur. Bu nedenle ρ, E uzayında bir kısmi metrik uzay değildir (Shukla 2013).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. $b_v(s)$ Metrik Uzayda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde ilk olarak $b_v(s)$ metrik uzayda zayıf daraltan dönüşümler için Banach sabit nokta teoremini vereceğiz.

Teorem 4.1.1: E tam $b_v(s)$ metrik uzay ve S, E uzayında bir zayıf daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda S tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $u_0 \in E$ keyfi bir başlangıç noktası olsun. $\{u_n\}$ dizisi $u_{n+1} = Su_n$ şeklinde tanımlansın. Eğer $u_n = u_{n+1}$ ise bu durumda u_n in S nin bir sabit noktası olduğu açıktır. Bu yüzden tüm n ler için $u_n \neq u_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Üstelik tüm farklı n ve m için de diğer çalışmalara benzer şekilde $u_n \neq u_m$ varsayımı ispatlanabilir. Bu durumda zayıf daraltan dönüşümün tanımı gereği her bir $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \rho\left(u_{n+1}, u_{n+p-1}\right) &= \rho(Su_n, Su_{n+p}) \\ &\leq \rho\left(u_n, u_{n+p}\right) - \varphi(\rho\left(u_n, u_{n+p}\right)) \end{aligned}$$

dir. $\alpha_n = \rho(u_n, u_{n+p})$ olsun. α_n negatif olmayan ve φ azalmayan fonksiyon olduğundan

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \varphi(\alpha_n) \leq \alpha_n \qquad (4.1)$$

dır. Buradan $\{\alpha_n\}$ in artmayan bir dizi olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca $\{\alpha_n\}$ in sınırlı olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı $\alpha \geq 0$ limitine sahiptir. $\alpha > 0$ olduğunu kabul edelim. φ azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\varphi(\alpha_n) \geq \varphi(\alpha) > 0$$

dır. Bu nedenle (4.1) den

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \varphi(\alpha)$$

ifadesi elde edilir. Üstelik yeterince büyük N için $\alpha_{N+m} \leq \alpha_m - N\varphi(\alpha)$ çelişkisi elde edilir. Bu yüzden kabulümüz yanlıştır ve $\alpha = 0$ dır. $n \to \infty$ için $\alpha_n = \rho(u_n, u_{n+p}) \to 0$ olduğundan $\{u_n\}$, E de bir Cauchy dizisidir. E tam olduğundan $u_n \to u$ olacak şekilde bir $u \in E$ vardır. Şimdi $\rho(u, Su) = 0$ olduğunu başka bir deyişle u nun S nin sabit noktası olduğunu gösterelim. S nin zayıf daraltanlığı ve $b_v(s)$ metrik uzayının tanımından

$$
\begin{aligned}
\rho(u,Su) &\leq s[\rho(u,u_{n+1})+\rho(u_{n+1},u_{n+2})+\cdots+\rho(u_{n+v-1},u_{n+v})+\rho(u_{n+v},Su)] \\
&= s[\rho(u,u_{n+1})+\rho(u_{n+1},u_{n+2})+\cdots+\rho(u_{n+v-1},u_{n+v})+\rho(Su_{n+v-1},Su)] \\
&\leq s[\rho(u,u_{n+1})+\rho(u_{n+1},u_{n+2})+\cdots+\rho(u_{n+v-1},u_{n+v}) \\
&\quad +\rho(u_{n+v-1},u)-\varphi(\rho(u_{n+v-1},u)]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $u_n \to u$ olup $n \to \infty$ ve için $\alpha_n = \rho(u_n, u_{n+p}) \to 0$ olur ve $\varphi(0) = 0$ olduğundan $\rho(u, Su) = 0$ dır. Başka bir deyişle u, S nin sabit noktasıdır. Şimdi u nun S nin tek bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Aksine kabul edelim ki S nin w gibi farklı bir sabit noktası olsun. S zayıf daraltan dönüşüm olduğundan

$$\rho(u,w) = \rho(Su,Sw) \leq \rho(u,w) - \varphi\big(\rho(u,w)\big) < \rho(u,w)$$

çelişkisi elde edilir. Bu yüzden $u = w$ dır. Yani u, S nin tek sabit noktasıdır.

Şimdi $b_v(s)$ metrik uzayda Kannan sabit nokta teoremini ispatlayalım.

Teorem 4.1.2: E tam $b_v(s)$ metrik uzay ve S, E uzayında

$$\rho(u,w) \leq \gamma\rho(u,Su) + \gamma\rho(w,Sw)$$

şeklinde bir Kannan tip dönüşüm olup $s\gamma \leq 1$ dir. Bu durumda S tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $u_0 \in E$ keyfi bir başlangıç noktası olsun. $\{u_n\}$ dizisi $u_{n+1} = Su_n$ şeklinde tanımlansın. Eğer $u_n = u_{n+1}$ ise bu durumda u_n in S nin bir sabit noktası olduğu açıktır. Bu yüzden tüm n ler için $u_n \neq u_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. S, Kannan dönüşümü olduğundan

$$
\begin{aligned}
\rho(u_n,u_{n+1}) &= \rho(Su_{n-1},Su_n) \\
&\leq \gamma[\rho(u_{n-1},Su_{n-1})+\rho(u_n,Su_n)] \\
&= \gamma[\rho(u_{n-1},Su_{n-1})+\rho(u_n,u_{n+1})]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\rho(u_n,u_{n+1}) \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\rho(u_{n-1},Su_{n-1}) \leq \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^n \rho(u_0,Su_0) \tag{4.2}$$

dir. Bunun anlamı

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u_{n+1}) = 0 \tag{4.3}$$

olmasıdır. (4.2) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\rho(u_n, u_{n+p}) &= \rho(S^n u_0, S^{n+p} u_0) \\
&\leq \gamma[\rho(S^{n-1}u_0, S^n u_0) + \rho(S^{n+p-1}u_0, S^{n+p}u_0)] \\
&\leq \gamma\left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{n-1} \rho(u_0, Su_0) + \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+p-1} \rho(u_0, Su_0)\right]
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $n \to \infty$ için $\rho(u_n, u_{n+p}) \to 0$ dır. Buradan $\{u_n\}$ in E de bir Cauchy dizisi olduğu anlaşılmaktadır. E nin tamlığından $u_n \to u$ olacak şekilde E de bir u noktası vardır. Şimdi u nun S nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\rho(u, Su) &\leq s[\rho(u, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \rho(u_{n+v}, Su)] \\
&= s[\rho(u, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \rho(Su_{n+v-1}, Su)] \\
&\leq s[\rho(u, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) \\
&\quad +\gamma[\rho(u_{n+v-1}, Su_{n+1-v}) + \rho(u, Su)]]
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$(1 - s\gamma)\rho(u, Su) \leq s[\rho(u, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + (1+\gamma)\rho(u_{n+v-1}, u_{n+v})]$$

elde edilir. (4.3) eşitsizliği kullanılırsa $\rho(u, Su) = 0$ yani başka bir deyişle $u \in F(S)$ bulunur. Şimdi u nun S nin tek sabit noktası olduğunu gösterelim. Aksi olarak kabul edelim ki S nin w gibi farklı bir sabit noktası olsun. S, Kannan dönüşüm olduğundan

$$\rho(u, w) = \rho(Su, Sw) \leq \gamma[\rho(u, Su) + \rho(w, Sw)] = 0$$

çelişkisi elde edilir. Bu yüzden $u = w$ dır. Yani u, S nin tek bir sabit noktasıdır.

Şimdi $b_v(s)$ metrik uzayda Ciric sabit nokta teoremini ispatlayalım. Ancak, bu teoremi ispatlamak için aşağıda verilen tanım ve lemmaya ihtiyaç vardır.

Tanım 4.1.3: E bir $b_v(s)$ metrik uzay olsun. Eğer $\{u_n\}$ dizisi $u \in E$ noktasına yakınsayan bir Cauchy dizisi ise $\{u_n\}$ dizisine u noktasına kuvvetli yakınsar denir.

Lemma 4.1.4: E bir $b_v(s)$ metrik uzay olsun. $\{u_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizileri E uzayında sırasıyla u ve w noktalarına kuvvetli yakınsayan iki dizi olsun. Bu durumda

$$\rho(u,w) \le s \lim_{n\to\infty} \inf \rho(u_n, w_n)$$

ifadesi sağlanır.

İspat: $b_v(s)$ metrik uzay tanımından her bir $u, w \in E$ için

$$\begin{aligned}\rho(u,w) \quad &\le s[\rho(u,u_n) + \rho(u_n,w_n) + \rho(w_n,w_{n+1}) \\ &\quad + \cdots + \rho(w_{n+v-3},w_{n+v-2}) + \rho(w_{n+v-2},w)]\end{aligned}$$

dır. Buradan her iki tarafın liminf alınırsa

$$\begin{aligned}\rho(u,w) \quad &\le s \liminf_{n\to\infty}[\rho(u,u_n) + \rho(u_n,w_n) + \rho(w_n,w_{n+1}) \\ &\quad + \cdots + \rho(w_{n+v-3},w_{n+v-2}) + \rho(w_{n+v-2},w)]\end{aligned}$$

olur. $\lim_{n\to\infty} \rho(u,u_n) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(w,w_n) = 0$ olduğundan her bir $u, w \in E$ için

$$\rho(u,w) \le s \liminf_{n\to\infty} \rho(u_n,w_n)$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 4.1.5: E tam $b_v(s)$ metrik uzay, $r \in [0,1)$ ve $u, w \in E$ olmak üzere S, E uzayında

$$\rho(Su,Sw) \le r\max\{\rho(u,w), \rho(u,Su), \rho(w,Sw), \rho(u,Sw), \rho(w,Su)\} \tag{4.4}$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda S tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\alpha \in E$ bir sabit ve

$$O(\alpha,m,n) = \{S^j : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \le j \le n\}$$

kümesi verilsin. Ayrıca

$$O(\alpha,m,\infty) = \{S^j : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \le j\} \tag{4.5}$$

olsun. $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $m \le n$ için $dO(\alpha,m,n)$ ve $dO(\alpha,m,\infty)$ ile sırasıyla $O(\alpha,m,n)$ ve $O(\alpha,m,\infty)$ kümelerinin çapları gösterilsin. (4.4) den $n \in \mathbb{N}$ için

$$\max\{\rho(\alpha,S^j\alpha) : 1 \le j \le n\} = O(\alpha,0,n) \tag{4.6}$$

ifadesi yazılır.

$\{S^n\alpha\}$, E de bir dizi olsun. Bu dizi için iki durum söz konusudur. Herhangi bir $k, l \in \mathbb{N}$ için $k < l$ ve $S^k\alpha = S^l\alpha$ veya tüm farklı n ler için $S^n\alpha$ dır. Birinici durumda (4.5) den

$$dO(\alpha, k, l-1) = dO(\alpha, k+1, l) \leq rdO(\alpha, k, l) = rdO(\alpha, k, l-1)$$

olur. Dolayısıyla

$$dO(\alpha, k, \infty) = dO(\alpha, k, l-1) = 0$$

olup S^k, S nin bir sabit noktasıdır. Şimdi ikinci durumu değerlendirelim. $n \in \mathbb{N}$, $n > v$ eşitsizliğini sağlayan bir sabit olsun. (4.6) dan $\rho(\alpha, S^l\alpha) = dO(\alpha, 0, n)$ olacak şekilde $l \leq n$ şartını sağlayan bir $l \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $l > v$ ise

$$\begin{aligned} dO(\alpha, 0, n) &= \rho(\alpha, S^l\alpha) \\ &\leq s\left[\sum_{j=0}^{v-1} \rho\left(S^j\alpha, S^{j+1}\alpha\right) + \rho(S^v\alpha, S^l\alpha)\right] \\ &\leq s[vdO(\alpha, 0, v) + dO(\alpha, v, l)] \\ &\leq s[vdO(\alpha, 0, v) + r^v dO(\alpha, 0, l)] \\ &\leq s[vdO(\alpha, 0, v) + r^v dO(\alpha, 0, n)], \end{aligned}$$

olduğundan

$$dO(\alpha, 0, n) \leq \frac{sv}{(1 - sr^v)} dO(\alpha, 0, v) \tag{4.7}$$

dır. Eğer $l \leq v$ ise (4.7) şartının sağlandığını görmek kolaydır. $n \in \mathbb{N}$ keyfi bir sayı olmak üzere $\{dO(\alpha, 0, n)\}$ sınırlıdır bu yüzden $dO(\alpha, 0, \infty) < \infty$ dur. (4.4) den $m \in \mathbb{N}$ için

$$dO(\alpha, m, \infty) = rdO(\alpha, m-1, \infty) \leq \cdots \leq r^m dO(\alpha, 0, \infty)$$

olup $\{S^n\alpha\}$ bir Cauchy dizisidir. E uzayının tamlığından $\{S^n\alpha\}$ dizisi $z \in E$ noktasına yakınsar. Lemma 4.1.4 gereğince

$$\begin{aligned} \rho(z, Sz) &\leq \liminf_{n\to\infty} \rho(S^n\alpha, Sz) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} r\max\{\rho(S^{n-1}\alpha, z), \rho(S^{n-1}\alpha, S^n\alpha), \rho(z, Sz), \rho(S^{n-1}\alpha, Sz), \rho(S^n\alpha, z)\} \\ &= sr\rho(z, Sz) \end{aligned}$$

dir. Hipotezden, $rs < 1$ olarak kabul ettiğimizden z, S nin bir sabit noktasıdır. Şimdi ise S nin tek sabit noktası olduğunu ispatlayalım. Aksine kabul edelim ki S nin y ve z gibi farklı iki sabit noktası olsun. Bu durumda

$$\rho(y, z) = \rho(Sy, Sz)$$

$$\leq r\max\{\rho(y,z),\rho(y,Sy),\rho(z,Sz),\rho(y,Sz),\rho(z,Sy)\}$$
$$= r\rho(y,z)$$

dir. $r < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu yüzden kabulümüz yanlıştır ve bundan dolayı S nin tek bir sabit noktası vardır.

4.2. Kısmi $b_v(s)$ Metrik Uzayda Sabit Nokta Teoremleri

Bu başlık altında Mitrovic and Radenovic (2017) tarafından tanımlanan $b_v(s)$ metrik uzay kavramının tarafımızca genelleştirilmiş şekli olan kısmi $b_v(s)$ metrik uzay kavramı verildi. Ayrıca bu uzayda bazı sabit nokta teoremlerini verildi.

Tanım 4.2.1: E boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\rho: E \times E \to [0,\infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $v \in \mathbb{N}$ ve $u, w, z_1, z_2, \ldots, z_v \in E$ için

i) $u = w \Leftrightarrow \rho(u,u) = \rho(u,w) = \rho(w,w)$
ii) $\rho(u,u) \leq \rho(u,w)$
iii) $\rho(u,w) = \rho(w,u)$
iv) $\rho(u,w) \leq s[\rho(u,z_1) + \rho(z_1,z_2) + \cdots + \rho(z_{v-1},z_v) + \rho(z_v,w)] - \sum_{i=1}^{v}\rho(z_i,z_i)$

şartlarını sağlayan $s \geq 1$ reel sayısı varsa ρ ya kısmi $b_v(s)$ metrik, (E,ρ) ikilisine de kısmi $b_v(s)$ metrik uzay adı verilir.

Açıkça görüleceği gibi her $b_v(s)$ metrik uzay kısmi $b_v(s)$ metrik uzaydır. Ancak bu ifadenin tersinin doğru olması gerekmez. Ayrıca kısmi $b_v(s)$ metrik uzayda; $v = 2$ olarak alınırsa kısmi dikdörtgensel b-metrik uzay, $v = 1$ olarak alınırsa kısmi b-metrik uzay, $v = s = 1$ olarak alınırsa kısmi metrik uzay elde edilir.

Önerme 4.2.2: (E,ρ) kısmi $b_v(s)$ metrik uzay olmak üzere $u, w \in E$ için $\rho(u,w) = 0$ ise $u = w$ dır.

İspat: $u, w \in E$ için $\rho(u,w) = 0$ olsun. Kısmi $b_v(s)$ metrik uzay tanımının ikinci şartından $\rho(u,u) \leq \rho(u,w) = 0$ olup buradan $\rho(u,u) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $\rho(w,w) = 0$ olduğu görülür. Bundan dolayı $\rho(u,w) = \rho(u,u) = \rho(w,w) = 0$ elde edilir. İlk şart gereği de $u = w$ dır.

Önerme 4.2.3: E boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, E kümesi üzerinde d_1 bir kısmi metrik ve d_2 ise bir $b_v(s)$ metrik olsun. $\rho: E \times E \to [0, \infty)$ dönüşümü $u, w \in E$ için $\rho(u, w) = d_1(u, w) + d_2(u, w)$ şeklinde tanımlanırsa ρ bir kısmi $b_v(s)$ metriktir.

İspat: (E, d_1) kısmi metrik uzay ve (E, d_2) $b_v(s)$ metrik uzay olsun. Bu durumda kısmi $b_v(s)$ metrik uzay ifadesinin ilk üç şartının ρ dönüşümü için sağlandığını görmek kolaydır. $u, w, z_1, z_2, \dots, z_v \in E$ noktaları rastgele seçilmiş noktalar olsun. Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
\rho(u,w) &= d_1(u,w) + d_2(u,w) \\
&\leq d_1(u,z_1) + d_1(z_1,z_2) + \cdots + d_1(z_v,w) - \sum_{i=1}^{v} d_1(z_i,z_i) \\
&\quad + s[d_2(u,z_1) + d_2(z_1,z_2) + \cdots + d_2(z_v,w)] \\
&\leq s\Bigg[d_1(u,z_1) + d_1(z_1,z_2) + \cdots + d_1(z_v,w) - \sum_{i=1}^{v} d_1(z_i,z_i) \\
&\quad + d_2(u,z_1) + d_2(z_1,z_2) + \cdots + d_2(z_v,w)\Bigg] \\
&= s\left[\rho(u,z_1) + \rho(z_1,z_2) + \cdots + \rho(z_v,w) - \sum_{i=1}^{v} \rho(z_i,z_i)\right] \\
&\leq s[\rho(u,z_1) + \rho(z_1,z_2) + \cdots + \rho(z_v,w)] - \sum_{i=1}^{v} \rho(z_i,z_i)
\end{aligned}
$$

olup (E, ρ) kısmi $\mathrm{b_v(s)}$ metrik uzaydır.

Örnek 4.2.4: $E = \mathbb{R}^+$ olsun. $d_1: E \times E \to [0, \infty)$ dönüşümü her $u, w \in \mathbb{R}^+$ için

$$
d_1(u,w) = \begin{cases} 0, & u = w \text{ ise} \\ 2, & u \text{ veya } w \notin \{1,2\} \text{ ve } u \neq w \text{ ise} \\ 25, & u, w \in \{1,2\} \text{ ve } u \neq w \text{ ise} \end{cases}
$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $v = 9$ ve $s \geq \frac{5}{4}$ sabitleri ile (E, d_1) in $\mathrm{b_v(s)}$ metrik uzay olduğu açıktır. Diğer taraftan $p > 1$ olmak üzere $d_2: E \times E \to [0, \infty)$ dönüşümü her $u, w \in E$ için $d_2(u, w) = [\max\{u, w\}]^p$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (E, d_2) nin bir kısmi metrik uzay olduğunu görmek kolaydır. Önerme 4.2.4 gereği her bir $u, w \in E$ için $\rho: E \times E \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü $\rho(u, w) = d_1(u, w) + d_2(u, w)$ şeklinde tanımlanırsa (E, ρ) kısmi $b_v(s)$ metrik uzay olur.

Aşağıda yapılan tanım ile kısmi $b_v(s)$ metrik uzayda ki yakınsak dizi, Cauchy dizisi ve tam uzay olma kavramlarını verelim.

Tanım 4.2.5: (E,ρ) kısmi $b_v(s)$ metrik uzay, $\{u_n\}$, E de bir dizi ve $u \in E$ olsun. Bu durumda;

i) Eğer $\lim_{n\to\infty}\rho(u_n,u) = \rho(u,u)$ ise $\{u_n\}$ dizisi u noktasına yakınsaktır denir.

ii) Eğer $\lim_{n,m\to\infty}\rho(u_n,u_m)$ limiti var ve sonlu ise $\{u_n\}$ dizisine (E,ρ) uzayında Cauchy dizisi denir.

iii) Eğer E uzayında ki her $\{u_n\}$ Cauchy dizisi için;

$$\lim_{n,m\to\infty}\rho(u_n,u_m) = \lim_{n\to\infty}\rho(u_n,u) = \rho(u,u)$$

olacak şekilde bir $u \in E$ noktası varsa (E,ρ) ya tam kısmi $b_v(s)$ metrik uzay denir.

Kısmi $b_v(s)$ metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tek olmayabilir. Şimdi Banach sabit nokta teoreminin bir benzerini vereceğiz. İspatımız, Banach sabit nokta teoreminin normal metrik uzayda ki orijinal ispatından oldukça farklıdır.

Teorem 4.2.6: (E,ρ) tam kısmi $b_v(s)$ metrik uzay ve $S: E \to E$ daraltan bir dönüşüm olsun. Yani her bir $u,w \in E$ için,

$$\rho(Su,Sw) \leq \lambda\rho(u,w) \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1)$ var olsun. Bu durumda S nin tek bir b sabit noktası vardır ve $\rho(b,b) = 0$ dır.

İspat: G dönüşümü n_0 bir doğal sayı olmak üzere $G = S^{n_0}$ şeklinde ve $u_0 \in E$ keyfi başlangıç noktası olmak üzere $\{u_n\}$ dizisi de $Gu_n = u_{n+1}$ şeklinde tanımlanmış olsun. $\lambda \in [0,1)$ ve $lim_{n\to\infty}\lambda^n = 0$ olduğundan verilen $0 < \varepsilon < 1$ için $\lambda^{n_0} < \frac{\varepsilon}{4s}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Bu durumda her bir $u,w \in E$ için

$$\rho(Gu,Gw) = \rho(S^{n_0}u,S^{n_0}w) \leq \lambda^{n_0}\rho(u,w) \tag{4.9}$$

olur. Böylece $k \to \infty$ için

$$\rho(u_{k+1},u_k) = \rho(Gu_k,Gu_{k-1}) \leq \lambda^{n_0}\rho(u_k,u_{k-1}) \leq \lambda^{kn_0}\rho(u_1,u_0) \to 0$$

elde edilir. Buradan

$$\rho(u_{l+1}, u_l) < \frac{\varepsilon}{4v(s^2+s)}$$

olacak şekilde bir $l \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi

$$B_\rho[u_l, \varepsilon/2] := \left\{w \in E : \rho(u_l, w) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \rho(u_l, u_l)\right\}$$

olsun. G nin $B_\rho[u_l, \varepsilon/2]$ kümesini kendi üzerine dönüştürdüğünü ispatlayalım. $u_l \in B_\rho[u_l, \varepsilon/2]$ olduğundan bu kümenin boş kümeden farklı olduğu açıktır. $z \in B_\rho[u_l, \varepsilon/2]$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda (4.9) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\rho(Gz, u_l) &\leq s[\rho(Gz, Gu_l) + \rho(Gu_l + Gu_{l+1}) + \cdots + \rho(Gu_{l+v-2}, Gu_{l+v-1}) \\
&\quad +\rho(Gu_{l+v-1}, u_l)] - \textstyle\sum_{i=0}^{v-1} \rho(Gu_{l+i}, Gu_{l+i}) \\
&\leq s[\rho(Gz, Gu_l) + \rho(Gu_l + Gu_{l+1}) + \cdots + \rho(Gu_{l+v-2}, Gu_{l+v-1}) \\
&\quad +\rho(Gu_{l+v-1}, u_l)] \\
&\leq s[\lambda^{n_0}(\frac{\varepsilon}{2} + \rho(u_l, u_l)) + \rho(u_{l+1}, u_{l+2}) + \cdots + \rho(u_{l+v-1}, u_{l+v}) \\
&\quad +\rho(u_{l+v}, u_l)] \\
&\leq s\Big\{\lambda^{n_0}(\frac{\varepsilon}{2} + \rho(u_l, u_l)) + \rho(u_{l+1}, u_{l+2}) + \cdots + \rho(u_{l+v-1}, u_{l+v}) \\
&\quad +s[\rho(u_l, u_{l+1}) + \rho(u_{l+1}, u_{l+2}) + \cdots + \rho(u_{l+v-1}, u_{l+v}) \\
&\quad +\rho(u_{l+v}, u_{l+v})] - \textstyle\sum_{i=1}^{v} \rho(u_{l+i}, u_{l+i})\} \\
&\leq s\Big\{\lambda^{n_0}(\frac{\varepsilon}{2} + \rho(u_l, u_l)) + (s+1)\rho(u_l, u_{l+1}) + (s+1)\rho(u_{l+1}, u_{l+2}) \\
&\quad +(s+1)\rho(u_{l+2}, u_{l+3}) + \cdots + (s+1)\rho(u_{l+v-1}, u_{l+v}) \\
&\quad +s\rho(u_{l+v}, u_{l+v})\} \\
&\leq s\Big\{\lambda^{n_0}(\frac{\varepsilon}{2} + \rho(u_l, u_l)) + (s+1)\rho(u_l, u_{l+1}) + (s+1)\rho(u_{l+1}, u_{l+2}) \\
&\quad +(s+1)\rho(u_{l+2}, u_{l+3}) + \cdots + (s+1)\rho(u_{l+v-1}, u_{l+v}) + s\lambda^{vn_0}\rho(u_l, u_l)\} \\
&= \rho(u_l, u_l)[s\lambda^{n_0} + s^2\lambda^{vn_0}] + s\lambda^{n_0}\frac{\varepsilon}{2} + s^2\rho(u_l, u_{l+1}) \\
&\quad +s(s+1)[\rho(u_{l+1}, u_{l+2}) + \cdots + \rho(u_{l+v-1}, u_{l+v})]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lambda^{n_0} < \frac{\varepsilon}{4s}$ ve $\rho(u_l, u_{l+1}) \leq \frac{\varepsilon}{4v(s^2+s)}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho(Gz, u_l) &\leq \rho(u_l, u_l)\left[s\frac{\varepsilon}{4s} + s^2\frac{\varepsilon^v}{(4s)^v}\right] + s\frac{\varepsilon}{4s}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\quad +(s^2+s)[\rho(u_l, u_{l+1}) + \rho(u_{l+1}, u_{l+2}) + \cdots + \rho(u_{l+v-1}, u_{l+v})]
\end{aligned}$$

$$\leq \rho(u_l, u_l) + \frac{\varepsilon}{4} + (s^2 + s)v\frac{\varepsilon}{4v(s^2 + s)}$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \rho(u_l, u_l)$$

olur ve böylece $Gz \in B_\rho[u_l, \varepsilon/2]$ olduğu görülür. Bu yüzden G, $B_\rho[u_l, \varepsilon/2]$ kümesini kendi üzerine dönüştürür. $u_l \in B_\rho[u_l, \varepsilon/2]$ ve $Gu_l \in B_\rho[u_l, \varepsilon/2]$ olduğundan, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $G^n u_l \in B_\rho[u_l, \varepsilon/2]$ elde edilir. Yani her bir $m \geq l$ için $u_m \in B_\rho\left[u_l, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ dir. Diğer taraftan, kısmi $b_v(s)$ metrik uzay tanımından, $\rho(u_l, u_l) \leq \rho(u_l, u_{l+1}) < \frac{\varepsilon}{4v(s^2+s)} < \frac{\varepsilon}{2}$ olup her bir $n, m > l$ için

$$\rho(u_n, u_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \rho(u_l, u_l) < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ifade $\{u_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelmektedir. E tam uzay olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, b) = \lim_{n,m\to\infty} \rho(u_n, u_m) = \rho(b, b) = 0 \tag{4.10}$$

olacak şekilde bir $b \in E$ vardır. Şimdi b noktasının S nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\rho(b, Sb) &\leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) \\
&\quad +\rho(u_{n+v}, Sb)] - \textstyle\sum_{i=1}^{v} \rho(u_{n+i}, u_{n+i}) \\
&\leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \rho(u_{n+v}, Sb)] \\
&\leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) \\
&\quad +\rho(Su_{n+v-1}, Sb)] \\
&\leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) \\
&\quad +\lambda\rho(u_{n+v-1}, b)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, (4.10) ifadesinden $\rho(b, Sb) = 0$ dır. Bundan dolayı b; S nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi S nin tek bir sabit noktasının olduğunu göstereceğiz. $a, b \in E$, S nin iki farklı sabit noktası, yani; $Sa = a$ ve $Sb = b$ olsun. Bu durumda S daraltan bir dönüşüm olduğundan

$$\rho(a, b) = \rho(Sa, Sb) \leq \lambda\rho(a, b) < \rho(a, b)$$

olur. Fakat bu bir çelişkidir. Böylece, $\rho(a,b) = 0$, yani, $a = b$ dir. Dahası, a sabit noktası için $\rho(a,a) > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda ise $\rho(a,a) = \rho(Sa,Sa) \leq \lambda\rho(a,a) < \rho(a,a)$ ifadesi elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Bundan dolayı $\rho(a,a) = 0$ dır.

Şimdi kısmi $b_v(s)$ metrik uzayda Kannan sabit nokta teoreminin bir benzerini verelim.

Teorem 4.2.7: (E,ρ) tam kısmi $b_v(s)$ metrik uzay ve $S: E \to E$ dönüşümü her bir $u, w \in E$ ve $\lambda \in [0,\frac{1}{2})$; $\lambda \neq \frac{1}{s}$ için;

$$\rho(Su,Sw) \leq \lambda[\rho(u,Su) + \rho(w,Sw)] \tag{4.11}$$

şartını sağlasın. Bu durumda S, $b \in E$ gibi bir tek sabit noktaya sahiptir ve $\rho(b,b) = 0$ dır.

İspat: Öncelikle S nin bir sabit noktasının olduğunu gösterelim. Her bir $n \in \mathbb{N}$ ve rastgele seçilmiş $u_0 \in E$ ve $\sigma_n = \rho(u_n, u_{n+1})$ için $\{u_n\}$ dizisi $u_n = S^n u_0$ şeklinde tanımlansın. Eğer $\sigma_n = 0$ olursa bu durumda en az bir n için u_n, S nin sabit noktasıdır. Bu yüzden her bir $n \geq 0$ için $\sigma_n > 0$ olarak kabul edelim. S bir Kannan dönüşümü olduğundan ve (4.11) ifadesinden;

$$\begin{aligned}
\sigma_n = \rho(u_n, u_{n+1}) \quad &= \rho(Su_{n-1}, Su_n) \\
&\leq \lambda[\rho(u_{n-1}, Su_{n-1}) + \rho(u_n, Su_n)] \\
&= \lambda[\rho(u_{n-1}, u_n) + \rho(u_n, u_{n+1})] \\
&= \lambda[\sigma_{n-1} + \sigma_n]
\end{aligned}$$

bulunur. Bundan dolayı $\sigma_n \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\sigma_{n-1}$ elde edilir. Bu işlemler devam ettirilirse;

$$\sigma_n \quad \leq \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^n \sigma_0$$

elde edilir. Hipotezden, $\lambda \in [0,\frac{1}{2})$ olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u_{n+1}) = 0 \tag{4.12}$$

olur. $\varepsilon > 0$ olduğundan burada her bir $n, m \geq n_0$ için $\sigma_n < \varepsilon/2$ ve $\sigma_m < \varepsilon/2$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. (4.12) ifadesinden ve her bir $n, m > n_0$ için;

$$\begin{aligned} \rho(u_n, u_m) &= \rho(Su_{n-1}, Su_{m-1}) \\ &\leq \lambda[\rho(u_{n-1}, Su_{n-1}) + \rho(u_{m-1}, Su_{m-1})] \\ &= \lambda[\rho(u_{n-1}, u_n) + \rho(u_{m-1}, u_m)] \\ &= \lambda[\sigma_{n-1} + \sigma_{m-1}] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bundan dolayı $\{u_n\}$ dizisi E de bir Cauchy dizisidir ve $\lim_{n,m\to\infty}\rho(u_n, u_m) = 0$ dır. E uzayının tamlığından dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\rho(u_n, b) = \lim_{n,m\to\infty}\rho(u_n, u_m) = \rho(b, b) = 0$$

olacak şekilde bir $b \in E$ vardır. Şimdi b nin S nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Kannan dönüşüm ve kısmi $b_v(s)$ metrik uzay tanımından;

$$\begin{aligned} \rho(b, Sb) &\leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) \\ &\quad +\rho(u_{n+v}, Sb)] - \textstyle\sum_{i=1}^{v} \rho(u_{n+i}, u_{n+i}) \\ &\leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \rho(u_{n+v}, Sb)] \\ &\leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) \\ &\quad +\rho(Su_{n+v-1}, Sb)] \\ &\leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) \\ &\quad +\lambda\{\rho(u_{n+v-1}, Su_{n+v-1}) + \rho(b, Sb)\}] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten;

$$\begin{aligned} \rho(b, Sb) &\leq \frac{s}{(1 - s\lambda)}[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) \\ &\quad +\ldots+\rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \lambda\rho(u_{n+v-1}, Su_{n+v-1})] \end{aligned}$$

bulunur. $\lambda \neq \frac{1}{s}$ ve $\{u_n\}$ Cauchy ve yakınsak bir diz olduğundan $\rho(b, Sb) = 0$ elde edilir. Bundan dolayı $Sb = b$ dir. Buradan da anlaşılacağı üzere b, S nin bir sabit noktasıdır. Şimdi ise sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Ancak öncelikle $b \in E$ S nin bir sabit noktası ise $\rho(b, b) = 0$ olduğunu gösterelim. Aksine $\rho(b, b) > 0$ olduğunu kabul edelim. (4.11) ifadesinden;

$$\rho(b, b) = \rho(Sb, Sb) \leq \lambda[\rho(b, Sb) + \rho(b, Sb)] = 2\lambda\rho(b, b) < \rho(b, b)$$

bulunur ve bu bir çelişkidir. Bu yüzden kabulümüz yanlış olup $\rho(b,b)=0$ olmalıdır. Şimdi S nin tek bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterebiliriz. S nin $a,b \in E$ gibi iki tane sabit noktası olduğunu varsayalım. Bu durumda $\rho(b,b)=\rho(a,a)=0$ ve (4.11) ifadesinden dolayı,

$$\begin{aligned}\rho(b,a) &= \rho(Sb,Sa) \leq \lambda[\rho(b,Sb)+\rho(a,Sa)] \\ &= \lambda[\rho(b,b)+\rho(a,a)] = 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle $\rho(b,a)=0$ ve dolayısıyla $b=a$ dır. Böylece S tek bir sabit noktaya sahiptir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.8: (E,ρ) tam kısmi $b_v(s)$ metrik uzay ve $S: E \to E$ dönüşümü her bir $u,w \in E$ ve $\lambda \in [0,\frac{1}{s})$ için;

$$\rho(Su,Sw) \leq \lambda \max\{\rho(u,w),\rho(u,Su),\rho(w,Sw)\} \tag{4.13}$$

şartını sağlasın. Bu durumda S, $b \in E$ gibi tek bir sabit noktaya sahiptir ve $\rho(b,b)=0$ dır.

İspat: $u_0 \in E$ keyfi bir başlangıç noktası, $\{u_n\}$ ise her bir n için $u_{n+1}=Su_n$ tarafından tanımlanan bir dizi olsun. Eğer en az bir n doğal sayısı için $u_n=u_{n+1}$ ise bu durumda u_n, S nin bir sabit noktası olduğu açıktır. Bu yüzden her bir n için $u_{n+1} \neq u_n$ olduğunu kabul edelim. Şimdi (4.13) ifadesinden;

$$\begin{aligned}\rho(u_{n+1},u_n) &= \rho(Su_n,Su_{n-1}) \\ &\leq \lambda \max\{\rho(u_n,u_{n-1}),\rho(u_n,Su_n),\rho(u_{n-1},Su_{n-1})\} \\ &= \lambda \max\{\rho(u_n,u_{n-1}),\rho(u_n,u_{n+1}),\rho(u_{n-1},u_n)\} \\ &= \lambda \max\{\rho(u_n,u_{n-1}),\rho(u_n,u_{n+1})\}\end{aligned}$$

elde edilir. $L=\max\{\rho(u_n,u_{n-1}),\rho(u_n,u_{n+1})\}$ kümesi verilsin. Burada iki durum vardır. Eğer $L=\rho(u_n,u_{n+1})$ ise o zaman $\rho(u_{n+1},u_n) \leq \lambda\rho(u_{n+1},u_n) < \rho(u_{n+1},u_n)$ ifadesi elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $L=\rho(u_n,u_{n-1})$ almalıyız ve bu durmda ise

$$\rho(u_{n+1},u_n) \leq \lambda\rho(u_n,u_{n-1})$$

ifadesi bulunur. Bu işlemi tekrarlayarak her bir n için

$$\rho(u_{n+1},u_n) \leq \lambda^n \rho(u_1,u_0) \tag{4.14}$$

elde edilir. Diğer taraftan $n \to \infty$ için $\lambda^n \to 0$ olduğundan burada n_0 doğal sayısı vardır. Yani $0 < \lambda^{n_0} s < 1$ dir. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ olmak üzere (4.14) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\rho(u_n, u_m) \quad & \leq s[\rho(u_n, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-3}, u_{n+v-2}) \\
& \quad +\rho(u_{n+v-2}, u_{n+n_0}) + \rho(u_{n+n_0}, u_{m+n_0}) + \rho(u_{m+n_0}, u_m)] \\
& \quad -\textstyle\sum_{i=1}^{v-2} \rho(u_{n+i}, u_{n+i}) - \rho(u_{n+n_0}, u_{n+n_0}) - \rho(u_{m+n_0}, u_{m+n_0}) \\
& \leq s[\rho(u_n, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-3}, u_{n+v-2}) \\
& \quad +\rho(u_{n+v-2}, u_{n+n_0}) + \rho(u_{n+n_0}, u_{m+n_0}) + \rho(u_{m+n_0}, u_m)] \\
& \leq s(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+v-3})\rho(u_0, u_1) \\
& \quad +s\lambda^n \rho(u_{v-2}, u_{n_0}) + s\lambda^{n_0} \rho(u_n, u_m) + s\lambda^m \rho(u_{n_0}, u_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\begin{aligned}
(1 - s\lambda^{n_0})\rho(u_n, u_m) \quad & \leq s(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+v-3})\rho(u_0, u_1) \\
& \quad +s\lambda^n \rho(u_{v-2}, u_{n_0}) + s\lambda^m \rho(u_{n_0}, u_0)
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki taraftan da limit alarak

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(u_n, u_m) = 0$$

olur. Bu nedenle $\{u_n\}$, E de bir Cauchy dizisidir. E nin tamlığından $u_n \to b$ olacak şekilde $b \in E$ vardır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, b) = \lim_{n,m\to\infty} \rho(u_n, u_m) = \rho(b, b) = 0 \tag{4.15}$$

dır. Şimdi b nin S nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Kısmi $b_v(s)$ metrik uzay tanımı ve (4.13) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\rho(b, Sb) \quad & \leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) \\
& \quad +\rho(u_{n+v}, Sb)] - \textstyle\sum_{i=1}^{v} \rho(u_{n+i}, u_{n+i}) \\
& \leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \rho(u_{n+v}, Sb)] \\
& \leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) \\
& \quad +\rho(Su_{n+v-1}, Sb)] \\
& \leq s[\rho(b, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \\
& \quad \lambda \max\{\rho(u_{n+v-1}, b), \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}), \rho(b, Sb)\}]
\end{aligned}$$

bulunur. $F = \max\{\rho(u_{n+v-1}, b), \rho(u_{n+v-1}, u_{n+v}), \rho(b, Sb)\}$ kümesi verilsin. Burada üç durum vardır:

i) Eğer $F = \rho(u_{n+v-1}, b)$ ise

$$\begin{aligned}\rho(b,Sb) \quad &\leq s[\rho(b,u_{n+1})+\rho(u_{n+1},u_{n+2})+\cdots+\rho(u_{n+v-1},u_{n+v}) \\ &\quad +\lambda\rho(u_{n+v-1},b)]\end{aligned}$$

elde edilir. Yani (4.15) ifadesinden $\rho(b,Sb)=0$ dır.

ii) Eğer $F=\rho(u_{n+v-1},u_{n+v})$ ise

$$\rho(b,Sb) \quad \leq s[\rho(b,u_{n+1})+\rho(u_{n+1},u_{n+2})+\cdots+(1+\lambda)\rho(u_{n+v-1},u_{n+v})]$$

elde edilir. Tekrar (4.15) ifadesi kullanılırsa $\rho(b,Sb)=0$ olur.

iii) Eğer $F=\rho(b,Sb)$ ise

$$(1-s\lambda)\rho(b,Sb) \quad \leq s[\rho(b,u_{n+1})+\rho(u_{n+1},u_{n+2})+\cdots+\rho(u_{n+v-1},u_{n+v})]$$

elde edilir. $\lambda\in\left[0,\frac{1}{s}\right)$ olduğundan $\rho(b,Sb)=0$ ifadesi elde edilir. Yani $Sb=b$ dir. Böylece b, S nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi S nin sabit noktasın tek olduğunu gösterelim. Aksine a ve b nin S nin iki ayrı sabit noktası olduğunu varsayalım ve $\rho(a,b)>0$ olsun. (4.13) ifadesinden

$$\begin{aligned}\rho(a,b) \quad &=\rho(Sa,Sb)\leq\lambda\max\{\rho(a,b),\rho(a,Sa),\rho(b,Sb)\} \\ &=\lambda\max\{\rho(a,b),\rho(a,a),\rho(b,b)\} \\ &=\lambda\rho(a,b)<\rho(a,b)\end{aligned}$$

elde edilir. Bunun bir çelişki olduğu aşikardır. Bu nedenle $\rho(a,b)=0$ olmalı ve böylece $a=b$ dir. Buradan anlaşılacağı üzere S nin tek bir sabit noktası vardır.

Şimdi çalışmalarımızdan elde edilen önemli bir sonucu verelim. Eğer kısmi $b_v(s)$ metrik uzay tanımında $s=1$ olarak alınırsa aşağıda ki kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay tanımı elde edilir.

Tanım 4.2.9: E boş kümeden farklı bir küme olmak üzere; $\rho: E\times E\to[0,\infty)$ bir dönüşüm ve $v\in\mathbb{N}$ olsun. Her bir $u,w,z_1,z_2,\ldots,z_v\in E$ için aşağıda ki;

i) $u=w\Leftrightarrow\rho(u,u)=\rho(u,w)=\rho(w,w);$

ii) $\rho(u,u)\leq\rho(u,w);$

iii) $\rho(u,w)=\rho(w,u);$

iv) $\rho(u,w)\leq\rho(u,z_1)+\rho(z_1,z_2)+\cdots+\rho(z_{v-1},z_v)+\rho(z_v,y)-\sum_{i=1}^{v}\rho(z_i,z_i)$

şartlar sağlanırsa (E,ρ) ya kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay denilir.

Teorem 4.2.6, Teorem 4.2.7 ve Teorem 4.2.8 da $s = 1$ olarak alınırsa kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzayda aşağıda ki sabit nokta teoremleri elde edilir.

4.3. $b_v(\theta)$ Metrik Uzayda Sabit Nokta Teoremleri

2017 yılında Kamran ve arkadaşları aşağıda ki genişletilmiş b-metrik uzay adını verdikleri genelleştirmiş metrik uzayı tanıtmışlardır.

Tanım 4.3.1: E boş kümeden farklı bir küme ve $\theta: E \times E \to [1, \infty)$ bir dönüşüm olmak üzere her bir $u, v, w \in E$ için $\rho_\theta: E \times E \to [0, \infty)$

i) $\rho_\theta(u, w) = 0 \Leftrightarrow u = w;$

ii) $\rho_\theta(u, w) = \rho(w, u);$

iii) $\rho_\theta(u, w) \leq \theta(u, w)[\rho_\theta(u, v) + \rho_\theta(v, w)]$

şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda (E, ρ_θ) ikilisine genişletilmiş b-metrik uzay adı verilir (Kamran et al. 2017).

Açıkça görüleceği üzere her bir $u, w \in E$ için $\theta(u, w) = s$ olarak alınırsa b-metrik uzay elde edilir. Ayrıca $\theta(u, w) = 1$ olarak alınırsa alışılmış metrik uzay elde edilir.

Şimdi yukarıda verilen tanımdan hareketle aşağıda ki metrik uzayı tanımlayabiliriz.

Tanım 4.3.2: E boş kümeden farklı bir küme ve $\theta: E \times E \to [1, \infty)$ bir dönüşüm ve $v \in \mathbb{N}$ olmak üzere her bir $u, z_1, z_2, \ldots, z_v, w \in E$ için $\rho_\theta: E \times E \to [0, \infty)$

i) $\rho_\theta(u, w) = 0 \Leftrightarrow u = w;$

ii) $\rho_\theta(u, w) = \rho_\theta(w, u);$

iii) $\rho_\theta(u, w) \leq \theta(u, w)[\rho_\theta(u, z_1) + \rho_\theta(z_1, z_2) + \cdots + \rho_\theta(z_v, w)]$

şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda (E, ρ_θ) ikilisine $b_v(\theta)$ metrik uzay denir.

Açıkça görüleceği gibi her bir $u, w \in E$ için;

i) $\theta(u, w) = s$ olursa $b_v(s)$ metrik uzay,

ii) $v = 1$ olursa genişletilmiş b-metrik uzay,

iii) $\theta(u, w) = s$ ve $v = 1$ olursa b-metrik uzay,

iv) $\theta(u, w) = s$ ve $v = 2$ olursa dikdörtgensel b-metrik uzay,

v) $\theta(u, w) = 1$ ve $v = 2$ olursa dikdörtgensel metrik uzay,

vi) $\theta(u, w) = 1$ olursa v-genelleştirilmiş metrik uzay,

vii) $\theta(u, w) = 1$ ve $v = 1$ olursa alışılmış metrik uzay,

elde edilir.

Örnek 4.3.3: $E = \mathbb{N}$ olsun. $\theta: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [1, \infty)$ ve $\rho_\theta: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, \infty)$ dönüşümleri ile $\theta(u, w) = 3 + u + w$ ve her bir $u, w \in \mathbb{N}$ için;

$$\rho_\theta(u, w) = \begin{cases} 6, & u, w \in \{1,2\} \text{ ve ise} \\ 1, & u \text{ veya } w \notin \{1,2\} \text{ ve ise} \\ 0, & u = w \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda açık bir şekilde (E, ρ_θ) $v = 5$ sabiti ile $b_v(\theta)$ metrik uzaydır.

Tanım 4.3.4: (E, ρ_θ) $b_v(\theta)$ metrik uzay, $\{u_n\}$ E de bir dizi ve $u \in E$ olsun. Bu durumda;

i) Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $n \geq n_0$ için $\rho_\theta(u_n, u) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{u_n\}$ dizisine (E, ρ_θ) da u noktasına yakınsaktır denir ve bu yakınsama $u_n \to u$ şeklinde gösterilir.

ii) Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her bir $n \geq n_0$ ve $p > 0$ için $\rho_\theta(u_n, u_{n+p}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{u_n\}$ ye Cauchy dizisi denir.

iii) E de ki her Cauchy dizisi yine E de yakınsak ise (E, ρ_θ) tam denir.

Şimdi $b_v(\theta)$ metrik uzayında sabit nokta teoremleri ispatlayacağız. Ancak öncelikle ana teoremi ispatlamak için gerekli olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.3.5: (E, ρ_θ) bir $b_v(\theta)$ metrik uzay, $S: E \to E$ bir dönüşüm ve $\{u_n\}$, E de $u_n \neq u_{n+1}$ olacak şekilde $u_{n+1} = Su_n = S^n u_0$ şeklinde tanımlı bir dizi olsun. Ayrıca her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\rho_\theta(u_{n+1}, u_n) \quad \leq c\rho_\theta(u_n, u_{n-1})$$

olacak şekilde bir $c \in [0,1)$ var olsun. Bu durumda birbirinden farklı $n, m \in \mathbb{N}$ için $u_n \neq u_m$ dir.

İspat: Lemmanın ispatı Mitrovic and Radenovic (2017) makalesinde Lemma 1.11 in ispatı ile çok benzer olduğundan yeniden ispatlanmamıştır.

Lemma 4.3.6: θ sınırlı bir fonksiyon olmak üzere (E, ρ_θ) bir $b_v(\theta)$ metrik uzay, $\{u_n\}$ E de her $n, m \in \mathbb{N}$ için $u_n \neq u_m$ şartını sağlayan $u_{n+1} = Su_n = S^n u_0$ şeklinde tanımlı bir dizi olsun. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\rho_\theta(u_m, u_n) \leq c\rho_\theta(u_{m-1}, u_{n-1}) + k_1 c^m + k_2 c^m \tag{4.16}$$

olacak şekilde bir $c \in [0,1)$ ve $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{u_n\}$ E de bir Cauchy dizisidir.

İspat: Eğer $c = 0$ ise $\{u_n\}$ in bir Cauchy dizisi olduğunu görmek kolaydır. O halde $c \neq 0$ olarak kabul edelim. $\theta(u, w)$ sınırlı bir fonksiyon olduğundan her bir $u, w \in E$ için

$$0 < c^{n_0}\theta(u, w) < 1 \tag{4.17}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Lemmanın hipotezinden

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(u_{n+1}, u_n) \quad &\leq c\rho_\theta(u_n, u_{n-1}) + k_1 c^{n+1} + k_2 c^n \\
&\leq c(c\rho_\theta(u_{n-1}, u_{n-2}) + k_1 c^n + k_2 c^{n-1}) + k_1 c^{n+1} + k_2 c^n \\
&= c^2\rho_\theta(u_{n-1}, u_{n-2}) + 2(k_1 c^{n+1} + k_2 c^n) \\
&\vdots \\
&\leq c^n\rho_\theta(u_1, u_0) + n(k_1 c^{n+1} + k_2 c^n)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde her $k \geq 1$ için

$$\rho_\theta(u_{m+k}, u_{n+k}) \leq c^k\rho_\theta(u_m, u_n) + k(k_1 c^{m+k} + k_2 c^{n+k})$$

dir. Eğer $v \geq 2$ ise bu durumda $b_v(\theta)$ tanımından;

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(u_n, u_m) \quad \leq \theta(u_n, u_m)[&\rho_\theta(u_n, u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1}, u_{n+2}) \\
&+ \cdots + \rho_\theta(u_{n+v-3}, u_{n+v-2}) + \rho_\theta(u_{n+v-2}, u_{n+n_0}) \\
&+ \rho_\theta(u_{n+n_0}, u_{m+n_0}) + \rho_\theta(u_{m+n_0}, u_m)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\rho_\theta(u_n,u_m) \leq\ & \theta(u_n,u_m)[(c^n+c^{n+1}+\cdots+c^{n+v-3})\rho_\theta(u_0,u_1) \\
& +(k_1c+k_2)(nc^n+(n+1)c^{n+1}+\cdots+(n+v-3)c^{n+v-3}) \\
& +c^n\rho_\theta\left(u_{v-2},u_{n_0}\right)+nc^n(k_1c^{v-2}+k_2c^{n_0}) \\
& +c^{n_0}\rho_\theta(u_n,u_m)+n_0c^{n_0}(k_1c^n+k_2c^m) \\
& +c^m\rho_\theta\left(u_{n_0},u_0\right)+mc^m(k_1c^{n_0}+k_2)\big]
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\rho_\theta(u_n,u_m)\left(1-c^{n_0}\theta(u_n,u_m)\right) \leq\ & \theta(u_n,u_m)[(c^n+c^{n+1}+\cdots+c^{n+v-3})\rho_\theta(u_0,u_1) \\
& +(k_1c+k_2)(nc^n+(n+1)c^{n+1}+\cdots \\
& +(n+v-3)c^{n+v-3}) \\
& +c^n\rho_\theta\left(u_{v-2},u_{n_0}\right)+nc^n(k_1c^{v-2}+k_2c^{n_0}) \\
& +n_0c^{n_0}(k_1c^n+k_2c^m) \\
& +c^m\rho_\theta\left(u_{n_0},u_0\right)+mc^m(k_1c^{n_0}+k_2)\big]
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty}nc^n=0$ ve $1-c^{n_0}\theta(u_n,u_m)>0$ olduğundan, (4.16) ifadesi de kullanıldığında $n,m\to\infty$ için $\rho_\theta(u_n,u_m)\to 0$ olur. Bu ifade $\{u_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. $b_v(s)$ metrik uzay bir $b_{2v}(s^2)$ metrik uzay olduğundan $v=1$ ise $\{u_n\}$ Cauchy dizisidir.

Şimdi tam $b_v(\theta)$ metrik uzayında Banach sabit nokta teoremini verebiliriz.

Teorem 4.3.7: (E,ρ_θ) sınırlı θ dönüşümü ile birlikte tam $b_v(\theta)$ metrik uzay ve $S\colon E\to E$ bir daraltan dönüşüm yani başka bir deyişle her bir $u,w\in E$ için;

$$\rho_\theta(Su,Sw)\leq c\rho_\theta(u,w) \tag{4.18}$$

olacak şekilde sabit bir $c\in[0,1)$ var olsun. Bu durumda S tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $u_0\in E$ keyfi bir başlangıç noktası olsun ve $\{u_n\}$ dizisi $u_{n+1}=Su_n=S^{n+1}u_0$ ile tanımlanmış ve her bir $n\geq 0$ için $u_n\neq u_{n+1}$ olsun. Lemma 4.2.16 dan her bir $n,m\in\mathbb{N}$ için $u_n\neq u_m$ dir. S bir daraltan dönüşüm olduğundan

$$\rho_\theta(u_n,u_m)=\rho_\theta(Su_{n-1},Su_{m-1})\leq c\rho_\theta(u_{n-1},u_{m-1})$$

yazılabilir. Lemma 4.2.17 den $\{u_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Böylece E nin tamlığından $u_n \to u$ olacak şekilde bir $u \in E$ vardır. Şimdi u noktasının S nin bir sabit noktası olduğunu başka bir deyişle $u = Su$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\rho_\theta(u,Su) \quad &\leq \theta(u,Su)[\rho_\theta(u,u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1},u_{n+2}) \\ &\quad + \cdots + \rho_\theta(u_{n+v-1},u_{n+v}) + \rho_\theta(u_{n+v},Su)] \\ &= \theta(u,Su)[\rho_\theta(u,u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1},u_{n+2}) \\ &\quad + \cdots + \rho_\theta(u_{n+v-1},u_{n+v}) + \rho_\theta(Su_{n+v-1},Su)] \\ &\leq \theta(u,Su)[\rho_\theta(u,u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1},u_{n+2}) \\ &\quad + \cdots + \rho_\theta(u_{n+v-1},u_{n+v}) + c\rho_\theta(u_{n+v-1},u)]\end{aligned}$$

dir. θ sınırlı fonksiyon ve $\{u_n\}$, u ya yakınsayan bir Cauchy dizisi olduğundan $\rho_\theta(u,Su) = 0$ dır. Buradan u, S nin sabit noktasıdır. Şimdi ise u noktasının tek olduğunu gösterelim. Aksine, başka bir sabit noktanın var olduğunu varsayalım. Buradan

$$\rho_\theta(u,w) = \rho_\theta(Su,Sw) \leq c\rho_\theta(u,w) < \rho_\theta(u,w),$$

çelişkisi elde edilir. Böylece $u = w$ olup u, S nin tek sabit noktasıdır.

Şimdi $b_v(\theta)$ metrik uzayda zayıf daraltan dönüşümler için Banach sabit nokta teoreminin bir benzerini vereceğiz.

Teorem 4.3.8: E tam $b_v(\theta)$ metrik uzay ve S, E üzerinde zayıf daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda S nin tek sabit noktası vardır.

İspat: $u_0 \in E$ keyfi bir başlangıç noktası olsun. $\{u_n\}$ dizisi, $u_1 = Su_0$, $u_2 = Su_1 = S^2u_0, \ldots, u_{n+1} = Su_n = S^n u_0$ şeklinde tanımlansın. Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = u_{n+1}$ ise ispat açıktır. Dolayısıyla her bir n için $u_n \neq u_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. (3.2) den her bir $n, p \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}\rho_\theta(u_{n+1},u_{n+p+1}) \quad &= \rho_\theta(Su_n,Su_{n+p}) \\ &\leq \rho_\theta(u_n,u_{n+p}) - \psi\left(\rho_\theta(u_n,u_{n+p})\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. $\alpha_n = \rho_\theta(u_n,u_{n+p})$ olsun. ψ azalmayan olduğundan,

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \psi(\alpha_n) \leq \alpha_n \tag{4.19}$$

dir. Böylece $\{\alpha_n\}$ dizisinin bir $\alpha \geq 0$ limiti vardır. Şimdi $\alpha = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Aksine $\alpha > 0$ olduğunu varsayalım. (4.19) kullanılarak,

$$\psi(\alpha_n) \geq \psi(\alpha) > 0$$

dır. Böylece

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \psi(\alpha)$$

olur. Buradan $\alpha_{N+m} \leq \alpha_m - N\psi(\alpha)$ elde edilir ki bu yeterince büyük N için bir çelişkidir. Bu $\alpha = 0$ olduğunu kanıtlar. Bu da $\{u_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. E nin tamlığı, $u_n \to u$ olacak şekilde bir $u \in E$ noktasının var olmasını gerektirir. Şimdi, u noktasının S nin bir sabit bir noktası olduğunu gösterelim. (3.2) ve ρ_θ tanımından,

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(u, Su) &\leq \theta(u, Su)[\rho_\theta(u, u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1}, u_{n+2}) \\
&\leq \theta(u, Su)[\rho_\theta(u, u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1}, u_{n+2}) \\
&\quad + \cdots + \rho_\theta(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \rho_\theta(u_{n+v}, Su)] \\
&= \theta(u, Su)[\rho_\theta(u, u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1}, u_{n+2}) \\
&\quad + \cdots + \rho_\theta(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \rho_\theta(Su_{n+v-1}, Su)] \\
&\leq \theta(u, Su)[\rho_\theta(u, u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + \\
&\quad \rho_\theta(u_{n+v-1}, u_{n+v}) + \rho_\theta(u_{n+v-1}, u) - \psi\big(\rho_\theta(u_{n+v-1}, u)\big)]
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken $\rho_\theta\big(u_n, u_{n+p}\big) \to 0$ ve $u_n \to u$ olduğundan ve $\psi(0) = 0$ eşitliğinden u noktasının, S nin bir sabit noktası olduğu çıkar.

Sabit noktanın tekliğini ispatlamak için, w gibi bir tane daha sabit nokta olduğunu kabul edelim. S zayıf daraltan bir dönüşüm olduğundan

$$\rho_\theta(u, w) = \rho_\theta(Su, Sw) \leq \rho_\theta(u, w) - \psi\big(\rho_\theta(u, w)\big) < \rho_\theta(u, w)$$

bulunur. Böylece $u = w$ olup ispat tamamlanır.

Şimdi Reich sabit nokta teoremini verelim.

Teorem 4.3.9: (E, ρ_θ), θ sınırlı fonksiyonu ile tam $b_v(\theta)$ metrik uzayı olsun ve her bir $u, w \in E$ için $S: E \to E$ dönüşümü;

$$\rho_\theta(Su,Sw) \leq \alpha\rho_\theta(u,w) + \beta\rho_\theta(u,Su) + \gamma\rho_\theta(w,Sw) \tag{4.20}$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada α,β,γ negatif olmayan sabitler, $\Gamma_1 = \min\{\beta,\gamma\}$ ve $\Gamma_2 = \max\{\theta(u,Su),\theta(Su,u)\}$ olmak üzere $\alpha+\beta+\gamma<1$ ve $\Gamma_1 < \frac{1}{\Gamma_2}$ dir. Bu durumda S tek bir sabit noktaya sahiptir. Dahası $u_n = Su_{n-1}$ şeklinde tanımlanan $\{u_n\}$ dizisi S nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: $\{u_n\}$, $u_{n+1} = Su_n = S^{n+1}u_0$ şeklinde tanımlanan bir dizi olsun. Burada $u_0 \in E$ rastgele seçilen bir başlangıç noktasıdır. Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = u_{n+1}$ olursa u_0 noktasının S nin bir sabit noktası olduğunu görmemiz kolaydır. Şimdi ise her bir n için $u_n \neq u_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. $b_v(\theta)$ metrik uzay ve $\{u_n\}$ dizisinin tanımından

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(u_{n+1},u_n) &= \rho_\theta(Su_n,Su_{n-1}) \\
&\leq \alpha\rho_\theta(u_n,u_{n-1}) + \beta\rho_\theta(u_n,Su_n) + \gamma\rho_\theta(u_{n-1},Su_{n-1}) \\
&= \alpha\rho_\theta(u_n,u_{n-1}) + \beta\rho_\theta(u_n,u_{n+1}) + \gamma\rho_\theta(u_{n-1},u_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(u_{n+1},u_n) &\leq \frac{\alpha+\gamma}{1-\beta}\rho_\theta(u_n,u_{n-1}) \\
&\leq \left(\frac{\alpha+\gamma}{1-\beta}\right)^n \rho_\theta(u_1,u_0)
\end{aligned}$$

olur. $\alpha+\beta+\gamma<1$olduğundan $0 \leq \frac{\alpha+\gamma}{1-\beta} < 1$ olduğu açıktır. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty}\rho_\theta(u_{n+1},u_n) = 0 \tag{4.21}$$

olduğu elde edilir. Ayrıca her bir n için $u_n \neq u_{n+1}$ olduğundan $\rho_\theta(u_{n+1},u_n) \leq \frac{\alpha+\gamma}{1-\beta}\rho_\theta(u_n,u_{n-1})$ ifadesi ve Lemma 4.3.6 dan her bir $n,m \in \mathbb{N}$ için $u_n \neq u_m$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(u_n,u_m) &= \rho_\theta(Su_{n-1},Su_{m-1}) \\
&\leq \alpha\rho_\theta(u_{n-1},u_{m-1}) + \beta\rho_\theta(u_{n-1},Su_{n-1}) + \gamma\beta\rho_\theta(u_{m-1},Su_{m-1}) \\
&= \alpha\rho_\theta(u_{n-1},u_{m-1}) + \beta\rho_\theta(u_{n-1},u_n) + \gamma\beta\rho_\theta(u_{m-1},u_m) \\
&\leq \alpha\rho_\theta(u_{n-1},u_{m-1}) + \left(\beta\left(\frac{\alpha+\gamma}{1-\beta}\right)^{n-1} + \gamma\left(\frac{\alpha+\gamma}{1-\beta}\right)^{m-1}\right)\rho_\theta(u_1,u_0)
\end{aligned}$$

olur. Lemma 4.3.7 den $\{u_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. E nin tamlığından $u_n \to u$ olan bir $u \in E$ noktası vardır. Şimdi ise u noktasının S nin bir sabit noktası yani $\rho_\theta(u, Su) = 0$ olduğunu gösterelim. Buradan

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(u,Su) \quad &\leq \theta(u,Su)[\rho_\theta(u,u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1},u_{n+2}) + \cdots + \rho_\theta(u_{n+v-1},u_{n+v}) \\
&\quad +\rho_\theta(u_{n+v},Su)] \\
&\leq \theta(u,Su)[\rho_\theta(u,u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1},u_{n+2}) + \cdots + \rho_\theta(u_{n+v-1},u_{n+v}) \\
&\quad +\rho_\theta(Su_{n+v-1},Su)] \\
&\leq \theta(u,Su)[\rho_\theta(u,u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1},u_{n+2}) + \cdots + \rho_\theta(u_{n+v-1},u_{n+v}) \\
&\quad +\alpha\rho_\theta(u_{n+v-1},u) + \beta\rho_\theta(u_{n+v-1},u_{n+v}) + \gamma\rho_\theta(u,Su)]
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}
\big(1-\gamma\theta(u,Su)\big)\rho_\theta(u,Su) \quad &\leq \theta(u,Su)[\rho_\theta(u,u_{n+1}) + \rho_\theta(u_{n+1},u_{n+2}) + \cdots \\
&\quad +\rho_\theta(u_{n+v-1},u_{n+v}) + \alpha\rho_\theta(u_{n+v-1},u) \\
&\quad +\beta\rho_\theta(u_{n+v-1},u_{n+v})]
\end{aligned}$$

olur. $\Gamma_1 < \frac{1}{\Gamma_2}$ olduğundan $\big(1-\gamma\theta(u,Su)\big) \in [0,1)$ ifadesi elde edilir. Böylece (4.21) den ve $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığından $\rho_\theta(u,Su) = 0$ dır. Buradan da anlaşılır ki u noktası S nin bir sabit noktasıdır. Şimdi u noktasının tek bir sabit nokta olduğunu gösterelim. Bu aşamada v noktası gibi başka bir noktanın da sabit nokta olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(u,v) \quad &= \rho_\theta(Su,Sv) \leq \alpha\rho_\theta(u,v) + \beta\rho_\theta(u,Su) + \delta\rho_\theta(v,Sv) \\
&= \alpha\rho_\theta(u,v)
\end{aligned}$$

olur. $\alpha < 1$ olduğundan $\rho_\theta(u,v) = 0$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla u noktası S nin tek sabit noktasıdır.

Reich sabit nokta teoreminde $\alpha = 0$ alınırsa aşağıda ki genelleştirilmiş Kannan sabit nokta teoremi elde edilir.

Teorem 4.3.10: E tam $b_v(\theta)$ metrik uzay ve S, E üzerinde her bir $u, w \in E$ için,

$$\rho_\theta(Su,Sw) \leq \beta\rho_\theta(u,Su) + \gamma\rho_\theta(w,Sw)$$

eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca β ve γ negatif olmayan sabitler $\Gamma_1 = \min\{\beta, \gamma\}$ ve $\Gamma_2 = \max\{\theta(u, Su), \theta(Su, u)\}$ olmak üzere $\beta + \gamma < 1$ ve $\Gamma_1 < \frac{1}{\Gamma_2}$ olsun. Bu durumda S tek bir sabit noktaya sahiptir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde çalışmalarımızdan elde edilen sonuçlar verilecektir. Bu sonuçlar yardımıyla ispatlanan teoremlerin literatürde var olan birçok sonucu genelleştirdiği görülmektedir.

Sonuç 5.1: Teorem 4.1.1 de

i) $v = s = 1$ ve $\varphi(t) = ct$ alınırsa Teorem 3.3.5 elde edilir.

ii) $\varphi(t) = ct$ alınırsa Mitrovic and Radenovic (2017) makalesindeki Teorem 2.1 elde edilir.

iii) $v = 1$ ve $\varphi(t) = ct$ alınırsa Dung and Hang (2016) makalesindeki Teorem 2.1 elde edilir.

iv) $v = 2$ ve $\varphi(t) = ct$ alınırsa Mitrovic (2017) makalesindeki Teorem 2.1 ve George et al. (2015) makalesinin ana teoremi elde edilir.

v) $v = s = 1$ alınırsa Rhoades (2001) makalesinin ana teoremi elde edilir.

Sonuç 5.2: Teorem 4.1.2 de

i) $v = s = 1$ alınırsa Teorem 3.3.7 elde edilir.

ii) $v = 2$ alınırsa George et al. (2015) makalesinin 2.4 numaralı teoremi elde edilir.

iii) $v = 2$ ve $s = 1$ alınırsa Das (2002) makalesinin ana teoremi yörüngesel tamlık şartı kabul edilmeksizin elde edilir. Ayrıca Azam and Arshad (2008) makalesinin ana teoremi elde edilir.

Sonuç 5.3: (E, ρ) tam kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $S: E \to E$ ye daraltan bir dönüşüm olsun. Başka bir deyişle her bir $u, w \in E$ ve $\lambda \in [0,1)$ için S;

$$\rho(Su, Sw) \leq \lambda \rho(u, w)$$

şartını sağlasın. Bu durumda S, $b \in S$ gibi bir tek sabit noktaya sahiptir ve $\rho(b, b) = 0$ dır.

Sonuç 5.4: (E, ρ) tam kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $S: E \to E$ ye dönüşümü her bir her bir $u, w \in E$ ve $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ için;

$$\rho(Su, Sy) \leq \lambda[\rho(u, Su) + \rho(w, Sw)]$$

şartını sağlasın. Bu durumda S, $b \in S$ gibi bir tek sabit noktaya sahiptir ve $\rho(b,b) = 0$ dır.

Sonuç 5.5: (E,ρ) tam kısmi v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $S: E \to E$ ye dönüşümü her bir her bir $u,w \in E$ ve $\lambda \in [0,1)$ için;

$$\rho(Su,Sw) \leq \lambda max\{\rho(u,w),\rho(u,Su),\rho(w,Sw)\}$$

şartını sağlasın. Bu durumda S, $b \in S$ gibi bir tek sabit noktaya sahiptir ve $\rho(b,b) = 0$ dır.

Sonuç 5.6: Teorem 4.3.7 ifadesinden,

i) $v = 1$ ve her bir $u,w \in E$ için $\theta(u,w) = 1$ alınırsa Teorem 3.3.5 elde edilir.

ii) $s \geq 1$ olmak üzere ve her bir $u,w \in E$ için $\theta(u,w) = s$ alınırsa bu durumda $b_v(s)$ metrik uzayında ki Banach sabit nokta teoremi elde edilir.

iii) Eğer $v = 1$ ve her bir $u,w \in E$ için $\theta(u,w) = s$ alınırsa bu durumda b-metrik uzayında ki Banach sabit nokta teoremi elde edilir.

iv) Eğer $v = 2$ ve her bir $u,w \in E$ için $\theta(u,w) = s$ alınırsa bu durumda dikdörtgensel metrik uzayda ki Banach sabit nokta teoremi elde edilir.

v) Eğer her bir $u,w \in E$ için $\theta(u,w) = 1$ alınırsa bu durumda v- genelleştirilmiş metrik uzayda ki Banach sabit nokta teoremi elde edilir.

Sonuç 5.7: Teorem 4.3.8 ifadesinden,

i) Eğer $v = 1$, her bir $u,w \in E$ için $\theta(u,w) = 1$ ve $\psi(t) = ct$ olursa Teorem 3.3.5 elde edilir.

ii) Eğer $\psi(t) = ct$ ve $s \in [1,\infty)$ için $\theta(u,w) = s$ alınırsa Mitrovic and Radenovic (2017) makalesinin 2.1 numaralı teoremi elde edilir.

iii) Eğer $v = 1$, $\theta(u,w) = s$ ve $\psi(t) = ct$ alınırsa Dung and Hang (2016) makalesinin 2.1 numaralı teoremi elde edilir.

iv) Eğer $v = 2$, $\theta(u,w) = s$ ve $\psi(t) = ct$ alınırsa Mitrovic (2017) makalesinin 2.1 numaralı teoremi ve George et al. (2015) makalesinin ana teoremi elde edilir.

v) Eğer $v = 1$ ve $\theta(u,w) = s$ alınırsa Rhoades (2001) makalesinin ana teoremi elde edilir.

Teorem 4.3.9 da eğer her bir $u, w \in E$ için $s \geq 1$ olmak üzere, $\theta(u,w) = s$ alınırsa aşağıda verilen sonuç elde edilir.

Sonuç 5.8: (X,d) tam $b_v(s)$ metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ e dönüşümü her bir $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \quad \leq \alpha d(x,y) + \beta d(x,Tx) + \gamma d(y,Ty)$$

şartını sağlasın. Burada α, β, γ negatif olmayan sabitler olup $\alpha + \beta + \gamma < 1$ dir. Ayrıca $min\{\beta,\gamma\} < \frac{1}{s}$ dir. Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir (Mitrovic and Radenovic 2017).

Teorem 4.3.9 da $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.9: E tam $b_v(\theta)$ metrik uzay ve S, E üzerinde her bir $u, w \in E$ için,

$$\rho_\theta(Su,Sw) \leq \beta\rho_\theta(u,Su) + \gamma\rho_\theta(w,Sw)$$

eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca β ve γ negatif olmayan sabitler $\Gamma_1 = \min\{\beta,\gamma\}$ ve $\Gamma_2 = \max\{\theta(u,Su), \theta(Su,u)\}$ olmak üzere $\beta + \gamma < 1$ ve $\Gamma_1 < \frac{1}{\Gamma_2}$ olsun. Bu durumda S tek bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 5.10: Teorem 4.3.9 da

i) Eğer $v = 1$ ve her bir $u, w \in E$ için ve $s \geq 1$ olmak üzere $\theta(u,w) = 1$ olsun. Teorem 3.3.7 elde edilir.

ii) Eğer $v = 2$ ve her bir $u, w \in E$ için ve $s \geq 1$ olmak üzere $\theta(u,w) = s$ olsun. Bu durmda George et al. (2015) makalesinde ki Teorem 2.4 elde edilir.

iii) Eğer $v = 2$ ve her bir $u, w \in E$ için ve $s \geq 1$ olmak üzere $\theta(u,w) = 1$ olsun. Bu durumda uzayın dairesel tamlığının varsayımı olmadan Das (2002) makalesinin ana teoremini ve Azam and Arshad (2008) makalesinin ana teoremini elde edilir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, Series Topological Fixed point Theory and Its Applications, Springer, New York.

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, J. Nonlinear Convex Anal., 8 (1), 61-79.

Aghajani, A., Abbas, M., 2014. Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces. Mathematica Slovaca 64 (2014), 941-960.

Atiyah, M. F., & Bott, R., 1988. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: II. Applications', Collected Works (ed. Atiyah's, MF), 3, 129-170.

Azam, A., Arshad, M., 2008. Kannan Fixed Point Theorems on Generalized Metric Spaces, J. Nonlinear Sci. Appl. 1 (1) (2008), 45-48.

Azam, A., Arshad, M., Beg, I., 2009. Banach Contraction Principle On Cone Rectangular Metric Spaces, Applicable Analysis and Discrete Mathematics. 3. 236-241.

Banach, S., 1922. Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations, integrals, Fund. Math., 3, 133–181.

Bayraktar, M., 1994. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 314, Erzurum.

Berinde, V., 1993. Generalized contractions in quasimetric spaces, Seminar on fixed point theory, Preprint no. 3(1993), 3-9.

Boriceanu, M., Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metrics, Studia Univ Babes-Bolyai Math. LIV (3), (2009),1-14.

Branciari, A., 2000. A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces, Publicationes Mathematicae Debrecen, 57, 31-37.

Brouwer, L., 1912. Uber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 70, pp. 97-115.

Browder, F. E., & Petryshyn, W. V., 1967. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 20(2), 197-228.

Cegielski, A., 2012. Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces, Lecture notes in mathemaics. Springer, 298 p, Heidelberg New York Dordrecht London.

Ciric, Lj. B., 1974. A generalization of Banach's contraction principle, American Mathematical Society, 45 (1974), 267-273.

Czerwik, S., 1993. Contraction Mappings in b-metric Spaces, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, Vol. 1 (1993), No. 1, 5-11.

Das, P., 2002. A fixed point theorem on a class of generalized metric spaces, Korean J. Math. Sc. 9 (1) (2002), 29-33.

Dhage, B. C., 1992. Generalised metric space and mappings with fixed point, Bulletın Of Calcutta Mathematıcal Socıety, 1992 , Volume 84 , Number 4; Page(s) 329 To 336.

Dung, N.V., Hang, V.T.L., 2016. On relaxations of contraction constants and Caristi's theorem in b-metric spaces, J. Fixed Point Theory Appl., 18, 267–284.

George, R., Radenovic, S., Reshma, K.P., Shukla, S., 2015. Rectangular b-metric space and contraction principles, J. Nonlinear Sci. Appl. 8 (2015), 1005-1013.

Harjani J., Sadarangani K., 2009. Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets, Nonlinear Analysis 71 (2009), 3403-3410.

Kakutani, S., 1941. A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke mathematical journal, 8(3), 457-459.

Kamran, T., Samreen, M., Ain, Q.U., 2017. A generalization of b-metric space and some fixed point theorems, Mathematics, 2017, 5, 19, doi:10.3390/math5020019.

Kannan, R., 1968. Some results on fixed points, Bull. Calcutta. Math.Soc. 60 (1968), 71-76.

Kannan, R., Some Results on Fixed Points—II, The American Mathematical Monthly 76 (1969), 405-408.

Khamsi, M. A. and Kirk W. A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.

Matthews, S. G., 1994. Partial Metric Topology, Annals of the New York Academy of Sciences 728(1):183 – 197.

Mitrovic, Z. D., Radenovic, S., 2017. The Banach and Reich contractions in bv(s)-metric spaces, Journal of Fixed Point Theory Applications 19 (2017), 3087-3095.

Mitrovic, Z. D., 2017. On an open problem in rectangular b-metric space, The Journal of Analysis, 25, 135-137.

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları Tic. Ltd. Sti., Kütahya.

Mustafa, Z., Sims, B., 2006. A new approach to generalized metric spaces, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 7(2), 83-93.

Reich, S., 1971. Some Remarks Concerning Contraction Mappings, Canadian Mathematical Bulletin, 14(1), 121-124.

Rhoades, B.E., 1977. A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977), 257-290.

Rhoades, B.E., 2001. Some theorems on weakly contractive maps, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 47, No. 4, 2683–2693.

Schauder, J., 1930. Der Fixpunktsatzin Funktionalraiimen, Studia Mathematika, 2, 171–180.

Shukla, S., 2014. Partial b-Metric Spaces and Fixed PointTheorems, Mediterr. J. Math., 11 (2014), 703–711.

ÖZGEÇMİŞ

<u>Kişisel Bilgiler</u>

Adı-Soyadı	:	İrfan IŞIK
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	:	04.01.1993 – Aşkale
Medeni Hali	:	Bekar
Telefon	:	+90 (532) 774 04 25
e–mail	:	iirfansk25@gmail.com

<u>Eğitim</u>

Derece	**Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Atatürk Üniversitesi	2016
Lise	Mecidiye Anadolu Lisesi	2010

<u>Yayınlar (SCI-Expanded)</u>

KARAHAN I., ISIK I., (2019). Generalizations of Banach,Kannan and Ciric Fixed Point Theorems in bv(s) Metric Spaces, U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 81, Iss. 1, 2019, ISSN 1223-7027.

<u>Yayınlar (ESCI)</u>

KARAHAN I., ISIK I., (2019). Partial bv(s), Partial v-Generalized and bv(θ) Metric Sapces And Related Fixed Point Theorems, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics (KABUL EDİLDİ)**.**

<u>Uluslararası Kongre Sunum</u>

KARAHAN I., ISIK I., (2018). Generalized Metric Space And Fixed Point Theorems. IFSCOM2018 5th Ifs And Contemporary Mathematics Conference September, 05-09, 2018, Kahramanmaras, Turkey pp: 25-31, 5th IFSCOM2018 PROCEEDING BOOK ISBN: 978-605-68670-0-2.