T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOBOLEV UZAYLARI VE GÖMÜLME TEOREMLERİ

Zehra YÜCEDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR
Haziran 2006

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Zehra YÜCEDAĞ tarafından yapılan "SOBOLEV UZAYLARI VE GÖMÜLME TEOREMLERİ" konulu bu çalışma , jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

		Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan	:	Prof.Dr.	Sezai OĞRAŞ
Üye	:	Prof.Dr.	Ali YILMAZ
Üye	:	Doç.Dr.	Rabil MAŞİYEV (Danışman)

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 16/06/2006

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

10.07.2006

Prof. Dr. Necmettin PİRİNÇÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanmasında her türlü bilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam,

Doç. Dr. Rabil Maşiyev'e,

Çalışmayı destekleyen,

DÜAPK'na,

Tezin yazım aşamasında hep yanımda olan, sabırla sıkıntılarımı çeken ve benden hiçbir yardımını esirgemeyen arkadaşım,

Canan LUNKAYA'ya,

Yardımları için sevgili arkadaşlarım,

Mustafa MIZRAK'a

Arş. Gör. Bahar ACAR

ve bölümdeki tüm hocalara

Sonsuz teşekkürler…

Zehra YÜCEDAĞ

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Bu çalışmada amaç; L_p ve W_p^ℓ uzaylarını incelemek ve bu uzayların daha genel durumları için integral gösterimi elde etmektir. Elde edilen integral gösterimi yardımı ile uygun uzaylarda iz düşüm teoremini ispatlamaktır.

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmada kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, L_p uzayı ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca L_p uzayı yardımıyla elde edilen bazı eşitsizlikler tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde, W_p^ℓ uzayı incelenmiştir. Ayrıca L_p ve W_p^ℓ uzayların daha genel durumu için integral gösterimleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, daha önceki bölümde elde edilen integral gösterimleri yardımıyla bu uzaylarda iz düşüm teoremi ispatlanmıştır.

ABSTRACT

This study consists of four chapters.

In the first chapter, main definitions and theorems to be used in the study are given.

In the second chapter, L_p space and its characteristics were studied. In addition, some inequalities obtained by means of L_p space were defined.

In the third chapter, W_p^ℓ space was studied. Furthermore, integral representations for a more general condition of L_p and W_p^ℓ spaces were obtained.

In the fourth chapter, the projection theorem on these spaces was proven by integral representations obtained in the previous chapter.

ÖNSÖZ

Diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayının çeşitli özellikleri ve bu uzaylar arasındaki ilişki gömülme teoremleri adı altında son zamanlarda daha da geliştirilmiştir.

Temel sonuçlar 1950 yıllarında S.L. Sobolev tarafından elde edilmiştir. Sobolev, $\Omega \subset E^n$ de tanımlı genelleştirilmiş türevleri $L_p(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty)$ uzayının elamanları olan çok değişkenli fonksiyonlar için W_p^ℓ uzayını kurmuş ve Sobolev uzayları olarak adlandırmıştır.

Sobolev; fonksiyon integrallerini, potansiyel tipli integrallerin toplamı ile integral gösterimlerini elde etmiştir. Bu integral gösterimleri yardımı ile gömülme teoremleri elde edilmiştir. Elde edilen gömülme teoremleri kısmi diferansiyel denklemler teorisine uygulanmıştır.

Bu alanda yapılan önemli bir gelişme S. M. Nikolski's tarafından yapılmıştır. Nikolski's, $L_p(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty)$ normu altında Hölder özelliğine sahip $H_p^\ell(\Omega)$ fonksiyonlar uzayını korumuş ve gömülme teoremlerini oluşturmuştur. Diğer önemli bir gelişme de Ağırlık fonksiyonlar uzayının kurulmasıdır. Bu uzayın yardımı ile, Ağırlık fonksiyonlarının sınırda dejenere olan Kısmi Diferansiyel denklemlere uygulaması L. D. Kudryavtsev tarafından yapılmıştır. Daha sonra O. V. Besov ve S. M. Nikol'skii bu metodu geliştirerek genelleştirilmiş Hölder özelliğine sahip $B^e_{p,\theta}(\Omega)$ uzayını kurmuşlardır.

V.P.Il'in integral gösterimleri teorisini geliştirerek köklü gelişmeler elde etmiş ve daha genel $W^\ell_{\bar{p}}(\Omega)$, $B^{\bar{e}}_{\bar{p},\bar{\theta}}(\Omega)$ uzaylarında gömülme ve iz teoremlerini ispatlamıştır.

Daha sonra S.M. Nikol'skii ve N.S. Baxvalov tarafından, etken karmaşık türevli olan yani; karmaşık türevlerin mertebesi karmaşık olmayan türevlerin mertebesinden yüksek olan çok değişkenli fonksiyonlar uzayı kurulmuştur. Bunlar $S_p^\ell W(\Omega)$ ve $S_p^\ell H(\Omega)$, $\ell = (\ell_1,...,\ell_n) \geq 0$ için uzaylarıdır.

Sonraki aşamada A.D. Dzabrayilov türev mertebesi $n+1$ ve 2^n serbest vektörlerden oluşan

$$\bigcap_{k=0}^{n} L_{p_k}^{<\ell^{\bar{k}}>}(\Omega) \quad \text{ve} \quad \bigcap_{k=0}^{2^n} L_{p_k}^{<\ell^{\bar{k}}>}(\Omega)$$

uzayları kurmuş ve incelemiştir. Bu uzaylar, $B_{\ell,\theta}^{\ell}(\Omega)$, $W_p^{\ell}(\Omega)$, $S_{p,\theta}^{\ell}B(\Omega)$ ve $S_p^{\ell}W(\Omega)$ uzaylarının genelleştirilmesidir.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Temel Tanım ve Teoremler:

Tanım 1.1.1.

X boş olmayan bir küme ve K, reel veya karmaşık sayıların bir cismi olsun.

$$+ : XxX \to X$$
$$(x, y) \to x + y$$
$$. : KxX \to X$$
$$(\alpha, x) \to \alpha x$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay adı verilir.

Her $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için;

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $\forall x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ vardır.

4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ olmalıdır.

5) $\forall x \in X$ için $1.x = x$

6) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

7) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

8) $(\alpha\beta) x = \alpha (\beta x)$

Tanım 1.1.2.

X bir lineer uzay ve Y, X 'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\forall x, y \in Y$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için $\alpha x + \beta y \in Y$ ise, Y 'ye X 'in bir lineer alt uzayı denir (22).

Tanım 1.1.3.

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : X \to Y$ operatörü,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \ ; \quad (\alpha, \beta \in K \ \text{ve} \ x, y \in X)$$

koşulunu sağlıyorsa T 'ye lineer operatör denir.

Tanım 1.1.4.

Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$\begin{aligned} d: \ & XxX \to R_+ \\ & (x, y) \to d(x, y) \end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Bu d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için ;

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde metrik adını alır. Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir (22)

Tanım 1.1.5.

X boş olmayan herhangi bir küme olsun. X 'in alt kümelerinin bir ailesi τ verilsin. Eğer τ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa τ 'ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay adı verilir (19).

1) $\varnothing \ , X \in \tau$

2) τ ’daki sonlu sayıdaki kümelerin ara kesiti yine τ ’dadır.

3) τ ’daki herhangi bir sayıdaki (sayılabilir veya değil) kümelerin birleşimi τ ’dadır.

Kompakt küme: (X,τ)topolojik uzayı ile $A \subset X$ verilsin. Eğer A ’nın her açık örtüsü sonlu bir örtüye indirgenebiliyorsa A ya kompakt küme denir.

Tanım 1.1.6.

X bir K cismi üzerinde bir vektör uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \to R_+$$
$$x \to \|x\|$$

fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\,\|x\|$

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu vektör uzayı adı verilir(11).

Tanım 1.1.7.

$(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve bunun içinde bir (x_n) dizisi olsun. Her $\varepsilon > o$ için, $m, n \ge n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε ’a bağlı bir n_ε doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. Yani;

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in N \ni \forall\, m, n > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon \Leftrightarrow (x_n)$ dizisi bir Cauchy dizisidir (22).

Tanım 1.1.8.

Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa bu $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayına Tam Normlu Uzay veya Banach Uzayı adı verilir (22).

Tanım 1.1.9.

Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A'nın kapanışı X'e eşit $\left(\overline{A} = X\right)$ ise A kümesi X'de yoğundur denir.

Tanım 1.1.10.

$(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayına sayılabilir normlu uzay adı verilir.

Tanım 1.1.11.

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ve $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ katlı-indeks ise $\alpha-\beta$'da katlı indekstir. $\alpha! = \alpha_1!.\alpha_2!\ldots\alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ ve $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ şeklinde tanımlayalım. Aynı zamanda

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}; 1 \le j \le n$$

$$D = (D_1,\ldots,D_n)$$

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$\beta \le \alpha \text{ için } \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_1}\ldots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

$$D^{\alpha}(f\,g)(x)=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\; D^{\beta}f(x)\,D^{\alpha-\beta}\,g(x) \text{ (Leibniz formülü)}$$

olur. α ve β ’nın iç çarpımı;

$$\alpha\,\beta=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\beta_j \qquad (1)$$

Tanım 1.1.12.

$G\subset R^n$ iken R^n ’deki G ’in kapanışı $\overline{G}$ ile gösterilir. u, G ’de tanımlanan bir fonksiyon ise u fonksiyonunun support (desteği) ,

$$\text{supp}\,u=\overline{\{x\in G: u(x)\neq 0\}}$$

şeklindedir. G ’nin R^n ’deki sınırı bdry$G$ ile gösterilir. Yani, bdry$G=\overline{G}\bigcap\overline{G^c}$ şeklinde yazılır. Burada;

$$G^c=R^n\setminus G=\{x\in R^n : x\notin G\}$$

dır.

$x\in R^n$ ve $G\subset R^n$ ise x ’in G ’ye olan uzaklığını, $\text{dist}(x,G)=\inf\limits_{y\in G}|x-y|$ ile gösterilirse benzer şekilde,

$$F,G\in R^n \text{ ise } \text{dist}(F,G)=\inf_{y\in F}\text{dist}(y,G)=\inf_{\substack{x\in G\\ y\in F}}|x-y|$$

yazılır (1).

Tanım 1.1.13.

Boş olmayan $X\subset R$ kümesi, $f:X\to R$ fonksiyonu ve $\alpha\in X$ noktası verilmiş olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall x\in X$ için $|x-\alpha|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa, f fonksiyonu X kümesine göre $\alpha\in X$ noktasında süreklidir denir(5(a))

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde, (a, b) aralıkların kapsadığı $[a_i, b_i)$ ayrık aralıkları için $\sum_{i=1}^{n}(a_i, b_i) < \delta$ iken $\sum_{i=1}^{n} | f(b_i) - f(a_i) | < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir.

Tanım 1.1.14.

$f : [a, b] \rightarrow R \quad (-\infty < a < b < \infty)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Herhangi $t_1, t_2 \in [a, b]$ için;

$$| f(t_1) - f(t_2) | \leq A |t_1 - t_2|^{\alpha}$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ sayıları varsa f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Hölder koşulunu sağlar. A ve α sayıları sırasıyla Hölder katsayısı ve Hölder üstü olarak adlandırılır. $\alpha = 1$ ise

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L |t_1 - t_2|$$

koşuluna Lipşizh koşulu denir (22).

Tanım 1.1.15.

X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{A}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\mathcal{A}$ ailesine X üzerinde bir Σ-cebir denir.

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) Her bir $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$

iii) Her bir $n \in N$ için $E_n \in \mathcal{A}$ iken $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$

Tanım 1.1.16.

X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir $\Sigma -$ cebiri olursa $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay adı verilir(11).

Tanım 1.1.17.

$(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir bir uzay ve $f : X \to R$ tanımlanan bir fonksiyon olsun.Her $\alpha > 0$ için $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ oluyorsa f fonksiyonu ölçülebilirdir(11).

Teorem 1.1.18.

a) f ölçülebilir ise $|f|$ 'de ölçülebilirdir.

b) f ve g ölçülebilir ve reel değerli ise $f + g$ ve $f.g$ 'de ölçülebilir ve reel değerlidir.

c) $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\lim_{n\to\infty} \sup f_n$ ve $\lim_{n\to\infty} \inf f_n$ ifadeleri de ölçülebilirdir.

d) f sürekli ve ölçülebilir bir kümede tanımlı ise o zaman f ölçülebilirdir.

e) f, R 'den R 'ye sürekli bir fonksiyon ve g ölçülebilir ve reel değerli fonksiyon ise $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ile tanımlanan "$f \circ g$" bileşke fonksiyonu da ölçülebilirdir.

f) (Lusin's teoremi): f ölçülebilir ve $x \in A^c$ için $f(x) = 0$ ise $(\mu(A) < \infty$ ve $\varepsilon > 0)$ $g \in C_o(A)$ fonksiyonu oluşur ve

$$\sup_{x\in R^n} |g(x)| \leq \sup_{x\in R^n} |f(x)| \quad \text{ve} \quad \mu\{x \in R^n : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$$

koşulunu sağlar (1).

Basit Fonksiyon: R^n, üzerinde "s" reel değerli fonksiyonun değer kümesi sonlu bir reel sayı ise bu fonksiyona basit fonksiyon denir.

Teorem 1.1.19.

$A \subset R^n$, reel değerli bir fonksiyonun olmak üzere A üzerinde f fonksiyonunun yakınsallık noktasına yakınsayan bir basit fonksiyonlar dizisi $\{ s_n \}$

vardır. f sınırlı ise $\{s_n\}$ dizisi düzgün yakınsak, f ölçülebilir ise her $\{s_n\}$ dizisi ölçülebilir olarak seçilebilir. f negatif olmayan reel değerli ise $\{s_n\}$ dizisi her noktada monoton olarak artan olarak alınabilir (1).

Tanım 1.1.20.

G ’da tanımlı bir f fonksiyonunun karakteristik fonksiyonu;

$$X_G(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x \in G \\ 0 & ; \ x \notin G \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.21.

E^n ’de tanımlanmış, sonsuz diferansiyellenebilen ve sınırda sıfır olan fonksiyonlara finit fonksiyonu denir. Finit fonksiyonlar uzayı C_o^∞ ile gösterilir.

Örnek 1.1.22.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-\alpha^2}{\alpha^2 - r^2}} & ; r < \alpha \\ 0 & ; r \geq \alpha \end{cases} \qquad ; r = |x| = \sqrt{|x_i|^2}$$

şeklinde tanımlanan şapka fonksiyonu finit fonksiyonuna örnek olarak verilebilir.

Tanım 1.1.23

$f(x)$ fonksiyonu herhangi bir bölgenin sınırlı alt bölgelerinde mutlak olarak integrallenebilirse, $f(x)$ fonksiyonu local integrallenebilirdir. $f(x) \in L^{loc}(G)$ şeklinde gösterilir. $\left(G \subseteq E^n\right)$

Tanım 1.1.24.

f ve g iki fonksiyon olsun. Bu fonksiyonların konvolüsyonu,

$$h=(f*g)=\int_{E^n} g(x-y)f(y)dy=\int_{E^n} f(x+y)g(y)dy$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.1.25.

$f, I=[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve g, I üzerinde integrallenebilen negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\int_a^b f(t)\ g(t)dt=f(c)\ \int_a^b g(t)\ dt$$

olacak şekilde bir $c\in I$ sayısı vardır. Özel durumda $g(t)=1$ ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=f(c)$$

dır.

Teorem 1.1.26.

$X\subset R^n$ ölçülebilir bir uzay ve $\{f_n\}$'de negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx \le \liminf_{n\to\infty}\int_x f_n(x)dx$$

dır.

Teorem 1.1.27.

$\psi_i(v)(i=1,2,...,n)$, $\lim_{v\to 0}\psi_i(v)=0$ olan $v>0$ için tanımlanan pozitif azalmayan fonksiyonu göstersin. Burada I_v,

$$I_v = \{x : a_i \le x_i \le b_i, b_i - a_i = \psi_i(v), (i = 1,2,...,n)\}$$

şeklinde tanımlayalım. $f(x) \in L^{loc}(G)$ ve bir x noktası her $v > 0$ için I_v 'ye ait ise

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{|I_v|} \int_{I_v} |\, f(y) - f(x) \,| \, dy = 0$$

ve hemen hemen her $x \in G$ için

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{|I_v|} \int_{I_v} f(y) \, dy = f(x)$$

olur (8).

2. BÖLÜM

L^p UZAYI

2.1. L^p Uzayı ve Özellikleri

Bu bölümde, E^n $n-$boyutlu Euclidean uzayı ve bunun sınırlı olmayan ölçülebilir bir G alt uzayı üzerinde işlemler yapılacaktır. G 'de tanımlanan reel $f(x)$ fonksiyonlarının yardımıyla $L_p(G)$ uzayı tanımlanacak ve bu uzayın özellikleri incelenecektir. Bu uzayın yardımıyla çeşitli eşitsizlikler ve dağılım fonksiyonu tanımlanacaktır.

Tanım 2.1.1. L_p Uzayı

$$L_p(G)=\left\{f:\ f \text{ ölçülebilir fonksiyon}, \int_G |\, f\,(x)\,|^p\, dx<\infty\,, 1\le p<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye $L_p(G)$ uzayı denir. Bu uzay altında tanımlanan norm;

$$\|f\|_{L_p(G)}=\|f\|_{p,G}=\left(\int_G |\, f(x)\,|^p\, dx\right)^{1/p} \tag{2.1.1}$$

ve $f\in L_p(G)$şeklinde yazılır (8).

$p=\infty$ olduğunda $L_\infty(G)$uzayı elde edilir. Bu uzayın elemanları ölçülebilir ve özellikle sınırlı fonksiyonlardan oluşur. Bu uzay altında tanımlanan norm;

$$\|f\|_{L_\infty(G)}=\|f\|_{\infty,G}=\operatorname*{esssup}_{x\in G}|\, f(x)\,| \tag{2.1.2}$$

$$=\inf\{c>0:|f(x)|\le c\}$$

şeklindedir.

G uzayı sınırlı ise bu norm;

$$\|f\|_{\infty,G} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{p,G} \qquad (2.1.3)$$

dır.

$L_\infty(G)$ uzayının önemli bir alt uzayı $C(G)$uzayıdır. Bu uzayın elemanları G üzerinde tanımlanan düzgün sürekli fonksiyonlardan oluşur. Bu uzayda tanımlanan norm;

$$\| f \|_{C(G)} = \sup_{x\in G} | f(x) | \qquad (2.1.4)$$

dır.

$i = 1,2,...,n$ için $p = (p_1, p_2,..., p_n), 1 \le p_i \le \infty$, şeklinde bir vektör de alınabilir. Bu durumda E^nde tanımlanan ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonlar uzayını $L_p(E^n)$ ile gösterirsek bu uzay altında tanımlanan norm;

$$\|f\|_{p,E^n} = \|f\|_{(p_1,p_2,...,p_n),E^n} = \left\| ... \left\| \|f\|_{p_1,x_1} \right\|_{p_2,x_2} ... \right\|_{p_n,x_n}$$

$$= \left\{ \int_{E^1} \left[... \left\{ \int_{E^1} \left(\int_{E^1} |f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right\}^{p_3/p_2} ... \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right\}^{1/p_n} \qquad (2.1.5)$$

dır. $(2.1.5)$ ifadesi tanımlanan norm altında sonludur. $f(x_1, x_2)$iki değişkenli fonksiyon için değişkenlerin sırası önemlidir. Yani;

$$\left[\int_{E^1} dx_2 \left(\int_{E^1} | f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \right]^{1/p_2} \neq \left[\int_{E^1} dx_1 \left(\int_{E^1} | f(x_1, x_2)|^{p_2} dx_2 \right)^{p_1/p_2} \right]^{1/p_1}$$

olur.

Teorem 2.1.2.

$1 \le p \le p' \le \infty$ ve $\operatorname{mes} G = \int_G dx < \infty$ olmak üzere $f \in L_{p'}(G)$ için $f \in L_p(G)$

ve

$$\|f\|_p \le (\operatorname{mes} G)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)} \|f\|_{p'} \tag{2.1.6}$$

olduğundan $L_{p'}(G) \hookrightarrow L_p(G)$ olur. Yani; p', p 'ye gömülmüştür (1)

İspat:

$$\left(\int_G |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \le (\operatorname{mes} G)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)} \left(\int_G |f(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'}$$

olduğu ispatlanacaktır.

Bu ispat için, temel integral eşitsizliklerinde ispatı verilecek olan Hölder eşitsizliğinden yararlanılacaktır. Hölder eşitsizliği,

p ve p', $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere $f_1(x) \in L_p(E^n)$ ve $f_2(x) \in L_{p'}(E^n)$ ise $f_1(x)\, f_2(x) \in L_1(E^n)$ olur. O halde;

$$\int_{E^n} |f_1(x) f_2(x)|\, dx \le \left(\int_{E^n} |f_1(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_{E^n} |f_2(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\int_G |f(x)|^p dx = \left(\int_G |f(x)|^p .1 dx\right) \le \left(\int_G |f(x)|^{p.\frac{p'}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p'}} \left(\int_G 1^{\frac{p'}{p'-p}} dx\right)^{1-\frac{p}{p'}}$$

$$=\left(\int_G |f(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{p}{p'}} (\mathrm{mesG})^{1-\frac{p}{p'}}$$

eşitsizliğin her iki tarafının $\frac{1}{p}$ kuvveti alınırsa,

$$\left(\int_G | f(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_G | f(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'} (\mathrm{mesG})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}$$

elde edilir.

Örnek 2.1.3.

$L_3(G) \hookrightarrow L_2(G)$ ise $\|f\|_{L_2} \le (\mathrm{mesG})^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)} \|f\|_{L_3}$ olduğu gösterilecektir.

İspat:

$$\int_G | f(x)|^2 dx = \left(\int_G | f(x)|^2 .1 dx\right) \le \left(\int_G |f(x)|^{2.\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_G 1^{\frac{3}{3-2}} dx\right)^{1-\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\int_G | f(x)|^3 dx\right)^{\frac{2}{3}} (\mathrm{mesG})^{1-\frac{2}{3}}$$

olduğundan,

$$\int_G | f(x)|^2 dx \le \left(\int_G | f(x)|^3 dx\right)^{\frac{2}{3}} (\mathrm{mesG})^{\frac{1}{3}}$$

olur. O halde,

$$\left(\int_G | f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_G | f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} (\mathrm{mesG})^{\frac{1}{6}}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.4.

$1 \le p \le \infty$ için $L_p(G)$ uzayı Banach uzayıdır (1).

İspat:

i) $1 \le p < \infty$ için ispatı yapılrsa;

$\{u_n\}$, $L_p(G)$ uzayında bir Cauchy dizisi olmak üzere

$$\left\| u_{n_{j+1}} - u_{n_j} \right\|_p \le \frac{1}{2^j}, \ j = 1,2,....$$

olacak şekilde $\{u_n\}$'nin bir u_{n_j} alt dizisi vardır. Bu durumda;

$$v_m(x) = \sum_{j=1}^{m} \left| u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x) \right|$$

şeklinde tanımlanır. O halde

$$\| v_m(x) \|_p \le \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2^j} \right) < 1, \qquad m = 1,2,...$$

olur. Bazı sonsuz x değerleri için $v(x) = \lim_{m\to\infty} v_m(x)$ alındığında Teorem 1.1.26. yardımıyla,

$$\int_G | v(x) |^p dx \le \lim_{m\to\infty} \inf \int_G | v_m(x) |^p \, dx \le 1$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda, G'nin içinde hemen hemen her yerde $v(x) < \infty$ olur ve

$$u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x) \right) \qquad (2.1.7)$$

serisi G'de hemen hemen her yerde bir $u(x)$ limitine yakınsar. Ayrıca $u(x) = 0$ alındığında (2.1.7) ifadesinin limiti tanımlanamaz. $(2.1.7)$ ifadesi yakınsak olduğundan G'de hemen hemen her yerde

$$\lim_{m\to\infty} u_{n_m}(x) = u(x)$$

olur.

Diğer taraftan $\{u_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için en az bir $m, n > N$ için $\|u_m - u_n\|_p < \varepsilon$ olacak şekilde N pozitif sayısı vardır. O halde teorem 1.1.26.'dan yararlanılırsa,

$$\int_G |u(x) - u_n(x)|^p dx \le \int_G \lim_{j\to\infty} |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p dx$$

$$\le \liminf_{j\to\infty} \int_G |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p\, dx \le \varepsilon^p$$

$n \to \infty$ iken $u = (u - u_n) + u_n \in L_p(G)$ ve $\|u - u_n\|_p \to 0$ olur. Yani $L_p(G)$ uzayı tamdır.

ii) $p = \infty$ durumunda,

$\{u_n\}, L_\infty(G)$'da bir Cauchy dizisi ise $x \notin A$ olacak şekilde ölçümü sıfır olan $A \subset G$ kümesi vardır. $\forall m, n = 1,2,...$ için

$$|u_n(x)| \le \|u_n\|_\infty \qquad |u_n(x) - u_m(x)| \le \|u_n - u_m\|_\infty$$

olur. $\{\|u_n\|_\infty\}$, R'de sınırlı olduğu için u_n, A'nın tümleyeninde sınırlı bir $u(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. $x \in A$ için $u(x) = 0$ alınırsa, $u \in L_\infty(G)$ ve $n \to \infty$ iken $\|u_n - u\|_p \to 0$ olur. Dolayısıyla $L_\infty(G)$'da tamdır.

Sonuç 2.1.6.

$1 \le p \le \infty$ için $L_p(G)$ de bir Cauchy dizisinin G üzerinde hemen hemen her yerde yakınsak bir alt dizisi vardır.

Sonuç 2.1.7.

$L_2(G)$,

$$(u,v)=\int_G u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır. $L_2(G)$ için Hölder eşitsizliği tam olarak bilinen Shwartz eşitsizliğidir.

$$|(u,v)|\le \|u\|_2\|v\|_2$$

Teorem 2.1.8.

$1\le p<\infty$ için $C_0(G)$ uzayı $L_p(G)$'nin içinde yoğundur (1).

İspat:

$u\in L_p(G)$ ve $\varepsilon>0$ olsun. $\|u-\phi\|_p<\varepsilon$ olacak şekilde $\phi\in C_0(G)$ fonksiyonunun var olduğu ispatlanacaktır.

$u=u_1-u_2+i(u_3-u_4)$ şeklinde alınan her bir reel değerli ve negatif olmayan u_j $(1\le j\le 4)$ fonksiyonları için, $\|\phi_j-u_j\|_p<\dfrac{\varepsilon}{4}$ $(1\le j\le 4)$ olacak şekilde $\phi_j\in C_0(G)$ fonksiyonların olduğunu kabul edilirse;

$$\|u-\phi_1+\phi_2-i(\phi_3-\phi_4)\|_p<\varepsilon$$

olur. Buradaki u reel ve negatif olmayan bir fonksiyon olarak seçilir. Diğer taraftan Teorem 1.1.19'dan bir $\{s_n\}$ dizisi için $0\le s_n(x)\le u(x)$ olduğundan $\{s_n\}\in L_p(G)$ dir. $(u(x)-s_n(x))^p\le(u(x))^p$ olduğundan bölgesel yakınsaklıktan $L_p(G)$'da $s_n\to u$ dır.

$\| u - s \|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $s \in \{s_n\}$ seçebiliriz. Bu durumda s sabit ve $p < \infty$ olduğundan s'nin destekleyicisi sonlu yoğunluğa sahiptir. Ayrıca her $x \in G$ 'için $s(x) = 0$ alınabilir. Teorem 1.1.18 (f) kullanılırsa,

$\forall\, x \in G$ için $|\,\phi(x)\,| \le \| s \|_\infty$ olacak şekilde $\phi \in C_0(G)$ fonksiyonu elde edilir ve $\text{mes}\{\, x \in G : s(x) \ne \phi(x)\,\} < \left(\frac{\varepsilon}{4\, \| s \|_\infty} \right)^p$ olarak yazılır. Teorem 2.1.2'den

$$\| s - \phi \|_p \le \| s - \phi \|_\infty \left(\text{mes}\{\, x \in G : s(x) \ne \phi(x)\,\}\right)^{1/p} <$$
$$< 2 \| s \|_\infty \left(\frac{\varepsilon}{4 \| s \|_\infty} \right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılır. Sonuç olarak;

$$\|u - \phi\|_p = \|u - s + s - \phi\|_p \le \|u - s\|_p + \|s - \phi\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir.

Teorem 2.1.9.

$1 \le p \le \infty$ için $L_p(G)$ uzayı ayrılabilir bir uzaydır. (1).

İspat:

$m = 1,2,...$ için

$$\overline{G}_m = \left\{ x \in G : \text{dist}(x, \text{bdry}G) \ge \frac{1}{m} \quad \text{ve} \quad |x| \le m \right\}$$

olduğundan $\overline{G}_m$, G 'nin kompak bir alt kümesidir. P, R^n rasyonel – karmaşık katsayılara sahip olan tüm polinomlar kümesini göstersin ve $\overline{G}_m$ 'nın karakteristik fonksiyonu $\chi_{\overline{G}_m}$ için,

$$P_m = \left\{ \chi_{\overline{G}_m} f : f \in P \right\}$$

olsun. Bu durumda P_m, $C(\overline{G}_m)$ de yoğun ve $\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$ sayılabilirdir.

$u \in L^p(G)$ ve $\varepsilon > 0$ ise $\| u - \phi \|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\phi \in C_0(G)$ vardır. Ayrıca, $\frac{1}{m} \le \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\phi, \operatorname{bdry}G)$ ise $\| \phi - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}\left(\operatorname{mes}\overline{G}_m\right)^{\frac{-1}{p}}$ olacak şekilde $f \in P_m$ vardır. Sonuç olarak,

$$\| \phi - f \|_p \le \| \phi - f \|_\infty \left(\operatorname{mes}\overline{G}_m\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılır ve buradan

$$\| u - f \|_p = \| u - \phi + \phi - f \|_p \le \| u - \phi \|_p + \| \phi - f \|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$ sayılabilir kümesi $L_p(G)$'da yoğundur ve $L_p(G)$ uzayı ayrılabilirdir.

Tanım 2.1.10.

Ölçülebilir bir G kümesi üzerinde tanımlanan f fonksiyonu, $E^n \setminus G$ üzerinde sıfır değerini alan E^n ile genişletilirse, $f \in L_p(G)$, $L_p(G)$ içinde sürekli olması için, her $\varepsilon > 0$ için

$$\| f(x + y) - f \|_{p,E^n} < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı olmalıdır. Burada

$$|y| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2} < \delta$$

dır.

2.2. Temel İntegral Eşitsizlikleri:

Bu kısımda p sayısı $p \in [1,\infty]$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ alınacaktır. $p'=\infty$ iken $p=1$ ve $p'=1$ iken $p=\infty$ olur. Ayrıca n-boyutlu uzayda $p=(p_1,p_2,...,p_n)$, $p'=(p_1',p_2',...,p_n')$ ve $p_i, \in [1,\infty]$, $i=1,2,...,n$ dır. $\overline{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$, ve $\overline{q}=(q_1,q_2,...,q_n)$ vektör olarak alınırsa bu vektörlerin toplamı, $\overline{p}+\overline{q}=(p_1+q_1+p_2+q_2,...,p_n+q_n)$ ve $p \geq q\,(p>q)$ alındığından $p_i > q_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ olur.

2.2.1. Hölder's eşitsizliği

p ve p', $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ koşullarını sağlayan iki sayı olsun. $f_1(x) \in L_p(E^n)$ ve $f_2(x) \in L_{p'}(E^n)$ ise $f_1(x)\, f_2(x) \in L_1(E^n)$ olur. Yani;

$$\int_{E^n} | f_1(x) f_2(x) |\, dx \leq \left(\int_{E^n} | f_1(x) |^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_{E^n} | f_2(x) |^{p'}\, dx \right)^{1/p'} \qquad (2.2.1)$$

ya da

$$\int_{E^n} | f_1(x) f_2(x) |\, dx \leq \| f_1 \|_p \, \| f_1 \|_{p'}$$

şeklinde tanımlanır (22).

İspat:

(2.2.1) eşitsizliği $p=1$ ve $p=\infty$ durumları için açıktır. $1<p<\infty$ için ispat yapılmadan önce aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğu gösterilmelidir.

$p, p' \in R^{+} \setminus \{1\}$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $\forall u\,,\; v \in R$ için

$$\textbf{i)}\;\; p > 1 \text{ ise } |u\,v| \le \frac{|u|^{p}}{p} + \frac{|v|^{p'}}{p'} \tag{2.2.2}$$

$$\textbf{ii)}\;\; 0 < p < 1 \text{ ise } |u\,v| \ge \frac{|u|^{p}}{p} + \frac{|v|^{p'}}{p'} \tag{2.2.3}$$

dır.

İspat:

i) $u > 0$ ve $v > 0$ olduğunu varsayalım. $\alpha = \dfrac{1}{p}$ ($0 < \alpha < 1$) olmak üzere

$$\varphi(t) = t^{\alpha} - \alpha\, t \qquad ; \quad t \in (0, \infty)$$

fonksiyonunu incelendiğinde $\forall t \in (0, \infty)$ için $\varphi'(t) = \alpha\left(t^{\alpha-1} - 1\right)$ olduğundan $\varphi(t)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında maksimum değerini $t = 1$ noktasında alır. O halde $\forall t \in (0, \infty)$ için $\varphi(t) \le \varphi(1)$ olduğundan,

$$t^{\alpha} - \alpha t \le 1 - \alpha \Rightarrow t^{\alpha} - 1 \le \alpha\,(t - 1)$$

ifadesi yazılabilir. Bu eşitsizlikte $t = \dfrac{u^{p}}{v^{p'}}$ olarak alınırsa,

$$\left(\frac{u^{p}}{v^{p'}}\right)^{\frac{1}{p}} - 1 \le \frac{1}{p}\left(\frac{u^{p}}{v^{p'}} - 1\right) \Rightarrow \frac{v^{p'}\,u}{\left(v^{p'}\right)^{\frac{1}{p}}} - v^{p'} \le \frac{v^{p'}}{p}\left(\frac{u^{p}}{v^{p'}} - 1\right)$$

$$u\,v - v^{p'} \le \frac{u^{p}}{p} - \frac{v^{p'}}{p} \Rightarrow u\,v \le \frac{u^{p}}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) v^{p'} \Rightarrow |u\,v| \le \frac{|u^{p}|}{p} + \frac{|v|^{p'}}{p'}$$

elde edilir.

ii)İfadesinin ispatı da benzer şekilde yapılır. $(2.2.1)$ eşitsizliğin ispatını yapalım.

$A^p = \left(\int_{E^n} |f_1(x)|^p dx \right)$ ve $B^{p'} = \int_{E^n} |f_2(x)|^{p'} dx$ olsun. A ve B sayılarından biri sıfır ise $(2.2.1)$ eşitsizliğinin doğru olduğu açıktır. $A > 0$ ve $B > 0$ olduğu varsayıldığında ve

$$u(x) = \frac{f_1(x)}{A}, \; v(x) = \frac{f_2(x)}{B}$$

şeklinde $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları alındığında (2.2.2) eşitsizliği de kullanılarak,

$$\int_{E^n} |u(x)v(x)| \leq \int_{E^n} \frac{|u(x)|^p}{p} dx + \int_{E^n} \frac{|v(x)|^{p'}}{p'} dx = \frac{1}{p} \int_{E^n} \frac{|f_1(x)|^p}{A^p} + \frac{1}{p'} \int_{E^n} \frac{|f_2(x)|^{p'}}{B^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\int_{E^n} |u(x)v(x)| \leq 1 \Rightarrow \int_{E^n} \left| \frac{f_1(x)}{A} \frac{f_2(x)}{B} \right| \leq 1 \Rightarrow \int_{E^n} |f_1(x) f_2(x)| \leq A\,B$$

$$\int_{E^n} |f_1(x) f_2(x)| \leq \left(\int_{E^n} |f_1(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{E^n} |f_2(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'}$$

Hölder eşitsizliğinin doğruluğu ispatlanır.

2.2.2. Ters Hölder eşitsizliği:

$0 < p < 1$ için $p' = \dfrac{p}{p-1} < 0$ ve $f \in L_p(E^n)$ olmak üzere

$$0 < \int_{E^n} |g(x)|^{p'} dx < \infty$$

olsun. Bu durumda,

$$\int_{E^n} |f(x)g(x)| dx \geq \left(\int_{E^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{E^n} |g(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \qquad (2.2.4)$$

olur (1).

İspat:

$f\,g \in L_1(E^n)$ olur. Aksi takdirde (2.2.4) eşitsizliğinin sol tarafı sonsuz olur.

$\phi = |g|^{-p}$ ve $\psi = |f\,g|^p$ alırsak $\phi\,\psi = |f|^p$ olur. Eğer $q = \dfrac{1}{p} > 1$ ise $\psi \in L_q(E^n)$ ve

$$p' = -p\,q',\, q' = \frac{q}{q-1} \text{ ise } \phi \in L_{q'}(E^n)$$

olur. Aşağıdaki ifadeye Hölder eşitsizliği (2.2.1) uygulanırsa;

$$\int_{E^n} |\, f(x)\,|^p\, dx = \int_{E^n} |\, \phi(x)\psi(x)\,| dx \le \left(\int_{E^n} |\, \phi(x)\,|^{q'} dx \right)^{1/q'} \left(\int_{E^n} |\, \psi(x)\,|^{q}\, dx \right)^{1/q} = \|\psi\|_q \,\|\, \phi\,\|_{q'}$$

$$= \left(\int_{E^n} |\, f(x) g(x)\,|\, dx \right)^{p} \left(\int_{E^n} |\, g(x)\,|^{p'}\, dx \right)^{1-p}$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_{E^n} |\, f(x) g(x)\,|\, dx \ge \left(\int_{E^n} |\, f(x)\,|^{p} dx \right)^{1/p} \left(\int_{E^n} |\, g(x)\,|^{p'}\, dx \right)^{1/p'}$$

eşitsizliği ispatlanmış olur.

2.2.3. İkiden fazla fonksiyon için Hölder eşitsizliği

$i = 1,2,\ldots,m$ için $1 \le p_i \le \infty$ ve $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_m} = 1$ olmak üzere $f_i \in L_{p_i}(E^n)$ ise $f_1(x)\, \ldots\, f_m(x) \in L_1(E^n)$ olur. Bu durumda ya,

$$\int_{E^n} | f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x) | \, dx \le$$

$$\le \left(\int_{E^n} | f_1(x) |^{p_1} dx \right)^{1/p_1} \left(\int_{E^n} | f_2(x) |^{p_2} dx \right)^{1/p_2} \ldots \left(\int_{E^n} | f_m(x) |^{p_m} dx \right)^{1/p_m} \quad (2.2.5)$$

ya da,

$$\left\| \prod_{i=1}^{m} f_i \right\|_1 \le \prod_{i=1}^{m} \| f_i \|_{p_i}$$

şeklinde yazılabilir.

2.2.4. Toplam için Hölder eşitsizliği

$(2.2.1)$ eşitsizliğinde, $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ sonlu değerli fonksiyonlar olarak alınırsa integral yerine toplam sembolü kullanılır. Toplam için Hölder eşitsizliği,

$$\sum_{i=1}^{N} | \alpha_i \, b_i | \le \left(\sum_{i=1}^{N} | \alpha_i |^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} | b_i |^{p'} \right)^{1/p'} \qquad (1 \le p \le \infty) \qquad (2.2.6)$$

şeklindedir. Burada N bir doğal sayıdır (22).

2.2.5. Minkowski's eşitsizliği

$1 \le p < \infty$ için $f_1(x), f_2(x) \in L_p(E^n)$ ise $f_1(x) + f_2(x) \in L_p(E^n)$ olur. O halde

$$\| f_1 + f_2 \|_p \le \| f_1 \|_p + \| f_2 \|_p \qquad (2.2.7)$$

eşitsizliği yazılabilir (8).

İspat:

$$|f_1 + f_2|^p = |f_1 + f_2|^{p-1} |f_1 + f_2| \le |f_1 + f_2|^{p-1} (|f_1| + |f_2|)$$

$$= |f_1| |f_1 + f_2|^{p-1} + |f_2| |f_1 + f_2|^{p-1}$$

$$\| f_1 + f_2 \|_p^p = \int_{E^n} | f_1(x) + f_2(x) |^p \, dx$$

$$\leq \underbrace{\int_{E^n} | f_1(x) || f_1(x) + f_2(x) |^{p-1} \, dx}_{I} + \underbrace{\int_{E^n} | f_2(x) || f_1(x) + f_2(x) |^{p-1} \, dx}_{II}$$

(I) ve (II) ifadelerine Hölder eşitsizliği (2.2.1) uygulanırsa;

$$\int_{E^n} | f_1(x) + f_2(x) |^p dx \leq \left(\int_{E^n} | f_1(x) |^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{E^n} | f_1(x) + f_2(x) |^{(p-1)p'} \, dx \right)^{1/p'}$$

$$+ \left(\int_{E^n} | f_2(x) |^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_{E^n} | f_1(x) + f_2(x) |^{(p-1)p'} \, dx \right)^{1/p'} , (p-1)p' = p$$

$$\int_{E^n} | f_1(x) + f_2(x) |^p \, dx \leq \left(\int_{E^n} | f_1(x) |^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{E^n} | f_1(x) + f_2(x) |^p \, dx \right)^{1/p'}$$

$$+ \left(\int_{E^n} | f_2(x) |^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_{E^n} | f_1(x) + f_2(x) |^p \, dx \right)^{1/p'}$$

$$= \underbrace{\left(\int_{E^n} | f_1(x) + f_2(x) |^p \, dx \right)^{1/p'}}_{III} \left[\left(\int_{E^n} | f_1(x) |^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{E^n} | f_2(x) |^p dx \right)^{1/p} \right.$$

ve eşitsizliğin her iki tarafı (III) ifadesine bölünürse,

$$\left(\int_{E^n} | f_1(x) + f_2(x) |^p \, dx \right)^{1-\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_{E^n} | f_1(x) |^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{E^n} | f_2(x) |^p dx \right)^{1/p} \qquad , \left(1 - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} \right)$$

elde edilir. O halde

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|$$

eşitsizliği ispatlanmıştır.

2.2.6. Ters Minkowski's eşitsizliği

$0 < p < 1$ için $f_1(x), f_2(x) \in L_p(E^n)$ olduğundan

$$\| \, |f_1| + |f_2| \, \|_p \geq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p \qquad (2.2.8)$$

olur.

İspat:

$L_p(E^n)$'de $f_1 = f_2 = 0$ olursa aşikar çözüm elde edilir. Aksi takdirde sol taraftaki ifade sıfırdan daha büyük olur. (2.2.8) ifadesine Ters Hölder eşitsizliği (2.2.4) uygulanırsa,

$$\| \, |f_1| + |f_2| \, \|_p^p = \int_{E^n} \left(| f_1(x) | + | f_2(x) | \right)^{p-1} \left(| f_1(x) | + | f_2(x) | \right) dx$$

$$\geq \left(\int_{E^n} | f_1(x) | + | f_2(x) |^{(p-1)p'} \, dx \right)^{1/p'} \left(\|f_1\|_p + \|f_2\|_p \right) \quad ; \quad \left((p-1)p' = p \right)$$

$$= \left(\int_{E^n} \left(| f_1(x) | + | f_2(x) | \right)^p \, dx \right)^{1/p'} \left(\|f_1\|_p + \|f_2\|_p \right)$$

$$= \| \, |f_1| + |f_2| \, \|_p^{\frac{p}{p'}} \left(\|f_1\|_p + \|f_2\|_p \right)$$

$$\| \, |f_1| + |f_2| \, \|_p^{p - \frac{p}{p'} = 1} \geq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

elde edilir.

2.2.7.

(2.2.7) eşitsizliğindeki p reel sayısı vektör olarak da seçilebilir. Bu durumda, $1 \leq p \leq \infty$ için $f_i \in L_p(E^n)$ $(i = 1,...,m)$ ise

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} f_i \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_p \qquad (2.2.9)$$

eşitsizliği yazılabilir.

2.2.8. Toplam için Minkowski's eşitsizliği

(2.2.7) eşitsizliğinde, $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları sonlu değerli olarak alınırsa integral yerine toplam sembolü kullanılır. Toplam için Minkowski's eşitsizliği,

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \right|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{N} |\alpha_{ij}|^p \right)^{1/p} \quad , \quad (1 \leq p \leq \infty) \qquad (2.2.10)$$

şeklindedir. m, N birer doğal sayıdır.

2.2.9. Genelleştirilmiş Minkowski's eşitsizliği

$(E_x \text{ x } E_y)$'nin üzerinde $f(x, y)$ ölçülebilir fonksiyonunu tanımlanırsa

$$\left\| \int_{Ey} f(x, y) dy \right\|_{p,E_x} \leq \int_{Ey} \| f(x, y) \|_{p,E_x} dy \quad , \quad (1 \leq p \leq \infty) \qquad (2.2.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Yani;

$$\left(\int_{E_x} \left| \int_{Ey} f(x, y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \int_{Ey} \left(\int_{E_x} | f(x, y) |^p dx \right)^{1/p} dy$$

dır. Sağ taraftaki ifade sonlu olmalıdır. Aksi taktirde eşitlik durumu geçerli olmaz.

İspat:

$p=1$ için Fubini's teoremi elde edilir.

2.2.10. Fubini Teoremi

$f(x,y)$ fonksiyonu $(E_x \text{ x } E_y)$ üzerinde tanımlı olsun.

$$\int_{Ey}\left(\int_{E_x}|f(x,y)|\,dx\right)dy<\infty \text{ ise } \int_{Ex} f(x,y)\,dx \text{ ve } \int_{Ey} f(x,y)\,dy \text{ integralleri vardır.}$$

Bu durumda,

$$\int_{E_y}\left|\int_{E_x}|f(x,y)|\,dx\right|dy=\int_{E_x}\left|\int_{E_y} f(x,y)\,dy\right|dx \qquad (2.2.12)$$

olur.

$p=\infty$ için ifadenin doğru olduğu açıktır. Bu durumda $1<p<\infty$ için ispatı yapalım.

$s(x)=\int_{Ey} f(x,y)\,dy$ ve $g(x)\in L_{p'}(E_x)$ olarak alınırsa,

$$\int_{E_x} s(x)g(x)\,dx \le \int_{E_x}|g(x)||s(x)|\,dx \le \int_{E_x}|g(x)|\left(\int_{Ey}|f(x\ y)|dy\right)dx$$

$$=\underbrace{\int_{Ey} dy\int_{E_x}|g(x)||f(x\ y)|\,dx}_{I}$$

olur. (I) ifadesine Hölder eşitsizliği uygulanırsa eşitsizliğin ispatı elde dilir.

$$\int_{E_x} s(x)g(x)\,dx \le \int_{E_y} dy\left[\underbrace{\left(\int_{E_x}|g(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'}}_{A}\left(\int_{E_x}|f(x,y)|^{p}\,dx\right)^{1/p}\right]$$

$$=\|g\|_{p'}\int_{E_y}\|f(x,y)\|_p\,dy \qquad \text{(A herhangi bir sayıdır)}$$

2.2.11.

Genelleştirilmiş Minkowski's eşitsizliğinde (2.2.11) $f(x,y)$, fonksiyonu yerine $[\,f(x,y)\,]^{\mu}$ ve $p=\dfrac{\mu}{v}$ olarak alınırsa daha genel bir ifade elde edilir.

$0<\mu\le v\le\infty$ ve $f(x,y)$ fonksiyonu $(E_x \text{ x } E_y)$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ise,

$$\left[\int_{E_x}\left(\int_{E_y}|\,f(x,y)|^{\mu}\,dy\right)^{\frac{v}{\mu}}dx\right]^{1/v}\le\left[\int_{E_y}\left(\int_{E_x}|\,f(x,y)|^{v}\,dx\right)^{\frac{\mu}{v}}dy\right]^{1/\mu}$$

$$\le\left[\int_{E_y}\left(\int_{E_x}|\,f(x,y)|^{v}\,dx\right)^{\frac{1}{v}.\mu}dy\right]^{1/\mu}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin norm altında yazılımı

$$\left[\int_{E_x}\left(\|\,f(x,y)\|^{v}_{\mu,E_y}\right)dx\right]^{1/v}\le\left[\int_{E_y}\left(\|\,f(x,y)\|^{\mu}_{v,E_x}\right)\right]^{1/\mu}$$

$$\Big\|\,\|\,f(x,y)\|_{\mu,E_y}\Big\|_{v,E_x}\le\Big\|\,\|\,f(x,y)\|_{v,E_x}\Big\|_{\mu,E_y} \tag{2.2.13}$$

$$\|\,f(x,y)\|_{(\mu,v)(E_y,E_x)}\le\|\,f(x,y)\|_{(v,\mu)(E_x,E_y)}$$

şeklindedir.

2.2.12.

Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğinde (2.2.11), p reel sayısı vektör olarak alınırsa;

$$\left\|\int_{E_y} f(x,y)\,dy\right\|_{p,E_x}\le\int_{E_y}\|\,f(x,y)\|_{p,E_x}\,dy \tag{2.2.14}$$

eşitsizliği yazılır. m = n için

$$\left\| \int_{E_y} f(.,y)dy \right\|_{p,E_x} \le \left\| \int_{E^1_{y_n}} dy_n \ldots \left\| \int_{E^1_{y_2}} dy_2 \left\| \int_{E^1_{y_1}} f(.,y)\, dy_1 \right\|_{p_1,E^1_{x_1}} \right\|_{p_2,E^1_{x_2}} \ldots \right\|_{p_n,E^1_{x_n}} \qquad (2.2.15)$$

dır.

2.2.13. Young eşitsizliği

$p,q,r \in R$, $1 \le p \le q \le \infty$, $1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ için E^1 üzerinde tanımlı tek değişkenli $f(x)$ ve $K(x)$ fonksiyonları, $f \in L_p(E^1)$ ve $K \in L_r(E^1)$ olmak üzere

$$I(x) = (f * K)(x) = \int_{E^1} f(y) K(x-y)\, dy$$

şeklinde $I(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. O halde

$$\|I\|_q \le \|K\|_r \|f\|_p \qquad (2.2.16)$$

olur (8).

İspat:

a) $q = \infty$ durumunda $r = p'$ alındığında (2.2.16) eşitsizliği Hölder eşitsizliğinin bir sonucudur. Bu durumda ispat $q < \infty$ için yapılır.

b) $q < \infty$ iken p, q ve r sayıları arasındaki ilişki 3 farklı şekilde incelenebilir.

i) $1 < p < q$, $r < q$ **ii)** $1 = p < q$, $r = q$ **iii)** $p = q$, $r = 1$

i)

$$|f\,K| = \left(|f|^p |K|^r\right)^{1/q} |K|^{1-\frac{r}{q}} |f|^{1-\frac{p}{q}} \qquad (2.2.17)$$

fonksiyonu şeklinde yazılabilir.(2.2.16) ifadesinin sol tarafındaki norm içindeki integral ifadesine 3 fonksiyon için Hölder eşitsizliği (2.2.1) uygulanırsa,

$$p_1 = q \ , \quad p_2 = p' = \frac{r}{1-\frac{r}{q}}, \quad p_3 = \frac{p}{1-\frac{p}{q}} \quad \left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=1\right)$$

$$|\,I(x)\,| = \int |f\,K\,|\,dy = \int \left(|f|^p\,|K|^r\right)^{1/q} |K\,|^{1-\frac{r}{q}} |f|^{1-\frac{p}{q}}\,dy$$

$$\leq \left(\int |f|^p\,|K|^r\,dy\right)^{1/q} \left(\int \left(|K|^{1-\frac{r}{q}}\right)^{\frac{r}{1-\frac{r}{q}}} dx\right)^{\frac{1-\frac{r}{q}}{r}} \left(\int \left(|f|^{1-\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p}{1-\frac{p}{q}}} dy\right)^{\frac{1-\frac{p}{q}}{p}}$$

$$= \int \left(|f|^p\,|K|^r\,dy\right)^{1/q} \;\|K\|_r^{1-\frac{r}{q}}\;\|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}$$

$$|I|^q \leq \left(\int |f|^p\,|K|^r\,dy\right)\;\|K\|_r^{\left(1-\frac{r}{q}\right).q}\quad \|f\|_p^{\left(1-\frac{p}{q}\right).q}$$

$$\|\,I(x)\,\|_q \leq \left(\int dx \int |\,f(y)\,|^p\,|\,K(y-x)\,|^r\,dy\right)^{1/q} \|K\|_r^{1-\frac{r}{q}}\,\|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}$$

$$= \|K\|_r^{1-\frac{r}{q}}\,\|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}\;\left(\int |\,f(y)\,|^p\,dy\right)^{1/q}\left(\int |\,K(y-x)\,|^r\,dx\right)^{1/q}$$

$$= \|K\|_r^{1-\frac{r}{q}}\;\|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}\left(\int |\,f(y)\,|^p dy\right)^{\frac{1}{p}.\frac{p}{q}}\;\left(\int |\,K(x)\,|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}.\frac{r}{q}}$$

$$= \|K\|_r^{1-\frac{r}{q}}\;\|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}\;\|f\|_p^{\frac{p}{q}}\;\|K\|_r^{\frac{r}{q}} = \|K\|_r\;\;\|f\|_p$$

elde edilir.**(ii)** ve **(iii)** durumları da benzer şekilde ispatlanır.

2.2.14.

(2.2.15) eşitsizliğinin yardımıyla ve (2.2.16) eşitsizliğinin $n-$ boyutlu uzaya uygulanması düşünerek,

$$p = (p_1,\ldots,p_n),\; q = (q_1,\ldots,q_n),\; r = (r_1,\ldots,r_n),1 \leq p \leq q \leq \infty,\; 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r} \text{ ve}$$

$$I(x)=\int_{E^n} f(y)\,K(y-x)\,dy$$

fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon yardımıyla,

$$\|I\|_q \le \|K\|_r\,\|f\|_p \tag{2.2.18}$$

eşitsizliği yazılır. Özel olarak $q=p$ için

$$\|I\|_p \le \|K\|_r\,\|f\|_p$$

yazılabilir.

2.2.15.Hardy's eşitsizliğinin genelleştirmeleri

$$\|f\|_{p,E_+^1}=\left(\int_0^\infty |\,f(x)\,|^p\,dx\right)^{1/p}\quad ;\ E_+^1=(0,\infty) \tag{2.2.19}$$

şeklinde f fonksiyonunun normunu,

$1\le p\le q\le\infty,\ \ \alpha\ne 0,\ \ \gamma>0,\ f\in L_p\left(E_+^1\right)$ için

$$F_{\alpha,\gamma}(x)=\int_0^{x^\gamma} f(y)\,y^{-\frac{1}{p'}+\alpha}\,dy,\quad \alpha>0 \tag{2.2.20}$$

ve

$$F_{\alpha,\gamma}(x)=\int_{x^\gamma}^{\infty} f(y)\,y^{-\frac{1}{p'}+\alpha}\,dy,\quad \alpha<0 \tag{2.2.21}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bunların yardımı ile

$$\left\|x^{-\frac{1}{q}-\alpha\gamma}\,F_{\alpha,\gamma}\right\|_{q,E_+^1}\le \gamma^{-\frac{1}{q}}\left(\frac{\mu}{|\alpha|}\right)^{\mu}\|f\|_{p,E_+^1} \tag{2.2.22}$$

$\mu = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ $\left(p = 1 \text{ ve } q = \infty \text{ ise } \left(\frac{\mu}{|\alpha|} \right)^{\mu} = 1 \right)$ eşitsizliği tanımlanır.

İspat:

$1 \le p \le q \le \infty$ ve δ sayısı $0 < \delta < |\alpha|$ olsun. (2.2.20) ve (2.2.21) ifadelerine Hölder eşitsizliği $(2.2.1)$ uygulanırsa,

$$F_{\alpha,\gamma}(x) = \int_0^{x^\gamma} f(y) y^{\delta} \, y^{-\delta} \, y^{-\frac{1}{p'}+\alpha} \, dy \quad , \quad \alpha > 0$$

$$\left| F_{\alpha,\gamma}(x) \right| \le \left(\int_0^{x^\gamma} |f(y)|^p \, y^{\delta p} \, dy \right)^{1/p} \left(\int_0^{x^\gamma} y^{-1+(\alpha-\delta)p'} \, dy \right)^{1/p'} \quad ; \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$$

$$\le C_1 \, x^{(\alpha-\delta)\gamma} \left(\int_0^{x^\gamma} |f(y)|^p \, y^{\delta p} \, dy \right)^{1/p} \quad , \quad \alpha > 0 \qquad (2.2.23)$$

$$F_{\alpha,\gamma(x)} = \int_{x^\gamma}^{\infty} f(y) y^{\delta} \, y^{-\delta} \, y^{-\frac{1}{p'}+\alpha} \, dy \quad , \quad \alpha < 0$$

$$\left| F_{\alpha,\gamma(x)} \right| \le \left(\int_{x^\gamma}^{\infty} |f(y)|^p \, y^{-\delta p} \, dy \right)^{1/p} \left(\int_{x^\gamma}^{\infty} y^{-1+(\alpha+\delta)p'} \, dy \right)^{1/p'}$$

$$\le C_2 \, x^{(\alpha+\delta)\gamma} \left(\int_{x^\gamma}^{\infty} |f(y)|^p \, y^{-\delta p} \, dy \right)^{1/p} \quad , \quad \alpha < 0 \quad (2.2.24)$$

elde edilir ve $C_1 = \left[(\alpha - \gamma) p' \right]^{-\frac{1}{p'}}$, $C_2 = \left[-(\alpha + \gamma) p' \right]^{-\frac{1}{p'}}$ dır.

(2.2.23) eşitsizliğine Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği (2.2.11) uygulanırsa;

$$\left\| x^{-\frac{1}{q}-\alpha\gamma} F_{\alpha,\gamma} \right\|_{q,E_+^1} \le C_1 \left[\int_0^\infty \left(\int_0^{x^\gamma} |\, f(y)|^p \, y^{\delta p} \, x^{-\left(\frac{1}{q}+\delta\gamma\right)p} \, dy \right)^{\frac{1}{p}.q} dx \right]^{1/q}$$

$$\le C_1 \left[\int_0^\infty |\, f(y)|^p \, y^{\delta p} \left(\int_{y^{\frac{1}{\gamma}}}^\infty x^{-1-\delta\gamma q} \, dx \right)^{\frac{p}{q}} dy \right]^{1/p}$$

$$\le C_1 \, C_3 \, \|f\|_{p,E_+^1} \quad (\alpha > 0) \qquad \left(0 \le y \le x^\gamma \text{ ise } y^{\frac{1}{\gamma}} \le x \text{ olur.} \right)$$

olur. Benzer şekilde $(\alpha < 0)$ için yapılırsa,

$$\left\| x^{-\frac{1}{q}-\alpha\gamma} F_{\alpha,\gamma} \right\|_{q,E_+^1} \le C_2 \, C_3 \, \|f\|_{p,E_+^1} \quad (\alpha < 0)$$

elde edilir. Burada $C_3 = (\delta\,\gamma\,q)^{-\frac{1}{q}}$ şeklindedir.

C_1, C_2 ve C_3 sabitlerindeki $\delta = \dfrac{|\alpha|\,p'}{p' + q}$ olarak alınırsa (2.2.22) eşitsizliği elde edilir.

$1 = p \le q < \infty \left(\dfrac{1}{p'} = 0 \right)$ için (2.2.22) eşitsizliği Genelleştirilmiş Minkowski's eşitsizliğinden elde edilir.

$1 \le p \le q = \infty$ için (2.2.22) eşitsizliği (2.2.23) ve (2.2.24) eşitsizliklerinden elde edilir ve burada $\delta = 0$ dır.

2.2.16.

$$1 \le p \le q \le \infty,\ \alpha > 0,\ \gamma > 0,\ \mu = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q},\quad f \in L_p\left(E_+^1\right) \text{ ve}$$

$$h(y,x) = y^{-\frac{1}{p'} - \alpha}\, x^{-\frac{1}{q} + \alpha\gamma} \left[\frac{y}{x^{\gamma}}\right]_1^{2a}$$

ise

$$\left\| \int_0^{\infty} f(y)\, h(y,x)\, dy \right\|_{q,E_+^1} \le \gamma^{-\frac{1}{q}} \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^{\mu} \|f\|_{p,E_+^1} \tag{2.2.25}$$

olur.

2.2.17.

$$1 \le p \le \infty,\quad \beta \ne \frac{1}{p} \quad \text{için,}$$

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy,\quad \beta > \frac{1}{p}$$

ve

$$F(x) = \int_x^{\infty} f(y)\, dy,\quad \beta < \frac{1}{p}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda

$$\left\| x^{-\beta} F \right\|_{p,E_+^1} \le \frac{1}{\left|\beta - \frac{1}{p}\right|} \left\| x^{-\beta+1} f \right\|_{p,E_+^1} \tag{2.2.26}$$

eşitsizliği yazılır.

İspat:

$\beta > \frac{1}{p}$ için ispatı yapalım. $y = xt \Rightarrow dy = x\ dt\ (y = x \text{ ise } t = 1)$ değişken değiştirmesi ve Genelleşmiş Minkowski's eşitsizliği (2.2.11) kullanılırsa,

$$\left\| x^{-\beta} \int_0^x f(y)\,dy \right\|_p = \left\| \int_0^1 f(xt)\, x^{-\beta+1}\, dt \right\|_p$$

$$\leq \int_0^1 \left\| x^{-\beta+1} f(xt) \right\| dt = \int_0^1 t^{\beta-1-\frac{1}{p}} \left\| x^{-\beta+1} f \right\|_p dt$$

$$= \frac{t^{\beta-1-\frac{1}{p}+1}}{\beta-1-\frac{1}{p}+1}\Bigg|_0^1 \left\| x^{-\beta+1} f \right\|_p = \frac{1}{\beta-\frac{1}{p}} \left\| x^{-\beta+1} f \right\|_p$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\beta < \frac{1}{p}$ için ispat yapalım. $y = xt \Rightarrow dy = x\ dt\ (y = x \text{ ise } t = 1)$ değişken değiştirmesi yapılıp ve Genelleştirilmiş Minkowski (2.2.11) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left\| x^{-\beta} \int_x^\infty f(y)\,dy \right\|_p = \left\| \int_1^\infty f(xt)\, x^{-\beta+1}\, dt \right\|_p$$

$$\leq \int_1^\infty \left\| x^{-\beta+1} f(xt) \right\|_p dt = \int_1^\infty t^{\beta-1-\frac{1}{p}} \left\| x^{-\beta+1} f \right\|_p dt$$

$$= \frac{t^{\beta-1-\frac{1}{p}+1}}{\beta-1-\frac{1}{p}+1}\Bigg|_1^\infty \left\| x^{-\beta+1} f \right\|_p = \frac{1}{\frac{1}{p}-\beta} \left\| x^{-\beta+1} f \right\|_p$$

ispatı elde edilir.

2.2.17. Çebysev's eşitsizliği

$f(x)$ azalmayan ve $g(x)$ artmayan birer fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonlar $[a, b]$ aralığında ölçülebilir olsun.

Bu durumda,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right) \qquad (2.2.27)$$

olur.

İspat:

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

şeklinde bir $\varphi(x)$ fonksiyonu tanımlayalım.

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \tilde{f}(x)_{[a,b]} \to f(x)$ fonksiyonunun $\varepsilon \in [a,b]$ aralığındaki ortalama değeridir. Bu durumda

$a \le x < \varepsilon$ ise $\varphi(x) < 0$ ve $\varepsilon < x \le b$ ise $\varphi(x) \ge 0$ ifadeleri yazılabilir. O halde,

$$\int_a^b g(x)\left[f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right]dx = \underbrace{\int_a^\varepsilon g(x)\varphi(x)dx + \int_\varepsilon^b g(x)\varphi(x)dx}_{I}$$

olur. (I) ifadesine iki fonksiyon için ortalama değer teoremi 1.1.15. uygulanırsa

$$\int_a^b g(x)\left[f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right]dx \le g(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx = 0$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki ifade de dağılma özelliği kullanılırsa,

$$\int_a^b g(x)f(x) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx \int_a^b f(x)dx$$

olur.

2.2.18. Hardy – Littlewood eşitsizliği

$1 < p < q < \infty, \mu = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ için $f \in L_p(E^1)$ ve

$$I(x) = \int_{E^1} \frac{f(y)}{|y-x|^{\mu}} dy$$

şeklinde $I(x)$ fonksiyonu tanımlanırsa,

$$\|I\|_q \leq K(p,q)\|f\|_p \tag{2.2.28}$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat:

Önce,

$$I(x) \leq \int_{E^1} \left(f^{\frac{p}{q}}(y)|2y|^{-\frac{1}{p}\left(1-\frac{p}{q}\right)} \|f\|_p \, |y-x|^{\mu} \right) dy$$

eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilmelidir. $f(x)$ fonksiyonunun ortalama değeri

$$f(x) \leq \left(\frac{1}{|2x|} \int_{-|x|}^{|x|} f^p(y)\, dy \right)^{1/p}$$

olduğu için bunun yardımı ile

$$(f(x))^p \leq \frac{1}{|2x|} \int_{-|x|}^{|x|} f^p(y)\, dy \Rightarrow f(x) \leq |2x|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{p(-|x|,|x|)} \leq |2x|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{p,E_1}$$

yazılır.

$$f(y) \leq |2y|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \Rightarrow [f(y)]^{1-\frac{p}{q}} \leq |2y|^{-\frac{1}{p}\left(1-\frac{p}{q}\right)} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}$$

$$f(y) \leq f^{\frac{p}{q}}(y)|2y|^{-\frac{1}{p}\left(1-\frac{p}{q}\right)} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}$$

$$I(x) = \int_{E^1} f(y)|x-y|^{-\mu}\, dy$$

$$\leq \int_{E^1} f^{\frac{p}{q}}(y)|2y|^{-\frac{1}{p}\left(1-\frac{p}{q}\right)} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} |y-x|^{-\mu}\, dy \qquad \left(\mu = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$= 2^{\mu-1} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} \int_{E^1} f^{\frac{p}{q}}(y)|y-x|^{-\mu} |y|^{\mu-1}\, dy \qquad (y = tx \Rightarrow dy = x\, dt)$$

$$= 2^{\mu-1} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} \int_{E^1} f^{\frac{p}{q}}(tx)|tx-x|^{-\mu} |tx|^{\mu-1}\, x\, dt$$

$$= 2^{\mu-1} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} \int_{E^1} f^{\frac{p}{q}}(tx)|t-1|^{-\mu} |t|^{\mu-1}\, dt \qquad (*)$$

(*) ifadesine Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği (2.2.11) uygulanılırsa

$$\| I(x) \|_q \leq$$

$$\leq 2^{\mu-1} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} \left[\int_{E_1} \left(\int_{E_1} f^{\frac{p}{q}}(tx)|t-1|^{-\mu} |t|^{\mu-1}\, dt \right)^q dx \right]^{1/q}$$

$$\leq 2^{\mu-1} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} \int_{E^1} |t-1|^{-\mu} |t|^{\mu-1} \left(\int_{E_1} f^p(tx)\, dx \right)^{\frac{1}{q}} dt$$

$$\leq 2^{\mu-1} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} \int_{E^1} |t-1|^{-\mu} |t|^{\mu-1}\, dt\, \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

$$\leq 2^{\mu-1} \left(\int_{E^1} |t-1|^{-\mu} |t|^{\mu-1}\, dt \right) \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}=1}$$

elde edilir. Burada

$$K(p,q) = 2^{\mu-1} \int_{E^1} |t-1|^{-\mu} |t|^{\mu-1}\, dt$$

olarak alınırsa eşitsizliğin ispatı elde edilir.

2.2.19.

(2.2.28) eşitsizliğindeki p ve q reel sayıları yerine $\overline{p}=(p_1,p_2,...p_n)$ ve $\overline{q}=(q_1,q_2,...q_n)$ şeklinde vektörler alınabilir. Bu durumda $1\le p\le q\le\infty$ ve $1<p_n<q_n<\infty$ olur. O halde , λ_i pozitif sayısı için,

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(1-\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}\right) \qquad (i=1,2,...,n)$$

bir sayı ve $f\in L_p(E^n)$ olacak şekilde

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{1/\lambda_i}$$

$$I(x)=\int_{E^n} f(y)[g(y-x)]^{-\mu}\,dy$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$\|I\|_q\le C\,\|f\|_p$$

yazılır. Burada C bir sabit sayıdır.

2.2.20. Yardımcı önerme

$\alpha>0$, $0<\mu<1$, $1\le r<\infty$ ve $\mu r'>1$ için $\varphi(x)$ fonksiyonu $E_+^1\ (0,\infty)$ üzerinde tanımlı azalmayan bir fonksiyon ve $\varphi(x)\in L_p\ (E_+^1)$ olmak üzere,

$$I=\int_0^\infty\varphi(x)|x-\alpha|^{-\mu}dx\le C\,\alpha^{-\mu+\frac{1}{r}}\,\|\varphi\|_{r,E_+^1}\le C\,\alpha^{-\mu+\frac{1}{r'}}\left(\int_0^\infty|\,\varphi(x)\,|^r\,dx\right)^{1/r}$$

eşitsizliği yazılır.

İspat:

$\varphi(x)$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$\int_0^{\alpha} \varphi(x)\,|x-a|^{-\mu}\,dx \geq \int_{\alpha}^{2\alpha} \varphi(x)\,|x-a|^{-\mu}\,dx$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikten yararlanılırsa;

$$I=\int_0^{\infty} \varphi(x)|x-\alpha|^{-\mu}dx \leq \underbrace{2\int_0^{\alpha} \varphi(x)|x-\alpha|^{-\mu}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{2\alpha}^{\infty} \varphi(x)|x-\alpha|^{-\mu}\,dx}_{I_2}$$

elde edilir ve (I_1) ifadesine Çebysev's eşitsizliği (2.2.27) uygulanırsa

$$I_1(x)=\int_0^{\alpha} \varphi(x)\,|x-\alpha|^{-\mu}dx \leq \frac{1}{\alpha}\underbrace{\int_0^{\alpha} \varphi(x)\,dx}_{I_3}\underbrace{\int_0^{\alpha}|x-\alpha|^{-\mu}\,dx}_{I_4}$$

yazılabilir. O halde,

$$I_1(x)\leq\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}|\,\varphi(x)\,|^{r}\,dx\right)^{1/r}\left(\frac{|x-\alpha|^{-\mu+1}}{1-\mu}\right)\Bigg|_0^{\alpha}=\frac{1}{1-\mu}\,\alpha^{-\frac{1}{r}}\,\|\,\varphi\,\|_{r(0,\alpha)}\,\alpha^{1-\mu}$$

$$=\frac{1}{1-\mu}\,\alpha^{-\mu+\frac{1}{r'}}\,\|\varphi\|_{r(0,\alpha)} \qquad \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1 \Rightarrow -\frac{1}{r}+1=\frac{1}{r'}\right)$$

elde edilir. $I_2(x)$ ifadesine de Hölder eşitsizliği (2.2.1) uygulanırsa,

$$I_2(x)=\int_{2\alpha}^{\infty} \varphi(x)\,|x-\alpha|^{-\mu}\,dx \leq \left(\int_{2\alpha}^{\infty}|\,\varphi(x)\,|^{r}\,dx\right)^{1/r}\left(\int_{2\alpha}^{\infty}|x-\alpha|^{-\mu r'}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq\left(\int_{\alpha}^{\infty}|\,\varphi(x)\,|^{r}\,dx\right)^{1/r}\left(\int_{\alpha}^{\infty}|x-\alpha|^{-\mu r'}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}} \leq \|\varphi\|_{r(\alpha,\infty)}\left(\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{|x-\alpha|^{\mu r'}}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq \|\varphi\|_{r(\alpha,\infty)}\left(\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{|x|^{\mu r'}}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}=\|\varphi\|_{r(\alpha,\infty)}\left(\frac{|x|^{-\mu r'+1}}{1-\mu r'}\Bigg|_{\alpha}^{\infty}\right)^{\frac{1}{r'}}=\left(\frac{1}{1-\mu r'}\,a^{1-\mu r'}\right)^{\frac{1}{r'}}\|\varphi\|_{r(\alpha,\infty)}$$

$$=C\,\alpha^{-\mu+\frac{1}{r'}}\,\|\varphi\|_{r(\alpha,\infty)}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde,

$$I(x) \leq 2\, I_1(x) + I_2(x)$$

eşisizliğindeki ifadeler yerleştirilirse,

$$I(x) \leq 2\frac{1}{1-\mu}\,\alpha^{-\mu+\frac{1}{r'}}\,\|\varphi\|_{r(0,\alpha)} + C\,\alpha^{-\mu+\frac{1}{r'}}\,\|\varphi\|_{r(\alpha,\infty)}$$

$$= \left(\frac{2}{1-\mu} + C\right)\alpha^{-\mu+\frac{1}{r'}}\,\|\varphi\|_{r(0,\alpha)} = C_1\alpha^{-\mu+\frac{1}{r'}}\,\|\varphi\|_{r(0,\alpha)} \qquad (C_1 \text{ sabit bir sayıdır})$$

elde edilir. C ve C_1 birer sabit sayıdır.

2.3. Zayıf Ve Güçlü Tipli Yarı Lineer Operatörler

Tanım. 2.3.1. Dağılım fonksiyonu

$f(x)$ fonksiyonu E^n üzerinde tanımlanan ölçülebilir bir fonksiyon olduğu için $|\,f(x)| > t$ olur ve x noktalarından kurulan bu ölçüm $\mu(f;t)$ şeklinde gösterilebilir.

$$\mu(f;t) = \text{mes}\{x : |\,f(x)| > t\}$$

Buradaki $\mu = \mu(f;t)$ fonksiyonuna $|\,f(x)|$'in dağılım fonksiyonu denir. $f \in L_p(E^n)$ olduğundan aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

i) $\mu(f;t) \leq t^{-p} \int\limits_{E^n} |\,f(x)|^p\, dx$

ii) $\int\limits_{E^n} |\,f(x)|^p\, dx = p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\,\mu(f;t)\,dt \quad , \qquad 1 \leq p < \infty$

İspat:

i)

$$\int\limits_{E^n} |\,f(x)|^p\, dx \geq \int\limits_{\{f>t\}} |\,f(x)|^p\, dx \geq t^p\,\mu\{x : |f(x)| > t\} = t^p\,\mu(f;t)$$

olur.

ii)

$p=1$ için Fubini's teoreminden (2.2.12) yararlanılırsa ,

$$\int_{E^n} |\, f(x) \,|\, dx = \int_{E^n} \int_0^{|f(x)|} dt\, dx = \int_0^{\infty} \int_{E^n} \mu\{x : |f(x)| > t\} dx = \int_0^{\infty} \mu(f;t)\, dt$$

$1 < p < \infty$ için

$$\mu(f^p;t) = \left| \{x : |\, f^p(x) \,| > t\} \right| = \left| \{x : |f(x)| > \sqrt[p]{t}\} \right| = \mu\left(f; \sqrt[p]{t}\right)$$

yazılır. Bu ifadenin yardımıyla

$$\int_{E^n} |\, f(x) \,|^p dx = \int_0^{\infty} \mu(|f|^p;t) dt = \int_0^{\infty} \mu\left(|f|; t^{\frac{1}{p}}\right) dt = p\int_0^{\infty} t^{p-1}\, \mu(f;t)\, dt$$

olur. Ya da

$$\int_{E^n} |\, f(x) \,|^p\, dx = \int_{E^n} \left(\int_0^{|f(x)|} dt^p \right) dx = \int_0^{\infty} dt^p \int_{\{f>t\}} dx = \int_0^{\infty} p\, t^{p-1}\, \mu\left(\{x; |f(x)| > t\}\right) dt$$

şeklinde de gösterilebilir. Norm altında,

$$\|f\|_p = \left\{ p\int_0^{\infty} t^{p-1}\, \mu(f;t)\, dt \right\}^{1/p} \qquad (2.3.1)$$

şeklindedir.

Örnek 2.3.2.

$[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı ve ölçümü μ olan $f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonu için incelersek;

$$\mu\left(\{x : 1 - x^2 \geq t\}\right) \Rightarrow f^{-1}(x,\infty) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{1-t} & ; \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ; \quad t > 1 \end{array} \right\}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt + \int_1^\infty 0\,dt = \frac{-(1-t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

o halde

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)dx = \int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt$$

olur.

Aşağıdaki ifadeler sonlu olduğundan tüm $f(x)$ fonksiyonların oluşturduğu kümeler M_p ile gösterilecektir.

$$\|f\|_{M_p} = \sup_{0<t<\infty} t\,[\mu(f;t)]^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_{M_\infty} = \|f\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{E^n} |\, f(x) \,|$$

(2.3.1) ifadesinin integral aralığı $(0,h)$'a daraltıp ve $\mu(f;t)$'nin monotonluğu dikkate alınırsa,

$$\|f\|_{M_p} \le \|f\|_p, \quad 1 \le p < \infty$$

eşitsizliği yazılabilir.

Bir fonksiyon uzayından başka bir uzaya tanımlanan A operatörüne yarı lineer operatör denir. f_1 ve f_2 tanım kümesinde tanımlanan iki fonksiyon ise bu fonksiyonların toplamı olan $f_1 + f_2$'de tanım kümesinde tanımlıdır ve f_1, f_2'den bağımsız bir $\aleph$ sabiti oluşur. Bu durumda,

$$|\, A(f_1 + f_2) \,| \le \aleph\left(|Af_1| + |Af_2|\right)$$

olur.

$\aleph = 1$ ise A operatörü alt lineerdir.

Yarı lineer bir A operatörü (p,q) ya da güçlü (p,q) tipindedir. $L_p(E^n)$ den $L_q(E^m)$'e tanımlı ve f'den bağımsız bir K sabiti varsa,

$$\|A\|_{q,E^n} \le K\,\|f\|_{p,E^n} \,,\ \forall f \in L_p\left(E^n\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin yerine daha zayıf bir eşitsizlik,

$$\|Af\|_{M_q} \le K\,\|f\|_{p,E^n} \,,\quad \forall f \in L_p\left(E^n\right)$$

alınabilir. Bu eşitsizlik (p,q) tipinden zayıf bir operatördür. Bu durumda en küçük K sayısına A'nın zayıf (p,q) normu denir.

Teorem 2.3.3. Marcinkiewicz teoremi

$$1 \le p_i \le q_i \le \infty \quad (i=1,2),\ \ q_1 \ne q_2, 0<\tau<1\,,\ \frac{1}{p}=\frac{1-\tau}{p_1}+\frac{\tau}{p_2} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{q}=\frac{1-\tau}{q_1}+\frac{\tau}{q_2}$$

olsun. Bir A yarı lineer operatörü sırasıyla K_1 ve K_2 normlarına sahip (p_1,q_1) ve (p_2,q_2) benzer olarak zayıf tiplidir. A operatöründen güçlü tip olan (p,q)

$$\|Af\|_{q,E^m} \le M\, K_1^{1-\tau}\, K_2^{\tau}\, \|f\|_{p,E^n}$$

eşitsizliği elde edilir. Denklemde $M = M(\tau,\chi,p_1,q_1,p_2,q_2)$, f'den bağımsız ve p_1,q_1,p_2,q_2 birer sabittir. Ayrıca, $\varepsilon>0$ için $\tau \in [\varepsilon, 1\text{-}\varepsilon]$ sınırlı olur.

İspat:

$$\alpha=\frac{1}{p}, \alpha_1=\frac{1}{p_1}, \alpha_2=\frac{1}{p_2},\ \beta=\frac{1}{q}, \beta_1=\frac{1}{q_1}, \beta_2=\frac{1}{q_2}$$

notasyonları kullanılarak $\alpha\beta$- düzleminde (α_1,β_1) ve (α_2,β_2) noktalarını birleştiren doğru parçası $\beta_1 \ne \beta_2$ için $0 \le \beta \le \alpha \le 1$ üçgeninde bulunur. Teoremin bu doğruları her (α,β) iç noktaları, A operatörü $\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right)$ için güçlü tiplidir.

$q_1 \neq \infty$ ve $q_2 \neq \infty$ durumları için ispat yapalım. Belirlilik için $0 < \beta_1 < \beta_2 \leq 1$ varsayalım.

i) $\alpha_1 < \alpha_2$,

$f \in L_{1/\alpha}$ olduğu düşünülerse, sabit $c > 0$ için $|f| \leq c$ ve $f_1 = e^{i\ \arg f_c}$, diğer durumlarda $f_1 = f$ olduğundan $f_2 = f - f_1$ şeklinde tanımlayalım.

$$|f_1| = \min(|f|, c) \qquad , \qquad |f| = |f_1| + |f_2|$$

$f \in L_{1/\alpha}$ olduğu için $f_1 \in L_{1/\alpha_1}$ ve $f_2 \in L_{1/\alpha_2}$ dır. Sonuç olarak $g_1 = A f_1$, $g_2 = A f_2$ ve $g = Af$ olduğunu varsayalım. Böylelikle

$$|g| \leq \aleph \left(|g_1| + |g_2| \right)$$

varsayımı bulunur. O halde

$$\mu(g; 2\aleph\, t) \leq \mu(g_1; t) + \mu(g_2; t) \leq K_1^{q_1}\, t^{-q_1} \|f_1\|_{p_1}^{q_1} + K_2^{q_2}\, t^{-q_2} \|f_2\|_{p_2}^{q_2} \qquad (2.3.3)$$

(2.3.3) ifadesini sağ tarafındaki elemanlar c'ye bağlıdır. İspatın daha genel koşullar için $c > 0$ alınır.

$$\mu(f_1; t) = \mu(f; t) \qquad ; \qquad 0 < t < c$$
$$\mu(f_1; t) = 0 \qquad ; \qquad t < c$$
$$\mu(f_2; t) = \mu(f; t + c) \qquad ; \qquad t > 0$$

notasyonları alalım. (2.3.3) ve (2.3.1) denklemlerinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\mu(g;2\aleph\, t)\le K_1^{q_1}\ t^{-q_1}\ p_1^{q_1/p_1}\left\{\int_0^c h^{p_1-1}\mu(f;h)\,dh\right\}^{q_1/p_1}$$

$$+K_2^{q_2}\ t^{-q_2}\ p_2^{q_2/p_2}\left\{\int_c^\infty (h-c)^{p_2-1}\ \mu(f;h)\,dh\right\}^{q_2/p_2}$$

$\xi\neq 0$ ve $\alpha>0$ için $c=\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)^{1/\xi}$ alıp ve (2.3.1) ifadesi son ifadede kullanılırsa,

$$\|g\|_q^q = q\int_0^\infty t^{q-1}\ \mu(g;t)\,dt=(2\aleph)^q\ q\int_0^\infty t^{q-1}\ \mu(g;2\aleph\, t)\,dt$$

$$\le (2\aleph)^q\ q\left\{K_1^{q_1}\ p_1^{q_1/p_1}\int_0^\infty t^{q-1-q_1}\left[\int_0^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{1/\xi}} h^{p_1-1}\ \mu(f;h)\,dh\right]^{q_1/p_1} dt\right.$$

$$\left.+K_2^{q_2}\ p_2^{q_2/p_2}\int_0^\infty t^{q-1-q_2}\left[\int_{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{1/\xi}}^{0} h^{p_2-1}\ \mu(f;h)\,dh\right]^{q_2/p_2} dt\right\}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına Minkowski eşitsizliği (2.2.7) uygulanırsa,

$$\left\{\int_0^\infty t^{q-1-q_1}\left[\int_0^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{1/\xi}} h^{p_1-1}\ \mu(f;h)\,dh\right]^{q_1/p_1} dt\right\}^{p_1/q_1}\le\int_0^\infty h^{p_1-1}\mu(f;h)\left\{\int_{\alpha h^\xi}^\infty t^{q-1-q_1}\ dt\right\}^{p_1/q_1} dh$$

$$=\left(\frac{1}{q_1-q}\right)^{p_1/q_1}\ \alpha^{(q-q_1)\frac{p_1}{q_1}}\int_0^\infty h^{p_1-1+\xi p_1\frac{q-q_1}{q_1}}\ \mu(f;h)\,dh \qquad (2.3.4)$$

$$\left\{\int_0^\infty t^{q-1-q_1}\left[\int_{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{1/\xi}}^\infty h^{p_2-1}\ \mu(f;h)\,dh\right]^{q_2/p_2} dt\right\}^{p_2/q_2}\le\int_0^\infty h^{p_2-1}\mu(f;h)\left\{\int_0^{\alpha h^\xi} t^{q-1-q_2}\ dt\right\}^{p_2/q_2} dh$$

$$=\left(\frac{1}{q-q_2}\right)^{p_2/q_2}\alpha^{p_2\left(\frac{q-q_2}{q_2}\right)}\int_0^\infty h^{p_1-1+\xi p_2\frac{q-q_2}{q_2}}\mu(f;h)\,dh \qquad (2.3.5)$$

eşitsizliği elde edilir.

h'ın bileşeni olan ξ , (2.3.4) ve (2.3.5) ifadelerin her ikisinin son integrallerindeki $(p-1)$ 'e eşit olsun. Yani,

$$\xi=\frac{\beta(\alpha-\alpha_1)}{\alpha(\beta-\beta_1)}=\frac{\beta(\alpha-\alpha_2)}{\alpha(\beta-\beta_2)}=\frac{q_1(p_1-p)}{p_1(q_1-q)}=\frac{q_2(p_2-p)}{p_2(q_2-q)}$$

şeklinde seçilecek ve sonuçları birleştirilecek olursa

$$\|g\|_q^p \le$$

$$\le (2\aleph)^q\, q\left\{K_1^{q_1}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{q_1}{p_1}}\left(\frac{1}{q_1-q}\right)\alpha^{q-q_1}\|f\|_p^{p\frac{q_1}{p_1}}+K_2^{q_2}\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{q_2}{p_2}}\left(\frac{1}{q-q_2}\right)\alpha^{q-q_2}\|f\|_p^{p\frac{q_2}{p_2}}\right\} \qquad (2.3.6)$$

elde edilir.

$$\alpha=K_1^{\frac{q_1}{q_1-q_2}}\,K_2^{\frac{q_2}{q_2-q_1}}\,\|f\|_p^{p\frac{\frac{q_2}{p_2}-\frac{q_1}{p_1}}{q_2-q_1}}$$

alındığında (2.3.6) ifadesinin sağ tarafındaki her iki kısım açısından, K_1, K_2 ve $\|f\|_p$ değerleri uyuşacaktır ve

$$M^q=(2\aleph)^q\, q\left\{\frac{\left(\frac{p_1}{p}\right)^{q_1/p_1}}{q_1-q}+\frac{\left(\frac{p_2}{p}\right)^{q_2/p_2}}{q-q_2}\right\}$$

şeklinde olacaktır. Böylece teoremin gösterimi elde edilir.

ii) $\alpha_1 > \alpha_2$,

1. durumda olduğu gibi aynı M katsayı ile teoremin gösterimi elde edilir.

iii) $\alpha_1 = \alpha_2$,

$$\|g\|_q^q = (2\aleph)^q\, q\left\{\int_0^c + \int_c^\infty\right\} t^{q-1}\,\mu(g;2\aleph\, t)\,dt$$

$$\leq (2\aleph)^q\, q\left\{\left(\|g\|_{M_{q_2}}\right)^{q_2}\int_0^c t^{q-q_2-1}\,dt + \left(\|g\|_{M_{q_1}}\right)^{q_1}\int_c^\infty t^{q-q_1-1}\,dt\right\}$$

$$= (2\aleph)^q\, q\left\{\frac{1}{q-q_2}\|g\|_{M_{q_2}}^{q_2}\, c^{q-q_2} + \frac{1}{q_1-q}\|g\|_{M_{q_1}}^{q_1}\, c^{q-q_1}\right\}$$

elde edilir.

$$c = \left(\|g\|_{M_{q_1}}\right)^{\frac{q_1}{q_1-q_2}}\left(\|g\|_{M_{q_2}}\right)^{\frac{q_2}{q_2-q_1}}$$

alınırsa,

$$M^q = (2\aleph)^q\, q\left\{\frac{1}{q_1-q} + \frac{1}{q-q_2}\right\}$$

ile teoremin gösterimi elde edilir.

3. BÖLÜM

3. 1. SOBOLEV UZAYLARI VE GÖMÜLME TEOREMLERİ

Fizik ve mekaniğin bazı matematiksel problemlerini içeren kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümleri, L_p uzayı ve onun alt uzaylarında olmadığı tespit edilmiştir. Bu problem S.L. Sobolev tarafından 1950 yılında çözülmüştür. Sobolev, fizik ve mekaniğin diferansiyel denklemlerinin çözümünün klasik uzaylarda değil, kendisi tarafından kurulan $W^{\ell,p}(G)$ uzaylarında olduğu sonucuna varmış (ℓ doğal sayıları, $1 \leq p \leq \infty$ ve G, R^n sınırlı bir bölge) ve $W^{\ell,p}(G)$ sobolev uzayını kurmuştur. (tanım 3.1.1).

Sonraki yıllarda bu uzayın çeşitli türleri O.V.Besov, S.M. Nikol'skii ve V. P. Il gibi yazarlar tarafından elde edilmiş ve bu uzaylarda gömülme ve iz teoremleri ispatlanmıştır (7(d), 24, 17).

Sobolev gömülme teoremleri, fonksiyonların ve onların türevlerini içeren integral gösterimi yardımıyla ispatlanmıştır. Bu integral gösterimi metodu V. P. Il'in çalışmaları ile daha da geliştirilmiştir. Ayrıca teorem farklar cinsinden de incelenmiştir. Bu integral gösteriminin en önemli avantajlarından biri, bir x noktasında verilen bir fonksiyonun değerinin, tepesi x noktasında olan sınırlı bir koniden oluşmasıdır. Bu yöntem, daha genel açık kümeler (bölge, yıldız koşulunu sağlayan kümeler, koni özelliğine sahip açık kümeler ve ℓ- boynuz koşulunu sağlayan kümeler) üzerinde tanımlı fonksiyonlardan oluşan fonksiyonel uzayının araştırılmasında rol oynar.

Sobolev ilk gömülme teoremlerini $G \subset R^n$ bölgelerinde, $D^{\beta}f$ türevlerinin q mertebeden toplanabilirliğini veya onların düşük boyutlu manifodlara dahil olduğunu ispatlamıştır.

Son yıllarda gömülme teorisi çok farklı boyutlarda birçok matematikçinin çalışmalarıyla gelişme göstermiştir. Bu da teoreme ilginç, önemli ve yeni uygulama metodları kazandırmıştır.

S.M. Nikol'skii $H_p^{\ell}(E^n), \ell = (\ell_1, ..., \ell_n)$ $1 \leq p \leq \infty$ şeklinde yeni bir gömülme teorisini geliştirmiş ve ilk olarak genelleştirilen bu gömülme teoremlerini düşük boyutlu manifodların bir kısıtlanışına uygulayarak elde etmiştir. Bu metod trigonemetrik polinomlar veya üstel tipteki tam fonksiyonların yaklaşımına dayalıdır.

Sobolev uzayındaki fonksiyonların iz özellikleri ile ilgili problemlerden elde edilen ilk kesin sonuçlar, p = 2 için Aronzajn ve ondan bağımsız olarak V. M. Babic, L.N. Slobedeckii ve Freud ve Kralik tarafından elde edilmiştir (2,26(b),10). Slobodeckii, p = 2 için anizotropik Sobolev uzaylarının $W_2^{\ell}(E^n)$ tamamlama teorisini geliştirmiştir. Buradaki $\ell = (\ell_1, ..., \ell_n)$ hem tamsayı hem de kesirli fonksiyonlarının diferansiyelidir (26).

Gagliardo, $1 \leq p < \infty$ için sobolev uzayındaki fonksiyonların izlerini, E^n'in $(n-1)$ boyutlu bir kesiminde çalışma yapmıştır (14). O.V. Besov yaklaşım metodlarını kullanarak $B_{p,\theta}^{\ell}(E^n)$ şeklinde yeni bir uzay geliştirmiştir. H_p^{ℓ} uzayları gibi gömülme teoremlerine göre kapalı bir sistem formunda ve Sobolev uzayları ile yakın bir ilişki içerisinde olduğunu belirtmiştir (8(a)).

Çalışmanın bu bölümünde Sobolev uzayı tanımlanmış ve Sobolev gömülme teoremleri verilmeye çalışılmıştır. Ayrıca bu gömülme teoremlerinin ispatı için kullanılan integral gösterimi yöntemi tanıtılacaktır**.**

Tanım 3.1.1.

p. mertebeden integrallenebilen ve ℓ. mertebeden genelleştirilmiş türeve sahip olan fonksiyonların uzayına Sobolev uzayı adı verilir ve W_p^{ℓ} $(W^{p,\ell})$ şeklinde gösterilir. Bu uzayın elemanları normlardır.

$$W_{p\to \text{integralin toplam mertebesi}}^{\ell\to\ell.\ \text{mertebeden genelleştirilmiş türev}} = W^{\ell,p,G}$$ (G (sınırlı bölge) $\subset R^n$)

$\hookrightarrow$ sobolev uzayı

$$W_p^{\ell}(G) = \{f : f(x)\in L_p(G), D^{\alpha} f(x)\in L_p(G) \text{ ve } 1\le|\alpha|\le\ell\}$$

$$\|f\|_{W_p^{\ell}(G)} = \|f\|_{W^{\ell,p,G}} = \|f\|_{L_p(G)} + \sum_{1\le|\alpha|\le\ell} \| D^{\alpha} f \|_{L_p(G)} \tag{3.1.2}$$

$$\|f\|_{W^{\ell,p(G)}} = \left\{ \int_G |f|^p \, dx + \sum_{1\le|\alpha|\le\ell} \int_G \| D^{\alpha} f \|^p \, dx \right\}^{1/p} \quad , \quad 1\le p<\infty$$

$$\|f\|_{W_p^{\ell}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \sum_{|\alpha|=\ell} \|D^{\alpha} f\|_{L_p(G)} \qquad \left(|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)$$

$p=\infty$ ise

$$\|f\|_{W^{\ell,p,G}} = \max_{0\le|\alpha|\le\ell} \|D^{\alpha} f\|_{L_\infty}$$

Örnek 3.1.2.

(3.1.2.) eşitliğin sağ tarafındaki integral α 'nın özel bir durumu için incelenebilir.

$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2$, $\ell = 2$ ve $f(x_1, x_2)$alınırsa, $\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}\le 1$ olur. ($1\le|\alpha|\le\ell$ eşitsizliğin sol tarafı ihmal edilmiştir).

1) $\begin{matrix}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{matrix} \Rightarrow f$ **2)** $\begin{matrix}\alpha_1=1\\ \alpha_2=1\end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ **3)** $\begin{matrix}\alpha_1=0\\ \alpha_2=1\end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}$

4) $\begin{matrix}\alpha_1=1\\ \alpha_2=0\end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}$ **5)** $\begin{matrix}\alpha_1=0\\ \alpha_2=2\end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ **6)** $\begin{matrix}\alpha_1=2\\ \alpha_2=0\end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$

o halde

$$\sum_{0\le|\alpha|\le 2}\int_G \left|D^{\alpha}f\right| dx_1\, dx_2 = \int_G f\, dx_1\, dx_2 + \int_G \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1\, dx_2 + \int_G \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1\, dx_2 + \int_G \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 + \int_G \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_1\, dx_2 + \int_G \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1\, dx_2$$

olur. $\alpha = 2$ için

$$\sum_{|\alpha|=2}\int_G \left|D^{\alpha}f\right| dx_1\, dx_2 = \int_G \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1\, dx_2 + \int_G \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_1\, dx_2 + \int_G \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1\, dx_2$$

olur.

Teorem.3.1.3.

$1 \le p < \infty$ için $W^{\ell,p}(G)$ uzayı Banach uzayıdır (8).

Teorem.3.1.4.

$1 \le p < \infty$ için $W^{\ell,p}(G)$ uzayı ayrılabilir bir uzaydır (8).

3.2. Gömülme Teoremleri

Tanım 3.2.1.

E ve F iki normlu fonksiyon uzayı olmak üzere,

i) E'nin tüm elemanları F'de olacak

ii) f'den bağımsız bir C sabiti,

$$\|f\|_F \le C\,\|f\|_E \qquad \forall f \in E$$

koşulunu sağlarsa E, F'ye gömülür ve $E \hookrightarrow F$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $E \hookrightarrow C$ gömülmesinden de söz edilebilir. Bu gömülme; $\forall\ f \in E$ olacak şekilde Lebesque kümesinde ölçümü sıfır olan bir f fonksiyonunun dışında sürekli fonksiyonlara yaklaştırması ile sağlanır. Bu durumda, f fonksiyonu sürekli ve f'den bağımsız sabit bir A sayısı oluşturarak

$$\|f\|_C \le A\,\|f\|_E$$

şeklinde koşul sağlanır.

Bu tanım, $E \hookrightarrow F$ gömülmesinin sınırlı birim operatöre veya E uzayından F uzayına kısıtlanan operatöre denk olduğunu göstermektedir. O halde varsayım şu şekilde değiştirilebilir. Sınırlı ve sürekli genelleştirilmiş D^α diferansiyel operatör, E'den F'ye alınırsa,

$$\left\|D^\alpha f\right\|_F \le C\,\|f\|_E$$

şeklinde olur. Bu $D^\alpha : E \hookrightarrow F$ ile gösterilir ve gömülme teoremi olarak adlandırılır. Bu gömülmeye sürekli gömülme adı da verilir. Yani; D^α operatörü, E sınırlı kümesini F sınırlı kümesine dönüştürür (1).

Sobolev uzaylarında karakteristik gömülme, analizde özellikle kısmi diferansiyel ve integral operatörlerin çalışmasında çok yararlıdır. $W^{\ell,p}(G)$ uzaylarında en önemli gömülme özellikleri bir tek teorem adı altında bir araya getirilmiştir. Bu da **Sobolev Gömülme Teoremleri**'dir (28, 23, 14).

Teorem.3.2.2. Sobolev Gömülme Teoremleri

G, R^n'in tanım kümesi ve G^k da, G ile k- boyutlu ve n – düzleminin kesişiminden elde edilmiş bir küme olsun $(1 \le k \le n)$. Bu yüzden $G^n \equiv G$ dir. Ayrıca j ve ℓ negatif olmayan tamsayılar olarak alınacaktır ($1 \le p < \infty$) (1).

i) G koni özelliğine sahip ise o zaman aşağıdaki gömülmeler oluşur.

a) $\ell p < n$ ve $n - \ell p < k \le n$ olsun. O halde;

$$W^{j+\ell,p}(G) \hookrightarrow W^{j,q}\left(G^k\right), \quad p \le q \le \frac{kp}{n - \ell p} \tag{1}$$

olur . Özel durumda

$$W^{j+\ell,p}(G) \hookrightarrow W^{j,q}(G)\,, \quad p \le q \le \frac{np}{n-\ell p} \tag{2}$$

ya da $j = 0$ için

$$W^{\ell,p}(G) \hookrightarrow L^{q}(G), \qquad p \le q \le \frac{np}{n-\ell p} \tag{3}$$

olur. Ayrıca $p = 1$ ise $\ell < n$ için (1) gömülmesi $k = n - \ell$ için oluşur.

b) $\ell p = n$ olsun. O halde; her bir k, $1 \le k \le n$ için

$$W^{j+\ell,p}(G) \hookrightarrow W^{j,q}(G^{k}) \quad , \quad p \le q < \infty \tag{4}$$

dır.Özel durumda $(j = 0)$ için

$$W^{\ell,p}(G) \hookrightarrow L^{q}(G) \qquad , \qquad p \le q < \infty \tag{5}$$

olur. Ayrıca, $p = 1$ ve $\ell = n$ için (4) ve (5) gömülmeleri $q = \infty$ için oluşur.

$$W^{j+n,1}(G) \hookrightarrow C_B^{j}(G) \tag{6}$$

$$C_B^{j}(G) = \left\{ u \in C^{j}(G) : |\alpha| \le j \text{ için } D^{\alpha}u, G \text{ üzerinde sınırlıdır} \right\}$$

$$\|f\|_{C_B^{j}(G)} = \max_{0 \le |\alpha| \le j} \sup_{x \in G} \left| D^{\alpha} f \right|$$

c) $\ell p > n$ olsun. O halde;

$$W^{j+\ell,p}(G) \hookrightarrow C_B^{j}(G) \tag{7}$$

olur.

ii) G , güçlü local Lipschitz özelliğine sahip ise **i)**’nin **c)** ifadesi aşağıdaki gibi olur.

d) $\ell p > n > (\ell - 1)p$ olsun. O halde;

$$W^{j+\ell,p}(G) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{G}) \qquad , \quad 0 < \lambda \le \ell - \left(\frac{n}{p}\right) \tag{8}$$

$$\|f\|_{C^{j,\lambda}(\overline{G})} = \|f\|_{C^{j}(\overline{G})} + \max_{0 \le |\alpha| \le j} \sup_{\substack{x,y \in G \\ x \ne y}} \frac{|D^{\alpha} f(x) - D^{\alpha} f(y)|}{|x - y|^{\lambda}}$$

olur.

e) $n = (\ell - 1)p$ olsun. O zaman

$$W^{j+\ell,p}(G) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{G}) \qquad 0 < \lambda < 1 \tag{9}$$

olur. Ayrıca $n = \ell - 1$ ve $p = 1$ ise (9) özelliği $\lambda = 1$ için de sağlar.

iii) W - uzayı altındaki gömülmeler ve $W_0 -$ uzayındaki gömülme karşılıkları ile sağlanan keyfi tanım kümelerinde de **i)** ve **ii)’** deki tüm sonuçlar geçerlidir.

Sobolev gömülme, genelde gömülme ve iz teoremlerinin ispatı için integral gösterimi yöntemi kullanılmaktadır.

3.3. İntegral Gösterimi

Bu kısımda kullanılacak bazı terimler tanıtılacaktır.

$k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ negatif olmayan vektör için

$$|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

$$k - 1 = (k_1 - 1, ..., k_n - 1)$$

yazılır. $k_i, i = 1,2,...,n$ için negatif olmayan tamsayılar ve $x = (x_1, x_2,..., x_n), E^n$ de bir vektör ise

$$k! = k_1!...k_n!$$

$$x^k = x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$$

$$(-x)^k = (-1)^{|k|} x^k$$

$$x^{(i)} = (x_1,...x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n)$$

dır.

$\lambda = (\lambda_1,...\lambda_n),\ i = 1,2,...,n$ için $\lambda_i > 0$ ve v pozitif sayısı için,

$$v^\lambda = (v^{\lambda_1},...v^{\lambda_n}), \qquad xv^\lambda = (x_1 v^{\lambda_1},..., x_n v^{\lambda_n})$$

$$x : v^\lambda = \left(\frac{x_1}{v^{\lambda_1}},...,\frac{x_n}{v^{\lambda_n}} \right) = (x_1 v^{-\lambda_1},..., x_n v^{-\lambda_n})$$

$$(k,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} k_i \lambda_i,$$

$$I_{V^\lambda}(\alpha) = \{ x : |x_i - \alpha_i| \le v^{\lambda_i} ; (i = 1,...,n)\} \quad (\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2,...\alpha_n)) \text{ olur.}$$

$$I_{V^\lambda} = I_{V^\lambda}(0) ; \qquad (0 = (0,0,...,0))$$

$$e_i = (0,...,0,1,0,...,0) \text{ (} x_i \text{ eksenine ait birim vektör)}$$

$$\prod_j t_j^{(i)} = \prod_{j \ne i} t_j$$

şeklinde tanımlanır. D_{x_i} , x_i ’nin türevi ve D_i ’de i argumanının türevi olmak üzere;

$$D_{x_i} K(x : v^\lambda) = \frac{\partial}{\partial x_i} K(x : v^\lambda) = D_i\, K(x : v^\lambda) v^{-\lambda_i}$$

$$D_x = (D_{x_1},..., D_{x_n}) \ , \quad D_{x_i}^{k_i} = (D_{x_i})^{k_i} = \frac{\partial^{k_i}}{\partial x_{x_1}^{k_i}} \quad , \quad D_x^k = D_{x_1}^{k_1}...D_{x_n}^{k_n}$$

$$D = (D_1,..., D_n) \ , \quad D_i^{k_i} = (D_i)^{k_i} \ , \quad D^k = D_1^{k_1},..., D_n^{k_n}$$

ifadeleri de tanımlanabilir. Ayrıca,

$$D_{x_i} f(x) = D_i f(x) \text{ ve } D_x^k f(x) = D^k f(x)$$

şeklinde yazılabilir.

$\Omega_1 \subset E^n$, $\Omega_2 \subset E^n$ şeklinde iki küme olsun. $\Omega_1 + \Omega_2$ şeklindeki aritmetik toplam;

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \{y : y = x_1 + x_2 , x_i \in \Omega_i , = i = 1,2\}$$

şeklindedir. Benzer şekilde x, E^n 'de bir nokta ve Ω kümesi için $x + \Omega$, $x - \Omega$ ifadeleri de tanımlanabilir.

3.3.1. Fonksiyonların Ortalaması

Bu kısımda verilen bir f fonksiyonun ortalamasını alınması için bir işlem tanıtılacaktır. Bu işlem sonsuz kez diferansiyellenebilen bir fonksiyonlar dizisinin bu fonksiyona yakınsamasını sağlayacaktır.

Tanım.3.3.3.1.

$K(x)$, destekleyicisi sınırlı ve E^n 'de olan sonsuz kez diferansiyellenebilen bir fonksiyonu göstersin. Yani; $K \in C_0^\infty(E^n)$ dır. Ayrıca $K(x)$

$$\int_{E^n} K(x)\, dx = 1 \qquad (3.3.1)$$

ve $\operatorname{supp} K = S(K) \subset I_1$ koşulları sağlasın.

Örnek 3.3.1.2.

$$K(x) = \begin{cases} \mu . e^{\frac{\rho^2(x,\alpha)}{\rho^2(x,\alpha)-r^2}} & ;\ 0 \le \rho(x,\alpha) < r \\ 0 & ; \rho(x,\alpha) \ge r \end{cases}$$

fonksiyonu örnek verilebilir. Buradaki $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\rho(x,\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - \alpha_i|^2 \right)$ ve μ sabiti (3.3.1) koşulunu sağlayacak şekilde seçilebilir. suppK, r yarıçaplı ve α merkezli bir çemberdir. r ve α uygun durumlar için düzenlenebilir.

$i = 1,2,...,n$ için $\lambda_i > 0$ olacak şekilde $\lambda = (\lambda_1,...\lambda_n)$ ve v'de pozitif bir sayı olmak üzere;

$$K_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|}\ K\left(x : v^\lambda\right) \tag{3.3.2}$$

fonksiyonu E^n'de sonsuz defa diferansiyellenebilirdir ve onun destekleyicisi $S_{v^\lambda}(K) \subset I_{v^\lambda}$

$$S_{v^\lambda}(K) = \left\{ x : \left(x : v^\lambda\right) \in S(K) \right\} \tag{3.3.3}$$

şeklindedir. (3.3.1) ifadesi gereğince,

$$\int_{E^n} K_{v^\lambda}(x)\,dx = \int_{E^n} v^{-|\lambda|}\ K\left(x : v^\lambda\right)dx = \int_{E^n} K(x)\,dx \tag{3.3.4}$$

G, E^n in ölçülebilir bir alt kümesi ve f, G de tanımlanan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $E^n \setminus G$ üzerinde $f = 0$ ve f fonksiyonu $L^{loc}\left(E^n\right)$'e ait tüm E^n'ler üzerinde alınacaktır. O halde f fonksiyonuna karşılık, ortalama çekirdeği K ve ortalama parametresi v^λ olan bir ortalama fonksiyon tanımlanacaktır. Bu

$$f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(x+y) K\left(y : v^\lambda\right) dy$$

$$= v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(y) K\left((y - x) : v^\lambda\right) dy \qquad (3.3.5)$$

dır.

Burada $f_{v^\lambda}(x)$ fonksiyonu, sürekli ve E^n 'deki tüm mertebeden türevleri içinde süreklidir. Örneğin; α_i negatif olmayan tamsayı alındığında keyfi $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ için,

$$D_x^\alpha f_{v^\lambda}(x) = (-1)^{|\alpha|}\, v^{-|\lambda| - (\alpha,\lambda)} \int_{E^n} f(y) D^\alpha K\left((y - x) : v^\lambda\right) dy \qquad (3.3.6)$$

olur.

3.3.1.3. Yardımcı Önerme

$p = (p_1, ..., p_n)$ için $f \in L_p(G)$ ise

$$\left\| f_{v^\lambda} \right\|_p \le \|K\|_1 \; \|f\|_p \qquad (1 \le p \le \infty) \qquad (3.3.7)$$

$$\lim_{v \to 0} \left\| f_{v^\lambda} - f \right\|_p = 0 \qquad (1 \le p < \infty) \qquad (3.3.8)$$

olur.

İspat:

(3.3.7) ifadesinin ispatını (3.3.5) ifadesinde tanımlanan f_{v^λ} fonksiyonu ve Young's eşitsizliği (2.2.16) yardımı ile yapalım;

$$\left\| f_{v^\lambda} \right\|_p \le v^{-|\lambda|} \left\| K\left(. : v^\lambda\right) \right\|_1 \|f\|_p = \|K\|_1 \; \|f\|_p$$

(3.3.8) ifadesinin ispatı için (3.3.4) ifadesindeki tanım gereğince

$$f_{v^\lambda}(x)-f(x)=v^{-|\lambda|}\int_{E^n}\left[f(x+y)-f(x)\right]K\left(y:v^\lambda\right)dy$$

elde edilir. Bu son ifade için, Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğinden (2.2.11) yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\| f_{v^\lambda}(x)-f(x)\right\|_p &\le v^{-|\lambda|}\int_{S_{v^\lambda}(k)}\left|K\left(y:v^\lambda\right)\right|\left\|f(.+y)-f\right\|_p dy\\ &\le \sup_{y\in I_{v^\lambda}}\left\| f(.+y)-f\right\|_p \left\|K\right\|_1\end{aligned}$$

bu eşitsizlik elde edilir.

Bu eşitsizlikte, f fonksiyonunun geniş bir açıdan sürekliliği alınır ve tanım (2.1.10) kullanılarak (3.3.8) ifadesi elde edilir.

$f\in L_p^{loc}(G)(1\le p<\infty)$ ise $L_p^{loc}(G)$'nın içinde $f_{v^\lambda}\to f$ olur. F, G'nin kompakt bir alt kümesi olsun. O halde yeteri kadar küçük v için $F+I_{v^\lambda}$ kümesi G'nin T kompakt alt kümesinin içinde yer alır $\left(f\in L_p(T)\right)$. Daha sonra bu eşitsizlik temelinden,

$$\left\| f_{v^\lambda}-f(x)\right\|_{p,F}\le \sup_{y\in I_{v^\lambda}}\left\| f(.+y)-f\right\|_{p,F}\left\|K\right\|_1$$

elde edilir. Bu ifade ortalamanın sürekli üzerindeki teoremi anlamına gelmektedir. Bu durumda $v\to 0$ iken $\left\| f_{v^\lambda}(x)-f\right\|_{p,F}\to 0$ olur.

(3.3.8) denklemi genel olarak sağlanmaz. f, açık G kümesinde düzgün sürekli ise,

$$\lim_{v\to 0}\left\| f_{v^{\lambda}} - f \right\|_{\infty,U} = 0 \qquad (3.3.9)$$

olur. Burada,

$$U = \left\{ x : x \in G\,,\, x + S_{v^{\lambda}}(K) \subset G\,,\, 0 < v < \delta \right\}$$

şeklindedir. Yukarıda yer alan işlemler yardımı ile

$$\left\| f_{v^{\lambda}} - f \right\|_{\infty,U} \le \sup_{y \in S_{v^{\lambda}}(K)} \left\| f(.+y) - f \right\|_{\infty,U} \left\| K \right\|_1$$

elde edilir. G 'deki f 'in düzgün sürekliliği ve bu eşitsizlik (3.3.9) denklemini sağlar.

3.3.1.4. Yardımcı önerme

G, E^n ' in açık bir alt kümesi ve f, $p \ge 1$ için $L_p^{loc}(G)$'ye ait olsun. Bu durumda, hemen hemen tüm $x \in G$ 'ler için

$$\lim_{v\to 0} f_{v^{\lambda}}(x) = f(x)$$

olur.

3.3.2. Genelleştirilmiş Türev

Burada genelleştirilmiş türev sobolev açısıyla tanıtılacaktır.

Tanım 3.3.2.1.

f ve χ, E^n 'nin açık bir alt kümesi olan G üzerinde local toplanabilen iki fonksiyon olsun. Sonsuz kez diferansiyellenebilen, destekleyicisi sınırlı ve G 'de olan bir φ fonksiyonu alalım. $k = (k_1,...,k_n)$ ($k_i > 0$ olacak şekilde tamsayılar alınacaktır) için

$$\int_G \chi(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|k|}\int_G f(x)\varphi^{|k|}(x)dx \qquad (3.3.2.1)$$

elde edilir. Burada χ, f fonksiyonunun genelleşmiş türevidir ve bu türev G ’de tanımlıdır. Bu türev;

$$\chi = f^k = D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

şeklindedir. Özellikle χ ve χ_0 iki genelleştirilmiş türevler ise (3.3.2.1) ifadesi aynı zamanda χ_0 için de geçerlidir. χ ’den χ_0 ’i çıkarırsak,

$$\int_G (\chi - \chi_0)\varphi\, dx = 0$$

elde edilir ve φ fonksiyonun keyfiliğinden χ ve χ_0 ’ler G üzerinde denktir.

$f(x)$, G içinden $|k|$ mertebesine kadar sürekli türevlere sahip ise parçalı integrasyon formülü uygulanarak $f(x)$ için (3.3.2.1) denklemi elde edilir. Sonuç olarak genelleştirilmiş türev sürekli türev ile çakışır. Tanım gereğince genelleştirilmiş türev, $f^{(k)}$ diferansiyelinin mertebesine bağlı değildir. Çünkü sürekli türevlere sahip herhangi bir mertebeden diferansiyellenebilen φ fonksiyonu ile işlem yapılabilir. [8]

Genelleştirilmiş türevin bazı özellikleri

1) f_1 ve f_2 fonksiyonları $f_1^{(k)}$ ve $f_2^{(k)}$ şeklinde genelleştirilmiş türevlere sahip ise c_1 ve c_2 sabitleri için $c_1 f_1 + c_2 f_2$ lineer bileşiminin $c_1 f_1^{(k)} + c_2 f_2^{(k)}$ şeklinde genelleştirilmiş türevi vardır.

2) f’in genelleştirilmiş türevi $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \chi$ ve χ ’in geneleşmiş türevi de $\frac{\partial \chi}{\partial x_2}$ şeklinde ise o zaman f fonksiyonu,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}$$

şeklinde genelleştirilmiş türeve sahiptir.

3) f in genelleştirilmiş türevi $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ ise bu durumda;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}$ ifadesi $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ 'nin x_1'e göre genelleştirilmiş türevidir.

4. Genelleştirilmiş türevin tanımından anlaşılacağı gibi; $f^{(k)}$, G üzerindeki bir f fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi ise G 'nin G' olacak şekilde herhangi açık alt kümesindeki f fonksiyonunda genelleştirilmiş türevi olur.

3.3.2.2. Yardımcı Önerme

f, G bölgesinde tanımlanan bir fonksiyon ve $1 \le p < \infty$ için $L_p^{loc}(G)$'ye ait olsun. Ayrıca $\{f_j\}$, G 'de tanımlanan $L_p^{loc}(G)$ ait bir fonksiyonlar dizisi ve $1 \le q \le \infty$ için $f_j^{(k)} \in L_q^{loc}(G)$genelleştirilmiş türevlere sahip olmak üzere $L_p^{loc}(G)$'de $j \to \infty$ iken $f_j \to f$ ve $L_q^{loc}(G)$'de $i, j \to \infty$ için $\left(f_j^{(k)} - f_i^{(k)}\right) \to 0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu G 'de $f^{(k)} \in L_q^{loc}(G)$olacak şekilde genelleştirilmiş türeve sahiptir ve $j \to \infty$ iken $L_q^{loc}(G)$'de $f_j^{(k)} \to f^{(k)}$ olur.

3.3.2.3. Genelleştirilmiş türev ile ortalama arasındaki ilişki

Açık bir G kümesi üzerinde tanımlanan $L^{loc}\left(E^n\right)$'e ait bir f fonksiyonu $f^{(k)}$ şeklinde genelleştirilmiş türeve sahip olsun. Bu fonksiyonun ortalama fonksiyonu,

$$f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(y) K\left((y-x) : v^\lambda\right) dy$$

şeklindedir. Şimdi $D_x^k f_{v^\lambda}(x)$ bulalım. $\left(f_{v^\lambda} \in C^\infty\left(E^n\right)\right)$

$$D_x^k f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(y) D_x^k K((y-x) : v^\lambda) dy$$

$$= (-1)^{|k|} v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(y) D_y^k K((y-x) : v^\lambda) dy$$

dir.

$K((y-x) : v^\lambda)$ fonksiyonu y fonksiyonu gibi davranır. $x + S_{v^\lambda}(K)$ kapalı kümesi dışında yok olur. Eğer küme G 'nin içinde ise $K((y-x) : v^\lambda)$ fonksiyonu (3.3.2.1) formülündeki G 'de sınırlı bir destekleyiciye sahip bir φ fonksiyonu olarak alınabilir. O zaman f, $f^{(k)}$ şeklinde genelleştirilmiş türeve sahip olduğundan (3.3.2.1) formülün yardımı ile,

$$D_x^k f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int_{E^n} D^k f(y) K((y-x) : v^\lambda) dy$$

yazılır. Yani,

$$D^k \left(f_{v^\lambda}(x) \right) = \left(D^k f \right)_{v^\lambda}(x) \qquad (3.3.2.2)$$

olur.

Bu son eşitsizlikten de anlaşıldığı gibi, türevin ortalama fonksiyonu ile ortalama fonksiyonun türevi,

$$U = \{ x : x \in G, x + S_{V^\lambda}(K) \subset G \}$$

kümesi üzerinde çakışır.

3.3.2.4.

(3.3.2.1) tanımına denk olan genelleştirilmiş türevin farklı tanımları da mevcuttur. Burada sadece Sobolev ve bir fonksiyonun mutlak sürekliliği bakımından genelleştirilmiş türevin varlığına değinilecektir (24).

f, açık bir G kümesi üzerinde,

$$D_{x_i}^{k_i} f = \frac{\partial^{k_i} f}{\partial x_i^{k_i}}$$

şeklinde genelleştirilmiş türeve sahip ise G üzerinde f'ye denk bir ψ fonksiyonu oluşur. Bu ψ fonksiyonu, G üzerindeki hemen hemen her yerde k_i mertebeye kadar x_i'lere göre genelleştirilmiş türevlere sahiptir ve

$$\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial^{k_i - 1} \psi}{\partial x_i^{k_i - 1}}$$

şeklindedir. Tüm sabit $x^{(i)} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in G^{(i)}$ olduğunda ($G^{(i)}$ $x_i = 0$ hiperdüzlem üzerindeki G'nin dik izdüşümünü gösterir.) G'de tanımlanan x_i değişkenlerinin her hangi $[a, b]$ kapalı aralığındaki mutlak sürekli fonksiyonlar için

i) $D_{x_i}^{k_i} f$ mevcut

ii) $\varphi \in C_0^{\infty}(G)$

iii) $x_i =$ sabit ile φ'nin destekleyicisinin kesişimleri $[a, b]$'nın içinde

ise;

$$\int_a^b f\, D_{x_i}^{k_i} \varphi\, dx_i = (-1)^{k_i} \int_a^b \left(D_{x_i}^{k_i} f\right) \varphi\, dx_i \qquad (3.3.2.3)$$

ifadesi gerçekleşir.

$[x_i, x_i + k_i t]$ doğru parçası G'nin içinde ise

$$\Delta_i(t) D_i^{s_i} f(x) = D_i^{s_i}(x + te_i) - D_i^{s_i} f(x) = \int_0^t D_i^{s_i + 1} f(x + \zeta e_i)\, d\zeta$$

eşitliği $0 \le s_i \le k_i - 1$ durumunda s_i'nin her mertebeden türevleri için geçerli olur.

Yukarıdaki denkleme birkaç ardışık işlem uygularsak

$$\Delta_i^{k_i}(t)f(x)=\underbrace{\int_0^t\dots\int_0^t}_{k_i\,\text{tane}} D_i^{k_i} f\left(x+\left(\zeta_1+\ldots+\zeta_{k_i}\right)d\,\zeta_1\ldots\zeta_{k_i}\right.$$

(3.3.2.4)

formülü elde edilir ve

$$\Delta_i^{k_i}(t)f(x)=\underbrace{\Delta_i(t)\ldots\Delta_i(t)}_{k_i\,\text{tane}}f(x)$$

$$=\sum_{j=0}^{k_i} C_{k_i}^{j}(-1)^{k_i-j} f(x+jt\,e_i) \qquad (3.3.2.5)$$

olur. (3.3.2.4) ifadesinin yardımı ile aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\left|\Delta_i^{k_i}(t)\ f(x)\right|\le t^{k_i-1}\int_0^{k_i t}\left|D_i^{k_i} f(x+\zeta e_i\right|d\zeta \qquad t>0 \qquad (3.3.2.6)$$

3.3.2.5. Genelleştirilmiş lineer diferansiyel operatör

$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ negatif olmayan tamsayı koordinatlarına sahip bir vektör ve $D=(D_1,\ldots,D_n)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$$

$$(-D)^\alpha=(-1)^{|\alpha|}D^\alpha$$

$$P(D)=\sum_\alpha C_\alpha D^\alpha$$

ifadeleri yazılabilir. Son yazılan ifade karmaşık veya reel sabit katsayılı bir diferansiyel denklemi göstermektedir.

Açık bir G kümesi üzerinde local olarak toplanabilen bir f fonksiyonuna, G 'deki genelleştirilmiş lineer diferansiyel operatör $P(D)$ uygulanabilir. Ancak bir $\varphi \in C_0^{\infty}(G)$ fonksiyonu için G üzerinde local toplanabilen bir χ fonksiyonu oluşursa,

$$\int_G \chi(x)\varphi(x)dx = \int_G f(x)P(-D)\varphi(x)dx$$

uygulaması yapılabilir.

O halde $P(D)f = \chi$ alınırsa yukarıdaki denklem

$$\int_G P(D)f(x)\varphi(x)dx = \int_G f(x)P(-D)\varphi(x)dx \qquad (3.3.2.7)$$

şeklinde de yazılabilir.

3.3.3. Diferansiyallenebilen Fonksiyonların İntegral Gösterimi

f, local toplanabilen bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyon için çekirdeği Ω ve ortalama parametresi v^{λ} (λ sabit vektör) olan $f_{V^{\lambda}}(x) = f(x,v)$'de f ortalama fonksiyonu oluşturalım. Ortalama $f(x,v)$, aynı zamanda $v > 0$ için v parametreli sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olarak da alınabilir.

Bu yüzden Newton – Leibnitz formülü yardımıyla $0 < \varepsilon < h$ olacak şekilde keyfi ε ve h için,

$$f_{\varepsilon^{\lambda}}(x) = f_{h^{\lambda}}(x) - \int_{\varepsilon}^{h} \frac{\partial}{\partial v} f_{V^{\lambda}}(x)dv \qquad (3.3.3.1)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem tüm temsilleri elde etmek için kullanılacak olan başlangıç denklemidir.

Uygun bir ortalama çekirdek Ω seçilirse, (3.3.3.1) denklemindeki son terimi integraller cinsinden veya f fonksiyonunun genelleştirilmiş türevleri ya da f fonksiyonlarının sonlu farkları cinsinden gösterilebilir. Bu yüzden özel bir temsilci elde etmek için çekirdek Ω oldukça önemlidir. f fonksiyonu (3.3.1.3) ve (3.3.1.4) Yardımcı Önermeleri sağlıyorsa $\varepsilon > 0$ için $f_{\varepsilon^{\lambda}}$'nda f'e yaklaşır. (3.3.3.1) denklemindeki $\varepsilon \to 0$ ise ihtiyaç duyulan f fonksiyonun integral gösterimini elde edilmiş olur.

3.3.3.1. Çekirdek $\Omega(x)$

Önce ortalama çekirdek olan $\Omega(x)$'yı elde edelim.

$K(x)$, (3.3.1) şartını sağlayan bir fonksiyon olduğundan

$$\int_{E^n} K(x)\,dx = 1 \qquad (3.3.3.2)$$

ve $K \in C_0^\infty(E^n)$ dır. Tanımlanan $K(x)$ fonksiyonundan yararlanarak $\Omega(x)$ fonksiyonu oluşturabiliriz. $K(x)$ fonksiyonu belirtilen özelliklere sahip ayrıca yeni bazı özelliklere sahip olabilir. Öncelikle;

$$\Omega(x) = D_x^k\left[\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\int_{E^n} K(z)\theta(x-z)\,dz\right] \qquad (3.3.3.3)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $k = (k_1, \ldots, k_n)$ için k_i'ler yeterince büyük doğal sayılar ve $\theta(x_j)$

$$\theta(x) = \prod_{j=1}^{n} \theta(x_j)$$

şeklinde tanımlanan Heaviside's fonksiyonu aşağıda belirtilen özelliğe sahiptir.

$$\theta(t)=\begin{cases}1 & ;t>0\\ 0 & ;t<0\end{cases}$$

Ayrıca $\Omega \in C_0^{\infty}(E^n)$ ve supp $\Omega \subset S(K)$ dır. Şimdi,

$$\int_{E^n} \Omega(x)\,dx = 1 \tag{3.3.3.4}$$

olduğu gösterelim. İlk olarak Leibnitz's çarpımının türevi formu gereğince,

$$D_{x_i}^{k_i-1}\left[\frac{x_i^{k_i-1}}{(k_i-1)!}\int_{E^n} K(z)\theta(x-z)dz\right]$$
$$=\int_{E^n} K(z)\theta(x-z)dz + T_i(x)$$

elde edilir. Burada,

$$T_i(x)=\sum_{s=1}^{k_i-1} C_s x_i^s D_{x_i}^s\left(\int_{E^n} K(z)\theta(x-z)\,dz\right)$$
$$=\sum_{s=1}^{k_i-1} C_s\, x_i^s\, D_{x_i}^{s-1}\left[\int_{E^n} K(z)\delta(x_i-z_i)\left(\prod_j{}^{(i)}\theta(x_i-z_i)\right)dz\right]$$
$$=\sum_{s=1}^{k_i-1} C_s x_i^s \int_{E^n} D_{x_i}^{s-1}K(z_1,\ldots,x_i,\ldots,z_n)\left(\prod_j{}^{(i)}\theta(x_j-z_j)\right)dz^{(i)}$$

şeklindedir ve δ, delta fonksiyonudur.

Bazı α değerleri için $\operatorname{supp} K \subset I_\alpha$ olduğundan $|x_i| > \alpha_i$ için $T_i(x) = 0$ olur ve

$$\int_{E^1} D_{x_i}^{k_i}\left[\frac{x_i^{k_i-1}}{(k_i-1)!}\int_{E^n} K(z)\theta(x-z)\,dz\right]dx_i$$

$$=\left[\int_{E^n} K(z)\theta(x-z)\,dz + T_i(x)\right]\Bigg|_{x_i=-\infty}^{x_i=\infty}$$

$$=\int_{E^n} K(z)\left(\prod_j{}^{(i)}\theta\left(x_j - z_j\right)\right)dz \qquad (3.3.3.5)$$

denklemi elde edilir.

(3.3.3.4) denklemin sol tarafında yer alan integral gösterimi ardışık integral şeklinde yazılıp ve (3.3.3.5) formülü n- kez ardarda uygulanırsa,

$$\int_{E^n}\Omega(x)\,dx = \int_{E^n} K(x)\,dx = 1$$

elde edilir. Ω fonksiyonu (3.3.1) ifadesinde açıklanan ortalama çekirdeğim tüm şartlarını sağlar. O halde Ω fonksiyonu ortalama çekirdek olarak alınabilir.

$\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_n)$, $i = 1, \ldots, n$ için $\lambda_i > 0$ ve olduğunu varsayalım ve v pozitif bir sayı olsun. Bu durumda,

$$\Omega_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|}\,\Omega\left(x : v^\lambda\right) \qquad (3.3.3.6)$$

fonksiyonu E^n'deki x noktalarına göre sonsuz diferansiyellenebilen bir fonksiyondur. Ayrıca (3.3.3) eşitliğinde tanımlanan $S_{v^\lambda}(K)$ için $\operatorname{supp}\Omega_{v^\lambda} \subset S_{v^\lambda}(K)$ yazılabilir.

$$\int_{E^n}\Omega_{v^\lambda}(x)\,dx = \int_{E^n} v^{-|\lambda|}\,\Omega\left(x : v^\lambda\right)dx = \int_{E^n}\Omega(x)\,dx = 1 \qquad (3.3.3.7)$$

$\Omega_{v^{\lambda}}(x)$'nın türevi v parametresine bağlıdır. Bu türev,

$$\frac{\partial}{\partial v}\Omega_{v^{\lambda}}(x)=\frac{\partial}{\partial v}\left[v^{-|\lambda|}\,\Omega\left(x:v^{\lambda}\right)\right]$$

$$= D_x^k\left[\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\int_{E^n} K(z)\frac{\partial}{\partial v}\theta\left(x:v^{\lambda}-z\right)dz\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v^{-1-\lambda_i}\, D_x^k\left[\frac{x^{k-1}\,x_i}{(k-1)!}\int_{E^n} K(z)\,\delta\left(x_i v^{-\lambda_i}-z_i\right)\right.$$

$$\left. x\left(\prod_j{}^{(i)}\theta\left(x_j v^{-\lambda_j}-z_j\right)\right)dz\right]=-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v^{-1-|\lambda|}\, D_i^{k_i}\,\tilde{\tau}_i\left(x:v^{\lambda}\right) \qquad (3.3.3.8)$$

olur. Burada $\tilde{\tau}_i(x)$,

$$\tilde{\tau}_i(x)=D^{k-k_ie_i}\left[\frac{x^{k-1}\,x_i}{(k_i-1)!}\int_{E^{n-1}} K(z_1,...,x_i,...,z_n)\right.$$

$$\left. x\left(\prod_j{}^{(i)}\theta\left(x_j-z_j\right)\right)dz^{(i)}\right] \qquad (3.3.3.9)$$

şeklinde tanımlanır.

(3.3.3.8) formülünden anlaşılacağı gibi $\Omega_{v^{\lambda}}(x)$, v'ye göre türevleri n fonksiyonlarının toplamı şeklinde gösterilebilir. Bu n fonksiyonların her biri x_i değişkenlerine göre k_i-1 mertebeden sıfır momentlere sahiptir. Bu özellik aşağıda belirtilen durumlarda çok sık kullanılır.

f fonksiyonu, $\tilde{\tau}_i(x)$ fonksiyonunu destekleyicisini içeren bir G bölgesinde tanımlandığını düşünelim ve G'de genelleştirilmiş $D_{x_i}^{\ell_i} f$ türevine sahip olsun. Bu şekilde,

$$\int_G f(x)\ D_{x_i}^{k_i}\ \tilde{\tau}_i(x)\,dx = (-1)^{\ell_i}\ \int_G D_{x_i}^{\ell_i}\ f(x)\,D_{x_i}^{k_i-\ell_i}\ \tilde{\tau}_i(x)\,dx \quad ,(\ell_i \le k_i) \qquad (3.3.3.10)$$

elde edilir. Burada yer alan genelleştirilmiş türev $D_i^{k_i-\ell_i}\ \tilde{\tau}_i(x)$'in yerine $\varphi(x)$ fonksiyonu alınırsa (3.3.2.1) denklemi elde edilir.

3.3.3.2 Fonksiyonların türevleri cinsinden integral gösterimi

E^n içindeki G bölgesinde tanımlanan f fonksiyonu, $f \in L^{loc}(G)$'ye ait ve genelleştirilmiş türevleri de G'de olsun. Bu bölge açık bağlantılı bir kümedir.

f fonksiyonunun ortalaması için, $\Omega(x)$ ortalama çekirdekli ve v^{λ} ortalama parametrili bir fonksiyon alalım.

$$f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(x+y)\,\Omega\left(y : v^{\lambda}\right)dy \qquad (3.3.3.11)$$

Burada $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_n)$, $i = 1,...,n$ için $\lambda_i > 0$ ve $v > 0$ dır.

(3.3.3.11) denklemindeki fonksiyona (3.3.3.1) formülünü uygulayalım. (3.3.3.8) eşitliğinin yardımıyla,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v} f_{v^\lambda}(x) &= \int_{E^n} f(x+y)\ \frac{\partial}{\partial v}\left[\, v^{-|\lambda|}\ \Omega\left(y : v^{\lambda}\right)\right]dy \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^{-1-|\lambda|} \int_{E^n} f(x+y)\ D_i^{k_i}\ \tilde{\tau}_i\left(y : v^{\lambda}\right)dy\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle,

$$f_{\varepsilon^\lambda}(x) = f_{h^\lambda}(x) + \int_{\varepsilon}^{h}\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^{-1-|\lambda|}\ dv \int_{E^n} f(x+y)\,D_i^{k_i}\ \tilde{\tau}_i\left(y : v^{\lambda}\right)dy \qquad (3.3.3.12)$$

eşitliği elde edilir. $i = 1,...,n$ için ℓ_i keyfi negatif olmayan tamsayılardır. $i = 1,...,n$ için $\ell_i < k_i$ dır. Çekirdek Ω 'da görülen k_i sayılarını yeterince büyük seçilebilir. (3.3.3.10) denklemi kullanılarak ve (3.3.3.12) denkleminin y 'ye göre integral dönüşümü alındığında,

$$D_i^{k_i} \tilde{\tau}_i\left(y : v^{\lambda}\right) = v^{\lambda_i \ell_i} D_{y_i}^{\ell_i} D_i^{k_i - \ell_i} \tilde{\tau}_i\left(y : v^{\lambda}\right)$$

ifadesi elde edilir. O halde

$$f_{\varepsilon^{\lambda}}(x) = f_{h^{\lambda}}(x) + \int_{\varepsilon}^{h} \sum_{i=1}^{n} v^{-1-|\lambda|+\ell_i \lambda_i} \, dv \int_{E^n} D_i^{\ell_i} f(x+y)\, \tau_i\left(y : v^{\lambda}\right) dy \qquad (3.3.3.13)$$

olur. Buradaki;

$$\tau_i(x) = (-1)^{\ell_i} \lambda_i D_i^{k_i - \ell_i} \tilde{\tau}_i(x) \qquad (i = 1,...,n) \qquad (3.3.3.14)$$

dır.

(3.3.3.13) denklemindeki ε^{λ} ve h^{λ} parametreleri ortalama fonksiyonların fark değerlerinin temsilleri olarak kabul edilir ve bu fonksiyon x noktasındaki koordinat yönlerindeki integralleri cinsinden genelleştirilmiş türevleridir.

(3.3.3.13) denkleminde $\varepsilon \to 0$ iken aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$f(x) = f_{h^{\lambda}}(x) + \int_{0}^{h} \sum_{i=1}^{n} v^{-1-|\lambda|+\ell_i \lambda_i} \, dv \int_{E^n} D_i^{\ell_i} f(x+y)\, \tau_i\left(y : v^{\lambda}\right) dy \qquad (3.3.3.15)$$

(3.3.3.15), formülün sağ tarafındaki elemanları anlamlı kılan küme içindeki hemen hemen her x için geçerlidir.

Bu ifadeyi biraz daha açıklayalım, $\operatorname{supp} \tau_i \subset S(K)$ olduğunu kabul edelim. (3.3.3.15) denklemin sağ tarafındaki ifadelerin integrali aşağıdaki küme üzerinde aynı gibi görünür.

$$S(K, \lambda, h) = \bigcup_{0<v\leq h} S_{v^\lambda}(K) \tag{3.3.3.16}$$

Sonuç olarak; $x + S(K, \lambda, h)$ kümesindeki noktaların, f fonksiyonunun ve onun türevlerindeki değerler alınırsa, (3.3.3.15) denklemin sağ tarafı (3.3.3.15) denklemin temsillerin destekleyicisi olarak görünür.

G, f fonksiyonunun tanım kümesi olmak üzere,

$$U = \{x : x \in G \,,\, x + S(K, \lambda, h) \subset G\} \tag{3.3.3.17}$$

şeklinde tanımlanırsa (3.3.3.15) denklemin sağ tarafındaki ifadeler U kümesindeki tüm x'ler için geçerli olur. Ayrıca Yardımcı Önerme (3.3.1.4) gereğince $f \in L^{loc}(G)$ $(p = 1 \text{ için})$ olduğu için G'nin hemen hemen her yerinde ve U'nun hemen hemen her yerinde $\varepsilon \to 0$ iken $f_{\varepsilon^\lambda}(x) \to f(x)$ olur. (3.3.3.13) denkleminde $\varepsilon \to 0$ iken U kümesindeki hemen hemen tüm x'ler için geçerli olan (3.3.3.15) eşitlik elde edilir.

(3.3.3.15) formülün uygulamalarında, K fonksiyonunun destekleyicisi koordinat açılarından birinde kabul edilecektir.

$b > 0$, $i = 1,...,n$ için $\alpha_i \neq 0$ ve

$$S(K) \subset \left\{ x : \frac{x_i}{\alpha_i} > 0,\ 1 < \left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right)^{1/\lambda_i} < 1 + b \ \ (i = 1,...,n) \right\} \tag{3.3.3.18}$$

olsun. Bu durumda,

$$S(K,\lambda,h) \equiv v\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \bigcup_{0<v\leq h}\left\{x : \frac{x_i}{\alpha_i} > 0, \quad v < \left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right)^{1/\lambda_i} < (1+b)v \quad (i=1,...,n)\right\} \quad (3.3.3.19)$$

elde edilir. $V\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ bölgesi b'yi aşan ve h yarıçapının $\frac{1}{\lambda}$-boynuzu olarak adlandırılır.

(3.3.3.15) formülün en önemli uygulamalarında $\lambda = \frac{1}{\ell}$ olarak alınır. ($i=1,...,n$ için $\lambda_i = \frac{1}{\ell_i}$). O zaman ℓ-boynuzu $x+V(\ell)$ değişimi (3.3.3.15) gösteriminin destekleyicisi yerine geçer. $\ell_1 = \ell_2 = ... = \ell_n$ alınırsa $V(\ell)$, ℓ-boynuzlu bir konidir.

Aynı zamanda (3.3.3.15) denklemin sağ tarafındaki ifadeler, $f(x)$'in tüm denklik fonksiyonları için herhangi bir x noktasında aynıdır. Bu yüzden tüm denklik fonksiyonlarının sınıfları temsilleri gibi davranır.

Sonuç olarak, (3.3.3.15) denklemi iyi bilinen sobolev eşitsizliğidir. Çünkü (3.3.3.15) denklemi belirli dereceden bir fonksiyonun ve onun tüm türevlerinin integralleri cinsinden fonksiyon temsillerini verir (28(a),(b), 18)

3.3.3.3 Bir fonksiyonun diferansiyel polinomları şeklinde temsili

$\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ negatif olmayan tamsayı bileşenlerine sahip bir vektör olsun.

$$\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$D = (D_1,...,D_n)$ olmak üzere

$$\xi^n = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$$

$$(-\xi)^{\alpha} = (-1)^{|\alpha|}\,\xi^{\alpha}$$
$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1},...,D_n$$

şeklinde tanımlayalım.

Burada, $Q(\xi)$ şeklinde bir polinom tanımlayalım. $Q(\xi)$ polinomu, ortak (karmaşık) kökleri olmayan $P_1(\xi)\ldots P_N(\xi)$ polinomlarından oluşsun. Bu durumda bazı m doğal sayıları için $\alpha_1(\xi),\ldots,\alpha_n(\xi)$ polinomları elde edilir. O halde,

$$Q^m(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(\xi)\,P_j(\xi)$$

şeklinde yazılabilir.

$\ell = (\ell_1,...,\ell_n)$ pozitif tam sayı bileşenlerine sahip bir vektör olmak üzere $\lambda_i = \dfrac{1}{\ell_i}$ $(i = 1,...,n)$ ve $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_n)$ olsun.

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha:\ell|=1} c_{\alpha}\,\xi^{\alpha} \qquad \left(|\alpha:\ell| = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\ell_i}\right)$$

şeklinde tanımlanan polinoma ℓ-polinomu adı verilir. Eğer tüm ℓ_i'ler ortak m değerine sahip ise $P(\xi)$ polinomuna m. dereceden homojen bir polinom denir.

$j = 1,...,N$ için $P_j(\xi)$ sabit (karmaşık) katsayılı ℓ- polinomlarının bir toplamı ve $\xi = 0$ hariç $P_j(\xi)$'nin ortak karmaşık kökü olmasın. Böylelikle Hilbert's teoremi gereğince yeterince büyük bir m doğal sayısı için $\alpha_{ij}(\xi)$ polinomları oluşur.
$(i = 1,...,n$ ve $j = 1,...,N)$

$$\xi_i^{\ell_i m} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(\xi) P_j(-\xi) \qquad (i = 1,...,n) \qquad (3.3.3.20)$$

(3.3.3.20) eşitliğin sol tarafındaki ifadeler $\xi_i^{\ell_i m}$, $m\ell$ - polinomları olduklarından $\alpha_{ij}(\xi)$'ler de $(m-1)\ell$- polinomları olarak kabul edilir. Bu ifade, $\alpha_{ij}(\xi)$'ler (3.3.3.20) eşitliğini ve onların $(m-1)\ell$- polinom parçaları da bu eşitliği sağladığından doğrudur.

Şimdi (3.3.3.12) formülündeki k_i yerine $m\ell_i$ alındığında $(i = 1,...,n)$ ve f fonksiyonuna, G'de genelleştirilmiş diferansiyel operatörü $P_j(D)$ $(j = 1,...,n)$ uygulanabildiğini kabul edelim. Bu durumda (3.3.3.20) eşitliği yardımı ile (3.3.3.12) denklemin sağ tarafındaki ifadelerin y'ye göre integrali alınırsa,

$$\int_{E^n} f(x+y) D_i^{k_i} \tilde{\tau}_i(y : v^\lambda) dy$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{E^n} f(x+y) P_j(-D) \alpha_{ij}(D) \tilde{\tau}_i(y : v^\lambda) dy$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$P_j(-D) = \sum_{(\alpha,\lambda)=1} c_\alpha v^{(\alpha,\lambda)} (-D_y)^\alpha = v P_j(-D_y)$$

ve (3.3.2.7) formülü kullanılırsa,

$$\int_{E^n} f(x+y) D_i^{k_i} \tilde{\tau}_i(y : v^\lambda) dy$$

$$= \sum_{j=1}^{N} v \int_{E^n} P_j(D)\ f(x+y)\ \alpha_{ij}(D)\ \tilde{\tau}_i(y : v^\lambda) dy$$

elde edilir. Bu eşitliği ve

$$T_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{ij}(D)\tilde{\tau}_i(x) \qquad (3.3.3.21)$$

değeri (3.3.3.12) formülünde kullanılırsa,

$$f_{\varepsilon^\lambda}(x) = f_{h^\lambda}(x) + \int_{\varepsilon}^{h} \sum_{j=1}^{N} v^{-|\lambda|}\, dv \int_{\varepsilon^n} P_j(D) f(x+y) T_j(y : v^\lambda) dy \qquad (3.3.3.22)$$

denklemi elde edilir. Açık bir şekilde (3.3.3.22) ifadesinde $N = n$ ve $P_j(\xi) = \xi_j^{\ell_j}$, $j = 1,...,n$ alınırsa (3.3.3.22) formülü, (3.3.3.13) formülünün genelleştirilmiş hali olur.

(3.3.3.22) denklemin her iki yanına D_x^v operatörü uygulanılırsa,

$$D_x^v f_{\varepsilon^\lambda}(x) = D_x^v f_{h^\lambda}(x)$$
$$+(-1)^{|v|} \int_{\varepsilon}^{h} \sum_{j=1}^{N} |v|^{-|\lambda|-(v,\lambda)}\, dv \int_{E^n} P_j(D)\, f(x+y) D^v\, T_j(y : v^\lambda) dy \qquad (3.3.3.23)$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitlikte $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa $(D^v f \in L_{loc}(G))$ $D^v f(x)$'in, $P_j(D) f(x)$ cinsinden bir temsili elde edilir.

Supp $T_j \subset \text{supp}\, K$, $j = 1,...,N$ olduğunda (3.3.3.23) ifadesinin destekleyicisi $x + S(K, \lambda, h)$ veya $x + V(\ell)$ -boynuzu ile yer değiştirebilir. T_j çekirdeği için;

$$\int_{E^n} D^\alpha T_j(x) dx = 0 \qquad (j = 1,2,...,N) \qquad (3.3.3.24)$$

olsun. Burada α, negatif olmayan tamsayı değerli vektörlerin birleşimidir (28(a), 7(b), 29,25).

3.3.3.4 Çok parametreli ortalama ve integral gösterimi

Şimdiye kadar yapılan işlemlerden görüleceği gibi elde edilen integral gösterimi, v^{λ} ortalama parametreli olan $f_{v^{\lambda}}$ tipindeki ortalamaların araştırılmasından elde edilmiştir. Bu şekilde olan ortalamalar tek parametreli ortalama olarak adlandırılacaktır.

Bu temsillerin elde edilmesinin temel amacı, birkaç değerli normlu kısmi türevlerin normları arasındaki eşitliklerin kurulmasında kullanmaktır. Bununla beraber birçok eşitsizlikler, aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi,

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right\|_p \le c \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_p + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_p + \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right\|_p \right)$$

bu temsillerle elde edilemez. Çünkü tek parametreli ortalamalar kullanılarak belirli tipteki türevlerin karışık türevlerinin temsilleri elde edilir. Yani, $D^{\alpha} f$ türevi $D^{\ell_i} f$ türevleri cinsinden gösterilebilir $(i = 0,1,\ldots,n)$. Burada ki $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ vektörü ve $\ell^i = (\ell_1^i,\ldots,\ell_i^n)$ arasında aşağıdaki koşul vardır.

$$\ell_j^0 \le \alpha_j \;\; (j = 1,\ldots,n) \; ; \quad \ell_j^i \le \alpha_j \quad (j = 1,\ldots,n \, ; \, j \ne i) \; ; \quad \ell_i^i > \alpha_i \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Çok parametreli ortalamaların temsilleri, farklı parametrelerin farklı değişkenlerin veya değişken gruplarına göre ortalamasıdır. Burada bu türden çok basit bir integral gösterimi verilecektir.

Bunun için bazı notasyonlar tanımlanacaktır. $e^n = (1,\ldots,n)$ doğal sayılar kümesi ve e ’de e^n ’nin rasgele bir alt kümesini göstersin

Ayrıca $e' = e^n \setminus e$, $\left(e \cup e' = e^n\right)$ ve $1^e = \left(\delta_1^e, ..., \delta_n^e\right)$ şeklinde tanımlayalım. Burada, $j \in e$ ise $\delta_j^e = 1$ ve $j \in e'$ ise $\delta_j^e = 0$ dır(genellikle e boş küme alınır). Ayrıca,

$$\left|1^e\right| = \sum_{j=1}^{n} \delta_j^e$$

dır.

$\ell = \left(\ell_1, ..., \ell_n\right)$ olmak üzere $\ell^e = \left(\ell_1^e, ..., \ell_n^e\right)$ n - boyutlu ℓ^e'ler $\ell_j^e = \ell_j$, $j \in e$ için bir vektörü göstersin. $j \in e$ için $\ell_j^e = \ell_j$, $j \in e'$ için $\ell_j^e = 0$ ve ℓ_j bileşenleri $\left|1^e\right|$ boyutlu bir vektördür. Aynı zamanda $\ell = \left(\ell^e, \ell^{e'}\right)$

$$x^e, v^e, h^e, \varepsilon^e, \quad x = \left(x^e, x^{e'}\right),\ v = \left(v^e, v^{e'}\right), h = \left(h^e, h^{e'}\right)$$

Bu semboller sırasıyla

$$x = \left(x_1, ..., x_n\right), v = \left(v_1, ..., v_n\right),\ h = \left(h_1, ..., h_n\right),\ \varepsilon = \left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\right)$$

eşleşir.

Ayrıca

$$D_{v^e}^{1^e} F = \frac{\partial}{\partial v_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial v_{j_s}} F,$$

$$\int_{\varepsilon^e}^{h^e} F\, dv^e = \int_{e_{j_1}}^{h_{j_1}} dv_{j_1} \cdots \int_{e_{j_s}}^{h_{j_s}} F\, dv_{i_s} = \left(\prod_{k=1}^{s} \int_{\varepsilon_{j_k}}^{h_{j_k}} dv_{j_k} \right) F$$

şeklinde tanımlayalım. Buradaki $G < \varepsilon_i < h_i \ (i = 1, ..., n)$ ve $\{j_1, ..., j_s\} = e$ dır.

E^n uzayını bir G bölgesinde tanımlanmış olan f, local toplanabilen bir fonksiyonun ortalaması,

$$F(x;v) = F(x;v_1,...,v_n) = \int_{E^n} f(x+y) \prod_{j=1}^{n} v_j^{-1} \; \Omega(y_j v_j^{-1}) dy \qquad (3.3.3.25)$$

$v_j > 0 \; (j = 1,...,n)$ dır. Buradaki $\Omega_j(t)$, fonksiyonunu tanımlayalım.

$K_i \in C_0^{\infty}(E^1)$ ve

$$\int_{E^1} K_i(t) dt = 1 \quad (i = 1,...,n)$$

olmak üzere

$$\Omega_i(t) = D_i^{k_i} \left[\frac{t^{k_i - 1}}{(k_i - 1)!} \int_{E^1} K_i(\tau) \theta(t-\tau) dt \right] \qquad (i = 1,2,...,n) \quad (3.3.3.26)$$

Burada $\Omega_i(t) \in C_0^{\infty}(E^n)$ ve $\operatorname{supp} \Omega_i \subset \operatorname{supp} K_i$ ve

$$\int_{E^n} \Omega_i(t) dt = \int_{E^n} K_i(t) dt = 1 \qquad (i = 1,2,...,n)$$

$F(x;v_1,....,v_n)$, $j = 1,...,n$ için $v_j > 0$'ın sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyonudur.

$\varepsilon = \{\varepsilon_1,....,\varepsilon_n\}, h = \{h_1,....,h_n\}$ öyleki $j = 1,...,n$ için $0 < \varepsilon_j < h_j$ olsun. Newton – Leibnitz formülü gereğince;

$$F = (x;\varepsilon_1,....,\varepsilon_n)$$

$$= F(x;h_1,\varepsilon_2,....,\varepsilon_n) - \int_{\varepsilon_1}^{h_1} F'_{v_1}(x;v_1,\varepsilon_2,....,\varepsilon_n) dv_1$$

yazılabilir.

Aynı denklemin sağ tarafındaki ifadeyi v_2 değişkenine göre yazılırsa,

$$F = (x; \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$$

$$= F(x; h_1, h_2, ..., \varepsilon_n) - \int_{\varepsilon_1}^{h_1} F'_{v_1}(x; v_1, h_2, ..., \varepsilon_n) dv_1 -$$

$$- \int_{\varepsilon_2}^{h_2} F'_v(x; h_1, v_2, ..., \varepsilon_n) dv_2 + \int_{\varepsilon_1}^{h_1} \int_{\varepsilon_2}^{h_2} F''_{v_1 v_2}(x; v_1, v_2, ..., \varepsilon_n) dv_1\, dv_2$$

eşitliği elde edilir. Bu işlemlere devam edilirse n. adımda (3.3.3.27) formülü bulunur.

$$F = (x; \varepsilon) = \sum_{e \subseteq e^n} (-1)^{|1^e|} \int_{\varepsilon^e}^{h^e} D^{1^e}_{v_e} F\left(x; v^e, h^{e'}\right) dv^e \qquad (3.3.3.27)$$

(3.3.3.27) denklemi (3.3.3.1) formülü ile aynı rolü oynar.

(3.3.3.25) ve (3.3.3.26) denklemlerinde, (3.3.3.28) ve (3.3.3.29) denklemleri elde edilir.

$$D^{1^e}_{v^e} F\left(x; v,^e h^{e'}\right)$$

$$= \int_{E^n} f(x + x) \left(\prod_{j \in e} \frac{\partial}{\partial v_j} \left[v_j^{-1} \Omega_j (y_j v_j^{-1}) \right] \right) \left(\prod_{j \in e'} h_j^{-1} \Omega_j (y_j h_j^{-1}) \right) dy$$

$$= (-1)^{|1^e|} v^{-1^e} \int_{E^n} f(x + y) \left(\prod_{j \in e} v_j^{-1} D^{k_j} \tau (y_j v_j^{-1}) \right)$$

$$x \quad \left(\prod_{j \in e'} h_j^{-1} \Omega_j (y_j h_j^{-1}) \right) dy \qquad (3.3.3.28)$$

olur. Burada,

$$v^{-\alpha} = v_1^{-\alpha_1} ... v_n^{-\alpha_n} \qquad (\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n) \qquad (3.3.3.29)$$

$$\tau_j(t)=\frac{t^{k_j}}{(k_j-1)!}K_j(t)$$

şeklindedir. (3.3.3.28) denklemi (3.3.3.27) denklemine yerleştirilirse,

$$F(x;\varepsilon)=\sum_{e\subseteq e^n}\int_{\varepsilon^e}^{h^e} v^{-1^e}\phi\left(x;v^e,h^{e'}\right)dv^e \tag{3.3.3.30}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca,

$$\phi\left(x;v^e;h^{e'}\right)$$
$$=\int_{E^n} f(x+y)\left(\prod_{j\in e} v_j^{-1}\,D^{k_i}\,\tau_j\left(y_j v_j^{-1}\right)\right)\left(\prod_{j\in e'} h_j^{-1}\Omega_j\left(y_j h_j^{-1}\right)\right)dy \tag{3.3.3.31}$$

şeklindedir.

Yardımcı Önerme 3.3.1.3, (3.3.3.25) biçimindeki ortalamalar için geçerlidir. Yani $f\in L_p^{loc}(G)$ $(1\le p<\infty)$ ise $L_p^{loc}(G)$'deki $\varepsilon_j\to 0$ $(j=1,\dots,n)$ iken F(x, ε)→f(x) dır. Ek olarak p > 1 için Teorem 1.1.27'de belirttiği gibi hemen hemen her yerde x∈G için $F(x,\varepsilon)\to f(x)$ yakınsar $(\varepsilon_1=\dots=\varepsilon_n=\varepsilon, p=1)$. Yani, $f\in L_p^{loc}(G)$ise $\varepsilon_j\to 0$ iken (3.3.3.30) denklemi $f(x)$ fonksiyonu için bir integral gösterimi olur.

D_x^α , (3.3.3.30) eşitliğin her iki yanına uygulayalım. Ancak sağ tarafındaki ifadelerin çekirdeklerine operatörü doğrudan uygularsak,

$$D_x^\alpha F(x;\varepsilon)=\sum_{e\subseteq e^n}(-1)^{|\alpha|}\int_{\varepsilon^e}^{h^e} v^{-1^e}\phi^{(\alpha)}\left(x;v^e;h^{e'}\right)dv^e \tag{3.3.3.32}$$

elde edilir. Burada,

$$\phi^{(\alpha)}\left(x;v^{e};h^{e'}\right)=\int_{E^n} f(x+y)\left(\prod_{j\in e} v_j^{-1}\, D_{y_j}^{\alpha_j}\, D^{k_j}\, \tau_j\left(y_j v_j^{-1}\right)\right)$$

$$x\left(\prod_{j\in e'} h_j^{-1} D_{y_j}^{\alpha_j}\Omega_j\left(y_j h_j^{-1}\right)\right)dy \qquad (3.3.3.33)$$

f, e^n içerisindeki tüm e'ler için $D^{\alpha}f$ şeklinde genelleştirilmiş türevlere sahip olsun. Burada yer alan $\ell_e=\left(\ell_{e,1},....\ell_{e,n}\right)$, aşağıdaki şartları sağlayan vektör bileşenleridir.

$$\ell_{e,j}\le \alpha_j+k_j \quad (j\in e)\,, \qquad \ell_{e,j}\le\alpha_j \quad (j\in e')$$

Daha sonra $\phi^{(\alpha)}\left(x;v^{e};h^{e'}\right)$ fonksiyonu

$$\phi^{(\alpha)}\left(x;v^{e};h^{e'}\right)$$

$$=(-1)^{|\ell_e|}\int_{E^n} D^{\ell_e} f(x+y)\left(\prod_{j\in e} v_j^{-1-\alpha_j+\ell_{e,j}}\, D^{k_j+\alpha_j-\ell_{e,j}}\, \tau_j\left(y_j v_j^{-1}\right)\right)$$

$$x\left(\prod_{j\in e'} h_j^{-1-\alpha_j+\ell_{e,j}}\, D^{\alpha_j-\ell_{e,j}}\, \Omega_j\left(y_j h_j^{-1}\right)\right)dy \qquad (3.3.3.34)$$

şeklinde gösterilebilir. (3.3.3.34), (3.3.3.32) ve $D^{\alpha}f$ için elde edilen integral gösterimi $S_p^{\ell}(W)$ sınıfındaki fonksiyonların özelliklerindeki çalışmalarda kullanılmaktadır.

$0<b<1$ ve θ_j ve 1 yada -1 olsun. $\Omega_j(t)$'nin çekirdeklerini oluşturmak için

$$\operatorname{supp} K_j\subset\left\{t:1-b<\frac{t}{\theta_j}<1\right\} \qquad (j=1,...,n)$$

alınacaktır ve buradan şu sonucu çıkartılabilir. Tüm ε_j’ler için $0 < \varepsilon_j < h_j$, $j = 1,...,n$, (3.3.3.30) ve (3.3.3.32) ifadelerin sağ tarafındaki ifadeler kenarları koordinat eksenlerine paralel olan dikdörtgenler prizmasındaki x köşe noktalarındaki f fonksiyonunun değerlerini içerir.

Daha kesin bir ifade ile $x + \square^{(h)}$ kümesindeki noktalarda buna dahildir. Buradan,

$$\square^{(h)} = \left\{ y \ ; \ 0 < \frac{y_j}{\theta_j} < h_j \qquad (j = 1,...,n) \right\} \tag{3.3.3.35}$$

şeklinde tanımlanır. (3.3.3.30) formülün bir sonucunu açıklayalım. $f \in L_p(E^n)$ $(1 \le p < \infty)$, $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = \varepsilon$, ve $h_1 = \ldots = h_n = h$ olsun. (3.3.3.30) denklemin sağ tarafındaki ifade I^e genel terimi ile gösterilirse Hölder’s eşitsizliği (2.1.1) yardımı ile,

$$\left|I^e\right| \le \left(\prod_{j \in e} \int_{\varepsilon}^{h} v_j^{-1-\frac{1}{p}} \, dv_j \right) \|f\|_p \left(\prod_{j \in e} \left\| D^{k_j} \tau_j \right\|_{p'} \right)$$

$$x \left(\prod_{j \in e'} h_j^{-\frac{1}{p}} \left\| \Omega_j \right\|_{p'} \right) \le C \|f\|_p \, \varepsilon^{-\frac{\left|1^e\right|}{p}} \, h^{-\frac{\left|1^{e'}\right|}{p}}$$

elde edilir ve buradaki c sabiti; f, ε ve h’dan bağımsızdır.

$e' \ne \varphi$ $(e \ne e^n)$ ise $h \to \infty$ iken $I^e \to 0$ olur. O halde (3.3.3.30) denklemi,

$$F(x;\varepsilon) =$$

$$\lim_{h \to \infty} \int_{\varepsilon}^{h} \cdots \int_{\varepsilon}^{h} \frac{dv_1 \ldots dv_n}{v_1^2 \ldots v_n^2} \int_{E^n} f(x+y) \prod_{j=1}^{n} D^{k_j} \tau_j\left(y_j v_j^{-1}\right) dy$$

$$= \lim_{h \to \infty} \int_{1/h}^{1/\varepsilon} \cdots \int_{1/h}^{1/\varepsilon} du_1 \ldots du_n \int_{E^n} f(x+y) \prod_{j=1}^{n} D^{k_j} \tau_j\left(y_j u_j\right) dy$$

bulunur. $\varepsilon \to 0$ iken E^n'deki hemen hemen her yerinde $\frac{1}{h}, \varepsilon$ ile ve $\frac{1}{\varepsilon}, h$ ile değiştirilse dahi aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$f(x) = \lim_{h \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{h} \ldots \int_{\varepsilon}^{h} du_1 \ldots du_n \int_{E^n} f(x+y) \prod_{j=1}^{n} D^{k_j} \tau_j \left(y_j \, u_j \right) dy$$

Bu formül Fourier formülüne benzerdir (8).

4. BÖLÜM

4.1. Karmaşık Türevler Yardımıyla Kurulan Normlu Uzaylarda İz Düşüm Teoremi

Bu çalışmada, $n-$boyutlu bölgede tanımlı serbest $n+1 \le |\Sigma| \le 2^n$ sayıda karmaşık (karmaşık olmayan) türevleri ile elde edilmiş normlu ağırlık fonksiyon uzaylarında fonksiyonunun iz özellikleri araştırılmıştır. Dolayısıyla fonksiyonun s-boyutlu yüzeyinin sınırındaki türevlerin $L_p(\Gamma s)$ normları ile bu fonksiyonların genel ağırlık ile $L_p(G)$ normu arasında kıyaslama yapılmıştır. Bu teoremi ispatlamak için değişken parametreli integral gösteriminin özel bir durumu kullanılmıştır.

Bu çalışmada kullanılacak temel tanımlar şunlardır:

$e_n = \{1,2,...,n\}$ doğal sayılar kümesi için $\Sigma \neq \varnothing$, e_n'in belirlenen bir alt kümesi ve $\Sigma^* \subseteq \Sigma$ olsun. Özel durumda $\Sigma^* = \varnothing$ ya da $\Sigma^* = \Sigma$ alınabilir.

Herhangi bir E kümesinin gücünü (eleman sayısını), $|E|$ ile gösterelim. Örneğin, $E = e_n$ ise $|E| = |e_n| = n$ olur. $|\Sigma|$'yı

$$|\Sigma| = |\Sigma \setminus \Sigma^*| + |\Sigma^*|$$

şeklinde gösterelim.

$\Sigma \setminus \Sigma^*$ kümesinin tüm mümkün alt kümelerinin ($\varnothing$ ve $\Sigma \setminus \Sigma^*$ de dahil olmalı) sayısı, $N = 2^{|\Sigma \setminus \Sigma^*|}$ dır. Kolaylık sağlaması açısından $\Sigma \setminus \Sigma^*$'nün tüm mümkün alt kümelerini $e^1, e^2, ..., e^N$ ile gösterelim.

$i \in \Sigma^*$ elemanı ve $e^k \subseteq \Sigma \setminus \Sigma^*$ $(k = 1,...,N)$ karşılık gelen bileşenleri, pozitif tam sayı olan vektör $m^{i,k} = \left(m_1^{i,k},....,m_n^{i,k}\right)$ şeklinde ve $\operatorname{supp} m^{i,k}, m^{i,k}$ vektörün destekleyicisini göstersin. Yani, $m^{i,k}$ vektörünün sıfırdan farklı $m_j^{i,k}$ koordinatlarına uygun tüm indekslerin kümesi

$$e^k \cup \{i\} \subseteq \operatorname{supp} m^{i,k} \subseteq \Sigma \qquad \left(i \in \Sigma^*, k = 1,...,N\right)$$

olsun.

e^k alt kümesi ve $i = 0$'a karşılık gelen vektörü $m^{0,k} = \left(m_1^{0,k},...,m_n^{0,k}\right)$ ile gösterelim. Ayrıca, $e^k \subseteq \operatorname{supp} m^{0,k} \subseteq \Sigma$ olsun.

Diğer taraftan $m^{i,k} = \left(m_1^{i,k},....,m_n^{i,k}\right)$ vektörünün her bir bileşeni $i \in \Sigma^*$ ve $k = 1,...,N$ için

$$m_j^{0,k} > 0 \quad , \quad j \in e^k$$

$$m_j^{0,k} \geq 0 \quad , \quad j \in \Sigma \setminus e^k$$

$$m_j^{0,k} = 0 \quad , \quad j \in e_n \setminus \Sigma$$

ve

$$m_j^{i,k} > 0 \quad , \quad j \in \{i\} \cup e^k$$

$$m_j^{i,k} \geq 0 \quad , \quad j \in \Sigma \setminus \left(\{ i \} \cup e^k\right)$$

$$m_j^{i,k} = 0 \quad , \quad j \in e_n \setminus \Sigma$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda;

$$m = \left(m_1,....,m_n\right), \quad m_j \geq 0 \quad \left(j = 1,2,...,n\right)$$

vektörü için $D^m f\left(x_1, x_2,....,x_n\right)$ gösterimi

$$D^m f\left(x_1, x_2,....,x_n\right) = D_1^{m_1}....D_n^{m} f = \frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} ..... \frac{\partial^{m_1}}{\partial x_n^{m_n}} f$$

şeklinde yazılır.

$f = f(x_1,....,x_n)$, $G \subset E_n$ bölgesinde ölçülebilir ve $m_1 + m_2 + ... + m_n$ mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $g = g(x) > 0$ için bu bölgede tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ise;

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left(\int_G |f|^p \, dx \right)^{1/p}$$

$$\|gf\|_{L_p(G)} = \|f\|_{L_p(G;g)} = \left(\int_G \left(g|f|\right)^p dx \right)^{1/p} \qquad , \qquad 1 < p < \infty$$

normları tanımlanır.

Tanım 4.1.1.

G bölgesinde tanımlı ve Sobolev anlamında $D^{m^{i,k}} f \ \left(i \in \Sigma^* \cup \{0\} = \Sigma_0^* , \ k = 1,...,N \right)$ genelleşmiş türevleri sırasıyla $L_p(G; g_{ik})$ ağırlık uzayların elemanları olan $f(x)$ fonksiyonlar sınıfı,

$$\bigcap_{i \in \Sigma_0^*} \bigcap_{k=1}^{N} \overset{<m^{i,k}>}{L_p} (G; g_{ik}) \qquad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla

$$\bigcap_{i \in \Sigma_0^*} \bigcap_{k=1}^{N} \overset{<m^{i,k}>}{L_p} (G; g_{ik}) = \left\{ f : D^{m^{i,k}} f \in L_p(G; g_{ik}) \ , \ i \in \Sigma_0^* \ , \ k = 1,...N \right\}$$

olur ve bu uzay altında tanımlanan norm

$$\|f\|_{\bigcap_{i \in \Sigma_0^*} \bigcap_{k=1}^{N} \overset{<m^{i,k}>}{L_p} (G; g_{ik})} = \|f\|_{\cap} = \sum_{i \in \Sigma_0^*} \sum_{k=1}^{N} \|f\|_{\overset{<m^{i,k}>}{L_p} (G; g_{ik})} \qquad (4.1.2)$$

şeklinde yazılır.

Sonraki aşamada ise;

$$\bigcap_{i\in\Sigma_0^*}\bigcap_{k=1}^{N} L_p^{<m^{i,k}>}(G;g_{ik})$$

gösterimi, E^n ’de sonsuz mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlar kümesinin (4.1.2) normu ile kapanışı şeklinde kabul edilecektir.

(4.1.1) sınıfında $\Sigma^* \neq \varnothing$ ise;

$$\bigcap_{k=1}^{|\Sigma|} L_p^{<m^k>}(G;g_k)$$

ağırlık fonksiyonlar uzayı elde edilir. Bu uzay A.D. Dzhabrailov tarafından araştırılmıştır (12). Özel durumda $g=1$ ve $m^k\left(k=1,...,|\Sigma|\right)$ vektörü sıfır vektöründen farklı ve herhangi

$$\bar{r}=(r_1,...,r_n),\ (\operatorname{supp} r=\Sigma)$$

vektörünün koordinat eksenleri ve yüzeyindeki iz düşümü şeklinde alınırsa,

$$S_p^{\bar{r}}W(\Omega)$$

Nikolski’s uzayı elde edilir. Bu uzay hakkındaki genel bilgiler; O.V. Besov vd. ve A.D. Dzhabrailov’un çalışmalarından elde edilebilir (12,8).

(4.1.1) uzayında $\Sigma^* = \Sigma$ ise o zaman (4.1.1) uzayı

$$\bigcap_{i\in\Sigma_0^*} L_p^{<m^i>}(G;g_i)$$

uzayına dönüşür. Bu uzay, ağırlık fonksiyonu durumunda A.D. Dzhabrailov ve ağırlık fonksiyonu olmayan durumunda ise V.P.Il tarafından incelenmiştir (12, 17).

Tanım 4.1.2.

$\varphi = \varphi(x;\eta) = (\varphi(x,\eta_1),....,\varphi(x,\eta_n))$ vektör fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\eta_i = \begin{cases} v_i & ; \ i \in \Sigma \setminus \Sigma^* \\ t & ; \ i \in \Sigma \end{cases}$$

ve $i \in e^n \setminus \Sigma$ iken $\varphi_i \equiv 1$ şeklinde yazılır.

$x \in G \subset E^n$ için $\varphi_i(x;\eta_i) > 0$ ve $\eta_i > 0$ ve $\varphi_i(x;\eta_i)$ $(i \in \Sigma)$ fonksiyonu η_i parametresine göre artan ve diferansiyellenebilen fonksiyonu için,

$$\lim_{\eta_i \to 0^+} \varphi_i(x;\eta_i) = 0 \qquad (i \in \Sigma)$$

olsun.

$\operatorname{supp} \delta = \Sigma$ olmak üzere, $\delta = (\delta_1,...,\delta_n)$ vektörü için $\delta_i = +1$ ve $\delta_i = -1$ $(i \in \Sigma)$ olsun. Bu durumda δ vektörlerin sayısı, $2^{|\Sigma|}$ olur. Farklı sayıdaki vektörleri,

$$\delta_j \quad \left(j = 1,...,2^{|\Sigma|}\right)$$

ile gösterelim ve

$R_\delta = R_\delta(\varphi;H)$ ile

$$\bigcup_{0<\eta_i<H_i} \left\{ y^\varepsilon : c_i \le \frac{y_i \delta_i}{\varphi_i(x;\eta_i)} \le c_i^* \ (i \in \Sigma) \right\} \qquad (c_i, c_i^* \text{ birer pozitif sabitlerdir}).$$

kümesini gösterelim. supp $H = \Sigma$ ve supp $y = \Sigma$ olsun. Yani;

$$\text{supp } y = \begin{cases} y_j \neq 0 \ ; \ \text{eğer} \quad j \in \Sigma \\ y_j = 0 \ ; \ \text{eğer} \quad j \in e_n \setminus \Sigma \end{cases}$$

$$\text{supp } H = \begin{cases} H_j \neq 0 \ ; \ \text{eğer} \quad j \in \Sigma \\ H_j = 0 \ ; \ \text{eğer} \quad j \in e_n \setminus \Sigma \end{cases}$$

ve

$$\eta_i = \begin{cases} v_i & ; \ i \in \Sigma \setminus \Sigma^* \\ t & ; \ i \in \Sigma^* \end{cases}$$

$$H_i = \begin{cases} H_i & ; \ i \in \Sigma \setminus \Sigma^* \\ T & ; \ i \in \Sigma^* \end{cases}$$

olsun.

$x + R_\delta(\varphi, H)$ kümesi, tepe noktası $x \in G$ olan ve gücü (eleman sayısı) $|\Sigma|$ olan "φ-yarı boynuz" kümesi olarak adlandırılacaktır. Her bir x noktasında belirli bir H için birbirinden farklı $2^{|\Sigma|}$ sayıda "φ-yarı boynuz"lar elde edilir. $\delta = \delta^j$ alındığında $|\Sigma|$ gücüne sahip tek bir "φ-yarı boynuz" elde edilir. Özel durumda, $\Sigma^* = \Sigma = e_n$ iken "φ-yarı boynuz", "φ-boynuz" una dönüşür (7(c,d)).

Tanım 4.1.3.

$H > 0$ sayısı ve δ^j vektörü, $\forall x \in \overline{G}$ ve

$$x + R_{\delta^{j0}}(\varphi; H) \subset G$$

ise $\overline{G} \subset G$ alt bölgesi, x_j değişkenine göre "φ-yarı boynuz" koşulunu sağlar denir.

$G \subset E^n$ bölgesi $x_j (j \in \Sigma)$ değişkenlerine göre "φ-yarı boynuz" koşulunu sağlar. Ancak G bölgesinin sonlu sayıda alt bölgeleri $x_j (j \in \Sigma)$ değişkenlerine göre "φ-yarı boynuz" koşullarını sağlamak zorundadır. Bu özelliğe sahip bölgeleri $A(\varphi; H; T; \Sigma, \Sigma^*)$ şeklinde gösterelim.

Tanım 4.1.4.

$\overline{G_i}\,(i=1,...,\gamma)$ alt bölgeleri G bölgesini örtsün ve $G \in A(\varphi; H; T; \Sigma; \Sigma^*)$ olsun. $b=b(x)$ fonksiyonu, $y \in R_{\delta^j}$ ve $x \in \overline{G_i}$ için

$$c_i \le \frac{b(x)}{b(x+y)} \le c_i^* \qquad (\ c_i > 0 \ \text{ve} \ \ c_i^* > 0 \ \text{sabittir})$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda $\delta^i \subseteq \delta^k$ $\left(k=1,...,2^{|\Sigma|}\right)$ vektörleri seçilecektir. $\forall x \in \overline{G_i}$ 'ler için $x + R_{\delta^i} \subset G$ ise; $b=b(x)$ fonksiyonu $G \in A(\varphi; H; T; \Sigma; \Sigma^*)$ bölgesinde (B) koşulunu sağlar denir. Kolaylık sağlaması açısından ilerde $\Sigma = e_n$ ve $\Sigma^* \subseteq e_n$ alalım.

Γ_s, $s-$boyutlu $(1 \le s \le n-1)$ ve aşağıdaki

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_s = x_s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{s+1} = \psi_{s+1}(x_1,...,x_s) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \psi_n(x_1,...,x_s) \end{array}\right\} \qquad (4.1.3)$$

denklemlerle tanımlanan yüzey olsun. Burada $\psi_i(x^*)$, $(x^* = (x_1,...,x_s))$ $(i=s+1,...,n)$, $s-$ boyutlu Ω_s bölgesinde tanımlı ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar olsun. Ayrıca,

$$\sup_{x^* \in \Omega_s} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \psi_i(x^*) \right| \le M \qquad (k=1,...,s;\ i=s+1,...,n)$$

koşullarını sağlasın. Bu özelliklere sahip yüzeyleri $A^{(1)}$ ile gösterelim. $\Gamma_s + z^{**}, s-$ boyutlu yüzey ile Γ_s yüzeyi aşağıdaki denklemlerle bağlıdır.

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_s = x_s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{s+1} = \psi_{s+1}\left(x^*\right) + z_{s+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \psi_n\left(x^*\right) + z_n \end{array}\right\}$$

Burada yer alan $\psi_i\left(x^*\right)$, $\left(i = s+1,\dots,n\right)$ (4.1.3) ifadesi, Γ_s yüzey denklemindeki fonksiyon ile aynıdır. $\Gamma_s \subset \partial G$ durumunda $z^{**} = \left(0,\dots,0,z_{s+1},\dots,z_n\right)$ 'i öyle seçilmelidir ki $\Gamma_s + z^{**} \subset G$ olsun.

$\Gamma_s \in A^{(1)}$ ve $\Gamma_s \subset G$ olduğundan,

$$\left(\int_{\Gamma_s} \left|D^\lambda f\Big|_{\Gamma_s}\right|^p d\Gamma_s\right)^{1/p} \le \left(\int_{\Omega_s} \left|D^\lambda f\left(P\left(x^*\right)\right)\right|^p \left|\mathcal{F}\right|^p dx^*\right)^{1/p}$$

$$\le C\left(\int_{\Omega_s} \left|D^\lambda f\left(P\left(x^*\right)\right)\right|^p dx^*\right)^{1/p} \qquad (4.1.4)$$

dır. Burada $\mathcal{F}$, Jakobian matrisi ve $P\left(x^*\right) = \left(x_1,\dots,x_s;\ \psi_{s+1}\left(x_1,\dots,x_s\right),\dots,\psi_n\left(x_1,\dots x_s\right)\right)$ şeklindedir.

Γ_s, G bölgesine ait değilse, $\Gamma_s \subset \partial G$ tanımından dolayı $\Gamma_s \subset \partial G$ ve

$$\left(\int_{\Gamma_s} \left|D^\lambda f\right|_{\Gamma_s}\right|^p d\Gamma_s \Bigg)^{1/p} = \lim_{\left|z^{**}\right|\to 0}\left(\int_{\Gamma_s+z^{**}} \left|D^\lambda f\right|_{\Gamma_s+z^{**}}\right|^p d\left(\Gamma_s + z^{**}\right)\Bigg)^{1/p}$$

$$\leq \lim_{\left|z^{**}\right|\to 0}\left(\int_{\Omega_s} \left|D^\lambda f\left(P\left(x^*\right)+z^{**}\right)\right|^p dx^*\right)^{1/p}$$

olur. Buradaki $P\left(x^*\right)+z^{**} = \left(x_1,\ldots,x_s;\psi_{s+1}(x^*)+z_{s+1},\ldots,\psi_n(x^*)+z_n\right)$dır.

$$\lambda = \left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\lambda_j \geq 0\left(j=1,\ldots,n\right)\ ,\ \ m^{i.k} = \left(m_1^{i.k},\ldots,m_n^{i.k}\right)$$

$\left(i \in e_n \cup \{0\};\ k=1,2,\ldots N\ ;\ N = 2^{\left|e_n/\Sigma^*\right|}\right)$ vektörleri tamsayı koordinatlarına sahip ve aşağıdaki koşulları sağlansın.

i) $e^k \subseteq \operatorname{supp} m^{0,k} \subseteq e_n$

$e^k \cup \{i\} \subseteq \operatorname{supp} m^{i.k} \subseteq e_n\ ;\ \left(i \in \Sigma^*; k=1,2,\ldots,N\right)$

ii) $\lambda_j < m_j^{0,k}\ \left(j \in e^k\right)$

$\lambda_j \geq m_j^{0,k}\ \left(j \in e_n \setminus e^k\right)$

iii) $\lambda_j < m_j^{i,k}\ \left(j \in \{i\} \cup e^k\right)$

$\lambda_j \geq m_j^{i,k}\ \left(j \in e_n \setminus \{i\} \cup e^k\right)$ $\qquad\qquad\left(k=1,2,\ldots,N\right)$

Teorem 4.1.5.

$$f \in \bigcap_{i\in\Sigma_0^*} \bigcap_{k=1}^{2^{\left|e_n \setminus \Sigma^*\right|}} L_p^{<m^{i,k}>}(G;g_{ik}) \quad , \qquad 1<p<\infty$$

olsun. Burada,

I) $g_{ik} = \prod_{j\in e_n} \left[b_j(x)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \qquad \left(i\in\Sigma_0^*,\ k=1,2,....,N\right)$

$$\gamma_j = \begin{cases} 0 & ;\ j\in\{1,....,s\} \\ \dfrac{1}{p} & ;\ j\in\{s+1,....,n\} \end{cases}$$

II) $G \in A(\varphi;H;T;e_n;\Sigma^*)$, $\varphi = (b_1\tau_1,....,b_n\tau_n)$ vektör fonksiyondur.

$b_k = b_k(x)$, $(k=1,2,...,n)$ fonksiyonu (B) koşulunu sağlasın ve $\tau_j = \tau_j(\eta_j)$ diferansiyellenebilir fonksiyon için : $\tau_j'(\eta_j) > 0$,

$$\lim_{\eta_j\to 0} \tau_j(\eta_j) = 0 \ ; \quad \eta_j = h_j,\ j\in e_n \setminus \Sigma^* \ ; \quad \eta_j = T, i\in\Sigma^*$$

olsun. Ayrıca **(i, ii, iii)** koşuları ve

(a) $\displaystyle\int_0^{h_j} \left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)} < \infty \qquad \left(j\in e^k, i\in\Sigma_0^*,\ k=1,\ldots,N\right)$

(b) $\displaystyle\int_0^{T} \prod_{j\in\Sigma^*} \left[\tau_j(t)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \frac{d\tau_i(t)}{\tau_i(t)} < \infty \qquad \left(i\in\Sigma^*,\ k=1,\ldots,N\right)$

koşullar sağlansın.

Bu durumda $D^{\lambda} f\big|_{\Gamma_s} \in L_p(\Gamma_s)$ ve $T_0 > 0$, $H_{j_0} > 0$ öyle sayılardır ki, $0 < T \le T_0$ ve $0 \le h_j \le H_{j_0} \left(j \in e_n \setminus \Sigma\right)$ için,

$$\left\| D^{\lambda} f \big|_{\Gamma_s} \right\|_{L_p(\Gamma_s)} \le$$

$$\le C \sum_{i \in \Sigma_0^*} \sum_{k=1}^{N} W_{iks}(h,T) \left\| \prod_{j \in e_n} \left[b_j\right]^{m_j^{i,k} - \lambda_j - \gamma_j} D^{m^{i,k}} f \right\|_{L_p(G)}$$

eşitsizliği yazılır. $C =$ sabiti > 0, f, H_{j_0} ve T_0 'dan bağımsızdır.

Bu teoremin özel durumları O.V .Besov, L. D. Kudryavcev ve A. D. Dzhabrailov çalışmalarında incelenmiştir (7 (d,a), 20, 12).

İspat:

Teorem 4.1.5.'in ispatı için (21) integral ayrılışından yararlanılırsa,

$$\operatorname{supp} N^{i,k} = \Sigma_{ik} = \varnothing \qquad \left(i \in \Sigma_0^*, k = 1, \dots, N\right)$$

$$\Sigma^* \subseteq \Sigma = e_n = \{1,2,\dots,n\} \text{ ve } \varphi_j(x;\eta_j) = b_j(x)\,\tau_j(\eta_j) \;\; ; \;\; \eta_j = h_j\left(j \in \left(e_n \setminus \Sigma^*\right)\right) \setminus e^k \Big)$$

$$\eta_j = T\left(j \in \Sigma^*\right) \;\; ; \;\; \eta_j = v_j\left(j \in e^k\right)$$

olur. O halde integral ayrılışı,

$$D^{\lambda} f(x) = \sum_{k=1}^{N} C_{0k}(h;T) \int_0^h \prod_{j \in e^k} \left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{0,k} - \lambda_j} \frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)} \text{ x}$$

$$\text{x} \int_{E^n} \left\{ \prod_{j \in e_n} \left[b_j(x+y)\right]^{m_j^{0,k} - \lambda_j} \right\} D^{m^{0,k}} f(x+y)\, \phi_{ik\delta}^{**} \frac{dy}{\operatorname{mes}(R \cap E_n)_{0k}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{i \in \Sigma^*} C_{ik}(h) \int_0^T \left\{ \prod_{j \in \Sigma^*} \left[\tau_j(t)\right]^{m_j^{i,k} - \lambda_j} \right\} \frac{d\tau_i(t)}{\tau_i(t)} \int_0^h \prod_{j \in e^k} \left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{i,k} - \lambda_j} \text{ x}$$

$$\text{x } \frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)} \int_{E^n} \left\{ \prod_{j \in e_n} \left[b_j(x+y)\right]^{m_j^{i,k} - \lambda_j} D^{m^{i,k}} f(x+y)\, \phi_{ik\delta}^{**} \frac{dy}{\operatorname{mes}(R \cap E_n)_{ik}} \right. \qquad (4.1.5)$$

şeklinde yazılabilir (21). Burada,

1) $C_{0k}(h;T)=(-1)^{|m^{0,k}-\lambda|}2^{|e^k|}\prod_{j\in(e_n\backslash\Sigma^*)\backslash e^k}[\tau_j(h_j)]^{m_j^{0,k}-\lambda_j}\prod_{j\in\Sigma^*}[\tau_j(T)]^{m_j^{0,k}-\lambda_j}$

2) $C_{ik}(h)=(-1)^{|m^{i,k}-\lambda|}\,2^{1+|e^k|}\prod_{j\in(e_n\backslash\Sigma^*)\backslash e^k}[\tau_j(h_j)]^{m_j^{i,k}-\lambda_j}$

3) $\phi^{**}_{ik\delta}=\phi^{*}_{ik\delta}\prod_{j\in e_n}\left[\frac{b_j(x+y)}{b_j(x)}\right]^{\lambda_j}$,

$\phi^{*}_{ik\delta}=\phi_{ik\delta}\prod_{j\in e_n}\left[\frac{b_j(x)}{b_j(x+y)}\right]^{m_j^{i,k}}$

4) $mes(R\cap E^n)_{0k}=\prod_{j\in e_n}b_j(x)\prod_{j\in(e_n\backslash\Sigma^*)\backslash e^k}\tau_j(h_j)\prod_{j\in\Sigma^*}\tau_j(T)\prod_{j\in e^k}\tau_j(v_j)$

$(i\in\Sigma^*;k=1,...,N)$

$mes(R\cap E^n)_{ik}=\prod_{j\in e_n}b_j(x)\prod_{j\in(e_n\backslash\Sigma^*)\backslash e^k}\tau_j(h_j)\prod_{j\in\Sigma^*}\tau_j(T)\prod_{j\in e^k}\tau_j(v_j)$

(4.1.5) integral ayrılışı aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$D^\lambda f(x)=\sum_{k=1}^{N}Q_{0k}(x;h;T)\int_{E^n}\mathcal{F}_{0k}(x+y)\phi^{**}_{ok\delta}(...)dy$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i\in\Sigma^*}Q_{ik}(x;h)\int_{E^n}\mathcal{F}_{ik}(x+y)\phi^{**}_{ik\delta}(...)dy \qquad (4.1.6)$$

1) $Q_{0k}(x;h;T)=(-1)^{|m^{0,k}-\lambda|}\;2^{|e^k|}\int_0^h\prod_{j\in e^k}[\tau_j(v_j)]^{m_j^{0,k}-\lambda_j-\gamma_j}$

$$x\frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)}\frac{\prod_{j\in(e_n\backslash\Sigma^*)\backslash e^k}[\tau_j(h_j)]^{m_j^{0,k}-\lambda_j-\gamma_j}\prod_{j\in\Sigma^*}[\tau_j(T)]^{m_j^{0,k}-\lambda_j-\gamma_j}}{[mes(R\cap E^n)_{0k}]^{1-\gamma_j}}$$

$$\textbf{2)}\ Q_{ik}(x;h) = (-1)^{\left|m^{0,k}-\lambda\right|}\ 2^{1+\left|e^k\right|}\int_0^T \prod_{j\in\Sigma^*}\left[\tau_j(t)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j}\frac{d\tau_i(t)}{\tau_i(t)}\ x$$

$$x\int_0^h \prod_{j\in e^k}\left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j}\frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)}\ \frac{\prod_{j\in(e_n\backslash\Sigma^*)\backslash e^k}\left[\tau_j(h_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j}}{\left[mes(R\cap E_n)\right]^{1-\gamma_j}}$$

$$\textbf{3)}\ \mathcal{F}_{ik}(t) = D^{m^{i,k}}f(t)\prod_{j\in e_n}\left[b_j(t)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \tag{4.1.7}$$

$$\phi^{**}_{ik\delta}(\ldots) = \phi^{*}_{ik\delta}(\ldots)\prod_{j\in e_n}\left[\frac{b_j(x+y)}{b_j(x)}\right]^{\lambda_j-\gamma_j}$$

$$\gamma_j = \begin{cases} 0 & ;\ j\in\{1,\ldots,s\} \\ \dfrac{1}{p} & ;\ j\in\{s+1,\ldots,n\} \end{cases}$$

olur.

$G = \bigcup_{q=1}^{M} U_q$ alındığında $U_q + R_{\delta^q} \subset G$ olur. Bu durumda U_q, alt bölgesi "φ-yarı boynuz" koşulunu sağlar. $U_q + R_{\delta^q}$ bölgesi için $F_q = F\left(D^\lambda f; U_q + R_{\delta^q}\right)$ yardımcı fonksiyonunu ele alındığında,

$$\left\{U_q + R_{\delta^q}\right\} \cap \left\{\Gamma_s + z^{**}\right\}$$

bölgesinde D^λ f fonksiyonu ile çakışır. Dolayısıyla,

$$F_q = F\left(D^\lambda f; U_q + R_{\delta^q}\right) =$$

$$Q_{0k}\left[P(x^*) + z^{**}; h; T\right]\int_{E^n}\tilde{\mathcal{F}}_{0kq}\left[P(x^*) + z^{**} + y\right]\ x\ \phi_{0k\delta^q}dy +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i\in\Sigma^*} Q_{ik}\left[P(x^*) + z^{**}; h\right]\int_{E^n}\tilde{\mathcal{F}}_{ikq}\left[P(x^*) + z^{**} + y\right]\phi_{0k\delta^q}dy \tag{4.1.8}$$

olur. Burada $\tilde{\mathcal{F}}_{ikq} = \chi\left(U_q + R_{\delta^q}\right) \mathcal{F}_{ikq}$ dur. $\chi\left(E^n\right)$, E^n 'in karakteristik fonksiyonudur.

(4.1.6) ifadesinde $\delta = \delta^q$ kabul edilip (4.1.7) ile karşılaştırılırsa, $D^\lambda f$ ve $\mathcal{F}_q$ fonksiyonlarının, $\Gamma_s + z^{**}$ yüzeyi ile $U_q + R_{\delta^q}$ bölgesinin kesişiminde çakıştığı görülür.

(4.1.4) ifadesinden,

$$\left\| D^\lambda f \,\big|_{\Gamma_s + z^{**}} \right\|_{L_p\left(\Gamma_s + z^{**}\right)} \le C \left\| D^\lambda f\left(P(.) + z^{**}\right) \right\|_{L_p(G_s)}$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} \sum_{i \in \Sigma_0^*} \sum_{q=1}^{M} \left\| \mathcal{F}_{ikq} \right\|_{L_p(E_s)}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada önce $\left\| \mathcal{F}_{ikq} \right\|_{L_p(E_s)}$ 'i değerlendirelim ve kolaylık sağlaması açısından $\delta^q = (1,...,1)$ alalım.

$y = \left(y_1,..., y_s, y_{s+1},..., y_n\right)$ vektörünü $y = (y', y'')$ şeklinde gösterelim. Burada $y' = \left(y_1,..., y_s\right)$ ve $y'' = \left(y_{s+1},..., y_n\right)$ dir. Kordinatları;

$$x_k \le y_k \le x_k + b_k\left(P\left(x^*\right) + z^{**}\right) \tau_k\left(\eta_k\right) \qquad (k = 1,..., s)$$

eşitsizliğini sağlayan y' noktalarının kümesini Ω_s^* $(\ldots)$ ile gösterelim. Koordinatları;

$$\psi_k\left(x^*\right) + z_k \le y_k \le z_k + \psi_k\left(x^*\right) + b_k\left(P\left(x^*\right) + z^{**}\right) \tau_k\left(\eta_k\right) \quad (k = s+1,..., n)$$

eşitsizliğini sağlayan y'' noktalarının kümesini ise $\Omega_{n\text{-}s}^{**}$ $(\ldots)$ ile gösterelim.

Açıktır ki,

$$mes\Omega_s^*(...) = \prod_{j\in\{1,...,s\}} b_j\left(P\left(x^*\right)+z^{**}\right)\ \tau_j\left(\eta_j\right)$$

$$mes\Omega_{n-s}^{**}(...) = \prod_{j\in\{s+1,...,n\}} b_j\left(P\left(x^*\right)+z^{**}\right)\ \tau_j\left(\eta_j\right)$$

b_k fonksiyonları ve G, (B) koşulunu sağladığından ve çekirdek fonksiyonunun finitlik özelliğinin yardımıyla eşitsizlik,

$$\left|\tilde{\mathcal{F}}_{ikq}\right| \le C \prod_{j\in(e_n\backslash\Sigma^*)\backslash e^k} \left[\tau_j(h_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \int_0^T \prod_{j\in\Sigma^*}\left[\tau_j(t)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \frac{d\tau_i(t)}{\tau_i(t)}$$

$$x\int_0^h \prod_{j\in e^k} \left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)} \frac{1}{\left\{mes\Omega_s^*(...)mes\,\Omega_{n-s}^{**}(...)\right\}^{1-\gamma_j}}$$

$$x \int_{\Omega_s^*(...)} dy' \int_{\Omega_{n-s}^{**}(...)} \left|\mathcal{F}_{ikq}\left(y';y''\right)\right| dy'' \qquad (4.1.9)$$

şeklinde yazılabilir. Hölder eşitsizliği (2.2.1) kullanıldığında,

$$\int_{\Omega_{n-s}^{**}(...)} \left|\mathcal{F}_{ikq}\left(y';y''\right)\right| dy'' \le C\left\|\mathcal{F}_{ikq}\left(y';.\right)\right\|_{L_p(E_{n-s})} \left\{mes\Omega_{n-s}^{**}(...)\right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

olur ve

$$\left|\tilde{\mathcal{F}}_{ikq}\right| \le C \prod_{j\in(e_n\backslash\Sigma^*)\backslash e^k} \left[\tau_j(h_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \int_0^T \prod_{j\in\Sigma^*}\left[\tau_j(t)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \frac{d\tau_i(t)}{\tau_i(t)}\, x$$

$$x\int_0^h \prod_{j\in e^k} \left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} \frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)} \frac{1}{mes\Omega_s^*(...)} \int_{\Omega_s^*(...)} \left\|\mathcal{F}_{kq}\left(y',.\right)\right\|_{L_p(E_{n-s})} dy' \quad (4.1.10)$$

şeklinde yazılır. Tekrar Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_{\Omega_s^*(\dots)} \left\| \mathcal{F}_{ikq}(y',.) \right\|_{L_p(E_{n-s})} dy' \le C\left\{ mes\Omega_s^*(\dots)\right\}^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_s^*(\dots)} \left\| \mathcal{F}_{ikq}(y',.) \right\|^p dy' \right)^{1/p}$$

olur ve

$$\left\| \tilde{\mathcal{F}}_{ikq} \right\|_{L_p(E_s)} \le C\, W_{iks}(h) \left\{ \int_{E_s} \frac{dx'}{mes\Omega_s^*(\dots)} \int_{\Omega_s^*(\dots)} \left\| \mathcal{F}_{ikq}(y',.) \right\|^p_{L_p(E_{n-s})} dy' \right\}^{1/p}$$

$$\le C\, W_{iks}(h) \left\| \mathcal{F}_{ikq} \right\|_{L_p(E_n)}$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde;

$$\left\| \tilde{\mathcal{F}}_{0kq} \right\|_{L_p(E_s)} \le C\, W_{0ks}(h;T) \left\| \mathcal{F}_{0kq} \right\|_{L_p(E_n)} \qquad (4.1.11)$$

gösterilebilir.

(4.1.10) ve (4.1.11) eşitsizliklerinden,

$$\left\| D^{\lambda} f\big|_{\Gamma_s + z^{**}} \right\|_{L_p(\Gamma_s + z^{**})} \le C \sum_{k=1}^{N} \sum_{i \in \Sigma_0^*} \sum_{q=1}^{M} \left\| \mathcal{F}_{ikq} \right\|_{L_p(E_s)}$$

$$\le C \sum_{k=1}^{N} \sum_{i \in \Sigma_0^*} W_{iks} \left(\sum_{q=1}^{M} \left\| \mathcal{F}_{ikq} \right\|_{L_p(E_n)} \right)$$

$$\le C \sum_{k=1}^{N} \sum_{i \in \Sigma_0^*} W_{iks} \left\| \prod_{j \in e^n} \left[b_j \right]^{m_j^{i,k} - \lambda_j - \gamma_j} D^{m^{i,k}} f \right\|_{L_p(G)} \qquad (4.1.12)$$

elde edilir. Burada,

$$\textbf{1)}\ W_{0ks}(h;T)\prod_{j\in\left(e_n\setminus\Sigma^*\right)\setminus e^k\cap\{s+1,\dots,n\}}\left[\tau_j(h_j)\right]^{m_j^{0,k}-\lambda_j-\frac{1}{p}}\prod_{j\in\Sigma^*\cap\{s+1,\dots,n\}}\left[\tau_j(T)\right]^{m_j^{0,k}-\lambda_j-\frac{1}{p}}\ x$$

$$\prod_{j\in\left(e_n\setminus\Sigma\right)\setminus e^k\cap\{1,\dots,s\}}\left[\tau_j(h_j)\right]^{m_j^{0,k}-\lambda_j}\prod_{j\in\Sigma^*\cap\{1,\dots,s\}}\left[\tau_j(T)\right]^{m_j^{0,k}-\lambda_j}\prod_{j\in e^k\cap\{s+1,\dots,n\}}\ x$$

$$x\int_0^{h_j}\left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{0,k}-\lambda_j-\frac{1}{p}}\ \frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)}\prod_{j\in e^k\cap\{1,\dots,s\}}\ \int_0^{h_j}\left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{0,k}-\lambda_j}\ \frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)}$$

$$\textbf{2)}\ W_{iks}(h)=\prod_{j\in\left(e_n\setminus\Sigma^*\right)\setminus e^k\cap\{s+1,\dots,n\}}\left[\tau_j(h_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\frac{1}{p}}\ .\prod_{j\in\left(e_n\setminus\Sigma^*\right)\setminus e^k\cap\{1,\dots,s\}}\left[\tau_j(h_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j}\ x$$

$$x\int_0^{T}\prod_{j\in\Sigma^*\cap\{s+1,\dots,n\}}\left[\tau_j(t)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\frac{1}{p}}\prod_{j\in\Sigma^*\cap\{1,\dots,s\}}\left[\tau_j(t)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j}\ \frac{d\tau_i(t)}{\tau_i(t)}\prod_{j\in e^k\cap\{s+1,\dots,n\}}$$

$$x\int_0^{h_j}\left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\frac{1}{p}}\ \frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)}\prod_{j\in e^k\cap\{1,\dots,s\}}\ \int_0^{h_j}\left[\tau_j(v_j)\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j}\ \frac{d\tau_j(v_j)}{\tau_j(v_j)}$$

dır. $C>0$ sabiti, f, H_j ve T_0 bağlı değildir. (4.1.12) eşitsizliğinde $\left|z^{**}\right|\to 0$ iken

$$\left\|D^\lambda f\big|_{\Gamma s}\right\|_{L_p(G)}\le\lim_{\left|z^{**}\right|\to 0}\left\|D^\lambda f\big|_{\Gamma s+z^{**}}\right\|_{L_p\left(\Gamma s+z^{**}\right)}$$

$$\le C\sum_{k=1}^{N}\ \sum_{i\in\Sigma_0^*} W_{iks}\left\|\prod_{j\in e_n}\left[b_j\right]^{m_j^{i,k}-\lambda_j-\gamma_j} D^{m^{i,k}} f\right\|_{L_p(G)} \qquad (4.1.13)$$

elde edilir. Bu durumda teorem ispat edilmiş olur.

KAYNAKLAR

[1] **Adams, R.A.:** Sobolev spaces, Akademik Pres, edition (july 2003)

[2] **Aronszojn, N.:** on coercive ırtegro – differential forms; Conference on Partial
Differantial Equations, University of Kansas, Summer 1954, Tech. Report No. 14, 94–106 (1955)

[3] **Adams, R.A., and Fournier, j. :** Some İmbedding theorems for sobolev spaces, Canad. j. Math. 23 (1971), 517 – 530.

[4] **Babic, V. M., and L. N. Slobodeckii:** On the boun dedness of the Dirichlet integral, Dokl. Akad Nauk SSSR, 106, No. 4, 604–607 (1956). (Russian) (M.R. 17,959)

[5] **Balcı, M.:**

a) Araliz, Cilt II, Ankara, 1997.

b) Reel Analiz, Ertem Matbaası, Ankara, 1998.

[6] **Bayraktar, M.,** Fonksiyonel Analiz, A.Ü Yayınları, No: 789, Erzurum, 1996.

[7] **Besov, O.V.:**

a) Investigation of a family function spaces in connection with theorems of imbedding and extensi on, Trudy Mat. Inst. Steklov., 60 (1961), 42-81. Transl.: Amer. Math. Soc. Translations, ser. 2, 40(1964), 85–126.

b) On Coercivity in nonisotropic Sobolev spaces, Mat. Sb., 73 (115), No.4, 585-599 (1967). Transl: Math, USSR Sb., 2(1967), 521-534.

c) Integral representations of functions and embedding theorems for a domain with flexible harn Conditio. Trudy Math. Inst. Steklov (Proc. Steklov Inst. Math.), 170, 12–30 (1985).

d) Sobolev's imbedding theorem for a domain with ırregular boundary, SB MATH, 192(3), 323–346. (2001).

[8] **Besov, O.V, V.P. Il'in and S.M. Nikolskii:** Integral representations of functions and ımbedding theorems (Russian) 2nd ed. English transl. Of 1st ed., Vols. 1,2, Niley, 1979, Nauka, Moskow (1996)

[9] **Burenkov, V.I.:** On the additivity of the classes $Wp^{(r)}(\Omega)$, Trudy Mat. Inst.
Steklov., 89 (1967), 31-55. Transl.: Proc. Steklov Inst. Math., 89 (1967), 32-62.

[10] **Kralik, D. and Freud, G.:** Über die Anqend barkeit des Dirichlets chen Prinzips für den Kreis, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 7(1956), 411-418.

[11] **Dönmez, A.:**Reel analiz,Lebesgue Ölçümü ve İntegrali.ISBN 9753473001(Ocak 2001)

[12] **Dzhabrailov, A.D.:** The properties of functions on the boundary surfaces. Freie Uni Berlin. Berlin, Germany. 3rd Internat. ISAAC Congr. August 20–25, 2001

[13] **Dzhabrailov, A.D.and R.S. Mamedov:** Integrated representations for functions rom weight spaces parameter diffential – difference which properties are given by free vektors. Dok Az. SSR V.37, No: 10,1981.

[14] **Gagliardo, E.:** Caratterizzazione dele trace sula frontiea relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 27 (1957) 284–305. (M.R.21, 1525).

[15] **Galahov, M.A.:** On summable regions, Trudy. Mat. Inst. Steklov., 89(1967), 69. Transl. Proc. Steklov Inst. Math., 89 (1967), 79

[16] **Hardy, G. H., J. E. Littlewood and G.Polya:** Inequalities. Combridge University Pres. 1934.

[17] **Il'in V.P.:** On some properties of classes of differentiable functions defined in a domain, Trudy Mat. Inst. Steklov., 84 (1965), 93-143. Transl. Proc. Steklov Inst. Math., 84 (1965), 103-160.

[18] **Kantrovic. L.V.:** On İntegral operators, Uspehi Mat. Nauk, 11, No.2, 3–29 (1956) (Russan) (M.R. 20, 5432)

[19] **Karacay, T.:** Genel Topoloji, K.T.Ü Basımevi, Trabzon, 1982.

[20] **Kudryavcev, L.D.:** The variation of Mappings, of regions, in: Metrical QUESTİONS OF THE Theory of Functions and Mappings, No. 1, pp. 34–108, Izd. Naukova Dumka, Kiev, 1969. (Russian) (M.R. 44, 6924)

[21] **Mashiyev, R.A.:** Integral representations of differentiable functions, AZNIINTI, 4B79, Dep. N: 291, 1984.

[22] **Musayev B. ve M. Alf:** Fonksiyonel Analiz, Kütahya (Kasım 2000).

[23] **Morrey, C.B.:** Functions of several variables and absolute Continuity, II, Duke. J. Math. 6 (1940). 187–215.

[24] **Nikol'skii, S.M.:** Approximation of Functions of several variables and imbedding Theorems. Nauka, Moscow 1969. Transl. Grundlehren der Math. Wiss. in Einzeldarstell. Band 205, springer V1g, New York, 1975

[25] **Resetnyak, Yu. G.:** Some Integral representations of differentiable functions, Sibirsk. Mat. Z., 12, No. 2, 420-432 (1971). Transl.: Siberian Math. J., 12(1971), 299-307.

[26] **Slobodeckii, L.N.:**

a) Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary problems for partial differential equations, Leningrad. Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap., 197, 54-112 (1958). Transl.: Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2, 57(1966), 207–276.

b) Sobolev's spaces of fractional order and their application to boundary problems for partial differential equations, Dokl. Akad Nauk SSSR, 118, No. 2, 243–246 (1958) (Russian) (M.R. 21, 5059).

[27] **Smith, K.T.:** Inequalities for formally positive integro – differential forms, Bull. Amer. Math. Soc., 67, 368 – 370 (1961)

[28] **Sobolev, S.L.:**

a) Applications of functional analysis in mathematical phsics, Izd. Leningrad Gos. Unix., Leningrad, 1950. Transl.: Transl. Math. Monograpns, Vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963.

b) The density of functions with compact support in the space $L_p^m(E_n)$ Sibirsk. Mat. Z. 4, No.3, 673–682 (1963). (Russian)

(M.R. 30, 5156)

[29] **Uspenskii, S.V.:** Differential properties of solutions of quasielliptic equations in unbounded domains, Dokl., Akad. Nauk SSSR, 181, No. 3, 562–564 (1968). Transl.: Soviet Math., 9(1968), 900-903.

[30] **Terzioğlu T.:** Fonksiyonel Analiz'in Yöntemleri (1), TÜBİTAK Yayınları No: 589, Ankara 1984.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Zehra YÜCEDAĞ

Doğum Tarihi : 14.09.1979 (Dicle)

Çalıştığı Kurum : Milli Eğitim Bakanlığı

Namık Kemal Lisesi (Diyarbakır/Merkez)

EĞİTİMİ

İlkokul : Ali Emiri İlkokulu

Ortaokul : Ali Emiri Ortaokulu

Lise : Ziya Gökalp Lisesi

Lisans : Dicle Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü (2001)

e-mail : zehra@dicle.edu.tr