T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

BAZI ANALİTİK FONKSİYON SINIFLARI İÇİN İNTEGRAL ORTALAMA EŞİTSİZLİKLERİ

SEVTAP SÜMER EKER

DOKTORA TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR
HAZİRAN - 2007

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

SEVTAP SÜMER EKER tarafından yapılan "Bazı analitik fonksiyon sınıfları için integral ortalama eşitsizlikleri" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan	:	Yrd.Doç.Dr. H.Özlem GÜNEY (Danışman)
Üye	:	Prof.Dr. Sezai OĞRAŞ
Üye	:	Prof.Dr. Ali YILMAZ
Üye	:	Prof.Dr. Muhammed KAMALİ
Üye	:	Yrd Doç.Dr. Bilal ÇEKİÇ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 22 / 06 / 2007

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2007

Prof. Dr. Necmettin PİRİNÇÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

T E Ş E K K Ü R

Bu tezin hazırlanmasındaki katkılarından dolayı tez danışmanım sayın

Yrd. Doç. Dr. H.Özlem GÜNEY'e ;

Engin bilgilerinden faydalanma şansını yakaladığım sayın

Prof.Dr.Sezai OĞRAŞ'a ;

Her konuda desteğini ve ilgisini hep yanımda hissettiğim, tezin yazımı sırasında yardımlarını esirgemeyen sayın

Prof. Dr. H.İlhan TUTALAR'a ;

Kendisiyle çalışma şansını yakaladığım için kendimi ayrıcalıklı bulduğum, değerli bilgilerini benimle paylaşan ve her takıldığım noktada benimle içtenlikle ilgilenen sayın

Prof. Dr. Shigeyoshi OWA'ya

Bana duydukları sevgi, anlayış ve güvenle beni bugünüme getiren sevgili

Anneme ve Babama

En önemlisi, çalışmalarımın her aşamasında yanımda olan, benimle birlikte bıkmadan usanmadan koşuşturan sevgili eşim

Ali Fuat EKER'e

Sonsuz teşekkürler…

İ Ç İ N D E K İ L E R

4. BÖLÜM :ÇOK KATLI FONKSİYONLARIN İNTEGRAL ORTA HESABI II

5. BÖLÜM : ÇOK KATLI FONKSİYONLARIN KESİRSEL HESAPLARI İÇİN İNTEGRAL ORTALAMA EŞİTSİZLİKLERİ

6. BÖLÜM : ANALİTİK FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ SALAGEAN OPERATÖRÜ İÇEREN YENİ BİR ALT SINIFI İÇİN İNTEGRAL ORTALAMA EŞİTSİZLİKLERİ

A M A Ç

Son yıllarda Yalınkat ve p-katlı Fonksiyonlar Kuramı, karmaşık analiz alanında çalışan pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Herhangi bir fonksiyonun yalınkat veya p-katlı olması durumu, bu fonksiyonun davranışının belirlenmesinde oldukça önemli rol oynamaktadır. Fonksiyonlarla çalışırken sınır belirleme çabası alışılagelen bir durumdur. Yalınkat ve p-katlı Fonksiyonlar Kuramında da katsayı sınırlarını, fonksiyonun modülünün alt ve üst sınırlarını veya fonksiyonun integral ortalaması için kesin üst sınırları bulma problemi önemli bir yer tutar.

Bu çalışmadaki esas amacımız, yalınkat ve p-katlı fonksiyonların bazı alt sınıfları için integral ortalama eşitsizliklerini hesaplamaktır.

Bir diğer amacımız ise, bu alanda çalışan araştırmacılara yol gösterici bir kaynak oluşturmaktır.

Ö Z E T

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, yalınkat ve p-katlı fonksiyonlar sınıflarının tanımları, bu sınıflara ait fonksiyonlar ile ilgili bazı önemli teoremler ve bu sınıfların belirli altsınıfları verilmektedir. Ayrıca Subordinasyon İlkesi verilerek, integral ortalama eşitsizliklerini hesaplayabilmek için bir zemin hazırlanmaktadır. Bundan başka, bu bölümde kesirsel hesaplardan bahsedilerek, analitik fonksiyonlar için kesirsel hesap tanımları yapılmıştır.

İkinci bölümde, bazı integral eşitsizlikleri verilerek, integral ortalama hesabı anlatılmaktadır. Ayrıca Subordinasyon ilkesi ile integral ortalama hesabı arasındaki yakın ilişki de bu bölümde ele alınmaktadır.

Birinci ve ikinci bölümlerde, gereksiz tekrarlardan kaçınmak ve konunun bütünlüğünü bozmamak amacıyla, ispatlar için doğrudan ulaşılabilecek kaynak gösterilmesi yoluna gidilmiştir.

Üçüncü ve Dördüncü bölümlerde, çok katlı fonksiyonlar için integral ortalama hesabı yapılmaktadır. Ayrıca bu bölümlerde ispatlanan teoremler, verilen örneklerle desteklenmektedir.

Beşinci Bölümde, çok katlı fonksiyonlar için integral ortalama hesabı, üçüncü ve dördüncü bölümde yapılandan farklı olarak kesirsel hesaplamalar yardımıyla hesaplanmaktadır.

Son olarak ***Altıncı bölümde*** ise, genelleştirilmiş Salagean Operatörü yardımı ile yeni bir sınıf tanımlanarak bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri ve ekstrem noktaları hesaplanmaktadır. Bundan başka, bu sınıf için integral ortalama hesabı yapılmaktadır.

ABSTRACT

This study consists of six chapters.

In the **first chapter**, definitions of univalent and p-valent functions, the theorems and their results for the functions belong to these classes and some their important subclasses of these classes are given. Additionally, by giving subordination principle, a background is made for calculating integral means inequalities. Furthermore, by making mention of fractional calculus, definitions of fractional calculus for analytic functions are given in this chapter.

In the **second chapter**, by giving some integral inequalities, integral means inequalities are explicated. Moreover, in this chapter, the close relationship between Subordination principle and integral means is also given.

In the first and second chapters, by the aim to avoid unnecessary repeats and not damage the completeness of topics, to show references which can be straightforwardly obtained is prefered for the proofs.

In the **third and fourth chapters**, we have calculated integral means inequalities for p-valent functions. Moreover, theorems that are proved in these chapters are supported with examples.

In the **fifth chapter**, as distinct from in third and fourth chapters, integral means inequalities for multivalent functions are calculated by using fractional calculus.

Finally, in the **sixth chapter**, a new subclass of analytic functions involving Generalized Salagean operator is defined. Coefficient inequalities and extreme points for the functions in this class are calculated. Furthermore, integral means inequalities are given for this class.

Ö N S Ö Z

Yalınkat fonksiyonlar kuramının başlangıcının, Koebe'nin [20] $\mathcal{U} = \{ z : |z| < 1 \}$ birim diskindeki her bire-bir $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ dönüşümünün resim bölgesinde, $|w| < k$ diski kapsanacak şekilde mutlak bir k sabitinin ve sadece $|z|$ ye bağlı olan $|f'(z)|$ modülü üzerindeki sınırların varlığını ispatladığı 1907 yılındaki çalışması olduğu yaygın bir görüştür. Daha sonraları matematikçilerin gayretleri, bu sınırları veya $|f(z)|$ modülünün büyümesiyle ilgili olan diğer sabitleri tam olarak belirlemek üzerine yoğunlaşmıştır. Seksen yıl kadar sonra bulunan sonuçlar "***Temel Yalınkat Fonksiyonlar Kuramı***" olarak anılmaya başlanmış ve böylece tüm yalınkat fonksiyonlar sınıfı ile ilgili problemlere odaklanılmıştır. Bir diğer destekleyici çalışma ise, karmaşık düzlemin basit bağlantılı bir Ω bölgesinin, $\mathcal{U}$ birim diski üzerine bire-bir eşlenebildiğini ifade eden Riemann Dönüşüm Teoremi ve daha genel olarak konformal dönüşümler ile ilgili çalışmalar olmuştur. Özellikle konformal dönüşümlerin sınır davranışları günümüzde oldukça ilgi çekici hale gelmiştir.

1913 yılında Study'nin [45], karmaşık düzlemde $\mathcal{U}$ birim diskini, bire-bir olarak konveks bir bölge üzerine dönüştüren analitik dönüşümler olan konveks dönüşümlerin sınıfı üzerinde göz önüne aldığı çalışmaları, Alexander'ın yalınkat dönüşümlerin özel sınıfları üzerine yaptığı çalışmalar için bir altyapı oluşturmuştur. Study, "bir yalınkat dönüşümün birim disk üzerinde konveks olması" gerçeğini yani bu tür dönüşümlerin orjin merkezli 1'den küçük yarıçaplı her bir diski bir konveks bölge üzerine dönüştürdüğünü ifade etmiştir.

1915 yılında Alexander, bir $w(z)$ fonksiyonunu birim disk içine bire-bir olarak dönüştürmek için bir takım gerekli koşullar elde etmeyi amaçladığı bir çalışmasını yayınlamıştır [1]. Bu koşullar, $w(z)$ fonksiyonuna, eşdeğeri olan "birim diskteki tüm z_1 ve z_2 noktaları için $\left(w(z_1) - w(z_2)\right) / \left(z_1 - z_2\right) \neq 0$" koşulundan çok daha kolay uygulanabilir koşullardı.

Alexander, Study'nin çalışmalarına makalesinde yer verdiği zaman henüz yalınkat fonksiyonlar kuramı; fonksiyon sınıfları, ekstremal problemler, konvoluasyon operatörleri ve benzerleri gibi iyi bilinen alanlara bölünerek incelenebilir değildi. Bu çalışmasının ardından Alexander yalınkat fonksiyonların pek çok altsınıfını tanımlayarak, Taylor katsayıları ile sıfırlarının ve kritik noktalarının yerlerini içeren, yalınkatlığı garantileyen bazı kriterler geliştirdi. Sonuç olarak, Geometrik Fonksiyonlar Kuramında araştırmacılar için yeni kapılar açtı. Aralarında J. Dieudonn`e, G. Szegö, M. S. Robertson, R. Nevanlinna, L. Fej´er ve L.Bieberbach'ın da bulunduğu pek çok ünlü Matematik Analizci, Alexander tarafından ortaya çıkarılan bu konuyu daha da geliştirerek günümüze kadar getirdiler.

Geometrik Fonksiyonlar Kuramının en fazla göze çarpan gelişmelerinden biri Ludwig Bieberbach tarafından gerçekleştirilmiştir. Bieberbach [4] 1916 yılında normalleştirilmiş bir yalınkat fonksiyonun katsayıları için ünlü $|a_n| \leq n$ kestirimini yapmıştır ve $n = 2$ durumu için sınırları ispatlamıştır. Bu önemli kestirim üzerinde pek çok matematikçi çalışmış ancak 1984 yılında Louis de Branges [5] tarafından ispatlanıncaya kadar bir kestirim olarak kalmıştır.

Bieberbach Kestiriminin eşitlik hali, birim diski konformal olarak $-1/4$ den $-\infty$ a negatif gerçel eksensiz karmaşık düzlem üzerine dönüştüren $f(z) = z/(1-z)^2$ Koebe fonksiyonu için sağlanır. Birim diskin Koebe fonksiyonu altındaki resmine yalınkatlığı bozmadan herhangi bir açık küme ekleyemediğimizden bu fonksiyon en büyük yalınkat fonksiyondur.

Yalınkat fonksiyonlar Kuramının önemli ve güncel problemlerinden biri de integral ortalama hesaplarıdır. İntegral ortalama hesabının amacı, $0 < \mu < \infty$ için,

$$M_\mu(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^\mu d\theta \right\}^{1/\mu} , \quad 0 < r < 1$$

integral ortalaması için kesin üst sınırlar bulmaktır. $\mu = 1$ durumunda problem, Bieberbach Kestirimine gider. $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı olan $\mathcal{S}$ sınıfındaki tüm fonksiyonlar arasında, $M_\mu(r,f)$ integral ortalamasının en büyüğü Koebe fonksiyonu için sağlanır. Günümüzde bu alana Owa, Sekine gibi matematikçiler önemli katkılarda bulunmuşlardır. Bu çalışmada Owa ve Sekine'nin çalışmalarına benzer olarak bazı analitik fonksiyon sınıfları için integral ortalama eşitsizlikleri hesaplanmıştır.

1. BÖLÜM

YALINKAT VE ÇOK KATLI FONKSİYONLAR

Bu bölümde sırası ile yalınkat ve çok katlı fonksiyonlar ile bazı altsınıfları için birtakım önemli tanımlar, teoremler ve bunların sonuçları verilmektedir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Karmaşık analizde, karmaşık düzlemin açık bir D altkümesi üzerinde tanımlanmış bir $f(z)$ fonksiyonu, kendi $f(D)$ resmi üzerine 1–1 oluyorsa bu fonksiyona ***D* bölgesinde yalınkattır** denir. Bu tanım aşağıdaki biçimde de verilebilir.

Bir $f(z)$ fonksiyonu için

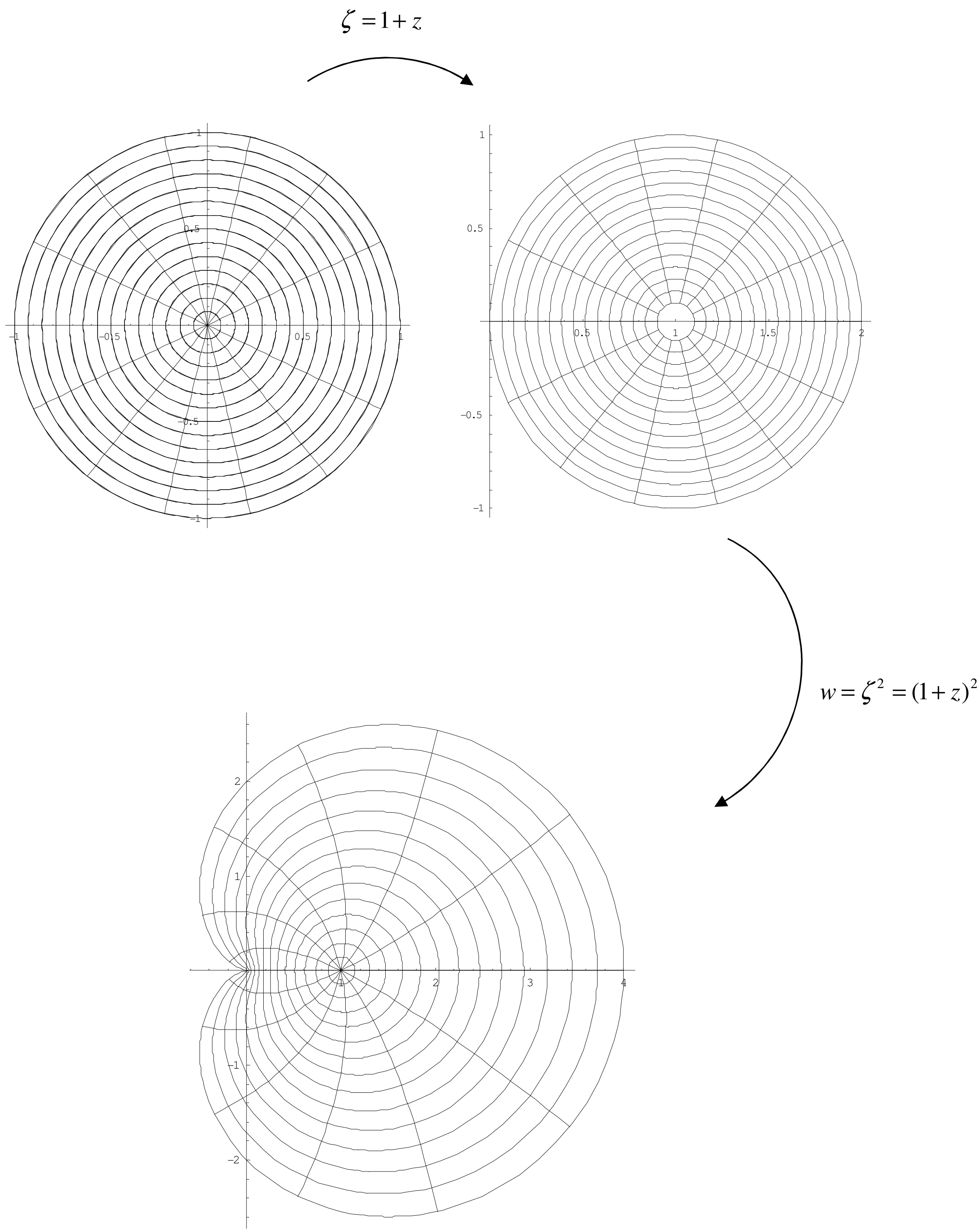
$$f(z_1) = f(z_2) \;\; ; \;\; z_1 \in D \; , \; z_2 \in D$$

koşulu $z_1 = z_2$ eşitliğini gerektiriyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde yalınkattır.

Bu kavram için çeşitli terimler kullanılır. Yalınkat fonksiyonlara tek katlı, univalent veya schlicht fonksiyon da denir. Rusçada bu tip fonksiyonlara tek dallı anlamına gelen odnolistni adı verilir. Biz bu tez boyunca aynı zamanda analitik olan yalınkat fonksiyonlarla ilgileneceğiz.

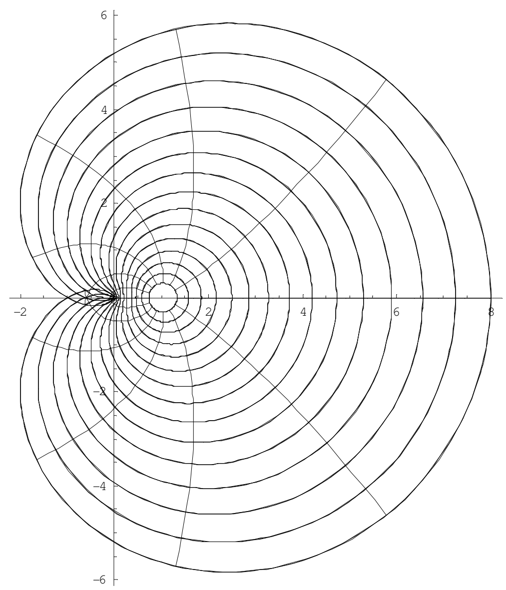
Yalınkat fonksiyonlar teorisi öylesine engin ve karmaşıktır ki bazı basitleştirici kabuller gerektirir. Çok yaygın bir görüş, keyfi D bölgesini uygun olan bir başkasıyla, çoğunlukla da $\mathcal{U} = \{ z : |z| < 1 \}$ birim diskiyle değiştirmektir.

Yalınkat fonksiyonlara örnek olarak, $\mathcal{U}$ birim diskindeki $f(z) = (1+z)^2$ fonksiyonu verilebilir. Birim diskteki bu fonksiyonun yalınkatlığını geometrik olarak görmek kolaydır. Gerçekten $1+z$, birim diskin yerini sağa doğru 1 birim kaydırır ve $1+z$ nin karesini almakla oluşacak durumu resimlemek kolaydır (Şekil 1).



ŞEKİL 1

Benzer hesaplamalar $w=(1+z)^3$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde yalınkat olmadığını gösterir. (Şekil 2)



ŞEKİL 2

Eğer $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ise, $g(z)$ fonksiyonunun

$$g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

şeklindeki Maclaurin açılımına sahip ve birim diskte yakınsak olduğunu biliyoruz. Burada $g(z)$ fonksiyonunun bu gösterimi hakkında iki soru sormak doğaldır.

$\{b_n\}$ katsayılarının dizisi verildiğinde bu dizi $g(z)$ fonksiyonunun geometrik özelliklerini nasıl etkiler?

$g(z)$ fonksiyonunun bazı özellikleri verildiğinde, bu özellikler Maclaurin açılımındaki katsayıları nasıl etkiler?

Ancak biz yalınkatlık ile ilgilendiğimizden bu iki soruyu şu şekilde özelleştirebiliriz:

1. $g(z)$ yalınkat bir fonksiyon ise, bu gerçek, $g(z)$ için Maclaurin serisindeki katsayıları nasıl kısıtlar?

2. Maclaurin açılımındaki katsayılar verildiğinde, $g(z)$ fonksiyonunun D bölgesinde yalınkat olup olmadığına karar verebilir miyiz?

$\mathcal{U}$ birim diskinde yalınkat bir $g(z)$ fonksiyonuna, sabit bir C eklemekle elde edilen $g(z)+C$ fonksiyonu, sadece bölgeyi kaydıracağı için bu yeni fonksiyon da birim diskte yalınkat olur. Sonuç olarak Maclaurin açılımında b_0 sabit terimi keyfidir. O halde $g(z)$ fonksiyonundan b_0 sabitini çıkararak $g(z)-b_0$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $g'(z_0)=0$ iken $g(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda yalınkat olmadığından, eğer $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde yalınkat ise $b_1 = g'(0) \neq 0$ yazılır. Böylece b_1 sayısına bölerek $f(z)=(g(z)-b_0)/b_1$ fonksiyonunu gözönüne alabiliriz. Fonksiyonumuz $1/b_1$ ile çarpıldığından resim bölgesi sadece döner ve genişler (veya daralır). Buradan, $g(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ise $f(z)=(g(z)-b_0)/b_1$ fonksiyonunun da aynı bölgede yalınkat olduğunu ve tersine $f(z)$ fonksiyonunun D bölgesinde yalınkat olması durumunda $g(z)$ fonksiyonun da yalınkat olduğunu görürüz. Maclaurin açılımında $\dfrac{b_n}{b_1}=a_n$ yazarak

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \tag{1.1}$$

"normalize" formunu elde ederiz. (1.1) ile verilen fonksiyona "normalleştirilmiştir" denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu yalınkat ve (1.1) ile verilen formda ise ***normalleştirilmiş yalınkat fonksiyon*** adını alır. $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve yalınkat olan normalleştirilmiş fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilir.

Yapılan açıklamalara göre, $\mathcal{U}$ birim diskinde, yukarıda Maclaurin açılımı verilen yalınkat $g(z)$ fonksiyonu uygun bir M ile çarpılabileceğinden, $|b_n|$ değerinin keyfi büyüklükte olabileceği açıktır. Bununla beraber, normalleştirilmiş yalınkat fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfı düşünüldüğünde her bir $n>2$ için $\mathcal{S}$ sınıfının her $f(z)$ elemanına karşılık $|a_n|<A_n$ olacak şekilde A_n sınırının varlığı sanısını ortaya atabiliriz. Bu nedenle, A_n sınırı için bir yaklaşım elde edebilmek için, yeterince büyük katsayılara sahip bir yalınkat fonksiyon oluşturmalıyız.

Bunun için,

$$u(z)=\frac{1+z}{1-z} \quad , \quad g(z)=u^2(z) \quad , \quad f(z)=\frac{1}{4}\big(g(z)-1\big)$$

dizisini düşünelim. $u(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\operatorname{Re} u>0$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür. Bu durumda $g(z)=u^2(z)$ fonksiyonu bir yarı düzlemi negatif gerçel eksen hariç bütün karmaşık düzlem üzerine resmeder. Son olarak $f(z)=\frac{1}{4}\big(g(z)-1\big)$ fonksiyonu, yukarıda açıklanan normalleştirme işleminin bir sonucudur. Bu durumda, $f(z)$ fonksiyonunu

$$f(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]=\frac{(1+z)^2-(1-z)^2}{4(1-z)^2}=\frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu fonksiyon özellikle ***Koebe Fonksiyonu*** olarak adlandırılır ve $k(z)$ sembolü ile gösterilir. Koebe fonksiyonunun oluşumunda kullanılan dönüşümler dizisi Şekil 3 te belirtilmektedir.

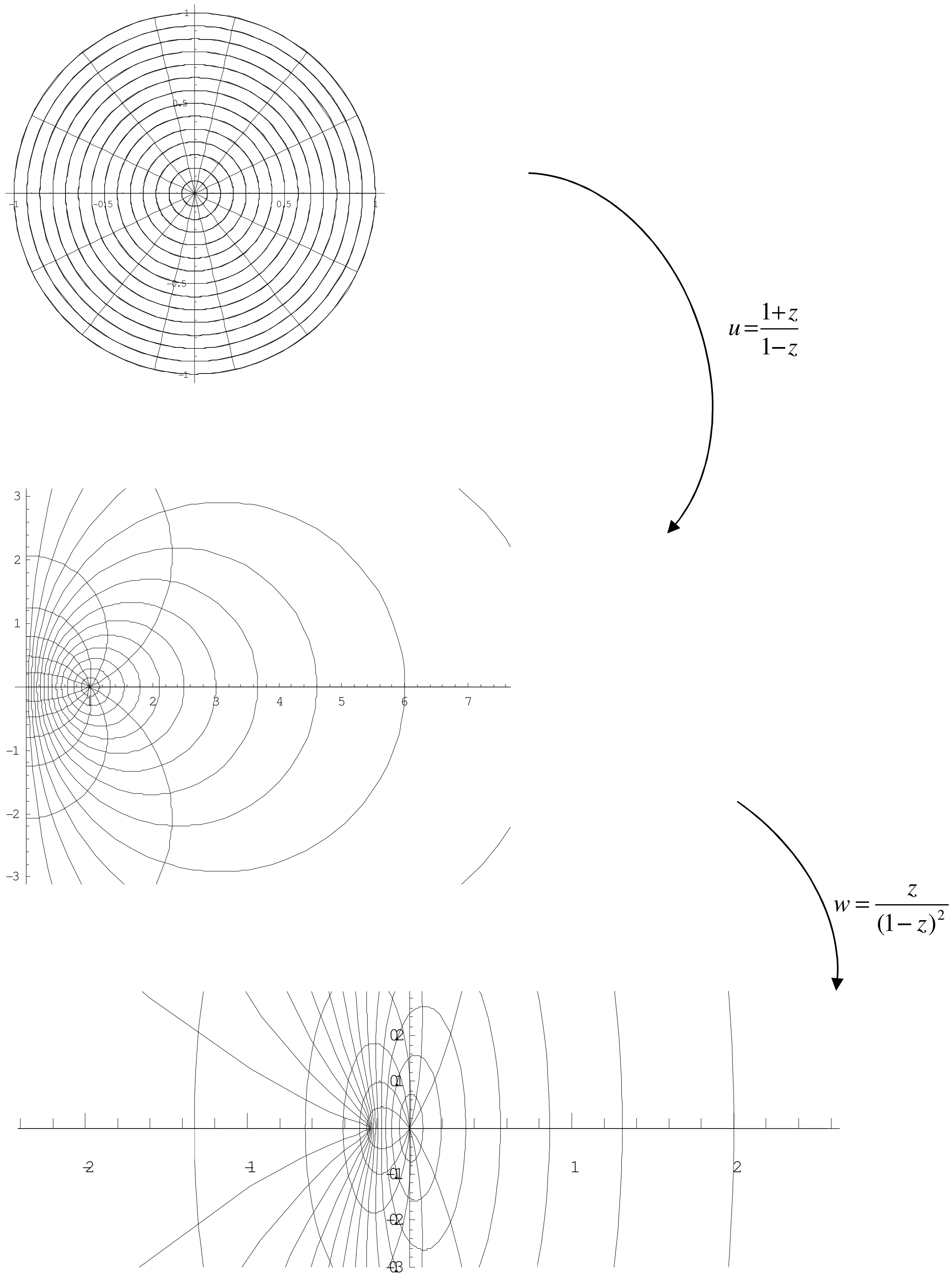
$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\cdots n\,z^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n$$

ile verilen Koebe fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfındadır ve $\mathcal{U}$ birim diskini $w=-\infty$ dan $w=-1/4$ e kadar negatif gerçel eksen boyunca olan yarık hariç, bütün karmaşık düzlemden oluşan D bölgesi ile 1–1 eşler.

Sezgisel anlamda, yalınkatlığı bozmayan noktaların bir açık kümesi resim bölgeye eklenebileceğinden, bu fonksiyon $\mathcal{S}$ sınıfındaki "en büyük" fonksiyondur. Bununla beraber, bu özelliğe sahip olan tek bölge bu değildir. Γ eğrisini sonsuz noktasını sonlu w_0 noktasına birleştiren bir eğri olarak alırsak, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve yalınkat olan ve $\mathcal{U}$ birim diskini Γ eğrisinin tümleyeni üzerine dönüştüren bir fonksiyon bulunabilir.

Koebe fonksiyonunun birim diski resmettiği bölgenin "maksimal" özelliği, simetrik oluşu ve katsayılarının ölçüsü bizi aşağıdaki Bieberbach Kestirimine götürür.

Bieberbach Kestirimi : *$f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfında (1.1) ile verilen Maclaurin açılımına sahip ise, her bir $n\geq 2$ için $|a_n|\leq n$ eşitsizliği sağlanır [4].* ♦



ŞEKİL 3

Fonksiyonların herhangi bir sınıfının sistematik olarak incelenmesinde, kümenin bir fonksiyonunu alarak, aynı kümenin başka bir fonksiyonuna götüren işlemler yapmak yararlıdır. Şimdi $\mathcal{S}$ sınıfı için bu tür temel işlemleri toparlayacağız.

Eğer (1.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfında ise aşağıda vereceğimiz fonksiyonlar da $\mathcal{S}$ sınıfındadır.

(i) $e^{i\alpha} f(e^{i\alpha} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\alpha} z^n$, α gerçel (*Dönme*)

(ii) $\overline{f(\overline{z})} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a}_n z^n$ (*Eşlenik alma*)

(iii) $\frac{1}{t} f(tz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-1} z^n \quad 0 < t \leq 1$ (*Genişleme*)

(iv) $\left[f(z^k) \right]^{1/k} = z + \frac{a_2}{k} z^{k+1} + \frac{1}{2k^2}(2ka_3 - (k-1)z^{2k+1} + \cdots,$ k pozitif tamsayı (*Kök*)

(v) Eğer $f(z) = \gamma$ denklemi D bölgesinde z ile çözüme sahip değil ise $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde “γ çıkarılmış" denir. Eğer $f(z) \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde γ çıkarılmış ise

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/\gamma} = z + (a_2 + 1/\gamma) z^2 + \cdots \qquad (\textit{Atılmış Değer})$$

fonksiyonu da $\mathcal{S}$ sınıfındadır. ♦

Sonsuzda rezidüsü 1 olan basit bir kutup hariç, $\mathcal{U}$ birim diskinin dışı olan $\Delta = \{ z : |z| > 1 \}$ bölgesinde analitik ve yalınkat

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

fonksiyonlarının sınıfı Σ ile gösterilir. Bu sınıf, $\mathcal{S}$ sınıfı ile yakından ilgilidir. Her bir $g \in \Sigma$ fonksiyonu, Δ bölgesini kompakt bağlantılı bir E bölgesinin tümleyeni üzerine dönüştürür.

$\sum$ sınıfında $g(z)\neq 0$ yani $0\in E$ koşullu fonksiyonlarının kümesi $\sum'$ ile gösterilir. Herhangi bir $g\in\sum$ fonksiyonu, sabit b_0 teriminin uygun bir şekilde ayarlanması ile $\sum'$ sınıfına ait olur. Böyle bir ayarlama sadece g fonksiyonunun görüntüsünü değiştirecek ve g fonksiyonunun yalınkatlığını bozmayacaktır.

Her bir $f(z)\in\mathcal{S}$ fonksiyonundan ters dönme uygulanarak elde edilen fonksiyon $\sum'$ sınıfına aittir. Gerçekten, her bir $f(z)\in\mathcal{S}$ için,

$$g(z)=\left\{f\left(\frac{1}{z}\right)\right\}^{-1}=z-a_2+(a_2^2-a_3)z^{-1}+\cdots$$

fonksiyonu $\sum'$ sınıfına aittir. Diğer taraftan, bu ters dönme dönüşümü, doğal olarak $\mathcal{S}$ ve $\sum'$ sınıfları arasında bire-bir bir eşlemedir. $\sum'$ sınıfı,

$$G(z)=\sqrt{g(z^2)}$$

karekök dönüşümü altında korunur. Bu her $g\in\sum$ için uygulanamaz, ancak $g\in\sum'$ olması durumunda olanaklıdır. Çünkü karekök, $g(z^2)=0$ iken bir branş noktasına sahip olacaktır.

$|z|>1$ olmak üzere, $g(z)=z+b_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n z^{-n}$ fonksiyonunun yalınkatlığı b_n, $(n=1,2,\dots)$ Laurent katsayılarının ölçüsü üzerine kuvvetli sınırlama getirir. Bu durum yalınkat fonksiyonlar kuramında temel olan Alan Teoremi olarak bilinir. Bu teorem 1914 yılında Gronwall tarafından ispatlanmıştır [14] :

Teorem 1.1.1 *Eğer* $f(z)=z+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$ *fonksiyonu* $\Delta=\{z:\ |z|>1\}$ *bölgesinde yalınkat ise, bu durumda*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|^2\leq 1$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul, $f(\Delta)$ *in sıfır alanlı (* $f(\Delta)$ *nun tümleyeni hiçbir açık küme kapsamayan) bir küme hariç tüm karmaşık düzlemi örtmesidir.* ♦

1.2 Katsayılar İçin Temel Sınırlar

$\mathcal{S}$ sınıfındaki fonksiyonların ikinci katsayısı için kesin sınır Bieberbach [4] tarafından 1916 yılında verilmiştir.

Teorem 1.2.1 (Bieberbach Teoremi) : *(1.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfında ise $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik halinin olması için $f(z)$ fonksiyonunun, Koebe fonksiyonunun bir dönmesi şeklindeki*

$$f(z) = e^{i\alpha} k(e^{i\alpha} z) = \frac{z}{(1-e^{i\alpha} z)^2} \tag{1.2}$$

fonksiyonu olması gerekli ve yeterlidir ♦

Verilen koşullar altında, eşitlik işaretinin korunduğu kabul edilebilir bir fonksiyonun varlığından hareketle eşitsizliği düzeltmek (yani bir üst sınırı azaltmak veya bir alt sınırı arttırmak) imkansız ise, bu eşitsizliğe ***kesin eşitsizlik*** denir. Koebe fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfında ve bu fonksiyon için $a_2 = 2$ olduğundan Teorem 1.2.1 deki $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği kesindir. "Kesin" terimini ilk kez kullanmış olmamıza rağmen pek çok yerde bu terimle karşılaşacağız. Eşitliği sağlayan bir fonksiyona da ***ekstremal fonksiyon*** denir. Böylece (1.2) ile verilen fonksiyonlar ekstremal fonksiyonlardır.

Bieberbach'a ait olan bir başka ilginç katsayı eşitsizliği ise, $f(z) \in \mathcal{S}$ olması durumunda

$$\left|a_2^2 - a_3\right| \leq 1$$

eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik de kesindir. Eşitlik hali için $f(z)$ fonksiyonunun, Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir. Ayrıca $f(z)$ bir tek fonksiyon ise, $\left|a_3\right| \leq 1$ eşitsizliği sağlanır. Burada

$$f(z) = z\left(1 - e^{2i\beta} z^2\right)^{-1} \quad , \beta \in \mathbb{R}$$

fonksiyonunun alınması eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli olacaktır [37].

1.3 İkinci Katsayının Üzerindeki Sınırın Anlamı

1.3.1 Bükülme Teoremleri

$\mathcal{S}$ sınıfındaki herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ gerçeği, bu sınıfla ilgili diğer teoremleri ispatlamak için kullanılabilir. Gerçekten, $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir fonksiyonu, yine $\mathcal{S}$ sınıfına ait başka bir fonksiyona taşıyan herhangi bir dönüşüm, henüz türetilen sınıra uygulayabileceğimiz ikinci katsayı için bir ifade verecektir. Eğer dönüşüm uygun seçilirse hem ilginç hem de kesin sonuçlar elde ederiz.

Teorem 1.3.1 *$f(z) \in \mathcal{S}$ ve $f(z)$, γ çıkarılmış ise, bu durumda $|\gamma| \geq 1/4$ olur. Bu eşitsizlik kesindir ve eşitlik halinin olması için gerekli ve yeterli koşul $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olmasıdır [12].* ♦

Bu teorem, $f(z) \in \mathcal{S}$ olması durumunda $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resminin orijin merkezli, $1/4$ yarıçaplı bir açık diski örtmesi gerektiğini ifade eder. Bu teorem bize $\mathcal{S}$ sınıfında sınırın bükülmesine bir yaklaşımın varolduğunu söylediğinden, bu teoremi bir Bükülme Teoremi olarak adlandırırız. Yani teoremde tanımlanan yaklaşımın ötesinde orijin civarına sıkıştırılamaz.

Teorem 1.3.2 (Bükülme Teoremi) *$f(z) \in \mathcal{S}$ ise, $\mathcal{U}$ birim diskindeki her bir $z = re^{i\theta}$ için*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \qquad (1.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Her iki eşitsizlik de kesindir. Eşitlik hali $f(z) = z/(1-z)^2$ fonksiyonu için vardır [12]. ♦

Bir yalınkat fonksiyonun türevinin argümanı ile ilgili de bazı önemli teoremler verilebilir. İlk olarak Bieberbach [12] aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 1.3.3 *$f(z) \in \mathcal{S}$ ise $\mathcal{U}$ birim diskindeki her bir z için*

$$|\arg f'(z)| \leq 2\ln\frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Bu eşitsizlik kesin değildir. Daha sonra Loewner'e [26] ait daha derin ve karmaşık yöntemler kullanarak, Rus matematikçi G.M.Glouzin [11] 1936 yılında aşağıdaki kesin versiyonu elde etmiştir.

Teorem 1.3.4 (Dönme Teoremi) *$f(z) \in \mathcal{S}$ ise,*

$$|\arg f'(z)| \leq \begin{cases} 4 \arcsin r & r \leq \sqrt{2}/2 \\ \pi + \ln \dfrac{r^2}{1-r^2} & \sqrt{2}/2 < r < 1 \end{cases}$$

eşitsizliği vardır. ♦

Aşağıdaki teoremde, çember üzerindeki $\arg f'(z)$'nin değişim oranı için alt ve üst sınırlar verilmektedir.

Teorem 1.3.5 *$f(z) \in \mathcal{S}$ ise, $\mathcal{U}$ bölgesindeki her bir $z = r e^{i\theta}$ için*

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}$$

ve

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} \frac{z f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır [12]. ♦

Bükülme Teoreminde verilen (1.3) eşitsizliğini integre edersek, $|f(z)|$ için sınırları elde edeceğimizi umarız. 1924 yılında Pravilov [12] bu düşünceyi genelleştirerek aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

Teorem 1.3.6 *$f(z) \in \mathcal{S}$ ve $0 \leq r < 1$ için $m'(r)$ ile $M'(r)$ gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere*

$$m'(r) \leq |f'(z)| \leq M'(r)$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int_0^r m'(t)\,dt \leq |f(z)| \leq \int_0^r M'(t)\,dt \qquad (1.4)$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Bükülme teoremine göre Teorem 1.3.6 da $m'(r)=\dfrac{1-r}{(1+r)^3}$ ve $M'(r)=\dfrac{1+r}{(1-r)^3}$ alabiliriz. Bu durumda, integral alırsak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 1.3.7 (Büyüme Teoremi) *Eğer $f(z)\in\mathcal{S}$ ise, $\mathcal{U}$ birim diskindeki her bir z için*

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq|f(z)|\leq\frac{r}{(1-r)^2}\quad,\quad |z|=r$$

eşitsizliği sağlanır [12]. ♦

Bazı durumlarda daha kullanışlı olabilen ve bükülme ve büyüme teoremlerinden elde edilebilen bir diğer eşitsizlik aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 1.3.8 *Eğer $f(z)\in\mathcal{S}$ ise, $\mathcal{U}$ bölgesindeki her bir z için*

$$\frac{1-r}{1+r}\leq\left|\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right|\leq\frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik hali $f(z)=z/(1-z)^2$ fonksiyonu için sağlanır [7]. ♦

1.4 Pozitif Gerçel Kısma Sahip Fonksiyonlar

$g(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik olduğunu ve $g(\mathcal{U})$ bölgesinin en az bir açık yarı düzlemde kapsandığını varsayalım. Bu tip fonksiyonlar hakkında pek çok soru sorabiliriz. Bunun için, yalınkat fonksiyonlarda olduğu gibi bazı normalleştirmeler vermek uygun olacaktır. Burada keyfi yarı düzlemi, $H^+:\operatorname{Re}w>0$ yarı düzlemiyle yer değiştirelim ve $f(z)$ normalleştirilmiş bir fonksiyon olmak üzere $f(0)=1$ alalım.

Bu normalleştirmeyi tamamlamak için $g(\mathcal{U})$ bölgesinin $L: w=A+e^{i\alpha}t$ doğrusu ile sınırlandırılmış açık yarı düzlemde bulunduğunu varsayalım. Burada α ve t gerçel, L doğrusu, L nin t, $-\infty$ dan ∞ a artarken tanımlandığı biçimle uyumlu olarak yönlendirilmiş olsun ve $g(\mathcal{U})$, L doğrusunun sağında bulunsun. Bu koşullar altında, $h(z)=e^{-i\alpha}\left(g(z)-A\right)$ fonksiyonunu oluşturalım ve $h(\mathcal{U})$ nun $H^+:\operatorname{Re}w>0$ yarı düzleminde bulunduğuna dikkat edelim. $h(0)=C+i\,D$ olsun. Burada $h(E)\subset H^+$ olduğundan $C>0$ olur. Sonuç olarak, eğer $f(z)=(h(z)-i\,D)/C$ fonksiyonunu oluşturursak $f(\mathcal{U})\subset H^+$ ve $f(0)=1$ normalleştirme koşullarımızı elde ederiz.

$\mathcal{P}$ sınıfı,

$$f(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots+p_nz^n+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n \tag{1.5}$$

formunda, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik olan ve birim diskteki z noktaları için $\operatorname{Re}\{f(z)\}>0$ olacak şekildeki tüm fonksiyonların sınıfıdır. $\mathcal{P}$ sınıfındaki herhangi bir fonksiyona $\mathcal{U}$ birim diskinde ***pozitif gerçel kısma sahiptir*** denir. Burada $f(z)$ fonksiyonunun yalınkat olması gerekmediğini belirtmeliyiz. Örneğin, $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu herhangi bir $n\geq 0$ tamsayısı için $\mathcal{P}$ sınıfındadır ancak $n\geq 2$ için bu fonksiyon yalınkat değildir. $\mathcal{P}$ sınıfıyla ilgili herhangi bir teoremin, $\mathcal{U}$ birim diskini en az bir belirlenmiş yarı düzleme taşıyacak şekilde, bir $g(z)$ fonksiyonuyla ilgili uygun bir teoreme dönüştürülebileceği açıktır.

Koebe fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfı için oynadığı merkezi rol gibi,

$$L_0(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2z+2z^2+\cdots=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

Mobius fonksiyonu da $\mathcal{P}$ sınıfı için merkezi bir rol oynar. Bu fonksiyon $\mathcal{P}$ sınıfındadır, birim diskte analitik ve yalınkattır ve üstelik birim diski H^+ yarı düzlemi üzerine dönüştürür. Ancak $L_0(z)$ fonksiyonunun karakteri ile Koebe fonksiyonu arasında dikkate değer bir fark vardır. $\mathcal{S}$ sınıfı için pek çok ekstremal problemde Koebe fonksiyonu (veya bir dönmesi) yegane çözümdür. Bu durumun aksine, $L_0(z)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfındaki $|p_n|$ değerini maksimize eder fakat $n\geq 2$ ise $p_n=2$ olacak şekilde $\mathcal{P}$ sınıfının sonsuz çoklukta başka fonksiyonu vardır ve bunların hiçbiri, bir diğerinin dönmesiyle elde edilemez.

$\mathcal{P}$ sınıfı konvekstir. Yani başka bir ifadeyle μ_1 ve μ_2, $\mu_1+\mu_2=1$ koşuluyla negatif olmayan sayılar ve $f_1(z)$ ile $f_2(z)$ $\mathcal{P}$ sınıfına ait fonksiyonlar ise

$$f(z)=\mu_1f_1(z)+\mu_2f_2(z)$$

fonksiyonu da $\mathcal{P}$ sınıfındadır. Verilen bu denklemden, bir sonlu toplama ve sonra her k için $\mu_k \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = 1$ kabulü ile

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k(z)$$

sonsuz toplamına geçmek doğaldır.

$\mathcal{P}$ sınıfındaki fonksiyonları yine $\mathcal{P}$ sınıfındaki fonksiyonlara resmeden bazı işlemler aşağıda verilmiştir:

$f(z)$, $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonlarının $\mathcal{P}$ sınıfında olduklarını varsayalım. Bu durumda, daha önce verilen şartlarla, aşağıda verilen $g(z)$ fonksiyonları da $\mathcal{P}$ sınıfındadır:

(i) $g(z) = f(e^{i\alpha} z)$, α gerçel

(ii) $g(z) = [f(z)]^t$ veya $g(z) = f(tz)$, $-1 \leq t \leq 1$

(iii) $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$

(iv) $g(z) = [f_1(z)]^{t_1} [f_2(z)]^{t_2}$, $0 \leq t_1, t_2$, $t_1 + t_2 \leq 1$

(v) $g(z) = \dfrac{1}{a}\left[f\left(\dfrac{z+\lambda}{z+\bar{\lambda} z} \right) - bi \right]$, $f(\lambda) = a + bi$, $\lambda \in U$

(vi) $g(z) = \dfrac{f(z) + ib}{1 + ibf(z)}$, b gerçel

$\mathcal{P}$ sınıfına ait fonksiyonların katsayıları için kullanışlı bir teorem 1907 yılında Carathéodory tarafından verilmiştir [6].

Teorem 1.4.1 (Carathéodory Teoremi) *$N \geq 1$ belirli bir tamsayı olsun. Eğer (1.5) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfında ise $|p_N| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. $\eta = e^{2\pi i / N}$ ve $k = 1, 2, \ldots, N$ için $\mu_k \geq 0$ olmak üzere*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k \frac{1+\eta^k z}{1-\eta^k z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n$$

ve $\sum_{k=1}^{N} \mu_k = 1$ ise, $F(z)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfındadır ve $P_N = 2$ olur. ♦

Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonların katsayıları için kesin sınırlar aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 1.4.2 *$f(z) \in \mathcal{P}$ ve $z = re^{i\theta}$ ise*

$$\frac{1-r}{1+r} \le |f(z)| \le \frac{1+r}{1-r} \tag{1.6}$$

ve

$$|f'(z)| \le \frac{2}{(1-r)^2} \tag{1.7}$$

eşitsizlikleri sağlanır ve bu eşitsizlikler kesindir. Eşitliğin gerçekleşmesi için $f(z) = L_0(e^{i\alpha}z)$ fonksiyonunu almak gerekli ve yeterlidir [12]. ♦

Bu teoremin ispatı için birkaç yol vardır. Biz burada yeni ve kolay bir teknik olan ***baskın kuvvet serileri*** tekniğiyle ilgileniyoruz.

$R > 0$ olmak üzere $\mathcal{U}_R = \{ z : |z| < R \}$ diskinde yakınsak

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ve

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

kuvvet serilerini alalım. Her $n \ge 0$ tamsayısı için $|a_n| \le A_n$ oluyorsa, $\boldsymbol{f(z)}$, $\boldsymbol{F(z)}$ ***tarafından bastırılır*** (veya $F(z)$, $f(z)$ ye baskındır) denir ve $f(z) << F(z)$ ile gösterilir. Baskınlıkla ilgili birkaç basit durum aşağıda verilmiştir.

$f(z) << F(z)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

(1) $A_n \ge 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(2) $|f(z)| \le F(r)$, $0 \le |z| = r < R$

(3) $f'(z) << F'(z)$

(4) $\int_0^z f(\xi)\, d\xi << \int_0^z F(\xi)\, d\xi$

(5) $e^{f(z)} << e^{F(z)}$

(6) Eğer en az bir $\mathcal{U}_\rho$ diskinde $\left|F(z)\right|<1$ ise, bu diskte

$$-\ln(1-f(z)) << -\ln(1-F(z))$$

olur.

(7) $|b|\leq B$ ve $k\geq 0$ herhangi bir tamsayı ise

$$b\,z^k f(z) << B\,z^k F(z)$$

ve

$$[f(z)]^k << [F(z)]^k$$

özellikleri de sağlanır.

(8) $f(z) << F(z)$ ve $g(z) << G(z)$ ise bu durumda

$$f(z)+g(z) << F(z)+G(z)$$

ve

$$f(z)g(z) << F(z)G(z)$$

olur.

Teorem 1.4.2 nin ispatı : $|p_n|\leq 2$ olduğundan

$$f(z) << L_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

olduğu açıktır. Bu durumda *(2)* özelliği (1.6) eşitsizliğinin sağ tarafını verir ve *(2)* ile *(3)* özellikleri (1.7) eşitsizliğinin sağ tarafını verir. (1.6) ifadesindeki alt sınır için (1.6) eşitsizliğinin sağ tarafını $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfında olduğu zaman $\mathcal{P}$ sınıfında olan $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonuna uygulayabiliriz.

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1+r}{1-r}$$

olduğu açıktır ve buradan

$$|f(z)| \geq \frac{1-r}{1+r}$$

yazılır. Eşitlik için gerekli ve yeterli koşul $f(z)=L_0(e^{i\alpha}z)$ ve $z=\mp e^{i\alpha}r$ olarak seçilmesidir [12]. ♦

$\mathcal{P}$ sınıfındaki bir fonksiyon için $f'(z)$ sıfır olabileceğinden $f(z)$ üzerinde bir takım ek varsayımlarda bulunmadıkça hiçbir pozitif alt sınır (1.6) ifadesindeki gibi verilemez. $f(z)$ fonksiyonunun k kez türevini alarak, her bir adımda *(3)* özelliğini kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 1.4.3 *$f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfında ve $k \geq 0$ ise*

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq \left. \frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right|_{z=r} = \frac{2(k!)}{(1-r)^{k+1}}$$

eşitsizliği sağlanır. Özellikle $k = 2$ ise

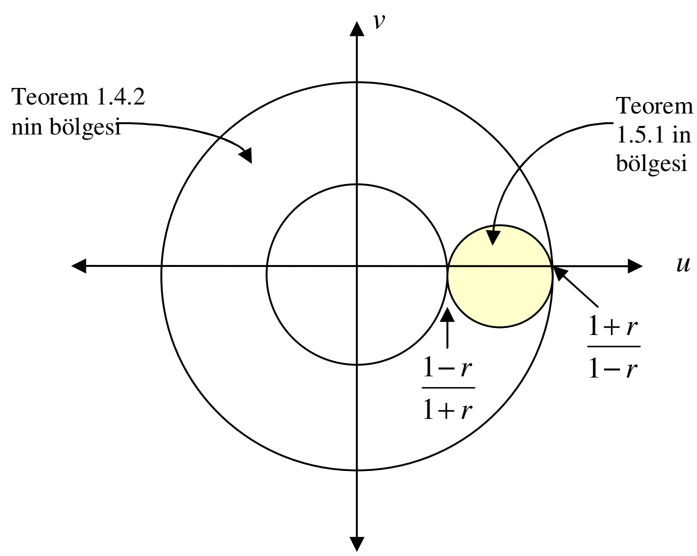
$$\left| f''(z) \right| \leq \frac{4}{(1-r)^3}$$

olur [12]. ♦

1.5 Subordinasyon Ve Lindelöf Prensibi

Bu kesimde, Subordinasyon ve Lindelöf Prensibi kullanılarak, $f(z)$ fonksiyonu için belirlenmiş halka bölgenin (1.6) eşitsizliği ile Şekil 4 te görülen diske indirgenebileceğini göreceğiz.

$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve yalınkat olsun ve $F(\mathcal{U}) = D$ olduğunu varsayalım. Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik, $f(0) = F(0)$ ve $f(\mathcal{U}) \subset D$ ise, $f(z)$ fonksiyonu $F(z)$ fonksiyonuna ***subordinedir*** denir ve $f(z) \prec F(z)$ şeklinde yazılır. Aynı zamanda $F(z)$, $f(z)$ fonksiyonuna ***süperordine*** de denir.



ŞEKİL 4

Teorem 1.5.1 *Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfında ise, $\mathcal{U}$ birim diskindeki her bir sabit z değeri için $f(z)$ fonksiyonu, $\frac{1+r^2}{1-r^2}$ merkezli $\frac{2r}{1-r^2}$ yarıçaplı kapalı disk içinde bulunur. Eğer $z \neq 0$ ise, $f(z)$ fonksiyonunun diskin bir sınır noktası olması için gerekli ve yeterli koşul en az bir α gerçel sayısı için $f(z) = L_0(e^{i\alpha}z)$ olmasıdır. Böylece, eğer $f(z) \in \mathcal{P}$ ise*

$$\left| f(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

kesin eşitsizliği sağlanır [12]. ♦

$f(z)$ fonksiyonunu kapsayan diskin çap uç noktaları $\frac{1-r}{1+r}$ ve $\frac{1+r}{1-r}$ noktalarıdır. Bu teoremin ispatında Schwarz Yardımcı önermesinin gerçekten doğal bir genişlemesi olan Lindelöf Prensibini kullanılır. Bu teoremin ispatını burada vermeyeceğiz ama subordinasyon ilkesi için önemli olması bakımından Schwarz Yardımcı önermesini vermek yararlı olacaktır.

Teorem 1.5.2 (Schwarz Yardımcı Önermesi) *B_0, $|f(z)|<1$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik olan $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ fonksiyonlarının sınıfı olsun. $b(z) \in B_0$ alalım. Böylece birim diskteki z değerleri için $b(z)$ analitik, $b(0)=0$ ve $|b(z)| \leq 1$ olur. Bu durumda her bir $0<r<1$ için $|b(re^{i\theta})| \leq r$ eşitsizliği sağlanır. Eğer bu eşitsizlikte bir $z_0 = re^{i\theta}$ noktası için eşitlik sağlanıyorsa, bu durumda en az bir α gerçel sayısı için $b(z) = e^{i\alpha}z$ olur. Sonuç olarak $|b_1| = |b'(0)| \leq 1$ eşitsizliğini ve $|b_1| = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $b(z) = B(z) = e^{i\alpha}z$ olduğunu elde ederiz [42].* ♦

Bu teorem, yalınkat $B(z) = e^{i\alpha}z$ fonksiyonunun bir anlamda, $b(0)=0$ koşullu tüm sınırlı fonksiyonlar arasında bir maksimal fonksiyon olduğunu veya sınırlı $b(z)$ fonksiyonlarının, yalınkat $B(z)$ fonksiyonuna "subordine" olduğunu ifade eder.

Subordinasyon tanımında verilen $F(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde yalınkat olduğuna fakat $f(z)$ fonksiyonunun değerliği hakkında herhangi bir kabulün olmadığına dikkati çekelim. Hem $F(z)$ hem de $f(z)$ fonksiyonları $z=0$ noktasını aynı noktaya resmeder ve $f(z)$, $\mathcal{U}$ birim diskini, düzlem üzerine izdüşümü D de kalan (olasılıkla çok yapraklı) en az bir yüzey üzerine resmeder. Örneğin Schwarz Yardımcı Önermesindeki $b(z)$ fonksiyonu üzerindeki koşullar ile $b(z) \prec B(z) = e^{i\alpha} z$ olur.

Şimdi $f(z) \prec F(z)$ ve $F(\mathcal{U}) = D$ olduğunu varsayalım. Bu durumda F^{-1} tersi D bölgesinde analitiktir ve $F^{-1}(a_0) = 0$ ile D bölgesini $\mathcal{U}$ birim diski üzerine dönüştürür. Bu nedenle $b(z) = F^{-1}\left(f(0)\right) = F^{-1}(a_0) = 0$ olur. Böylece $b(z)$ fonksiyonu Schwarz Yardımcı Önermesinin koşullarını sağlar ve $f(z) = F\left(b(z)\right)$ çıkar. Bu sonuç aşağıda vereceğimiz teoremin yeterlilik kısmıdır.

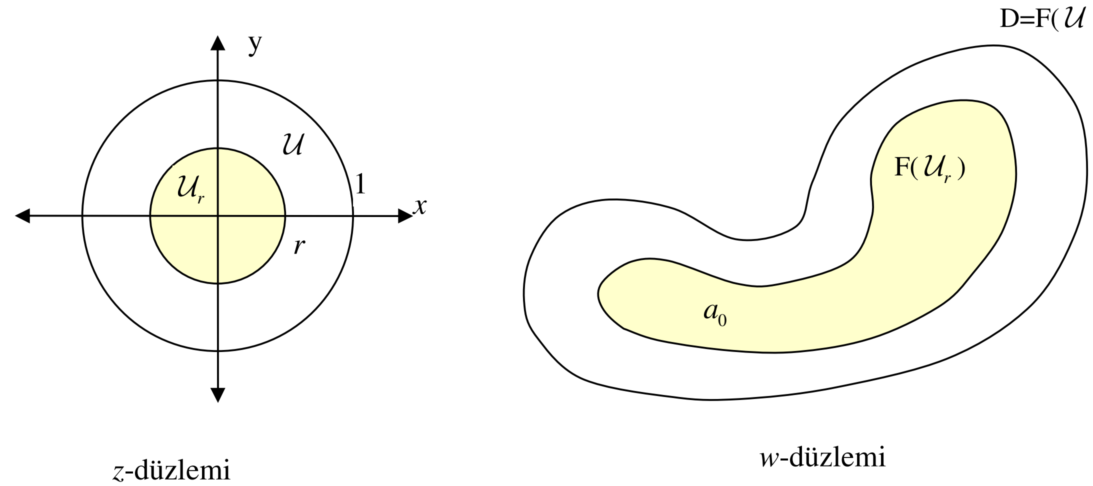
Teorem 1.5.3 *$f(z)$ ve $F(z)$ birim diskte analitik fonksiyonlar olsunlar ve $F(z)$ fonksiyonunun aynı zamanda yalınkat olduğunu varsayalım. Bu durumda birim diskte $f(z) \prec F(z)$ olması için gerekli ve yeterli koşul Schwarz Yardımcı Önermesinin koşullarını ve $f(z) = F\left(b(z)\right)$ eşitliğini sağlayan bir $b(z)$ fonksiyonunun var olmasıdır [12].* ♦

Subordinasyon tanımında, $F(z)$ fonksiyonunun birim diskte yalınkat olduğunu kabul ettiğimizi belirtelim. Subordinasyon kavramı, $F(z)$ fonksiyonunun yalınkat olmadığı duruma genişletilebilir ve bunu yapmanın en kolay yolu $f(z) = F\left(b(z)\right)$ denklemini $f(z) \prec F(z)$ subordinasyonunun tanımı olarak kullanmaktır. Böylece $f(z) \prec F(z)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $f(z) = F\left(b(z)\right)$ olacak şekilde bir $b(z) \in B_0$ fonksiyonunun olmasıdır.

Örneğin, n bir pozitif tamsayı ise birim diskte $z^n \prec z$ olur. Eğer $F(z)$ fonksiyonunun yalınkat olmasını istemezsek $z^{2n} \prec z^2$ olur fakat z^{2n+1} fonksiyonu birim diskte z^2 fonksiyonuna subordine değildir.

Teorem 1.5.4 (Lindelöf Prensibi) *$\mathcal{U}$ birim diskinde $f(z) \prec F(z)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $r \in [0,1]$ için $f(\mathcal{U}_r) \subset F(\mathcal{U}_r)$ kapsaması doğrudur. Ayrıca $f(re^{i\theta})$, $0 < r < 1$ ile bir $z_0 = re^{i\theta_0}$ noktası $F(\mathcal{U}_r)$ nin sınırı üzerindeyse $f(z) = F(e^{i\alpha} z)$ olacak şekilde α gerçel sayısı vardır ve birim diskteki her $z = re^{i\theta}$ noktası için $f(re^{i\theta})$, $F(\mathcal{U}_r)$ sınırı üzerindedir [23].* ♦

Bu teorem, Şekil 5 te gösterilmiştir. Böylece eğer $f(\mathcal{U}) \subset F(\mathcal{U}) = D$ ise $f(\mathcal{U}_r)$, $F(\mathcal{U}_r)$ nin resmi olan gölgeli bölgede kapsanır.



ŞEKİL 5

Aşağıdaki Teorem Schwarz Yardımcı Önermesinin ufak bir genelleştirmesidir :

Teorem 1.5.5 *$N \geq 1$ belirli bir tamsayı olsun ve*

$$b(z) = b_N z^N + b_{N+1} z^{N+1} + \cdots = \sum_{n=N}^{\infty} b_n z^n$$

fonksiyonunun Schwarz Yardımcı Önermesinin koşullarını sağladığını varsayalım. Eğer $0 < r < 1$ ise

$$\left| b(r e^{i\theta}) \right| \leq r^N$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $0 < r < 1$ iken bir $z = r e^{i\alpha}$ noktası için eşitlik sağlanıyorsa, bu durumda $b(z) = e^{i\alpha} z^N$ olur ve $\mathcal{U}$ birim diskindeki tüm z değerleri için bu eşitsizlik, eşitliğe dönüşür. Sonuç olarak

$$| b_N | = \frac{1}{N!} \left| b^{(N)}(0) \right| \leq 1$$

ve

$$| b_N | = 1$$

olması için gerekli ve yeterli koşul $b(z) = e^{i\alpha} z^N$ olmasıdır [12]. ♦

1.6 Noshiro-Warschawski Teoremi

Acaba $\mathcal{P}$ sınıfının yalınkat fonksiyonlar teorisiyle ilgisi var mıdır? Bu sorunun cevabı olarak bu kesimde bunlar arasındaki bazı bağıntıları araştıracağız. Teorem 1.6.2 de bağımsız olarak Noshiro'ya [32] (1935) ve Warschawski'ye [49] (1935) ait olan yalınkatlık için güzel ve sade olan bir yeterli koşul vereceğiz.

Teorem 1.6.1 *Eğer $f'(z) \in \mathcal{P}$ ise $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde yalınkattır [12].* ♦

Alexander 'a [1] ait olan Teorem 1.6.1, aslında aşağıdaki teoremin özel bir halidir:

Teorem 1.6.2 (Noshiro-Warschawski Teoremi) *Bir konveks D bölgesindeki tüm z değerleri ve en az bir α gerçel sayısı için*

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} f'(z)\right) > 0 \tag{1.8}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkattır. ♦

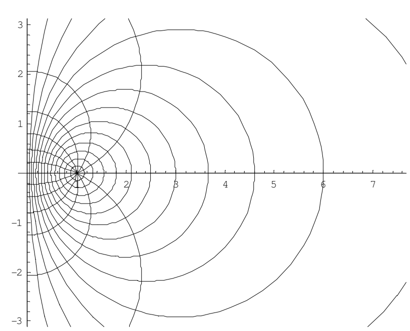
Şimdi, pozitif gerçel kısma sahip olmak ile yalınkat olmak arasındaki ilişkiyi bir örnekle inceleyelim.

Örnek : $f(z) = -z - 2\ln(1-z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfında olduğunu gösterelim.

Çözüm : Bu fonksiyonun türevi,

$$f'(z) = \frac{1+z}{1-z} = L_0(z) \in \mathcal{P}$$

olur. $\mathcal{U}$ birim diski konveks bir bölge olduğundan $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ diskinde yalınkattır. (Şekil 6)



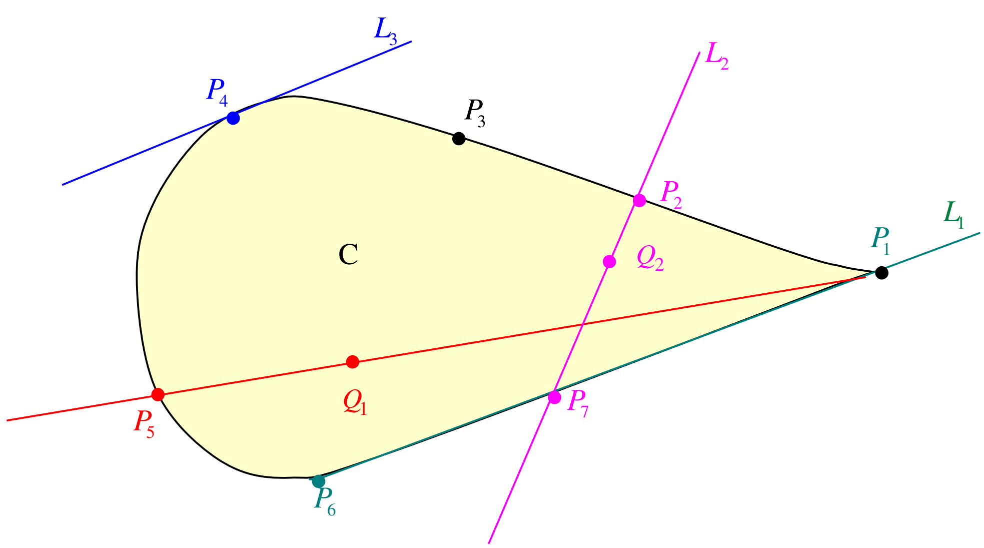
ŞEKİL 6

Eğer Alexander Teoreminin koşulunu hafifçe yumuşatırsak, $f(z)$ fonksiyonunun bir keyfi yüksek değere (kata) sahip olacağı ispatlanabilir. Gerçekten Goodman [13] 1972 yılında $\forall\varepsilon>0$ ve her pozitif p tamsayısı için $\mathcal{U}$ birim diskinde $\left|\arg f'(z)\right|<\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ olacak şekilde bir $f(z)$ fonksiyonunun olduğunu ve bu fonksiyonun $\mathcal{U}$ birim diskinde en az bir değeri en azından p kez aldığını ispatlamıştır.

D bölgesinin bir konveks bölge olmadığını varsayalım. Bu durumda Noshiro-Warschawski Teoremi beklenen sonucu vermez. 1951 yılında Tims [48], en az iki sınır noktası ile basit bağlantılı konveks olmayan her bir D bölgesi için, bu bölgede $\operatorname{Re} f(z)>0$ olacak şekilde analitik ama yalınkat olmayan bir $f(z)$ fonksiyonunun olduğunu ispatlamıştır.

1.7 Ekstrem Noktalar Ve Krein-Mil'man Teoremi

Bu önemli teorem, düzlemde konveks kümeler üzerinde temel bir teorem olmaktan ziyade bir topolojik vektör uzayına tam genelleştirmedir. Konuyu basitleştirmek için öncelikle teoreme düzlemde bakalım. Şekil 7'de gösterildiği gibi, C kapalı ve sınırlı konveks bir küme ve L_1, L_2, L_3 düzlemde doğrular olsunlar.



ŞEKİL 7

Q_1 noktası P_1P_5 doğru parçasının bir iç noktası ve Q_2 noktası P_2P_7 doğru parçasının bir iç noktasıdır. C kümesindeki her bir nokta ya bir iç noktadır ya da C de kapsanan bir doğru parçasının bitim noktasıdır. C nin bir sınır noktası aynı zamanda C de kapsanan bir doğru parçasının bir iç noktası olabilir. Örneğin P_2, C de kapsanan P_1P_3 parçasının bir iç noktasıdır ve P_7 yine C de kapsanan P_6P_1 parçasının bir iç noktasıdır. Diğer taraftan, P_4, C de kapsanan herhangi bir doğru parçasının bir iç noktası değildir. C nin bu tür noktalarına ***"C nin ekstrem noktaları"*** denir. Şekil 7'de ekstrem noktalar P_1 ve $P_3P_4P_5P_6$ yayının sınırı üzerindeki tüm noktalardır.

$E(C)$ ile C nin tüm ekstrem noktalarının kümesini belirtelim. Geometrik olarak Şekil 7 ile verilen C kümesinin, bitim noktaları C nin ekstrem noktaları olan tüm doğru parçalarının noktalarının birleşimi olduğu geometrik olarak açıktır. (C kümesini P_2P_7 gibi doğru parçalarından elde etmek gerekli değildir).

Bir başka durumda, bitim noktaları $E(C)$ de olan doğru parçaları C yi meydana getirmeye yeterli olmayabilir. C nin bir PQR üçgeni ile üçgenin tüm iç noktalarından oluştuğunu varsayalım. Bu durumda $E(C)$, sadece P, Q ve R noktalarını kapsar. Bitim noktaları $E(C)$ de olan tüm doğru parçalarının kümesi sadece kenarları verecek, üçgenin içindeki noktaları vermeyecektir. C nin tamamını meydana getirmek için α, β ve γ, $\alpha+\beta+\gamma=1$ olacak şekilde negatif olmayan sayılar iken, $\alpha P+\beta Q+\gamma R$ formundaki tüm doğrusal birleşimleri alabiliriz.

Üçüncü örnek olarak, $|\arg w|\leq \pi/4$ olacak şekildeki tüm w noktaları ile orijinden oluşan bir kümeyi göz önüne alalım. Burada $E(C)$ kümesi yalnızca orijini içerir. Ayrıca C nin $E(C)$ kümesinden doğrusal birleşimlerle meydana getirilemeyeceği de açıktır. İncelediğimiz teorem için, C kümesini sınırlı bir küme varsaymalıyız.

Düzlem hakkındaki bu basit fikirleri, keyfi bir X uzayındaki keyfi bir C kümesine nasıl genelleştirebiliriz?

İlk olarak, bir doğru parçası fikrine ihtiyacımız var. Bu nedenle uzayımız toplama ve skalerle çarpma işlemlerine sahip olmalı. Böylece f ve g, X uzayında herhangi iki nokta ve α, β belirli bir $\mathcal{F}$ cisminden iki sayı ise $h=\alpha f+\beta g$ de X uzayındadır. Bu özelliğe sahip bir X uzayına, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir ***vektör uzayı*** denir.

Esas amacımız $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ ile $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik olan tüm fonksiyonların $\mathcal{A}$ uzayı olduğundan $\mathcal{F}$ cisminden bir daha bahsetmeyeceğiz. Ayrıca bir kapalı küme ve bir kompakt küme fikirlerine ihtiyaç duyuyoruz ve böylece X kümesi bir topolojiye sahip olmalıdır. $\mathcal{A}$ kümesindeki topoloji, birim diskin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaklık ile indirgenir. Son olarak, yerel konveks uzay kavramına ihtiyaç duyacağız.

Bir topolojik vektör uzayının, konveks kümelerinden oluşan topoloji için bir tabanı varsa bu uzaya ***yerel konvekstir*** denir. Bu hazırlıklardan sonra X kümesinde konveks küme ve ekstrem nokta kavramlarını tanımlayabiliriz.

Bir vektör uzayında f ve g yi birleştiren $L(f,g)$ doğru parçası, $0 \le t \le 1$ olmak üzere $h = tf + (1-t)g$ formundaki tüm h noktalarının kümesidir. f ve g noktalarına $L(f,g)$ doğru parçasının ***uç noktaları*** denir. $0 < t < 1$ ise h noktası $L(f,g)$ nin bir ***iç noktası*** olur.

Eğer C kümesindeki her f, g nokta çifti için $L(f,g)$ kümesi de C kümesinde oluyorsa, ***C kümesi X te konvekstir.***

Konveks bir C kümesindeki bir h noktası, C kümesinde kapsanan herhangi bir $L(f,g)$ doğru parçasının bir iç noktası değilse bu noktaya C kümesinin bir ***ekstrem noktası*** denir. C kümesinin tüm ekstrem noktalarının kümesini $E(C)$ ile göstereceğiz.

Eğer f, C kümesinin bir iç noktası ise $E(C)$ kümesinde olamaz. Ancak bu, C kümesinin tüm sınır noktalarının $E(C)$ kümesinde olacağı anlamına gelmez. Örneğin Şekil 7'de P_2 ve P_7 noktaları, C kümesinin sınır noktalarıdır fakat C kümesinin ekstrem noktaları değildirler.

Eğer bir $\mathcal{M}$ kümesi konveks değilse, konveks bir kümeye genişletilebilir. Bir $\mathcal{M}$ kümesinin ***kapalı konveks örtüsü (hull)***, $\mathcal{M}$ kümesini kapsayan en küçük kapalı konveks kümedir. Bu kümeyi $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ ile göstereceğiz (Bazı yazarlar $cl(co\mathcal{M})$ ile gösterir). Böyle bir küme daima vardır çünkü kapalı konveks bir $\mathcal{M} \subset X$ kümesi için $\mathcal{M}$ kümesini kapsayan kapalı konveks kümelerin arakesiti olan $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}$ kümesinin kapalı konveks bir örtüsüdür.

Bu hazırlık bilgilerinden sonra aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 1.7.1 (Krein-Mil'man Teoremi) *C, bir X yerel konveks topolojik vektör uzayında bir kompakt konveks küme olsun. Bu durumda C, ekstrem noktalarının kapalı konveks örtüsüdür. Sembolik olarak $C = \mathcal{H}\ (E(C))$ yazılabilir [21].* ♦

Verilen bir $\mathcal{M}$ kümesi için pek çok problemin çözümü, $\mathcal{M}$ kümesinin ekstrem noktaları için problemi çözmeye indirgenebilir. Bu sebeple $E(\mathcal{M})$ kümesini bulmak oldukça faydalıdır.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde kullanılan kümelerin çoğu konveks değildir. Bununla beraber herhangi bir $\mathcal{M}$ kümesi zaten kapalı konveks örtüsünde kapsanır ve $\mathcal{M}$ kümesindeki belirli bir ekstremal problemin çözümü, daha büyük olan $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ kümesindeki çözümü ile aynıdır.

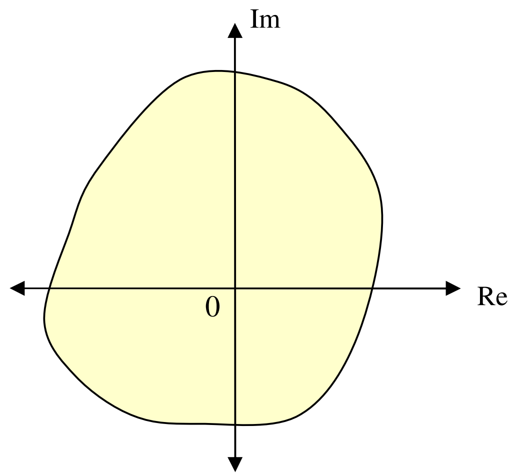
1.8 Konveks Ve Yıldızıl Fonksiyonlar

Yalınkat bir fonksiyonun, $\mathcal{U}$ birim diskini en az bir iyi özellikli bölge üzerine dönüştürdüğünü biliyorsak, bu durumda fonksiyon hakkında daha keskin çalışmalar yapabiliriz. Konveks bir bölge, iyi özellikli bir bölgenin en göze çarpan örneğidir. Bir başka örnek, bir noktaya göre yıldızıl olan bir bölgedir. Bizim ilgi merkezlerimiz açık kümeler olmasına rağmen, tanımlarımızı sınır noktalarının hiçbiri, bazısı ya da tümü eklenmiş olan bölgeler için vereceğiz.

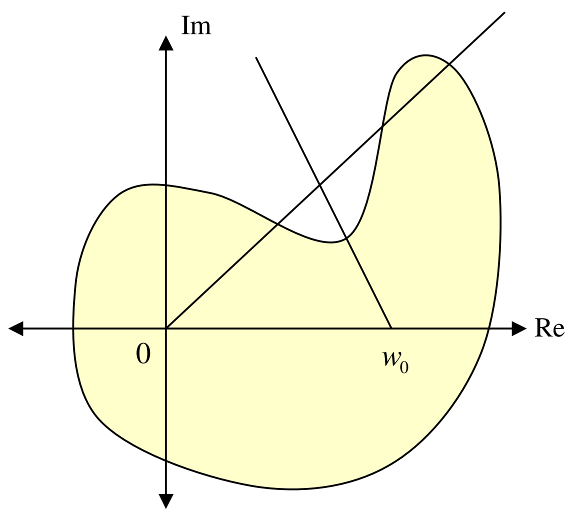
Bir $f(z)$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim diskini konveks bir bölge üzerine dönüştürüyorsa $f(z)$ fonksiyonuna ***konveks fonksiyon*** adı verilir.

Eğer w_0 başlangıç noktalı her bir ışının D nin içiyle kesişimi bir doğru parçası ya da bir ışın oluyorsa D ye $\boldsymbol{w_0}$ ***noktasına göre yıldızıl küme*** denir. Bir $f(z)$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre yıldızıl bir bölge üzerine dönüştürüyorsa $f(z)$ fonksiyonuna $\boldsymbol{w_0}$ ***noktasına göre yıldızıl fonksiyon*** adı verilir. $w_0 = 0$ olduğu özel durumda $f(z)$ fonksiyonuna ***yıldızıl fonksiyon*** denir.

Konveks ve yıldızıl bölgeler sırasıyla Şekil 8 ve Şekil 9 de gösterilmiştir. Şekil 9 deki bölge w_0 noktasına göre yıldızıl olmasına rağmen, orijine göre yıldızıl değildir. $L_0(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu, birim diski bir yarı düzlem üzerine dönüştürdüğü için konvekstir. Koebe fonksiyonu bir yıldızıl fonksiyondur. Gerçekten, $k(\mathcal{U})$ bölgesi, her bir $w_0 > -1/4$ noktasına göre yıldızıldır.



ŞEKİL 8



ŞEKİL 9

Herhangi bir dairesel disk veya herhangi bir yarı düzlem bir konveks kümedir. Konveks kümelerin herhangi sayıdasının arakesiti de bir konveks kümedir (tabii ki arakesit boş ya da sadece tek noktadan oluşabilir). Konveks bir D kümesi, her bir iç noktasına göre yıldızıldır. Tersine bir D kümesi, her bir iç noktasına göre yıldızıl ise, bu durumda D kümesi konveks bir kümedir.

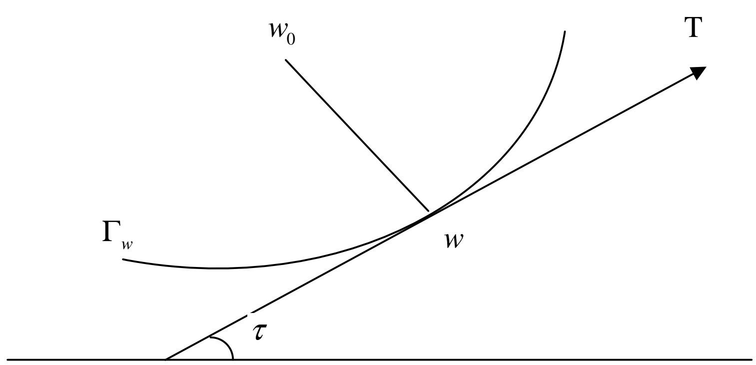
Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar konusuna, Γ_z eğrisinin, Γ_z üzerinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu altındaki resmini göz önüne alarak başlayalım. Γ_z bir eğri, bir doğru parçası veya diğer temel yaylardan biri olabileceğinden Γ_z yi $x(t)$ ve $y(t)$ gerçel fonksiyonlar olmak üzere bir

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \le t \le b$$

parametrizasyonu ve

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \ne 0, \qquad a \le t \le b$$

koşulu ile bir düzgün eğri olarak varsayalım. Γ_z yayı bir yönlendirilmiş yaydır ve yönü t artarken belirlenir. Γ_w, Γ_z üzerinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu altında Γ_z yayının resmi olsun ve w_0 noktasının Γ_w üzerinde olmadığını varsayalım (Şekil 10).



ŞEKİL 10

Eğer $\arg(w - w_0)$, t nin azalmayan bir fonksiyonu ise yani,

$$\frac{d}{dt}\arg(w - w_0) \ge 0, \quad t \in [a,b]$$

oluyorsa, Γ_w ***yayına*** w_0 ***noktasına göre yıldızıldır*** denir. Bu eşitsizliği daha kullanışlı bir forma çevirirsek,

$$\frac{d}{dt}\arg(w - w_0) = \frac{d}{dt}\operatorname{Im}\ln(w - w_0) = \operatorname{Im}\left(\frac{d}{dt}\ln(w - w_0)\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{d}{dz}\ln(w - w_0)\frac{dz}{dt}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\frac{dz}{dt}\right)$$

ifadesini elde ederiz. Böylece, $\Gamma_z : z = z(t)$ eğrisinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resminin w_0 noktasına göre yıldızıl olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\operatorname{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}z'(t)\right) \geq 0, \quad t \in [a,b]$$

olmasıdır diyebiliriz.

Eğer Γ_w yayının teğetinin argümanı, t nin azalmayan bir fonksiyonu ise Γ_w ***yayına konvekstir*** denir. Γ_z nin teğetinin yönü $\arg z'(t)$ olur ve dönüşüm, bu teğet vektörünü bir $\arg f'(z)$ açısı boyunca döndürür. Böylece Γ_w yayının konveks olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\arg(z'(t)\, f'(z))\right) \geq 0, \quad t \in [a,b]$$

olmasıdır. Bu eşitsizliği de daha kullanışlı bir hale getirebiliriz:

$$\frac{d}{dt}\left(\arg(z'(t)\, f'(t))\right) = \frac{d}{dt}\operatorname{Im}\left(\ln z'(t) + \ln f'(z))\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{d}{dz}\left(\ln f'(z)\right)\frac{dz}{dt}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right).$$

Böylece $\Gamma_z : z = z(t)$ üzerinde $f'(z) \neq 0$ olmak üzere Γ_z yayının $f(z)$ fonksiyonu altındaki resminin konveks olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right) \geq 0, \quad t \in [a,b]$$

olmasıdır.

1.9 Birim Diskte Yalınkat Olan Fonksiyonların Bazı Önemli Altsınıfları

$f(z)$, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve yalınkat olsun. Eğer $f(z)$, $C_R = \{z : |z| = R\}$ eğrisini basit kapalı konveks bir eğri üzerine dönüştürürse, bu durumda bu eğri bir konveks bölgeyi sınırlar. Tersine, eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}_R\ (R < 1)$ diskini bir konveks bölge üzerine dönüştürürse, bu durumda bölgenin sınırı basit kapalı konveks bir eğridir. Benzer bir durum yıldızıl eğriler için de geçerlidir.

Teorem 1.9.1 *$f(z)$ fonksiyonu $\overline{\mathcal{U}_R}=\{z : |z|\leq R\}$ kapalı diskinde analitik ve yalınkat olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\overline{\mathcal{U}_R}$ kapalı diskini bir konveks bölge üzerine dönüştürmesi için gerekli ve yeterli koşul $C_R=\{z : |z|=R\}$ üzerindeki z noktaları için*

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\geq 0 \tag{1.9}$$

olmasıdır [45].

Bundan başka, $f(0)=0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}_R$ bölgesini $w=0$ noktasına göre yıldızıl bir bölgeye dönüştürmesi için $C_R=\{z : |z|=R\}$ üzerindeki z noktaları için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\geq 0 \tag{1.10}$$

olması gerekli ve yeterlidir [31]. ♦

Teorem 1.9.1 de $f(z)$ fonksiyonunun yalınkat olması varsayımı vazgeçilmezdir. Aksi takdirde hataya düşeriz. Gerçekten $f(z)=z^2$ olduğunu varsayarsak, (1.9) ve (1.10) eşitsizlikleri $2\geq 0$ halini alır. Böylece bu eşitsizlikler sağlanır fakat bu fonksiyon altında $\mathcal{U}$ diskinin iki katlı resmi konveks veya yıldızıl bir bölge değildir. Konvekslik ve yıldızıllık kavramları çok katlı bölgelere genişletilebilir. Bu genişlemeler tam olarak araştırılmıştır fakat biz sadece düzlem bölgeleri göz önüne alacağız.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ diskinde yalınkat ise, $f'(z)\neq 0$ olduğunu ve böylece (1.9) eşitsizliğinin sol tarafındaki ifadenin $\mathcal{U}_R$ de bir harmonik fonksiyon olduğunu ve minimum değerini C_R nin sınırında aldığını görürüz. Buradan, eğer $f(z)$ fonksiyonu C_R eğrisini bir kapalı konveks eğri üzerine dönüştürürse, her bir $r<R$ için $f(z)$ fonksiyonu C_R eğrisini bir konveks eğri üzerine ve böylece $\overline{\mathcal{U}}_R$ kapalı diskini bir konveks bölge üzerine dönüştürür. $f(z)\in\mathcal{S}$ iken $z=0$ bir kaldırılabilir tekil nokta olduğu için aynı tipteki düşünceler (1.10) ile verilen eşitsizliğe de uygulanabilir.

$f(z)\in\mathcal{S}$ olsun ve $R<1$ olduğunu varsayalım. Eğer $f(z)$ fonksiyonu, $\mathcal{U}_R$ bölgesini bir konveks bölge üzerine dönüştürürse, bu fonksiyon her bir pozitif $r<R$ için $\mathcal{U}_r$ bölgesini de bir konveks bölge üzerine dönüştürür.

Benzer şekilde, eğer $f(z)$ fonksiyonu, $\mathcal{U}_R$ bölgesini orijine göre yıldızıl bir bölge üzerine dönüştürürse, her bir pozitif $r<R$ için $\mathcal{U}_r$ bölgesini de orijine göre yıldızıl bir bölge üzerine dönüştürür.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasındaki temel ve güzel bir bağıntı ilk kez J.W.Alexander [1] tarafından verilmiştir.

Herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu için,

$$F(z) = z\,f'(z)$$

yazalım. Bu durumda

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = z\,\frac{f'(z) + z\,f''(z)}{z\,f'(z)}$$

ve böylece $F(z) \neq 0$ iken

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = 1 + \frac{z\,f''(z)}{f'(z)}$$

elde ederiz. Eğer $f(z)$ fonksiyonu orijinde k-nıncı mertebeden bir sıfıra sahipse, son eşitliğin her iki tarafı da orijinde analitik olur. Şimdi bu son eşitlik ile konveks ve yıldızıl fonksiyonlar için verdiğimiz (1.9) ile (1.10) eşitsizliklerini karşılaştıralım. Bu durumda,

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zF'(z)}{F(z)}\right] = \mathrm{Re}\left[1 + \frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right]$$

olduğundan, aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 1.9.2 (Alexander Teoremi) *$\mathcal{U}_r$ bölgesinde $f'(z) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}_r$ bölgesinde konveks olması için gerekli ve yeterli koşul $F(z) = z\,f'(z)$ fonksiyonunun bu bölgede yıldızıl olmasıdır [1].* ♦

İlginç bir örnek olarak, $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathrm{Re}\,w > -1/2$ yarı düzlemi üzerine dönüştüren

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon birim diskte konveks olduğundan

$$F(z) = z\,f'(z) = z\,\frac{(1-z) - z(-1)}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonu birim diskte yıldızıldır. Bildiğimiz gibi bu son ifadenin sağ tarafı Koebe fonksiyonudur.

$\mathcal{U}$ birim diskini konveks bir bölge üzerine dönüştüren birim diskte yalınkat ve normalleştirilmiş tüm fonksiyonların kümesini $\mathcal{K}$ sembolü ile göstereceğiz. Ayrıca, $\mathcal{U}$ birim diskini orijine göre yıldızıl bir bölge üzerine dönüştüren birim diskte yalınkat ve normalleştirilmiş tüm fonksiyonların kümesi için $\mathcal{S}^*$ sembolünü kullanacağız. Bu yeni semboller ile Teorem 1.9.2 yi aşağıdaki gibi yeniden oluşturabiliriz.

$$\textbf{\textit{(i)}}\ f(z)\in\mathcal{K}\Rightarrow z f'(z)\in\mathcal{S}^*$$

$$\textbf{\textit{(ii)}}\ F(z)\in\mathcal{S}^*\Rightarrow\int_0^z\frac{F(\zeta)}{\zeta}d\zeta\in\mathcal{K}$$

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonunun $|a_n|$ katsayıları için kesin sınırları hala arıyor olmamıza rağmen, bu problem $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{K}$ altsınıfları için çözülmüştür. $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonlar için Nevanlinna [31] (1921) aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.9.3 *Eğer*

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \tag{1.11}$$

fonksiyonu $\mathcal{S}^*$ *sınıfında ise, her bir pozitif* n *tamsayısı için*

$$|a_n|\leq n$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik her n *için kesindir ve eğer sadece bir* $n\geq 2$ *için eşitlik sağlanırsa, bu durumda* $f(z)$ *fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir dönmesidir.* ♦

Diğer taraftan Loewner [25] 1917 yılında $\mathcal{K}$ sınıfı için aşağıdaki sonucu elde etmiştir:

Teorem 1.9.4 *Eğer (1.11) ile verilen* $f(z)$ *fonksiyonu* $\mathcal{K}$ *sınıfında ise, her bir pozitif* n *tamsayısı için*

$$|a_n|\leq 1$$

olur. Bu eşitsizlik her n *için kesindir ve eğer sadece bir* $n\geq 2$ *için eşitlik sağlanırsa,* $f(z)$ *fonksiyonu,* $\dfrac{z}{1-z}$ *fonksiyonunun bir dönmesidir.* ♦

$\mathcal{S}^*$ sınıfındaki fonksiyonlar ve türevleri için alt ve üst sınırlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.9.5 *$f(z)\in \mathcal{S}^*$ olsun. Bu durumda*

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq |f(z)|\leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leq |f'(z)|\leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

ve her bir $k\geq 2$ için

$$\left|f^{(k)}(z)\right|\leq \frac{k!(k+r)}{(1-r)^{k+2}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerin tümü kesindir. Eşitlik hali için $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir [12]. ♦

Teorem 1.9.5 teki ilk iki eşitsizlik $\mathcal{S}$ sınıfındaki elemanlar için Teorem 1.3.2 ve Teorem 1.3.7 de verilmişti. Koebe fonksiyonu da yıldızıl bir fonksiyon olduğundan bu eşitsizlikler bu altsınıf için de kesindir.

Konveks fonksiyonlar için farklı sınırlar olacağını beklemek doğaldır.

Teorem 1.9.6 *$f(z)\in \mathcal{K}$ olsun. Bu durumda*

$$\frac{r}{1+r}\leq |f(z)|\leq \frac{r}{1-r}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2}\leq |f'(z)|\leq \frac{1}{(1-r)^2}$$

ve her bir $k\geq 2$ için

$$\left|f^{(k)}(z)\right|\leq \frac{k!}{(1-r)^{k+1}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Tüm bu eşitsizlikler kesindir. Eşitlik hali için $f(z)$ fonksiyonunun, $\dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir [12]. ♦

$\mathcal{K}$ sınıfındaki fonksiyonlar ve türevleri için Teorem 1.9.6 da sözü edilen sınırlar, 1916 yılında Gronwall [15] ve 1917 yılında Loewner [25] tarafından birbirinden bağımsız olarak elde edilmiştir.

Nevanlinna [31] 1920 yılında $\mathcal{S}$ sınıfından bir fonksiyon altında, her bir $r \leq 2-\sqrt{3}$ için $|z|=r$ çemberinin resminin bir basit kapalı konveks eğri olacağını gösterdiği gibi herhangi bir $r > R_k$ için $\mathcal{S}$ sınıfında $|z|=r$ çemberinin resmi bir konveks eğri olmayan bir fonksiyonun varlığını da ispatlamıştır. Bu sebepten, burada verilen $R_k = 2-\sqrt{3}$ sayısı kesindir. $R_k = 2-\sqrt{3}$ sayısına $\mathcal{S}$ ***sınıfının konvekslik yarıçapı*** diyoruz.

Grunsky [16] ise 1934 yılında $\mathcal{S}$ sınıfında ***yıldızıllık yarıçapının*** $\ln\dfrac{1+r}{1-r}=\dfrac{\pi}{2}$ denkleminin kökü olan

$$R_{\mathcal{S}^*} = \frac{e^{\pi/2}-1}{e^{\pi/2}+1} = \tanh\frac{\pi}{4} \approx 0,65579$$

sayısı olduğunu göstermiştir.

Robertson [39] 1936 yılında α mertebeli konveks ve α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu, tüm $z \in \mathcal{U}$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right) \geq \alpha$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyona ***α mertebeli yıldızıl fonksiyon*** adı verilir. Bu şekildeki fonksiyonların kümesi $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir. Aynı fonksiyon,

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right) \geq \alpha$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyona ***α mertebeli konveks fonksiyon*** adı verilir. Bu fonksiyonların kümesi $\mathcal{K}(\alpha)$ ile gösterilir.

$\left.\dfrac{z f'(z)}{f(z)}\right|_{z=0} = 1 + \left.\dfrac{z f''(z)}{f'(z)}\right|_{z=0} = 1$ olduğundan $\alpha \leq 1$ olması gerektiği açıktır. Aksi takdirde $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{K}(\alpha)$ kümelerinin ikisi de boş olacaktır. Ayrıca, $\alpha = 1$ ise $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{K}(\alpha)$ kümeleri yalnız bir fonksiyona sahip olur : $f(z) = z$. Biz genelde $0 \leq \alpha < 1$ doğal koşulunu koyacağız. Burada α değeri arttıkça $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{K}(\alpha)$ kümeleri küçülmektedir.

Robertson [39] 1936'da $\mathcal{K}(\alpha)$ sınıfındaki bir fonksiyonun türevinin sınırları için aşağıdaki teoremi ispatlamıştır

Teorem 1.9.7 $0 \le \alpha \le 1$ *olmak üzere* $f(z) \in \mathcal{K}(\alpha)$ *olsun. Bu durumda*

$$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \le \left| f'(re^{i\theta}) \right| \le \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $\alpha \ne 1/2$ *ise*

$$\frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1} \le \left| f(re^{i\theta}) \right| \le \frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}$$

ve eğer $\alpha = 1/2$ *ise*

$$\ln(1+r) \le \left| f(re^{i\theta}) \right| \le -\ln(1-r)$$

olacaktır. Tüm bu eşitsizlikler kesindir. Ekstremal fonksiyonlar

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} & ; \quad \alpha \ne \frac{1}{2} \\ -\ln(1-z) & ; \quad \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

fonksiyonlarının dönmeleridir. ♦

Alexander Teoreminin, bu yeni sınıflarla ilgisi açıktır:

$$f(z) \in \mathcal{K}(\alpha) \Leftrightarrow F(z) \equiv z f'(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha).$$

Sonuç olarak Teorem 1.9.7, $F(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ iken $|F(z)|$ için kesin sınırları verir. Diğer bir deyişle

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \le \left| F(re^{i\theta}) \right| \le \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

olur. Burada

$$k^*(z,\alpha) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$$

bir ekstremal fonksiyondur.

$\mathcal{S}^*$ sınıfını kapsayan ve basit bir geometrik tanıma sahip $\mathcal{S}$ sınıfının ilginç bir altsınıfı da konvekse-yakın fonksiyonlardır. Bu sınıf, 1952 yılında Kaplan [19] tarafından geliştirilmiştir.

Bir $f(z)$ fonksiyonu $|z|<1$ bölgesinde analitik olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0$$

olacak şekilde konveks bir $g(z)$ fonksiyonu veya eşdeğer olarak,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z\,f'(z)}{g(z)}\right)>0$$

eşitsizliğini sağlayan yıldızıl bir $g(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonuna ***konvekse-yakın fonksiyon*** denir. $f(0)=f'(0)-1=0$ koşullarını sağlayan, yani normalleştirilmiş konvekse-yakın $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{CK}$ sembolü ile gösterilir. Burada $f(z)$ fonksiyonunun yalınkat olması öncelikli koşul değildir. Ayrıca $g(z)$ fonksiyonunun $g(0)=g'(0)-1=0$ normalize koşullarını sağlaması gerekmez.

Her konveks fonksiyon konvekse-yakındır. Daha genel olarak, her yıldızıl fonksiyon konvekse-yakındır ve her konvekse-yakın fonksiyon yalınkattır. Bu sonuçlar,

$$\mathcal{K}\subset \mathcal{S}^{*}\subset \mathcal{CK}\subset \mathcal{S}$$

kapsama zinciri ile özetlenebilir.

Konvekse-yakın fonksiyonlar için Kaplan Teoremi olarak bilinen aşağıdaki ifade önemlidir.

Teorem 1.9.8 (Kaplan Teoremi) *$f(z)$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ bölgesinde analitik ve yerel yalınkat, yani $f'(z)\neq 0$, olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun konvekse-yakın olması için, $\theta_1<\theta_2$ koşullu her bir θ_1,θ_2 gerçel sayı çifti ve her bir r $(0<r<1)$ sayısına karşılık $z=r\,e^{i\theta}$ olmak üzere,*

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)d\theta>-\pi$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir [19]. ♦

Burada $f'(z)\neq 0$ koşulu gereklidir. Aksi takdirde, $f(z)=z^n$ $(n\geq 1)$ fonksiyonu teoremi gerçekler ancak yalınkat değildir ve dolayısıyla konvekse-yakın olamaz. Örneğin; α, $\left(0<|\alpha|<\pi/2\right)$ bir gerçel sayı olsun. Bu durumda $f(z)=z(1-z)^{-2e^{i\alpha}\cos\alpha}$ fonksiyonu konvekse-yakın olmadığı halde, $\cos\psi\neq 0$ koşulu altında U birim diskini yarıçapa ait olmayan bir yarı-doğrunun tümleyenine dönüştüren

$$f(z)=(z-z^2\cos\psi)(1-e^{i\psi}z)^{-2}$$

fonksiyonu konvekse-yakındır.

$\mathcal{S}$ sınıfında konvekse-yakın fonksiyonların ***konvekse-yakınlık yarıçapı*** da $0.80\ldots$ olarak bilinmektedir [22].

1.10 p-Katlı Fonksiyonlar Ve Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde p-katlı fonksiyonları ve bazı özel alt sınıflarını tanımlayacağız.

$w=f(z)$ denklemi, bir D bölgesinde her farklı w değeri için en fazla p tane köke sahip ise $f(z)$ fonksiyonuna ***p-katlı fonksiyon*** (veya D bölgesinde p mertebeden çok değerli veya kısaca çok katlı) denir. Eşdeğer olarak, $f(z)$ fonksiyonu konveks bir D bölgesinde analitik ve α gerçel bir sabit olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} f^{(p)}(z) \right) > 0$$

oluyorsa, $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde p-katlıdır. Bu ifade,

$$f(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonunun $\mathcal{U}$ bölgesinde analitik ve $\mathrm{Re}\, f^{(p)}(z)>0$ olması durumunda $\mathcal{U}$ bölgesinde p-katlı olduğu anlamına gelir.

Teorem 1.10.1 *$f(z)$ fonksiyonu $|z|\leq 1$ de analitik ve $|z|=1$ üzerinde $f'(z)\neq 0$ olmak üzere*

$$\int_0^{2\pi} \left| 1+\mathrm{Re}\frac{z f''(z)}{f'(z)} \right| d\theta < 2\pi(p+1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu $|z|\leq 1$ de en fazla p-katlıdır [7]. ♦

$a_p \neq 0$, $p\in \mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ olmak üzere, $|z|<1$ birim diskinde analitik olan

$$f(z)=\sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}(p)$ ile gösterelim.

$\mathcal{A}(p)$ sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonuna, $\mathcal{U}$ birim diskinde, $\mathrm{Re}\dfrac{z f'(z)}{f(z)}>0$ ve $\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{z f''(z)}{f'(z)}\right)>0$ koşullarını sağlaması durumunda, sırasıyla, ***p-katlı yıldızıl fonksiyon*** ve ***p-katlı konveks fonksiyon*** denir. $\mathcal{A}(p)$ sınıfının alt sınıfları olan p-katlı yıldızıl ve p-katlı konveks fonksiyonların sınıfları, sırasıyla, $\mathcal{S}_p^*$ ve $\mathcal{K}_{\text{p}}$ ile gösterilir. p-katlı fonksiyonların alt sınıfları için, yalınkat fonksiyonların alt sınıflarına ait bazı özellikler sağlanır.

Teorem 1.10.2 *$f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde p-katlı yıldızıl bir fonksiyon ise, bu bölgede p-katlıdır. Benzer şekilde $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde p-katlı konveks bir fonksiyon ise, yine bu bölgede p-katlıdır [7].* ♦

Teorem 1.10.3 *$\mathcal{A}(p)$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için,*

$$f(z)\in \mathcal{K}_p \Leftrightarrow \frac{z\,f'(z)}{p}\in \mathcal{S}_p^*$$

önermesi doğrudur. Ayrıca

$$\mathcal{K}_p \subset \mathcal{S}_p^*$$

bağıntısı da yazılabilir [33]. ♦

$\mathcal{K}_p$ ve $\mathcal{S}_p^*$, $p=1$ durumunda sırasıyla, yalınkat fonksiyonların alt sınıfları olarak bilinen konveks ve yıldızıl fonksiyonlar sınıfları olur. Yani, $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* = \mathcal{S}_1^*$ olacaktır.

$f(z)\in \mathcal{A}(p)$ için $\mathcal{U}$ birim diskinde

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right) < p+\frac{1}{2}$$

yazılabiliyorsa, $f(z)$, $\mathcal{U}$ bölgesinde p-katlı yıldızıl fonksiyon ve $z\in\mathcal{U}$ iken

$$0 < \frac{z\,f'(z)}{f(z)} < \frac{2p\,(p+1)}{2p+1}$$

olur [36]. Bu durumda,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0$$

olacak şekilde p-katlı konveks bir $g(z)\in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna ***p-katlı konvekse-yakın fonksiyon*** adı verilir ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{CK}_p$ ile gösterilir.

Diğer taraftan, $f(z)$ fonksiyonu, $\forall z \in \mathcal{U}$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere bazı $0 \le \alpha < p$ değerleri için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right) d\theta = 2p\pi$$

koşullarını sağlıyorsa, ***α-mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyon*** adını alır. $\mathcal{A}(p)$ sınıfının alt sınıfı olan α-mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ ile gösterilecektir.

$\mathcal{A}(p)$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonunun ***α-mertebeli p-katlı konveks fonksiyon*** olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall z \in \mathcal{U}$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere en az bir $0 \le \alpha < p$ değeri için

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right) d\theta = 2p\pi$$

olmasıdır.

α - mertebeli p-katlı konveks fonksiyonlar için bir başka tanım da aşağıdaki gibi verilebilir.

$\mathcal{A}(p)$ sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonu $\forall z \in \mathcal{U}$ ve en az bir $\alpha \ge 0$ değeri için

$$\operatorname{Re}\left((1-\alpha)\frac{z f'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)\right) > 0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(z)$, α-mertebeli p-katlı konveks fonksiyon adını alır. p-katlı α-konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}_p(\alpha)$ ile gösterilir.

Verilen son tanımda özel olarak $\alpha = 0$ alındığında

$$\mathcal{K}_p(0) = \mathcal{S}_p^*(0) = \mathcal{S}_p^*$$

olduğu açıktır. Ayrıca $\mathcal{K}_p(\alpha)$ ve $S_p^*(\alpha)$ sınıfları için

$$f \in \mathcal{K}_p(\alpha) \Leftrightarrow \frac{z f'(z)}{p} \in S_p^*(\alpha)$$

önermesi doğrudur ve $0 \leq \alpha \leq p$ durumunda

$$\textbf{\textit{(i)}}\ \mathcal{S}_p^*(\alpha) \subseteq \mathcal{S}_p^*(0)$$

$$\textbf{\textit{(ii)}}\ \mathcal{K}_p(\alpha) \subseteq \mathcal{K}_p(0)$$

$$\textbf{\textit{(iii)}}\ \mathcal{K}_p(\alpha) \subset \mathcal{S}_p^*(\alpha) \subset \mathcal{A}(p)$$

kapsamaları yazılabilir. Ayrıca p-katlı α-konveks fonksiyonlar ile yıldızıl fonksiyonlar arasındaki ilgiyi açıklamak üzere aşağıdaki ifade verilebilir.

Teorem 1.10.4 $\alpha > 0$ *için*

$$f(z) \in \mathcal{K}_p(\alpha) \Leftrightarrow \exists\, F \in \mathcal{S}_1^* \ :\ f(z) = \left(\frac{p}{\alpha} \int_0^z \frac{F(t)^{p/\alpha}}{t}\, dt \right)^{\alpha}$$

önermesi doğrudur [38]. ♦

$\mathcal{A}(p)$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonunun ***α-mertebeli p-katlı konvekse-yakın fonksiyon*** olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall z \in \mathcal{U}$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere en az bir $0 \leq \alpha < p$ değeri için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) > \alpha$$

olacak şekilde $g(z) \in \mathcal{K}$ fonksiyonunun bulunabilmesidir. α mertebeli p-katlı konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\mathcal{CK}_p(\alpha)$ ile gösterilir.

Bir $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ ve bir $g(z) \in \mathcal{K}$ fonksiyonu için,

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - 1 \right| < 1 - \alpha$$

olması, α- mertebeli konvekse–yakın fonksiyonlar için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) > \alpha$$

eşitsizliğini gerektirir.

1.11 Kesirsel Hesap

Geleneksel integral ve türev, en kısa söylemle, doğal ve suni sistemlerle çalışmayı ve onları kavramayı esas alan profesyonel teknolojinin bir unsurudur. Kesirsel hesaplama, tıpkı tamsayı değerli üslerin kesirsel üslerden farklı gelişmesi gibi, türev operatörü ve integral hesabın geleneksel tanımından farklı gelişen bir matematiksel çalışma alanıdır.

Üs kavramının fiziksel anlamını göz önüne alalım. İlkokul öğretmenlerine göre üsler, bir sayısal değerin tekrarlanmış çarpımını ifade etmenin kısa bir yoludur. Bununla birlikte bu fiziksel tanım, tamsayı değerli olmayan üsler düşünüldüğünde karışık olmaya başlar. Hemen hemen herkes $x^3 = x.x.x$ olduğunu bilir. Fakat $x^{3,4}$ hatta x^{π}'nin fiziksel anlamını nasıl açıklayabiliriz? Bir sayının kendisi ile 3,4 kez veya π kez çarpılmasını tasavvur etmek mümkün değildir. Lakin bu ifadelerin herhangi bir x değeri için sonsuz seri açılımları veya daha pratik olarak, hesap makinesi ile belli bir değerini bulmak mümkündür. Şimdi aynı yolla integral ve türevi göz önüne alalım. Bunlar haliyle daha karmaşık kavramlardır; ancak yine de bunları ifade etmek mümkündür. Bir kez uzmanlaşıldığında integral alma ve türev işlemleri de kolaylıkla yapılabilir. Birkaç kısıtlama ekleyerek (örneğin fonksiyonun sürekliliği) n-integral de çarpma kadar kolay bir hal alır. Fakat yine de n'in tamsayı olmaması durumunda bunun nasıl yapılacağını merak etmemek elde değildir. Yine ilk bakışta fiziksel anlam biraz karışık olabilir. Fakat kesirsel hesap, geleneksel tanımlarımızdan kolaylıkla ilerletilebilir ve tıpkı karekök gibi kesirsel üslerin sayısız denklem ve uygulamalarında kullanıldığı gibi $1/2$ veya diğer kesirsel mertebeden integral hesabı da birçok modern ya da gelişmiş bir problemde kullanılabilir.

Bu konu üzerinde çalışan pek çok yazar, kesirsel hesaplamanın doğum günü olarak anılan özel bir tarihten bahseder. Leibniz, L'Hopital'e 1695 yılında bir mektup yazarak şu soruyu sorar:

"Tamsayı mertebeli türevlerin anlamı, tamsayı olmayan mertebeden türevlere genelleştirilebilir mi?"

L'Hopital'in, yayınlarında $f(x) = x$ doğrusal fonksiyonunun n-inci türevi için kullandığı özel bir gösterim olan $\dfrac{D^n x}{Dx^n}$ hakkındaki şaşırtıcı sorusuyla hikâye devam eder.

" Eğer $n = 1/2$ olursa sonuç ne olur?"

Leibniz'in 30 Eylül 1695 tarihli mektubunda verdiği yanıt ise şu olmuştur:

" Günün birinde bundan yararlı sonuçlar elde edilecek olan apaçık bir paradoks."

İşte bu kelimelerle "*kesirsel hesap*" doğmuştur.

L'Hopital ve Leibniz'in ilk sorgulamalarını izleyen kesirsel hesaplar, matematikteki bu yeni fikir için ilk çalışmalar olmuştur. Aralarında Fourier, Euler ve Laplace'ın da bulunduğu pek çok matematikçi kesirsel hesaplar ve bunun matematiksel sonuçlarıyla ilgilenmiştir. Bunlardan birçoğu kendi kavram ve gösterimlerini kullanarak tamsayı olmayan mertebeden integral ve türev kavramına uygun tanımlar bulmuşlardır. Bu tanımlardan kesirsel hesap dünyasında popülaritesi olan en ünlü ve en kullanışlı tanım Riemann-Liouville tanımıdır.

Kesirsel hesap günümüzde sayısal analiz, kontrol teorisi, ısı iletimi, elektrik bilimi, mekanik, kaos ve fraktalar gibi pek çok alanda uygulamalara sahiptir.

Kesirsel hesap ile ilgili tanımlarımıza geçmeden önce, bu tanımlarda kullandığımız ve matematikte önemli bir yere sahip olan ve $\mathrm{Re}\{z\} > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

ile tanımlı Gamma fonksiyonunun sık kullanılan birkaç özelliğini hatırlatalım:

(i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(1) = 1$

(ii) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}^+$

(iii) $\Gamma(z) = 0$ olacak şekilde hiçbir z noktası yoktur. $z = 0, -1, -2, \ldots$

noktaları hariç her yerde analitiktir ve $z = -k$ noktasındaki rezidüsü

$\operatorname*{Re}_{z=-k} z\,\Gamma(z) = \dfrac{(-1)^k}{k!}$ şeklindedir.

Şimdi artık kesirsel integral ve kesirsel türev tanımlarımıza geçebiliriz.

Tanım 1.11.1 $f(x)\in C([a,b])$ ve $a<x<b$ ise, $\lambda\in(-\infty,\infty)$ iken

$$D_a^{-\lambda} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\lambda}}d\xi$$

integraline $\boldsymbol{\lambda}$ ***mertebeli Riemann-Liouville kesirsel integrali*** denir. Benzer şekilde $\lambda\in(0,1)$ için

$$D_a^{\lambda} f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\lambda}}d\xi$$

değerine de $\boldsymbol{\lambda}$ ***mertebeli Riemann-Liouville kesirsel türevi*** denir.

Bu operatörlere ***Riemann-Liouville kesirsel integral operatörleri*** veya kısaca ***R-L operatörleri*** denir. $\lambda=1/2$ özel halinde kesirsel türev, ***yarı-türev*** adını alır.

Riemann-Liouville kesirsel integral operatörleri hakkında oldukça yararlı bir durum, kesirsel integralin aşağıdaki yarı grup özelliğidir:

Teorem 1.11.1 *Herhangi bir* $f(x)\in C([a,b])$ *için Riemann-Liouville kesirsel integrali,* $\lambda>0, n>0$ *iken*

$$D_a^{-\lambda}D_a^{-n} f(x)=D_a^{-(\lambda+n)} f(x)$$

eşitliğini sağlar. ♦

Şimdi, Riemann-Liouville kesirsel integrali ve kesirsel türevini analitik fonksiyonlara genelleştirelim.

Tanım 1.11.2 *Orijini kapsayan karmaşık z-düzleminin basit bağlantılı bir bölgesinde analitik olan ve* $z-\xi>0$ *iken* $\log(z-\xi)$ *değerinin gerçel olması gerektiğinden* $(z-\xi)^{\lambda-1}$ *katlılığı kaldırılmış bir* $f(z)$ *fonksiyonu için,* λ *mertebeli kesirsel integral*

$$D_z^{-\lambda} f(z)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-\lambda}}d\xi, \qquad (\lambda>0)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 1.11.3 *Tanım 1.11.2 deki gibi kısıtlanmış ve* $(z-\xi)^{-\lambda}$ *katlılığı kaldırılmış bir* $f(z)$ *fonksiyonu için,* λ *mertebeli kesirsel türev*

$$D_z^{\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{\lambda}} d\xi, \qquad (0 \le \lambda < 1)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 1.11.4 *Tanım 1.11.3 ile verilen varsayımlar altında, bir* $f(z)$ *fonksiyonu için,* $n+\lambda$ *mertebeli kesirsel türevi*

$$D_z^{n+\lambda} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} D_z^{\lambda} f(z), \qquad \left(0 \le \lambda < 1;\, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\right)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 1.11.2 ve 1.11.3 ten

$$D_z^{-\lambda} z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\lambda+1)} z^{k+\lambda} \qquad (\lambda > 0), \tag{1.12}$$

ve

$$D_z^{\lambda} z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\lambda+1)} z^{k-\lambda} \qquad (0 \le \lambda < 1) \tag{1.13}$$

olduğu kolayca görülebilir.

1.12 Salagean Operatörü

$\mathcal{U} = \{ z : |z| < 1 \}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$$

formundaki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ olsun.

$\mathcal{A}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için 1983 yılında G.S.Salagean [41],

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = zf'(z)$$

$$\vdots$$

$$D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z)) \qquad (n \in \mathbb{N} = 1,2,3,\ldots)$$

şeklinde bir operatör elde etmiştir.

Bazı basit hesaplamalar ile $\mathcal{A}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$D^n f\left(z\right) = z + \sum_{j=2}^{\infty} j^n a_j z^j \qquad (n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$$

olduğu, tanımdan kolayca bulunabilir.

Daha sonra F.M.Al-Oboudi 2004 yılında bu operatörü aşağıdaki gibi genelleştirmiştir [2]:

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = (1-\delta) f(z) + \delta z f'(z) = D_\delta f(z) \qquad \delta \geq 0$$

$$D^n f(z) = D_\delta (D^{n-1} f(z)) \qquad (n \in \mathbb{N} = 1, 2, 3, ...)$$

$\mathcal{A}$ sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$D^n f\left(z\right) = z + \sum_{j=2}^{\infty} [1+(j-1)\delta]^n a_j z^j \qquad (n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$$

olduğu, tanımdan kolayca görülebilir.

Al-Oboudi'ye ait olan bu genelleştirilmiş Salagean operatöründe, $\delta = 1$ alınması durumunda Salagean Operatörünü elde edeceğimiz açıktır.

2. BÖLÜM

BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde en önemli problemlerden biri, $0 < \mu < \infty$ için,

$$M_\mu(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^\mu d\theta \right\}^{1/\mu}, \quad 0 < r < 1$$

integral ortalaması için kesin üst sınırlar bulmaktır. $\mu = 1$ durumunda problem, Bieberbach Kestirimine gider. Bu bölümün amacı, $\mathcal{S}$ sınıfındaki tüm fonksiyonlar arasında, $M_\mu(r,f)$ integral ortalamasının en büyüğünün Koebe fonksiyonu için olduğunu göstermektir.

2.1 Fejer ve F.Riesz Teoremi

Bu teorem yalınkatlığı gerektirmemekle birlikte $\overline{\mathcal{U}}$ kapalı birim diskinde analitik olan herhangi bir fonksiyon için sağlanır.

Teorem 2.1.1 *Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\overline{\mathcal{U}}$ kapalı birim diskinde analitik ise, sol taraftaki integral gerçel eksen boyunca alınmak üzere*

$$\int_{-1}^{1} \left| f(z) \right|^2 dz \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta \tag{2.1}$$

eşitsizliği vardır. Kısaca, bir çap üzerindeki integral, $\overline{\mathcal{U}}$ diskinin sınırı üzerindeki integralin yarısını geçemez.

İspat : İlk olarak $f(z)$ fonksiyonunun [-1,1] aralığında gerçel olduğunu varsayalım ve sonra da (2.1) ifadesinin sol tarafının

$$J = \int_{-1}^{1} f^2(z)\, dz$$

şeklinde gösterilebileceğini belirtelim.

Cauchy integral teoremi ile integralin yolu J yi değiştirmeksizin $\mathcal{U}$ diskinin sınırının üst (veya alt) yarısı içine değiştirilebilir. Bu durumda $z = e^{i\theta}$ ile

$$2J = \int_{-\pi}^{0} f^2(z)\,dz + \int_{\pi}^{0} f^2(z)\,dz$$

yazılabilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafının mutlak değerini alırsak (2.1) ifadesini elde ederiz.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu [-1,1] aralığında kesin olarak gerçel değilse $n = 0,1,2,\ldots$ için α_n, β_n gerçel olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\,\beta_n)\,z^n$$

olduğunu varsayalım. $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ ve $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$ alarak, $f(z) = g(z) + i\,h(z)$ buluruz. Şimdi $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonlarının her ikisi de [-1,1] aralığında gerçel olur. Artık ispatın ilk kısmını $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonlarına uygulayabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{1} \left|f(z)\right|^2 dz = \int_{-1}^{1} g^2(z)dz + \int_{-1}^{1} h^2(z)dz \equiv J_1 + J_2 \\ &\le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|g(e^{i\theta})\right|^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|h(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \\ &\le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|g(e^{i\theta}) + i\,h(e^{i\theta})\right|^2 d\theta + \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[g(e^{i\theta})\overline{h}(e^{i\theta}) - \overline{g}(e^{i\theta})\,h(e^{i\theta}) \right] d\theta \end{aligned}$$

bulunur. $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonlarının katsayıları gerçel olduğundan $\overline{h}(e^{i\theta}) = h(e^{-i\theta})$ ve $\overline{g}(e^{i\theta}) = g(e^{-i\theta})$ olur. Sabit terimlerin integrali sıfır olduğundan ve $k \neq 0$ iken $e^{ik\theta}$ fonksiyonu 2π periyotlu olduğundan son integral sıfıra gider. Bu da ispatı tamamlar [12]. ♦

(2.1) ifadesinde eşitliğin olabilmesi için $f(z) = 0$ olması gerekli ve yeterlidir. Ayrıca bu ifadedeki $1/2$ sabitinin daha küçük olan herhangi bir sayıyla değiştirilemeyeceğini ancak 2 üssünün herhangi bir pozitif sayı ile değiştirilebileceğini birazdan göreceğiz.

Teorem 2.1.2 *$f(z)$ fonksiyonu $\overline{\mathcal{U}}$ kapalı birim diskinde analitik ve $\mu > 0$ ise, sol taraftaki integral gerçel eksen boyunca alınmak üzere*

$$\int_{-1}^{1} \left|f(z)\right|^{\mu} dz \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(r\,e^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : İlk olarak $\mathcal{U}$ diskinde $f(z) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $g(z) = \sqrt{f(z)^{\mu}}$ fonksiyonu da $\mathcal{U}$ diskinde analitiktir. Bu $g(z)$ fonksiyonuna Teorem 2.1.1 i uygularsak, (2.2) eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi de $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ diskinde sıfırlara sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(z)$ ya sıfıra özdeştir ya da $\overline{\mathcal{U}}$ kapalı diskinde sadece sonlu sayıda sıfıra sahiptir. Birinci durumda (2.2) eşitsizliğinin doğruluğu açıktır. İkinci durumda, katlılığına göre sıralanmak üzere $b_1, b_2, \ldots, b_k$, $f(z)$ fonksiyonunun $\overline{\mathcal{U}}$ kapalı diskindeki sıfırlarının kümesi olsun ve

$$Q(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{z - b_j}{1 - \overline{b}_j z}$$

eşitliğini oluşturalım. Bu durumda $|z|=1$ için $|Q(z)|=1$ olur. Ayrıca $g(z) = \dfrac{f(z)}{Q(z)}$ fonksiyonu $\overline{\mathcal{U}}$ kapalı diskinde analitiktir ve burada hiçbir sıfıra sahip değildir. Böylece ispatın ilk kısmı ile

$$\int_{-1}^{1} \left|g(z)\right|^{\mu} dz \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|g(e^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(e^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta$$

olur. Diğer taraftan $-1 \leq z \leq 1$ için $\left|f(z)\right| = \left|Q(z)\right|\left|g(z)\right| \leq \left|g(z)\right|$ olur. Bunu yukarıdaki eşitsizlikte kullanırsak (2.2) eşitsizliğini elde ederiz [12]. ♦

(2.2) eşitsizliği, $f(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu herhangi bir kapalı diskin sınırı ve çapı için doğrudur.

Bu teoremin geometrik yorumuna geçmeden önce bazı gösterimleri verelim. $C_r = \{\, z : |\, z\,| = r \,\}$ olmak üzere $L(r, f)$ (veya $L(r)$), $f(C_r)$ eğrisinin uzunluğu olsun.

Diğer taraftan,

$$L(r) \equiv L(r,f) = r\int_0^{2\pi} \left| f'(r\,e^{i\theta}) \right| d\theta \tag{2.3}$$

olduğunu biliyoruz. Bundan başka $0 \le t \le r$ için $L(\alpha, r, f) \equiv L(\alpha, r)$, $f(e^{i\alpha}t)$ eğrisinin uzunluğu olsun. Bu durumda

$$L(\alpha,r) \equiv L(\alpha,r,f) = \int_0^{r} \left| f'(e^{i\alpha}t) \right| dt \tag{2.4}$$

olur. Son olarak, D_r, $-r \le t \le r$ çapını belirtsin ve $L(D_r, f) = L(D_r)$, $f(D_r)$ nin uzunluğu olsun. Bu durumda

$$L(D_r) = L(D_r, f) = \int_{-r}^{r} \left| f'(t) \right| dt \tag{2.5}$$

olur.

$f(z)$ fonksiyonunun bir yalınkat fonksiyon ve eğrinin basit düzlem eğrisi olması gerekli değildir. Eğriler bir Riemann yüzeyi üzerinde bulunabilirler ve izdüşümleri kendiyle kesişen pek çok noktaya sahip olabilirler. Bu durumda (2.3), (2.4) ve (2.5) formülleri yine de doğrudur.

(2.2) denkleminde bir değişken değiştirme, bize

$$\int_{-r}^{r} \left| f(e^{i\alpha}t) \right|^{\mu} dt \le \frac{r}{2}\int_0^{2\pi} \left| f(r\,e^{i\theta}) \right|^{\mu} d\theta$$

eşitsizliğini verir. Şimdi burada $\mu = 1$ seçer ve $f(z)$ yi $f'(z)$ ile değiştirirsek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.1.3 *Eğer $f(z)$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ise herhangi bir $r \in (0,1)$ için $L(D_r) \le L(r)/2$ olur. Yani, C_r eğrisinin herhangi bir çapının resminin uzunluğu en fazla C_r eğrisinin resminin uzunluğunun yarısı olur [12].* ♦

$|z| = 1$ çemberinin resmi bir düzeltilebilir eğri olduğu sürece, bu teorem $\mathcal{U}$ birim diskinin sınırına genişletilebilir.

Daha önce de söylediğimiz gibi, Teorem 2.1.2 deki $1/2$ sabiti, herhangi bir daha küçük sabitle değiştirilemez. Gerçekten $g(z) = \ln\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini

$|\mathrm{Im}\, w| < \frac{\pi}{2}$ şeridi üzerine dönüştürür. Her bir $r<1$ için $g(C_r)$, asal ekseni D_r nin resmi olan bu şeritte kapsanan bir eğridir. $r \to 1$ iken $\frac{L(D_r)}{L(r)} \to \frac{1}{2}$ olacağı açıktır. Eğer $f(z)=g'(z)$ alınırsa, bu $\mu=1$ iken Teorem 2.1.2 deki $1/2$ sabitinin azalamayacağını gösterir. Keyfi bir $\mu>0$ için

$$f(z)=\sqrt[\mu]{\frac{g'(z)}{2}}=\frac{1}{(1-z^2)^{1/\mu}}$$

yazılırsa, $\left|f(z)\right|^{\mu}=\frac{|g'(z)|}{2}$ olur.

Şimdi Teorem 2.1.3 ün bir yarım daire versiyonunu göz önüne alalım. $\overline{\mathcal{U}}$ kapalı diskinde analitik her bir $f(z)$ için

$$\int_{-1}^{1}\left|f'(z)\right|dz \le C\int_{0}^{\pi}\left|f'(e^{i\theta})\right|d\theta \tag{2.6}$$

olacak şekilde bir C sabiti var mıdır?

Eğer $f(z)$ sadece analitik ise cevap hayır olur. Gerçekten, $k>0$ ile $f'(z)=e^{ikz}$ alalım. Bu durumda $-1\le z\le 1$ iken $|e^{ikz}|=1$ olur. Böylece (2.6) ifadesinin sol tarafı 2 olur. Diğer taraftan $z=e^{i\theta}$ ise, bu durumda $|e^{ikz}|=e^{-k\sin\theta}$ olur ve $k\to\infty$ iken (2.6) ifadesinin sağ tarafı sıfıra yaklaşır.

Piranian [12], eğer $f(z)$ fonksiyonunu $\overline{\mathcal{U}}$ kapalı diskinde analitik ve yalınkat olarak kısıtlarsak, (2.6) ifadesinin hala doğru olabileceği kestiriminde bulundu. Bu kestirim doğruydu ve Gehring ile Hayman [10] bu durumu 1962 yılında $\pi<C<74$ olmak üzere bazı C değerleri için ispatladılar. Jaenisch [18] 1968 yılında tüm yalınkat fonksiyonlar için $4,5\le C\le 17,5$ olmak üzere bazı C değerleri için bu eşitsizliğin sağlandığını göstererek bu aralığın her iki sınırını da düzeltti.

2.2 Subordinasyon İçin Daha Fazla Bilgi

Birinci bölümde verilen Subordinasyon tanımını tekrar hatırlayalım. $|f(z)|<1$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik olan $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$ fonksiyonlarının sınıfı B_0 olmak üzere, eğer

$$f(z) = F\left(b(z)\right)$$

olacak şekilde $b(z) \in B_0$ varsa $f(z)$, $F(z)$ fonksiyonuna subordinedir diyorduk ve subordinasyonu $f(z) \prec F(z)$ sembolü ile gösteriyorduk. Bu denklemde $F(z)$ fonksiyonunun yalınkat olması gerekli değildir.

Tanım 2.2.1 *Eğer*

$$M_\mu(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^\mu d\theta \right)^{1/\mu}$$

integrali $r \to 1^-$ *iken sınırlı ise,* $f(z)$ *fonksiyonuna* $\mathcal{H}^{(\mu)}$ ***Hardy sınıfındadır*** *denir.*

1925 yılında Littlewood [24] aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını göstermiştir.

Teorem 2.2.1 *Eğer* $\mathcal{U}$ *birim diskinde* $f(z) \prec F(z)$ *ise, her* $r \in [0,1)$ *ve* $\mu \geq 0$ *için*

$$M_\mu(r,f) \leq M_\mu(r,F)$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

$M_\mu(r,f)$ tanımında normalleştirme işlemi yapmak ve işlem yapma kolaylığı sağlamak amacı ile $I_\mu(r,f) = \left[M_\mu(r,f) \right]^\mu$ yeni sembolünü vermek uygun olacaktır. Böylece Teorem 2.2.1 yerine

$$I_\mu(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^\mu d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| F(re^{i\theta}) \right|^\mu d\theta = I_\mu(r,F) \tag{2.7}$$

eşitsizliğini verebiliriz.

Şimdi, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

Sonuç 2.2.1 *Eğer* $f(z) \prec F(z)$ *ise, bu durumda her* $r \in (0,1)$ *için*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left| F(re^{i\theta}) \right| d\theta,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n \right|^2 r^{2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| A_n \right|^2 r^{2n}$$

ve

$$\max_r |f(z)| \le \max_r |F(z)|$$

eşitsizlikleri sağlanır. ♦

Yine Littlewood [12] tarafından elde edilen bir diğer sonuç da şöyledir:

Sonuç 2.2.2 *Eğer* $f(z) \prec F(z)$ *ve* $r = 1 - \dfrac{1}{n}$ *ise*

$$|a_n| \le \frac{e}{r} \max_\theta |f(re^{i\theta})|$$

eşitsizliği vardır. ♦

1943 yılında Rogosinski [40] $\mathcal{U}$ birim diskinde $f(z) \prec F(z)$ iken $f(z)$ ve $F(z)$ fonksiyonlarının katsayılarıyla ilgili pek çok ilginç eşitsizlik ispatlamıştır. Bu eşitsizliklerden bazıları aşağıda listelenmiştir. Her bir teoremde $a_0 = A_0 = 0$ ve $A_1 = 1$ olmak üzere $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ kuvvet serileri kullanılmıştır.

1. $f(z) \prec \dfrac{z}{(1-z)^2}$ ise $|a_n| \le n$,

2. $f(z) \prec F(z)$ ve $F(z) \in \mathcal{K}$ ise $|a_n| \le 1$,

3. $f(z) \prec F(z)$ ve $F(z) \in \mathcal{S}^*$ ise $|a_n| \le n$.

Bu sonuçlar Rogosinski'nin aşağıdaki genelleştirilmiş kestirimine gider:

"$f(z) \prec F(z)$ ve $F(z) \in \mathcal{S}$ ise $n = 2,3,...$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliği vardır."

Herhangi bir fonksiyon kendine subordine olduğu için bu sonuç eğer doğru ise $\mathcal{S}$ sınıfındaki her fonksiyon için $|A_n| \le n$ eşitsizliğinin ispatını verir. Bununla beraber, Rogosinski'nin $|a_n| \le n$ kestirimi, $\mathcal{S}$ sınıfındaki bir fonksiyon için $|A_n| \le n$ orijinal kestirimini ispatlamaktan daha zordur.

Marx [29] 1932 yılında yıldızıl olan bir $f(z)$ fonksiyonunun

$$\frac{f(z)}{z} \prec \frac{k(z)}{z}$$

subordinasyonunu sağladığını ispatlamıştır. Bu sonuç, Marx'ın

"$f(z) \in \mathcal{S}^*$ ise, $\mathcal{U}$ birim diskinde $f'(z) \prec k'(z) \equiv \dfrac{1+z}{(1-z)^3}$ subordinasyonu sağlanır"

şeklindeki kestirimine gider.

Pek çok fonksiyon için $k(z)$ Koebe fonksiyonu bir ekstremal fonksiyon olduğundan her $\mu > 0$ ve $f(z) \in \mathcal{S}$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|k(re^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta \tag{2.8}$$

eşitsizliğini tahmin etmek doğaldır.

Görünüşte, bu $f(z) \prec k(z)$ iken doğru olan (2.7) eşitsizliğine benzer fakat ne yazık ki $\mathcal{S}$ sınıfında, $\mathcal{S}$ nin bir diğer fonksiyonuna subordine olan bir fonksiyon yoktur.

Baernstein teoremine geçmeden önce, kısa bir hatırlatma yapalım.

$-\infty < x < \infty$ üzerinde sürekli bir $\Omega(x)$ fonksiyonu, eğer

$$\Omega\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \le \frac{1}{2}\big(\Omega(x)+\Omega(y)\big)$$

eşitsizliğini sağlarsa bu fonksiyona konvekstir denir. $x = y$ olmadıkça kesin eşitsizlik sağlanıyorsa $\Omega(x)$ fonksiyonuna ***kesin konveks fonksiyon*** denir.

Bu hatırlatmalardan sonra Baernstein teoremini aşağıdaki gibi verebiliriz.

Teorem 2.2.2 $\Omega(x)$, $-\infty < x < \infty$ *için azalmayan konveks fonksiyon olsun. Eğer* $f(z) \in \mathcal{S}$ *ise, bu durumda*

$$\int_0^{2\pi} \Omega\left(\ln\left|f(re^{i\theta})\right|\right) d\theta \le \int_0^{2\pi} \Omega\left(\ln\left|k(re^{i\theta})\right|\right) d\theta \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer en az bir $r \in (0,1)$ *için eşitlik sağlanırsa ve* Ω *kesin konveks ise bazı* $|\eta| = 1$ *değerleri için* $f(z) = \eta k(\overline{\eta} z)$ *olur [3].* ♦

Örneğin, $\Omega(x) = e^{\mu x}$ fonksiyonu kesin konvekstir ve $(-\infty, \infty)$ aralığında artandır. Böylece her $f(z) \in \mathcal{S}$ ve her $\mu > 0$ için kesin sonuç (2.8) eşitsizliğidir.

Bir diğer örnek olarak

$$\Omega(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım. Bu durumda $\Omega(x)$ gerekli özelliklere sahiptir ve (2.9) ifadesi, her $f(z) \in \mathcal{S}$ için

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| k(re^{i\theta}) \right| d\theta$$

eşitsizliğini verir.

Baernstein Teoreminin ispatı [7] oldukça uzun ve zordur. Bu yüzden ispatı burada vermeyeceğiz.

Baernstein, Teorem 2.2.2 de verilen $\Omega(x)$ fonksiyonu ile ilgili olarak, her $f(z) \in \mathcal{S}$ için

$$\int_0^{2\pi} \Omega\left(\ln \frac{1}{\left| f(re^{i\theta}) \right|} \right) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \Omega\left(\ln \frac{1}{\left| k(re^{i\theta}) \right|} \right) d\theta$$

eşitsizliğini de ispatlamıştır.

2.3 Türevler için İntegral Ortalama Eşitsizlikleri

Baernstein Teoremi'ni türevlere genişletip genişletemeyeceğimiz sorusunu sormak doğaldır. Daha özel olarak

$$I_\mu\left(r, f'(z)\right) \leq I_\mu\left(r, k'(z)\right) \tag{2.10}$$

eşitsizliğini yazmak mümkün müdür?

$\mu < 1/3$ için bu eşitsizlik yanlıştır. Tüm $\mu < 1/3$ değerleri için $r \to 1$ giderken $I_\mu\left(r, k'(z)\right)$ sınırlı olduğundan $k'(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{H}^{(\mu)}$ Hardy uzayında olduğu doğrudan hesaplamalarla görülebilir. Diğer taraftan Lohwater, Pranian ve Rudin, herhangi bir $\mu > 0$ için türevleri $\mathcal{H}^{(\mu)}$ sınıfında olmayan, yani $I_\mu\left(r, f'(z)\right)$ değeri sınırsız olan $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların varlığını göstermişlerdir [27]. Böyle bir $f(z)$

fonksiyonu ve her bir $\mu < 1/3$ için (2.10) eşitsizliği 1 civarındaki tüm r değerleri için yanlış olacaktır.

Yüksek mertebeden türevlerle ilgili olarak MacGregor [28] 1972 yılında aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 2.3.2 *$\mu \geq 1$ ve $f(z) \in \mathcal{CK}$ olsun. $0 < r < 1$ ve tüm $n \geq 1$ değerleri için*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{(n)}(re^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|k^{(n)}(re^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta$$

eşitsizliği sağlanır [12]. ♦

$f(z) \in \mathcal{S}$ ise, $I_{\mu}\left(r, f^{(n)}(z)\right)$ için kesin üst sınır bilinemez fakat Feng 1974 yılında [9] ve Feng ile MacGregor 1976 yılında [8] bazı güzel üst sınırlar elde edilmişlerdir.

Teorem 2.3.3 *$F(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonunu alalım. Eğer $f(z) \in \mathcal{K}$, $\mu \geq 0$ ve $n = 0,1,2$ ise*

$$I_{\mu}\left(r, f^{(n)}(z)\right) \leq I_{\mu}\left(r, F^{(n)}(z)\right) \qquad (0 < r < 1)$$

eşitsizliği sağlanır [12]. ♦

Diğer n değerleri için de $I_{\mu}\left(r, f^{(n)}(z)\right)$ ifadesinin güzel üst sınırları elde edilmiştir, ancak $n > 2$ için kesin üst sınır hala bilinmemektedir.

1934 yılında Nabetani [30] tarafından ispatlanan bir diğer teorem de aşağıdadır:

Teorem 2.3.4 *$F(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunu alalım. Eğer $f(z) \in \mathcal{P}$ ve $\mu \geq 1$ ise, bu durumda $0 < r < 1$ ve tüm $n \geq 0$ değerleri için*

$$I_{\mu}\left(r, f^{(n)}(z)\right) \leq I_{\mu}\left(r, F^{(n)}(z)\right)$$

olur. Eğer $n = 0$ ise aynı eşitsizlik tüm gerçel μ değerleri için sağlanır. ♦

3. BÖLÜM

ÇOK KATLI FONKSİYONLARIN İNTEGRAL ORTALAMA HESABI I

Littlewood, $f(z) \prec g(z)$ subordinasyonunu sağlayan analitik $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının integral ortalamaları için bazı ilginç sonuçlar vermiştir [24]. Bu bölümde, Littlewood tarafından verilen bu integral ortalamaların bazı uygulamalarını yaparak, bunlarla ilgili ilginç örnekler verilecektir. Verilen teoremler, Owa ve Sekine'ye ait teoremlerin genelleştirmesidir [34]. Yapılan bu çalışma, *"Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics"* adlı dergide yayınlanmıştır [17].

3.1 Temel Tanımlar

$\mathcal{A}_{p,n}$, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik, çok katlı ve

$$f(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}), \tag{3.1}$$

formundaki fonksiyonların sınıfı olsun.

$\mathcal{A}_{p,n}$ sınıfına ait fonksiyonlar için α mertebeli çok katlı yıldızıl fonksiyon ve α mertebeli çok katlı konveks fonksiyon sınıfları sırasıyla $\mathcal{S}^*_{p,n}(\alpha)$ ve $\mathcal{K}_{p,n}(\alpha)$ sembolleriyle gösterilir.

Bu sınıflar için Owa [35] aşağıdaki katsayı eşitsizliklerini vermiştir.

Teorem 3.1.1 *Eğer $f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ fonksiyonu $0 \leq \alpha < p$ için*

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} (k-\alpha) a_k \leq p - \alpha \tag{3.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda $f(z) \in \mathcal{S}^*_{p,n}(\alpha)$ olur. ♦

Teorem 3.1.2 Eğer $f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ fonksiyonu $0 \le \alpha < p$ için

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} k\,(k-\alpha)\,a_k \le p-\alpha \tag{3.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda $f(z) \in \mathcal{K}_{p,n}(\alpha)$ olur. ♦

3.2 $f(z)$ ve $g(z)$ Fonksiyonları için İntegral Ortalama Hesabı

Bu kesimde, $f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve

$$g(z) = z^p + b_j z^j + b_{2j-p} z^{2j-p} \qquad \left(j \ge n+p\right) \tag{3.5}$$

ile tanımlı $g(z)$ fonksiyonları için integral ortalama hesabı yapacağız.

Teorem 3.2.1 *$f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve $g(z)$ (3.5) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu için*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} |a_k| \le \left|b_{2j-p}\right| - \left|b_j\right| \qquad \left(\left|b_j\right| < \left|b_{2j-p}\right|\right) \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlanırsa ve

$$b_{2j-p}\left(w(z)\right)^{2(j-p)} + b_j\left(w(z)\right)^{j-p} - \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^{k-p} = 0$$

olacak şekilde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu varsa, bu durumda $\mu > 0$ ve $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$ için

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu}\, d\theta \le \int_0^{2\pi} |g(z)|^{\mu}\, d\theta$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat : $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$ iken, $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları için,

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left| z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k \right|^{\mu} d\theta = r^{p\mu} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^{k-p} \right|^{\mu} d\theta$$

ve

$$\int_0^{2\pi} |\, g(z) \,|^{\mu} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \, z^p + b_j z^j + b_{2j-p} z^{2j-p} \,\right|^{\mu} d\theta \; = r^{p\mu} \int_0^{2\pi} \left| 1 + b_j z^{j-p} + b_{2j-p} z^{2j-2p} \right|^{\mu} d\theta$$

.

eşitliklerini kolayca yazabiliriz. Toerem 2.2.1'e göre, istenen eşitsizliği gösterebilmek için

$$1 + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k \, z^{k-p} \prec 1 + b_j z^{j-p} + b_{2j-p} z^{2(j-p)}$$

subordinasyonunu göstermek yeterlidir. Bu subordinasyonu gösterebilmek için, $w(z)$ fonksiyonunu

$$1 + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k \, z^{k-p} = 1 + b_j \left(w(z) \right)^{j-p} + b_{2j-p} \left(w(z) \right)^{2(j-p)}$$

veya eşdeğer olarak

$$b_{2j-p} \left(w(z) \right)^{2(j-p)} + b_j \left(w(z) \right)^{j-p} - \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k \, z^{k-p} = 0 \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $z = 0$ için

$$\left(w(0) \right)^{j-p} \left\{ b_{2j-p} \left(w(0) \right)^{j-p} + b_j \right\} = 0$$

olduğundan, $w(0) = 0$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu vardır.

Şimdi $w(z)$ fonksiyonunun

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} |\, a_k \,| \le \left| b_{2j-p} \right| - \left| b_j \right| \qquad \left(\, \left| b_j \right| < \left| b_{2j-p} \right| \, \right)$$

eşitsizliğinin sağlanması varsayımı altında, $\left| w(z) \right| < 1 \; (z \in \mathcal{U})$ eşitsizliğini sağladığını gösterelim. (3.7) eşitliğinden her bir $z \in \mathcal{U}$ için

$$\left| b_{2j-p} \left(w(z) \right)^{2(j-p)} + b_j \left(w(z) \right)^{j-p} \right| = \left| \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k \, z^{k-p} \right| < \sum_{k=p+n}^{\infty} |\, a_k \,|$$

yazabiliriz. Buradan

$$\left| b_{2j-p} \right| \left| \, w(z) \, \right|^{2(j-p)} - \left| b_j \right| \left| \, w(z) \, \right|^{j-p} - \sum_{k=p+n}^{\infty} |\, a_k \,| < 0 \tag{3.8}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte $t = \left| \, w(z) \, \right|^{j-p} \;\; (t \ge 0)$ alarak

$$G(t)=\left|b_{2j-p}\right|t^2-\left|b_j\right|t-\sum_{k=p+n}^{\infty}\left|a_k\right|$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Eğer $G(1)\geq 0$ ise, bu durumda $G(t)<0$ için $t<1$ olur. Gerçekten de

$$G(1)=\left|b_{2j-p}\right|-\left|b_j\right|-\sum_{k=p+n}^{\infty}\left|a_k\right|\geq 0$$

yani

$$\sum_{k=p+n}^{\infty}\left|a_k\right|\leq\left|b_{2j-p}\right|-\left|b_j\right|$$

olur. Sonuç olarak eğer (3.6) eşitsizliği sağlanırsa, $f(z)=g(w(z))$ eşitliği sağlanacak şekilde $\left|w(z)\right|<1$ $(z\in\mathcal{U})$ ve $w(0)=0$ koşullarını sağlayan analitik bir $w(z)$ fonksiyonu vardır. Bu da ispatı tamamlar. ♦

Sonuç 3.2.1 *$f(z)\in\mathcal{A}_{p,n}$ ve $g(z)$, (3.5) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu Teorem 3.2.1 in koşullarını sağlarsa, bu durumda $0<\mu\leq 2$ ve $z=re^{i\theta}$ $(0<r<1)$ için*

$$\int_0^{2\pi}\left|f(z)\right|^{\mu}d\theta\leq 2\pi r^{p\mu}\left\{1+\left|b_j\right|^2 r^{2(j-p)}+\left|b_{2j-p}\right|^2 r^{4(j-p)}\right\}^{\mu/2}$$

$$<2\pi\left\{1+\left|b_j\right|^2+\left|b_{2j-p}\right|^2\right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $\mathcal{H}^{(\mu)}$ Hardy Uzayını belirtmek üzere $0<\mu\leq 2$ için $f(z)\in\mathcal{H}^{(\mu)}(\mathcal{U})$ olur.

İspat : $g(z)$ fonksiyonu için

$$\int_0^{2\pi}\left|g(z)\right|^{\mu}d\theta=\int_0^{2\pi}\left|z^p\right|^{\mu}\left|1+b_j z^{j-p}+b_{2j-p}z^{2(j-p)}\right|^{\mu}d\theta$$

eşitliğini yazabiliriz. $0<\mu<2$ için Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^{2\pi} |g(z)|^{\mu} d\theta \leq \left\{ \int_0^{2\pi} \left(|z^p|^{\mu} \right)^{\frac{2}{2-\mu}} d\theta \right\}^{(2-\mu)/2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\left| 1+b_j z^{j-p} + b_{2j-p} z^{2(j-p)} \right|^{\mu} \right)^{2/\mu} d\theta \right\}^{\mu/2}$$

$$= \left\{ r^{2p\mu/(2-\mu)} \int_0^{2\pi} d\theta \right\}^{(2-\mu)/2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left| 1+b_j z^{j-p} + b_{2j-p} z^{2(j-p)} \right|^2 d\theta \right\}^{\mu/2}$$

$$= \left\{ 2\pi r^{2p\mu/(2-\mu)} \right\}^{(2-\mu)/2} \left\{ 2\pi \left(1+|b_j|^2 r^{2(j-p)} + |b_{2j-p}|^2 r^{4(j-p)} \right) \right\}^{\mu/2}$$

$$= 2\pi r^{p\mu} \left(1+|b_j|^2 r^{2(j-p)} + |b_{2j-p}|^2 r^{4(j-p)} \right)^{\mu/2}$$

$$< 2\pi \left(1+|b_j|^2 + |b_{2j-p}|^2 \right)^{\mu/2} .$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca $\mu = 2$ için

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\theta \leq 2\pi r^{2p} \left\{ 1+\left|b_j\right|^2 r^{2(j-p)} + \left|b_{2j-p}\right|^2 r^{4(j-p)} \right\}$$

$$< 2\pi \left\{ 1+\left|b_j\right|^2 + \left|b_{2j-p}\right|^2 \right\}.$$

olduğunu görmek kolaydır. ♦

Yukarıda yapılan işlemlerden, $0 < \mu \leq 2$ için

$$\sup_{z\in U} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu} d\theta \leq 2\pi r^{p\mu} \left\{ 1+\left|b_j\right|^2 + \left|b_{2j-p}\right|^2 \right\}^{\mu/2} < \infty$$

yazarsak, $f(z) \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathcal{U})$ olduğu görülür. Hardy Uzayları için $0 < r < \mu < \infty$ iken $\mathcal{H}^{(\mu)} \supset \mathcal{H}^{(r)}$ olduğunu belirtelim.

Örnek 3.2.1 $f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ fonksiyonu, Teorem 3.1.1 deki (3.2) katsayı eşitsizliğini sağlasın ve $0 \leq \alpha < p$ iken

$$g(z) = z^p + \frac{n}{p+n-\alpha} \varepsilon z^j + \delta z^{2j-p} \qquad (|\varepsilon| = |\delta| = 1)$$

olsun. Burada $b_j = \dfrac{n\varepsilon}{p+n-\alpha}$ and $b_{2j-p} = \delta$ olur.

(3.2) ile verilen katsayı eşitsizliğinden

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} |a_k| \leq \frac{p-\alpha}{p+n-\alpha} = 1 - \frac{n}{p+n-\alpha} = |b_{2j-p}| - |b_j|$$

yazabiliriz. Böylece eğer Teorem 3.2.1 deki koşulları sağlayan bir $w(z)$ fonksiyonu varsa, $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları Teorem 3.2.1 in koşullarını sağlar. Buradan $0 < \mu \leq 2$ ve $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$ için,

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu} \, d\theta \leq 2\pi r^{p\mu} \left\{ 1 + \left(\frac{n}{p+n-\alpha} \right)^2 r^{2(j-p)} + r^{4(j-p)} \right\}^{\mu/2}$$

$$< 2\pi \left\{ 2 + \left(\frac{n}{p+n-\alpha} \right)^2 \right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.2 *$f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve $g(z)$, (3.5) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k |a_k| \leq (2j-p)|b_{2j-p}| - j|b_j| \qquad \left(|b_j| < |b_{2j-p}| \right) \tag{3.9}$$

eşitsizliğini sağlarsa ve

$$(2j-p) b_{2j-p} \left(w(z) \right)^{2(j-p)} + j b_j \left(w(z) \right)^{j-p} - \sum_{k=p+n}^{\infty} k a_k z^{k-p} = 0$$

olacak şekilde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu varsa, bu durumda $\mu > 0$ ve $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$ için

$$\int_0^{2\pi} |f'(z)|^{\mu} \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |g'(z)|^{\mu} \, d\theta$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Hölder Eşitsizliği yardımıyla aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.2 *$f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve $g(z)$ (3.5) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu (3.9) ile verilen eşitsizliği sağlarsa, $0 < \mu \leq 2$ ve $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$ için*

$$\int_0^{2\pi} |f'(z)|^{\mu}\, d\theta \le 2\pi\, r^{(p-1)\mu} \left\{ p^2 + j^2 \left| b_j \right|^2 r^{2(j-p)} + (2j-p)^2 \left| b_{2j-p} \right|^2 r^{4(j-p)} \right\}^{\mu/2}$$

$$< 2\pi \left\{ p^2 + j^2 \left| b_j \right|^2 + (2j-p)^2 \left| b_{2j-p} \right|^2 \right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Örnek 3.2.2 $f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ fonksiyonu, Teorem 3.1.2 deki (3.3) katsayı eşitsizliğini sağlasın ve $0 \le \alpha < p$ iken

$$g(z) = z^p + \frac{n}{j(p+n-\alpha)} \varepsilon z^j + \frac{\delta}{2j-p} z^{2j-p} \qquad (\left|\varepsilon\right| = \left|\delta\right| = 1)$$

olsun. Burada $b_j = \dfrac{n\varepsilon}{j(n+p-\alpha)}$ ve $b_{2j-p} = \dfrac{\delta}{2j-p}$ olur. Verilen katsayı eşitsizliği

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k\left|a_k\right| \le \frac{p-\alpha}{p+n-\alpha} = 1 - \frac{n}{p+n-\alpha} = (2j-p)\left|b_{2j-p}\right| - j\left|b_j\right|$$

şeklinde yazılabildiğinden, eğer Teorem 3.2.2 deki koşulları sağlayan bir $w(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları Teorem 3.2.2 in koşullarını sağlar. Böylece Sonuç 3.2.2 den $0 < \mu \le 2$ ve $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$ için,

$$\int_0^{2\pi} |f'(z)|^{\mu}\, d\theta \le 2\pi\, r^{(p-1)\mu} \left\{ p^2 + \left(\frac{n}{n+p-\alpha} \right)^2 r^{2(j-p)} + r^{4(j-p)} \right\}^{\mu/2}$$

$$< 2\pi \left\{ p^2 + 1 + \left(\frac{n}{n+p-\alpha} \right)^2 \right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3. $f(z)$ ve $h(z)$ Fonksiyonları için İntegral Ortalama Hesabı

Bu kesimde, $f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve

$$h(z) = z^p + b_j z^j + b_{2j-p} z^{2j-p} + b_{3j-2p} z^{3j-2p} \qquad (j \ge n+p) \qquad (3.10)$$

ile tanımlı $h(z)$ fonksiyonları için integral ortalama hesabı yapacağız.

Teorem 3.3.1 *$f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve $h(z)$, (3.10) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} |a_k| \le \left|b_{3j-2p}\right| - \left|b_{2j-p}\right| - \left|b_j\right|, \quad \left(\left|b_j\right| + \left|b_{2j-p}\right| < \left|b_{3j-2p}\right| \right) \qquad (3.11)$$

eşitsizliğini sağlarsa ve

$$b_{3j-2p}\left(w(z)\right)^{3(j-p)} + b_{2j-p}\left(w(z)\right)^{2(j-p)} + b_j\left(w(z)\right)^{j-p} - \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^{k-p} = 0$$

olacak şekilde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu varsa, bu durumda $\mu > 0$ ve $z = re^{i\theta}$ ($0 < r < 1$) için

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu} \, d\theta \le \int_0^{2\pi} |h(z)|^{\mu} \, d\theta$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : Teorem 3.2.1 in ispatında kullanılan yöntemle, $f(z) = h(w(z))$ olacak şekilde $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ ($z \in U$) koşullarını sağlayan analitik bir $w(z)$ fonksiyonunun varlığını göstermeliyiz. $w(z)$ fonksiyonunu

$$b_{3j-2p}\left(w(z)\right)^{3(j-p)} + b_{2j-p}\left(w(z)\right)^{2(j-p)} + b_j\left(w(z)\right)^{j-p} = \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^{k-p} \qquad (3.12)$$

şeklinde tanımlayalım. $z = 0$ için

$$\left(w(0)\right)^{j-p} \left\{ b_{3j-2p}\left(w(0)\right)^{2(j-p)} + b_{2j-p}\left(w(0)\right)^{j-p} + b_j \right\} = 0$$

olduğundan $w(z)$ fonksiyonunun $w(0) = 0$ koşulunu sağladığını söyleyebiliriz.

Diğer taraftan

$$\left|b_{3j-2p}\right| |w(z)|^{3(j-p)} - \left|b_{2j-p}\right| |w(z)|^{2(j-p)} - \left|b_j\right| |w(z)|^{j-p} - \sum_{k=p+n}^{\infty} |a_k| < 0$$

yazabiliriz. $t = |w(z)|^{j-p}$ ($t \ge 0$) yazarak,

$$H(t) = \left|b_{3j-2p}\right| t^3 - \left|b_{2j-p}\right| t^2 - \left|b_j\right| t - \sum_{k=p+n}^{\infty} |a_k|$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Buradan $H(0) \le 0$ ve

$$H'(t) = 3\left|b_{3j-2p}\right|t^2 - 2\left|b_{2j-p}\right|t - \left|b_j\right|$$

olur. $H'(t)$ fonksiyonunun diskriminantı sıfırdan büyük olduğundan, $H'(1) \ge 0$ ise $H(t) < 0$ olması için $t < 1$ olmalıdır. Böylece

$$H(1) = \left|b_{3j-2p}\right| - \left|b_{2j-p}\right| - \left|b_j\right| - \sum_{k=n+p}^{\infty} |a_k| \ge 0$$

veya

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} |a_k| \le \left|b_{3j-2p}\right| - \left|b_{2j-p}\right| - \left|b_j\right|$$

eşitsizliğine ihtiyaç duyarız. Bu ise teoremimizin varsayımıdır. Bu da Teoremin ispatını tamamlar. ♦

Sonuç 3.3.1 *$f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve $h(z)$, (3.10) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu Teorem 3.3.1 in koşullarını sağlarsa, bu durumda $0 < \mu \le 2$ ve $z = re^{i\theta}$ ($0 < r < 1$) için*

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu}\, d\theta \le 2\pi r^{p\mu}\left\{1 + \left|b_j\right|^2 r^{2(j-p)} + \left|b_{2j-p}\right|^2 r^{4(j-p)} + \left|b_{3j-2p}\right|^2 r^{6(j-p)}\right\}^{\mu/2}$$

$$< 2\pi\left\{1 + \left|b_j\right|^2 + \left|b_{2j-p}\right|^2 + \left|b_{3j-2p}\right|^2\right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

İspat : $h(z)$ fonksiyonu için

$$\int_0^{2\pi} |h(z)|^{\mu}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left|z^p\right|^{\mu} \left|1 + b_j z^{j-p} + b_{2j-p} z^{2(j-p)} + b_{3j-2p} z^{3(j-p)}\right|^{\mu} d\theta$$

eşitliğini kolayca yazabiliriz. $0 < \mu < 2$ için Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^{2\pi} |h(z)|^{\mu}\, d\theta$$

$$\leq \left\{ \int_0^{2\pi} \left(|z^p|^{\mu} \right)^{2/(2-\mu)} d\theta \right\}^{(2-\mu)/2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\left| 1+b_j z^{j-p} + b_{2j-p} z^{2(j-p)} + b_{3j-2p} z^{3(j-p)} \right|^{\mu} \right)^{2/\mu} d\theta \right\}^{\mu/2}$$

$$= \left\{ r^{2p\mu/(2-\mu)} \int_0^{2\pi} d\theta \right\}^{(2-\mu)/2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left| 1+b_j z^{j-p} + b_{2j-p} z^{2(j-p)} + b_{3j-2p} z^{3(j-p)} \right|^2 d\theta \right\}^{\mu/2}$$

$$= \left\{ 2\pi r^{2p\mu/(2-\mu)} \right\}^{(2-\mu)/2} \left\{ 2\pi \left(1+|b_j|^2 r^{2(j-p)} + |b_{2j-p}|^2 r^{4(j-p)} + \left| b_{3j-2p} \right|^2 z^{6(j-p)} \right) \right\}^{\mu/2}$$

$$= 2\pi r^{p\mu} \left(1+|b_j|^2 r^{2(j-p)} + |b_{2j-p}|^2 r^{4(j-p)} + \left| b_{3j-2p} \right|^2 r^{6(j-p)} \right)^{\mu/2}$$

$$< 2\pi \left(1+|b_j|^2 + |b_{2j-p}|^2 + \left| b_{3j-2p} \right|^2 \right)^{\mu/2}$$

elde ederiz. Ayrıca $0<\mu<2$ için $f(z)\in \mathcal{H}^{(\mu)}(U)$ olur. ♦

Örnek 3.3.1 $f(z)\in \mathcal{A}_{p,n}$ fonksiyonu, Teorem 3.1.1 deki (3.2) katsayı eşitsizliğini sağlasın ve $0\leq \alpha < p$ iken

$$h(z) = z^p + \frac{nt}{p+n-\alpha}\varepsilon z^j + \frac{n(1-t)}{p+n-\alpha}\delta z^{2j-p} + \sigma z^{3j-2p} \qquad \left(|\varepsilon| = |\delta| = |\sigma| = 1 \ ; \ 0\leq t\leq 1 \right)$$

olsun. Burada $b_j = \dfrac{nt}{p+n-\alpha}\varepsilon$, $b_{2j-p} = \dfrac{n(1-t)}{p+n-\alpha}\delta$ ve $b_{3j-2p} = \sigma$ olur.

(3.2) eşitsizliğinden

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} |a_k| \leq \frac{p-\alpha}{p+n-\alpha} = 1 - \frac{n(1-t)}{p+n-\alpha} - \frac{nt}{p+n-\alpha} = \left| b_{3j-2p} \right| - \left| b_{2j-p} \right| - \left| b_j \right|$$

yazabiliriz. Böylece eğer Teorem 3.3.1 deki koşulları sağlayan bir $w(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları Teorem 3.3.1 in koşullarını sağlar. Buradan $0<\mu\le 2$ ve $z=re^{i\theta}$ $(0<r<1)$ için,

$$\int_0^{2\pi}|f(z)|^{\mu}\,d\theta \le 2\pi r^{p\mu}\left\{1+\left(\frac{nt}{p+n-\alpha}\right)^2 r^{2(j-p)}+\left(\frac{n(1-t)}{p+n-\alpha}\right)^2 r^{4(j-p)}+r^{6(j-p)}\right\}^{\mu/2}$$

$$<2\pi\left\{2+(2t^2-2t+1)\left(\frac{n}{p+n-\alpha}\right)^2\right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.3.2 *$f(z)\in\mathcal{A}_{p,n}$ ve $h(z)$ (3.10) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty}k|a_k|\le(3j-2p)|b_{3j-2p}|-(2j-p)|b_{2j-p}|-j|b_j|,$$

$$\left(j|b_j|+(2j-p)|b_{2j-p}|<(3j-2p)|b_{3j-2p}|\right) \qquad (3.13)$$

eşitsizliğini sağlarsa ve

$$(3j-2p)b_{3j-2p}\left(w(z)\right)^{3(j-p)}+(2j-p)b_{2j-p}\left(w(z)\right)^{2(j-p)}+jb_j\left(w(z)\right)^{j-p}-\sum_{k=p+n}^{\infty}ka_kz^{k-p}=0$$

olacak şekilde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu varsa, bu durumda $\mu>0$ ve $z=re^{i\theta}$ $(0<r<1)$ için

$$\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{\mu}\,d\theta\le\int_0^{2\pi}|h'(z)|^{\mu}\,d\theta$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Sonuç 3.3.2 *$f(z)\in\mathcal{A}_{p,n}$ ve $h(z)$ (3.10) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu Teorem 3.3.2 in koşullarını sağlarsa, bu durumda $0<\mu\le 2$ ve $z=re^{i\theta}$ $(0<r<1)$ için*

$$\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{\mu}\,d\theta$$

$$\le 2\pi r^{(p-1)\mu}\left\{p^2+j^2|b_j|^2r^{2(j-p)}+(2j-p)^2|b_{2j-p}|^2r^{4(j-p)}+(3j-2p)^2|b_{3j-2p}|^2r^{6(j-p)}\right\}^{\mu/2}$$

$$<2\pi\left\{p^2+j^2|b_j|^2+(2j-p)^2|b_{2j-p}|^2+(3j-2p)^2|b_{3j-2p}|^2\right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Örnek 3.3.2 $f(z)\in \mathcal{A}_{p,n}$ fonksiyonu, Teorem 3.1.2 deki (3.3) katsayı eşitsizliğini sağlasın ve $0\le \alpha < p$ iken

$$h(z)=z^p+\frac{nt}{j(p+n-\alpha)}\varepsilon z^j+\frac{n(1-t)}{(2j-p)(p+n-\alpha)}\delta z^{2j-p}+\frac{\sigma}{3j-2p}z^{3j-2p}$$

$$(\,|\varepsilon|=|\delta|=|\sigma|=1\ \ ;\ 0\le t\le 1)$$

olsun. Burada

$$b_j=\frac{nt}{j(p+n-\alpha)}\varepsilon,\qquad b_{2j-p}=\frac{n(1-t)}{(2j-p)(p+n-\alpha)}\delta\qquad \text{ve}\qquad b_{3j-2p}=\frac{\sigma}{3j-2p}$$

şeklindedir.

$$\sum_{k=p+n}^{\infty}k|a_k|\le\frac{p-\alpha}{p+n-\alpha}=1-\frac{n}{p+n-\alpha}=(3j-2p)\left|b_{3j-2p}\right|-(2j-p)\left|b_{2j-p}\right|-j\left|b_j\right|$$

olduğundan eğer Teorem 3.3.2 deki koşulları sağlayan bir $w(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları Teorem 3.3.2 in koşullarını sağlar. Böylece Sonuç 3.3.2 den $0<\mu\le 2$ ve $z=re^{i\theta}$ $(0<r<1)$ için,

$$\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{\mu}d\theta\le 2\pi r^{(p-1)\mu}\left\{p^2+\left(\frac{nt}{p+n-\alpha}\right)^2 r^{2(j-p)}+\left(\frac{n(1-t)}{p+n-\alpha}\right)^2 r^{4(j-p)}+r^{6(j-p)}\right\}^{\mu/2}$$

$$<2\pi\left\{p^2+1+(2t^2-2t+1)\left(\frac{n}{p+n-\alpha}\right)^2\right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Not 3.3.1 : Bu bölümde amacımız teoremlerin koşullarını sağlayan analitik bir $w(z)$ fonksiyonunun var olduğunu ispatlamak değildir. Bununla birlikte, biliyoruz ki eğer bu bölümdeki teoremlerde bazı özel $f(z)$ fonksiyonlarını göz önüne alırsak, teoremlerin koşullarını sağlayan analitik bir $w(z)$ fonksiyonu vardır. Böylece eğer böyle bir $w(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{A}_{p,n}$ sınıfındaki herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu için var olduğunu ispatlarsak, teoremlerde $w(z)$ fonksiyonu için koşul vermek gerekmez.

Not 3.3.2 : Yukarıda verilen Teoremler ve örneklerde $p=1$ alınırsa Owa ve Sekine'ye ait sonuçları elde ederiz [34]. Bu bölümde ispatları yapılan teoremler, Owa ve Sekine'nin çalışmasının genelleştirmesidir.

4. BÖLÜM

ÇOK KATLI FONKSİYONLARIN İNTEGRAL ORTALAMA HESABI II

Bu bölümde, üçüncü bölümde ele alınan özel $g(z)$ fonksiyonunun genelleştirmesi yapılarak ispatlanan teoremler ile bunlarla ilgili ilginç sonuçlar verilmiştir. Bu bölümde yapılan çalışma, *"International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences"* adlı dergide yayınlanmıştır [47].

4.1 $f(z)$ ve $p(z)$ Fonksiyonları için İntegral Ortalama Hesabı

Bu kesimde, $f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve

$$p(z) = z^p + \sum_{s=1}^{m} b_{sj-(s-1)p} z^{sj-(s-1)p} \quad (j \geqq n+p;\ n \in \mathbb{N};\ m \geq 2) \tag{4.1}$$

ile tanımlı $p(z)$ fonksiyonları için integral ortalama hesabı yapacağız.

Öncelikle, teoremlerimizin ispatında bize gerekli olacak Sekine, Owa and Yamakawa'ya [44] ait bir Yardımcı önermeyi vermek yararlı olacaktır.

Yardımcı Önerme 4.1.1 *$P_m(t)$, $c_i\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ değerleri keyfi pozitif sabitler ve $d \geqq 0$ olmak üzere*

$$P_m(t) = c_1 t^m - c_2 t^{m-1} - \cdots - c_{m-1} t^2 - c_m t - d \quad (t \geq 0)$$

şeklindeki polinom olsun. Bu durumda, $P_m(t) = 0$ denklemi $t > 0$ için tek bir çözüme sahiptir. Eğer çözüm t_0 ile verilirse, $0 < t < t_0$ için $P_m(t) < 0$ ve $t > t_0$ için $P_m(t) > 0$ olur.

Teorem 4.1.1 *$f(z)\in \mathcal{A}_{p,n}$ ve $p(z)$, (4.1) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu*

$$\sum_{s=1}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|<\left|b_{mj-(m-1)p}\right| \tag{4.2}$$

iken

$$\sum_{k=p+n}^{\infty}\left|a_k\right| \le \left|b_{mj-(m-1)p}\right|-\sum_{s=1}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right| \tag{4.3}$$

eşitsizliğini sağlarsa ve

$$\sum_{s=1}^{m} b_{sj-(s-1)p}\, w(z)^{s(j-p)} - \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^{k-p} = 0 \tag{4.4}$$

olacak şekilde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu varsa, bu durumda $\mu>0$ ve $z=re^{i\theta}$ ($0<r<1$) için

$$\int_0^{2\pi}\left|f(z)\right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi}\left|p(z)\right|^{\mu} d\theta$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $z = re^{i\theta}(0<r<1)$ alarak $f(z)$ ve $p(z)$ fonksiyonları için,

$$\int_0^{2\pi}\left|f(z)\right|^{\mu} d\theta = r^{p\mu}\int_0^{2\pi}\left|1+\sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^{k-p}\right|^{\mu} d\theta$$

ve

$$\int_0^{2\pi}\left|p(z)\right|^{\mu} d\theta = r^{p\mu}\int_0^{2\pi}\left|1+\sum_{s=1}^{m} b_{sj-(s-1)p} z^{sj-sp}\right|^{\mu} d\theta$$

eşitliklerini kolayca yazabiliriz. Littlewood teoremine göre, istenen eşitsizliği gösterebilmek için

$$1+\sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^{k-p} \prec 1+\sum_{s=1}^{m} b_{sj-(s-1)p} z^{s(j-p)} \tag{4.5}$$

subordinasyonunu göstermek yeterlidir. Bu subordinasyonu gösterebilmek için, $w(z)$ fonksiyonunu

$$1+\sum_{s=1}^{m} b_{sj-(s-1)p}\{w(z)\}^{s(j-p)} = 1+\sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^{k-p}$$

veya eşdeğer olarak

$$\sum_{s=1}^{m} b_{sj-(s-1)p}\{w(z)\}^{s(j-p)} = \{w(z)\}^{j-p}\left(\sum_{s=1}^{m} b_{sj-(s-1)p}\{w(z)\}^{(s-1)(j-p)}\right) = \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^{k-p}$$

şeklinde tanımlayalım.

Böylece $z=0$ için

$$\{w(0)\}^{j-p}\left(\sum_{s=1}^{m} b_{sj-(s-1)p}\{w(z)\}^{(s-1)(j-p)}\right)=0$$

olacaktır. Eğer (4.4) eşitliğini sağlayacak şekilde bir analitik $w(z)$ fonksiyonu varsa, $w(0)=0$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik $w(z)$ fonksiyonunu gözönüne alabiliriz.

Bundan başka, bu analitik $w(z)$ fonksiyonunun

$$\sum_{k=p+n}^{\infty}|a_k| \leq \left|b_{mj-(m-1)p}\right| - \sum_{s=1}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right| \qquad \left(\sum_{s=1}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right| < \left|b_{mj-(m-1)p}\right|\right)$$

iken $|w(z)|<1$ $(z\in\mathcal{U})$ koşulunu sağladığını göstermemiz gerekir.

(4.4) eşitliğinden, $z\in\mathcal{U}$ için

$$\Big|b_{mj-(m-1)p}w(z)^{m(j-p)}+b_{(m-1)j-(m-2)p}w(z)^{(m-1)(j-p)}+b_{(m-2)j-(m-3)p}w(z)^{(m-2)(j-p)}$$

$$+\cdots+b_{2j-p}w(z)^{2(j-p)}+b_j w(z)^{j-p}\Big| \leq \sum_{k=p+n}^{\infty}\left|a_k z^{k-p}\right| < \sum_{k=p+n}^{\infty}|a_k|$$

yazabiliriz ve böylece

$$\left|b_{mj-(m-1)p}\right|\left|w(z)^{m(j-p)}\right|-\sum_{s=1}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|\left|w(z)\right|^{s(j-p)}-\sum_{k=p+n}^{\infty}|a_k|<0$$

olur.

Şimdi, $t=\left|w(z)\right|^{j-p}$ $(t\geq 0)$ alarak,

$$P(t)=\left|b_{mj-(m-1)p}\right|t^m-\sum_{s=1}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|t^s-\sum_{k=p+n}^{\infty}|a_k|$$

şeklinde m dereceli bir $P(t)$ polinomu tanımlayalım.

Yardımcı Önerme 4.1.1 den, eğer $P(1)\geq 0$ ise, $P(t)<0$ için $t<1$ elde ederiz. $|w(z)|<1$ $(z\in\mathcal{U})$ olması için

$$P(1)=\left|b_{mj-(m-1)p}\right|-\sum_{s=1}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|-\sum_{k=p+n}^{\infty}|a_k|\geq 0$$

ve buradan

$$\sum_{k=p+n}^{\infty}|a_k| \leq \left|b_{mj-(m-1)p}\right|-\sum_{s=1}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|$$

eşitsizliğine ihtiyaç duyarız. Bu eşitsizlik ise bizim teoremimizin varsayımıdır. Böylece (4.5) ile verilen subordinasyon sağlanır. Bu ispatı tamamlar. ♦

Teorem 4.1.1 bize aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 4.1.1 *$f(z)\in\mathcal{A}_{p,n}$ ve $p(z)$ (4.1) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu Teorem 4.1.1 in koşullarını sağlarsa bu durumda $0<\mu\le 2$ ve $z=re^{i\theta}\,(0<r<1)$ için,*

$$\int_0^{2\pi}|f(z)|^{\mu}\,d\theta \le 2\pi r^{p\mu}\left(1+\sum_{s=1}^{m}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|^2 r^{2s(j-p)}\right)^{\mu/2}$$

$$<2\pi\left(1+\sum_{s=1}^{m}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|^2\right)^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $0<\mu\le 2$ için $f(z)\in\mathcal{H}^{(\mu)}(\mathcal{U})$ olur.

İspat : $p(z)$ fonksiyonu için

$$\int_0^{2\pi}|p(z)|^{\mu}\,d\theta=\int_0^{2\pi}|z^p|^{\mu}\left|1+\sum_{s=1}^{m}b_{sj-(s-1)p}\,z^{s(j-p)}\right|^{\mu}d\theta$$

eşitliğini yazabiliriz. $0<\mu<2$ için Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^{2\pi}|p(z)|^{\mu}\,d\theta$$

$$\le \left(\int_0^{2\pi}(|z|^{p\mu})^{2/(2-\mu)}d\theta\right)^{(2-\mu)/2}\left\{\int_0^{2\pi}\left(\left|1+\sum_{s=1}^{m}b_{sj-(s-1)p}\,z^{s(j-p)}\right|^{\mu}\right)^{2/\mu}d\theta\right\}^{\mu/2}$$

$$=\left(r^{2p\mu/(2-\mu)}\int_0^{2\pi}d\theta\right)^{(2-\mu)/2}\left(\int_0^{2\pi}\left|1+\sum_{s=1}^{m}b_{sj-(s-1)p}\,z^{s(j-p)}\right|^{2}d\theta\right)^{\mu/2}$$

$$=\left(2\pi r^{2p\mu/(2-\mu)}\right)^{(2-\mu)/2}\left\{2\pi\left(1+\sum_{s=1}^{m}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|^2 r^{2s(j-p)}\right)\right\}^{\mu/2}$$

$$=2\pi r^{p\mu}\left(1+\sum_{s=1}^{m}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|^2 r^{2s(j-p)}\right)^{\mu/2}$$

$$<2\pi\left(1+\sum_{s=1}^{m}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|^2\right)^{\mu/2}$$

elde ederiz. Ayrıca $\mu = 2$ için

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 \, d\theta \leq 2\pi r^{2p} \left(1 + \sum_{s=1}^{m} \left| b_{sj-(s-1)p} \right|^2 r^{2s(j-p)} \right)$$

$$< 2\pi \left(1 + \sum_{s=1}^{m} \left| b_{sj-(s-1)p} \right|^2 \right)$$

olduğunu görmek kolaydır. ♦

Yukarıda yapılan işlemlerden, $0 < \mu \leq 2$ için

$$\sup_{z \in U} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z) \right|^{\mu} d\theta \quad \leq \quad \left(1 + \sum_{s=1}^{m} \left| b_{sj-(s-1)p} \right|^2 \right) < \infty$$

yazarsak $f(z) \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathcal{U})$ olduğu görülür.

Örnek 4.1.1 $f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ fonksiyonu, Teorem 3.1.1 deki (3.2) katsayı eşitsizliğini sağlasın ve tüm $i \in \mathbb{N}$ ler için $|\varepsilon_i| = 1$ ve $0 \leq \alpha < p$ olmak üzere, $m = 2$ için

$$p(z) = z^p + \frac{n}{p+n-\alpha} \varepsilon_1 z^j + \varepsilon_2 z^{2j-p}$$

ve $m \geq 3$ için,

$$p(z) = z^p + \frac{nt^{m-2}}{p+n-\alpha} \varepsilon_1 z^j + \sum_{s=2}^{m-1} \frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{p+n-\alpha} \varepsilon_s z^{sj-(s-1)p} + \varepsilon_m z^{mj-(m-1)p}$$

olsun. Burada $m = 2$ için,

$$b_j = \frac{n}{p+n-\alpha} \varepsilon_1, \qquad b_{2j-p} = \varepsilon_2$$

ve $m \geq 3$ için,

$$b_j = \frac{nt^{m-2}}{p+n-\alpha} \varepsilon_1, \quad b_{sj-(s-1)p} = \frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{p+n-\alpha} \varepsilon_s \quad \{s = 2, 3, \cdots, m-1\}$$

ve $b_{mj-(m-1)p} = \varepsilon_m$ olur.

Bu örneğin $m = 2$ durumu 3.Bölümde Örnek 3.2.1 de gösterilmişti. $m \geq 3$ için, Teorem 3.1.1 de (3.2) ile verilen katsayı eşitsizliğinden

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} |a_k| \le \frac{p-\alpha}{p+n-\alpha}$$

$$=1-\sum_{s=2}^{m-1}\frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{p+n-\alpha}-\frac{nt^{m-2}}{p+n-\alpha}$$

$$=\left|b_{mj-(m-1)p}\right|-\sum_{s=2}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right|-\left|b_j\right|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece $f(z)$ ve $p(z)$ fonksiyonları Teorem 4.1.1 in koşullarını sağlar. Buradan $0<\mu\le 2$ ve $z=re^{i\theta}(0<r<1)$ için,

$$\int_0^{2\pi}| f(z)|^{\mu}\, d\theta$$

$$\le 2\pi r^{p\mu}\left\{1+\left(\frac{nt^{m-2}}{p+n-\alpha}\right)^2 r^{2(j-p)}+\sum_{s=2}^{m-1}\left(\frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{p+n-\alpha}\right)^2 r^{2s(j-p)}+r^{2m(j-p)}\right\}^{\mu/2}$$

$$<2\pi\left\{2+\left(\frac{nt^{m-2}}{p+n-\alpha}\right)^2+\sum_{s=2}^{m-1}\left(\frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{p+n-\alpha}\right)^2\right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2 $f'(z)$ ve $p'(z)$ Fonksiyonları için İntegral Ortalama Hesabı

Bu kesimde Teorem 4.1.1 de kullanılan tekniği kullanarak türevler için integral ortalama hesabı yapacağız.

Teorem 4.2.1 *$f(z)\in \mathcal{A}_{p,n}$ ve $p(z)$ (4.1) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu*

$$(mj-(m-1)p)\left|b_{mj-(m-1)p}\right| > \sum_{s=1}^{m-1}(sj-(s-1)p)\left|b_{sj-(s-1)p}\right|$$

iken

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k\left|a_k\right| \le (mj-(m-1)p)\left|b_{mj-(m-1)p}\right|-\sum_{s=1}^{m-1}(sj-(s-1)p)\left|b_{sj-(s-1)p}\right|$$

eşitsizliğini sağlarsa ve

$$\sum_{s=1}^{m}\big(sj-(s-1)p\big)b_{sj-(s-1)p}\{w(z)\}^{s(j-p)}-\sum_{k=p+n}^{\infty}ka_k z^{k-p}=0$$

olacak şekilde analitik bir $w(z)$ *fonksiyonu varsa, bu durumda* $\mu>0$ *ve* $z=re^{i\theta}$ $(0<r<1)$ *için*

$$\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{\mu}\,d\theta \le \int_0^{2\pi}|p'(z)|^{\mu}\,d\theta$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Bundan başka, Hölder eşitsizliği ile aşağıdaki sonucu yazmak mümkündür

Sonuç 4.2.1 $f(z)\in\mathcal{A}_{p,n}$ *ve* $p(z)$, *(4.1) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer* $f(z)$ *fonksiyonu Teorem 4.2.1 in koşullarını sağlarsa* $0<\mu\le 2$ *ve* $z=re^{i\theta}(0<r<1)$ *için*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{\mu}\,d\theta \;&\le\; 2\pi r^{(p-1)\mu}\left(p^2+\sum_{s=1}^{m}(sj-(s-1)p)^2\left|b_{sj-(s-1)p}\right|^2 r^{2s(j-p)}\right)^{\mu/2}\\ &< 2\pi\left(p^2+\sum_{s=1}^{m}(sj-(s-1)p)^2\left|b_{sj-(s-1)p}\right|^2\right)^{\mu/2}\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Örnek 4.2.1 $f(z)\in\mathcal{A}_{p,n}$ fonksiyonu, Teorem 3.1.2 deki (3.3) katsayı eşitsizliğini sağlasın ve tüm $i\in\mathbb{N}$ ler için $|\varepsilon_i|=1$ ve $0\le\alpha<p$ olmak üzere, $m=2$ için

$$p(z)=z^p+\frac{n}{j(p+n-\alpha)}\varepsilon_1 z^j+\frac{1}{2j-p}\varepsilon_2 z^{2j-p}$$

ve $m\ge 3$ için,

$$\begin{aligned}p(z)=z^p&+\frac{nt^{m-2}}{j(p+n-\alpha)}\varepsilon_1 z^j\\ &+\sum_{s=2}^{m-1}\frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{[sj-(s-1)p](p+n-\alpha)}\varepsilon_s z^{sj-(s-1)p}+\frac{\varepsilon_m}{mj-(m-1)p}z^{mj-(m-1)p}\end{aligned}$$

olsun. Burada $m=2$ için,

$$b_j=\frac{n}{j(p+n-\alpha)}\varepsilon_1 \quad \text{ve} \quad b_{2j-p}=\frac{1}{2j-p}\varepsilon_2$$

ve $m\ge 3$ için,

$$b_j=\frac{nt^{m-2}}{j(p+n-\alpha)}\varepsilon_1,\quad b_{sj-(s-1)p}=\frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{[sj-(s-1)p](p+n-\alpha)}\varepsilon_s$$

ve

$$b_{mj-(m-1)p} = \frac{\varepsilon_m}{mj-(m-1)p}$$

olur.

Bu örnek için $m=2$ durumu 3.Bölümde Örnek 3.2.2 de gösterilmişti. $m \geq 3$ için, Teorem 3.1.2 deki (3.3) katsayı eşitsizliğinden

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k\,|\,a_k\,| \leq \frac{p-\alpha}{p+n-\alpha} = 1 - \sum_{s=2}^{m-1} \frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{p+n-\alpha} - \frac{nt^{m-2}}{p+n-\alpha}$$

$$= \left(mj-(m-1)p\right)\left|b_{mj-(m-1)p}\right| - \left(sj-(s-1)p\right)\sum_{s=2}^{m-1}\left|b_{sj-(s-1)p}\right| - j\left|b_j\right|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece $f(z)$ ve $p(z)$ fonksiyonları Teorem 4.2.1 in koşullarını sağlar. Buradan $0<\mu\leq 2$ ve $z=re^{i\theta}\,(0<r<1)$ için,

$$\int_0^{2\pi} |\,f'(z)\,|^{\mu}\, d\theta$$

$$\leq 2\pi r^{(p-1)\mu}\left\{p^2 + \left(\frac{nt^{m-2}}{p+n-\alpha}\right)^2 r^{2(j-p)} + \sum_{s=2}^{m-1}\left(\frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{p+n-\alpha}\right)^2 r^{2s(j-p)} + r^{2m(j-p)}\right\}^{\mu/2}$$

$$< 2\pi\left\{p^2 + 1 + \left(\frac{nt^{m-2}}{p+n-\alpha}\right)^2 + \sum_{s=2}^{m-1}\left(\frac{nt^{(m-1)-s}(1-t)}{p+n-\alpha}\right)^2\right\}^{\mu/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Not 4.2.1 Yukarıdaki teoremlerde $p=1$ alınırsa, Sekine, Owa and Yamakawa'ya ait sonuçlar [44], eğer $m=2,3$ alınırsa, 3.bölümde verilen sonuçlar elde edilir. Böylece, bu bölümün 3. bölümün bir genelleştirmesi olduğu kolaylıkla görülebilir.

5. BÖLÜM

ÇOK KATLI FONKSİYONLARIN KESİRSEL HESAPLARI İÇİN İNTEGRAL ORTALAMA EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, çok katlı fonksiyonların kesirsel integrali ve kesirsel türevi için integral ortalama eşitsizliklerini elde edeceğiz. Bu bölümde yapılan çalışma, *"Fractional Calculus & Applied Analysis"* adlı dergide yayınlanmıştır [46].

5.1 Kesirsel Türev için İntegral Ortalama Eşitsizlikleri

İlk olarak kesirsel türevler için integral ortalama eşitsizliklerini verelim:

Teorem 5.1.1 *$f(z)\in \mathcal{A}_{p,n}$, $p(z)$ ise (4.1) ile verilen fonksiyon olsun ve $p>\lambda$ koşulu ile, $\lambda=0$ ya da 1 $(0\le \delta,\nu<1)$ ve $2\le\lambda\le n$ $(0<\delta,\nu<1)$ iken, $(k-\lambda)_{\lambda+1}$,*

$$(k-\lambda)_{\lambda+1}=(k-\lambda)(k-\lambda+1)\ldots k$$

şeklinde tanımlı Pochhammer sembolünü belirtmek üzere

$$\sum_{k=p+n}^{\infty}(k-\lambda)_{\lambda+1}\left|a_k\right|\le\sum_{s=1}^{m}\frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)\Gamma(n+p+1-\lambda-\delta)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)\Gamma(n+p-\lambda)\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}\left|b_{sj-(s-1)p}\right| \tag{5.1}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $z=re^{i\theta}\,(0<r<1)$ için

$$\int_0^{2\pi}\left|D_z^{\lambda+\delta}f(z)\right|^{\mu}d\theta\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}z^{\nu-\delta}D_z^{\lambda+\nu}p(z)\right|^{\mu}d\theta\qquad(\mu>0) \tag{5.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : (1.13) ile verilen kesirsel türev formülü ve Tanım 1.11.4 ten, (3.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu için

$$\Phi(k)=\frac{\Gamma(k-\lambda)}{\Gamma(k+1-\lambda-\delta)}\quad \left\{\begin{array}{ll}\lambda=0 \;\; ya\,da\;\; 1 & (0\leq\delta<1)\\ 2\leq\lambda\leq n & (0<\delta<1)\end{array}\quad ;k\geq n+p,\;\; n\in\mathbb{N}\right\}$$

olmak üzere

$$D_z^{\lambda+\delta}f(z)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}z^{p-\lambda-\delta}\left[1+\sum_{k=p+n}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}{\Gamma(p+1)\Gamma(k-\lambda+1-\delta)}a_k z^{k-p}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}z^{p-\lambda-\delta}\left[1+\sum_{k=p+n}^{\infty}(k-\lambda)_{\lambda+1}\frac{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}{\Gamma(p+1)}\Phi(k)\,a_k z^{k-p}\right]$$

eşitliğini yazabiliriz.

$\Phi(k)$ fonksiyonu k nın azalan bir fonksiyonu olduğundan her $k\geq n+p$, $n\in\mathbb{N}$ iken $0\leq\delta<1$ için $\lambda=0$ ya da 1 ve $0<\delta<1$ için $2\leq\lambda\leq n$ olmak üzere

$$0<\Phi(k)\leq\Phi(n+p)=\frac{\Gamma(n+p-\lambda)}{\Gamma(n+p+1-\lambda-\delta)}$$

yazmak mümkündür. Benzer şekilde (4.1) ile verilen $p(z)$ fonksiyonunu kullanarak, yine (1.13) ile verilen kesirsel türev formülü ve Tanım 1.11.4'ten

$$D_z^{\lambda+\nu}p(z)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}z^{p-\lambda-\nu}\left[1+\sum_{s=1}^{m}\frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(p+1)\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)}b_{sj-(s-1)p}z^{s(j-p)}\right]$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece

$$\frac{\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}z^{\nu-\delta}D_z^{\lambda+\nu}p(z)$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}z^{p-\lambda-\delta}\left[1+\sum_{s=1}^{m}\frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(p+1)\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)}b_{sj-(s-1)p}z^{s(j-p)}\right]$$

eşitliğini yazabiliriz.

$z = re^{i\theta} (0 < r < 1)$ için

$$\int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{k=p+n}^{\infty} (k-\lambda)_{\lambda+1} \frac{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}{\Gamma(p+1)} \Phi(k)\, a_k z^{k-p} \right|^{\mu} d\theta$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)\Gamma(p+1)} b_{sj-(s-1)p} z^{s(j-p)} \right|^{\mu} d\theta \quad (\mu > 0)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermeliyiz. Bunun için, Teorem 3.1.3 te verdiğimiz Littlewood Teoremini uygulayarak

$$1 + \sum_{k=p+n}^{\infty} (k-\lambda)_{\lambda+1} \frac{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}{\Gamma(p+1)} \Phi(k) a_k z^{k-p}$$

$$\prec 1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)\Gamma(p+1)} b_{sj-(s-1)p} z^{s(j-p)} \tag{5.3}$$

subordinasyonunun sağlandığını göstermek yeterlidir. Bu subordinasyonu gösterebilmek için,

$$1 + \sum_{k=p+n}^{\infty} (k-\lambda)_{\lambda+1} \frac{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}{\Gamma(p+1)} \Phi(k)\, a_k z^{k-p}$$

$$= 1 + \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)\Gamma(p+1)} b_{sj-(s-1)p} \{w(z)\}^{s(j-p)}$$

eşitliğini yazarak $w(z)$ fonksiyonunu

$$\{w(z)\}^{s(j-p)}$$

$$= \sum_{k=p+n}^{\infty} (k-\lambda)_{\lambda+1} \frac{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}{\Gamma(p+1)} \Phi(k) a_k z^{k-p} \frac{1}{\displaystyle\sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)\Gamma(p+1)} b_{sj-(s-1)p}}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $z = 0$ için $w(0) = 0$ olduğu kolayca görülür. $|w(z)| < 1$ olduğunu gösterirsek ispat biter.

(5.1) ile verdiğimiz varsayım yardımıyla

$$|w(z)|^{s(j-p)}$$

$$\leq \sum_{k=p+n}^{\infty}(k-\lambda)_{\lambda+1}\frac{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}{\Gamma(p+1)}\Phi(k)|a_k||z|^{k-p}\frac{1}{\sum_{s=1}^{m}\frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)\Gamma(p+1)}|b_{sj-(s-1)p}|}$$

$$\leq |z|^n \frac{\Phi(n+p)\frac{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}{\Gamma(p+1)}}{\sum_{s=1}^{m}\frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)\Gamma(p+1)}|b_{sj-(s-1)p}|}\sum_{k=p+n}^{\infty}(k-\lambda)_{\lambda+1}|a_k|$$

$$= |z|^n \frac{\frac{\Gamma(n+p-\lambda)\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1-\lambda-\delta)}}{\sum_{s=1}^{m}\frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda+1-\nu)\Gamma(p+1)}|b_{sj-(s-1)p}|}\sum_{k=p+n}^{\infty}(k-\lambda)_{\lambda+1}|a_k|$$

$$\leq |z|^n < 1$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Bu son eşitsizlik ile (5.3) subordinasyonunun sağlandığını söyleyebiliriz. Bu da teoremin ispatını tamamlar. ♦

Not 5.1.1 Teorem 5.1.1 de verilen (5.2) eşitsizliğinin sağ tarafına $0<\mu<2$ ve

$$F(z)=\frac{\Gamma(p-\lambda+1-\nu)}{\Gamma(p-\lambda+1-\delta)}z^{\nu-\delta}D^{\lambda+\nu}p(z)$$

iken Hölder Eşitsizliğini uygulayarak

$$\int_0^{2\pi}|F(z)|^{\mu}\,d\theta \leq \left\{\int_0^{2\pi}|F(z)|^{\mu\cdot\frac{2}{\mu}}\,d\theta\right\}^{\mu/2}\left\{\int_0^{2\pi}1^{2/(2-\mu)}\,d\theta\right\}^{(2-\mu)/2}$$

$$=\left\{\int_0^{2\pi}|F(z)|^2\,d\theta\right\}^{\mu/2}(2\pi)^{(2-\mu)/2}$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür.

Şimdi kesirsel integraller için integral ortalama eşitsizliklerini elde edelim:

Teorem 5.1.2 *$f(z)\in \mathcal{A}_{p,n}$, $p(z)$ (4.1) ile verilen fonksiyon olsun ve $\lambda,\nu>0$ için*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k\,|a_k| \le \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(p+1+\nu)\Gamma(n+p+1+\delta)}{\Gamma(sj-(s-1)p+1+\nu)\Gamma(n+p)\Gamma(p+1+\delta)}\,|b_{sj-(s-1)p}|$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $z=re^{i\theta}\,(0<r<1)$ için

$$\int_0^{2\pi} \left|D_z^{-\delta} f(z)\right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{\Gamma(p+1+\nu)}{\Gamma(p+1+\delta)} z^{\delta-\nu} D_z^{-\nu} p(z)\right|^{\mu} d\theta \quad (\mu>0)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : Birinci bölümde (1.12) ile verilen kesirsel integral formülü ve (1.13) ile verilen kesirsel türev formülleri ışığında Teorem 5.1.1 de δ değerini $-\delta(\delta>0)$ ile, ν değerini ise $-\nu(\nu>0)$ değiştirirek ve $\lambda=0$ koyarak ispat tamamlanır. ♦

$\delta=\nu$ için, Teorem 5.1.1 bize aşağıdaki sonucu verir:

Sonuç 5.1.1 *$f(z)\in \mathcal{A}_{p,n}$ ve $p(z)$, (4.1) ile verilen fonksiyon olsun ve $p>\lambda$ koşulu ile, $0\le\lambda\le n$, $0\le\delta<1$ iken*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} (k-\lambda)_{\lambda+1}\,|a_k| \le \sum_{k=p+n}^{\infty} \frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(n+p+1-\lambda-\delta)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\lambda-\delta+1)\Gamma(n+p-\lambda)}\,|b_{sj-(s-1)p}|$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $z=re^{i\theta}\,(0<r<1)$ için

$$\int_0^{2\pi} \left|D_z^{\lambda+\delta} f(z)\right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left|D_z^{\lambda+\delta} p(z)\right|^{\mu} d\theta \quad (\mu>0)$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

$\delta=\nu$ için, Teorem 5.1.2 bize aşağıdaki sonucu verir:

Sonuç 5.1.2 *$f(z)\in \mathcal{A}_{p,n}$ ve (4.1) ile verilen $p(z)$ fonksiyonu için*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k\,|a_k| \le \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(n+p+1+\delta)}{\Gamma(sj-(s-1)p+1+\delta)\Gamma(n+p)}\,|b_{sj-(s-1)p}|$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $z=re^{i\theta}\,(0<r<1)$ için

$$\int_0^{2\pi} \left|D_z^{-\delta} f(z)\right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left|D_z^{-\delta} p(z)\right|^{\mu} d\theta \quad (\mu>0)$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

$\lambda = 0$ ve $\lambda = 1$ özel durumlarında Sonuç 5.1.1 den aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

Sonuç 5.1.3 *$f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve (4.1) ile verilen $p(z)$ fonksiyonu için $0 \leq \delta < 1,\ j \geq n+p$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k\left| a_k \right| \leq \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(n+p+1-\delta)}{\Gamma(sj-(s-1)p+1-\delta)\Gamma(n+p)} \left| b_{sj-(s-1)p} \right|$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ için

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{\delta} f(z) \right|^{\mu} d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| D_z^{\delta} p(z) \right|^{\mu} d\theta \qquad (\mu > 0)$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Sonuç 5.1.4 *$f(z) \in \mathcal{A}_{p,n}$ ve (4.1) ile verilen $p(z)$ fonksiyonu için $0 \leq \delta < 1,\ j \geq n+p$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k(k-1)\left| a_k \right| \leq \sum_{k=p+n}^{\infty} \frac{\Gamma(sj-(s-1)p+1)\Gamma(n+p-\delta)}{\Gamma(sj-(s-1)p-\delta)\Gamma(n+p-1)} \left| b_{sj-(s-1)p} \right|$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ için

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{1+\delta} f(z) \right|^{\mu} d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| D_z^{1+\delta} p(z) \right|^{\mu} d\theta \qquad (\mu > 0)$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Teorem 5.1.1 ve 5.1.2 de $p = 1$ alınması durumunda sırasıyla aşağıdaki sonuçları elde ederiz [43]:

Sonuç 5.1.5 *$f(z) \in \mathcal{A}_n$ olsun ve $p(z)$ fonksiyonu*

$$p(z) = z + \sum_{s=1}^{m} b_{sj-s+1} z^{sj-s+1} \qquad (j \geqq n+1;\ n \in \mathbb{N};\ m \geq 2) \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlansın.

Ayrıca, $\lambda = 0$ *ya da 1* $(0 \le \delta, \nu < 1)$ *ve* $2 \le \lambda \le n$ $(0 < \delta, \nu < 1)$ *olmak üzere*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-\lambda)_{\lambda+1} |a_k| \le \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(sj-s+2)\Gamma(2-\lambda-\nu)\Gamma(n+2-\lambda-\delta)}{\Gamma(sj-s+2-\lambda-\nu)\Gamma(n+1-\lambda)\Gamma(2-\lambda-\delta)} |b_{sj-s+1}|$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ *için*

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{\lambda+\delta} f(z) \right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left| \frac{\Gamma(2-\lambda-\nu)}{\Gamma(2-\lambda-\delta)} z^{\nu-\delta} D_z^{\lambda+\nu} p(z) \right|^{\mu} d\theta \quad (\mu > 0)$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

Sonuç 5.1.6 $f(z) \in \mathcal{A}_n$ *ve (5.4) ile verilen* $p(z)$ *fonksiyonunun* $\lambda, \nu > 0$ *için*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| \leqq \sum_{s=1}^{m} \frac{\Gamma(sj-s+2)\Gamma(2+\nu)\Gamma(n+2+\delta)}{\Gamma(sj-s+2+\nu)\Gamma(n+1)\Gamma(2+\delta)} |b_{sj-s+1}|$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ *için*

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{-\delta} f(z) \right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left| \frac{\Gamma(2+\nu)}{\Gamma(2+\delta)} z^{\delta-\nu} D_z^{-\nu} p(z) \right|^{\mu} d\theta \quad (\mu > 0)$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

6. BÖLÜM

ANALİTİK FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ SALAGEAN OPERATÖRÜ İÇEREN YENİ BİR ALT SINIFI İÇİN İNTEGRAL ORTALAMA EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde genelleştirilmiş Salagean operatörü ile yeni bir sınıf tanımlayarak, bu sınıfa ait katsayı eşitsizlikleri, ekstrem noktaları ve kesirsel türev yardımıyla bu sınıftaki fonksiyonlar için integral ortalama eşitsizliklerini hesaplanacaktır. Bu bölümde yapılan çalışma yayına gönderilmiş olup, halen incelemededir.

6.1 Temel Tanımlar

$\mathcal{A}$, $\mathcal{U}=\{z:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z)=z+\sum_{j=2}^{\infty}a_j z^j \tag{6.1}$$

formundaki fonksiyonların sınıfı olsun.

$\mathcal{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$, bazı $0\le\alpha<1$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve tüm $z\in\mathcal{U}$ değerleri için D^m, Genelleştirilmiş Salagean operatörünü belirtmek üzere

$$Re\left(\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right)>\alpha$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan, $\mathcal{A}$ sınıfının bir altsınıfı olsun.

Bu bölümde $\mathcal{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ sınıfı için katsayı eşitsizlikleri ile bu sınıfa ait fonksiyonların kesirsel türevleri için integral ortalama eşitsizliklerini hesaplayacağız.

6.2 Katsayı Eşitsizlikleri

Teorem 6.2.1 *Eğer $f(z)\in\mathcal{A}$ fonksiyonu, bazı $0\le\alpha<1$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$ $\delta(\delta\ge 0)$ değerleri için*

$$\Psi\left(m,n,j,\delta,\alpha\right)=\left|[1+(j-1)\delta]^m-(1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n\right| +\left([1+(j-1)\delta]^m+(1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n\right) \qquad (6.2)$$

olmak üzere,

$$\sum_{j=2}^{\infty}\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)\left|a_j\right|\le 2(1-\alpha) \qquad (6.3)$$

eşitsizliğini sağlarsa, bu durumda $f(z)\in\mathcal{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ olur.

İspat : (6.3) eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. $f(z)\in\mathcal{A}$ olmak üzere

$$F(z)=\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}-\alpha$$

fonksiyonunu tanımlayalım. İspatı tamamlayabilmek için bu fonksiyonun

$$\left|\frac{F(z)-1}{F(z)+1}\right|<1 \qquad (z\in\mathcal{U})$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Temel matematiksel işlemler ile,

$$\left|\frac{F(z)-1}{F(z)+1}\right|=\left|\frac{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}-\alpha-1}{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}-\alpha+1}\right|$$

$$=\left|\frac{D^m f(z)-\alpha D^n f(z)-D^n f(z)}{D^m f(z)-\alpha D^n f(z)+D^n f(z)}\right|$$

$$=\left|\frac{\alpha-\sum_{j=2}^{\infty}\left([1+(j-1)\delta]^m-(1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n\right)a_j z^{j-1}}{(2-\alpha)+\sum_{j=2}^{\infty}\left([1+(j-1)\delta]^m+(1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n\right)a_j z^{j-1}}\right|$$

$$<\frac{\alpha+\sum_{j=2}^{\infty}\left|[1+(j-1)\delta]^m-(1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n\right|\left|a_j\right|\left|z\right|^{j-1}}{(2-\alpha)-\sum_{j=2}^{\infty}\left([1+(j-1)\delta]^m+(1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n\right)\left|a_j\right|\left|z\right|^{j-1}}$$

$$< \frac{\alpha + \sum_{j=2}^{\infty} \left| [1+(j-1)\delta]^m - (1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n \right| \left| a_j \right|}{(2-\alpha) - \sum_{j=2}^{\infty} \left([1+(j-1)\delta]^m + (1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n \right) \left| a_j \right|}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik, eğer

$$\alpha + \sum_{j=2}^{\infty} \left| [1+(j-1)\delta]^m - (1+\alpha)[1+(j-1)\delta]^n \right| \left| a_j \right|$$

$$\leq (2-\alpha) - \sum_{j=2}^{\infty} \left([1+(j-1)\delta]^m + (1-\alpha)[1+(j-1)\delta]^n \right) \left| a_j \right|$$

oluyorsa üstten 1 ile sınırlıdır. Bu son eşitsizlik, teoremimizdeki (6.3) koşuluna eşdeğerdir. Bu da ispatı tamamlar. ♦

Şimdi, $\mathcal{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonların a_k katsayıları için bir üst sınır bulalım.

Teorem 6.2.2 *Eğer* $f(z) \in \mathcal{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ *ise* $k \geq 2$ *için* $\beta = 2(1-\alpha)$ *ve* $v_k = [1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n$ *olmak üzere*

$$|a_k| \leq \frac{\beta}{|v_k|} \left\{ 1 + \beta \sum_{j=2}^{k-1} \frac{[1+(j-1)\delta]^n}{|v_j|} + \beta^2 \sum_{j_2 > j_1}^{k-1} \sum_{j_1=2}^{k-2} \frac{([1+(j_1-1)\delta][1+(j_2-1)\delta])^n}{|v_{j_1} v_{j_2}|} + \right.$$

$$\left. \beta^3 \sum_{j_3 > j_2}^{k-1} \sum_{j_2 > j_1}^{k-2} \sum_{j_1=2}^{k-3} \frac{\left([1+(j_1-1)\delta][1+(j_2-1)\delta][1+(j_3-1)\delta]\right)^n}{|v_{j_1} v_{j_2} v_{j_3}|} + \ldots + \beta^{k-2} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{[1+(j-1)\delta]^n}{|v_j|} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat :

$$p(z) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - \alpha \right) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j$$

şeklinde bir $p(z)$ Carathéodory fonksiyonu tanımlayalım.

Carathéodory fonksiyonu için

$$\left|c_j\right| \leq 2 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

olduğunu biliyoruz. $p(z)$ fonksiyonunun tanımlanışından

$$\frac{1}{(1-\alpha)}\left(D^m f(z) - \alpha D^n f(z)\right) = D^n f(z)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j\right) \tag{6.4}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$$D^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} [1 + (j-1)\delta]^n a_j z^j \qquad (n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$$

olduğundan

$$\frac{D^m f(z) - \alpha D^n f(z)}{1-\alpha} = z + \frac{(1+\delta)^m - \alpha(1+\delta)^n}{1-\alpha} a_2 z^2 + \frac{(1+2\delta)^m - \alpha(1+2\delta)^n}{1-\alpha}) a_3 z^3 + \cdots$$

$$+ \frac{[1+(k-1)\delta]^m - \alpha[1+(k-1)\delta]^n}{1-\alpha} a_k z^k + \ldots$$

ve

$$D^n f(z)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j\right) = \left(z + \sum_{j=2}^{\infty} [1+(j-1)\delta]^n a_j z^j\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j\right)$$

olur. Böylece (6.4) denklemi

$$z + \frac{(1+\delta)^m - \alpha(1+\delta)^n}{1-\alpha} a_2 z^2 + \frac{(1+2\delta)^m - \alpha(1+2\delta)^n}{1-\alpha} a_3 z^3 + \cdots +$$

$$\frac{[1+(k-1)\delta]^m - \alpha[1+(k-1)\delta]^n}{1-\alpha} a_k z^k + \ldots = \left(z + \sum_{j=2}^{\infty} [1+(j-1)\delta]^n a_j z^j\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j\right)$$

eşitliği şeklinde yazılabilir. Bu son eşitlikte, eşitliğin her iki tarafındaki z^k lı terimlerin katsayılarını gözönüne alırsak

$$\left(\frac{[1+(k-1)\delta]^m - \alpha[1+(k-1)\delta]^n}{1-\alpha} - [1+(k-1)\delta]^n\right) a_k = \sum_{j=1}^{k-1} [1+(k-j-1)\delta]^n a_{k-j} c_j$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan, Carathéodory fonksiyonunun $\left|c_j\right| \leq 2 \quad (j = 1, 2, 3 \ldots)$ katsayı eşitsizliğini de kullanarak

$$\left|a_k\right| = \frac{1-\alpha}{\left|[1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n\right|}\left|\sum_{j=1}^{k-1}[1+(k-j-1)\delta]^n a_{k-j}c_j\right|$$

$$\leq \frac{1-\alpha}{\left|[1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n\right|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}[1+(k-j-1)\delta]^n \left|a_{k-j}\right|\left|c_j\right|\right)$$

$$\leq \frac{2(1-\alpha)}{\left|[1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n\right|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}[1+(k-j-1)\delta]^n \left|a_{k-j}\right|\right)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan her bir $k \geq 2$ için $\left|a_k\right|$ değerini hesaplayarak ve tümevarım yöntemini kullanarak $\beta = 2(1-\alpha)$ ve $v_k = [1+(k-1)\delta]^m - [1+(k-1)\delta]^n$ olmak üzere

$$\left|a_k\right| \leq \beta\frac{1}{\left|v_k\right|}\left\{1+(1+\delta)^n\frac{\beta}{\left|v_2\right|}+(1+2\delta)^n\frac{\beta}{\left|v_3\right|}+(1+3\delta)^n\frac{\beta}{\left|v_4\right|}+\cdots+\right.$$

$$+(1+\delta)^n(1+2\delta)^n\frac{\beta^2}{\left|v_2v_3\right|}+(1+\delta)^n(1+3\delta)^n\frac{\beta^2}{\left|v_2v_4\right|}+(1+\delta)^n(1+4\delta)^n\frac{\beta^2}{\left|v_2v_5\right|}+\cdots$$

$$(1+2\delta)^n(1+3\delta)^n\frac{\beta^2}{\left|v_3v_4\right|}+(1+2\delta)^n(1+4\delta)^n\frac{\beta^2}{\left|v_3v_5\right|}+\cdots+(1+3\delta)^n(1+4\delta)^n\frac{\beta^2}{\left|v_4v_5\right|}+\cdots+$$

$$+(1+\delta)^n(1+2\delta)^n(1+3\delta)^n\frac{\beta^3}{\left|v_2v_3v_4\right|}+(1+\delta)^n(1+3\delta)^n(1+4\delta)^n\frac{\beta^3}{\left|v_2v_4v_5\right|}+\ldots+$$

$$\left.+(1+2\delta)^n(1+3\delta)^n(1+4\delta)^n\frac{\beta^3}{\left|v_3v_4v_5\right|}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{\beta}{\left|v_k\right|}\left\{1+\beta\sum_{j=2}^{k-1}\frac{[1+(j-1)\delta]^n}{\left|v_j\right|}+\beta^2\sum_{j_2>j_1}^{k-1}\sum_{j_1=2}^{k-2}\frac{\left([1+(j_1-1)\delta][1+(j_2-1)\delta]\right)^n}{\left|v_{j_1}v_{j_2}\right|}\right.$$

$$\left.+\beta^3\sum_{j_3>j_2}^{k-1}\sum_{j_2>j_1}^{k-2}\sum_{j_1=2}^{k-3}\frac{\left([1+(j_1-1)\delta][1+(j_2-1)\delta][1+(j_3-1)\delta]\right)^n}{\left|v_{j_1}v_{j_2}v_{j_3}\right|}+\ldots+\beta^{k-2}\prod_{j=2}^{k-1}\frac{[1+(j-1)\delta]^n}{\left|v_j\right|}\right\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu teoremimizin ispatını tamamlar. ♦

6.3 $\mathcal{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ Sınıfının Ekstrem Noktaları

Bu kesimde $\mathcal{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ sınıfının ekstrem noktalarını bulacağız. Bunun için öncelikle $\mathcal{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ sınıfının, (6.3) ile verdiğimiz katsayı eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlardan oluşan $\tilde{\mathcal{S}}_{m,n,\delta}(\alpha)$ altsınıfını tanımlayalım.

Teorem 6.3.1 *$f_1(z)=z$ ve $\Psi\left(m,n,j,\delta,\alpha\right)$, (6.2) ile tanımlanan fonksiyon olmak üzere*

$$f_j(z)=z+\frac{2(1-\alpha)\varepsilon_j}{\Psi\left(m,n,j,\delta,\alpha\right)}z^j \quad \left(j=2,3,...;\left|\varepsilon_j\right|=1\right)$$

olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\tilde{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, bu fonksiyonun $\gamma_j>0$ ve $\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j=1$ iken

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j f_j(z)$$

formunda yazılabilmesidir.

İspat : $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j f_j(z)=z+\sum_{j=2}^{\infty}\gamma_j\frac{2(1-\alpha)\varepsilon_j}{\Psi\left(m,n,j,\delta,\alpha\right)}z^j$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Bu fonksiyona (6.3) ile verdiğimiz katsayı eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{\infty}\Psi\left(m,n,j,\delta,\alpha\right)\frac{2(1-\alpha)\left|\varepsilon_j\right|}{\Psi\left(m,n,j,\delta,\alpha\right)}\gamma_j &= \sum_{j=2}^{\infty}2(1-\alpha)\gamma_j\\ &=2(1-\alpha)\sum_{j=2}^{\infty}\gamma_j\\ &=2(1-\alpha)(1-\gamma_1)\\ &\leq 2(1-\alpha)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da $f(z)$ fonksiyonunun $\tilde{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ sınıfında olduğu anlamına gelir.

Diğer taraftan $f(z)\in\tilde{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ olsun. $\tilde{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyon için $j=2,3,\ldots$ olmak üzere

$$\left|a_j\right|\leq\frac{2(1-\alpha)}{\Psi\left(m,n,j,\delta,\alpha\right)}$$

eşitsizliği yazılabildiğinden

$$\gamma_j=\frac{\Psi\left(m,n,j,\delta,\alpha\right)}{2(1-\alpha)\varepsilon_j}a_j \quad \left(\left|\varepsilon_j\right|=1\right), \qquad \gamma_1=1-\sum_{j=2}^{\infty}\gamma_j$$

ifadelerini yazabiliriz.

Buradan

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j f_j(z)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar. ♦

Sonuç 6.3.1 *$\tilde{\mathcal{S}}_{m,n,\delta}(\alpha)$ sınıfının ekstrem noktaları $f_1(z)=z$ ve $\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)$, (6.2) ile verilen ifade olmak üzere*

$$f_j(z)=z+\frac{2(1-\alpha)\varepsilon_j}{\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)}z^j \qquad \left(j=2,3,\ldots;\ \left|\varepsilon_j\right|=1\right)$$

fonksiyonlarıdır. ♦

6.4 İntegral Ortalama Eşitsizlikleri

Bu kesimde, $\tilde{\mathcal{S}}_{m,n,\delta}(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlar için integral ortalama eşitsizliklerini hesaplayacağız.

Teorem 6.4.1 *$f(z)\in\tilde{\mathcal{S}}_{m,n,\delta}(\alpha)$ ve bazı $j\geq p\geq 2$, $0\leq\lambda<1$ değerleri için $\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)$, (6.2) ile verilen ifade olmak üzere*

$$\sum_{j=2}^{\infty}(j-p)_{p+1}\left|a_j\right|\leq\frac{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)\left|\Gamma(3-\lambda-p)\right|}{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)\left|\Gamma(k+1-\lambda-p)\right|\left|\Gamma(2-p)\right|} \tag{6.5}$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca $k\geq 2$ için

$$f_k(z)=z+\frac{2(1-\alpha)\varepsilon_k}{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)}z^k,\ \left(k\geq 2\ ;\ \left|\varepsilon_k\right|=1\right) \tag{6.6}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer

$$\{w(z)\}^{k-1}=\frac{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)\Gamma(k+1-\lambda-p)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)\varepsilon_k}\sum_{j=2}^{\infty}(j-p)_{p+1}\frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j+1-\lambda-p)}a_j z^{j-1}$$

olacak şekilde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu varsa, bu durumda $z=re^{i\theta}\,(0<r<1)$ için

$$\int_0^{2\pi}\left|D_z^{p+\lambda}f(z)\right|^{\mu}d\theta\leq\int_0^{2\pi}\left|D_z^{p+\lambda}f_k(z)\right|^{\mu}d\theta \quad (\mu>0)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : (1.13) ile verilen kesirsel türev formülü ve Tanım 1.11.4 ten, (6.1) ile verilen fonksiyon için

$$\Theta(j)=\frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j+1-\lambda-p)} \qquad (0\le\lambda<1;\ \ j\ge p\ge 2)$$

olmak üzere

$$D_z^{p+\lambda}f(z)=\frac{z^{1-\lambda-p}}{\Gamma(2-\lambda-p)}\left\{1+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\lambda-p)}a_j z^{j-1}\right\}$$

$$=\frac{z^{1-\lambda-p}}{\Gamma(2-\lambda-p)}\left\{1+\sum_{j=2}^{\infty}\Gamma(2-\lambda-p)(j-p)_{p+1}\Theta(j)a_j z^{j-1}\right\}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$\Theta(j)$ fonksiyonu j nin azalan bir fonksiyonu olduğundan

$$0<\Theta(j)\le\Theta(2)=\frac{\Gamma(2-p)}{\Gamma(3-\delta-p)}$$

yazmak mümkündür. Benzer şekilde (6.6) ile verilen $f_k(z)$ fonksiyonunu kullanarak, yine kesirsel türev formülü (1.13) ve Tanım 1.11.4 ten

$$D_z^{p+\lambda}f_k(z)=\frac{z^{1-\lambda-p}}{\Gamma(2-\lambda-p)}\left\{1+\frac{2(1-\alpha)\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(k+1)\varepsilon_k}{\Psi\left(m,n,k,\delta,\alpha\right)\Gamma(k+1-\lambda-p)}z^{k-1}\right\}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece $z=re^{i\theta}\,(0<r<1)$ için

$$\int_0^{2\pi}\left|1+\sum_{j=2}^{\infty}\Gamma(2-\lambda-p)(j-p)_{p+1}\Theta(j)\,a_j z^{j-1}\right|^{\mu}d\theta$$

$$\le\int_0^{2\pi}\left|1+\frac{2(1-\alpha)\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(k+1)\varepsilon_k}{\Psi\left(m,n,k,\delta,\alpha\right)\Gamma(k+1-\lambda-p)}z^{k-1}\right|^{\mu}d\theta \quad (\mu>0)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterirsek ispat biter. Bunun için, Teorem 3.1.3 ile verdiğimiz Littlewood Teoremini uygulayarak

$$1+\sum_{j=2}^{\infty}\Gamma(2-\lambda-p)(j-p)_{p+1}\Theta(j)\,a_j z^{j-1}\prec 1+\frac{2(1-\alpha)\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(k+1)\varepsilon_k}{\Psi\left(m,n,k,\delta,\alpha\right)\Gamma(k+1-\lambda-p)}z^{k-1} \qquad (6.7)$$

subordinasyonunun sağlandığını göstermek yeterlidir. Bu subordinasyonu gösterebilmek için,

$$1+\sum_{j=2}^{\infty}\Gamma(2-\lambda-p)(j-p)_{p+1}\Theta(j)\,a_j z^{j-1}=1+\frac{2(1-\alpha)\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(k+1)\varepsilon_k}{\Psi\left(m,n,k,\delta,\alpha\right)\Gamma(k+1-\lambda-p)}w(z)^{k-1}$$

eşitliğini yazarak $w(z)$ fonksiyonunu

$$\{w(z)\}^{k-1} = \frac{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)\Gamma(k+1-\lambda-p)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)\varepsilon_k} \sum_{j=2}^{\infty} (j-p)_{p+1} \Theta(j) a_j z^{j-1}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $z=0$ için $w(0)=0$ olduğu kolayca görülür. $|w(z)|<1$ olduğunu gösterirsek ispat biter. (6.5) ile verdiğimiz varsayım ile

$$|w(z)|^{k-1} = \left| \frac{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)\Gamma(k+1-\lambda-p)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)\varepsilon_k} \sum_{j=2}^{\infty} (j-p)_{p+1} \Theta(j) a_j z^{j-1} \right|$$

$$\leq \frac{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)|\Gamma(k+1-\delta-p)|}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)} \sum_{j=2}^{\infty} (j-p)_{p+1} |\Theta(j)| |a_j| |z|^{j-1}$$

$$\leq |z| \frac{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)|\Gamma(k+1-\lambda-p)|}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)} |\Theta(2)| \sum_{j=2}^{\infty} (j-p)_{p+1} |a_j|$$

$$= |z| \frac{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)|\Gamma(k+1-\lambda-p)|}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)} \frac{|\Gamma(2-p)|}{|\Gamma(3-\delta-p)|} \sum_{j=2}^{\infty} (j-p)_{p+1} |a_j|$$

$$\leq |z| < 1$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Bu son eşitsizlik ile (6.7) subordinasyonunun sağlandığını söyleyebiliriz. Bu da teoremin ispatını tamamlar. ♦

$p=0$ özel durumunda Teorem 6.4.1 den aşağıdaki sonucu elde ederiz :

Sonuç 6.4.1 *$f(z) \in \widetilde{S}_{m,n,\delta}(\alpha)$ ve $\Psi(m,n,j,\delta,\alpha)$, (6.2) ile verilen ifade olmak üzere $j \geq p \geq 2$, $0 \leq \lambda < 1$ için*

$$\sum_{j=2}^{\infty} j|a_j| \leq \frac{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)\Gamma(3-\lambda)}{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)\Gamma(k+1-\lambda)}$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. $f_k(z)$, (6.6) ile verilen fonksiyon olmak üzere, eğer

$$\{w(z)\}^{k-1} = \frac{\Psi(m,n,k,\delta,\alpha)\Gamma(k+1-\lambda)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)\varepsilon_k} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\lambda)} a_j z^{j-1}$$

olacak şekilde analitik bir $w(z)$ fonksiyonu varsa, bu durumda $z = re^{i\theta}$ ve $0 < r < 1$ için

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{\lambda} f(z) \right|^{\mu} d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| D_z^{\lambda} f_k(z) \right|^{\mu} d\theta \quad (0 \leq \lambda < 1, \quad \mu > 0)$$

eşitsizliği sağlanır. ♦

K A Y N A K L A R

[1] ALEXANDER, J.W. ; *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., **17**, (1915), 12-22

[2] AL-OBOUDI, F.M ; *On univalent functions defined by a generalized Salagean operator*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Vol 2004 (2004), Issue **27**, 1429–1436

[3] BAERNSTEIN, A. ; *Integral means, univalent functions and circular symmetrization,* Acta Math., **133** (1974) 139-169

[4] BIEBERBACH, L. ; *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln,* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. (1916) pp. 940–955

[5] BRANGES, L.de., *A proof of the Bieberbach conjecture*, preprint E-5-84, Steklov Math. Inst., Leningrad Branch, 1984, 1-21

[6] CARATHÉODORY, C.; *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen Math.Ann.,* **64** (1907) 95-115

[7] DUREN, P.L. ; *Univalent Functions*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[8] FENG, J. & MACGREGOR, T.H. ; *Estimates on integral means of the derivatives of univalent. functions,* Analyse Math. **29** (1976) 203-231

[9] FENG, J.; *Extreme Points and Integral Means for Classes of Analytic Functions, Ph.D. dissertation,* SUNY at Albany, 1974

[10] GEHRING, F.W. & HAYMAN, W.K. ; *An inequality in the theory of conformal mapping,* J. Math. Pures Appl. (9) **41** (1962), 353-361

[11] GLOUZIN, G.M. ; *On Distortion theorems in the theory of conformal mappings*, Mat. Sb., 1 **(43)** 1936, 127-135 (in Russian)

[12] GOODMAN, A.W. ; *Univalent Functions*, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 1983

[13] GOODMAN, A.W. ; *A note on the Noshiro-Warschawski theorem,* J. Analyse Math. **25** (1972) 401-408

[14] GRONWALL, T.H., *Some remarks on conformal representation* Ann. of Math. Ser. 2 , **16** (1914 - 1915) pp. 72–76

[15] GRONWALL, T.H. ; Sur *la deformation dans la representation conforme*, C.R.Acad.Sci.Paris vol 162 (1916) 249-252

[16] GRUNSKY, H. ; *Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung,* Jber. Deutsch. Math. Verein., **43** (1934), 140-143

[17] GÜNEY, H.Ö.& SÜMER EKER, S.& OWA, S. ; *Integral means of multivalent functions,* Journal of inequalities in pure and Appl. Math. Vol.7 Issue 1 ,Article **37**, (2006)

[18] JAENISCH, S.; *Length distortion of curves under conformal mapping*, Michigan Math. J. **15**, 1968, 121-128

[19] KAPLAN, W.; *Close-to-convex schlicht functions,* Michigan Math.J., **1**, (1952), 169-185

[20] KOEBE, P., Ü*ber die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven*, Nach. Ges. Wiss. Gottingen (1907) 191-210

[21] KREIN, M. & MILMAN, D. ; *On extreme points of regular convex sets*, Studia Mathematica **9** (1940) 133–138

[22] KRZYZ, J.; *The radius of close-to convexity within the family of univalent functions,* Bull.Acad.Polon.Sci.,**10** (1962), 201-204

[23] LINDELÖF, E.; *Mémoire sur certaines inegualités dans la théorie des fonctions onogènes et sur quelques propriétes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel*, Acta.Soc.Sci.Fenn., **35**, 7 (1909) 1–35

[24] LITTLEWOOD, J.E.; *On inequalities in the theory of functions,* Proc. London Math. Soc. **23** (1925), 481-519

[25] LOEWNER, C.; *Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises* $|z|<1$*, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden,* Ber.Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig, **69** (1917) 89-106

[26] LOEWNER, C.; *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises,* I. Math.Ann.,**89** (1923),103-121

[27] LOHWATER, A.J & PRANIAN, G. & RUDIN, W. ; *On the derivative of a schlicht function,* Math.Scan.,**3** (1955), 103-106

[28] MACGREGOR, T. H.; *Applications of extreme-point theory to univalent functions*. Michigan Math. J., **19** (1972), 361-376

[29] MARX, A.; *Untersuchungen iiber schlichte Abbildungen*, Math. Ann. **107** (1932), 40-67

[30] NABETANI, K.; *On Study's theorem in the theory of conformal representation*, Tohoku Math. J. **41** (1934), 406-410

[31] NEVANLINNA, R.; *Über die Konforme Abbildung von Sterngebieten, Översikt av Finska Vetenskaps,* Societetens Förhandlingar, No. 6 **63** (1920-1921) 1-21

[32] NOSHIRO, K. ; *On the theory of schlicht functions,* J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **2** (1934-1935) 129-155

[33] NUNOKAWA, M. ; *On the Theory of Multivalent Functions*, Tsukuba J. Math. Vol.11 No.**2** (1987), 273-286

[34] OWA, S. & SEKINE, T. ; *Integral means of analytic functions*, J.Math. Anal. Appl. **304** (2005), 772-782

[35] OWA, S. ; *On certain classes of p-valent functions with negative coefficients,* Simon Stevin, **59** (1985),385–402

[36] OWA, S.; *On Nunokawa's conjecture for multivalent functions,* Bull. Austral. Math.Soc., **41**, 301-305 (1990)

[37] POMMERENKE, CH. ; *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1973.

[38] REN, F.& OWA, S. ; *A note on a class of p-valently a-convex functions*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada- Vol. X, No. 1, February 1988

[39] ROBERTSON, M.S.; *On the theory of univalent functions*, Ann. of Math. **37** (1936), 374–408

[40] ROGOSINSKI, W. ; *On the coefficients of subordinate functions,* Proc, London Math. Soc. 2, **48** (1943), 48-82

[41] SALAGEAN, G.S. ; *Subclasses of univalent functions,* Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **1013**, (1983), 362-372

[42] SCHWARZ, H.A. ; *Gesamm. Math. Abhandl.* , **1–2** , Springer (1890)

[43] SEKINE, T. & OWA, S. & TSURUMI, K. ; *Integral Means of Certain Analytic functions for Fractional Calculus,* Applied Mathematics and Computation, Volume 187, Issue 1, (2007), 425-432

[44] SEKINE, T. & OWA, S.& YAMAKAWA, R.; *Integral means of certain analytic functions*, General Mathematics **13** (2005), no. 3, 99–108

[45] STUDY, E. ; *Konforme Abbildung Einfache-Zussammenh¨angender Bereiche*, B. G. Teubner, Leipzig/Berlin, 1913

[46] SÜMER EKER, S. & GÜNEY, H.Ö. & OWA, S. ; *Integral means for Fractional Calculus operators of multivalent functions*, Fractional Calculus & Appl.Analysis Vol 9, **2** (2006) 133-142

[47] SÜMER EKER, S. & GÜNEY, H.Ö. & OWA, S. ; *Integral means of certain multivalent functions,* Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol.2006, Article ID 90921, pages 1-9

[48] TIMS, S.R. ; *A theorem on Functions Schlicht in Convex Domains*, Proc. London Math. Soc. (3) **1** (1951) 3-1: 200-205

[49] WARSCHAWSKI, S.E.; *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping,* Trans.Amer.Math.Soc., **38** (1935), 310-340

S İ M G E L E R

Sayı Kümeleri

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	:	Gerçel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	:	Karmaşık Sayılar Kümesi

Bölgeler ve Kümeler

$\mathcal{U}$	:	$\{ z : \lvert z\rvert < 1 \}$, Birim disk
$\mathcal{U}_R$	:	$\{ z : \lvert z\rvert < R \}$
Δ	:	$\{z : \lvert z\rvert > 1\}$
$\overline{\mathcal{U}_R}$	:	$\{ z : \lvert z\rvert \leq R \}$
C_R	:	$\{ z : \lvert z\rvert = R \}$
H^+	:	$\operatorname{Re} w > 0$
$E(C)$	:	C nin tüm ekstrem noktalarının kümesi
$\mathcal{H}(\mathcal{M})$	:	Kapalı konveks örtüsü (konveks hull) $(cl(co\mathcal{M}))$
$\mathcal{H}\ (E(C))$	:	C'nin ekstrem noktalarının kapalı konveks örtüsü
$\mathcal{H}^{(\mu)}$	:	Hardy sınıfı

Özel Fonksiyonlar ve Fonksiyoneller

$k(z)$	:	$\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe Fonksiyonu
$L_0(z)$	:	$\dfrac{1+z}{1-z}$ Mobius fonksiyonu
$L(f,g)$	:	Bir vektör uzayında f ve g yi birleştiren doğru parçası
$L(r,f)$	:	$f(C_r)$ eğrisinin uzunluğu
$L(\alpha,r,f)$	:	$f(e^{i\alpha}t)$ eğrisinin uzunluğu($0 \le t \le r$)
$M_\mu(r,f)$	:	$f(z)$ analitik fonksiyonu için integral ortalama
$(k-\lambda)_{\lambda+1}$	:	Pochhammer sembolü
$\Gamma(z)$	:	Gamma Fonksiyonu

Özel Bağıntılar ve Operatörler

$f(z) << F(z)$	:	$f(z)$, $F(z)$ tarafından bastırılır
$f(z) \prec F(z)$	:	$f(z)$, $F(z)$ ye subordine
$D_a^\lambda f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun kesirsel türevi
$D_a^{-\lambda} f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun kesirsel integrali
$D^n f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun n. Mertebeden Salagean Türevi

Fonksiyon Kümeleri

$\mathcal{A}$: $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik olan tüm fonksiyonların uzayı

$\mathcal{S}$: Birim diskte analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı

Σ : Rezidüsü 1 olan, sonsuzda basit bir kutup hariç, Δ bölgesinde analitik ve yalınkat fonksiyonlarının sınıfı

Σ' : Σ sınıfında $g(z) \neq 0$ $(0 \in E)$ koşullu fonksiyonlarının kümesi

$\mathcal{P}$: Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı

B_0 : $|f(z)|<1$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik olan $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ şeklindeki fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{K}$: Konveks fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{S}^*$: Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{S}^*(\alpha)$: α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{K}(\alpha)$: α mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{CK}$: Konvekse-yakın fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{A}(p)$: $a_p \neq 0$, $p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ olmak üzere, $|z|<1$ birim diskinde analitik olan $f(z)=\sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{S}_p^*$: $\mathcal{A}(p)$ sınıfına ait p-katlı yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{K}_{\mathrm{p}}$: $\mathcal{A}(p)$ sınıfına ait p-katlı konveks fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{CK}_p$: $\mathcal{A}(p)$ sınıfına ait p-katlı konvekse-yakın fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{S}_p^*(\alpha)$: α-mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{K}_p(\alpha)$: α-mertebeli p-katlı konveks fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{CK}_p(\alpha)$: α mertebeli p-katlı konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{A}_{p,n}$: Birim diskte analitik, çok katlı $f(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k$ formundaki fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{S}^*_{p,n}(\alpha)$: $\mathcal{A}_{p,n}$ sınıfına ait α mertebeli çok katlı yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{K}_{p,n}(\alpha)$: $\mathcal{A}_{p,n}$ sınıfına ait α mertebeli çok katlı konveks fonksiyonlar sınıfı

D İ Z İ N

Ö Z G E Ç M İ Ş

Adı ve Soyadı **:** Sevtap SÜMER EKER

Doğum Tarihi **:** 27.12.1976

Medeni Hali **:** Evli

Ünvanı **:** Arş. Gör.

Üniversite **:** Dicle Üniversitesi

Fakülte **:** Fen-Edebiyat Fakültesi

Bölümü **:** Matematik Bölümü

Anabilim Dalı **:** Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

EĞİTİMİ

Orta Öğretim **:** İzmir Hasan Ali Yücel Ortaokulu

Lise **:** İzmir Buca Lisesi 1991–1994

Lisans **:** Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü 1995–1999

Yüksek Lisans **:** Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim dalı 2000–2003

Çalıştığı Kurumlar **:** Milli Eğitim Bakanlığı Yunus Emre İlköğretim 1999–2000
Dicle Üniversitesi Fen-Edb. Fakültesi Matematik Bölümü 2000-

ADRES

İş **:** Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat. Fakültesi Matematik Bölümü

Ev **:** Toplu Konutlar Koçoğlu Sitesi 237 Ada C01 Blok Daire 10

E-mail **:** sevtaps@dicle.edu.tr