T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

HARDY EŞİTSİZLİKLERİ
VE
HARDY TİPLİ OPERATÖRLER

Mustafa AVCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR
HAZİRAN-2007

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Mustafa AVCİ tarafından yapılan "HARDY EŞİTSİZLİKLERİ VE HARDY TİPLİ OPERATÖRLER" konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:Prof.Dr.	Sezai OĞRAŞ(Danışman)
Üye :Prof.Dr.	Ali YILMAZ
Üye :Doç.Dr.	Rabil MAŞHİYEV

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 11/06/2007

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2007

Prof. Dr. Necmettin PİRİNÇÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda bana yardımcı ve yol gösterici olan, derin bilgi ve tecrübelerinden fazlasıyla istifade ettiğim, beni tüm samimiyetiyle destekleyen ve bana emek veren saygıdeğer hocalarım sayın;

Prof.Dr. Sezai OĞRAŞ'a ve **Doç.Dr. Rabil MAŞHİYEV**'e

(Danışman)

sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bu çalışmamı hazırlarken verdikleri destek ve gösterdikleri sabır için sevgili aileme teşekkür ederim.

Mustafa AVCİ

İÇİNDEKİLER

4.BÖLÜM

LEBESGUE VE SOBOLEV UZAYLARI

5.BÖLÜM

HARDY EŞİTSİZLİKLERİ VE HARDY OPERATÖRLERİ

6.BÖLÜM

HARDY TİPLİ OPERATÖRLER

AMAÇ

Hardy eşitsizlikleri ve Hardy operatörleri, eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Özellikle günümüzde (sabit-değişken üstlü)Lebesgu ve Sobolev Uzayları teorisinin; elastik mekanik, akışkanlar dinamiği, varyasyonel hesap ve p(x) büyüme koşullu diferansiyel denklemlerle ilgili problemlerle yoğun bir ilişki içersinde olması ve sözü edilen uzayların Hardy eşitsizlikleri ve Hardy operatörler ile olan yakın ilişkisi düşünüldüğünde konunun önemi daha iyi anlaşılmaktadır.

Bu çalışmanın temel amacı, Hardy eşitsizlikleri(Hardy tipli eşitsizlikler) ve Hardy operatörleri(Hardy tipli operatörler) hakkında bir kaynak oluşturmak ve Hardy tipli operatörler olan Riemann-Liouville ve Weyl operatörlerinin ağırlıklı Lebesgue uzayları L_v^p 'den L_ω^q 'ya sınırlı olduğunu orjinal bir şekilde elde etmektir.

ÖZET

Bu tezde Hardy eşitsizlikleri(Hardy tipli eşitsizlikler) ve Hardy operatörleri(Hardy tipli operatörler) hakkında bilgi verilmiş ve Riemann-Liouville ve Weyl operatörlerinin ağırlıklı Lebesgue uzayları L_{υ}^{p} 'den L_{ω}^{q} 'ya sınırlı oldukları gösterilmiştir.

Birinci bölümde Eşitsizlikler teorisi hakkında genel bilgi verilmiş, Hardy eşitsizlikleri ve Hardy operatörlerinin tarihsel ve teorik gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde verilecek olan kavramların daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan bazı temel bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Lebesgue teorisinin temelini oluşturan ölçü, Lebesgue (dış)ölçüsü ve ilgili kavramlar daha sonra da Lebesgue integrali verilmiştir.

Dördüncü bölümde Lebesgue uzayı ve ilgili kavramlarla teoremler ve ayrıca Sobolev uzayı ve gömme teoremleri hakkında bilgi verilmiştir.

Beşinci bölümde Hardy eşitsizlikleri ve Hardy operatörleri, tarihsel ve teorik gelişim süreci içersinde verilerek, konu özlü ve anlaşılır bir şekilde anlatılmıştır.

Altıncı bölüm son bölüm olup, bu bölümde Hardy tipli operatörler hakkında bilgi verilmiş ve tezimizin orjinal çalışması olan Riemann-Liouville ve Weyl operatörlerinin ağırlıklı Lebesgue uzayları L_{υ}^{p} 'den L_{ω}^{q} 'ya sınırlı olmalarını sağlayan (ω,υ) ağırlık fonksiyonları için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir.

SUMMARY

In this thesis, Hardy inequalities(Hardy-type inequalities) and Hardy operators(Hardy-type operators) topics are dealt with and the boundedness of the Riemann-Liouville and Weyl operators from L_{υ}^{p} to L_{ω}^{q} is obtained.

In the first chapter, we dealt with the history of the inequalities generally and mentioned the historical and theoretical development of Hardy inequalities and Hardy operators.

In the second chapter, we gave the basic and necessary informations for properly understanding of following chapters.

In the third chapter; measure, Lebesgue outer measure, Lebesgue integral and related topics which are the basic concepts of the Lebesgue theory are mentioned.

In the fourth chapter, Lebesgue space and related concepts and theorems, moreover Sobolev space and imbeddings theorems are dealt with.

In the fifth chapter, in their historical and theoretical development Hardy inequalities and Hardy operators are dealt with largely and explicitly.

In the last chapter; first, Hardy-type operators are mentioned, then the necessary and sufficient conditions are found for the weight pairs (ω,υ) which provide the boundedness of the Riemann-Liouville and Weyl operators from L_{υ}^{p} to L_{ω}^{q}.

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Eşitsizlikler, matematiğin bir çok dalında önemli bir yere sahiptir; fonksiyonel analiz, diferansiyel ve integral denklemler teorisi, interpolasyon teorisi, olasılık teorisi, harmonik analiz eşitsizliklerin yaygın olarak kullanıldığı matematik dalları arasında sayılabilir. Ayrıca eşitsizlikler fizik ve mekanik başta olmak üzere diğer bilim dalları için de çok faydalı bir araçtır.

Eşitsizliklerle ilgili ilk sistemli çalışmalar 19.yy başlarında [Hardy ve ark.1952] ile başlamış [Mitrinoviċ, 1970], [Marshall ve ark.1979], [Walter,1970] ve [Duvaut ve ark.1976] ile devam etmiştir. Seksen ve doksanlı yıllarda eşitsizliklere olan ilgi oldukça artmıştır bunun temel nedeni çok sayıda kitabın yazılması([Agarwal,1992], [Beckenbah ve ark.1983] [Bullen ve ark.1988], [Kokilashivili ve ark.1991], [Milovanoviċ,1998], [Mitrinoviċ veark.1998], [Mitrinoviċ ve ark.1991], [Mitrinoviċ ve ark.1993], [Mitrinoviċ ve ark.1989], [Opic ve ark. 1990], [Pachpatte,1998]) ve eşitsizliklerin uygulama alanlarındaki gelişmelerdir([Bainov ve ark.1988], [Cloud ve ark.1988]).

Günümüzde eşitsizlikler teorisindeki gelişme ve bu konuya olan ilgi yoğun bir şekilde devam etmektedir, son yıllarda yazılan çok sayıdaki kitap([Kufner ve ark.2003], [Larsson ve ark.2006]) ve makaleler bunu açıkça göstermektedir. Bu yüzden eşitsizlikler artık günü müzde matematiğin bağımsız bir dalı olarak görülmektedir.

Eşitsizlikler teorisi incelendiğinde gerek matematikte gerekse diğer bilimlerde kulla nım alanı ve katkısı bakımından bir çok önemli eşitsizlikten söz etmek mümkündür.Biz burada bunlar içersinde çok önemli bir yere sahip olan Hardy Eşitsizliklerini ele alarak te zimizi bu doğrultuda geliştireceğiz.

Hardy eşitsizlikleri(Hardy tipli eşitsizlikler) özellikle singüler integral teorisinin gelişim inde ve uygulamalarında çok önemli bir yere sahiptir.Bununla birlikte Sobolev uzayındaki gömülme teoremlerinin elde edilmesinde de vazgeçilemez bir araçtır.

Hardy eşitsizliği ilk olarak G.H.Hardy tarafından yayımlanan bir makalede[Hardy,1920] ispatsız olarak

$a > 0,\ f(x) \geq 0,\ p > 1$ ve $\int_a^\infty |f(x)|^p dx < \infty$ olmak üzere,

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^\infty |f(x)|^p dx \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Aslında kendisinin de belirttiği üzere, G.H.Hardy’nin asıl amacı

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

şeklindeki Hilbert eşitsizliği için yeni ve daha basit bir ispat bulmaktı. Yine aynı makalede G.H.Hardy (1.1) eşitsizliğini;

$f(x) \geq 0,\ p > 1,\ f$ herhangi bir sonlu $(0, X)$ aralığında, f^p ise $(0, \infty)$ aralığında integrallenebilir olmak üzere,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} |f(x)|^p dx \tag{1.3}$$

şeklinde vererek ispatladı. Bu son eşitsizlik klasik Hardy eşitsizliği olarak kabul edilir.

G.H.Hardy'nin (1.3) eşitsizliğini ispatlamasından kısa bir süre sonra bu eşitsizlik değiştirilerek ilk ağırlıklı Hardy eşitsizliği,

$p > 1,\ \epsilon < p - 1$ ve f negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p x^{\epsilon} dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\epsilon} \right)^p \int_0^{\infty} |f(x)|^p x^{\epsilon} dx \tag{1.4}$$

şeklinde verilmiştir[Hardy ve ark.1952].

Daha sonraki yıllarda yapılan çalışmalarla (1.4) eşitsizliği değiştirilerek Hardy eşitsizliğinin modern hali olan aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir[Opic ve ark.1990];

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b |f(x)|^p v(x)dx \right)^{1/p} \tag{1.5}$$

burada, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$, u ve v fonksiyonları (a, b) aralığında birer ağırlık fonksiyonu, $0 < q \leq \infty$ ve $1 \leq p \leq \infty$ dir.

Hardy eşitsizlikleri(Hardy tipli eşitsizlikler) ile ilgili en önemli kavram Hardy Operatörü(Hardy tipli Operatörler)dür.

$f(t) \geq 0,\ t \in (a, b)$ ve $a < x < b$(veya $0 < x < \infty$ alınabilir) olmak üzere,

$$(Hf)(x) := \int_a^x f(t)dt \tag{1.6}$$

şeklinde tanımlı Hardy Operatörü H, ağırlıklı Lebesgue uzayları olan $L^p(u)$ 'dan $L^q(v)$ 'ye tanımlı (sürekli/sınırlı)bir dönüşümdür[Opic ve ark.1990]. Buna göre $(1.6), (1.5)$ eşitsizliğinde kullanılırsa (1.5) eşitsizliği

$$\|Hf\|_{q,u} \leq C \|f\|_{p,v} \tag{1.7}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (1.6) ile verilen Hardy Operatörünün ağırlıklı şekli(u ve v ağırlık fonksiyonları olmak üzere)

$$(\mathcal{H}f)(x) := u(x)\int_a^x f(t)v(t)dt \tag{1.8}$$

olarak tanımlanır[Opic ve ark.1990].

Hardy operatörleri(Hardy tipli Operatörler) ve Hardyeşitsizlikleri (Hardy tiplieşitsizlik ler)birbirleriyle çok sıkı bir ilişkiye sahiptir, çünkü Hardy eşitsizliklerinin elde edilebilme si bu operatörlerin sınırlılığına bağlıdır.

Zamanla yapılan çalışmalarla birlikte Hardy operatörleri geliştirilip, değiştirilerek Hardy tipli Operatörler elde edilmiştir. Bu operatörlerden kısaca bahsedelim:

k çekirdek fonksiyonu

(i) $k(x,t) \geq 0,\ 0 < t < x$ ve $k,\ x$ için artan t için azalan

(ii) $k(x,t) \approx k(x,z) + k(z,t),\ 0 < t < z < x$

özelliklerini sağlasın.Buna göre,

$$(Kf)(x) := \int_a^x k(x,t)f(t)dt\ ,\ x > 0 \tag{1.9}$$

şeklinde verilen K dönüşümüne **Genel Hardy tipli operatör** adı verilir.

$a = a(x)$ ve $b = b(x)$ fonksiyonları,

(1) $a(0) = b(0) = 0$

(2) $a(x) < b(x), 0 < x < \infty$

(3) $a(\infty) = b(\infty)$

özelliklerini sağlayan ve $[0,\infty]$ üzerinde kesin artan diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Her $f(t) \geq 0,\ 0 < t < \infty,$ fonksiyonu için

$$(Tf)(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \tag{1.10}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümüne **Hardy-Steklov operatörü** adı verilir. Bu operatörün

$$\left(S_a^b f\right)(x) := \frac{1}{b(x) - a(x)}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \tag{1.11}$$

şeklindeki değiştirilmiş hali günümüzde borsadaki ekonomik hareketlerin davranışı hakkında kestirim yapabilmek için kullanılmaktadır. Örneğin, f fonksiyonu t zamanındaki fiyatı $f(t)$ olan bir hisse senedinin fiyatını göstermek üzere, borsa analistlerine göre bu hisse senedi için en iyi alış fiyatı $\left(S_{t-200}^t f\right)(t) \leq f(t)$, en iyi satış fiyatı ise bu eşitsizliğin tersi olduğu zamandır.

$x > 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$(R\alpha f)(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{1.12}$$

şeklinde tanımlı R_α dönüşümüne **Riemann-Liouville operatörü** adı verilir.
$x > 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$(W\alpha f)(x) = \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlı W_α dönüşümüne **Weyl operatörü** adı verilir. Weyl operatörü aslında Riemann-Liouville operatörünün eşleniğidir.

Riemann-Liouville ve Weyl operatörlerinin sınırlılığı bir çok matematikçi tarafından incelenmiş ve belirli koşullar altında bu operatörlerin sınırlılığı ve hatta kompaktlığı gösterilmiştir[Heinig,1990], [Genebashvili ve ark.1996]. Biz de tezimizin orjinal çalışması olarak altıncı bölümde bu iki operatörün sınırlılığını daha önce verilen ispat yöntemlerinden farklı bir yöntemle göstereceğiz.

2.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde verilecek konuların daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.1. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$(M1)$ $\forall x, y \epsilon X$ için $\rho(x,y) \geq 0$

$(M2)$ $\forall x, y \epsilon X$ için $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$(M3)$ $\forall x, y \epsilon X$ için $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

$(M4)$ $\forall x, y, z \epsilon X$ için $\rho(x,z) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyor ise ρ fonksiyonuna X üzerinde bir **metrik** veya **uzaklık fonksiyonu** denir. Bu durumda (X,ρ) ikilisine bir **metrik uzay** ve $(M1) - (M4)$ özelliklerine de **metrik aksiyomları** denir. Bir küme üzerinde birden çok metrik tanımlanabilir.

Örnek 2.1.2. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan ρ dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriği $\mathbb{R}$ **üzerindeki adi metrik** veya **öklid metriği** denir.

Örnek 2.1.3. $X = \mathbb{C}$ olmak üzere $\rho : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan ρ dönüşümü $\mathbb{C}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{C}$ **üzerindeki adi metrik** veya **öklid metriği** denir.

Örnek 2.1.4. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ρ dönüşümü X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe X üzerindeki **ayrık metrik** denir.

Örnek 2.1.5. $\mathbb{R}^n$(veya $\mathbb{C}^n$), $n \in \mathbb{N}$, tüm sıralı reel(veya kompleks) n –lilerin kümesini göstermek üzere, $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için aşağıda verilen $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$$

şeklindeki ρ dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ üzerindeki **adi metrik** veya **öklid metriği**, $(\mathbb{R}^n, \rho)$ ikilisine ise n –**boyutlu öklid uzayı** denir.

Örnek 2.1.6. ℓ^∞ sınırlı, yakınsak ve kompleks terimli dizilerin uzayı olmak üzere herhangi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \ell^\infty$ dizileri için $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\rho(x,y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|$$

dönüşümü ℓ^∞ üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.1.7. X boş kümeden farklı bir küme, $B(X)$, X 'ten $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların kümesi ve $\rho : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\rho(f, \mathrm{g}) = \sup\left\{ |f(t) - \mathrm{g}(t)| \ : \ t \in X \right\}$$

şeklinde tanımlı ρ dönüşümü $B(X)$ üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.1.8. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ için $C[a,b]$, $[a,b]$ üzerindeki sürekli ve reel değerli fonksiyonlar kümesi ve $\rho : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\rho(f, \mathrm{g}) = \max\left\{ |f(t) - \mathrm{g}(t)| \ : \ t \in X \right\}$$

şeklinde tanımlı ρ dönüşümü $C[a,b]$ üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.1.9. ℓ^p, $(1 \le p < \infty)$ terimlerinin p. kuvvetten toplamları sonlu olan dizi uzayı olmak üzere $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \ell^p$ ve $\rho : \ell^p \times \ell^p \to \mathbb{R}$ için

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı ρ dönüşümü ℓ^p de bir metriktir.
Bu metrik, özel olarak $p = 2$ için (ℓ_2, ρ) şeklindeki Hilbert uzayını oluşturur.

Örnek 2.1.10. S, sınırlı ya da sınırsız tüm reel(veya kompleks) terimli diziler kümesi olmak üzere; $\forall x = (x_n), y = (y_n) \in S$ ve $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ için

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

şeklinde tanımlı ρ dönüşümü S de bir metriktir.

Tanım 2.1.11. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X,ρ) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere; $\forall \epsilon > 0$ sayısı için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ için $\rho(x_n, x_0) < \epsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi $x_0 \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve bu $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.12. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X,ρ) metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere; $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise,

(a) x_0 limiti tektir.

(b) (x_n) dizisi sınırlıdır.

(c) (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin limiti de x_0 dır.

(d) Ek olarak $y_n \to y_0$ ise $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$ olur($(y_n) \in X$ dizisi ve $y_0 \in X$ elemanı için).

Tanım 2.1.13. (X,ρ) metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ pozitif bir sayı olmak üzere;

$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir **açık yuvar**,

$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir **kapalı yuvar**,

$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) = r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı bir **yuvar yüzeyi** denir.

Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(a,r)$ olacak şekilde bir $B(a,r)$ açık yuvarı varsa (x_n) **dizisi** X **metrik uzayında sınırlıdır** denir. Ayrıca $E \subseteq B(a,r)$ olacak şekilde $B(a,r)$ açık yuvarı varsa $E \subseteq X$ alt kümesine X metrik uzayında sınırlıdır denir.

Tanım 2.1.14. (X,ρ) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere; eğer $B(x_0, \epsilon) \subseteq E$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa $x_0 \in E$ sayısına E 'nin bir **iç noktası** denir.

Tanım 2.1.15. (X,ρ) metrik uzay ve $G \subseteq X$ olmak üzere; eğer G kümesinin her noktası G 'nin bir iç noktası ise G ye(X te) bir **açık küme** denir.

Tanım 2.1.16. (X,ρ) metrik uzay ve $G \subseteq X$ olmak üzere;

(a) $\forall \epsilon > 0$ sayısı için $0 < \rho(c,x) < \epsilon$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $c \in X$ sayısına G kümesinin bir **yığılma noktası** denir.

(b) Eğer bir $c \in G$ noktası G 'nin bir yığılma noktası değilse c elemanına G 'nin

yalıtık noktası(isolated point) denir.

Teorem 2.1.17. (X,ρ) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere; aşağıdaki ifadeler denktir.
(a) $c \in X$ noktası E kümesinin bir yığılma noktasıdır.
(b) $\forall\epsilon > 0$ için $B(c,\epsilon)$ açık yuvarı E kümesinin sonsuz çoklukta elemanını kapsar.
(c) E kümesinde bir (x_n) dizisi vardır ki $n \to \infty$ iken $x_n \neq c$ ve $x_n \to c$ dir.

Tanım 2.1.18. (X,ρ) metrik uzayı ve $F \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer F tüm yığılma noktalarını kapsıyorsa F ye X te bir **kapalı küme** denir.

Örnek 2.1.19. Her (X,ρ) metrik uzay için X ve $\varnothing$ kümeleri hem açık hem de kapalı kümelerdir.

Teorem 2.1.20. (X,ρ) metrik uzay olmak üzere,
(a) X teki açık kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun birleşimi X te bir açık kümedir.
(b) X teki açık kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun kesişimi X te bir açık kümedir.

Teorem 2.1.21. (X,ρ) metrik uzay olmak üzere,
$F \subseteq X$ alt kümesi X te kapalıdır $\Leftrightarrow$ F 'nin tümleyeni $F' = X \backslash F$, X te bir açık kümedir.

Teorem 2.1.22. (X,ρ) metrik uzay olmak üzere,
(a) X teki kapalı kümelerin herhangi bir kolleksiyonunun kesişimi X te bir kapalı kümedir.
(b) X teki kapalı kümelerin herhangi bir sonlu kolleksiyonunun birleşimi X te bir kapalı kümedir.

Tanım 2.1.23. $E \subseteq X$ olmak üzere;
(a) E kümesinin tüm iç noktalarının kümesine E 'nin **içi** denir ve $\overset{\circ}{E}$ şeklinde gösterilir.
(b) E kümesinin noktalarını ve tüm yığılma noktaklarını kapsayan kümeye E 'nin **kapanışı** denir ve $\overline{E}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.24. (X,ρ) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olmak üzere, $\overset{\circ}{E}$ kümesi X te bir açık küme ve $\overline{E}$ kümesi X te bir kapalı kümedir.

Tanım 2.1.25. $E \subseteq X$ olmak üzere, $\forall\epsilon > 0$ için $B(c,r)$ açık yuvarı E ve E' kümelerinin en az birer noktalarını kapsıyor ise yani $B(c,r) \cap E \neq \varnothing$ ve $B(c,r) \cap E' \neq \varnothing$ ise $c \in X$

noktasına E 'nin bir sınır noktası denir. E 'nin tüm **sınır noktalarının kümesi** ∂E şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.26. $\mathbb{R}$ de öklid metriği ile $E = (0,1]$ kümesi için;
$\overset{\circ}{E} = (0,1)$, $\overline{E} = [0,1]$ ve $\partial E = \{0,1\}$ olur.

Tanım 2.1.27. (X,ρ) ve (Y,σ) metrik uzaylar $E \subseteq X$, c noktası E 'nin bir yığılma noktası ve $l \in Y$ olsun.

$x \in X$ ve $\forall \epsilon > 0$ için $\sigma(f(x),l) < \epsilon$ iken $\rho(x,c) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $l \in Y$ noktasına $f : E \to Y$ fonksiyonunun limiti denir ve $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$ şeklinde gösterilir.Burada c noktasının E kümesine ait olması gerekmez.

Tanım 2.1.28. (X,ρ) ve (Y,σ) metrik uzaylar ve $c \in X$ olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım eğer;

$\forall \epsilon > 0$ için $\rho(x,c) < \epsilon$ iken $\sigma(f(x),f(c)) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f **fonksiyonu** c **noktasında süreklidir** denir.

Eğer f fonksiyonu X kümesindeki her noktada sürekli ise f **fonksiyonu** X **uzayında süreklidir** denir.

Tanım 2.1.29. (X,ρ) ve (Y,σ) metrik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunu alalım, eğer

$\forall \epsilon > 0$ için $\rho(x_1,x_2) < \delta$ iken $\sigma(f(x_1),f(x_2)) < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu X te **düzgün yakınsaktır** denir.

Düzgün yakınsak olan bir fonksiyon aynı zamanda yakınsaktır; ancak bunun tersi doğru değildir.

Teorem 2.1.30.(Zincir Kuralı) (X,ρ), (Y,σ) ve (W,τ) metrik uzaylar olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonunu $c \in X$, g: $Y \to W$ fonksiyonu ise $d = f(c)$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda g$\circ f : X \to W$ **bileşke fonksiyonu** c **noktasında süreklidir** denir.

Teorem 2.1.31. (X,ρ) ve (Y,σ) metrik uzaylar ve $c \in X$ olmak üzere,

$f : X \to Y$ fonksiyonu $c \in X$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $x_n \to c$ olmak üzere, X teki her (x_n) dizisi için $n \to \infty$ iken $f(x_n) \to f(c)$ dir.

Tanım 2.1.32. (X,ρ) ve (Y,σ) metrik uzaylar olsun. Her $E \subseteq X$ alt kümesi ve $f : X \to Y$ fonksiyonu için $f^{-1}(E)$ kümesine E kümesinin **ön görüntüsü**(pre-image) denir ve

$$f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.33. (X,ρ) ve (Y,σ) metrik uzaylar olsun. Herhangi bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir:
(a) f fonksiyonu X te süreklidir.
(b) Eğer G kümesi Y de açık ise $f^{-1}(G)$, X te açıktır.
(c) Eğer F kümesi Y de kapalı ise $f^{-1}(F)$, X te kapalıdır.

Tanım 2.1.34. (X,ρ) metrik uzay olsun, eğer $G \subseteq X$ açık alt kümesi için $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ ve $G_1 \cup G_2 = G$ olacak şekilde boş kümeden farklı G_1 ve G_2 açık kümeleri yok ise G kümesi **bağlantılıdır** denir.
Bu tanım metrik uzaylardaki keyfi kümeler için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Tanım 2.1.35. (X,ρ) metrik uzay olsun, eğer $E \subseteq X$ açık alt kümesi için $G_1 \cap E \neq \varnothing$, $G_2 \cap E \neq \varnothing$, $G_1 \cap G \cap E = \varnothing$ ve $G_1 \cup G_2 \supseteq E$ olacak şekilde boş kümeden farklı G_1 ve G_2 açık kümeleri yok ise E kümesi bağlantılıdır denir.
Eğer X kümesi bağlantılı ise (X,ρ) **metrik uzayı bağlantılıdır** denir. Bir $E \subseteq X$ alt kümesinin bağlantılılığı X uzayında tanımlanan metriğe bağlıdır.

Tanım 2.1.36. Bir metrik uzayın açık ve bağlantılı alt kümesine **tanım kümesi**(domain) denir.

Tanım 2.1.37. (X,ρ) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. Eğer her D bağlantılı kümesi için $C \subseteq D \subseteq E$ olacak şekilde bir C kümesi var ise C 'ye E 'nin bir **bileşeni** denir ve bu durumda $C = D$ olmak zorundadır.

Teorem 2.1.38. $\mathcal{F}$, bir metrik uzaydaki bağlantılı kümelerin bir kolleksiyonu olsun. Ayrıca $K = \bigcap_{E \in \mathcal{F}} E$ boş kümeden farklı olsun. Bu durumda $H = \bigcup_{E \in \mathcal{F}} E$ bağlantılıdır.

Teorem 2.1.39. (X,ρ) ve (Y,σ) metrik uzaylar, X bağlantılı bir küme ve $f : X \to Y$ fonksiyonu X te sürekli olsun bu durumda f bağlantılıdır.

Tanım 2.1.40. (X,ρ) metrik uzay olsun. (x_n), X te bir dizi olmak üzere,
$\forall \epsilon > 0$ için $m > n \geq N$ olmak üzere $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa (x_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Teorem 2.1.41. (X,ρ) metrik uzay olsun. (x_n), X te bir yakınsak dizi ise (x_n) bir Cauchy dizisi olur.

Bu teoremin tersi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ de adi metriğe göre doğru olmakla birlikte genel olarak doğru değildir.

Tanım 2.1.42. (X,ρ) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun, E deki her Cauchy dizisi E deki bir noktaya yakınsıyor ise E **kümesine tamdır** denir.

Tanım 2.1.43. (X,ρ) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X teki bir noktaya yakınsıyor ise (X,ρ) metrik uzayına **tam metrik uzay** denir.

Örnek 2.1.44. Herhangi bir metrik uzay için $\varnothing$ tamdır.

Örnek 2.1.45. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ adi metriğe göre tam uzaydır.

Örnek 2.1.46. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ adi metriğe göre tam uzaydır.

Teorem 2.1.47. (X,ρ) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun.
(a) Eğer E kümesi tam ise kapalıdır.
(b) Eğer X kümesi tam ve E kümesi kapalı ise E kümesi tamdır.

Tanım 2.1.48. (X,ρ) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun, eğer E deki her dizi, limiti E de olan yakınsak bir alt diziye sahip ise E kümesine **kompakt** küme denir.Eğer X kompakt ise (X,ρ) **metrik uzayı kompakt olur**.

Bir $E \subseteq X$ alt kümesinin kompaktlığı, X uzayında tanımlanan metriğe bağlıdır, örneğin $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi, $\mathbb{R}$ deki adi metiğe göre kompakttır; ancak ayrık metriğe göre kompakt değildir.

Bir tam metrik uzayın aynı zamanda kompakt olması gerekmez.

Teorem 2.1.49. Bir metrik uzaydaki kompakt bir küme aynı zamanda tamdır.

Teorem 2.1.50. (X,ρ) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun.
(a) Eğer E kümesi kompakt ise E sınırlı ve kapalıdır.
(b) Eğer X kümesi kompakt ve E kümesi kapalı ise E kümesi kompakttır.

Tanım 2.1.51. (X,ρ) metrik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $\forall x,y \in Y$ için $\sigma(x,y) = \rho(x,y)$ oluyor ise (Y,σ) ikilisine (X,ρ) metrik uzayının **alt metrik uzayı** denir.

Tanım 2.1.52. (X,ρ) ve (Y,σ) metrik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer bu f dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani,

$\forall x,y \in X$ için $\sigma(f(x),f(y)) = \rho(x,y)$ oluyorsa f dönüşümüne **izometrik dönüşüm** ya da **izometri** denir. Eğer bu f dönüşümü aynı zamanda üzerine bir dönüşüm ise f 'ye **izometrik izomorfi**, (X,ρ) ve (Y,σ) metrik uzaylarına da **izometrik** ya da **eş yapılı uzaylar** adı verilir.

Tanım 2.1.53. (X,ρ) metrik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. $X = \overline{E}$ ise E kümesine X te **yoğun küme** denir.

Örnek 2.1.54. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur; ancak $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğun değildir.

Tanım 2.1.55. (X,ρ) metrik uzay, $(Y,\rho^{'})$ de tam metrik uzay olsun. X, Y 'nin yoğun bir alt kümesi ile izometrik ise $(Y,\rho^{'})$ uzayına (X,ρ) **uzayının tamlanması** denir.

Teorem 2.1.56. Her (X,ρ) metrik uzayının bir $(Y,\rho^{'})$ tamlanması vardır.

Ayrıca, $(Y,\rho^{'})$ uzayı bir izometrik izometri farkıyla tektir. Yani, eğer $(W,\rho^{''})$, (X,ρ) uzayının tamlandığı başka bir uzay ise $\phi : Y \to X$ olacak şekilde bir tek birebir, örten ve izometrik dönüşüm vardır.

Tanım 2.1.57. Bir (X,ρ) metrik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya **ayrılabilir metrik uzay** denir.

Örnek 2.1.58. $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n), y = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \ (1 \le p < \infty)$$

şeklinde tanımlı $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ metriğiyle $(\mathbb{R}^n,\rho)$ ayrılabilir metrik uzaydır.

Örnek 2.1.59. $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^p$ için

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \ (1 \le p < \infty)$$

şeklinde tanımlı $\rho : \ell^p \times \ell^p \to \mathbb{R}$ metriğiyle (ℓ^p,ρ) ayrılabilir metrik uzaydır.

2.2. Vektör Uzayları

Tanım 2.2.1. V boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}$ bir cisim olmak üzere,

$+ : V \times V \to V,\ (x,y) \to x+y$

$\cdot : \mathcal{F} \times V \to V,\ (a,x) \to ax$

dönüşümleri ile sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini tanımlayalım.

$\forall x,y,z \in V$ ve $a,b \in \mathcal{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x+y = y+x$
2. $x+(y+z) = (x+y)+z$
3. $\forall x \in V$ için $x+0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in V$ vardır.
4. $\forall x \in V$ için $x+(-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in V$ vardır.
5. $\forall x \in V$ için $1.x = x$
6. $a(x+y) = ax+ay$
7. $(a+b)x = ax+ay$
8. $(ab)x = a(bx)$

Bu durumda V'ye $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir **vektör uzayı**(lineer uzay), elemanlarına ise **vektör** veya **nokta** denir. $V = \mathbb{R}$ alınırsa V'ye bir **reel vektör uzayı**, $V = \mathbb{C}$ alınırsa V'ye bir **kompleks vektör uzayı** denir.

Tanım 2.2.2. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerind bir vektör uzayı ve W, V'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer W, V vektör uzayındaki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W'ye V'nin bir (lineer)**alt uzayı** denir.

Teorem 2.2.3. $\varnothing \neq W \subset V$ kümesinin V'nin bir alt uzayı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall y_1,y_2 \in W$ ve $\forall a_1,a_2 \in \mathcal{F}$ için $a_1y_1 + a_2y_2 \in W$ olmasıdır.

Tanım 2.2.4. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$x_1,x_2,\ldots,x_n \in V$ ve $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \mathcal{F}$ olmak üzere;

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ toplamına $x_1,x_2,\ldots,x_n$ nin bir **lineer kombinasyonu** denir.

Tanım 2.2.5. $\varnothing \neq M \subset V$ olmak üzere, M'den alınan her sonlu sayıdaki vektörün lineer kombinasyonlarının kümesine M'**nin gereni**($Span$) denir ve $SpanM$ olarak gösterilir.

$SpanM$, V'nin bir alt uzayıdır ve bu alt uzaya M'**nin ürettiği alt uzay** denir.

Tanım 2.2.6. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $M = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \subset V$ olsun.

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{F}$ olmak üzere,

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0$ eşitliği ancak ve ancak $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ olması halinde gerçekleniyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerine **lineer bağımsız**, aksi halde en az bir $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ise **lineer bağımlıdır** denir.

Tanım 2.2.7. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq M \subset V$ olmak üzere;

(a). M lineer bağımsızdır,

(b). $V = Span M$ ise M'ye V'nin bir **tabanı** veya **bazı** denir.

Eğer $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, V'nin bir tabanı ise $\forall x \in V$ vektörü $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{F}$ olmak üzere,

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

Eğer V vektör uzayının bir sonlu tabanı varsa V'ye **sonlu boyutlu vektör uzayı**, aksi halde **sonsuz boyutlu vektör uzayı denir**. Sonlu boyutlu bir vektör uzayının bir tabanındaki vektörlerin sayısına V**'nin boyutu** denir ve $Boy V$ şeklinde gösterilir.

2.3. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 2.3.1. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in V$ ve $\forall a \in \mathcal{F}$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$

(N_2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N_3) $\|ax\| = |a| \|x\|$

(N_4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği).

özelliklerini sağlıyor ise V üzerinde bir norm olur ve bu durumda $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine bir **normlu vektör uzayı** denir. $(N_1) - (N_4)$ özelliklerine ise **norm aksiyomları** denir. Bu uzay $V = \mathbb{R}$ için **reel normlu uzay**, $V = \mathbb{C}$ için **kompleks normlu uzay** olur. Bir vektör uzayı üzerinde birden çok normlu uzay tanımlanabilir.

Örnek 2.3.2. $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ öklid vektör uzayını düşünelim.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^n$ için $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

normu ile birlikte bir normlu vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya $\mathbb{R}^n$ deki **adi norm** veya **öklid normu** denir.

Örnek 2.3.3. ℓ^∞ sınırlı, yakınsak ve kompleks terimli dizilerin uzayı olmak üzere;

ℓ^∞ uzayı, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \ell^\infty$ olmak üzere,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$$

şeklindeki vektörel toplama ve

$$cx = (cx_1, cx_2, cx_3, \dots)$$

şeklindeki skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı olup bu uzay aynı zamanda

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normu ile bir normlu uzaydır. $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ dönüşümüne, ℓ^∞ daki **supremum normu** veya **adi norm** denir.

Örnek 2.3.4. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için $C[a,b]$, $[a,b]$ üzerindeki sürekli ve reel(kompleks) değerli fonksiyonlar kümesi olmak üzere; $C[a,b]$ uzayı

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \text{ ve } (cf)(t) = cf(t)$$

şeklinde tanımlı sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı olup bu uzay aynı zamanda

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

normu ile bir normlu uzaydır. $\|\cdot\|_\infty : C[a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümüne, $C[a,b]$ deki **supremum normu** denir.

Örnek 2.3.5. ℓ^p, $(1 \le p < \infty)$ uzayı

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_p : \ell^p \times \ell^p \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ile bir normlu uzaydır.

Tanım 2.3.6. Her $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayından, $x, y \in V$ olmak üzere,

$$\rho(x,y) = \|x - y\|$$

şeklinde bir metrik elde edilebilir. Bu metriğe $\|\cdot\|$ **normu tarafından üretilen metrik** veya $\|\cdot\|$ **normunun indirgediği metrik** denir.

Örnek 2.3.7. $\mathbb{R}^n$ normlu vektör uzayından(örnek 2.3.2 de tanımlanan)

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

şeklindeki adi(öklid) metrik elde edilir.

Örnek 2.3.8. ℓ^∞ normlu uzayından(örnek 2.3.3 te tanımlanan)

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|$$

şeklindeki metrik (adi supremum metriği) elde edilir.

Yardımcı teorem 2.3.9. Normlu bir V vektör uzayı üzerinde bir norm tarafından üretilen bir ρ metriği $\forall x,y,z \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

(a) $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$ (öteleme değişmezliği)

(b) $\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x,y)$ (mutlak homojenlik özelliği)

özelliklerini sağlar.

Teorem 2.3.10. $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir V vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ şekline tanımlı her norm V üzerinde süreklidir.

Teorem 2.3.11. $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlı herhangi bir V normlu vektör uzayında vektörel toplama ve skalerle çarpma dönüşümleri süreklidir.

Tanım 2.3.12. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in V$ için

$$k\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K\|x\|_1$$

olacak şekilde k ve $K \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa V üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına **denk normlar** denir.

Tanım 2.3.13. (x_n), $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in V$ olsun.Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

oluyor ise (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterillir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya **norma göre yakınsama** denir.

Tanım 2.3.14. $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi (x_n) olsun. $\forall \epsilon > 0$ için $m,n > n_\epsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ 'a bağlı bir n_ϵ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Yardımcı teorem 2.3.15. (V,ρ) bir vektör uzayı ve ρ metriği öteleme ve mutlak homojenlik özelliklerine sahip olsun. Bu durumda $x \in V$ için

$$\|x\| = \rho(x,0)$$

olmak üzere (V,ρ) ve $(V, \|\cdot\|)$ uzaylarının topolojik yapıları aynıdır.

Tanım 2.3.16. Bir $(V,\|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi V içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(V,\|\cdot\|)$ normlu uzayına **Banach Uzayı** adı verilir.

Örnek 2.3.17. $V=\mathbb{R}^n$(veya $V=\mathbb{C}^n$) vektör uzayı

(a) $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

(b) $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^{1/p}$, $1\le p<\infty$,

(c) $\|x\|_\infty=\max\{|x_i| : i=1,2,\ldots,n\}$

normlarına göre birer Banach uzayıdır.

Örnek 2.3.18. $V=\mathbb{R}$(veya $V=\mathbb{C}$)olmak üzere $\mathcal{F}$ üzerinde tanımlı V vektör uzayı

$$\|f\|_{C[a,b]}=\max_{t\in[a,b]}|f(t)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Örnek 2.3.19. ℓ^∞ normlu vektör uzayı(örnek 2.3.3 te tanımlanan)

$$\|x\|_\infty=\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.3.20. $(V,\|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $x_k\in V$, $k=1,2,\ldots$ için terimleri

$S_1=x_1,\ S_2=x_1+x_2,\ldots,\ S_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$

şeklinde tanımlanan (S_n) dizisini göz önüne alalım,

$\sum_{k=1}^{\infty}x_k=x_1+x_2+\ldots+x_k+\ldots$sonsuz toplamına V içinde bir **seri** adı verilir. x_k terimine **serinin genel terimi**, (S_n) dizisine de **serinin kısmi toplamlar dizisi** denir. Eğer (S_n) kısmi toplamlar dizisi bir $s\in V$ elemanına yakınsıyor ise yani

$\lim_{n\to\infty}S_n=s$ veya $\lim_{n\to\infty}\|S_n-s\|=0$ ise

$\sum_{k=1}^{\infty}x_k=x_1+x_2+\ldots+x_k+\ldots$ sonsuz toplamına(serisine) yakınsaktır denir ve bu

$\lim_{n\to\infty}S_n=s=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ şeklinde gösterilir.

Pozitif terimli $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ serisine **mutlak yakınsak** seri denir.

Mutlak yakınsak bir seri daima yakınsaktır; ancak bu önermenin tersi her zaman doğru değildir.

Önerme 2.3.21. Eğer $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her mutlak yakınsak seri yakınsak ise $(V, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.3.22. $(x_n), (V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\forall x \in V$ için $\mathcal{F}$ cismi içinde

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\| = 0$$

olacak şekilde bir tek (a_n) dizisi varsa (x_n) dizisine V uzayının bir **Schauder bazı**(tabanı)denir.x toplamına sahip olan $\sum_{n=1}^{m} a_n x_n$ serisine x 'in (x_n) tabanına göre **açılımı** denir ve $x = \sum_{n=1}^{m} a_n x_n$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.3.23. $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. V sayılabilir yoğun bir alt kümeyi kapsıyor ise $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayına **ayrılabilir normlu uzay** denir. örneğin, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ içinde sayılabilir yoğun bir küme olduğundan $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir normlu uzaydır.

Teorem 2.3.24. Bir Schauder bazına sahip olan Banach uzayı ayrılabilirdir.

Tanım 2.3.25. $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve W, V 'nin bir lineer alt uzayı ise $(W, \|\cdot\|)$ de bir normlu uzay olur. Bu uzaya $(V, \|\cdot\|)$ uzayının **normlu alt uzayı** denir, eğer ek olarak W kapalı ise $(W, \|\cdot\|)$ **kapalı alt uzay** olur.

Teorem 2.3.26. Bir Banach uzayının her kapalı alt uzayı yine yine bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.3.27. $(V, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve W, V 'nin bir lineer alt uzayı ise $(W, \|\cdot\|)$ 'nin bir Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul W 'nin kapalı olmasıdır.

Tanım 2.3.28. V ve W aynı $\mathcal{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Eğer birebir ve örten $\phi : V \to W$ dönüşümü, lineer uzay yapısını koruyorsa ϕ dönüşümü V 'den W 'ye bir

lineer izomorfizmdir denir. $(V,\|\cdot\|_V)$ ve $(W,\|\cdot\|_W)$ birer normlu uzay olduğunda bu ϕ dönüşümü normu koruyorsa yani $\forall x \in V_1$ için

$$\|\phi(x)\|_W = \|x\|_V$$

oluyorsa, ϕ dönüşümüne **lineer izometri** denir.

2.4. İç Çarpım Ve Hilbert Uzayları

Tanım 2.4.1. $V = \mathbb{R}$(veya $V = \mathbb{C}$) ve V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathcal{F}$ dönüşümü;
($\dot{I}_1$) $\forall x,y \in V$ için $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
($\dot{I}_2$) $\forall x,y,z \in V$ için $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
($\dot{I}_3$) $\forall x,y \in V$ ve $c \in \mathcal{F}$ için $\langle cx,y\rangle = c\langle x,y\rangle$
($\dot{I}_4$) $\forall x \in V$ için $\langle x,x\rangle \geq 0$ ve $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
koşullarını sağlıyor ise $\langle .,. \rangle$ dönüşümüne V üzerinde bir **iç çarpım**, $(V,\langle .,. \rangle)$ ikilisine de **iç çarpım uzayı** denir.

Örnek 2.4.2. $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n), y = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$(veya $\in \mathbb{C}^n$) için

$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \left(\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \right)$$

şeklinde tanımlı iç çarpıma göre $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ bir iç çarpım uzayıdır.

Örnek 2.4.3. $a,b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için $C[a,b]$, $[a,b]$ üzerindeki sürekli ve reel(kompleks) değerli fonksiyonlar kümesi olmak üzere; $C[a,b]$ uzayı

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \text{ ve } (cf)(t) = cf(t)$$

şeklinde tanımlı sırasıyla vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı olsun. $f,g \in C[a,b]$ olmak üzere,

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

şeklinde tanımlı iç çarpıma göre $C[a,b]$ bir iç çarpım uzayıdır.

Önerme 2.4.4.(Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)
$(V,\langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ise $\forall x,y \in V$ için

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

dir.

Tanım 2.4.5. $(V,\langle .,.\rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in V$ olmak üzere bir x **vektörünün normu**

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} \tag{2.4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer bu tanım göz önünde bulundurulursa Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$\sqrt{|\langle x,y\rangle|^2} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} \Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \tag{2.4.2}$$

şeklinde de yazılabilir.

Önerme 2.4.4. $(V,\langle .,.\rangle)$ iç çarpım uzayı üzerindeki $(2.4.1)$ normu $\forall x,y \in V$ için

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \textbf{(Paralel kenar kuralı)}$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right\} \textbf{(Kutpsal özdeslik kuralı)}$$

eşitliklerini sağlar.

Paralel kenar özelliği, bir normlu uzayın iç çarpım uzayı olup(eşitlik sağlanırsa) olmadığını(eşitlik sağlanmazsa)gösterir.

Tanım 2.4.5. $(V,\langle .,.\rangle)$ bir iç çarpım uzayı ise $\forall x,y \in V$ için

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \langle x-y,x-y\rangle^{1/2}$$

tanımıyla bu iç çarpım uzayı bir metrik uzaydır, yani her iç çarpım uzayı aynı zamanda bir normlu uzaydır.

Teorem 2.4.6. $(V,\|\cdot\|)$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\forall x,y \in V$ vektörleri için Paralel kenar kuralını sağlamasıdır.

Teorem 2.4.7. Bir $(V,\langle .,.\rangle)$ iç çarpım uzayı $(2.4.1)$ normuna göre tam ise, başka bir deyişle $(V,\langle .,.\rangle)$ içindeki her Cauchy dizisi V içinde yakınsak ise bu iç çarpım uzayına **Hilbert Uzayı** denir.

Örnek 2.4.8.

$$\langle .,.\rangle \; : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathcal{F}, \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}$$

dönüşümü ℓ_2 üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma göre ℓ_2 iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlı her Hilbert uzayı $\mathcal{F}$ üzerinde bir Banach uzayıdır; ancak bir Banach uzayının Hilbert uzayı olması gerekmez. örneğin, ℓ^{∞} uzayı bir Banach uzayı olduğu halde aynı metrik altında Hilbert uzayı değildir.

Tanım 2.4.9. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\forall\ x,y \in V$ için $\langle x,y\rangle = 0$ oluyorsa x vektörü y vektörüne **ortogonaldir**(**diktir**) denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.10. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $A,B \subset V$ alt kümeleri verilsin. $\forall a \in A$ ve $x \in V$ için $x \perp a$ oluyorsa x **vektörü** A **kümesine ortogonaldir** denir ve $x \perp A$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.11. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $A,B \subset V$ alt kümeleri verilsin. $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için $a \perp b$ oluyorsa A **kümesi** B **kümesine ortogonaldir** denir ve $A \perp B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.12. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $A \subset V$ alt kümesi verilsin. $\{x \in X\ :\ x \perp A\}$ kümesine A kümesinin **ortogonal tümleyeni** denir ve $A^{\perp}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.13.(En yakın nokta özelliği)

$(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir $x \in X$ vektörünün boş olmayan $M \subset V$ alt kümesine olan uzaklığı $dist(x,M)$ olarak gösterilir ve

$$dist(x,M) = \inf\{\|x - y\|\ :\ y \in M\}$$

olarak tanımlanır.

Eğer,

$$dist(x,M) = \inf\{\|x - y^*\|\ :\ y \in M\}$$

olacak şekilde $y^* \in M$ varsa, y^* elemanına M içinde x vektörüne **en yakın nokta** denir.

$dist(x,M)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(a) $\forall y \in M$ için $dist(x,M) \leq \|x - y\|$

(b) $dist(x,M) < \epsilon$ ise öyle $y_\epsilon \in M$ elemanı vardır ki $\|x - y_\epsilon\| < \epsilon$.

Tanım 2.4.14. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $L \subset V$ alt kümesi verilsin. $\forall x \neq y \in L$ için $x \perp y$ ise L kümesine **ortogonal küme** denir. Buna göre, V içindeki bir (x_n) dizisinin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\forall m \neq n$ için $(x_n, x_m) = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.4.15. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $L \subset V$ alt kümesi verilsin. L ortogonal ve $\forall y \in L$ için $\|y\| = 1$ ise L'ye **ortonormal küme** denir.Buna göre, V içindeki bir (x_n) dizisinin ortonormal olması için gerek ve yeter koşul $\forall m \neq n$ için $(x_n, x_m) = 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ olmasıdır.

Teorem 2.4.16.(Gram-Schmidt Ortonormalizasyon Yöntemi)

$(V,\langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı ve (x_n),V içinde lineer bağımsız vektörlerin bir dizisi ise V içinde öyle bir ortonormal (y_n) dizisi bulunabilir ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$Span\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} = Span\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.4.17. $(V,\langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı ve (x_n), V içinde ortonormal bir dizi olsun. $c_n = \langle x,x_n \rangle$, $n = 1,2,\ldots$ sayılarına $x \in V$ vektörünün (x_n) dizisine göre **Fourier katsayıları**, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ serisine de x vektörünün (x_n) ortonormal dizisine göre **Fourier serisi**(Fourier açılımı) denir.

Teorem 2.4.18.(Bessel Eşitsizliği)

$(V,\langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı ve (x_n), V içinde ortonormal bir dizi olmak üzere, $\forall x \in V$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x,x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.4.19. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir Hilbert uzayı ve (x_n), V içinde ortonormal bir dizi olmak üzere,

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\langle y,x_n \rangle = 0$ eşitsizliğini sağlayan tek bir $y \in V$ için $y = 0$ oluyor ise (x_n) dizisine V'nin bir **Ortonormal tabanı** denir.

Tanım 2.4.20. $\mathcal{F}$ cismi üzerindeki bir V Hilbert uzayı,sayılabilir ortonormal bir tabana sahip ise bu V **Hilbert uzayı ayrılabilirdir** denir.

Yardımcı Teorem 2.4.21.(Riesz Lemması)

$(V,\|\cdot\|)$ normlu uzayının bir $L \neq V$ alt uzayı verilsin. Bu durumda $\forall 0 < \epsilon < 1$ için $\|x_\epsilon\| = 1$ ve $dist(x_\epsilon,L) > 1-\epsilon$, $x_\epsilon \notin L$, olacak şekilde bir $x_\epsilon \in V$ vardır.

2.5. Lineer Operatörler

Tanım 2.5.1. X ve Y boş kümeden farklı kümeler ve $D \subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y nin bir elemanını karşılık getiren $T : D \to Y$ kuralına D 'den Y 'ye bir **operatör** veya **dönüşüm** denir. T operatörünün x 'e karşılık getirdiği eleman $T(x)$ ile gösterilir. $D(T)$ 'ye T operatörünün **tanım kümesi**, $R(T) = \{y \in Y : y = T(x), x \in D(T)\}$ kümesine ise T operatörünün **değer**(görüntü) **kümesi** denir.

Tanım 2.5.2. $T_1 : X \longrightarrow Y$ ve $T_2 : X \to Y$ operatörleri verilsin. Eğer $D(T_1) = D(T_2)$ ve $\forall x \in D$ için $T_1(x) = T_2(x)$ ise T_1 ile T_2 **operatörleri eşittir** denir. Ayrıca, $D(T_1) \subset D(T_2)$ ve $\forall x \in D(T_1)$ için $T_1(x) = T_2(x)$ ise T_1 operatörüne T_2 **operatörünün kısıtlaması** denir ve $T_1 = T_{2|D(T)}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5.3. $T : X \to Y$ operatörü verilsin. $T(X) = Y$ oluyorsa, T operatörüne **örten** (surjektif)operatör denir. Ayrıca, $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1) \neq T(x_2)$$

oluyorsa T operatörüne **birebir**(injektif)operatör denir. Birebir-örten bir operatöre **bijektif operatör** denir.

Tanım 2.5.4. V ve W birer normlu uzay olsun, $T : V \to W$ operatörünün $x_0 \in D(T)$ noktasında sürekli olabilmesi için aşağıdakilerin sağlanması gerekir:

(a) $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $\forall x \in D(T)$ için $\|x - x_0\| < \delta$ iken $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$.

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$.

Eğer, $T : V \to W$ operatörü $D(T)$ 'nin her noktasında sürekli ise T **operatörü** $D(T)$ **üzerinde süreklidir** denir.

Tanım 2.5.5. V ve W birer normlu uzay olmak üzere; T, tanım kümesi $D(T) \subset V$ ve görüntü kümesi $R(T) \subset W$ olan bir operatör olsun. Eğer T operatörü $D(T)$ 'nin V 'de sınırlı her kümesine $R(T)$ 'nin W de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyor ise T operatörüne **sınırlı operatör** denir. Başka bir deyişle; $\forall x \in D(T)$

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı var ise T operatörüne sınırlı operatör denir.

Tanım 2.5.6. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $T : V \longrightarrow \mathcal{F}$ dönüşümü

(a) $\forall x, y \in V$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$

(b) $\forall c \in \mathcal{F}$ ve $\forall x \in V$ için $T(cx) = cT(x)$

özelliklerini sağlıyor ise bu dönüşüme V vektör uzayı üzerinde bir **lineer fonksiyonel** denir.

Örnek 2.5.7. $\lambda \in C[0,1]$ olmak üzere; $\forall f \in C[0,1]$ için

$$T(f) = \int_0^1 f(t)\lambda(t)dt$$

şeklinde tanımlı $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $C[0,1]$ üzerinde bir lineer fonksiyoneldir.

Teorem 2.5.8. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $T : V \to \mathcal{F}$ lineer dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir;

(a) T, V üzerinde süreklidir.

(b) T, $x = 0$ noktasında süreklidir.

(c) $\{|T(x)| : x \in V$ ve $\|x\| \leq 1\}$ kümesi sınırlıdır.

Örnek 2.5.9. $C^1[0,1]$, 1.mertebeden türevi sürekli fonksiyonların normlu uzayı olmak üzere; $\forall f \in C^1[0,1]$ için $T : C^1[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = f'(1)$ dönüşümü

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

şeklindeki supremum normu ile birlikte $C^1[0,1]$ üzerinde bir lineer fonksiyoneldir.

Tanım 2.5.10. V ve W, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun, $T : V \to W$ dönüşümü

(a) $\forall x, y \in V$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$

(b) $\forall c \in \mathcal{F}$ ve $\forall x \in V$ için $T(cx) = cT(x)$

özelliklerini sağlıyor ise bu dönüşüme V'den W'ye bir **lineer operatör**(dönüşüm) denir.

Örnek 2.5.11. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $L^2[a,b]$ uzayı

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

normuna göre karesi $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonların normlu vektör uzayı olsun.

$\forall f \in L^2[a,b]$ ve $\forall t \in [a,b]$ için

$$T(f)(t) = \phi(t)f(t)$$

şeklinde tanımlı $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ operatörü lineerdir.

Teorem 2.5.12. $T : V \to W$ bir lineer operatör olsun, T operatörü bir tek noktada sürekli ise, her noktada süreklidir.

Tanım 2.5.13. $T : V \to W$ bir lineer operatör olmak üzere, $\forall x \in D(T)$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \qquad (2.5.1)$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabit sayısı varsa T operatörü $D(T)$ üzerinde **sınırlıdır** denir. Eğer $D(T) = T$ ise T'ye sadece sınırlı operatör denir. T operatörü sınırlı değilse **sınırsızdır** denir.$(2.5.1)$eşitsizliğindeki $c > 0$ sayılarının infimumuna T **operatörünün normu** denir.

Buna göre,

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \forall x \in D(T) \text{ için } \|Tx\| \leq c\|x\|\}$$

veya $(2.5.1)$ eşitsizliğinde $c \geq \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}, x \neq 0,$ yazılabilir ki bu durumda T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \qquad (2.5.2)$$

şeklinde de gösterilebilir.

Teorem 2.5.14. $T : V \to W$ lineer operatörünün $D(T) \subseteq V$ üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün $D(T)$ üzerinde sürekli olmasıdır.

Teorem 2.5.15. V ve W, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde birer normlu vektör uzayı olsun. Herhangi $T : V \to W$ lineer dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) T, V üzerinde süreklidir.

(b) T, $x = 0$ noktasında süreklidir.

(c) T sınırlıdır.

Tanım 2.5.16. V ve W, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde birer normlu vektör uzayı olsun. V'den W'ye tüm sürekli lineer operatörlerin kümesi $B(V, W)$ ve V deki tüm sürekli lineer operatörlerin kümesi ise $B(V)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.17. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde birer normlu vektör uzayı olsun. I özdeşlik operatörü olmak üzere,

$$ST = I = TS$$

olcak şekilde bir $S \in B(V)$ lineer operatörü varsa $T \in B(V)$ lineer operatörünün **tersi alınabilir** denir. Bu durumda S'ye T operatörünün tersi denir ve $S = T^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5.18. V ve W, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde birer normlu vektör uzayı olsun. V'den W'ye tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerden oluşan $L(V,W)$ kümesine **sınırlı lineer operatör uzayı** denir. $L(V,W)$ uzayı, $T_1, T_2 \in L(V,W)$ ve $\alpha \in \mathcal{F}$ olmak üzere,

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x, x \in V$$

$$(\alpha T_1)(x) = \alpha T_1 x, x \in V$$

işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzay $(2.5.2)$ de verilen operatör normuna göre aynı zamanda bir normlu vektör uzayıdır. Ayrıca,eğer W bir Banach uzayı ise $L(V,W)$ uzayı da Banach uzayı olur.

Tanım 2.5.19. V ve W birer Banach uzayı; (T_n), $L(V,W)$ içinde bir operatörler dizisi ve $T \in L(V,W)$ olmak üzere;

(a) (T_n) dizisi düzgün sınırlıdır $\Leftrightarrow$ $\exists c > 0$ öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\| \leq c$.

(b) (T_n) düzgün bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n, m > n_\epsilon$ için $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$.

(c) (T_n) dizisi T operatörüne düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ için $\|T_n - T\| \leq \epsilon$.

(d) (T_n) dizisi T operatörüne kuvvetli yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $\exists n_0 = n(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_0$ için $\|T_n x - Tx\| \leq \epsilon$.

$(V, \|\cdot\|)$normlu uzayında bir (x_n) dizisi, $x_0 \in X$ elemanı için eğer $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ oluyorsa (x_n) dizisi, x_0 noktasına yakınsıyor denir ve bu $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ şeklinde gösterilir. Bu tanımlanan yakınsaklık, zayıf yakınsaklıktan ayırt edebilmek için **kuvvetli yakınsaklık** olarak adlandırılır ve bu durum $x_n \overset{k}{\to} x_0$ şeklinde gösterilir. Buradaki x_0 noktasına (x_n) dizisinin **kuvvetli limiti** denir.

$(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. $\forall f \in X'$ (X', X uzayının duali olmak üzere)için

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0 noktasına **zayıf yakınsar** denir ve $x_n \overset{z}{\to} x_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5.20. V ve W, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun. $T : V \to W$ lineer operatörü birebir olmak üzere, $\forall y_0 \in R(T)$ elemanını $Tx_0 = y_0$ olacak şekilde, $x_0 \in D(T)$ elemanına dönüştüren $T^{-1} : R(T) \to D(A)$ operatörüne T **operatörünün tersi** denir.

Tanım 2.5.21. Tanım kümesi $D(T)$ ve değer kümesi $R(T)$ olan $T : V \to W$ lineer operatörü verilsin.

$$\text{ÇekT} = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$$

kümesine T operatörünün **sıfır uzayı**(**çekirdeği**)denir. ÇekT uzayı boş değildir çünkü $T0 = 0$ olduğundan $0 \in$ÇekT olur.

Teorem 2.5.22. V ve W birer normlu uzay ve $T : V \to W$ lineer operatör olsun. $T^{-1} : R(T) \to D(A)$ ters operatörünün var ve sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in D(T)$ elemanı için

$$\|Tx\| \geq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısının bulunmasıdır.

Teorem 2.5.23.(Ters Operatör Teoremi)

V ve W birer Banach uzayı ve $T : V \longrightarrow W$ operatörü lineer, birebir, örten ve sınırlı olsun. Bu durumda $T^{-1} : W \to V$ ters operatörü var ve sınırlıdır.

Tanım 2.5.24. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzayı olsun. V üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $L(V,\mathcal{F})$ Banach uzayına V'nin (normlu) **dual uzayı** denir ve $V^{/}$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.25. $V^{/}$ Banach uzayının normlu duali olan $V^{//} = (V^{/})^{/}$ uzayına X uzayının **ikinci duali** denir. $V^{//} = L(V^{/},\mathcal{F})$ uzayı da bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.5.26. V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzayı olsun. $V^{//} = V$ ise V uzayına **refleksif**(yansımalı) **uzay** denir.

Teorem 2.5.27. Refleksif bir $V^{/}$ Banach uzayının her altuzayı da refleksiftir.

Teorem 2.5.28. V ve W, F üzerinde birer Hilbert uzayı olsun. $\forall T \in L(V,W)$ lineer operatörü için, $\forall x \in V$ ve $y \in W$ olmak üzere,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{*}y\rangle$$

olacak şekilde bir tek $T^{*} \in L(V,W)$ lineer operatörü vardır.

Tanım 2.5.29. V ve W, F üzerinde birer Hilbert uzayı olsun. Teorem 2.5.28 'i sağlayan $T^{*} \in L(V,W)$ lineer operatörüne $T \in L(V,W)$ lineer operatörünün **adjoint operatörü** denir.

Tanım 2.5.30. V, F üzerinde birer Hilbert uzayı olsun. Eğer, $T = T^{*}$ oluyorsa $T \in L(V,\mathcal{F})$ lineer operatörüne **self-adjoint** veya **hermitian operatör** denir.

Teorem 2.5.31. V, F üzerinde birer Hilbert uzayı ve $T \in L(V, \mathcal{F})$ bir hermitian operatör olsun, bu durumda

$$\|T\| = \sup_{x \in V, \|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$$

dir.

Tanım 2.5.32. H_1 ve H_2 Hilbert uzayları ve $T \in L(H_1, H_2)$ olsun. $\forall x \in H_1, y \in H_2$ için,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

şeklinde tanımlı sürekli lineer T^* operatörüne T'nin **Hilbert-adjoint**(Hermit-adjoint) **operatörü** denir.

Tanım 2.5.33. $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $E \subset V$ olsun. Eğer E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine V de **kompakt küme** denir. Eğer E kümesinin $\overline{E}$ kapanışı V de kompakt bir küme ise E kümesine V de **ön-kompakt küme** denir. V kompakt(ön-kompakt) bir küme ise $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayına **kompakt**(ön-kompakt) **normlu uzay** denir.

Tanım 2.5.34. $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $E \subset V$ olsun. E kümesindeki her dizinin E 'de bir limit noktası varsa E kümesine V de **dizisel kompakt** küme denir.

Yardımcı Teorem 2.5.35. $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $E \subset V$ olsun. E kümesi V'de kompakt ise aynı zamanda V de dizisel kompakt bir küme olur.

Tanım 2.5.36. $(V, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve tanım kümesi $E \subset V$ olan $f : E \to \mathbb{C}$ fonksiyoneli verilsin. Bu durumda f'nin E üzerinde **düzgün sürekli** olması için gerek ve yeter koşul

$\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta_\epsilon > 0$ öyle ki $\forall x, y \in E$ için $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

olmasıdır.

Teorem 2.5.37. f, $(V, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kompakt E alt kümesinde sürekli bir fonksiyonel ise f burada düzgün süreklidir.

Tanım 2.5.38. V ve W Banach uzayları ve $T : V \to W$ lineer operatörü verilsin. Eğer T operatörü V uzayının her sınırlı kümesini W uzayının bir ön-kompakt kümesine çeviriyorsa, T operatörüne **kompakt lineer operatör** (sürekli lineer operatör)denir.

Tanım 2.5.39. V, F üzerinde bir Banach uzayı, T sürekli lineer operatör ve I sürekli lineer birim operatör olmak üzere,

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda \in \mathcal{F} \,:\, \lambda I - T \text{ tersi alınamaz} \right\}$$

kümesine T sürekli lineer operatörünün **spectrumu** denir.

3.BÖLÜM

ÖLÇÜLER VE LEBESGUE İNTEGRALİ

Bu bölümde öncelikle Lebesgue integralinin(teorisinin) temelini oluşturan ölçü, Lebesgue (dış)ölçüsü ve ilgili kavramlar daha sonra da Lebesgue integrali verilecektir.

3.1. Bazı Küme Sınıfları

Tanım 3.1.1. X kümesinin alt kümelerinin herhangi bir kümesine X 'in alt kümelerinin bir **sınıfı** denir.

Tanım 3.1.2. X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $\mathcal{H}$ sınıfı için

(H_1) $\forall A,B \in \mathcal{H}$ için $A \setminus B \in \mathcal{H}$

(H_2) $\forall A,B \in \mathcal{H}$ için $A \cup B \in \mathcal{H}$

özellikleri sağlanırsa $\mathcal{H}$ sınıfına bir **halka** adı verilir. Eğer (H_2) yerine

(H_3) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \mathcal{H} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}$

özelliği alınırsa bu taktirde $\mathcal{H}$ halkasına bir σ –**halka** denir. Bu tanıma göre bir $\mathcal{H}$ halkasının aşağıdaki özellikleri sağladığı açıktır:

(a) $\varnothing \in \mathcal{H}$

(b) $\forall A,B \in \mathcal{H}$ için $A \cap B \in \mathcal{H}$

(c) $k = 1,2,\ldots,n$ için $A_k \in \mathcal{H} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{H}$

Ayrıca $\mathcal{H}$ bir σ –**halka ise**

(d) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \mathcal{H} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}$

olur.

Tanım 3.1.3. X bir küme olsun. X kümesinin bir $\mathfrak{A}$ sınıfı için

(C_1) $X \in \mathfrak{A}$

(C_2) $\forall E \in \mathfrak{A}$ için $E^c = X \setminus E \in \mathfrak{A}$

(C_3) $k = 1,2,\ldots,n$ için $E_k \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{A}$

özellikleri sağlanıyor ise bu $\mathfrak{A}$ sınıfına X üzerinde bir **cebir** denir. Eğer(C_3)yerine

(C_4) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{A}$

özelliği alınırsa bu taktirde $\mathfrak{A}$ cebirine bir σ –**cebiri** denir. Bu tanıma göre X üzerinde tanımlı bir $\mathfrak{A}$ σ –**cebiri** aşağıdaki özellikleri sağlar:

(a) $\varnothing \in \mathfrak{A}$

(b) $k = 1,2,\ldots,n$ için $E_k \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{A}$

(c) $k \in \mathbb{N}$ için $E_k \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{A}$

(d) $\forall A,B \in \mathfrak{A}$ için $A \setminus B \in \mathfrak{A}$

Yukarıdaki son özellik ve Tanım 3.1.3 teki (C_4)özelliği birlikte değerlendirildiğinde her σ –cebirinin aynı zamanda bir σ –halka olduğu görülür.

Örnek 3.1.3. X bir küme ve $\mathcal{P}$ de X 'in bütün alt kümelerinin kümesi olsun. $\mathcal{P}$, X üzerinde bir σ –cebiridir.

Örnek 3.1.4. X bir küme ve $\mathfrak{A}=\{\varnothing, X\}$ olsun. $\mathfrak{A}$, X üzerinde bir σ –cebiridir.

Teorem 3.1.5. X üzerindeki σ –cebirlerinin herhangi adetteki kesişimleri yine bir σ –cebirdir.

Teorem 3.1.6. X bir küme ve $\mathcal{A}$, X 'in boş olmayan bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$ sınıfını kapsayan σ –cebirlerinin bir en küçüğü vardır.

Tanım 3.1.7. Bir $\mathcal{A}$ sınıfını kapsayan σ –cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{A}$ 'nın **ürettiği**(**doğurduğu**) σ –**cebiri** denir.

Tanım 3.1.8. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a,b) aralıklarının doğurduğu σ –cebirine **Borel cebiri** denir ve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilir. $n = 1$ olması durumunda $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ şeklinde gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 'in herbir elemanına bir **Borel kümesi** denir.

Tanım 3.1.9. X bir küme ve $\mathfrak{A}$, X üzerinde bir σ –cebiri olsun. $(X,\mathfrak{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathfrak{A}$ daki her kümeye ise $\mathfrak{A}$ –**ölçülebilir küme** veya kısaca **ölçülebilir küme** denir.

3.2. Ölçüler

Tanım 3.2.1. $(X,\mathfrak{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathfrak{A}$ üzerinde $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ şeklinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu için

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $\forall A \in \mathfrak{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

(c) $\mathfrak{A}$ daki ayrık kümelerin bir $(A_n)_{n\geq 1}$ ailesi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ ($i \neq j$ iken $A_i \cap A_j = \emptyset$) olacak şekilde seçilsin

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{ (toplamsallık özelliği)}$$

özellikleri sağlanırsa μ fonksiyonuna bir **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** denir.

Eğer $\forall A \in \mathfrak{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ fonksiyonuna bir **sonlu ölçü** denir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü σ-**sonludur** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise μ 'ye **olasılık ölçüsü** denir.

Aşağıda ölçü fonksiyonunun temel özellikleri verilmiştir.

$(X,\mathfrak{A})$ ölçülebilir uzay olmak üzere;

(a) Eğer $A,B \in \mathfrak{A}$ ve $B \subset A$ ise $\mu(B) \leq \mu(A)$(μ 'nün monotonluk özelliği)

(b) Eğer $A,B \in \mathfrak{A}$, $B \subset A$ ve $\mu(B) < \infty$ ise

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) \left(\mu \text{ 'nün çıkarma özelliği}\right)$$

(c) Eğer $A,B \in \mathfrak{A}$ $\mu(A \cap B) < \infty$ ise $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

(d) $(A_n)_{n\geq 1}$, $\mathfrak{A}$ 'ya ait kümelerin $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ olacak şekilde bir dizisi olsun bu durumda

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{ (μ 'nün yarı-toplamsallık özelliği)}$$

Teorem 3.2.2. $\mathfrak{A}$ bir σ –cebiri, $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathfrak{A}$ monoton artan bir dizi olmak üzere;

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \text{ (ölçümün sürekliliği)}$$

Teorem 3.2.3. $\mathfrak{A}$ bir σ –cebiri, $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathfrak{A}$ monoton azalan bir dizi ve $\mu(A_1) < \infty$ olmak üzere;

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Tanım 3.2.4. X bir küme ve $\mathcal{P}(X)$ de X 'in kuvvet kümesi olsun.
$\lambda^* : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ şeklinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir λ^* fonksiyonu için

(a) $\lambda^*(\emptyset) = 0$

(b) $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ için $\lambda^*(A) \geq 0$

(c) $\forall A \subset B \subset X$ için $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{P}(X)$ ise $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$

özellikleri sağlanırsa λ^* fonksiyonuna bir **dış ölçü** denir.

Ölçü ve dış ölçünün tanımları gözönüne alıdığında ne ölçünün bir dış ölçü ne de dış ölçünün bir ölçü olması gerekmediği görülür. Dış ölçü,ölçü fonksiyonunun sağladığı bir çok özelliği sağladığı için bu adı almıştır. Bir ölçünün dış ölçü olabilmesi için tanım kümesinin kuvvet kümesi olması gerekir.

Tanım 3.2.5. $(X, \mathfrak{A})$ ölçülebilir uzay ve $(E_i) \in \mathfrak{A}$ kolleksiyonu $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_i \supset A$ olacak şekilde alınsın. Buna göre $A \subset X$ kümesinin dış ölçüsü

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

şeklinde tanımlanır. μ^* ölçüsü bir dış ölçüdür ve bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** denir.

Teorem 3.2.6. $(X, \mathfrak{A})$ ölçülebilir uzay ve μ^*, Lebesgue dış ölçüsü olsun. Aşağıdakiler daima sağlanır;

(a) $E \subset X$ alt kümesi sayılabilir ise $\mu^*(E) = 0$

(b) $E = (a,b) \subset X = \mathbb{R}$ seçilirse $\mu^*(E) = l(E) = b - a$

(c) $A \subset B \subset X$ ise $0 \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(X) \leq \infty$(monotonluk özelliği)

(d) $\forall A \in X$ ve herbir $x_0 \in X$ için $A + x_0 = \{x + x_0 : x \in X\}$ olmak üzere,

$\mu^*(A + x_0) = \mu^*(A)$ (öteleme altında değişmezlik özelliği)

(e) $\{E_n\}$, X te ayrık kümelerin bir dizisi olmak üzere,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \text{ (alt toplamsallık özelliği)}$$

Tanım 3.2.7. X bir küme ve μ^* de X üzerinde Lebesgue dış ölçüsü olsun,
$\forall A \subset X$ için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

oluyor ise $E \subset X$ alt kümesine μ^* –**ölçülebilir**(**Lebesgue ölçülebilir**) **küme** denir.

Tanım 3.2.8. Eğer $E \subset X$ kümesi (Lebesgue)ölçülebilir küme ise E 'nin Lebesgue ölçüsü, onun dış ölçüsü olan $\mu^*(E)$ şeklinde tanımlanır ve $\mu(E)$ olarak gösterilir, yani $\mu^*(E) = \mu(E)$ olur.

Teorem 3.2.9. Lebesgue ölçülebilir kümelerin bir $\mathcal{M}$ kolleksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir;

(a) $\varnothing$ ve X, X üzerinde tanımlanan Lebesgue ölçüsüne göre ölçülebilir olup $\mu^*(\varnothing) = 0$

(b) Eğer E ölçüleblir ise E^c tümleyeni de ölçülebilirdir.

(c) Eğer $\mu^*(E) = 0$ ise E ölçüleblirdir.

(d) Eğer E_1 ve E_2 ölçüleblir ise $E_1 \cup E_2$ ve $E_1 \cap E_2$ kümeleri de ölçülebilirdir.

(e) Eğer E ölçüleblir ise $E + x_0$ kümesi de ölçülebilirdir.

(f) Her $I \subset X$ aralığı ölçülebilir olup, $\mu^*(I) = \mu(I) = l(I)$

(g) $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ kümesi ayrık ve ölçülebilir kümelerin sonlu bir kolleksiyonu olsun, $\forall A \in X$ için

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A \cap E_i\right) = \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$$

özel olarak $A = X$ ise $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i)$

(h) $\{E_n\}$, ölçülebilir kümelerin herhangi bir dizisi ise

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ de ölçülebilir kümelerdir.

(i) $\{E_n\}$, ayrık ve ölçülebilir kümelerin herhangi bir dizisi olmak üzere,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

(j) Her açık küme ve her kapalı küme ölçülebilirdir.

(k) $I \subset \mathbb{R}^n$, $I = \{x : a_i \leq x \leq b_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$, $I_1 = [a_1,b_1]$, $I_2 = [a_2,b_2], \ldots,$ $I_n = [a_n,b_n]$, $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ olmak üzere I aralığının hacmi $v(I)$ olmak üzere,

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

3.3. Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım 3.3.1. $(X, \mathfrak{A})$ ölçülebilir uzay ve f, genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun. $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) > a\}$kümesi ölçülebilir ise f'ye **ölçülebilir fonksiyon** denir.

Teorem 3.3.2. $(X, \mathfrak{A})$ ölçülebilir uzay ve f, genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) > a\}$ kümesi ölçülebilirdir.
(b) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) \geq a\}$ kümesi ölçülebilirdir.
(c) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) < a\}$ kümesi ölçülebilirdir.
(d) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{x : f(x) \leq a\}$ kümesi ölçülebilirdir.

Teorem 3.3.3. f ve g ölçülebilir fonksiyonlar, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) cf $\qquad$ (iv) $\dfrac{f}{g}$, $(g \neq 0)$
(ii) $f+g$ $\qquad$ (v) $\max\{f, g\}$
(iii) $f.g$ $\qquad$ (vi) $\min\{f, g\}$

fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Teorem 3.3.4. $(X, \mathfrak{A})$ ölçülebilir uzay ve (f_n), ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun bu durumda, $(n \in \mathbb{N})$

(i) $\sup\limits_n f_n(x)$ $\qquad$ (iii) $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
(ii) $\inf\limits_n f_n(x)$ $\qquad$ (iv) $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

fonksiyonları da ölçülebilirdir.

3.4. Lebesgue İntegrali

Tanım 3.4.1. $\mathfrak{A}$, X'in alt kümelerinden oluşan bir σ –cebiri ve μ de $\mathfrak{A}$ üzerinde bir ölçü olmak üzere, $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ üçlüsüne bir **ölçü uzayı** denir.

Tanım 3.4.2. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $E \in \mathfrak{A}$ olsun. Eğer $\mu(E) = 0$ ise E kümesinin **ölçümü sıfırdır** denir.

Tanım 3.4.3. $(X,\mathfrak{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve f,g: $X \to \mathbb{C}$ fonksiyonları verilsin. Eğer $N = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ kümesinin ölçümü sıfır ise **hemen hemen her yerde**(**h**.**h**.**h**) f =g dir denir.

Eğer bir P özeliği, her $x \in E - A$ için sağlanıyor ve $\mu(A) = 0$ ise, P özeliği h.h.h $x \in E$ için sağlanır denir.

Tanım 3.4.4. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ olmak üzere, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin;

$$f^{+} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^{-} = \min\{-f(x), 0\}$$

biçiminde tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonları da X üzerinde tanımlı negatif olmayan fonksiyonlardır. Burada f^{+} fonksiyonuna f'nin **pozitif parçası**, f^{-} fonksiyonuna f'nin **negatif parçası** denir. Bu tanım doğrultusunda

$$f = f^{+} - f^{-} ve |f| = f^{+} + f^{-}$$

olduğu açıktır.

Tanım 3.4.5. $E \subset X$ alt kümesi için

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\chi_E(x)$ fonksiyonuna E'nin **karekteristik fonksiyonu** denir.

Tanım 3.4.6. Görüntü kümesi sonlu elemandan oluşan fonksiyona **basit fonksiyon** denir.

Tanım 3.4.7. $(X,\mathfrak{A},\mu)$ bir ölçü uzayı, $E_i = \{x : s(x) = a_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ler birbirinden farklı ve $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X,\ E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$ olmak üzere,

$s : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir basit fonksiyonu

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$$

şeklinde gösterilir. Burada s'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $E_1, E_2, \ldots, E_n$ kümelerinin ölçülebilir olmasıdır.

Teorem 3.4.8. f, X üzerinde bir reel fonksiyon olmak üzere;

$\forall x \in X$ için $n \to \infty$ iken $s_n(x) \to f(x)$ olacak şekilde basit fonksiyonların bir $\{s_n\}$ dizisi vardır. Burada eğer f ölçülebilir bir fonksiyon ise $\{s_n\}$, ölçülebilir basit fonksiyonların bir dizisi olarak, $f \geq 0$ ise $\{s_n\}$, monoton artan fonksiyonların bir dizisi olarak alınabilir[Rudin,1976].

Tanım 3.4.9. $s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$, negatif olmayan,ölçülebilir basit fonksiyon olmak üzere, s 'nin Lebesgue integrali

$$I(s) = \int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.4.10. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere; f **fonksiyonunun Lebesgue integrali**

$$\int f d\mu := \sup\left\{\int s d\mu \, : \, 0 \leq s \leq f, \; s \text{ basit fonksiyon}\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.4.11. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve f fonksiyonu negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

ifadesinde $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonuna X 'te(bölgesinde) μ ölçüsüne göre **Lebesgue integrallenebilirdir** denir.

X te(bölgesinde)Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların sınıfı $L^1(X) = L^1(X, \mu)$ şeklinde gösterilir. Bu durumda yukarıdaki f fonksiyonu için $f \in L^1(X)$ yazılır.

Tanım 3.4.12.

$\int_X |f| d\mu < \infty$ ise f fonksiyonuna X te(bölgesinde) Lebesgue integrallenebilirdir denir.

Lebesgue integrali için aşağıdaki önermeler doğrudur:

(a) Eğer f fonksiyonu X te ölçülebilir, sınırlı ve $\mu(X) < \infty$ ise X te integrallenebilirdir.

(b) Eğer f fonksiyonu X te ölçülebilir, $\mu(X) < \infty$ ve $\forall x$ için $a \leq f(x) \leq b$ ise

$$a\mu(X) \leq \int_X f d\mu \leq b\mu(X)$$

(c) $\forall x$ için $f(x) \leq g(x)$ ve f, g fonksiyonları ölçülebilir ve integrallenebilir ise

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

(d) Eğer f integrallenebilir ise $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$\int_X cf d\mu \leq c \int_X f d\mu$$

(e) Eğer f ölçülebilir ve $\mu(X) = 0$ ise

$$\int_X f d\mu = 0$$

Teorem 3.4.13. Eğer $f \in L^1(X)$ ise $|f| \in L^1(X)$ dir.Bu durumda

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

olur[Rudin,1976].

Teorem 3.4.14.(Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi)

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $E \in \mathfrak{A}$ ve $\{fn\}$ fonksiyon dizisi $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Buna göre,

$$\lim_{n \to \infty} \int_E fn d\mu = \int_E \lim_{n \to \infty} fn d\mu.$$

olur[Rudin,1976].

Teorem 3.4.15. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $f = f_1 + f_2$ ve $f_1, f_2 \in L^1(X)$ ise $f \in L^1(X)$ dir.

Teorem 3.4.16. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $E \in \mathfrak{A}$ ve $\{fn\}$, negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Buna göre,

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} fn d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E fn d\mu$$

olur[Rudin,1976].

Teorem 3.4.17.(Fatou Lemması)

$(X,\mathfrak{A},\mu)$ bir ölçü uzayı, $E \in \mathfrak{A}$ ve $\{f_n\}$, negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Buna göre,

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

olur[Rudin,1976].

Teorem 3.4.18.(Lebesgue Temel yakınsaklık Teoremi)

$(X,\mathfrak{A},\mu)$ bir ölçü uzayı, $E \in \mathfrak{A}$ ve $\{f_n\}$,ölçülebilir fonksiyonlar dizisi ve $x \in E$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olsun.

Eğer, $n = 1,2,3,\ldots$ ve $x \in E$ olmak üzere, $|f_n(x)| \leq g(x)$ eşitsizliğini sağlayan bir $g(x)$ fonksiyonu E üzerinde $g(x) \in L^1(X)$ olcak şekilde tanımlı ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

olur[Rudin,1976].

Lebesgu integralini bitirmeden önce Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar ile Riemann integrallenebilir fonksiyonları karşılaştırmakta yarar vardır:

$*$ f, bir $(a,b) \subset \mathbb{R}$ aralığında Riemann integrallenebilir ise bu aralıkta Lebesgue integrallenebilirdir. Bu önermenin tersi genel olarak doğru değildir.

$*$ Riemann integrallenebilir fonksiyonlar oldukça katı süreklilik koşulları altında tanımlanır; oysa ki Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar süreklilik yerine ölçüm koşulları ile tanımlandıklarından bu durum Lebesgue integralinin çok daha geniş fonksiyon sınıflarına uygulanmasına imkan sağlar.

$*$Riemann integrali sadece sınırlı fonksiyonlar için tanımlanabilir; ancak Lebesgue integrali hem sınırlı hem de sınırsız fonksiyonlar için tanımlanabilir.

$*$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların Riemann integrallenebilir fonksiyonlara en önemli üstünlüğü, integral işlemi altında limite geçerken ortaya çıkar. Genelde Riemann integrallenebilir fonksiyonlar, integral altında limit durumuna geçildiğinde integrallenebilirlik özelliğini yitirir(süreklilik kaybolur), oysa ki Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlarda asla böyle bir durum ortaya çıkmaz çünkü ölçülebilir fonksiyonların limiti daima ölçülebilirdir(Lebesgue yakınsaklık teoremi bunu ispatlar).

Aşağıdaki teorem Lebesgue ve Riemann integralleri arasındaki ilişkiyi gösterir. Karışıkılğı önlemek için

Riemann integralini

$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)dx$ biçiminde, Lebesgue integralini de

$$(\mathcal{L})\int_a^b f(x)dx$$ şeklinde göstereceğiz.

Teorem 3.4.19.

(a) Eğer f, $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilir ise bu arlıkta Lebesgue integrallenebilirdir ve

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)dx = (\mathcal{L})\int_a^b f(x)dx\left((\mathcal{L})\int_a^b f(x)dx = \int_E fd\mu^*, E = [a,b] \text{ ve } \mu^* \text{ Lebesgue ölçüsü} \right)$$

(b) f, $[a,b]$ aralığında sınırlı olsun.f, $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilirdir ancak va ancak f, $[a,b]$ aralığında h.h.h yerde süreklidir[Rudin,1976].

4.BÖLÜM

LEBESGUE VE SOBOLEV UZAYLARI

Bu bölümde, bundan sonraki bölümlerde işlenecek olan konuları yakından ilgilendiren Lebesgue uzayı ve bu uzayda kullanılan kavram, notasyon ve teoremlere yer verilecek; ayrıca Sobolev uzayı ve gömme teoremleri(embedding theorems) hakkında bilgi verilecektir.

4.1. $L^p(\Omega)$Lebesgue Uzayı

Tanım 4.1.1. $(X,\mathfrak{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere; $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı veya Ω bölgesinde p.kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{p,\Omega} = \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

şeklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_p$ gösterimine f fonksiyonunun L^p-**normu** denir[Rudin,1987].

Ω Bölgesinde $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa f fonksiyonuna **hemen hemen sınırlıdır** denir. Böyle M sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ 'nin Ω bölgesindeki **esas supremumu**(esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

şeklinde gösterilir. Ω bölgesindeki hemen hemen sınırlı f fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ şeklinde gösterilir. Buna göre bir f fonksiyonunun L^∞-normu

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

olarak tanımlanır.

Belirtmekte yarar var ki $L^p(\Omega)$ uzayı $p = 2$ değeri için

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\, g\, dx$$

şeklinde tanımlı iç çarpım altında Hilbert uzayı olur.

Teorem 4.1.2.(Young Eşitsizliği)
$1 < p,q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\forall a,b > 0$ için

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur[Liskevich,1998].

ispat: $\varphi(t)$ fonksiyonunu $\varphi(t) := \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - 1,\ (t \ge 0)$ şeklinde seçelim. $\varphi(t)$, minimum değerini $t = 1$ için alsın. Bu durumda

$$t \le \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q}$$ yazılabilir.

Eğer $t = ab^{-\frac{1}{p-1}}$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitsizlikten

$$ab^{-\frac{1}{p-1}} \le \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q}$$

elde edilir ki burada gerekli işlemler yapılırsa istenen sonuç çıkar.□

Teorem 4.1.3. $p \ge 1$ ve $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$|a+b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

olur[Liskevich,1998].

Teorem 4.1.4.(Hölder Eşitsizliği)
$1 < p,q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L^p$, g$\in L^q$ ise fg$\in L^1$ olur ve

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır[Liskevich,1998].

ispat: $\|f\|_p > 0$ ve $\|g\|_q > 0$ durumlarını incelemek yeterlidir. Buna göre,

$$a = |f(x)|\,\|f\|_p^{-1} \text{ ve } b = |g(x)|\,\|g\|_q^{-1}$$

olarak seçelim. Young eşitsizliği uygulanırasa

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \le \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}$$

çıkar, bu son eşitsizliğe integral işlemi uygulanırsa

$$\|f\|_p^{-1}\|g\|_q^{-1} \int_\Omega |f(x)g(x)|\,d\mu \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,d\mu \le \|f\|_p\|g\|_q$$

elde edilir.□

Hölder eşitsizliği özel olarak $p = 2$ değeri için

$$\int_{\Omega} |f(x)\mathrm{g}(x)|\, d\mu \leq \|f\|_2 \|\mathrm{g}\|_2$$

şeklindeki **Schwarz eşitsizliği**'ne dönüşür.

Teorem 4.1.5.(Minkowski Eşitsizliği)

Eğer $f, \mathrm{g} \in L^p$ ve $1 \leq p$ ise $f + \mathrm{g} \in L^p$ olur ve

$$\|f + \mathrm{g}\|_p \leq \|f\|_p + \|\mathrm{g}\|_p$$

eşitsizliği sağlanır[Liskevich,1998].

ispat: $f, \mathrm{g} \in L^p$ ise

$$|f(x) + \mathrm{g}(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq \left(2.\max\{|f|, |\mathrm{g}|\}\right)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

olacağından $|f(x) + \mathrm{g}(x)|^p$ integrallenebilir ve dolaysıyla $f + \mathrm{g} \in L^p$ olur. Şimdi eşitsizliği ispatlayalım:

$p = 1$ için ispat aşikardır. $p > 1$ olsun.

$$|f(x) + \mathrm{g}(x)|^p = |f(x) + \mathrm{g}(x)|\,|f(x) + \mathrm{g}(x)|^{p-1} \leq |f(x)|\,|f(x) + \mathrm{g}(x)|^{p-1} + \mathrm{g}(x)|f(x) + \mathrm{g}(x)|^{p-1}$$

$$\int_{\Omega} |f(x) + \mathrm{g}(x)|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |f(x)|\,|f(x) + \mathrm{g}(x)|^{p-1} d\mu + \int_{\Omega} \mathrm{g}(x)|f(x) + \mathrm{g}(x)|^{p-1} d\mu$$

yazılabilir. $f + \mathrm{g} \in L^p$ olduğundan $|f + \mathrm{g}|^p \in L^1$ olur. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere buradan $p = (p-1)q$ olacağından $|f + \mathrm{g}|^{p-1} \in L^q$ olur. Buna göre Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_{\Omega} |f(x) + \mathrm{g}(x)|^p d\mu \leq \|f\|_p \left(\int_{\Omega} |f(x) + \mathrm{g}(x)|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}$$

$$+ \|\mathrm{g}\|_p \left(\int_{\Omega} |f(x) + \mathrm{g}(x)|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}$$

$$\| f + g \|_p^p \leq \left(\|f\|_p + \|\mathrm{g}\|_p \right) \| f + g \|_p^{p/q}$$

elde edilir,şimdi son eşitsizlik $\| f + g \|_p^{p/q}$ ile bölünür ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p - \frac{p}{q} = 1$ olduğu gözönünde tutulursa

$$\| f + g \|_p \leq \|f\|_p + \|\mathrm{g}\|_p$$

çıkar.□

Hölder teoremi ve Lebesgue integralinin özellikleri gözönünde bulundurulduğunda $L^p,\ 1 \leq p < \infty$, nin bir vektör uzayı olduğu görülür.Bununla birlikte $\|f\|_p$; L^p üzerinde bir normdur ve

(a) Tanımdan $\|f\|_p \geq 0$

(b) $\|f\|_p = 0$ ise hemen hemen heryerde $f(x) = 0$

(c) $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$

(d) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

özellikleri sağlandığından $L^p,\ 1 \leq p < \infty$, bir normlu uzaydır.

Teorem 4.1.6. $L^p,\ 1 \leq p < \infty$, uzayı

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolaysıyla Banach uzayıdır[Liskevich,1998].

ispat: (f_n), L^p deki fonksiyonların bir dizisi ve $\sum \|f_k\|_p < \infty$ olsun.

$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k - f \right\| = 0$ olacak şekilde bir $f \in L^p$ olduğu gösterilirse teorem ispatlanır.

Buna göre;

$\phi = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right)^p$ şeklinde tanımlanan $\phi : \Omega \subset X \to [0,\infty]$ fonksiyonunu

seçelim.Monoton yakınsaklık teoremi ve Minkowski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi d\mu &= \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right)^p d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k| \right)^p d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k| \right)^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} |f_k| \right\|_p^p \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \right)^p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \right)^p < \infty
\end{aligned}$$

olur ki bu ϕ 'nin integrallenebilir olduğunu gösterir. Bu durumda h.h.h x için ϕ sonlu ve dolaysıyla h.h.h x için $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ serisi yakınsak olur. Ayrıca, $\mathbb{R}$ tam olduğundan h.h.h x için $\sum f_k$ serisi yakınsaktır. Şimdi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$f = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k & ,\phi < \infty \\ 0 & ,\phi = \infty \end{cases}$$

f ölçülebilirdir ve $|f|^p \leq \phi$ dir. Dolaysıyla $|f|^p \in L_1$ ve buradan $f \in L^p$ olur. Bu durumda h.h.h x için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right| = 0$$

ve ayrıca

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right|^p = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right|^p \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k|\right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|\right)^p = \phi$$

elde edilir. Şimdi $(\psi_n) = \left(\left|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right|^p\right)$ fonksiyon dizisine Lebesgue yakınsaklık teoremini uygulayalım;

$$0 = \int_{\Omega} \lim \psi_n d\mu = \lim \int_{\Omega} \psi_n d\mu = \lim \int_{\Omega} \left|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right|^p d\mu = \lim\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right\|_p\right)^p$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right\| = 0$$

şeklinde istenen sonuç elde edilir.□

Tanım 4.1.7. f_n ve f fonksiyonları L^p uzayının elemanları olmak üzere;

(f_n) dizisi f fonksiyonuna p.mertebeden ortalama yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall\epsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_p < \epsilon.$

Bu yakınsaklık çeşidine L^p **de yakınsaklık** da denir. Burada $p \geq 1$ olup,

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

dir. Buna göre,

(f_n) dizisi f fonksiyonuna L^p de yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0.$

Tanım 4.1.8. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, f_n ve f fonksiyonları X üzerinde tanımlı, reel değerli ve $\mathfrak{A}$ –ölçülebilir fonksiyonlar olsun.

(f_n) dizisi f fonksiyonuna **ölçüsel yakınsaktır** $\Leftrightarrow$ $\forall\epsilon > 0,$

$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0.$

Bu tanıma göre, verilen bir dizinin yakınsaklığı tanımlanan ölçüye bağlıdır. Ölçü değişince yakınsaklık da değişebilir.

Eğer (f_n) dizisi f fonksiyonuna μ ölçüsüne göre yakınsak ise bu, $(f_n) \xrightarrow{\mu} f$ biçiminde gösterilir.

Teorem 4.1.9. (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise ölçüsel yakınsaktır.

Teorem 4.1.10. (f_n) dizisi f fonksiyonuna $p.$mertebeden ortalama yakınsak ise ölçüsel yakınsaktır.

Teorem 4.1.11. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, f_n ve f fonksiyonları reel değerli ve ölçülebilir fonksiyonlar olsun (f_n) dizisinin f'ye h.h.h yerde yakınsak olan bir alt dizisi vardır.

4.2. W$^{m,p}(\Omega)$ Sobolev Uzayı

Tanım 4.2.1. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ negatif olmayan α_j 'lerin n –bileşenlisi olmak üzere, α 'ya **çoklu-indis** denir ve $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ olarak tanımlanır. Buna göre $1 \le j \le n$ için $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere $D^\alpha = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \ldots D^{\alpha_n}$ olup, $D^\alpha u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u,$ ifadesi $|\alpha|.$ mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Burada $D^\alpha D^\beta u = D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ olduğu açıktır.

Tanım 4.2.2. Bir $G \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kapanışı $\overline{G}$ dir. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olmak üzere, $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ 'in kompakt bir alt kümesi ise bu durum $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. u, G de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, u fonksiyonunun **desteği** supp$u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$ şeklinde tanımlanır. Eğer supp$u \subset\subset \Omega$ ise, u fonksiyonu Ω da **kompakt desteğe** sahiptir denir.

Tanım 4.2.3. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Negatif olmayan herhangi m tamsayısı için Ω bölgesinde $|\alpha| \le m$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha u$ kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlardan oluşan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Ω, açık bir bölge olduğundan $C^m(\Omega)$ deki fonksiyonların sınırlı olması gerekmez; ancak aynı tanımda Ω yerine $\overline{\Omega}$ seçilirse $C^m(\overline{\Omega})$, $|\alpha| \le m$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha u$ kısmi türevleri sürekli olan sınırlı fonksiyonlardan oluşan vektör uzayını gösterir. Ayrıca $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ olmak üzere, $C_0(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki tüm fonksiyonlardan oluşur. $C^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına **test fonksiyonu** veya **düzgün fonksiyon** denir. $C^\infty(\Omega)$ uzayının Ω bölgesindeki kompakt desteğe sahip fonksiyonlarından oluşan uzay ise $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.4. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olmak üzere, Ω bölgesinin her bir kompakt K alt kümesinde integrallenebilen ölçülebilir bütün fonksiyonların uzayı $L^1_{loc}(\Omega)$ ile gösterilir ve

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{u : u \in L^1(K), \forall K \subset \Omega, K \text{ kompakt}\right\}$$

şeklinde tanımlanır(Bu tür fonksiyonlara lokal integrallenebilir fonksiyonlar da denir).

Tanım 4.2.5. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu ve α çoklu-indislisi verilsin. Her $\phi \in C^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \phi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \phi dx$$

eşitliğini sağlayan $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun **zayıf türevi**(veya genelleştirilmiş türevi) denir ve $D^\alpha u = v$ ile gösterilir.

Eğer $u \in C^m(\Omega)$ ise u fonksiyonunun zayıf türevi daima vardır ve kuvvetli türev(klasik türev) ile aynıdır.

Tanım 4.2.6. Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, m negatif olmayan bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere; Ω bölgesinde $|\alpha| \le m.$ mertebeye kadar tüm türevleri $p.$ kuvvetten integrallenebilen $u \in L^p(\Omega)$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya **Sobolev uzayı** denir ve $W^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir ve küme olarak

$$W^{m,p}(\Omega) = W^m_p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m\}$$

şeklinde tanımlanır. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p}, 1 \le p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_\infty$$

normları ile verilir.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.7. $W^{m,p}(\Omega)$ bir Banach uzayıdır[Adams,1975].

Teorem 4.2.8. Eğer $1 \le p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir ve $1 < p < \infty$ ise aynı zamanda yansımalıdır[Adams,1975].

Teorem 4.2.9.(Sobolev Eşitsizliği)

Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Eğer $1 \le p < \infty$, $mp < n$ ve $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise

$$\|u\|_{p^*} \le C\|u\|_{m,p}$$

olacak şekilde bir $C(n,m,p)$ sabiti vardır[Adams,1975]

Tanım 4.2.10. V ve W, $V \subseteq W$ olacak şekilde iki Banach uzayı olsun. Eğer, $\forall v \in V$ için

$$\|v\|_W \leq c\|v\|_V$$

olacak şekilde bir c sabiti varsa bu durumda V uzayı W uzayına sürekli biçimde **gömülür** denir ve bu durum $V \hookrightarrow W$ ile gösterilir. Eğer $V \hookrightarrow W$ ise, V deki fonsiyonlar W deki geriye kalan fonksiyonlardan daha düzgün(smooth)olur.

Şunu belirtmekte yarar var ki $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ de yoğun olduğundan, $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ eşitliği yazılabilir. Bununla birlikte herhangi bir m pozitif sayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri vardır.

Tanım 4.2.11. $\mathbb{R}^n$ de $Br_1(x)$ ve x noktasını içermeyen $Br_2(y)$ açık yuvarlarını göz önüne alalım.

$$K_x = Br_1(x) \cap \left\{x + \lambda(z - x) \,:\, z \in Br_2(y),\ \lambda > 0\right\}$$

kümesine, tepe noktası x olan **sonlu koni** denir. Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinin her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir K sonlu konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa bu durumda Ω bölgesinin **koni özelliği** vardır denir[Çekiç,2005].

Teorem 4.2.12.(Sobolev Gömme Teoremi)

Ω, $\mathbb{R}^n$ de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler vardır[Adams,1975].

(a) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^* = \frac{np}{n - mp}$$

ya da özel olarak

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^* = \frac{np}{n - mp}$$

elde edilir.

(b) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

olur.

Üstelik $p = 1$ alınırsa

$$W^{j+n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

(c) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

olur.

Teorem 4.2.13.(Rellich-KondrachovTeoremi)

Ω, $\mathbb{R}^n$ de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler vardır[Adams,1975].

(a) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q < q^*$$

(b) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q \leq \infty$$

(c) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega),$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0), \qquad 1 \leq q \leq \infty$$

olur.

Tanım 4.2.14. f ve g fonksiyonları için

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

şeklinde tanımlanan integrallenebilir ifadeye f ve g fonksiyonlarının **Konvolüsyonu** denir ve $f *$g ile gösterilir. f fonksiyonunun bir K çekirdeği ile konvolüsyonu

$$f * K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x-y)dy$$

şeklinde tanımlanır.

Konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen tekilliği varsa **singüler integral**, zayıf(integrallenebilen) tekilliği varsa **potansiyel** adı verilir[Adams,1975].

Tanım 4.2.15. $0 < \alpha < n$ olmak üzere,

$$I_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$$

çekirdek fonksiyonuna **Riesz çekirdek fonksiyonu** denir. Bu fonksiyonun koordinat başlangıcında zayıf tekilliği vardır. Buna göre bir fonksiyonun **Riesz potansiyeli** konvolüsyon olarak

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

şeklinde tanımlanır[Çekiç,2005].

Teorem 4.2.16.(Young Teoremi)
$1 \le p < \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve g$\in L^p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

ve

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

konvolüsyonları iyi tanımlı ve h.h.h $x \in \mathbb{R}^n$ için eşittirler. Üstelik
$f *$g$\in L^p(\mathbb{R}^n)$ olur ve

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır[Adams ve ark.2003].

Teorem 4.2.17. Eğer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve g$\in L^q(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $f *$g$\in L^r(\mathbb{R}^n)$ olur ve ayrıca

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 4.2.18. $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonunun **Hardy-Littlewood maximal** fonksiyonu
$Mf : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ olmak üzere,

$$Mf(x) = M_0 f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

şeklinde tanımlanır.
$0 \le \alpha < n$ olmak üzere, lokal integrallenebilir bir $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonunun **Kesirli maximal** fonksiyonu ise

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{r^\alpha}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

olarak tanımlanır[Çekiç,2005].

5.BÖLÜM

HARDY EŞİTSİZLİKLERİ VE HARDY OPERATÖRLERİ

Bu bölümde bu tezin temel çıkış noktası olan Hardy eşitsizliği(Hardy tipli eşitsizlikler) Hardy operatörleri ve ilgili konular, tarihsel gelişim süreci içersinde verilerek, kısa geçmişine karşın çok geniş bir literatüre sahip olan konunun özlü ve anlaşılır bir şekilde anlatılması amaçlanmıştır.

5.1. Hardy Eşitsizliği'nin Klasik Formu

Tanım 5.1.1. ω fonksiyonu h.h.h $x \in \mathbb{R}^n$ için $\omega(x) > 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda ω fonksiyonuna bir **ağırlık fonksiyonu** denir. Özel olarak, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ için

$$d(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\omega(x) = (d(x))^{\alpha}$$

ağırlık fonksiyonuna **kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu** denir.

Eğer $\omega(2x) \leq C_1\omega(x)$ olacak şekilde bir $1 < C_1 < \infty$ sayısı varsa ω ağırlık fonksiyonuna **çift katlı ağırlık fonksiyonu**(D) ve eğer $\omega(x) \leq C_2\omega(2x)$ olacak şekilde bir $0 < C_2 < 1$ sayısı varsa ω ağırlık fonksiyonuna **ters çift katlı ağırlık fonksiyonu**(RD) adı verilir.

Tanım 5.1.2.(A_p Sınıfı)

$1 < p < \infty$ ve $\mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ ağırlık fonksiyonlarının kümesi olsun. $m_N(Q)$, Q küpünün n –boyutlu Lebesgue ölçüsü ve supremum, kenarları eksenlere paralel olan tüm $Q \subset \mathbb{R}^N$ küpleri üzerinden alınmak üzere,

$$\sup_Q \left(\frac{1}{m_N(Q)} \int_Q \omega(x)dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{m_N(Q)} \int_Q \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} < \infty$$

koşulunu sağlayan $\omega \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ ağırlık fonsiyonlarının oluşturduğu sınıfa A_p **sınıfı** veya **Muckenhoupt sınıfı** denir ve $A_p = A_p(\mathbb{R}^N)$ ile gösterilir. Bu tanım ağırlık fonksiyonu çiftleri için aşağıdaki şekilde genişletilebilir;

$y \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$Q = Q(y,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x_i - y_i| < r, i = 1,2,\ldots,N \right\}$$

şeklinde y merkezli açık küpü tanımlayalım. Buna göre, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ olmak üzere,

$\upsilon, \omega \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$, ağırlık fonksiyonları için

$$\left(\frac{1}{m_N(Q)} \int\limits_{Q \cap \Omega} \omega(x) dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{m_N(Q)} \int\limits_{Q \cap \Omega} \upsilon(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} \leq C, \; p' = \frac{p}{p-1}$$

olacak şekilde bir $0 < C < \infty$ sabiti varsa $(\upsilon, \omega) \in A_p(\Omega)$ olur ve bu durumda $\upsilon, \omega \in W(\mathbb{R}^n)$ **ağırlık fonksiyonları** $A_p(\Omega)$ **sınıfındandır** denir.

Tanım 5.1.3. ω bir ağırlık fonksiyonu, $0 < p \leq \infty$ ve Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. Bu durumda Ω bölgesinde

$$\int\limits_{\Omega} |u|^p \omega d\mu < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların oluşturduğu uzaya **Ağırlıklı Lebesgue Uzayı** denir ve $L^p_\omega(\Omega) = L^p(\omega)$ ile gösterilir. $L^p_\omega(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{p,\omega} := \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \omega d\mu \right)^{1/p} < \infty, 0 < p < \infty$$

$$\|u\|_{\infty,\omega} := ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty$$

normları ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 5.1.4. Hardy eşitsizliği ilk olarak G.H.Hardy tarafından yayımlanan bir makalede[Hardy,1920] ispatsız olarak

$a > 0,\ f(x) \geq 0,\ p > 1$ ve $\int\limits_a^\infty |f(x)|^p dx < \infty$ olmak üzere,

$$\int\limits_a^\infty \left(\frac{1}{x} \int\limits_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int\limits_a^\infty |f(x)|^p dx \tag{5.1.1}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Aslında kendisinin de belirttiği üzere, G.H.Hardy'nin asıl amacı

$$\sum_{m,n=1}^\infty \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_{m=1}^\infty a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^\infty b_n^2 \right)^{1/2} \tag{5.1.2}$$

şeklindeki Hilbert eşitsizliği için yeni ve daha basit bir ispat bulmaktı. Ayrıca bir diğer makalesinde[Hardy,1925] G.H.Hardy $(5.1.1)$ eşitsizliğinin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \ (a_n \geq 0, p > 1) \tag{5.1.3}$$

şeklindeki ayrık versiyonunu vermiştir. Yine aynı makalede G.H.Hardy $(5.1.1)$ eşitsizliğini;

$f(x) \geq 0,\ p > 1,\ f$ herhangi bir sonlu $(0,X)$ aralığında, f^p ise $(0,\infty)$ aralığında integrallenebilir olmak üzere,

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} |f(x)|^p dx \tag{5.1.4}$$

şeklinde vererek ispatladı. Bu son eşitsizlik **klasik Hardy eşitsizliği** olarak kabul edilir. Bu eşitsizlik daha sonraları çok geniş bir şekilde araştırılmış, incelenmiş ve daha genel eşitsizliklerin elde edilmesinde örnek model olarak kullanılmıştır.

G.H.Hardy'nin $(5.1.4)$ eşitsizliğini ispatlamasından çok kısa bir süre sonra bu eşitsizlik değiştirilerek ilk **ağırlıklı Hardy eşitsizliği**,

$p > 1,\ \epsilon < p-1$ ve f negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt\right)^p x^{\epsilon} dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\epsilon}\right)^p \int_0^{\infty} |f(x)|^p x^{\epsilon} dx \tag{5.1.5}$$

şeklinde verilmiştir[Hardy ve ark.1952]. Bu eşitsizliğin dual formu

$p > 1,\ \epsilon > p-1$ ve f negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_x^{\infty} f(t)dt\right)^p x^{\epsilon} dx \leq \left(\frac{p}{\epsilon+1-p}\right)^p \int_0^{\infty} |f(x)|^p x^{\epsilon} dx \tag{5.1.6}$$

şeklinde verilir ki bu eşitsizlik $(5.1.5)$ eşitsizliğinden kolaylıkla elde edilebilir[Hardy ve ark.1952].

5.2. Hardy Eşitsizliği'nin Modern Formu

Tanım 5.2.1. Son yıllarda yapılan çalışmalarla birlikte $(5.1.5)$ eşitsizliği genişletilerek **Hardy Eşitsizliğinin modern hali** olan aşağıdaki forma dönüştürülmüştür;

$$\left(\int_a^{b}\left(\int_a^{x} f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^{b} |f(x)|^p \upsilon(x)dx\right)^{1/p} \tag{5.2.1}$$

burada, $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$, u ve υ fonksiyonları (a,b) aralığında birer ağırlık fonksiyonu, $0 < q \leq \infty$ ve $1 \leq p \leq \infty$ dir. Bu eşitsizliğin negatif olmayan ölçülebilir tüm fonksiyonlar için sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul

$1 < p \leq q < \infty$ için($p^{\prime} = \frac{p}{p-1}$)

$$A := \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_a^x \upsilon(t)^{1-p^{\prime}} dt \right)^{1/p^{\prime}} < \infty \qquad (5.2.2)$$

$0 < q < p < \infty,\ q \neq 1,\ 1 < p < \infty$ için($\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$)

$$A := \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{r/q} \left(\int_a^x \upsilon(t)^{1-p^{\prime}} dt \right)^{r/q^{\prime}} \upsilon(x)^{1-p^{\prime}} dx \right)^{1/r} < \infty \qquad (5.2.3)$$

olmasıdır[Opic ve ark.1990].

Benzer şekilde $(5.2.1)$ ile verilen Hardy Eşitsizliği için **dual eşitsizlik**

$$\left(\int_a^b \left(\int_x^b f(t)dt \right)^{q} u(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b |f(x)|^p \upsilon(x)dx \right)^{1/p} \qquad (5.2.4)$$

şeklinde olup, bu eşitsizliğin negatif olmayan ölçülebilir tüm fonksiyonlar için sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul

$1 < p \leq q < \infty$ için

$$\widetilde{A} := \sup_{a<x<b} \left(\int_a^x u(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_x^b \upsilon(t)^{1-p^{\prime}} dt \right)^{1/p^{\prime}} < \infty \qquad (5.2.5)$$

$0 < q < p < \infty,\ q \neq 1,\ 1 < p < \infty$ için

$$\widetilde{A} := \left(\int_a^b \left(\int_a^x u(t)dt \right)^{r/q} \left(\int_x^b \upsilon(t)^{1-p^{\prime}} dt \right)^{r/q^{\prime}} \upsilon(x)^{1-p^{\prime}} dx \right)^{1/r} < \infty \qquad (5.2.6)$$

olmasıdır[Opic ve ark.1990].

Hardy eşitsizlikleri için en önemli sorunlardan biri “en iyi sabit” in ne olması gerektiğidir. Buna göre $(5.2.1)$ eşitsizliği için en iyi C sabiti

$p \leq q$ için $\qquad A \leq Ck(p,q)A$

$q < p$ için $\qquad q^{1/q}\left(\frac{p^{\prime} q}{r} \right)^{1/q^{\prime}} A \leq C \leq q^{1/q}\left(p^{\prime}\right)^{1/q^{\prime}} A$

olarak kabul edilir. Buradaki $k(p,q)$ sabiti

$$k(p,q) = p^{1/q}\left(p^{\prime}\right)^{1/p^{\prime}}$$

$$k(p,q) = q^{1/q}\left(q'\right)^{1/p'}$$

$$k(p,q) = \left(1+\frac{q}{p'}\right)^{1/q}\left(1+\frac{p'}{q}\right)^{1/p'}$$

ifadelerinden herhangi biri ile gösterilebilir[Opic ve ark.1990]. Ayrıca şunu belirtmekte yarar vardır ki Hardy eşitsizliklerinde elde edilen en iyi C sabitleri ile $(5.2.2)$ veya $(5.2.3)$ de verilen A değeri karşılaştırılabilirdir yani $A \approx C$ dir. Ve benzer şekilde yine bu C sabitleri ile $(5.2.5)$ veya $(5.2.6)$ da verilen $\widetilde{A}$ değeri karşılaştırılabilirdir yani $\widetilde{A} \approx C$ dir.

5.3. Hardy Operatörü

Tanım 5.3.1. $f = f(t) \geq 0,\ t \in (a,b)$ ve $a < x < b$ (veya $0 < x < \infty$ alınabilir) olmak üzere,

$$(Hf)(x) := \int_a^x f(t)dt \tag{5.3.1}$$

şeklinde tanımlı H dönüşümüne (**klasik**)**Hardy operatörü** denir. Bu eşitlik $(5.2.1)$ eşitsizliğinde kullanılırsa $(5.2.1)$ eşitsizliği

$$\|Hf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,\upsilon} \tag{5.3.2}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu durumda $(5.3.2)$ 'nin ölçülebilir $f \geq 0$ fonksiyonları için sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $A < \infty$ olmasıdır (buradaki A, $(5.2.2)$ veya $(5.2.3)$ da verildiği gibidir). H operatörünün eşleniği olan $\widetilde{H}$ operatörü

$$(\widetilde{H}f)(x) := \int_x^b f(t)dt \tag{5.3.3}$$

şeklinde kolaylıkla tanımlanabilir. Buna göre $(5.2.1)$ eşitsizliğine karşılık gelen eşlenik Hardy eşitsizliği

$$\left\|\widetilde{H}f\right\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,\upsilon} \tag{5.3.4}$$

şeklinde yeniden yazılabilir ve $(5.3.4)$ ün ölçülebilir $f \geq 0$ fonksiyonları için sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $\widetilde{A} < \infty$ olmasıdır(buradaki $\widetilde{A}$, $(5.2.5)$ veya $(5.2.6)$ da verildiği gibidir).

Burada H operatöründen eşleniği olan $\widetilde{H}$ operatörüne ve karşılık gelen $A < \infty$ ile $\widetilde{A} < \infty$ koşullarına geçiş, değişken değiştirme yöntemleri ile kolaylıla gösterilebilir. Burada asıl önemli olan şey yeni oluşturulan $(5.3.2)$ ve $(5.3.4)$ eşitsizliklerinin

$$\|Tf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,\upsilon} \tag{5.3.5}$$

şeklindeki **Genel ağırlıklı norm eşitsizliğinin** ilk modelleri olmasıdır. Burada T genel bir operatörü olup, $(5.3.5)$ eşitsizliği T operatörünün $L^p(\upsilon)$ yi $L^q(u)$ ya sürekli bir şekilde eşlediğini($T : L^p(v) \to L^q(u)$) veya bir başka deyişle T operatörünün sınırlı olduğunu gösterir.

Teorem 5.3.2. $1 < p \le q < \infty$ olmak üzere,

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b |f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliği her $f \ge 0$ fonksiyonu için sağlanır[Kufner ve ark.2003] ancak ve ancak

$$A = A(a,b;u,v) := \sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x v(t)^{1-p'}dt\right)^{1/p'} < \infty.$$

Tanım 5.3.3. $L^p(\omega)$(veya $L^p_\omega(\Omega)$) ağırlıklı Lebesgue uzayında duallik $1 < p < \infty$ olmak üzere,

$$\langle g,f\rangle = \int_a^b g(x)f(x)dx \ , f \in L^p(\omega)$$

iç çarpımı ile tanımlanır. Buna göre $L^p(\omega)$ **'nin dual uzayı** $L^{p'}(\widehat{\omega})$(veya$(L^p(\omega))^*$)olarak tanımlanır, burada $p' = \dfrac{p}{p-1}$ ve $\widehat{\omega} = \omega^{1-p'}$ dir. Eğer özel olarak

$$\|g\|_{p',\omega^{1-p'}} = \sup_{\|f\|_{p,\omega}=1} \cdot |\langle g,f\rangle|$$

seçilirse $(L^p(\omega))^* = L^{p'}(\omega^{1-p'})$ yazılabilir. Hölder eşitsizliği uygulanırsa bu kolaylıkla görülebilir. Bununla birlikte Hardy operatörleri H ve $\widetilde{H}$, karşılıklı eşleniktirler, yani daha açık olarak, $1 < p,q < \infty$ olmak üzere, eğer $H : L^p(v) \to L^q(u)$ ise

$$(H)^* = \widetilde{H}$$

ve

$$\widetilde{H} : L^{q'}(u^{1-q'}) \to L^{p'}(v^{1-p'})$$

olur. Gerçekten Fubini teoreminden

$$\langle g, Hf\rangle = \int_a^b g(x)\int_a^x f(t)dtdx = \int_a^b f(t)\int_t^b g(t)dxdt = \langle f,\widetilde{H}g\rangle$$

olduğu çıkar.

5.4. Hardy Eşitsizliği'nin Diferansiyel Formu

Tanım 5.4.1. $AC^{k-1}(a,b) = AC^{k-1},\ k \in \mathbb{N},\ (a,b)$ üzerinde tanımlı $(k-1)$.mertebeye kadar mutlak sürekli türeve sahip fonksiyonlar sınıfı olsun.

g$\in AC^0$ fonksiyonları $g(a) = 0$ veya $g(b) = 0$ koşullarından birini sağlamak üzere;

$$\left(\int_a^b |g(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b \left|g'(x)\right|^p \upsilon(x)dx\right)^{1/p} \tag{5.4.1}$$

eşitsizliği, **Hardy eşitsizliği'nin diferansiyel formu** olarak adlandırılır. Ayrıca $W_L^{1,p}$ ve $W_R^{1,p}$, $g(a) = 0$ veya $g(b) = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan ve $\left\|g'\right\|_{p,\upsilon} < \infty$ olan g$\in AC^0$ fonksiyonlarının kümelerini gösterir. Burada $W_L^{1,p}$ gösterimindeki L alt indisi, fonksiyonun (a,b) aralığının sol bitiş noktasında sıfır olması(vanishes) yani $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ olması anlamına gelir. Benzer olarak $W_R^{1,p}$gösterimindeki R alt indisi,fonksiyonun (a,b) aralığının sağ bitiş noktasında sıfır olması(vanishes) yani $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0$ olması anlamına gelir.

Bu durumda $W_L^{1,p}(\upsilon)$ ve $W_R^{1,p}(\upsilon)$ kümeleri $\left\|g'\right\|_{p,\upsilon}$ normu ile bir normlu uzay olur. Ayrıca $(5.4.1)$ eşitsizliği; g$\in W_L^{1,p}(\upsilon)$ için $(5.2.1)$ ile verilen Hardy eşitsizliğine, g$\in W_R^{1,p}(\upsilon)$ için ise $(5.2.4)$ ile verilen Hardy eşitsizliğine denk olur. Bunun için

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt (= (Hf)(x))$$

ve/veya

$$g(x) = \int_x^b f(t)dt (= (\widetilde{H}f)(x))$$

almak yeterlidir[Opic ve ark.1990].

Sonuç olarak, $(5.4.1)$ ile verilen Hardy eşitsizliği

$$\|g\|_{q,u} \leq C\left\|g'\right\|_{p,\upsilon}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu eşitsizlik

$$W_L^{1,p}(\upsilon) \hookrightarrow L^q(u) \tag{5.4.2}$$

ve/veya

$$W_R^{1,p}(v) \hookrightarrow L^q(u) \tag{5.4.3}$$

şeklinde sürekli bir gömülme ifade eder. Burada $(5.4.2)$ 'nin sağlanması için gerek ve yeter koşul $(5.2.2)$ veya $(5.2.3)$'ün sağlanmasıdır. Benzer olarak $(5.4.3)$ 'ün sağlanması için gerek ve yeter koşul $(5.2.5)$ veya $(5.2.6)$ 'nın sağlanmasıdır.

Hardy eşitsizlikleri yazılırken ağırlık fonksiyonları $\{u,v\}$ ve aralık $\{(a,b)\}$ vurgulanmak istendiğinde $(5.2.2)$ veya $(5.2.3)$ te verilen A yerine $A = A(a,b;u,v)$ gösterimi ve $(5.2.5)$ veya $(5.2.6)$ ile verilen $\widetilde{A}$ yerine $\widetilde{A} = \widetilde{A}(a,b;u,v)$ gösterimi tercih edilir. Ayrıca bazı yazarlar ağırlıklı Lebesgue uzayları $L^p(v)$ den $L^q(u)$ ya tanımlı $(5.3.1)$ ile verilen Hardy operatörü yerine Klasik(ağırlıksız) Lebesgu uzayları L^p den L^q ya tanımlı değiştirilmiş(modified) bir operatör olan

$$(\mathcal{H}f)(x) := u(x)\int_a^x f(t)v(t)dt \tag{5.4.4}$$

$\mathcal{H}$ dönüşümünü kullanır(u,v negatif olmayan fonksiyonlardır). Buna göre,

$$\|\mathcal{H}f\|_q \le C\|f\|_p$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul

$1 < p \le q \le \infty$ için

$$\sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u^q dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x v(t)^{p'}dt\right)^{1/p'} < \infty$$

$p > q,\ \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ için

$$\left(\int_a^b\left(\int_x^b u^q dt\right)^{r/q}\left(\int_a^x v(t)^{p'}dt\right)^{r/q'} v(x)^{p'}dx\right)^{1/r} < \infty$$

Bu durumda $\mathcal{H}$ 'nin eşleniği olan $\widetilde{\mathcal{H}}$ operatörü ise

$$(\widetilde{\mathcal{H}}f)(x) := u(x)\int_x^b f(t)v(t)dt \tag{5.4.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Hardy eşitsizlikleri için önemli konulardan bir tanesi de üzerinde çalışılan aralıktır. Şimdiye kadarki varsayımlarda seçilen (a,b) aralıkları $-\infty \le a \le b \le +\infty$ olmak üzere, keyfi aralıklardı. Örneğin, $(5.1.5)$ ile verilen klasik formdaki Hardy eşitsizliğinde G.H.Hardy (a,b) aralığını $(a,b) = (0,\infty)$ olarak almıştır. Nitekim $(a,b) = (0,\infty)$ durumunda $(5.2.1)$ ve $(5.4.1)$ ile verilen aşağıdaki

$f \ge 0$, g$(0) = 0$, $1 < p \le q < \infty$ olmak üzere,

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_0^\infty f(x)^p \upsilon(x)dx\right)^{1/p}$$

$$\left(\int_0^\infty |\mathrm{g}(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_0^\infty \left|\mathrm{g}'(x)\right|^p \upsilon(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliklerinin sağlanabilmesi için

$$A = A(0,\infty;u,\upsilon) := \sup_{x>0}\left(\int_x^\infty u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_0^x \upsilon(t)^{1-p'}dt\right)^{1/p'} < \infty$$

olması gerekir[Kufner ve ark.2003].

Buradaki asıl önemli nokta şudur; (a,b) aralığı nasıl seçilirse seçilsin seçilen aralık $(0,\infty)$ aralığına indirgenebilir. Aşağıda olası aralıklar incelenmiştir.

(i) $(a,b) = (-\infty,\infty)$ için

$$\left(\int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_{-\infty}^\infty f(x)^p \upsilon(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliği her $f \ge 0$ fonksiyonu için sağlanır ancak ve ancak

$$A = A(-\infty,\infty;u,\upsilon) := \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^\infty u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_{-\infty}^x \upsilon(t)^{1-p'}dt\right)^{1/p'} < \infty\,.$$

(ii) $a = 0,\ 0 < b < \infty$ için

$$\left(\int_0^b \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_0^b f(x)^p \upsilon(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliği her $f \ge 0$ fonksiyonu için sağlanır ancak ve ancak

$$A = A(0,b;u,\upsilon) := \sup_{0<x<b}\left(\int_x^b u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_0^x \upsilon(t)^{1-p'}dt\right)^{1/p'} < \infty.$$

(iii) $-\infty < a < b \le \infty$ için

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b f(x)^p \upsilon(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliği her $f \geq 0$ fonksiyonu için sağlanır ancak ve ancak

$$A = A(a,b;u,\upsilon) := \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_a^x \upsilon(t)^{1-p'} dt \right)^{1/p'} < \infty.$$

5.5. Klasik Hardy Eşitsizliği'nin Limit Durumu

Tanım 5.5.1.

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t)dt \right) dx \leq e \int_0^\infty f(x)dx \tag{5.5.1}$$

eşitsizliği **Knopp eşitsizliği** olarak bilinir. Buradaki e sayısı bu eşitsizlik için en iyi sabittir[Knopp,1928]. Bu eşitsizlik, $p \to \infty$ olması durumunda $(5.1.4)$ ile verilen Hardy eşitsizliğinin $f^{1/p}$ fonksiyonuna karşılık gelen

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)^{1/p} dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p dx$$

eşitsizliğinin limiti olarak kabul edilir. Gerçekten de f'nin geometrik ortalaması olan

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t)dt \right)$$

ifadesi için $p \to \infty$ iken $\left(\frac{p}{p-1} \right)^p \to e$ olacağından

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)^{1/p} dt \right)^p = \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t)dt \right)$$

eşitliği sağlanır[Hardy ve ark.1952].

Tanım 5.5.2.

$$(H_a f)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \tag{5.5.2}$$

ifadesine **Hardy ortalama operatörü**(Hardy averaging operator)denir. Bu eşitliğe ayrıca **aritmetik orta operatörü**(arithmetic mean operator) de denir.

Tanım 5.5.3.

$$(Gf)(x) := \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right), f \geq 0. \tag{5.5.3}$$

ifadesine **geometik orta operatörü**(geometric mean operator) denir.

5.6. İki Boyutlu Hardy Operatörü

Tanım 5.6.1.

$$(H_2f)(x,y) := \int_0^x\int_0^y f(s,t)dtds \tag{5.6.1}$$

ifadesine **İki boyutlu Hardy operatörü** denir. Bu operatöre karşılık gelen eşitsizlik, $f \geq 0,\ u$ ve $\upsilon,\ (0,\infty)\times(0,\infty)$ üzerinde ağırlık fonksiyonları olmak üzere,

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty |(H_2f)|^q(x,y)u(x,y)dxdy\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty\int_0^\infty |f(x,y)|^p\upsilon(x,y)dxdy\right)^{1/p} \tag{5.6.2}$$

olup bu eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul($1 < p \leq q < \infty$ olmak üzere)

$$\sup_{x>0,y>0}\left(\int_x^\infty\int_y^\infty u(s,t)dtds\right)^{1/q} \times \left(\int_0^x\int_0^y \upsilon(s,t)^{1-p'}dtds\right)^{1/p'} < \infty \tag{5.6.3}$$

olmasıdır[Muckenhoupt,1979].

5.7. N-Boyutlu Hardy Operatörü

Tanım 5.7.1.$(0,\infty)$ üzerinde tanımlı $f \geq 0$ fonksiyonları için klasik Hardy eşitsizliği olan

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty |f(x)|^p dx, 1 < p < \infty$$

eşitsizliği, $(-\infty,\infty)$ üzerinde tanımlı $f \geq 0$ fonksiyonları için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2|x|}\int_{-|x|}^{|x|} f(t)dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx$$

şeklinde tanımlanan eşitsizlik ile denktir.

$x \in \mathbb{R}^N$ olmak üzere, $B(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^N : |y| \le |x|\right\}$ şeklindeki kapalı yuvar ve bu yuvarın hacmi $|B(x)|$ olarak tanımlansın. Buna göre **N-boyutlu Hardy operatörü** $\mathcal{H}_N$

$$(\mathcal{H}_N f)(x) = \frac{1}{|B(x)|}\int_{B(x)} f(y)dy \qquad (5.7.1)$$

olarak tanımlanır[Christ,1995] ve bu operatör

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{H}_n f(x)|^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx, 1 < p < \infty, \qquad (5.7.2)$$

eşitsizliğini sağlar.

Tanım 5.7.2. $(5.7.2)$ ile verilen eşitsizlik [Drábek ve ark.1997] de u, v ağırlık fonksiyonları ve $1 < p < \infty,\ 0 < q < \infty$ parametreleri için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{H}_N f(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p} \qquad (5.7.3)$$

şeklinde tanımlı **N-boyutlu ağırlıklı Hardy eşitsizliği**’ne genişletilmiştir. Bu eşitsizliğin doğru olması için

$1 < p \le q < \infty$ olmak üzere,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(x)} u(y)|y|^{-q}dy\right)^{1/q}\left(\int_{B(x)} v(y)^{1-p'}dy\right)^{1/p'} < \infty \qquad (5.7.4)$$

koşulunun sağlanması gerekir.

$(5.7.3)$ eşitsizliği ile verilen N-boyutlu ağırlıklı Hardy eşitsizliği’nin diferansiyel formu

$$\left(\int_{\Omega} |\mathrm{g}(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p} \qquad (5.7.5)$$

olarak verilir. Burada Ω, $\mathbb{R}^N$ de(genel olarak sınırlı) bir bölge veya $\mathbb{R}^N$ ve g fonksiyonları $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayındandır.

5.8. Yüksek Mertebeden Hardy Eşitsizliği

Tanım 5.8.1. $k > 1$ ve g$\in AC^{k-1}$ olmak üzere, $k.$ **mertebeden Hardy eşitsizliği**

$$\left(\int_0^\infty |g(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty \left|g^{(k)}(x)\right|^p \upsilon(x)dx\right)^{1/p} \tag{5.8.1}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 5.8.2. $1 < p,q < \infty$ olsun. Buna göre,

$(5.8.1)$ eşitsizliği $g(\infty) = g'(\infty) = \ldots = g^{(k-1)}(\infty) = 0$ olacak şekilde her g fonksiyonu için sağlanır[Kufner ve ark.2003] ancak ve ancak

$$\mathcal{A} := \max\left(A_{k,0}, A_{k,1}\right) < \infty \tag{5.8.2}$$

burada $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ olmak üzere,

$$A_{k,0} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int_0^t (t-x)^{(k-1)q} u(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_t^\infty \upsilon(x)^{1-p'}dx\right)^{1/p'} & ,p \leq q \\ \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t (t-x)^{(k-1)q} u(x)dx\right)^{r/q}\left(\int_t^\infty \upsilon(x)^{1-p'}dx\right)^{r/q'} \upsilon(t)^{1-p'}dt\right)^{1/r} & ,p > q \end{cases}$$

$$A_{k,1} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int_0^t u(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_t^\infty (x-t)^{(k-1)p'} \upsilon(x)^{1-p'}dx\right)^{1/p'} & ,p \leq q \\ \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t u(x)dx\right)^{r/p}\left(\int_t^\infty (x-t)^{(k-1)p'} \upsilon(x)^{1-p'}dx\right)^{r/p'} u(x)dx\right)^{1/r} & ,p > q \end{cases}$$

Ayrıca $(5.8.1)$ eşitsizliğindeki C sabiti için $\mathcal{A} \approx C$ dir.

5.9. Kesir Mertebeli Hardy Eşitsizlikleri

Tanım 5.9.1. $\omega(x,y)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ için $(a,b) \times (a,b)$ de tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ve $g^{(\lambda)}$ ise $\lambda.$mertebeden$(0 < \lambda < 1)$ kesirli türevi göstersin. Buna göre, **kesir mertebeli Hardy eşitsizlikleri**

$$\|g\|_{q,u} \le C\left\|g^{(\lambda)}\right\|_{p,\upsilon}, 0 < \lambda < 1 \tag{5.9.1}$$

ve

$$\left\|g^{(\lambda)}\right\|_{q,u} \le C\left\|g'\right\|_{p,\upsilon}, 0 < \lambda < 1 \tag{5.9.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\left\|g^{(\lambda)}\right\|_{r,\omega} := \left(\int_a^b\int_a^b \frac{|g(x)-g(y)|^r}{|x-y|^{1+\lambda r}}\omega(x,y)dxdy\right)^{1/r}. \tag{5.9.3}$$

Önerme 5.9.2. $1 < p < \infty,\ 0 < \lambda < 1,\ \lambda \ne 1/p$ olsun. Bu durumda $\forall g \in C_0^\infty(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$\left(\int_0^\infty \left|\frac{g(x)}{x^\lambda}\right|dx\right)^{1/p} \le C\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{1+\lambda p}}dxdy\right)^{1/p} \tag{5.9.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 5.9.3. $1 < p < \infty,\ 0 < \lambda < 1$ olsun. Bu durumda $\forall g \in AC(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{1+\lambda p}}dxdy\right)^{1/p} \le C\left(\int_0^\infty \left|g'(x)\right|^p x^{(1-\lambda)p}dx\right)^{1/p} \tag{5.9.5}$$

eşitsizliği sağlanır[Kufner ve ark.2003]. Burada $C = 2^{1/p}\lambda^{-1}(p(1-\lambda))^{-1/p}$ değeri bu eşitsizlik için en iyi sabittir.

5.10. Hardy Tipli Eşitsizlikler

Tanım 5.10.1. $k(x,t)$ çekirdek fonksiyonu, $-\infty \le a < b \le +\infty$ ve u,υ ağırlık fonksiyonları verilsin. Ayrıca T operatörü de aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$(Tf)(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)dt$$

Buna göre,

$$\left(\int_a^b |(Tf)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b |f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{5.10.1}$$

veya

$$\|Tf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \tag{5.10.2}$$

ile verilen eşitsizliğe **Genel ağırlıklı norm eşitsizliğ** denir. Ayrıca bu eşitsizlik bazen çok genel T (integral)operatörleri için **kuvvetli tip eşitsizlik** veya **kuvvetli** (p,q) **eşitsizliği** olarak da adlandırılır. Bununla birlikte, bir çok yazar **zayıf tip eşitsizlik** veya **zayıf** (p,q) **eşitsizliği** olarak

$$u(\{x \in (a,b) : (Tf)(x) > \lambda\}) \leq C\lambda^{-q}\left(\int_a^b |f(x)|^p v(x)dx\right)^{q/p}$$

ifadesini verir; burada $\lambda > 0$, keyfi pozitif C değeri f ve λ dan bağımsız ve her ölçülebilir $E \subset (a,b)$ kümesi için

$$v(E) = \int_E v(x)dx$$

olarak verilir.

Kimi makalelerde zayıf ve güçlü tip eşitsizlikler için genel(ortak) bir gösterim olan

$$(Tf)(x) = \sup_{t \geq 0}\left|\int_X k(x,y,t)f(y)d\mu\right|$$

ifadesi kullanılır. Burada, T genel bir operatör, (X,d,μ) ölçüm uzayı, d quasi-metrik ve $k,\ X \times X \times [0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir çekirdektir.

6.BÖLÜM

HARDY TİPLİ OPERATÖRLER

Bu bölümde, Hardy tipli operatörler incelenerek çalışmamızın orijinal problemi olan Riemann-Liouville ve Weyl operatörlerinin L^p_ω 'dan L^q_υ 'ya sınırlılığını sağlayan ω, υ ağırlık fonksiyonları için gerek ve yeter koşulları önceki çalışmalarda kullanılan ispat yöntemlerinden farklı bir yöntemle elde etmeye çalışacağız.

6.1. Genel Hardy Tipli Operatörler

k çekirdeği

(a) $k(x,t) \geq 0, 0 < t < x$ ve $k,$ x için artan t için azalan

(b) $k(x,t) \approx k(x,z) + k(z,t),\ 0 < t < z < x$

özelliklerini sağlasın(Bu tip çekirdeklere **Oinarov çekirdeği** denir).

(kolaylık açısından $(a,b) = (0,\infty)$ alınacaktır; ancak elde edilen sonuçları (a,b) aralığı için genelleştirmek mümkündür)

$$(Kf)(x) := \int_0^x k(x,t)f(t)dt,\ \ x > 0 \tag{6.1.1}$$

şeklinde verilen K dönüşümüne **Genel Hardy tipli operatör** adı verilir. K operatörünün eşleniği olan $\widetilde{K}$ operatörü ise

$$(\widetilde{K}f)(x) := \int_x^\infty k(t,x)f(t)dt,\ \ x > 0 \tag{6.1.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki tanımı genişletmek mümkündür:

Negatif olmayan k çekirdeği aşağıdaki özellileri sağlasın;

(a) $k(x,t),$ x için artan t için azalan,

(b) $\forall y \leq x,\ a(x) \leq z \leq b(y)$ ve $C_1 \geq 1$ sabiti için $k(x,t) \leq C_1(k(x,b(y))) + k(y,z).$

bu durumda aşağıdaki operatör tanımlanabilir;

$$(K_{a,b}f)(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t)f(t)dt \tag{6.1.3}$$

Teorem 6.1.1. $1 < p \le q < \infty$ olmak üzere,

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t) f(t)\,dt \right)^q u(x)\,dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x)\,dx \right)^{1/p} \tag{6.1.4}$$

eşitsizliği her $f \ge 0$ fonksiyonu için sağlanır[Kufner ve ark.2003] ancak ve ancak

$$\sup_{x \le y, a(y) \le b(x)} \left(\int_x^y u(t) k^q(t, b(x))\,dt \right)^{1/q} \left(\int_{a(y)}^{b(x)} v(t)^{1-p'}\,dt \right)^{1/p'} < \infty \tag{6.1.5}$$

ve

$$\sup_{x \le y, a(y) \le b(x)} \left(\int_x^y u(t)\,dt \right)^{1/q} \left(\int_{a(y)}^{b(x)} k^{p'}(x,t) v(t)^{1-p'}\,dt \right)^{1/p'} < \infty. \tag{6.1.6}$$

Teorem 6.1.2. $1 < p \le q < \infty$ olsun. K, $(6.1.1)$ de verilen genel Hardy tipli operatör ve K_s ile $\widetilde{K}_s$ aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$(K_s h)(x) := \int_0^x k^s(x,t) h(t)\,dt$$

$$(\widetilde{K}_s h)(x) := \int_x^\infty k^s(t,x) h(t)\,dt$$

Burada $s \ge 0$ ve k, Oinarov çekirdeğidir. Buna göre,

$$\left(\int_0^\infty |(Kf)(x)|^q u(x)\,dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x)\,dx \right)^{1/p} \tag{6.1.7}$$

eşitsizliği her $f \ge 0$ fonksiyonu için sağlanır[Kufner ve ark.2003] ancak ve ancak

$$A_0 := \sup_{t>0} (\widetilde{K}_q u)^{1/q}(t) (K_0 v^{1-p'})^{1/p'}(t) < \infty \tag{6.1.8}$$

ve

$$A_1 := \sup_{t>0} (\widetilde{K}_0 u)^{1/q}(t) (K_{p'} v^{1-p'})^{1/p'}(t) < \infty. \tag{6.1.9}$$

$(6.1.7)$ eşitsizliğindeki en iyi C sabiti için $C \approx \max(A_0, A_1)$ olur.

Teorem 6.1.3. $1 < q < p < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ olsun. K, $(2.3.1)$ de verilen genel Hardy tipli operatör olmak üzere, B_0 ile B_1 aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$B_0 := \left\{ \int_o^\infty \left((\widetilde{K}_q u)^{1/q}(t)(K_0 v^{1-p'})^{1/q'}(t) \right)^r v(t)^{1-p'} dt \right\}^{1/r},$$

$$B_1 := \left\{ \int_o^\infty \left((\widetilde{K}_0 u)^{1/p}(t)(K_{p'} v^{1-p'})^{1/p'}(t) \right)^r u(t) dt \right\}^{1/r}$$

buna göre, $(6.1.7)$ eşitsizliği, yani

$$\left(\int_0^\infty |(Kf)(x)|^q u(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x) dx \right)^{1/p}$$

her $f \geq 0$ fonksiyonu için sağlanır[Kufner ve ark.2003] ancak ve ancak

$$\max(B_0, B_1) < \infty. \tag{6.1.10}$$

Ayrıca $(6.1.7)$ eşitsizliğindeki en iyi C sabiti için $C \approx \max(B_0, B_1)$ dir.

6.2. Hardy-Steklov Operatörü

$a = a(x)$ ve $b = b(x)$ fonksiyonları,
(i) $a(0) = b(0) = 0$
(ii) $a(x) < b(x)$, $0 < x < \infty$
(iii) $a(\infty) = b(\infty)$
özelliklerini sağlayan ve $[0, \infty]$ üzerinde kesin artan diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun$(*)$

Her $f = f(t) \geq 0$, $0 < t < \infty$, fonksiyonu için

$$(Tf)(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \tag{6.2.1}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümüne **Hardy-Steklov operatörü** adı verilir. Bu operatörün eşleniği olan $\widetilde{T}$ operatörü ise

$$(\widetilde{T}f)(x) := \int_{b^{-1}(x)}^{a^{-1}(x)} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 6.2.1. $1 < p \le q < \infty$ olsun. Buna göre,

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x)dx \right)^{1/p} \tag{6.2.2}$$

eşitsizliği her $f \ge 0$ fonksiyonu için sağlanır[Kufner ve ark.2003] ancak ve ancak

$$A := \sup \left(\int_t^x u(s)ds \right)^{1/q} \left(\int_{a(x)}^{b(t)} v(s)^{1-p'} ds \right)^{1/p'} < \infty,\ p' = \frac{p}{p-1} \tag{6.2.3}$$

Burada supremum $0 < t < x < \infty$ ve $a(x) < b(t)$ olmak üzere, x ve t üzerinden alınır.

Teorem 6.2.2. $0 < q < p,\ 1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ olsun. Buna göre,

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x)dx \right)^{1/p} \tag{6.2.4}$$

eşitsizliği her $f \ge 0$ fonksiyonu için sağlanır[Kufner ve ark.2003]ancak ve ancak

$$\widetilde{A} = \max(A_1, A_2) < \infty. \tag{6.2.5}$$

burada

$$A_1 := \left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(a(t))}^{t} \left(\int_{a(t)}^{b(x)} v(s)^{1-p'} ds \right)^{r/p'} \left(\int_x^t u(s)ds \right)^{r/p} u(x)dx \right) \sigma(t)dt \right)^{1/r}$$

ve

$$A_2 := \left(\int_0^\infty \left(\int_t^{a^{-1}(b(t))} \left(\int_{a(x)}^{b(t)} v(s)^{1-p'} ds \right)^{r/p'} \left(\int_t^x u(s)ds \right)^{r/p} u(x)dx \right) \sigma(t)dt \right)^{1/r}$$

.

6.3. N-Boyutlu Hardy-Steklov Operatörü

a ve b fonksiyonları $(*)$ da verildiği gibi olsun. Buna göre,

$$(\mathcal{H}_N f)(x) = \int_{a(|x|)<|y|<b(|x|)} f(y)dy, \ x, y \in \mathbb{R}^N \tag{6.3.1}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{H}_N$ dönüşümüne **N-boyutlu Hardy-Steklov operatörü** adı verilir.

Teorem 6.3.1. $0 < q < \infty$ ve $1 < p < \infty$ olsun.
$\mathcal{B}_N$, $\mathbb{R}^N$ de birim küre ve $x = t\tau,\ t \in (0,\infty),\ \tau \in \mathcal{B}_N$ olmak üzere,

$$U(t) = \int_{\mathcal{B}_N} u(t\tau)t^{N-1}d\tau$$

ve

$$V(t) = \left(\int_{\mathcal{B}_N} v(t\tau)^{1-p'} t^{N-1}d\tau \right)^{1-p}$$

olarak tanımlansın. Buna göre,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |(\mathcal{H}_N f)|^q(x)u(x)dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p v(x)dx \right)^{1/p} \tag{6.3.2}$$

eşitsizliği her $f \ge 0$ fonksiyonu için sağlanır[Kufner ve ark.2003] ancak ve ancak

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{a(t)}^{b(t)} F(s)ds \right)^q U(t)dt \right)^{1/q} \le C \left(\int_0^\infty |F(t)|^p V(t)dt \right)^{1/p}. \tag{6.3.3}$$

Bu eşitsizlik her $F \ge 0$ için doğrudur, ayrıca $(6.3.2)$ ve $(6.3.3)$ teki C sabitleri eşittir.

6.4. Riemann-Liouville Operatörü

$f(t) \geq 0,\ x > 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$(R\alpha f)(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{6.4.1}$$

şeklinde tanımlı $R\alpha$ dönüşümüne **Riemann-Liouville operatörü** adı verilir.

6.5. Weyl operatörü

$f(t) \geq 0,\ x > 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$(W\alpha f)(x) = \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{6.5.1}$$

şeklinde tanımlı $W\alpha$ dönüşümüne **Weyl operatörü** adı verilir.
Dikkat edilirse Weyl operatörünün aslında Riemann-Liouville operatörünün eşleniği olduğu kolaylıkla görülebilir.

Riemann-Liouville ve Weyl operatörlerinin sınırlılığı bir çok matematikçi tarafından incelenmiş ve belirli koşullar altında bu operatörlerin sınırlılığı ve hatta kompaktlığı gösterilmiştir. Örneğin, $R\alpha$ ve $W\alpha$ operatörlerinin u,υ ağırlık fonksiyonları için L^p_υ 'den L^q_u 'ya sınırlılığı; $1 < p < q < \infty,\ 0 < \alpha < 1$ koşulları altında[Genebashvili ve ark.1996] de ve $1 < p \leq q < \infty,\ \alpha > 1$ koşulları altında[Heinig,1990] de gösterilmiştir. Biz burada bu operatörlerin sınırlı olduğunu sadece aşağıda verilen iki teoremle ifade edeceğiz.

Teorem 6.5.1. $1 < p < q < \infty,\ 0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\left(\int_0^\infty |(R\alpha f)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C_1 \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \upsilon(x)dx\right)^{1/p} \tag{6.5.2}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\substack{a,h \\ 0<h<a}} \left(\int_{a-h}^{a+h} u(y)dy \right)^{1/q} \left(\int_{0}^{a-h} \frac{\upsilon(y)^{1-p'}}{(a-y)^{(1-\alpha)p'}} dy \right)^{1/p'} < \infty,$$

$$\sup_{\substack{a,h \\ 0<h<a}} \left(\int_{a-h}^{a+h} \upsilon(y)^{1-p'} dy \right)^{1/p'} \left(\int_{a+h}^{\infty} \frac{u(y)}{(a-y)^{(1-\alpha)q}} dy \right)^{1/q} < \infty \tag{6.5.3}$$

eşitsizliklerinin birlikte sağlanmasıdır[Genebashvili ve ark.1996]

Teorem 6.5.2. $1 < p < q < \infty,\ 0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\left(\int_{0}^{\infty} |(W_\alpha f)(x)|^q u(x)dx \right)^{1/q} \le C_2 \left(\int_{0}^{\infty} |f(x)|^p \upsilon(x)dx \right)^{1/p} \tag{6.5.4}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\substack{a,h \\ 0<h<a}} \left(\int_{a-h}^{a+h} u(y)dy \right)^{1/q} \left(\int_{a+h}^{\infty} \frac{\upsilon(y)^{1-p'}}{(y-a)^{(1-\alpha)p'}} dy \right)^{1/p'} < \infty,$$

$$\sup_{\substack{a,h \\ 0<h<a}} \left(\int_{a-h}^{a+h} \upsilon(y)^{1-p'} dy \right)^{1/p'} \left(\int_{0}^{a+h} \frac{u(y)}{(y-a)^{(1-\alpha)q}} dy \right)^{1/q} < \infty \tag{6.5.5}$$

eşitsizliklerinin birlikte sağlanmasıdır[Genebashvili ve ark.1996].

6.6. Riemann-Liouville ve Weyl Operatörlerinin Sınırlılığı

$1 < p < \infty$ ve $\omega : (0,\infty) \to (0,\infty)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere, $f \in L^p_\omega(0,\infty)$ fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{L^p_\omega} = \left(\int_{0}^{\infty} |f(x)|^p \omega(x)dx \right)^{1/p}$$

olarak tanımlanmıştı.

$$W(x) = \int_0^x \omega(t)^{1-p'} dt \quad , \quad V(x) = \int_x^\infty \frac{\upsilon(t)}{t^{(1-\alpha)q}} dt \tag{6.6.1}$$

şeklinde tanımlanan $W(x)$ ve $V(x)$ fonksiyonları

$$V \in D : \exists\eta > 0, \qquad V\left(\frac{x}{2}\right) \le 2^{\eta} V(x) \,, \qquad x > 0 \tag{6.6.2}$$

$$W \in RD : \exists\delta > 0, \quad W\left(\frac{x}{2}\right) \le 2^{-\delta} W(x) \,, \quad x > 0 \tag{6.6.3}$$

koşullarını;

$$\overline{W}(x) = \int_x^\infty \omega(t)^{1-p'} dt \quad , \quad \overline{V}(x) = \int_0^x \frac{\upsilon(t)}{t^{(1-\alpha)q}} dt \tag{6.6.4}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{W}(x)$ ve $\overline{V}(x)$ fonksiyonları ise

$$\overline{V} \in RD : \exists\delta > 0, \quad \overline{V}\left(\frac{x}{2}\right) \le 2^{-\delta} \overline{V}(x) \,, \; x > 0 \tag{6.6.5}$$

$$\overline{W} \in D : \exists\eta > 0, \quad \overline{W}\left(\frac{x}{2}\right) \le 2^{\eta} \overline{W}(x) \,, \quad x > 0 \tag{6.6.6}$$

koşullarını sağlasın.

$W(x)$ ve $V(x)$ fonksiyonları $(6.6.1)$ de tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$dW(x) = \omega(x)^{1-p'} dx \text{ ve } dV(x) = -\frac{\upsilon(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \tag{6.6.7}$$

olur.

Teorem 6.6.1. $1 < p \le q < \infty$, $\frac{1}{q} < \alpha < 1$ veya $\alpha > 1$ olsun.

$$\left(\int_0^\infty |(R_\alpha f)(x)|^q \upsilon(x) dx \right)^{1/q} \le A \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p} \tag{6.6.8}$$

burada pozitif A sabiti f den bağımsız olmak üzere, bu eşitsizliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$B = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \frac{\upsilon(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{1/q} \left(\int_0^t \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} < \infty, p' = \frac{p}{p-1} \tag{6.6.9}$$

olmasıdır. Ayrıca $(6.6.8)$ deki en iyi A sabit için $A \approx B$ dir.

İspat:

yeter koşul($\Leftarrow$)

$f \in L^p$ ve $\Omega_x^n = \left(2^{-n-1}x, 2^{-n}x\right]$, $n \in \mathbb{N}$, olsun.Buna göre,

$$(R\alpha f)(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$ operatörünü

$$(R\alpha f)(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \sum_{n=0}^{m} \int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt + \int_0^{2^{-m-1}x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

olarak yazalım. Norm alırsak,

$$\|R\alpha f\|_{L_v^q} \leq \sum_{n=0}^{m} \left(\int_0^\infty v(x) \left(\int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \right)^q dx \right)^{1/q}$$

$$+ \left(\int_0^\infty v(x) \left(\int_0^{2^{-m-1}x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \right)^q dx \right)^{1/q} = J_n + J_m$$

$$\|R\alpha f\|_{L_v^q} \leq J_n + J_m \qquad (6.6.10)$$

olur. Önce J_n'nin sonlu olduğunu gösterelim:

$$J_n^q = \int_0^\infty v(x) \left(\int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \right)^q dx \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{q(\alpha-1)}$$

$$\times \int_0^\infty \frac{v(x)}{x^{(1-\alpha)q}} \left(\int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} f(t)dt \right)^q dx$$

olur. $h(t) = \omega(x)^{p'-1} f(t)$ olarak seçip, Hölder eşitsizliğini uygularsak $\left(C_1 = (1 - \frac{1}{2^n})^{q(\alpha-1)}\right.$ olmak üzere$\left.\right)$

$$J_n^q \leq C_1 \int_0^\infty \frac{v(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \left(\int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} h(t)dW(t) \right)^q dx$$

$$\leq C_1 \int_0^{\infty} \frac{v(x)}{x^{(1-\alpha)q}} \left(\int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} |h(t)|^p dW(t) \right)^{q/p} \left(\int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} dW(t) \right)^{q/p'} dx$$

$$= C_1 \int_0^{\infty} \frac{v(x)}{x^{(1-\alpha)q}} \left(\int_{\Omega_x^n} |h(t)|^p dW(t) \right)^{q/p} W(\Omega_x^n)^{q/p'} dx$$

$(6.6.3)$ ten

$$W(\Omega_x^n)^{q/p'} \leq (W(2^{-n}x))^{q/p'} \leq 2^{-n\delta q/p'} W(x)^{q/p'} \leq 2^{-n\delta(p-1)} W(x)^{q/p'}, (q/p' \geq p-1)$$

olur. Bu durumda,

$$J_n^q \leq -C_1 2^{-n\delta(p-1)} \int_0^{\infty} V(x) W(x)^{q/p'} \left(\int_{\Omega_x^n} |h(t)|^p dW(t) \right)^{q/p} \frac{dV(x)}{V(x)}$$

$$= -C_1 2^{-n\delta(p-1)} \int_0^{\infty} V(x) W(x)^{q/p'} \left(\int_{\Omega_x^n} |f(t)|^p \omega(t) dt \right)^{q/p} \frac{dV(x)}{V(x)} \quad (\bigstar)$$

elde edilir.

$\|f\|_{L_\omega^p} = \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^p \omega(t) dt \right)^{1/p} \leq C$ ve $B_1 = V(x) W(x)^{q/p'} < \infty$ olarak kabul edelim.Bu durumda,

$\left(\int_{\Omega_x^n} |f(x)|^p \omega(t) dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p \omega(t) dt \right)^{1/p} \leq C$ yazılabilir. Bununla birlikte

$\int_{\Omega_x^n} |f(x)|^p \omega(t) dt \leq C^p$ ve $\left(\int_{\Omega_x^n} |f(x)|^p \omega(t) dt \right)^{q/p} \leq C^q$ olduğundan

$\left(\int_{\Omega_x^n} |f(x)|^p \omega(t) dt \right)^{q/p} \leq C^{q-p} \int_{\Omega_x^n} |f(x)|^p \omega(t) dt$ yazılabilir.Buna göre $(\bigstar)$ eşitsizliği $(6.6.7)$ ile birlikte

$$J_n^q \leq -C_2 \int_0^{\infty} \left(\int_{2^{-n-1}x}^{2^{-n}x} |f(x)|^p \omega(t) dt \right) \frac{dV(x)}{V(x)}$$

şeklinde yazılabilir($C_2 = C_1 C^{q-p} 2^{-n\delta(p-1)}$). Şimdi Fubini teoremini uygulayalım

$$J_n^q \leq -C_2 \int_0^\infty |f(x)|^p \omega(t) \left(\int_{2^n t}^{2^{n+1} t} \frac{dV(x)}{V(x)} \right) dt$$

bulunur. $V(x)$ fonksiyonu $(6.6.2)$ özelliğini sağladığından

$- \int_{2^n t}^{2^{n+1} t} \frac{dV(x)}{V(x)} = \log \frac{V(2^n t)}{V(2^{n+1} t)} \leq \eta \log 2, \; t > 0, \, n \in \mathbb{N}$, olur. Buna göre,

$$J_n^q \leq \eta \log 2 C_2 \int_0^\infty |f(x)|^p \omega(t) dt$$

$$J_n \leq (\eta \log 2)^{1/q} C_2^{1/q} C^{p/q} = C_3 \qquad (6.6.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

Açıklama 6.6.2.

$C_3 = (\eta \log 2)^{1/q} C_2^{1/q} C^{p/q} = (1 - \frac{1}{2^n})^{(\alpha - 1)} 2^{-n\delta(p-1)/q} C^{(q-p)/q} (\eta \log 2)^{1/q} C^{p/q}$

$= C(1 - \frac{1}{2^n})^{(\alpha-1)} 2^{-n\delta(p-1)/q} \, (\eta \log 2)^{1/q}$ olduğundan ispat yapılırken $\sum_{n=0}^{m} C_3$ serisinin $m \to \infty$ iken yakınsak olabilmesi için $p > 1$ ve $\alpha > 1$ koşullarının gerekli olduğu açıkça görülür.

J_m'nin sonlu olduğunu göstermek kolaydır, gerçekten

$\int_0^{2^{-m-1} x} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \leq \int_0^\infty (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \in L_1(0, \infty)$ olup, Lebesgue yakınsaklık teoreminden $m \to \infty$ iken

$$J_m = \left(\int_0^\infty \upsilon(x) \left(\int_0^{2^{-m-1} x} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right)^q dx \right)^{1/q} \to 0 \qquad (6.6.12)$$

olur.

Sonuç olarak $(6.6.11)$ ve $(6.6.12)$ den

$$\|R\alpha f\|_{L_\upsilon^q} < \infty$$

çıkar.

gerek koşul($\Rightarrow$)

$\|R\alpha f\|_{L_\upsilon^q} < \infty$ olsun.

$$B_1^{1/q} = B = \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty \frac{\upsilon(x)}{x^{(1-\alpha)q}}dx\right)^{1/q}\left(\int_0^t \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{1/p'}$$

olmak üzere, $f \in L^p$ test fonksiyonunu

$$f(x)_t = \chi_{(0,t)}(x)\left(\int_0^t \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{1/p'}$$

şeklinde seçelim. Buna göre,

$$\|R\alpha f\|_{L_\upsilon^q}^q \geq \int_t^\infty \upsilon(x)\left(\int_0^t (x-y)^{\alpha-1}\left(\int_0^t \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{1/p'} dy\right)^q dx$$

$$= \int_t^\infty \upsilon(x)\left(\int_0^t (x-y)^{\alpha-1}dy\right)^q\left(\int_0^t \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{q/p'}$$

$$= \frac{1}{\alpha^q}\left(\int_t^\infty \upsilon(x)(x^\alpha-(x-t)^\alpha)^q dx\right)\left(\int_0^t \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{q/p'}$$

$(x^\alpha-(x-t)^\alpha) \leq kx^{\alpha-1}$ olacak şekilde bir k pozitif sayısı vardır, buna göre

$$\|R\alpha f\|_{L_\upsilon^q} \geq C\left(\int_t^\infty \frac{\upsilon(x)}{x^{(1-\alpha)q}}dx\right)^{1/q}\left(\int_0^t \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{1/p'} = CB$$

olur ki bu durumda ispat biter.□

Teorem 6.6.3. $1 < p \leq q < \infty,\ \frac{1}{q} < \alpha < 1$ veya $\alpha > 1$ olsun.

$$\left(\int_0^\infty |(W\alpha f)(x)|^q \upsilon(x)dx\right)^{1/q} \leq \overline{A}\left(\int_0^\infty |f(x)|^p \omega(x)dx\right)^{1/p} \qquad (6.6.13)$$

burada pozitif $\overline{A}$ sabiti f den bağımsız olmak üzere, bu eşitsizliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\overline{B} = \sup_{t>0} \left(\int_t^{\infty} \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int_0^t \frac{\upsilon(x)}{x^{(1-\alpha)q}} dx \right)^{1/q} < \infty \qquad (6.6.14)$$

olmasıdır. Ayrıca $(6.6.13)$ teki en iyi $\overline{A}$ sabit için $\overline{A} \approx \overline{B}$ dir.

İspat:

Teorem 6.6.1.'in ispatıyla benzer şekilde yapılabileceğinden göstermeye gerek yoktur.□

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Altıncı bölümde tezimizin esas konusu olan Riemann-Liouville ve Weyl operatörlerinin ağırlıklı Lebesgue uzayları L_{υ}^{p} 'den L_{ω}^{q} 'ya sınırlılığı elde edilmiştir.

İleri çalışma olarak Riemann-Liouville ve Weyl operatörlerinin ağırlıklı Lebesgue uzayları L_{υ}^{p} 'den L_{ω}^{q} 'ya Kompaktlığı incelenebilir.Ayrıca $1 < p \leq q < \infty$ parametreleri yerine ölçülebilir pozitif $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları alınarak Riemann-Liouville ve Weyl operatörlerinin değişken üstlü Lebesgue uzayları $L_{\upsilon}^{p(x)}$ 'den $L_{\omega}^{q(x)}$ 'e sınırlılığı incelenebilir.

KAYNAKLAR

-Adams, R. A. ,1975. Sobolev Spaces. Academic Press. NEW YORK.

-Adams, R. A. and Fournier, J.J., 2003. Sobolev Space.Elsevier Science.

-Agarwal, R.P., 1992. Difference Inequalities.Marcel Dekker, Inc. NEW YORK.

-Bainov, D. and Simenov, P.,1988. Integral Inequalities and Applications. Kluwer Academic Publishers.TOKYO.

-Beckenbach, E.F. and Belleman, R., 1983. Inequalities.Springer-Verlag. NEW YORK.

-Bullen, P.S., Mitrinoviċ, D.S. and Vasiċ, P.M., 1988. Means and Their Inequalities. D.Reidel Publishing Company. TOKYO.

-Christ, M. and Grafakos, L., 1995. Best constants for two nonconvolution inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. 123, 1687-1693.

-Cloud, M.J. and Drachman, B.C., Inequalities with Applications to Engineering. Springer-Verlag. NEW YORK.

-Çekiç, B., 2005. Değişken Üstlü Lebesgue ve Sobolev Uzaylarında Gömme Tipli Eşitsizlikler,Dicle. Üniv. Fen. Bil. Enst. Doktora Tezi.DİYARBAKIR.

-Drábek, P., Heinig, H. P. and Kufner, A., 1997. Higher-dimensional Hardy inequalty, in:General Inequalities 7(Oberwolfach, 1995),Internet. Ser. Numer. Math. 123, 3-16.

-Duvaut, G. and Lions, J.L., 1976. Inequalities and Physics.Springer-Verlag. BERLİN.

-Genebashvili, I., Gogatishvili, A. and Kokilashvili, V.,1996.Solution of two weigth problems for integral transforms with positive kernels. Georgian Math. J. 3, No. 4, 834-844.

-Hardy, G. H., 1920. Note on a theorem of Hilbert, Math. Z. 6, 314-317.

-Hardy, G. H., 1925. Note on ome points in the integral calculus, LX, Messenger of Math. 54, 150-156.

-Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G.,1952(1st.ed. in 1934). Inequalities, 2nd ed., Cambridge Univ. Press.

-Heinig, H. P., 1990. Weigted inequalities in Fourier analysis. Nonlinear Analysis, Function Spaces and Appl. 4, Proc. Spring School, 42-85.

-Knopp, K., 1928. Űber Reihen mit Positiven Gliedern, J. London Math. Soc. 3, 205-211.

-Kokilashvili, V. and Krbec, M., 1991. Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces. World Scientific Publishing Co. LONDON.

-Kufner, A., Persson, L. E., 2003. Weighted Inequalities of Hardy Type.World Scientific Publishing Co. LONDON.

-Larsson, L., Maligranda, L., Pečariċ, J.E. and Pesson, L.-E., 2006. Multiplicative Inequalities of Carlson Type and Interpolation. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. NEW JERSEY.

-Liskevich, V.,1998. Measure Lecture Notes.Online Sources.

-Marshall, A.W. and Olkin, I., 1979. Inequalities:Theory of Majorization and its Applications.Academic Press.

-Milovanoviċ, G.V.,1998. Recent Progress in Inequalities.Kluwer Academic Publishers. LONDON.

-Mitrinoviċ, D.S. ,1970. Analytic Inequalities.Springer-Verlag. BERLİN.

-Mitrinoviċ, D.S. ,Pečariċ, J.E. and Volenec, V., 1989. Recent Advances in Geometric Inequalities. Kluwer Academic Publishers.LONDON.

-Mitrinoviċ, D.S. ,Pečariċ, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers. LONDON.

-Mitrinoviċ, D.S. ,Pečariċ, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers. LONDON.

-Muckhenhoupt, B., 1979. Weighted norm inequalities for classical operators, in:Harmonic Analysis in Euclidean Spaces, Proc. Sympos. Pure Math. 35, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 69-83.

-Opic, B., Kufner, A.,1990. Hardy-type Inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series,Longman Scientific & Technical. HARLOW.

-Pachpatte, B.G.,1998. Inequalities for Differential and Integral equations. Academic Press. SAN DİEGO.

-Rudin, W.,1976. Principles of Mathematical Analysis.McGraw-Hill 3rd edition. SINGAPORE.

-Rudin, W.,1987. Real and Complex Analysis.McGraw-Hill third edition. USA.

-Walter, W., 1970. Differential and Integral Inequalities.Springer-Verlag. BERLİN.

-Ziemer, W. P.,1980. Modern Real Analysis Lecture Notes.Online.Sources.