



**ZAMAN-KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM
METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Serkan OKUR

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER**

**2019
Her hakkı saklıdır.**



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ZAMAN-KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNDİRGENMİŞ
DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Serkan OKUR

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2019

Her hakkı saklıdır

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

**ZAMAN-KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNDİRGENMİŞ
DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER danışmanlığında, Serkan OKUR tarafından hazırlanan bu çalışma 24 / 07 / 2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **Oy birliği ile (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ercan ÇELİK *İmza* :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER *İmza* :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Harun SELVİTOPI *İmza* :

Üye : *İmza* :

Üye : *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Doç. Dr. Arzu GÖRMEZ
Enstitü Müdürü

Bu tez çalışması tarafından nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

24 / 07 / 2019

Serkan OKUR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN-KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Serkan OKUR

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER

Bu tezde, fen bilimlerinde ve mühendislikte ortaya çıkan zaman-kesirli diferansiyel denklemlerin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümleri incelenmiştir. İlk olarak kesirli mertebeden türev tanımları ifade edilmiş ve bu türevlerin önemli özellikleri verilmiştir. Daha sonra Caputo türevi kullanılarak indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu sunulmuştur. Kesirli mertebeden Murray ve $K(3,3)$ denklemlerinin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla nümerik çözümleri elde edilmiş ve bu çözümler tablo ve grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır.

2019, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler: Zaman-Kesirli Diferansiyel Denklemler, İndirgenmiş Diferansiyel dönüşüm metodu, Murray denklemi, $K(3,3)$ denklemi

ABSTRACT

MS. Thesis

THE NUMERICAL SOLUTION OF TIME-FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

Serkan OKUR

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Muhammed YİĞİDER

In this thesis, solutions of time-fractional differential equations that emerge from science and engineering have been investigated by using reduced differential transform method. Initially, the definition of the derivatives with fractional order and their important features are given. Afterwards, by employing the Caputo derivative, reduced differential transform method has been introduced. Finally, the numerical solutions of the fractional order Murray and $K(3,3)$ equations have been obtained by utilizing reduced differential transform method and results have been compared through graphs and tables.

2019, 51 page

Keywords: Time-Fractional Differential Equations, Reduced Differential Transform Methods, Murray Equations, $K(3,3)$ Equations

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimin sürecinde ve sunduğum bu çalışmanın her safhasında yakından ilgi ve önerileri ile beni yönlendirip aydınlatan ve katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER'e en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Harun Selvitopi'ye ve Matematik Bölümünün değerli öğretim üyelerine destek ve ilgilerinden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bütün sıkıntılarımı paylaşan hayatımın her aşamasında yanımda olan sevgili anneme ve babama sonsuz teşekkür ederim.

Serkan OKUR
Temmuz 2019

İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | ii |
| TEŞEKKÜR | iii |
| İÇİNDEKİLER | iv |
| SİMGELER VE KISALTMALAR | vi |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | vii |
| ÇİZELGELER DİZİNİ | vii |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1. Neden Kesirli Türev? | 4 |
| 2. KAYNAK ÖZETLERİ | 8 |
| 3. MATERYAL ve YÖNTEM | 10 |
| 3.1. Gamma Fonksiyonu | 10 |
| 3.2. Beta Fonksiyonu | 11 |
| 3.3. Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler | 11 |
| 3.3.1. Grünwald-Letnikov Türevi..... | 12 |
| 3.3.2. Riemann-Liouville kesirli integrali ve kesirli türevi..... | 13 |
| 3.3.3. Caputo kesirli türevi | 15 |
| 3.4. Kesirli Diferansiyel Denklemler | 17 |
| 3.5. Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemler..... | 18 |
| 3.6. Kesirli Basamaktan Türevin Geometrik ve Fiziksel Yorumu | 19 |
| 3.7. Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu | 21 |
| 3.7.1. Bir boyutlu genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu..... | 21 |
| 3.7.2. İki boyutlu genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu | 22 |
| 3.8. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm metodu..... | 23 |
| 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA | 31 |
| 4.1. Zaman-Kesirli Murray Diferansiyel Denkleminin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Nümerik Çözümü | 30 |
| 4.2. Zaman-Kesirli $K(3,3)$ diferansiyel Denkleminin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü | 37 |
| 5. SONUÇ ve ÖNERİLER | 44 |
| KAYNAKLAR | 45 |



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

| | |
|-----------------|--------------------------------------|
| $\Gamma(\cdot)$ | Gamma fonksiyonu |
| $B(x, y)$ | Beta fonksiyonu |
| J_a^α | Riemann-Liouville integral operatörü |
| $D^{-\alpha}$ | Riemann-Liouville integral operatörü |
| D^α | Caputo türev operatörü |
| Σ | Toplam sembolü |
| L_x | Lineer Operatörü |
| N_x | Nonlinear Operatörü |

Kısaltmalar

| | |
|------|---------------------------------------|
| RDTM | Reduced differential transform method |
| ADM | Adomian decomposition method |
| VIM | Variational iteration method |
| HPM | Homotopy perturbation method |
| MRI | Magnetic resonance imaging |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | |
|--|----|
| Şekil 1.1. Merkezi (0,0) olan 50 adımlık Levy Uçuşu..... | 5 |
| Şekil 1.2. Merkezi (0,0) olan 50 adımlık Brownian hareketi..... | 5 |
| Şekil 1.3. Kesirli türevin parçacıkların hareketi üzerindeki etkisi | 5 |
| Şekil 1.4. Sınırlı bir bölgedeki salgın hastalık..... | 6 |
| Şekil 1.5. Büyük ve geniş bölgelere yayılan salgın hastalık | 6 |
| Şekil 3.1. Gamma fonksiyonuna ait grafik..... | 10 |
| Şekil 3.2. $\alpha = 0,75, f(t) = t + 0,5\sin(t), 0 \leq t \leq 10$ için oluşturulan çizit | 20 |
| Şekil 4.1. Murray denkleminin $\alpha = 1$ için grafiği | 36 |
| Şekil 4.2. Murray denkleminin $\alpha = 0,75$ için grafiği | 36 |
| Şekil 4.3. Murray denkleminin $\alpha = 0,50$ için grafiği | 36 |
| Şekil 4.4. Murray denkleminin $\alpha = 0,25$ için grafiği | 36 |
| Şekil 4.5. $K(3,3)$ denkleminin $c = 0,5, \alpha = 1$ için grafiği..... | 43 |
| Şekil 4.6. $K(3,3)$ denkleminin $c = 0,5, \alpha = 0,75$ için grafiği | 43 |
| Şekil 4.7. $K(3,3)$ denkleminin $c = 0,5, \alpha = 0,50$ için grafiği | 43 |
| Şekil 4.8. $K(3,3)$ denkleminin $c = 0,5, \alpha = 0,25$ için grafiği | 43 |

ÇİZELGELER DİZİNİ

| | |
|---|----|
| Çizelge 3.1. Genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri | 23 |
| Çizelge 3.2. x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu | 27 |
| Çizelge 3.3. t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu..... | 28 |
| Çizelge 4.1. $\alpha = 1$ olduğu zaman (4.4) zaman-kesirli diferansiyel denklem $u(x, t)$ 'nin nümerik ve analitik çözümleri | 37 |
| Çizelge 4.2. $\alpha = 1, \alpha = 0,75, \alpha = 0,50$ ve $\alpha = 0,25$ olduğu zaman (4.4) zaman-kesirli diferansiyel denklem $u(x, t)$ 'nin nümerik ve analitik çözümleri | 37 |
| Çizelge 4.3. $\alpha = 1$ olduğu zaman (4.8) zaman-kesirli diferansiyel denklem $u(x, t)$ 'nin nümerik ve analitik çözümleri | 43 |
| Çizelge 4.4. $\alpha = 1, \alpha = 0,75, \alpha = 0,50$ ve $\alpha = 0,25$ olduğu zaman (4.8) zaman-kesirli diferansiyel denklem $u(x, t)$ 'nin nümerik ve analitik çözümleri | 43 |

1. GİRİŞ

Mühendislikte ve Fen Bilimlerinde karşılaşılan problemlerin tanımlanmasında ve çözümler üretilmesinde matematiksel modellemeler oldukça önemlidir. Bildiğimiz üzere matematiksel modelleme olarak ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerin birçoğunun analitik çözümü bulunamamaktadır. Bu diferansiyel denklemlerin kesirli türevli olması ve non-lineerliğinin kuvvetli olması analitik çözüm üretmeyi zorlaştırır. Bu noktada da nümerik çözümlerin önemi ön plana çıkmaktadır. Bilgisayar teknolojisinin ilerlemesiyle 20. yüzyıldan sonra nümerik çözümler elde etmek oldukça yaygın hale gelmiştir. Diferansiyel denklemlerin çözümleri için çeşitli nümerik çözüm metotları üretilmiş ve geliştirilmiştir. Nümerik çözüm yöntemleri kullanarak başlangıç ve sınır şartları yardımıyla $\alpha = 1$ (α , kesirli mertebeden türev derecesi) iken nümerik çözümün tam çözüme olan yakınsaklığı incelenir ve sonra belirli α değerleri için yaklaşık çözüm üretilmeye çalışılır.

Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları, Leibniz ve Newton tarafından ayrıntılı olarak incelenen klasik türev ve integralin genelleştirilmiş halleridir. Son yıllarda kesirli hesap teoride olduğu gibi uygulamada da oldukça yoğun olarak ele alınmaktadır. Kesirli türev ve integralin geçmişi klasik türev ve integral kadar eskidir. Kesirli hesabın ortaya çıkmasına sebep olan olay ise şöyledir: 1695 yılında L'Hospital, Leibniz'e mektup yazarak, Leibniz notasyonu olarak bilinen $d^n y/dx^n$ gösteriminde n 'nin bir tamsayı olmaması durumunda ve hatta $n = 1/2$ olması durumuyla ilgili bir soru yöneltmiştir (Miller and Ross 1993). Leibniz bu sorunun yanıtına "Bu aşikar bir paradokstur fakat bir gün bu paradokstan oldukça yararlı sonuçlar ortaya çıkacaktır." cevabını vermiştir (Miller and Ross 1993). 1819'da keyfi mertebeden türev konusunu ciddi olarak ilk ele alan kişi Fransız matematikçi Lacroix'dir. Lacroix makalesinde $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $y = x^m$ için tam sayı mertebesinden türev tanımını

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n \quad (1.1)$$

olarak ele almış ve Legendre sembolü olan " $\Gamma(x)$ " Gamma fonksiyonu ile ifade ederek

1. GİRİŞ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n \quad (1.2)$$

şeklinde genişletmiştir ve Lacroix bir örnek vererek $y = x$ ve $n = \frac{1}{2}$ için,

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.3)$$

olarak bulmuştur (Miller and Ross 1993).

Literatürdeki ilk uygulama 1823 yılında Niels Henrik Abel tarafından yapılmıştır (Beleanu et al. 2012). Abel kesirli hesabı tautochrone probleminin modellenmesinde ortaya çıkan integral denkleminin çözümünde kullanmıştır (Flores et al. 1997). Kesirli türevin formal tanımını yapan ilk kişi Liouville'dir. Liouville 1832 ve 1855 yılları arasında birçok makale yayınladı, onun çıkış noktası ise

$$D^m e^{\lambda x} = \lambda^m e^{\lambda x} \quad (1.4)$$

eşitliğidir. Bazı cebirsel hesaplamalardan sonra kesirli integral tanımını

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(u)(x-u)^{\alpha-1} du, \quad \alpha \in (-\infty, 0) \quad (1.5)$$

şeklinde vermiştir. Liouville potansiyel teoride bu tanımı uygulamayı başardı ancak bazı meslektaşları bu tanımın oldukça dar olduğuna inanıyorlardı. Augustus De Morgan bu iki tanımı ihtiva eden daha genel bir tanım ortaya atmıştır. 1850 yılında William Center, Lacroix ve Liouville arasında ki çelişkiyi bulmuştur (Ross 1977). Lacroix kesirli türevde sabit, sıfır olamaz derken Liouville, $\Gamma(0) = \infty$ özelliğinden sabitin, sıfır olabileceğini belirtmiştir. 1847'de Riemann hala öğrenciyken kesirli integral üzerine makale yayınlamıştı. Riemann, Liouville'nin teorisine bir $\Psi(x)$ bütünleyici fonksiyonunu ekleyerek

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(u)(x-u)^{\alpha-1} du + \Psi(x), \quad (1.6)$$

1. GİRİŞ

kesirli integrali tanımlamıştır (Ross 1974). 1960'lı yıllarda İtalyan matematikçi M. Caputo tarafından Caputo türevi önerilmiştir. Önerilmesinin nedeni ise Laplace dönüşümünün uygulamalarda ortaya çıkan başlangıç değerinin hesaplanması veya deneysel yolla ölçülmesi problemini ortadan kaldırmaktır. Literatür incelemesinde birden fazla kesirli türev tanımı bulunmaktadır. Bunlardan bazıları Riesz türevi, Riemann-Liouville türevi, Caputo türevi, Grünwald-Letnikov türevleridir (Podlubny 1974; Oldham and Spanier 1974; Miller and Ross 1993; Hilfer 2000). Caputo türevinin elverişli olması son yıllarda kullanımının artmasına neden olmuştur. Kullanımının yoğun olmasının sebebi keyfi sabitin türevinin sıfır olması ve klasik türevde kullanılan başlangıç değerlerinin kesirli türevde de değiştirilmeden kullanılabilmesine olanak veriyor olmasıdır (Sökmen 2012).

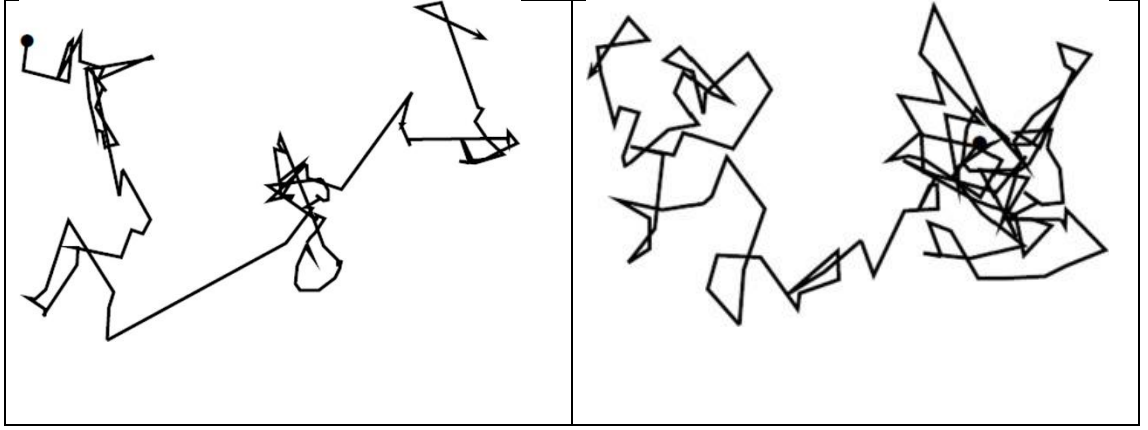
Bu tezde, Murray ve $K(3,3)$ zaman-kesirli diferansiyel denklemlerinin çözümleri incelenmiştir. Murray denklemi Reaksiyon-difüzyon denklem ailesinin bir üyesidir. Reaksiyon-Difüzyon denklemleri fen bilimlerinde ve mühendislikte oldukça geniş uygulama alanına sahiptir ve son yıllarda çözümlerinin ilginç özellikleri ve zengin çeşitliliğinden dolayı dikkat çekmektedir. Difüzyon ve Reaksiyon işlemleri çoğu sistemlerin dinamiğinde, örneğin plazmada, biyolojide, tıpta, kimyada, ekolojide ve yarı iletken fiziğinde önemli rol oynamaktadır (Cherniha and Davydovych). $K(m,n)$ denklemleri, sıvı damlalarında ki şekillerin biçimlendirilmesinde ki doğrusal olmayan dağılımlarda önemli bir rol oynar. Bu denklem tamamen KdV (Kortwge-de Vries') ailesinin üyeleridir. Bu denklem dalga teorisinin oluşum sürecini modeller. Bu denklemler ise ilk olarak 1895'te sığ su dalgalarının oluşumu için modellenen en eski denklemlerdir (Zaidan and Darvishi 2017).

İlk olarak Zhou diferansiyel dönüşüm metodunu elektrik devre analizlerinde lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanmıştır (Zhou 1986). Diferansiyel dönüşüm metodunu özdeğer ve öz fonksiyonları elde etmek için kullanmışlardır (Chen and Ho 1996). Kuvvetli nonlineerliğe sahip sönümlü bir sistemin analizinde diferansiyel dönüşüm metodu kullanılmış ve dördüncü dereceden Runge Kutta yöntemiyle kıyaslama yapılarak diferansiyel dönüşüm metodunun daha hassas olduğu tespit edilmiştir (Jang and Chen 1997). Bu çalışmaya kadar adi diferansiyel denklemlere uygulanan diferansiyel dönüşüm metodu bu çalışmada kısmi diferansiyel denklemlere

uygulanmaya başlanmıştır (Chen and Ho 1999). İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu için teoremler ispatlanmıştır (Ayaz 2003). Bu çalışmada diferansiyel-cebirselsel denklemlerin çözümü için diferansiyel dönüşüm metodundan yararlanmıştır (Ayaz 2004). Çalışmasında n -boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanmış ve kısmi diferansiyel denklemler için genelleştirilme yapılmıştır (Kurnaz ve Oturanç 2005). Bu çalışmaya kadar en önemli eksik bağımlı değişkeni barındıran non-lineer fonksiyonlar için dönüşüm karşılığının bulunamamış olmasıdır (Keskin ve Oturanç 2008). Bu eksikliğe ” The Differential transform methods for nonlinear functions and its applications” adlı çalışmayla çözüm bulunmuştur. Diğer bir eksiklik ise k, h olan indislere göre yapılan hesaplamalar k, h, l olursa iterasyon sayısının ve hesaplama süresinin artmasıdır. Çalışmasında indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodunu tanımlamış ve sorunu gidermiştir (Keskin ve Oturanç 2009). Çalışmasında bu yöntemin genelleştirilmiş halini kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulamıştır (Keskin 2010).

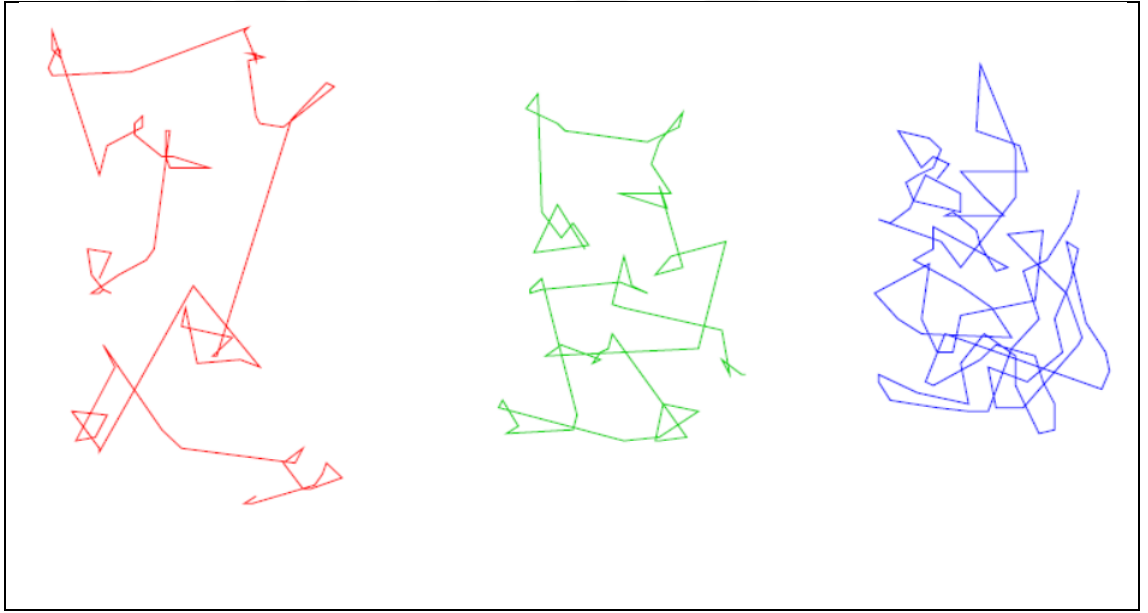
1.1. Neden Kesirli Türev?

Günümüzde kesirli türevin tıpta, rijit materyallerin çekme ve gerilme dayanımları, nörodinamik, akustik, ekonometri, katılar mekaniği, kesirli mertebeden salgın hastalıkların modellenmesi, MRI’da kullanılan Bloch denklemi, lineer olmayan optikler, uzun mesafeli optik haberleşme, jeoloji, elektrik-elektronik mühendisliği, fizik, matematik, kimya ve biyoloji gibi çeşitli bilim dallarında çalışmalar yapılmaktadır. Teorik bilginin yanı sıra uygulama yapılması kesirli türevin önemini daha çok ortaya çıkarmaktadır. Kesirli türev Brownian hareketi ve Levy uçuş mekanizması üzerinden açıklanırsa, kesirli uzay türevleri ve kesirli Laplace operatörleri partiküllerin Levy süreçlerini tanımlamak için kullanılabilirken, Brownian hareketleri geleneksel Laplace operatörüyle kullanılabilir. Bu durum Şekil 1.1, 1.2 ve 1.3 de gösterilmiştir. (del Castillo-Negrete at al. 2003; Chechkin at al. 2008; Riascos and Mateos 2014; Hoefling and Franosch 2013) (Levy uçuşu ve kesirli türev için) ve (Zoia at al. 2007; Figueiredo and Siciliano 2017; Musina and Nazarov 2014,2016) (kesirli Laplace için). Levy uçuş mekanizmasında parçacıklar düzensizce yer değiştirirler. Brownian hareketi ve Levy uçuş mekanizması rastgele hareketlerden ortaya çıkan şekillerdir. Ancak bu şekillerin altında modelleme yatmaktadır. Levy uçuş mekanizmasının kesirli türev ile daha iyi ifade edildiği görülmüştür. Ayrıca Brownian hareketinde klasik türevin kullanılması daha uygundur (Ateş 2017).

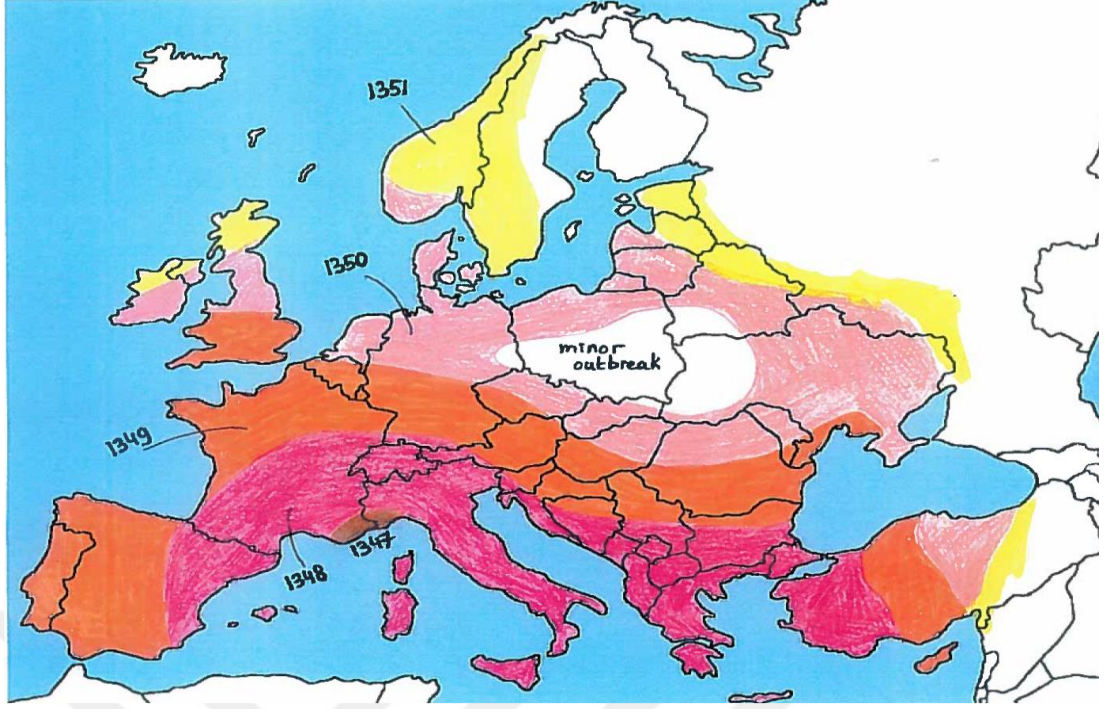


Şekil 1.1. Merkezi (0,0) olan 50 adımlık
Levy Uçuşu (Yang 2010)

Şekil 1.2. Merkezi (0,0) olan 50 adımlık
Brownian hareketi (Yang 2010)

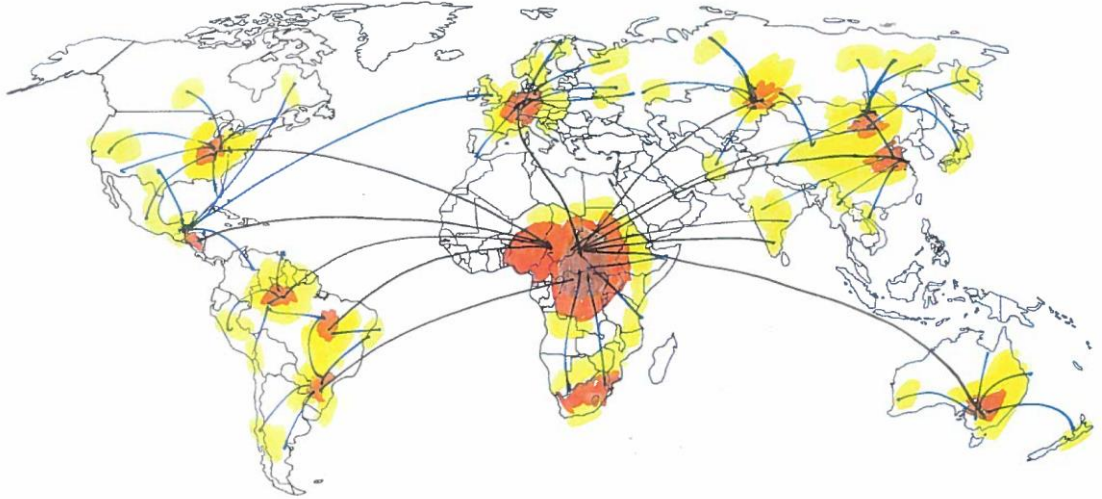


Şekil 1.3. Kesirli türevin parçacıkların hareketi üzerindeki etkisi: $\alpha = 1,5$ kesirli difüzyon (sol), $\alpha = 1,75$ (orta), düzenli difüzyon $\alpha = 2$ (sağ) (Ateş 2017)



Şekil 1.4. Sınırlı bir bölgede ki salgın hastalık yayılımı(Ateş 2017).

Günümüze kadar küçük, sınırlı bir yerdeki hareketi ifade ederken klasik türevden yararlanılır.



Şekil 1.5. Büyük ve geniş bölgelere yayılan salgın hastalıkları ifade ederken kesirli türevden yararlanılır (Ateş 2017).

1. GİRİŞ

Büyük ve geniş yerlere yayılan hastalığı modellerken Levy uçuş mekanizması kullanılmıştır.

Bu tezde, Zaman-Kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri incelenmiştir. İlk olarak belirlenmiş zaman kesirli diferansiyel denkleme indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış daha sonra belirli değerler için nümerik çözümler elde edilmiş ve son olarak elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümler tablo ve şekiller üzerinde kıyaslanmıştır. Nümerik çözümler Wolfram Mathematica 11 bilgisayar programı ile elde edilmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu çalışmasında Zhou ilk olarak diferansiyel dönüşüm yöntemini, elektrik devre analizlerinde ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için ortaya koymuştur (Zhou 1986).

Bu kitabı Adomian, 1980 yılında tanıttığı kendi adı ile isimlendirilen Adomian Ayrışım yöntemiyle ilgili bazı tanım ve teoremlere yer vermiş ayrıca bazı diferansiyel denklemlere nasıl uygulanacağını göstermiştir (Adomian 1994).

He bu çalışmasında lineer olmayan problemlerin çözümleri için variational iteration method ismi verilen yeni bir analitik çözüm tanıtmıştır. Bu yöntem başlangıç değer problemini varyasyon teorideki lagrange çarpanı yardımıyla çözmüştür. Adomian Ayrışım yöntemi ile kıyaslandığında daha iyi sonuç vermiştir (He 1999).

İlk kez diferansiyel dönüşüm metodundan yola çıkarak kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunu tanıtmış ve örnek üzerinde göstermiştir (Chen and Ho 1999).

Yeni teoremler eklenmiş ve bazı lineer ve lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemleri iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu ile çözülmüştür (Ayaz 2003).

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini vermiş ve ilk kez temel teoremleri tanıtmıştır. Kısmi diferansiyel denklemlerin nonlinear ve lineer sistemlerin tam çözümlerini iki ve üç boyutlu diferansiyel dönüşümü uygulamalarda incelenmiştir (Ayaz 2004).

Bu iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminin yeni bir genellemesi geliştirilerek yöntem uzay ve zaman-kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Bu genelleme Taylor formülü ve Caputo kesirli türevinin genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemine dayanmaktadır (Arikoğlu ve Ozkol 2007).

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodunu tanımlamış ve ilgili probleme nasıl uygulanacağını göstermişlerdir (Keskin ve Oturanç 2009).

İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodunu Lineer ve Lineer olmayan dalga denkleminde uygulamışlardır. Dört farklı örnek üzerinde metod uygulanmış ve sonuç olarak ya tam çözüm elde edilmiş ya da yaklaşık olarak iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir (Keskin ve Oturanç 2010).

Makalede dört tane örnek çözülmüş bunlar homojen ve homojen olmayan nonlinear zaman-kesirli gaz dinamik denklemini, nonlinear zaman- kesirli şok dalga denklemi ve nonlinear zaman-kesirli Whitham-Broer-Kaup Shallow water denklemini diferansiyel dönüşüm metodu ile başarılı bir şekilde çözmüşlerdir (Das S. and R. Kumar 2011).

Bu çalışmada Newell-Whitehead-Segel denklemi üzerine indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ve adomian ayrışım metodu uygulanarak kıyaslama yapılmıştır. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodunun Adomian ayrışım metoduna kıyasla daha basit ve sonuca hızlı yaklaştığı belirtilmiştir (Saravanan and Magesh 2013).

İndirgenmiş Diferansiyel dönüşüm metodu iki farklı lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme uygulanmış çalışmada geleneksel metottan daha basit ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerde etkili olduğu belirtilmiştir (Al-amr 2014).

Lineer olmayan denkleme indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış ve güçlü ve karmaşık lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerde uygulanabildiğini ortaya koymuştur (Mohamed and Gepreel 2017).

RDTM, ADM, VIM ve HPM arasında kıyaslama yapıldığında bu metodun sonuçları parabolik ve hiperbolik benzer denklemlere uygulandığında aynı sonucu vermektedir. RDTM (HPM gibi), ADM'deki özel algoritmalar ve karmaşık hesaplama gerektirmez ayrıca VIM'deki genel Lagrange çarpanları kullanılarak fonksiyonların yapısal doğruluğuna ihtiyaç yoktur (Taghizadeh and Noori 2017).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde kullanılan bazı temel kavramlar verilmiştir.

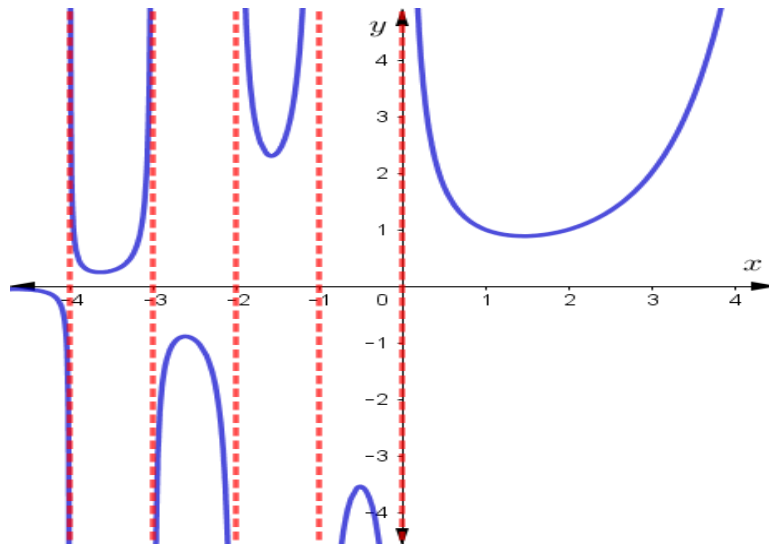
Tanım 3.1: (Gamma Fonksiyonu)

$x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

şeklinde tanımlanan Euler integraline Gamma fonksiyonu denir ve Γ ile gösterilir. Kesirli türev ve kesirli integral hesabında önemli bir role sahip olan Gamma fonksiyonu, kullanılan faktöriyel işleminin tüm reel sayılara genişletilmiş halidir. Gamma fonksiyonuna ait bazı özellikler şöyledir.

- i. $\Gamma(1) = 1$
- ii. $x \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\Gamma(x + 1) = x!$
- iii. $x \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$



Şekil 3.1. Gamma fonksiyonuna ait grafik

Şekil 3.1.'de sıfır noktası civarında Gamma fonksiyonunun davranışı gösterilmiştir. Gamma fonksiyonu pozitif bölgede her noktada tanımlı olmasına karşın, negatif tam sayı değerlerinde sonsuza yakınsamaktadır (Arkfen and Weber 1995).

Tanım 3.2: (Beta Fonksiyonu)

$x, y \in \mathbb{C}, \text{Re}(x) > 0, \text{Re}(y) > 0$ olmak üzere

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

olarak tanımlanır. $B(x, y)$ şeklinde gösterilir. Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki ilişkiyi veren bağıntı

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y, x)$$

şeklindedir.

Bu eşitlik gamma fonksiyonunun birçok değerini hesaplamak yerine doğrudan Beta fonksiyonunun değerlerinden faydalanılabileceğini göstermektedir (Arkfen and Weber 1995).

3.3. Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler

Kesirli mertebeden türevin çeşitli tanımları literatürde mevcuttur. Bu tanımlar aslında Rieman-Liouville kesirli türev tanımından türetilmiş ya da Rieman-Liouville tanımı ile bağlantılı oldukları görülür. Bu tanımlar arasındaki esas fark kullanılan fonksiyonların tanım kümeleri ve seçilen yardımcı parametrelerdir (Li 2003).

Birden fazla Kesirli türev tanımının olması değişik türden problemlerin çözümlerinde kolaylık sağlayacaktır. Genelde Riemann-Liouville Kesirli Türev tanımı

kullanılsa da çalışmamızda yine Riemann-Liouville kesirli türevinden türetilen Caputo Kesirli Türev tanımı kullanılacaktır. Yaygın olarak kullanılan kesirli türev tanımlarını inceleyelim.

3.3.1. Grünwald-Letnikov Türevi

Grünwald-Letnikov türevinin tanımı (Oldham and Spanier 1974) klasik birinci türev tanımından başlanılarak bulunur.

$$f'(x) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1} \approx \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1}, \quad 0 < h_1 \leq 1 \quad (3.1)$$

Benzer yolla bir fonksiyonun ikinci türev tanımını kullandığımızda,

$$f''(x) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1} - \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x-h_2) - f(x-h_1-h_2)}{h_1}}{h_2} \quad (3.2)$$

Bu türetme işleminin üçüncü, dördüncü ve daha yüksek tam sayı basamaktan türevlerine de genişletilebileceği aşikardır. Buradan, $h_1 = h_2 = h$ (3.2) alındığı zaman ikinci türevin elde edildiğini görebiliriz:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \approx \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}, \quad 0 < h \leq 1 \quad (3.3)$$

Aynı mantıkla n . mertebeden türev:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

olarak elde edilir. Burada $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 'dir. (3.4)'de ki limit alınırsa m , n 'den daha büyük olduğundan binom katsayısı sıfır olacağından $n \rightarrow \infty$ için limit alınabilir. Gamma fonksiyonunda ki '!' terimi yerine yazılarak Grünwald-Letnikov kesirli türevi:

$$D_{GL}^{\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh) \quad (3.5)$$

olur.

3.3.2. Riemann-Liouville kesirli integrali ve kesirli türevi

Bazı kaynaklarda, Riemann-Liouville kesirli türev ve integral tanımları ve teoremleri verilmiştir (Kilbas et al.2006; Oldham et al.1974; Ross and Miller 1993). Biz sadece çalışmamızda kullanacağımız özellikleri vereceğiz.

Tanım 3.3.2.1: $a \geq 0$ için, α . mertebeden ($\alpha > 0$) Riemann-Liouville kesirli integral operatörü,

$$(J_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad x > a \quad (3.6)$$

$$(J_a^0 f)(x) = f(x) \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır. $f \in C_a$, $\alpha, \beta > 0$, $a \geq 0$ ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann – Liouville kesirli integral operatörünün bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$a) (J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f)(x) = (J_a^{\alpha+\beta} f)(x), \quad (3.8)$$

$$b) (J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f)(x) = (J_a^{\beta} J_a^{\alpha} f)(x), \quad (3.9)$$

$$c) J_a^{\alpha} x^{\varphi} = \frac{\Gamma(\varphi+1)}{\Gamma(\alpha+\varphi+1)} x^{\alpha+\varphi}, \quad (3.10)$$

Tanım 3.3.2.2: f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in \mathbb{N}, m-1 < \alpha \leq m$ olmak üzere $x > a, a \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ olsun. Bundan dolayı $\gamma = m - \alpha > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$D^\alpha f(x) = D^m[D^{-\gamma}f(x)]$$

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right],$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.3.2.3: $f(x) = x^3$, fonksiyonunu göz önüne alalım. $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 0$, alalım ve fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevini hesaplayalım. Tanım 3.3.2.2'ye göre $m, m-1 < \alpha \leq m$ şartını sağlayan bir tam sayı olacağından $m = 1$ 'dir. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu göz önüne alınarak, $\tau = ux$, $d\tau = xdu$ dönüşümü yapılırsa

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right]$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^x (x-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1} \tau^3 d\tau \right]$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x (x-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^3 d\tau \right]$$

integrali Beta fonksiyonu tipine getirilerek çözülebilir.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^1 (x-ux)^{-\frac{1}{2}} u^3 x^3 x du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^3 x^4 du$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} x^{\frac{7}{2}} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^3 du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} x^{\frac{7}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} x^{\frac{7}{2}} \frac{6\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{32}{35\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}}$$

bulunur.

3.3.3. Caputo kesirli türevi

Caputo kesirli türev tanımı detaylı olarak M. Caputo tarafından ilgili makalelerde verilmiştir (Caputo 1967; Kılbas et al.2006). Bu yüzden, çalışmamızda kullanacağımız özellikler verilecektir.

Tanım 3.3.3.1: $m, m - 1 < \alpha \leq m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, α herhangi pozitif sayı ve f , m . mertebeden diferansiyellenebilir sürekli bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonunun α . mertebeden Caputo kesirli türevi $\varphi = m - \alpha > 0$ olmak üzere

$$D^\alpha f(x) = D^{-\nu} [D^m f(x)]$$

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad (3.11)$$

ile tanımlanır. Ayrıca $m - 1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}, \alpha \geq -1$ olmak üzere, Caputo kesirli türev tanımına ait,

$$a) (D_a^\alpha J_a^\alpha f)(x) = f(x) \quad (3.12)$$

$$b) (J_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(s) \frac{(x-a)^k}{k!}, \alpha \geq 0 \quad (3.13)$$

özellikleri de verilebilir.

Örnek 3.3.3.2: $f(x) = x^3$ fonksiyonunun Caputo tanımından kesirli türevini alalım. $\alpha = \frac{1}{2}$ için tanım 3.3.3.1'e göre $m, m - 1 < \alpha \leq m$ şartını sağlayan bir tamsayı olacağından $m = 1$ 'dir. Buradan $m = 1, \alpha = \frac{1}{2}, a = 0, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olarak alındığında,

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x - \tau)^{1-\frac{1}{2}-1} f'(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x - \tau)^{-\frac{1}{2}} 3\tau^2 d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Bu kısımda $t = ux, dt = xdu$ dönüşümü yapılarak işlem şu hale getirilir.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (x - ux)^{-\frac{1}{2}} 3u^2 x^2 x du \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1 - u)^{-\frac{1}{2}} 3u^2 x^3 du = \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1 - u)^{-\frac{1}{2}} u^2 du \\ &= \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.3.3.3: m tamsayısı α 'dan büyük en küçük tamsayı ya da α 'ya eşit olmak üzere, α . mertebeden $\alpha > 0$ Caputo zaman-kesirli türev operatörü,

$$D_a^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau; & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m}; & \alpha = m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanır.

3.4. Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde kesirli diferansiyel denklemlerin tanımları verilecektir. Aksi belirtilmedikçe, D^α Caputo türev operatörünü temsil etmektedir.

Tanım 3.4.1: Bir veya daha fazla değişkenin kesirli mertebeden türevlerini ihtiva eden denklemlere kesirli diferansiyel denklem denir. Yani, kesirli diferansiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir (Benghorbal 2004).

Örnek 3.4.2: $D^{\frac{3}{2}}u(t) + D^{\frac{1}{2}}u(t) - 2u(t) = 0$ (3.15)

şeklinde verilen (3.15) denklemi kesirli diferansiyel denklemdir (Podlubny 1999). Kesirli diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

Kesirli adi diferansiyel denklemler. Örneğin,

$$D^{\frac{1}{3}}u(t) + 5u^2(t) = 3 \quad (3.16)$$

denklemi kesirli adi diferansiyel denklemdir (Podlubny 1999).

Kesirli kısmi diferansiyel denklemler. Örneğin,

$$D_t^{1/2}u + \frac{1}{2}(u^2)_x - u(1-u) = 0, \quad (3.17)$$

denklemini kesirli kısmi diferansiyel denklemdir (Biazard and Eslami 2011).

3.5. Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemler

Tanım 3.5.1: Lineer olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklem başlangıç koşulları ile birlikte,

$$D_t^\alpha u(x, t) + L_x u(x, t) + N_x u(x, t) = \omega(x, t), \quad m < \alpha \leq m + 1,$$

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 x^n, u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 x^n, \dots, \frac{\partial^m}{\partial t^m} u(x, 0) = h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^m x^n. \quad (3.18)$$

şeklindedir.

Burada $L_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial^k}{\partial x^k}$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir lineer operatör, N_x bir lineer olmayan operatör ve $\omega(x, t)$ tüm x 'lerin derecesi tam sayı olarak bilinen bir fonksiyondur. (Chen et al. 2011).

Örnek 3.5.2: Aşağıda

$$\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (3.19)$$

şeklinde verilen (3.19) denklemini bir kesirli kısmi diferansiyel denklemdir (Chen et al. 2011).

3.6. Kesirli Basamaktan Türevin Geometrik ve Fiziksel Yorumu

Tamsayı basamaktan türev ve integrallerin fiziksel ve geometrik anlamları açık olarak bilinmektedir. Bu nedenle bu operatörler çeşitli uygulamalı problemlerin çözülmesinde oldukça yaygın bir kullanıma sahiptir. Tamsayı basamaktan türev ve integralin aksine, kesirli türev ve integralin geometrik ve fiziksel anlamları ile ilgili kabul gören bir yorum 2002 yılına kadar yapılamamıştır. 2002’de Podlubny tarafından yapılan çalışmada bu eksiklik ele alınmış, kesirli türev ve integral için geometrik ve fiziksel yorumlar verilmiştir (Podlubny 2002).

(3.6) ile verilen Riemann-Liouville kesirli integralini $a = 0$ için ele alalım. Bu integralde

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\}$$

dönüşümü yapılırsa, (3.6) ifadesi

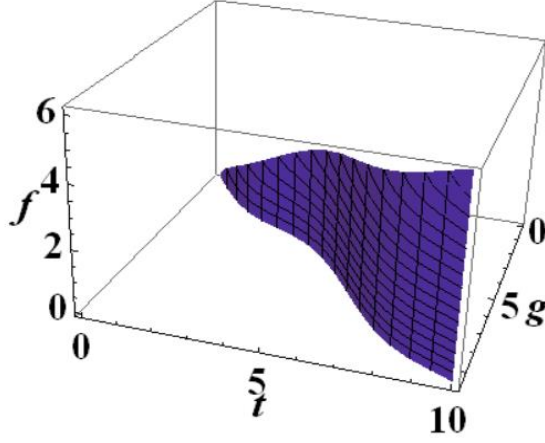
$$I^\alpha f(t) = \int_0^{t^\alpha/\Gamma(\alpha+1)} f(\tau) dg_t(\tau) \quad (3.20)$$

şeklinde yazılabilir. (3.20) integrali sabitlenmiş bir t değeri için ele alınırsa, bu ifade Stieltjes integraline dönüşür ve Bullock tarafından Stieltjes integralinin geometrik anlamı ile ilgili yapılmış yorum kullanılabilir (Bullock 1988).

τ, g ve f eksenlerini göz önüne alalım. (τ, g) düzleminde $0 \leq \tau \leq t$ için $g_t(\tau)$ eğrisi çizilip yüksekliği $f(\tau)$ olan “çit”ler oluşturulabilir (Şekil 3.2.). Bu çitlerin (τ, f) düzlemi üzerindeki izdüşümünün alanı

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

integralinin değerine eşittir. (g, f) düzlemi üzerindeki izdüşümünün alanı ise (3.20) kesirli integralinin değerini vermektedir.



Şekil 3.2. $\alpha = 0,75, f(t) = t + 0,5 \sin(t), 0 \leq t \leq 10$ için oluşturulan çit (Demirci 2011).

Kesirli integralin geometrik yorumu temel olarak, τ ve $f(\tau)$ ikilisine üçüncü bir boyut ($g(\tau)$) eklenmesine dayanmaktadır. τ zaman olarak kabul edilirse, $g(\tau)$ da “dönüştürülmüş zaman” olarak düşünülebilir.

Kesirli türevin fiziksel yorumu aşağıdaki şekilde yapılabilir:

$$S_0(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau)$$

alınırsa,

$$f(t) = D_0^\alpha S_0(t) \quad 0 < \alpha < 1$$

olup, bu ifade $S_0(t)$ kadar mutlak yol katetmiş bir nesnenin algılanan hızını verir. Diğer yandan (3.20) ifadesinin birinci basamaktan türevi alınır,

$$v_0(t) = \frac{d}{dt} I_0^\alpha f(t) = D_0^{1-\alpha} f(t)$$

elde edilir. Bu ifade ise algılanan hızın $f(t)$ ile verilen bir nesnenin bağımsız bir gözlemci tarafından gözlemlenen mutlak hızını verir. $\alpha = 1$ durumunda, yani mutlak zaman ile algılanan zaman arasında bir farkın olmadığı durumda $v_0(t) = v(t)$ eşitliği elde edilir (Demirci 2011).

3.7. Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu

3.7.1. Bir boyutlu genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu

Tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun k . mertebeden türevinin genelleştirilmiş diferansiyel dönüşümü, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$F_\alpha(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left[(D_{x_0}^\alpha)^k \right]_{x=x_0}, \quad (3.21)$$

olarak tanımlanır. $(D_{x_0}^\alpha)^k = D_{x_0}^\alpha \cdot D_{x_0}^\alpha \dots D_{x_0}^\alpha$ (k defa) şeklinde tanımlanır. $F_\alpha(k)$ 'nin diferansiyel ters dönüşümü

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\alpha(k) (x - x_0)^{\alpha k}, \quad (3.22)$$

şeklinde tanımlanır. (3.21) ifadesindeki $F_\alpha(k)$, (3.22) ifadesinde yerine yazılıp

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\alpha(k) (x - x_0)^{\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left[(D_{x_0}^\alpha)^k f(x_0) \right], \quad (3.23)$$

elde edilir. Yani, (3.21) genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm ifadesinin ters dönüşümü (3.22) ifadesidir. (3.23) ifadesi kullanılırsa, $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşık değeri sınırlı seri formatında

$$f(x) = \sum_{k=0}^n F_\alpha(k) (x - x_0)^{\alpha k}, \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\alpha = 1$ olması durumunda (3.21) genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm ifadesinden, klasik diferansiyel dönüşüm ifadesinin elde edilebileceği görülebilir.

3.7.2. İki boyutlu genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu

İki boyutlu genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu ve genelleştirilmiş Taylor formülü temel alınarak tanımlanmıştır (Odibat and Momani 2008a).

İki değişkenli $u(x, y)$ fonksiyonunun, $u(x, y) = f(x)g(y)$ olacak şekilde, tek değişkenli iki fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade edilebileceğini kabul edelim. İki boyutlu diferansiyel dönüşümün temel işlemleri temel olarak $u(x, y)$ fonksiyonu, $0 < \alpha, \beta \leq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{\alpha}(k)(x - x_0)^{\alpha k} \sum_{h=0}^{\infty} G_{\beta}(h)(y - y_0)^{h\beta}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U_{\alpha, \beta}(k, h)(x - x_0)^{\alpha k}(y - y_0)^{\beta h}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde ifade edilebilir. $u(x, y)$ fonksiyonun genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(\beta h + 1)} \left[(D_{x_0}^{\alpha})^k (D_{y_0}^{\beta})^h \right]_{(x_0, y_0)}, \quad (3.26)$$

şeklinde verilir. $(D_{x_0}^{\alpha})^k = D_{x_0}^{\alpha} D_{x_0}^{\alpha} \dots D_{x_0}^{\alpha}$, (k defa) şeklinde ifade edilir. Burada $u(x, y)$ orijinal fonksiyon, $U(k, h)$ ise dönüşüm fonksiyonunu göstermektedir. (3.25) ve (3.26) genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşüm tanımları temel alınır, aşağıdaki sonuçlar elde edilir (Odibat et al.2008).

Genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşümün temel işlemleri aşağıda ki Çizelge (3.1)'de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Genelleştirilmiş iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri

| Orijinal fonksiyon | Dönüşüm fonksiyonu |
|--|---|
| $u(x, y) = w(x, y) \pm v(x, y)$ | $U_{\alpha, \beta}(k, h) = W_{\alpha, \beta}(k, h) \pm V_{\alpha, \beta}(k, h)$ |
| $u(x, y) = cw(x, y) \quad (c \in \mathbb{R})$ | $U_{\alpha, \beta}(k, h) = cW_{\alpha, \beta}(k, h) \quad (c \in \mathbb{R})$ |
| $u(x, y) = w(x, y)v(x, y)$ | $U_{\alpha, \beta}(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h W_{\alpha, \beta}(r, h-s) V_{\alpha, \beta}(k-r, s)$ |
| $u(x, y) = (x - x_0)^{m\alpha} (y - y_0)^{n\beta}$ | $U_{\alpha, \beta}(k, h) = \delta(k - n) \delta(h - m)$ |
| $u(x, y) = D_{x_0}^{\alpha} v(x, y)$ | $U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} V_{\alpha, \beta}(k+1, h),$ $0 < \alpha \leq 1$ |
| $u(x, y) = D_{y_0}^{\beta} v(x, y)$ | $U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\beta(h+1) + 1)}{\Gamma(\beta h + 1)} V_{\alpha, \beta}(k, h+1),$ $0 < \beta \leq 1$ |
| $u(x, y) = D_{y_0}^{\gamma} v(x, y)$ | $U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha k + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} V_{\alpha, \beta}(k + \gamma/\alpha, h)$ $m - 1 < \gamma \leq m$ |

3.8. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Bu bölümde kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu verilecektir. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodunda oluşan işlem yoğunluğunun azaltılmasına olanak sağlamaktadır. Bu nedenle kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini hızlı bir şekilde elde etmek mümkün olabilecektir.

İki boyutlu kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^{\alpha k} t^{\beta h}$$

şeklinde olsun. Bu durumda $u(x, t)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$U(k, h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(\beta h + 1)} \left[(D_{x_0}^\alpha)^k (D_{t_0}^\beta)^h u(x, t) \right]_{x=0, t=0}$$

olarak tanımlanmıştır. $\alpha = 1$ alınırsa,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U_{k,h} x^k t^{\beta h}$$

olduğundan $u(x, t)$ fonksiyonu açık halde yazarsak,

$$U_{0,0}, U_{0,1} t^\beta, U_{0,2} t^{2\beta}, \dots, U_{1,0} x, U_{1,1} x t^\beta, U_{1,2} x t^{2\beta}, \dots, U_{2,0} x^2, U_{2,1} x^2 t^\beta, \dots$$

elde edilir. Buradaki terimler t nin kuvvetlerine göre düzenleme yapılırsa yani ilk grup $t^0 \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,0} x^k$, ikinci grup $t^\beta \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,1} x^k$, üçüncü grup $t^{2\beta} \sum_{k=0}^{\infty} U_{k,2} x^k \dots$ v.b. Böylece

$$u(x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^{\beta h}$$

fonksiyonu elde edilmektedir. Buradan hareketle aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 3.8.1: İki bileşenli $u(x, t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k, h)$ olmak üzere, $u(x, t)$ 'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$U_h(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta h + 1)} \left[D_t^{\beta h} u(x, t) \right]_{t=0} \quad (3.27)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.8.2: (Keskin 2010) $U_h(x)$ 'nin t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi;

$$u(x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^{\beta h} \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlanır. (3.27) ve (3.28) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.29) eşitliği

$$u(x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\beta h + 1)} \left[D_t^{\beta h} u(x, t) \right]_{t=0} t^{\beta h} \quad (3.29)$$

elde edilir.

Teorem 3.8.3: (Keskin 2010) İki değişkenli $u(x, t)$ ve $w(x, t)$ fonksiyonları ele alalım. Eğer

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} w(x, t)$$

fonksiyonları sırasıyla $U_h(t)$ ve $V_h(t)$ fonksiyonlarının x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$U_h(t) = (h + 1)W_{h+1}(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat 3.8.3:

$$v(x, t) \rightarrow W_h(t) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^h}{\partial x^h} w(x, t) \right]_{x=0}$$

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} w(x, t)$$

ise

$$U_h(t) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^h}{\partial x^h} \left(\frac{\partial}{\partial x} w(x, t) \right) \right]_{x=0}$$

diferansiyel operatörünün özelliğinden

$$U_h(t) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^{h+1}}{\partial x^{h+1}} w(x, t) \right]_{x=0} = (h+1) \frac{1}{(h+1)!} \left[\frac{\partial^{h+1}}{\partial x^{h+1}} w(x, t) \right]_{x=0}$$

olup

$$U_h(t) = (h+1)W_{h+1}(t)$$

Teorem 3.8.4: (Keskin 2010) İki değişkenli $u(x, t)$, $w(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarını ele alalım. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere eğer

$$u(x, t) = w(x, t)v(x, t)$$

ise sırasıyla $U_k(t)$, $W_k(t)$ ve $V_k(t)$ verilen fonksiyonların x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$U_k(t) = \sum_{r=0}^k W_r(t)V_{k-r}(t)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.8.5: (Keskin 2010) İki değişkenli $w(x, t)$ fonksiyonunu ele alalım. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere eğer

$$w(x, t) = x^m f(t), f(t): \text{Analitik fonksiyon}$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

ise $W_k(t)$ verilen fonksiyonun x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W_k(t) = \delta(k - m)f(t), \quad \delta(k - m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Çizelge 3.2. x boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu (Keskin 2010).

| Orjinal fonksiyon | Dönüşüm fonksiyonu |
|---|--|
| $u(x, t)$ | $W_k(t) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x, t) \right]_{t=0}$ |
| $u(x, t) = w(x, t) \pm v(x, t)$ | $U_k(t) = W_k(t) \pm V_k(t)$ |
| $u(x, t) = cw(x, t) \quad (c \in \mathbb{R})$ | $U_k(t) = cW_k(t) \quad (c \in \mathbb{R})$ |
| $u(x, t) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} w(x, t)$ | $U_k(t) = \frac{(k+r)!}{k!} W_{k+r}(t)$ |
| $u(x, t) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} w(x, t)$ | $U_k(t) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} W_k(t)$ |
| $u(x, t) = w(x, t)v(x, t)$ | $U_k(t) = \sum_{r=0}^k V_r(t) W_{k-r}(t)$ |
| $u(x, t) = x^m t^n$ | $U_k(t) = \delta(k - m)t^n$ |
| $u(x, t) = x^m t^n w(x, t)$ | $U_k(t) = W_{k-m}(t)$ |

Çizelge 3.3. t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu (Keskin 2010).

| Orijinal fonksiyon | Dönüşüm fonksiyonu |
|---|--|
| $u(x, t)$ | $U_h(x) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t) \right]_{t=0}$ |
| $u(x, t) = w(x, t) \pm v(x, t)$ | $U_h(x) = W_h(x) \pm V_h(x)$ |
| $u(x, t) = cw(x, t) \quad (c \in \mathbb{R})$ | $U_h(x) = cW_h(x) \quad (c \in \mathbb{R})$ |
| $u(x, t) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} w(x, t)$ | $U_h(x) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} U_h(x)$ |
| $u(x, t) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} w(x, t)$ | $U_h(x) = \frac{(h+s)!}{h!} U_{h+s}(x)$ |
| $u(x, t) = w(x, t)v(x, t)$ | $U_h(x) = \sum_{s=0}^h V_s(x) W_{h-s}(x)$ |
| $u(x, t) = x^m t^n$ | $U_h(x) = \delta(h-n)x^m$ |
| $\psi(x, t) = u(x, t)w(x, t)v(x, t)$ | $\Psi_k = \sum_{r=0}^k \sum_{i=0}^r U_i(x) V_{r-i}(x) W_{k-r}(x)$ |
| $u(x, t) = x^m t^n w(x, t)$ | $U_h(x) = x^m W_{h-n}(x)$ |

Örnek 3.1: $K(m, n)$ diferansiyel denklem ailesine ait olan $K(2, 2)$ zaman-kesirli diferansiyel denklemini indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümünü aşağıda ki gibidir (Edeki at al. 2018).

$$D_t^\alpha v + (v^2)_x + (v^2)_{xxx} = 0 \quad (3.30)$$

$$v(x, 0) = \frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) \quad (3.31)$$

şeklindedir.

Yukarıda (3.31) başlangıç şartı ile verilen (3.30) $K(2,2)$ zaman-kesirli diferansiyel denklemini ele alalım. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu bu denkleme uygulanırsa,

$$\frac{\Gamma(\alpha(i+1)+1)}{\Gamma(\alpha i+1)} V_{i+1} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{r=0}^i V_r V_{i-r} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{r=0}^i V_r V_{i-r} \right)$$

$$V_{i+1} = - \frac{\Gamma(\alpha i+1)}{\Gamma(\alpha(i+1)+1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{r=0}^i V_r V_{i-r} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{r=0}^i V_r V_{i-r} \right)$$

elde edilir. $i \geq 0$ için iterasyon yapılırsa,

$$V_1 = - \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{r=0}^0 V_r V_{-r} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{r=0}^0 V_r V_{-r} \right)$$

$$V_1 = - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} ((V_0 V_0)' + (V_0 V_0)''')$$

$$V_2 = - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} ((V_0 V_1 + V_1 V_0)' + (V_0 V_1 + V_1 V_0)''')$$

$$V_3 = - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)} ((2V_0 V_2 + V_1 V_1)' + (2V_0 V_2 + V_1 V_1)''')$$

$$V_4 = - \frac{2\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)} ((V_0 V_3 + V_1 V_2)' + (V_0 V_3 + V_1 V_2)''')$$

$$V_5 = -\frac{2\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)} ((2V_0V_4 + 2V_1V_3 + V_2V_2)' + (2V_0V_4 + 2V_1V_3 + V_2V_2)''')$$

olduğundan,

$$V_0 = \frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right), \quad V_1 = \frac{2\cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{3\Gamma(\alpha + 1)}, \quad V_2 = \frac{1 - 2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}{6\Gamma(2\alpha + 1)}$$

$$V_3 = \frac{-\cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{6\Gamma(3\alpha + 1)}, \quad V_4 = \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) - 1}{24\Gamma(4\alpha + 1)}, \quad \dots$$

elde edilir. Denklemin yaklaşık çözümünü elde etmek için yukarıda ki terimler kullanılarak

$$v(x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} V_h t^{\alpha h}$$

eşitliğinden,

$$v(x, t) = \frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{2\cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{3\Gamma(\alpha + 1)}\right) t^\alpha + \left(\frac{1 - 2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}{6\Gamma(2\alpha + 1)}\right) t^{2\alpha} +$$

$$\left(\frac{-\cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{6\Gamma(3\alpha + 1)}\right) t^{3\alpha} + \left(\frac{2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) - 1}{24\Gamma(4\alpha + 1)}\right) t^{4\alpha} + \dots$$

bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Önceki bölümlerde genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu hakkında bilgi verilerek indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu sunuldu. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile zaman-kesirli diferansiyel denklemlerin çözülebildiği görüldü. Bu bölümde ise belirtilen metot iki farklı zaman-kesirli diferansiyel denkleme uygulanarak, α 'nın belirli değerleri için elde edilen sonuçlar şekil ve çizelgeler üzerinden karşılaştırıldı.

4.1. Zaman-Kesirli Murray Diferansiyel Denkleminin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Nümerik Çözümü

Reaksiyon-Difüzyon denkleminin üyesi olan Burgers' denklemini $u_t = u_{xx} + \lambda_1 u u_x$ şeklindedir. Burgers denkleminin uygulamalı matematikte gaz dinamiğinin modellenmesinde, akışkan dinamiğinin modellenmesinde, türbülans, sınır tabakası davranışı, şok dalgası oluşumu gibi birçok uygulaması vardır (Bhrawy et al. 2016).

Reaksiyon Difüzyon denkleminin diğer bir üyesi olan Fisher denklemini $u_t = u_{xx} + \lambda_2 u - \lambda_3 u^2$ şeklindedir. İlk olarak mutant bir genin yayılmasını tanımlamak için Fisher tarafından sunulmuştur. Fisher denklemini birçok alanda geniş uygulama sahasına sahiptir. Bunlar, biyolojik popülasyonun yayılmasını, kimyasal kinetiği, lojistik popülasyon büyümesini, alev yayılımını, nükleer bir reaksiyonda nötron popülasyonunu, nötrofizyolojiyi, otokatalitik kimyasal reaksiyonları, Dallanan Brownian hareket süreçlerini ve nükleer reaktör teorisini açıklar. Murray denklemini, Fisher ve Burgers denklemlerinin genelleştirilmiş halidir. Mühendislikte ve Fen bilimlerinde çeşitli uydulama alanlarında kullanılabilirliklerinden dolayı nonlinear Reaksiyon-Difüzyon denklemleri oldukça önemlidir (Bhrawy et al. 2016).

Örnek 4.1.

Literatürde Murray denklemini (Murray 1977,1989) olarak bilinen

$$D_t^\alpha u = u_{xx} + \lambda_1 u u_x + \lambda_2 u - \lambda_3 u^2, \quad 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq t < 1 \quad (4.1)$$

denkleminin başlangıç şartı (Bhrawy et al. 2016) ve analitik çözümü (Bhrawy et al. 2016);

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \right) \quad (4.2)$$

$$u(x, t) = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} \left(1 + \tanh\left[\frac{\lambda_2}{8\lambda_3^2} (2\lambda_1\lambda_3x + (\lambda_1^2 + 4\lambda_3^2)t) \right] \right) \quad (4.3)$$

şeklindedir. (4.1) denkleminde ki $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 1$ ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$) alınırsa zaman-kesirli denklemi

$$D_t^\alpha u = u_{xx} + uu_x + u - u^2 \quad (4.4)$$

şekline dönüşür. (4.2)'de ki başlangıç şartını kullanarak (4.1)'de ki Murray denkleminde indirgenmiş diferansiyel dönüşümü uygulayalım.

Çözüm 4.1.

(4.1)'de verilen Murray zaman-kesirli diferansiyel denklemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} \left(1 + \tanh\left[\frac{\lambda_2}{8\lambda_3^2} (2\lambda_1\lambda_3x + (\lambda_1^2 + 4\lambda_3^2)t) \right] \right) \quad (4.5)$$

$\lambda_3 \neq 0$ şartıyla, (4.4) denkleminde indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)} U_{h+1}(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_h(x) + \sum_{s=0}^h U_s(x) \frac{\partial}{\partial x} U_{h-s}(x) + U_h(x) \\ &- \sum_{s=0}^h U_s(x) U_{h-s}(x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.6) denkleminde $h = 0$ için;

$$U_0(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \right)$$

$$\Gamma(\alpha+1)U_1(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0(x) + \sum_{s=0}^0 U_s(x) \frac{\partial}{\partial x} U_{h-s}(x) + U_0(x) - \sum_{s=0}^0 U_s(x) U_{h-s}(x)$$

$$U_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} [(U_0)_{xx} + U_0(U_0)_x + (U_0) - (U_0)^2]$$

$$U_1 = \frac{4 + \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) - 4\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right)}{16\Gamma(\alpha + 1)}$$

elde edilir. Bu iterasyon $h = 1, 2, 3 \dots$ için yapılırsa,

$$U_2 = \frac{1}{64\Gamma(2\alpha + 1)} [2\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) - 2\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) - 16\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 9\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 2\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) + 16\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right)]$$

$$U_3 = \frac{-1}{512\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)} [32\Gamma(2\alpha + 1) + 16\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) + 16\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) + 9\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) + 2\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) + 36\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) + 20\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 86\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) + 5\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 128\Gamma^2(\alpha + 1)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 64\Gamma(2\alpha + 1)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 138\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 16\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 36\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) - 20\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) + 128\Gamma^2(\alpha + 1)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) + 32\Gamma(2\alpha + 1)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right)]$$

$$U_4 = \frac{-1}{4096\Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)} [32\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) + 128\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) - 92\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)]$$

$$\begin{aligned}
 & -44\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) + 4\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -233\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right) - 13\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -7\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right) - 256\Gamma^2(2\alpha + 1)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -512\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 416\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -288\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 400\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -456\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 96\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -64\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +322\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 85\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -24\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -488\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -264\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 616\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +2280\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +2280\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +144\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 144\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +1024\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) + 512\Gamma^2(2\alpha + 1)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +1024\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +1892\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +288\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) + 384\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -128\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +140\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) - 8\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +488\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & +232\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) + 488\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -1024\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) - 256\Gamma^2(2\alpha + 1)\tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \\
 & -512\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) + 16\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^5\left(\frac{x}{4}\right)]
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemin yaklaşık çözümü için:

$$u(x, t) \cong \sum_{h=0}^4 U_h(x)t^{\alpha h}$$

toplam serisinde yukarıda ki terimler yerine yazılırsa

$$u(x, t) \cong \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \frac{4 + \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) - 4\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right)}{16\Gamma(\alpha + 1)}t^\alpha$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{64\Gamma(2\alpha + 1)}\left[2\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) - 2\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) - 16\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 9\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \right. \\
 & \left. - 2\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) + 16\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right)\right]t^{2\alpha}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{-1}{512\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)}\left[32\Gamma(2\alpha + 1) + 16\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$+ 16\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) + 9\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) + 2\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)$$

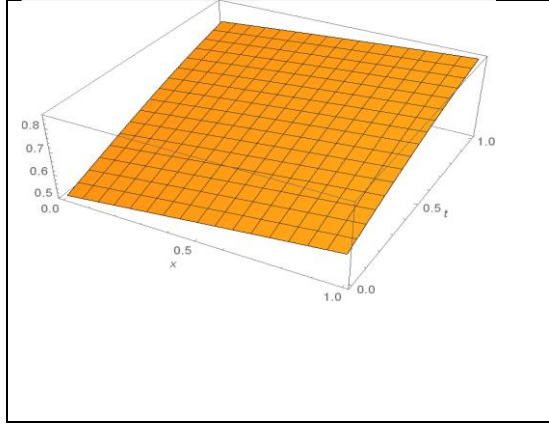
$$+ 36\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) + 20\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$- 86\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) + 5\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right)$$

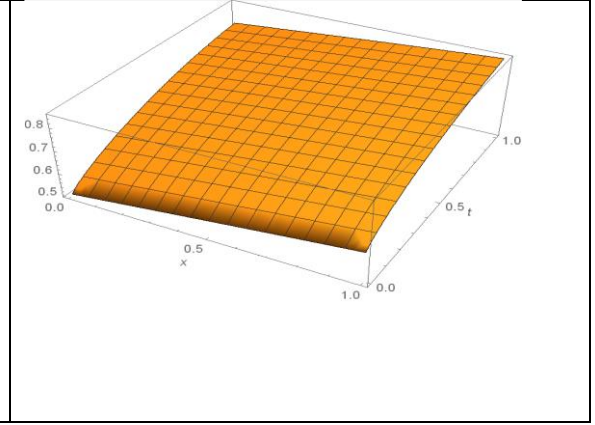
$$\begin{aligned}
& -128\Gamma^2(\alpha + 1)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 64\Gamma(2\alpha + 1)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -138\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 16\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -36\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) - 20\Gamma(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +128\Gamma^2(\alpha + 1)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) + 32\Gamma(2\alpha + 1)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right)]t^{3\alpha} \\
& + \frac{-1}{4096\Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)} [32\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +128\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) - 92\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -44\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) + 4\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -233\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right) - 13\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -7\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right) - 256\Gamma^2(2\alpha + 1)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -512\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 416\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -288\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 400\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -456\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 96\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -64\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +322\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) - 85\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -24\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)\tanh\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -488\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -264\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 616\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +2280\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2280\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +144\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) - 144\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +1024\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) + 512\Gamma^2(2\alpha + 1)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +1024\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +1892\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +288\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) + 384\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -128\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +140\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) - 8\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +488\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \\
& +232\Gamma^2(2\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) + 488\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -1024\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)\tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) - 256\Gamma^2(2\alpha + 1)\tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \\
& -512\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) + 16\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)\tanh^5\left(\frac{x}{4}\right)]t^{4\alpha}
\end{aligned}$$

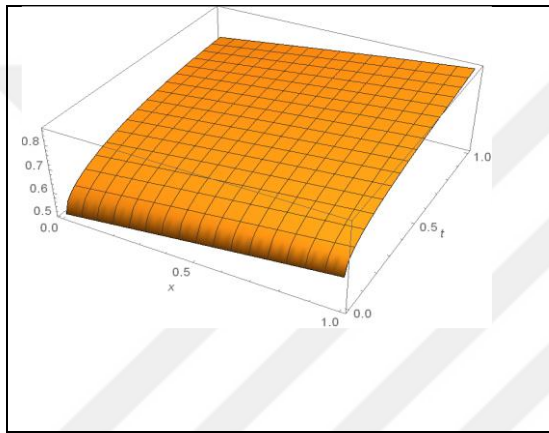
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA



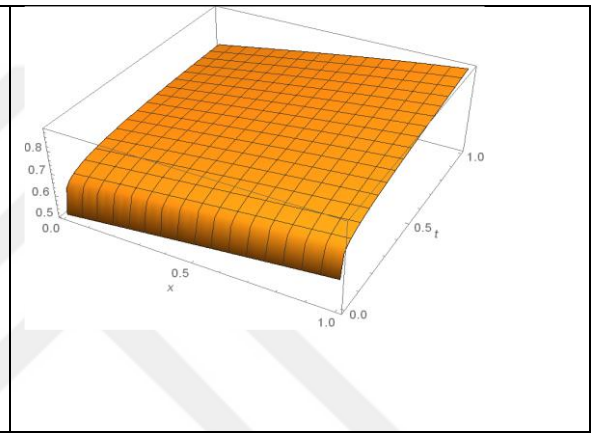
Şekil 4.1. Murray denkleminin
 $\alpha = 1$ için grafiği



Şekil 4.2. Murray denkleminin
 $\alpha = 0,75$ için grafiği



Şekil 4.3. Murray denkleminin
 $\alpha = 0,50$ için grafiği



Şekil 4.4. Murray denkleminin
 $\alpha = 0,25$ için grafiği

Çizelge 4.1. $\alpha = 1$ olduğu zaman (4.4) zaman-kesirli diferansiyel denklem $u(x, t)$ 'nin nümerik çözümleri

| x değeri | t değeri | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Mutlak hata |
|------------|------------|---------------|----------------|----------------------|
| 0,125 | 0,125 | 0,5544702743 | 0,5544704649 | $1,9 \times 10^{-7}$ |
| 0,225 | 0,125 | 0,5667858200 | 0,5667860060 | $1,8 \times 10^{-7}$ |
| 0,325 | 0,125 | 0,5790194078 | 0,5790195874 | $1,7 \times 10^{-7}$ |
| 0,425 | 0,125 | 0,5911567286 | 0,5911568998 | $1,7 \times 10^{-7}$ |
| 0,525 | 0,125 | 0,6031839359 | 0,6031840971 | $1,6 \times 10^{-7}$ |
| 0,625 | 0,125 | 0,6150877057 | 0,6150878555 | $1,4 \times 10^{-7}$ |
| 0,725 | 0,125 | 0,6268552909 | 0,6268554280 | $1,3 \times 10^{-7}$ |
| 0,825 | 0,125 | 0,6384745708 | 0,6384746941 | $1,2 \times 10^{-7}$ |
| 0,925 | 0,125 | 0,6499340935 | 0,6499342022 | $1,0 \times 10^{-7}$ |

Çizelge 4.2. $\alpha = 1$, $\alpha = 0,75$, $\alpha = 0,50$, $\alpha = 0,25$ olduğu zaman (4.4) zaman-kesirli denklem $u(x, t)$ 'nin nümerik çözümleri

| x | t | $\alpha = 1$ | $\alpha = 0,75$ | $\alpha = 0,5$ | $\alpha = 0,25$ |
|-------|-------|--------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 0,125 | 0,125 | 0,5544702743 | 0,5859103286 | 0,6334478288 | 0,6894731167 |
| 0,225 | 0,125 | 0,5667858200 | 0,5979239246 | 0,6446632874 | 0,7000300566 |
| 0,325 | 0,125 | 0,5790194078 | 0,6098216121 | 0,6557299695 | 0,7104476486 |
| 0,425 | 0,125 | 0,5911567286 | 0,6215906289 | 0,6666378629 | 0,7207052979 |
| 0,525 | 0,125 | 0,6031839359 | 0,6332187959 | 0,6773775486 | 0,7307833264 |
| 0,625 | 0,125 | 0,6150877057 | 0,6446945618 | 0,6879402342 | 0,7406632610 |
| 0,725 | 0,125 | 0,6268552909 | 0,6560070412 | 0,6983177834 | 0,7503280899 |
| 0,825 | 0,125 | 0,6384745708 | 0,6671460477 | 0,7085022739 | 0,7597624789 |
| 0,925 | 0,125 | 0,6499340935 | 0,6781021211 | 0,7184883430 | 0,7689529449 |

4.2. Zaman-Kesirli $K(3,3)$ Diferansiyel Denkleminin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü

$K(m, n)$ denklemleri, KdV (Kortwge-de Vries') ailesinin üyeleridir. Bu denklemler ilk olarak 1895'te sığ su dalgalarının oluşumu için modellenen en eski denklemlerdir. Sıvı damlalarında ki şekillerin biçimlendirilmesinde ki doğrusal olmayan dağılımlarda önemli bir rol oynar (Zaidan and Darvishi 2107).

Örnek 4.2.

$K(m, n)$ denklemleri (Rosenau and Hyman 1993);

$$u_t^l + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0, m > 0, 1 < n \leq 3$$

şeklindedir. Burada

$$D_t^\alpha(u^l) + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0, m = n = 3, l = 1$$

zaman-kesirli $K(m, n)$ denklemi olmak üzere indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile çözülecektir.

Literatürde $K(m, n)$ olarak bilinen ve $m = n = 3$ alınarak elde edilen $K(3,3)$

$$D_t^\alpha u + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0 \quad (4.7)$$

denkleminin başlangıç şartı (Wazwaz 2002) ve analitik çözümü (Wazwaz 2002);

$$u(x, 0) = \frac{\sqrt{6c}}{2} \sin\left(\frac{x}{3}\right) \quad (4.8)$$

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{6c}}{2} \sin\left(\frac{x-ct}{3}\right) \quad (4.9)$$

şeklinde olsun. (4.7) denkleminde $m = n = 3$ alındığında zaman-kesirli denklemi

$$D_t^\alpha u + (u^3)_x + (u^3)_{xxx} = 0, \quad -5 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (4.10)$$

denkleminde indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu uygulayalım.

Çözüm 4.2.

(4.10)'da verilen $K(3,3)$ zaman-kesirli diferansiyel denklemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{6c}}{2} \sin\left(\frac{x-ct}{3}\right)$$

$D_t^\alpha u + (u^3)_x + (u^3)_{xxx} = 0$ denkleminin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} U_{k+1}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{r=0}^k \sum_{i=0}^r U_i(x) U_{r-i}(x) U_{k-r}(x) + \\ & \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{r=0}^k \sum_{i=0}^r U_i(x) U_{r-i}(x) U_{k-r}(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

(4.11) denkleminde $k = 0$ için,

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1)U_1(x) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{r=0}^0 \sum_{i=0}^0 U_i(x)U_{r-i}(x)U_{k-r}(x) \\ + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{r=0}^0 \sum_{i=0}^0 U_i(x)U_{r-i}(x)U_{k-r}(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Gamma(\alpha + 1)U_1(x) + (U_0^3)' + (U_0^3)''' = 0$$

$$U_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} [-(U_0^3)' - (U_0^3)''']$$

$$U_1(x) = \frac{-1}{6\Gamma(\alpha + 1)} \left[\sqrt{6}c^{3/2} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \right]$$

$$U_2(x) = \frac{-1}{18\Gamma(2\alpha + 1)} \left[\sqrt{6}c^{5/2} \sin\left(\frac{x}{3}\right) \right]$$

$$U_3(x) = \frac{1}{54\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \left[\sqrt{6}c^{7/2} \cos\left(\frac{x}{3}\right) [3\Gamma(\alpha + 1) - 1] \right]$$

$$U_4(x) = \frac{1}{162\Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1)}$$

$$\left[\sqrt{6}c^2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1) \sin\left(\frac{x}{3}\right) [3\Gamma(\alpha + 1) - 1] \right]$$

$$+ \sqrt{6}c^2\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1) \sin\left(\frac{x}{3}\right) [2\Gamma(2\alpha + 1) - 1]$$

$$U_5(x) = [3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)$$

$$- 9\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1)$$

$$+ 3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)$$

$$\begin{aligned}
 & -6\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma^3(2\alpha + 1) \\
 & -2\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1) \\
 & +6\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1) \\
 & -3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1) \\
 & +\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1) \\
 & +3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1) \\
 & -9\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1) \\
 & +3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1) \\
 & -6\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma^3(2\alpha + 1) \\
 & -2\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1) \\
 & +6\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1) \\
 & -3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1) \\
 & +\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)] \\
 & / (486\Gamma(5\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1))
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemin yaklaşık çözümü için:

$$u(x, t) \cong \sum_{h=0}^5 U_h(x) t^{\alpha h}$$

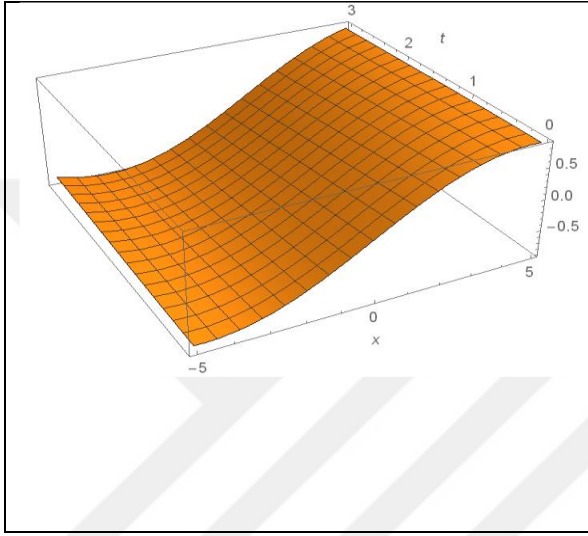
toplam serisinde yukarıda ki terimler yerine yazılırsa,

$$u(x, t) \cong \frac{\sqrt{6}c}{2} \sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{-1}{6\Gamma(\alpha + 1)} \left[\sqrt{6}c^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \right] t^{\alpha}$$

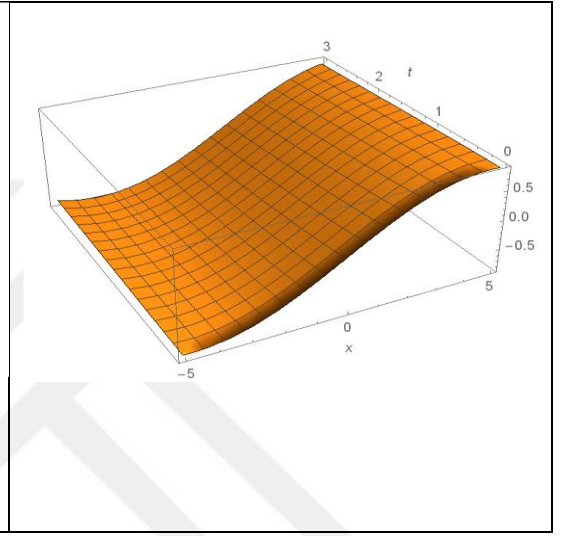
$$\begin{aligned}
& + \frac{-1}{18\Gamma(2\alpha + 1)} \left[\sqrt{6}c^{\frac{5}{2}} \sin\left(\frac{x}{3}\right) \right] t^{2\alpha} \\
& + \frac{1}{54\Gamma(3\alpha + 1)(\alpha + 1)} \left[\sqrt{6}c^{\frac{7}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) [3\Gamma(\alpha + 1) - 1] \right] t^{3\alpha} \\
& + \frac{1}{162\Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1)} [3\sqrt{6}c^{\frac{9}{2}}\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1) \sin\left(\frac{x}{3}\right) \\
& - \sqrt{6}c^{\frac{9}{2}}\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1) \sin\left(\frac{x}{3}\right) \\
& + \sqrt{6}c^{\frac{9}{2}}\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1) \sin\left(\frac{x}{3}\right) [2\Gamma(2\alpha + 1) - 1]] t^{4\alpha} \\
& + (3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1) \\
& - 9\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1) \\
& + 3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1) - 6\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma^3(2\alpha + 1) \\
& - 2\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1) \\
& + 6\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1) \\
& - 3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1) \\
& + \sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1) \\
& + 3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1) \\
& - 9\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1) \\
& + 3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1) \\
& - 6\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma^3(2\alpha + 1) \\
& - 2\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1) \\
& + 6\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -3\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1) \\
 & +\sqrt{6}c^{\frac{11}{2}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) \Gamma(4\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1) \\
 & / (486\Gamma(5\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma^3(\alpha + 1))t^{5\alpha}
 \end{aligned}$$

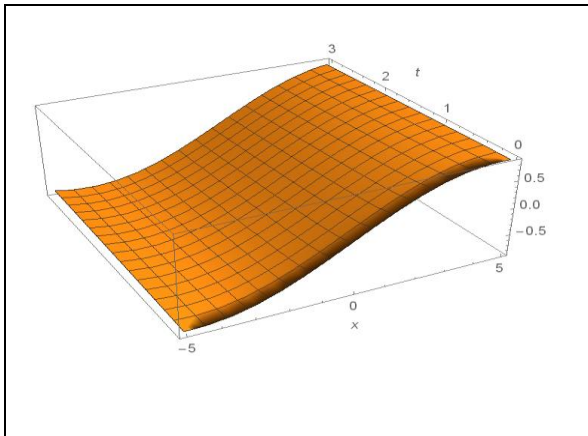
elde edilir.



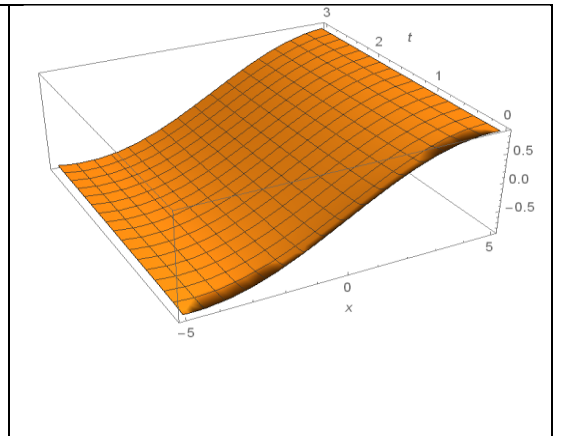
Şekil 4.5. $K(3,3)$ denkleminin
 $c = 0,5, \alpha = 1$
 için grafiği



Şekil 4.6. $K(3,3)$ denkleminin
 $c = 0,5, \alpha = 0,75$
 için grafiği



Şekil 4.7. $K(3,3)$ denkleminin
 $c = 0,5, \alpha = 0,50$
 için grafiği



Şekil 4.8. $K(3,3)$ denkleminin
 $c = 0,5, \alpha = 0,25$
 için grafiği

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Çizelge 4.3. $\alpha = 1$ olduğu zaman (4.10) zaman-kesirli diferansiyel denklemin nümerik çözümleri

| x değeri | t değeri | Nümerik çözüm | Tam çözüm | Mutlak Hata |
|------------|------------|---------------|---------------|-------------------------|
| -5 | 0 | -0,8620485785 | -0,8620485785 | 0 |
| -4 | 0,40 | -0,8534277123 | -0,8534245003 | $3,2120 \times 10^{-6}$ |
| -3 | 0,80 | -0,7844767741 | -0,7844712386 | $5,5354 \times 10^{-6}$ |
| -2 | 1,20 | -0,6599229951 | -0,6600631484 | 0,0001401532 |
| -1 | 1,60 | -0,4879934504 | -0,4889947260 | 0,0010012755 |
| 0 | 2 | -0,2794688417 | -0,2833589194 | 0,0038905020 |
| 1 | 1,60 | 0,0609625650 | 0,0576922697 | 0,0032702953 |
| 2 | 1,20 | 0,3911320027 | 0,3896351180 | 0,0014969091 |
| 3 | 0,80 | 0,6604222918 | 0,6600631484 | 0,0003591434 |
| 4 | 0,40 | 0,8263048348 | 0,8262817212 | 0,0000231136 |
| 5 | 0 | 0,8620485785 | 0,8620485785 | 0 |

Çizelge 4.4. $\alpha = 1$, $\alpha = 0,75$, $\alpha = 0,50$, $\alpha = 0,25$ olduğu zaman (4.10) zaman-kesirli diferansiyel denkleminin nümerik çözümleri

| x | t | $\alpha = 1$ | $\alpha = 0,75$ | $\alpha = 0,50$ | $\alpha = 0,25$ |
|-----|------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| -5 | 0 | -0,8620485785 | -0,8620485785 | -0,8620485785 | -0,8620485785 |
| -4 | 0,40 | -0,8534277123 | -0,8558168860 | -0,8564687042 | -0,8546363859 |
| -3 | 0,80 | -0,7844767741 | -0,7890134369 | -0,7898342091 | -0,7847435127 |
| -2 | 1,20 | -0,6599229951 | -0,6598149228 | -0,6535293708 | -0,6427018535 |
| -1 | 1,60 | -0,4879934504 | -0,4760492940 | -0,4565669149 | -0,4323139318 |
| 0 | 2 | -0,2794688417 | -0,2513666891 | -0,2159637577 | -0,1769623794 |
| 1 | 1,60 | 0,0609625650 | 0,0688985637 | 0,0870800394 | 0,1139292013 |
| 2 | 1,20 | 0,3911320027 | 0,3835644911 | 0,3840670300 | 0,3943975813 |
| 3 | 0,80 | 0,6604222918 | 0,6473712956 | 0,6366088947 | 0,6317396198 |
| 4 | 0,40 | 0,8263048348 | 0,8188317109 | 0,8086651269 | 0,7969183386 |
| 5 | 0 | 0,8620485785 | 0,8620485785 | 0,8620485785 | 0,8620485785 |

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan matematiksel modellemelerin büyük bir kısmı non-linear problemlerden oluşmaktadır. Lineer olmayan problemlerin analitik çözümünü bulmak oldukça zordur. Bunun için belirli sayısal yöntemler bulunmuş ve geliştirilmiştir. Böylece günümüzde sayısal yöntemlerin önemi oldukça artmıştır. Bu sayısal yöntemlerin hızlı sonuç vermesi, işlem yükü az olması ve zamandan tasarruf sağlaması önemlidir. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu, diferansiyel dönüşüm metodunun modifiye edilmiş halidir.

Bu çalışma da indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu, zaman-kesirli Murray ve $K(3,3)$ denklemlerine uygulanmıştır. Başlangıç şartından yararlanılarak problem için seri çözüm elde edilmiş, bu çözümler tablo ve grafiklerle karşılaştırılmış, sonuç olarak lineer olmayan denklemlerin çözümünde bu metodun oldukça kullanışlı olduğu görülmüştür. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu klasik veya genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metoduna göre çözüme hızlı yakınsamaktadır ayrıca yoğun işlem yükünü de ortadan kaldırmaktadır. Denklemlerin nümerik çözümleri şekil ve çizelgeler üzerinde kıyaslanmış ve sonuçlardan $\alpha = 1$ için elde edilen nümerik çözümler, analitik çözümlerle mukayese edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Adomian G., 1994. Solving Frontier Problems of physics: The Decomposition Method, Kluwer, Dordrecht.
- Al-amr M. O., 2014. New Application of Reduced Differential Transform Method, Alexandria Engineering Journal 53, 243-247.
- Arikoğlu A., Ozkol I., 2007. Solution of Fractional Differential Equations by Using Differential Transform Method, Chaos, Solitons and Fractals 34, 1473-1481.
- Arkenf, G.B., Weber, H.J., 1995. Mathematical Methods for Physicist, Fourth Edition, Academic Press.
- Ateş, İ., 2017. Homotopy-Based Methods for Fractional Differential Equations. PhD. Thesis, Utrecht University, 99, Nederland.
- Ayaz, F., 2003. On The Two-Dimensional Differential Transform Method. Appl. Math. Comput., 143, 361-374.
- Ayaz, F., 2004. Applications of Differential Transform Method to Differential-Algebraic Equations. Appl. Math. Comput., 152, 649-657.
- Beleanu, D., Diethelm. K., Scias, E., Trujillo, J.J., 2012. Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. Series on Complexity , Nonlinearity and Chaos.
- Benghorbal, M. M., 2004. Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and Integrals. PhD. Thesis, Faculty of Graduate Studies, The University of Western Ontario, Canada.
- Bhrawy, A.H., Doha, E.H., Abdelkawy, M.A., Van Gorder, R.A., 2016. Jacobi-Gauss-Lobatto Collocation Method for Solving Nonlinear Reaction-Diffusion Equations Subject to Dirichlet Boundary Conditions. Applied Mathematical Modelling, 40, 1703-1716.
- Biazar, J., Eslami, M., 2011. Differential Transform Method for Nonlinear Fractional Gas Dynamics Equation. International Journal of The Physical Sciences, 6(5), 1203-1036.
- Bullock, G.L., 1988. Geometric Interpretation of Riemann-Stieltjes Integral. American Mathematical Monthly, 95(5), 448-455.
- Caputo, M., 1967. Linear Models of Dissipation Whose Q is Almost Frequency Independent. Part II, Geophysical Journal of The Royal Astronomical Society, 13, 529-539.
- Chechkin A., Metzler, R., Klafter, J., and Gonchar, V.Y., 2008. Introduction to the Theory of Levy Flights. Research Gate.

- Chen, C.K., Ho, S.H., 1996. Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems. *Applied Mathematics and Computation*, 79, 179-188.
- Chen, C.K., Ho, S.H., 1999. Solving Partial differential equations by two dimensional differential transform Method. *Applied Mathematics and Computation*, 106, 171-179.
- Cherniha, R., Davydovych, V., 2017. *Nonlinear Reaction-Diffusion Systems Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology*. Springer International Publishing AG.
- Das S., Kumar R., 2011. Approximate analytical solutions of fractional gas dynamic equations. *Applied Mathematics and Computation*. 217, 9905-9915.
- Demirci, E., 2011. Kesirli Basamaktan Bir Diferansiyel Denklem Üzerine. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 33, Ankara.
- Del Castillo-Negrete D., Carreras, B.A., Lynch, V.E., 2003. Front Dynamics in Reaction–Diffusion Systems with Levy Flights: A Fractional Diffusion Approach. *Physical Review Letters* 91(1).
- Edeki, S.O., Akinlabi, G.O., Nyamoradi, N., 2018. Local Fractional Operator for Analytical Solutions of The $K(2,2)$ –Focusing Branch Equations of Time-Fractional Order. *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 4:66.
- Figueiredo, G.M., and Siciliano, 2017. Positive Solutions for The Fractional Laplacian in The almost Critical Case in A Bounded Domain. *Nonlinear Analysis,: Real World applications* 36, 89-100.
- Flores, E. and Osler, T.J., 1997. The Tautochrone Under Arbitrary Potentials Using Fractional Derivatives. *Amerikan Journal of Physics* 67, 718-722.
- He J.H., 1999. Variational Iteration Method-a Kind of Non-Linear Analytical Tecnique: Some Examples, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 34(4), 699-708.
- Hilfer, R., 2000. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore.
- Hoefling, F., and Franosch, T., 2013. Anomalous Transport in The Crowded World of Biological Cells. *Reports on Progress in Physics* 76(4).
- Jang, M.J., Chen, C.L., 1997. Analiysis of The Response of a Strongly Nonlinear Damped System Using a Differential Transform Method. *Applied Mathematics and Computation*, 88, 137-151.
- Keskin, Y., Oturanç, G., 2008. The Differential Transform Methods for Nonlinear Functions and Its Applications. *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 9(1), 69-76.

- Keskin, Y., Oturanç, G., 2009. Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations,. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 10(6), 741-749.
- Keskin, Y., 2010. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Çözülmesi. Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 73, Konya.
- Kılıbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier B.V., Amsterdam.
- Kurnaz, A., Oturanç, G., 2005. The Differential Transform Approximation for The System of Ordinary Differential Equation. International Journal of Computer Mathematics, 82, 709-719.
- Li, X., 2003. Fractional Calculus, Fractal Geometry and Stochastic Processes. PhD. Thesis, The University of Western Ontario, Canada.
- Miller, K.S., Ross, B., 1993. An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley-Interscience Publication. New York, Toronto, Singapore.
- Mohamed M. S., Gepreel K. A., 2017. Reduced Differential Transform Method for Nonlinear İntegral Member of Kadomtsev-Petviashvili Hierarchy Differential Equations, Journal of the Egyptian Mathematical Society 25, 1-7.
- Murray J.D., 1977. Nonlinear Differential Equation Models in Biology, Clarendon Press, Oxford.
- Murray J.D., 1989. Mathematical Biology, Springer, Berlin.
- Musina R., Nazarov, A.I., 2016. On Fractional Laplacians-2. Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis 33(6), pp.1667-1673.
- Musina, R., Nazarov, A.I., 2014. On fractional Laplacians Communications in Partial Differential Equations 39(9), 1780-1790.
- Odibat, Z., Momani, S., 2008a. A Generalized Differential Transform Method for Linear Partial Differential Equations of Fractional Order. Applied Mathematics Letters, 21, 194-199.
- Odibat, Z., Momani, S., Ertürk, Y.S., 2008. Generalized Differential Transform Method: Application to Differential Equations of Fractional Order. Applied Mathematics and Computation, 197, 467-477.
- Oldham, K.B., Jeromo S., Trujillo, J.J., 1974. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and İntegration to Arbitrary Order. Academic Press, California.
- Oldham, K.B., Spanier, J., 1974. The Fractional Calculus. Academic Pres. New York.

- Podlubny, I., 1974. Fractional Differential Equations. Academic Pres. New York.
- Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, California.
- Podlubny, I., 2002. Geometric And Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation. Fractional Calculus and Applied Analysis, 5(4), 367-386.
- Riascos, A.P., and Mateos, J.L., 2014. Fractional Dynamics on Networks: Emergence of Anomalous Diffusion and Levy Flights. Physics 76(4).
- Rosenau P., Hyman J.M., 1993. Compactons: Solitons with Finite Wavelength. Physical Review Letters, Volume 70, Number 5.
- Ross, B., 1977. The Development of Fractional Calculus 1695-1900. Historia Mathematica 4(1), 75-89.
- Ross, B., 1974. Fractional Calculus and Its Applications. Lecture Notes in Mathematics 457. Springer-Verlag, New York-Berlin.
- Saravanan A., Magesh N., 2013. A comparison between the reduced differential transform method and the Adomian decomposition method for the Newell-Whitehead-Segel equation, Journal of the Egyptian Mathematical Society 21, 259-265.
- Sökmen, Y., 2012. Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi ve Uygulamaları . Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 64, Kırşehir.
- Taghizadeh N., Moosavi Noori S.R., 2017. Reduced Differential Transform Method for Solving Parabolic-Like and Hyperbolic-Like Equations, Sema, 74, 559-567.
- Wazwaz A.M., 2000. New Solitary-Wave Special Solutions with Compact Support for the Nonlinear Dispersive $K(m, n)$ Equations, Chaos, Solitons and Fractals 13, 321-330.
- Yang, X.-S., 2010. Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms. Luniver Press, United Kingdom.
- Zaidan, L.I., Darvishi, M.T., 2017. Traveling wave Solutions for Time-fractional $K(m, n)$ Equation. Optik, 142, 564-575.
- Zhou, J.K., 1986. Differential Transform and Its Applications for Electrical Circuits. Huarjung University Press, Wuhan, China.
- Zoia, A., Rosso, A., and Kardar, M., 2007, Fractional Laplacian in Bounded Domains. Physical Review E 76(2).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Serkan OKUR
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 13.08.1993
Medeni Hali : Bekar
Telefon : +905469143993
e-mail : srknokur07@gmail.com

Eğitim

| Derece | Üniversite | Mezuniyet Yılı |
|---------------|-----------------------------|-----------------------|
| Yüksek Lisans | Erzurum Teknik Üniversitesi | 2019 |
| Lisans | Atatürk Üniversitesi | 2017 |
| Lise | Demra Anadolu Lisesi | 2011 |

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Yayınlar (SCI, SCI-Expanded) (Yayın yılları dikkate alınmalıdır)*

Hakemli Dergiler (Yayın yılları dikkate alınmalıdır)

Ulusal Kongre Sunum (Sunum tarihleri dikkate alınmalıdır)

Uluslararası Kongre Sunum (Sunum tarihleri dikkate alınmalıdır)

*Tezle ilgili varsa yayın eklenerek belirtilmelidir.