T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

HİPERBOLİK TANJANT
(TANH METHOD) YÖNTEMİ

Mustafa MIZRAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİYARBAKIR
HAZİRAN - 2007

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Mustafa MIZRAK tarafından yapılan "HİPERBOLİK TANJANT (TANH) YÖNTEMİ " konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan : Doç. Dr. Abdulkadir ERTAŞ

Üye : Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

Üye : Prof. Dr. Ali YILMAZ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 18 / 06 /2007

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2007

Prof. Dr. Necmettin PİRİNÇÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, bilgisi ve deneyimi ile bana yol gösteren, yönlendiren ve bu tezin oluşmasında büyük emeği ve katkıları olan değerli hocam Doç. Dr. Abdulkadir ERTAŞ' a çok teşekkür ederim.

Ayrıca araştırma safhasındaki yardımlarından dolayı Prof. Willy HEREMAN 'a ve Yrd. Doç. Necat POLAT ' a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİPERBOLİK TANJANT(TANH) YÖNTEMİ

Mustafa MIZRAK

Dicle Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Bu tezde, lineer olmayan değişimsel ve dalga denklemleri çözmek için iyi bilinen Hiperbolik Tanjant (Tanh) yöntemini inceledik.

Tanh yöntemi bir boyutlu yönlendirilmiş dalga çözümlerinin hesaplanmasında kullanılan çok güçlü bir çözüm yöntemidir.

Bu yöntem çözümlerin sonlu bir hiperbolik tanjant kuvvet serisi şeklinde yazılabilmesine dayanır. Lineer olmayan terimlerin lineer terimlere eşitlenmesiyle seri açılımının derecesi belirlenmiştir. Sınır şartlarının uygulanması ile yönlendirilmiş dalganın hızı elde edilebilir.

Yöntemin gücünü göstermek için iyi bilinen bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler çözülmüştür.

Sonuç olarak, aynı yöntem ile lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin çözülebileceği gösterilmiştir.

ABSTRACT

Master Thesis

THE HYPERBOLIC TANGENT (TANH) METHOD

Mustafa MIZRAK

Dicle Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

In this thesis, we apply well known The Hyperbolic Tangent (Tanh) method to solve the nonlinear evolution and wave equations.

The tanh method is a powerful solution method for the computation of one-dimensional travelling wave solutions.

This technique is based on the fact that solutions may be written as a finite power series of a hyperbolic tangent. Balancing the nonlinear terms against the linear ones gives the order of the series expansion. Boundary conditions can be implemented with the velocity of the travelling wave solutions .

To show the strength of the method some well known nonlineer partial differantial equations are solved.

Finally, it will be shown that the same method also can be used to solve systems of nonlinear partial differential equations.

GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler ilk kez geometrideki yüzey çalışmalarında ve mekanikteki çok çeşitli problemlere çözüm bulmak için ortaya çıkmıştır. Kısmi diferansiyel denklemler doğanın temel yasalarının formüle edilmesinde, matematiksel analizin çok çeşitli problemlerinde, uygulamalı matematikte, matematiksel fizikte ve mühendislik biliminde karşımıza çıkmaktadır.

Kısmi diferansiyel denklemler fizik problemleri incelenirken d'Alembert ve Euler tarafından ortaya konmuştur. Daha ileri çalışmalarda Cauchy, Lagrange, Laplace, Monge, Ampere ve Pfaff, Fourier, Poisson, Green, Dirichlet tarafından yapılan çalışmalara rastlanmaktadır. Bilhassa Lagrange'nin birinci basamaktan diferansiyel denklemlerle ilgili çalışmaları bu konuda temel oluşturur. Fakat kısmi diferansiyel denklemler ve bu denklem sistemleri ile ilgili ilk kesin araştırmalar Cauchy tarafından yapılmış ve Cauchy tarafından ortaya konan teoremler M.Darboux ve Sonia Kowalewsky tarafından ispatlanmıştır [5].

19. ve 20. yüzyılda kısmi diferansiyel denklemler üzerindeki araştırmaların ana fikrini iki farklı bakış açısı oluşturmuştur. Bir taraf kısmi diferansiyel denklemleri fizik, mühendislik ve diğer uygulamalı bilimlerdeki modellemelerle arasındaki ilişkiyi araştırırken, diğer taraf ise kısmi diferansiyel denklemleri matematiğin diğer dallarının da gelişmesinde bir araç olarak kullanmıştır. Bu iki farklı bakış açısı ilk defa H.Poincaré tarafından 1890 yılındaki ünlü makalesinde açıkça dile getirilmiştir [1] . Poincaré elektrik, hidrodinamik, sıcaklık, manyetizma, optik vb. çok farklı alanlardaki önemli problemlerin çoğunun bir aileyi anımsattığını ve bu yüzden bunların ortak yöntemlerle çözülmesi gerektiğini belirtmiştir. Aynı makalede, matematiksel fizikteki çok farklı denklemlerinin matematikte önemli roller üstleneceği dair ileriyi gören bir görüş belirtilmiştir. Bu düşünce, 20. yüzyıl boyunca kısmi diferansiyel denklemlerin temel rolü olmuştur [2].

Kısmi diferansiyel denklemlerin tarihi çok eski olmasına rağmen, kayda değer yeni gelişmeler ancak 20.yüzyılın son yarısında gerçekleşmiştir. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin gelişiminin ana etmenlerinden biri, lineer olmayan dalga ilerleme problemleri üzerindeki araştırmalar olmuştur. Bu problemler uygulamalı matematik, fizik, mühendislik, akışkan dinamiği, lineer olmayan optik, katı mekanik, plazma fiziği, kuantum alan teorisi ve katı-hal fiziği gibi çok farklı alanlarla ilgilidir. Özellikle, lineer olmayan dalga denklemlerinin yeni çözümleri, lineer dalga denklemlerinin çözümlerinden farklıdır. Bunlara en iyi örnek şok dalgaları, su dalgaları, solitonlar ve soliton dalgalarıdır. Solitonların en dikkat çekici özellikleri, yöresel bir dalga formu olmaları, öyle ki, öteki solitonlarla etkileşime girdiklerinde solitonların değişmemesi ve partikül benzeri bir davranış göstermeleridir. Gerçektende lineer olmayan dalga teorisi ve solitonlar üzerindeki son 30 yıldaki araştırmalardan devrim sayılabilecek çok fazla bilgi edinilmiştir. Bu devrim boyunca, fiziksel, kimyasal ve biyolojik sistemlerde kayda değer ve beklenmeyen olaylar gözlenmiştir [3].

Bu tezde, bazı özel lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hiperbolik tanjant (tanh) yöntemi ile çözümlerini inceleyeceğiz.

Fiziksel sistemlerin matematik modellemeleri genellikle lineer olmayan değişimsel (evolution) denklemleriyle gösterilir. Bu tür denklemlerin açık çözümleri, buna bağlı fiziksel problemlere bakış açışımızı değiştirdiğinden büyük bir öneme sahiptir.

Son yıllarda, lineer olmayan değişimsel denklemlerinin açık çözümlerinin elde etmek için bazı direkt ve cebirsel yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden en etkili olanlarından biri hiperbolik tanjant (tanh) fonksiyonu yöntemidir. Genel olarak, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünü elde etmek için genel bir yöntem yoktur. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler genellikle çok çeşitli yöntemler ve sayısal çözümlerle çözülürler. Fakat tüm bu yöntemlerin ortak bir noktası vardır. Bu da verilen kısmi diferansiyel denklemin uygun dönüşümler yapılarak adi diferansiyel denkleme indirgenmesine dayanır. Bu yöntemin diğer yöntemlere nazaran üstün olmasının sebebi, çözümlerin hiperbolik tanjant fonksiyonlarının seri toplamları şeklinde yazılmasıdır. Bu da tanh-fonksiyonunun türevlerinin yine tanh-fonksiyonu türünden yazılabilmesinin bir sonucudur.

1.BÖLÜM: TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

1.1.Temel Terimler ve Kavramlar

Tanım 1.1. Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevler veya diferansiyeller içeren denklemlere *diferansiyel denklem* denir. Türevleri alınan y değişkenine *bağımlı değişken* ve y 'nin türevlerini aldığımız değişkenlere de *bağımsız değişkenler* denir.

Tanım 1.2. Bir diferansiyel denklem, bir veya birkaç bağımlı değişkenin bir tek bağımsız değişkene göre türevlerini içeriyorsa bu denklem *adi diferansiyel denklem* olarak adlandırılır. Genel olarak adi diferansiyel denklem

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1.1}$$

Örnek 1.1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{1.1.2}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t \tag{1.1.3}$$

$(1.1.2)$ ve $(1.1.3)$ denklemleri adi diferansiyel denklemlerdir. $(1.1.2)$ denkleminde x tek bağımsız değişken ve y bağımlı değişkendir. $(1.1.3)$ denkleminde ise t bağımsız değişken iken x bağımlı değişkendir $[4]$.

Tanım 1.3. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek basamaktan türeve *diferansiyel denklemin basamağı* denir.

Örneğin $(1.1.2)$ denklemi 2.basamaktan bir diferansiyel denklemdir. Çünkü bu denklemin içindeki en yüksek türev ikinci basmaktan türevdir. $(1.1.3)$ denklemi ise 4.basamaktan adi diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.4. İki veya daha çok bağımsız değişken ile bir veya daha çok bağımlı değişkeni ve bağımsız değişkenlerine göre kısmi türevlerini içeren denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir. z, bağımlı, x, y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak,

$$F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ldots,\frac{\partial^n z}{\partial x^n},\ldots,\frac{\partial^n z}{\partial y^n})=0 \qquad (1.1.4)$$

biçimindedir.

Örnek 1.2.

$$\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=v \qquad (1.1.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1.1.6)$$

$(1.1.5)$ ve $(1.1.6)$ denklemleri kısmi diferansiyel denklemlerdir. $(1.1.5)$ denkleminde s ve t bağımsız değişkenler ve v bağımlı değişkendir. $(1.1.6)$ denkleminde ise x,y ve z bağımsız değişkenler olup, u bağımlı değişkendir.

Örnek 1.3.

$$\begin{aligned} w\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}&=x+y \\ v\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}&=x-y \end{aligned} \qquad (1.1.7)$$

denklemi ise birinci basamaktan iki bağımsız değişkenli iki bilinmeyenli bir kısmi diferansiyel denklem takımıdır.

Tanım 1.5. Bir kısmi diferansiyel denklemin derecesi tam ve rasyonel hale getirilen denklemdeki en yüksek basamaktan türevin derecesine denir.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1.1.8}$$

İkinci basamaktan ikinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklemdir [5].

Diferansiyel denklemleri başka özelliklerine göre sınıflandırabiliriz. Bunun için de aşağıdaki terimi tanımlamak gerekir.

Tanım 1.6. Bir diferansiyel denklemde;

(a) her bağımlı değişken ve her türev sadece birinci dereceden ve

(b) bağımlı değişken ve türevleri çarpım şeklinde bulunmuyorsa

bu diferansiyel denkleme *lineer diferansiyel denklem* adı verilir. Lineerlik şartlarını sağlamayan denklemlere ise *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir.

Örnek 1.4.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 7\frac{\mathrm{d}y}{dx} - 4y = 0 \tag{1.1.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{dx^4} + x\frac{\mathrm{d}^2 y}{dx^2} - x^2\frac{\mathrm{d}y}{dx} = xe^{3x} \tag{1.1.10}$$

denklemleri lineer olup, y bağımlı değişkenine ve onun türevlerine göre y veya y' nin türevlerini çarpım şeklinde değildirler.

Örnek 1.5.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0 \tag{1.1.11}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0 \tag{1.1.12}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6y = 0 \qquad (1.1.13)$$

denklemleri ise lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir. $(1.1.11)$ denklemi lineer değildir. Çünkü bağımlı değişken y olup, son terimde $6y^2$ 2.derecedendir. $(1.1.12)$ denklemi, ikinci terimdeki $5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ birinci türev üçüncü dereceden olduğundan dolayı lineer değildir. Son olarak, $(1.1.13)$ denklemi ise ikinci terimdeki $5y\left(\frac{dy}{dx}\right)$ çarpımından dolayı lineer değildir.

Ayrıca lineer diferansiyel denklemler, bağımlı değişkenlerin ve türevlerinin katsayıları göre de sınıflandırılmaktadır. Şöyle ki, $(1.1.9)$ denklemi *sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklem* iken (1.10) denklemi *değişken katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir* $[4]$.

Kısmi diferansiyel denklemleri bir operatör[1] formunda da yazabiliriz.

$$L_x u(x) = f(x) \qquad (1.1.14)$$

Burada da L_x bir operatördür. L_x operatörü

$$L_x(au + b\gamma) = aL_x u + bL_x\gamma \qquad (1.1.15)$$

şartını sağlıyorsa; L_x lineer bir operatör olarak adlandırılır. u ve γ keyfi iki fonksiyon ve a ve b keyfi iki sabittir. $f(x) \equiv 0$ ise L_x denklemi homojen lineer denklem adını alır.

Eğer L_x lineer değilse, $L_x u(x) = f(x)$ denklemi lineer olmayan bir denklemdir.

Lineer homojen bir adi diferansiyel denkleminin genel çözümü $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitler ile doğrusal bağımsız $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ çözüm fonksiyonlarının lineer bileşenleridir. Diğer bir ifade ile; eğer

[1] **Operatör** matematiksel bir kural olup, bir fonksiyona uygulandığında farklı bir fonksiyon üretir $[6]$.

$$Lu(x)=0 \qquad (1.1.16)$$

şeklindeki n. basamaktan homojen adi bir diferansiyel denklemin n lineer bağımsız çözüm fonksiyonları, keyfi $c_1, c_2, ..., c_n$ değerleri için

$$u(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \qquad (1.1.17)$$

ifadesi (1.16) denkleminin genel çözümüdür. Buna adi diferansiyel denklemler için *Lineer Süper Pozisyon Prensibi* denir.

Dikkat edersek, (1.16) genel çözümü n keyfi sabite bağlıdır.

$$Lu_x(x)=0 \qquad (1.1.18)$$

şeklindeki lineer homojen bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü ise keyfi sabitler yerine keyfi fonksiyonlar içerir. Bu yüzden $(1.1.18)$ denkleminin sonsuz çözümü vardır. Eğer bu $(1.1.18)$ denklemin sonsuz çözüm kümelerini $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ ile gösterirsek; o zaman bunların sonsuz lineer birleşimleri

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \qquad (1.1.19)$$

biçiminde yazılır. Burada c_n'ler keyfi sabittir. Bununla beraber bu sonsuz seri düzgün yakınsak olmazsa $(1.1.18)$ denkleminin bir çözümü olmayabilir. Bu yüzden, süper pozisyon prensibi kısmi diferansiyel denklemler için her zaman doğru değildir. Eğer $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ fonksiyonları $(1.1.18)$ denkleminin çözüm fonksiyonları ise,

$$u(x)=\sum_{n=1}^{n} c_n u_n(x) \qquad (1.1.20)$$

fonksiyonu da $(1.1.18)$ denkleminin bir çözümü olur. Lineer homojen adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi lineer süper pozisyon prensibi $(1.1.19)$ ifadesindeki sonsuz serinin yakınsak olması şartıyla lineer homojen kısmi diferansiyel denklemlere de uygulanabilir $[3]$.

Genel olarak x ve y gibi iki bağımsız değişkenli ikinci basamaktan lineer kısmi diferansiyel denklem

$$Au_{xx} + Bu_x + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{1.1.21}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem, xy uzayının herhangi bir bölgesinde $B^2 - 4AC$ ' nin pozitif, negatif ve sıfır olmasına göre sınıflandırılır.Buna göre

$$B^2 - 4AC \begin{cases} > 0 & \text{Hiperbolik} \\ = 0 & \text{Parabolik} \\ < 0 & \text{Eliptik} \end{cases}$$

olarak adlandırılır. Hiperbolik, parabolik ve eliptik denklemlerin örnekleri sırasıyla klasik dalga denklemi, yayılma denklemi ve Laplace denklemleridir.

Uygulama	Diferansiyel denklem	Katsayıların Değeri	$B^2 - 4AC$	K.D.D sınıfı
Dalga Denklemi	$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$	$A = 1, B = 0, C = -\alpha^2$	Pozitif	Hiperbolik
Yayılma Denklemi	$u_t = \alpha^2 u_{xx}$	$A = 0, B = 0, C = -\alpha^2$	Sıfır	Parabolik
Poisson's Denklemi	$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$	$A = 1,\ B = 0,\ C = 1$	Negatif	Eliptik

Bu sınıflandırmaların her birinde $(1.1.21)$ denklemi farklı özellikler içeren çözümlere sahiptir. $A, B, ..., F$ sabit ve $G=0$ olması durumunda $(1.1.21)$ denklemi her zaman $u=e^{\lambda x+\mu y}$ şeklinde bir çözüme sahiptir. Burada sabit olan λ ve μ

$$A\lambda^2 + B\lambda\mu + C\mu^2 + D\lambda + E\mu + F = 0 \qquad (1.1.22)$$

denklemini sağlarlar. Bu denklem ise analitik geometride $\lambda\mu$ düzleminde bir konik denklemini göstererek ve $B^2 - 4AC$ 'nin değişimine göre farklı tipte konikler ortaya çıkar. Yukarıda kullanılan terminoloji bu gerçeğe dayanır $[7]$.

1.2. Diferansiyel Denklemlerin Kaynağı ve Uygulama Alanları

Diferansiyel denklemler; bilim ve mühendisliğin birçok dalında karşılaşılan çok sayıda problemde karşımıza çıkmaktadır. Bu problemlerin sayısı sayfalar dolusu olabilir. Bu problemlerin bir kaçı aşağıda verilmiştir:

a) Gezegen, uydu, roket vb. gibi nesnelerin hareketlerinin belirlenmesi probleminde,
b) Bir elektrik devresindeki akım veya şarjın belirlenmesin probleminde,
c) Bir metal çubuk veya tabakanın ilettiği ısı miktarının belirlenmesi probleminde,
d) Bir telin veya zarın titreşiminin belirlenmesi probleminde,
e) Radyoaktif bir maddenin parçalanması veya bir popülasyonun artış hızının belirlenmesinde,
f) Kimyasal reaksiyon araştırmalarında,
g) Eğrilerin geometrik özelliklerinin belirlenmesi problemlerinde,

diferansiyel denklemler kullanılır. Hemen, bu nasıl olmaktadır sorusu karşımıza çıkar? Yukarıda problemlerde geçen nesnelerin hepsi kesin bazı bilimsel kanunlara uymak zorundadır. Bu kanunlar; bir veya birkaç niceliğin diğer niceliklere bağlı olarak değişim oranlarını içerir. Bu değişim oranları ise matematiksel olarak türevler ile gösterilir. Çeşitli türevler ve bilimsel kanunlarla gösterilen, yukarıda bahsedilen durumların tümü türevleri içeren matematiksel denklemler, yani diferansiyel denklemlerdir. Doğal olarak hemen şu soru aklımıza gelir: Bir diferansiyel denklemden nasıl yararlı bilgi elde edinilebilinir? Bu temel olarak, bu denklemin çözümünün elde edilmesi ile mümkün olabilir. Bu çözümün elde edilmesinin mümkün olmadığı durumlarda ise, diferansiyel denklemler teorisi kullanılarak çözüm hakkında bilgi edinilmesiyle mümkün olmaktadır. Bu cevabı anlamak için de; diferansiyel denklemin çözümüyle kastedilenin ne olduğunu tartışmalıyız $\left[4\right]$.

1.3. Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Birinci bölümde belirttiğimiz gibi kısmi diferansiyel denklem; bir veya birkaç bağımsız değişkene göre bir veya daha fazla bağımlı değişkenin kısmi türevlerini içeren denklemlerdir.

Bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli diferansiyellenebilen $u = u(x, y, ...)$ fonksiyonunun basit bir çözümü $u = f\left(x, y, ...\right) \in C^n\left[D\right]$, tüm kısmi türevlerini içeren denklemin var olması ve $F(x, y, u, u_x, ...) = 0$ eşitliğinin sağlanması demektir. u ve u ’ nun kısmi türevleri D bölgesinin bazı veya tüm noktalarında süreksiz ise $u = u(x, y, ...)$ çözümüne *zayıf (veya genel) çözüm* denir.

1.3.1. Bir Adi Diferansiyel Denklemin Çözümü

Tanım 1.7. *n.*dereceden bir adi diferansiyel denklem

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0 \qquad (1.3.1)$$

olsun. Burada F gerçek bir fonksiyon $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}$ ise $(n+2)$ tane bağımsız değişkendir.

Farz edelim ki f her x için bir $I \subset R$ aralığında tanımlı ve her $x \in I$ için n.dereceden türevlenebilen bir gerçek bir fonksiyon olsun. Bu aralıkta tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlarsa $(1.3.1)$ denkleminin *açık bir çözümüdür.*

$$F\left[x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)\right] \tag{1.3.2a}$$

ifadesi her $x \in I$ için tanımlı ve

$$F\left[x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)\right] = 0 \tag{1.3.2b}$$

olmalıdır. Yani, $y = f(x)$ ve türevleri $(1.3.1)$ denklemini I aralığında tanımlı ve özdeş olarak sağlamalıdır.

I aralığında tanımlı ve gerçek bir x değişkenine bağlı en az bir gerçek f fonksiyonu tanımlı ise ve bu fonksiyon bu aralıkta $(1.3.1)$ denkleminin bir kapalı çözümü ise $g(x, y) = 0$ bağıntısına, $(1.3.1)$ denkleminin *kapalı bir çözümü* denir.

Her iki çözüme, açık ve kapalı çözümlerine kısaca bundan sonra *çözüm* diyeceğiz. Kabaca, $(1.3.1)$ diferansiyel denkleminin bir çözümü denildiğinde; açık veya kapalı, x ve y arasında, türevleri içermeyen ve $(1.3.1)$ denklemini sağlayan bir ilişki kastedilecektir.

Örnek 1.6. Her x gerçek sayısı için tanımlı

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}) = 2\sin x + 3\cos x \tag{1.3.3}$$

fonksiyonu, her x gerçek sayısı için

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \qquad (1.3.4)$$

diferansiyel denkleminin açık bir çözümü olsun. f fonksiyonu, her $x \in R$ sayısı için tanımlı ve ikinci türeve sahip bir fonksiyondur.

$$y'(x)=2\cos x-3\sin x$$

$$y''(x)=-2\sin x-3\cos x$$

$(1.3.4)$ diferansiyel denklemindeki $\frac{d^2y}{dx^2}$ yerine y'' ifadesini yerleştirdiğimizde her x gerçek sayısı için tanımlı

$$(-2\sin x-3\cos x)+(2\sin x+3\cos x)=0 \qquad (1.3.5)$$

ifadesini elde ederiz. Bu yüzden, her $x \in R$ için tanımlı, $(1.3.3)$ denklemiyle verilen y fonksiyonu $(1.3.4)$ diferansiyel denkleminin bir açık çözümüdür.

Örnek 1.7.

$$x^2+y^2=25 \qquad (1.3.6)$$

bağıntısı

$$x+y\frac{dy}{dx}=0 \qquad (1.3.7)$$

diferansiyel denkleminin $-5 \langle\, x \,\langle\, 5$ aralığıyla tanımlı I açık aralığında tanımlı kapalı bir çözümüdür. $(1.3.6)$ bağıntısı tanımlayan iki gerçek fonksiyon f_1 ve f_2 olmak üzere,

$$f_1(x)=\sqrt{25-x^2}\ , \qquad (1.3.8a)$$

$$f_2(x)=-\sqrt{25-x^2} \qquad (1.3.8b)$$

fonksiyonları, her $x \in I$ gerçek sayısı için tanımlı ve $(1.3.7)$ diferansiyel denkleminin I üzerinde açık çözümleridir. Şimdi bu diferansiyel denklemin çözümlerinden birinin f_1 olduğunu gösterelim.

$$f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

olduğundan her $x \in I$ gerçek sayısı için

$$f_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$(1.3.7)$ diferansiyel denkleminde y yerine $f_1(x)$ fonksiyonu ve onun türevi yerlerine konulduğunda; her $x \in I$ gerçek sayısı için

$$x + \left[\sqrt{25 - x^2}\right].\left[\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}\right] = 0 \qquad \text{veya} \qquad x - x = 0 \qquad (1.3.9)$$

gerçeklediği görülür. Bu yüzden $f_1(x)$ fonksiyonu $(1.3.7)$ diferansiyel denkleminin I üzerinde açık bir çözümüdür. Şimdi de,

$$x^2 + y^2 = -25 \qquad (1.3.10)$$

bağıntısını ele alalım. Bu bağıntıda $(1.3.7)$ diferansiyel denkleminin I üzerinde açık bir çözümü olabilir mi? Bunun için $(1.3.6)$ bağıntısının x değişkenine göre diferansiyeli aldığımızda

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad veya \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad (1.3.11)$$

elde ederiz. Bu ifadeyi $(1.3.7)$ diferansiyel denklemine yerleştirdiğimizde

$$x + y\left(-\frac{x}{y}\right) = 0 \qquad (1.3.12)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece $(1.3.10)$ bağıntısının biçimsel olarak $(1.3.7)$ diferansiyel denklemini formül olarak sağladığını göstermiş olduk. Fakat sadece bu eşitlik $(1.3.7)$ denkleminin kapalı bir çözümü olduğunu göstermez. Şu ana kadar sadece $(1.3.10)$ denkleminin x ve y arasında bir bağıntı olduğunu ve bu bağıntının $(1.3.7)$ diferansiyel denklemini biçimsel bir özdeşliğe indirgediğini gösterdik. Bu özdeşliğe bir *biçimsel çözüm* denir. Bu özdeşlik görünürde bir çözüm olabilir. Fakat bunun araştırılması gerekir. Bunun için $(1.3.10)$ denklemini y değişkenine göre çözersek;

$$y = \mp\sqrt{-25 - x^2} \qquad (1.3.13)$$

bulunur. Burada her gerçek x değeri için y değerleri gerçek olmaz. Yani $(1.3.10)$ bağıntısı herhangi bir aralıkta herhangi bir gerçek fonksiyonu tanımlamaz. Bu yüzden $(1.3.10)$ denklemi bir kapalı çözüm olmayabilir; fakat $(1.3.7)$ diferansiyel denkleminin biçimsel bir çözümüdür.

Tanım 1.8.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1.3.14)$$

*n.*dereceden bir adi diferansiyel denklem olsun. n keyfi sabit içeren $(1.3.14)$ denkleminin bir çözümü $F = (x, y, c_1, \ldots, c_n)$ biçiminde olup $(1.3.14)$ denkleminin *genel bir çözümü* denir.

$(1.3.14)$ denkleminin genel çözümündeki n keyfi sabitlere özel değerler verilerek elde edilen çözüme $(1.3.14)$ denkleminin bir *özel çözümü* denir.

$(1.3.14)$ denkleminin genel çözümü ve genel çözümdeki keyfi sabitlere değer vererek elde edilemeyen çözümlere $(1.3.14)$ denkleminin *bir tekil çözümü* denir.

Örnek 1.8.

$$\frac{dy}{dx}=2x \qquad (1.3.15)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Her gerçek x sayısı için tanımlı $f_0(x)=x^2$ fonksiyonu $(1.3.15)$ denkleminin bir çözümüdür. Aynı şekilde her gerçek x sayısı için tanımlı $f_1(x)=x^2+1$, $f_2(x)=x^2+2$ ve $f_3(x)=x^2+3$ fonksiyonları da $(1.3.15)$ denkleminin bir çözümüdür. Gerçekte, c herhangi bir gerçek sayı olmak üzere her gerçek x sayısı için tanımlı

$$f(x)=x^2+c \qquad (1.3.16)$$

fonksiyonu $(1.3.15)$ denkleminin bir çözümüdür. Bu denklemdeki c sabiti keyfi bir sabittir. Bu yüzden birinci basamaktan $(1.3.15)$ diferansiyel denkleminin bir keyfi sabite sahip bir çözümü olduğunu söyleyebiliriz. Bu çözüme $(1.3.15)$ diferansiyel denkleminin *genel çözümü* ve $(1.3.16)$ diferansiyel denklemindeki c keyfi sabitine özel bir değer vererek elde edilen f_1 , f_2 ve f_3 fonksiyonlarına da $(1.3.15)$ diferansiyel denkleminin bir *özel çözümü* denir.

Örnek 1.9.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0 \qquad (1.3.17)$$

ikinci basamaktan diferansiyel denklemi ve her gerçek x sayısı için tanımlı

$$f(x)=c_1e^x+c_2e^{2x} \qquad (1.3.18)$$

fonksiyonu verilsin. Açıkça ispatlanabilir ki, herhangi iki c_1 ve c_2 değeri için $(1.3.18)$ fonksiyonu $(1.3.17)$ diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Bu yüzden, $(1.3.18)$ fonksiyonu $(1.3.17)$ diferansiyel denkleminin bir *genel çözümüdür*. Ayrıca,

$$f_1(x) = 5e^x + 6e^{2x} \tag{1.3.19a}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}e^x - 3e^{2x} \tag{1.3.19b}$$

fonksiyonları da $(1.3.17)$ diferansiyel denkleminin *özel çözümleridir* $[4]$.

1.3.2. Bir Kısmi Diferansiyel Denklemin Çözümü

Bir *kısmi diferansiyel denklemin çözümü*, denildiğinde bu kısmi diferansiyeli sağlayan ve türev içermeyen değişkenler arasındaki açık (explicit) veya kapalı (implicit) bağıntılar kastedilir.

Örnek 1.10. Aşağıda verilen birinci basamaktan kısmi diferansiyel denklemi ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y^2 \tag{1.3.20}$$

bu denklemde u bağımlı değişken, x ve y bağımsız değişkenlerdir. Bu denklemin integrali alınırsa

$$u = \int \left(x^2 + y^2\right)\partial x + \phi(y) \tag{1.3.21}$$

burada $\int \left(x^2 + y^2\right)\partial x$ x değişkenine göre kısmi integrali, y sabit değişkeni ve $\phi(y)$, y değişkenine bağlı keyfi bir fonksiyondur. Buradan

$$u = \frac{x^3}{3} + xy^2 + \phi(y) \tag{1.3.22}$$

$(1.3.20)$ denkleminin çözümüdür.

Örnek 1.11. Şimdi de aşağıdaki ikinci basamaktan kısmi diferansiyel denklemi ele alalım.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^2 - y \qquad (1.3.23)$$

Öncelikle bu denklem

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2 - y$$

şeklinde yazılır. Bu denklemde x değişkenini sabit tutularak, y değişkenine göre kısmi integral alınırsa, buradan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3 y - \frac{y^2}{2} + \phi(x) \qquad (1.3.24)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadedeki $\phi(x)$, x değişkenine bağlı keyfi bir fonksiyon olup benzer olarak bu ifadenin, y değişkenini sabit tutularak, x değişkenine göre kısmi integral alınırsa

$$u = \frac{x^4 y}{4} - \frac{xy^2}{2} + f(x) + g(y) \qquad (1.3.25)$$

çözümünü elde ederiz.

Buradan, şimdiye kadar çözdüğümüz örneklerden şu sonuçları elde ederiz:

- adi diferansiyel denklemlerin çözümleri *keyfi sabitler* içerirken,
- kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri *keyfi fonksiyonlar*

içerir.

Ayrıca dikkat edilirse, birinci mertebeden $(1.3.20)$ kısmi diferansiyel denkleminin çözümü *bir keyfi fonksiyon*, ikinci mertebeden $(1.3.23)$ kısmi diferansiyel denkleminin çözümü ise *iki keyfi fonksiyon* içerir.

1.3.3. Başlangıç-Sınır Değer Problemleri

Hemen hemen bütün durumlarda kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümleri bazı ek şartları da sağlamak zorundadır. Bu ek şartlara *başlangıç veya sınır şartları* denir. Daha önceden belirtildiği gibi lineer bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü keyfi fonksiyonlar içerir. Bunun anlamı; sonsuz tane çözüm vardır ve biz sadece başlangıç veya sınır koşullarını belirtmek şartıyla özel bir çözüm elde edebiliriz.

Genelde başlangıç ve sınır koşulları problemin kendisinden kaynaklanır. Bir kısmi diferansiyel denklemin bağımsız değişkenlerinden biri zaman (t) olduğunda, $u(x,t)$ bağımlı değişkeninin $t = t_0$ veya $t = 0$ anındaki başlangıç koşulu, bağımlı değişkenin fiziksel durumu özel hale getirir. $u(x,t)$ belirlemek için sık sık $u(x,0)$ veya $u_t(x,0)$ değerleri kullanılır. Bu koşullara *Cauchy (veya başlangıç) koşulları* denir. Bu koşulların tek bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart olduğu gösterilebilir. Cauchy verileri ile $t = 0$ doğrusu üzerinde belirtilen başlangıç değer probleminin çözümünü bulmaya *Cauchy problemi* veya *başlangıç-değer problemi* denir. Her fiziksel problemde, belirli bir denklemin değerleri belirtilmiş D uzayında tanımlı, D' nin ∂D sınırında verilen $u(x,t)$ bağımlı değişkeni çözülmelidir. Sınırın sonlu bir hacminin olması gerekmez. Bazı durumlarda sınırın bir parçası sonsuz da olabilir. Sınırın sonsuzda olduğu bir problemde sınırsız koşullardaki sonsuzdaki çözümün davranışı belirtilmelidir.Bu tür problemlere *sınır-değer problemleri* denir ve bu problemler uygulamalı matematik ve matematiksel fiziğin en temel problemlerinden biridir $[3]$.

Diğer bir açıdan, örneğin $u = x^2 - y^2$, $u = e^x \cos y$, $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ denklemlerinin tamamı $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplace denklemi için birer çözümdür. Bu yüzden aranılan çözümün hangisi olduğuna sınır değerlerinden karar verilir. Öncelikle başlangıç koşulları ($x = 0$ 'daki koşullar) ve ardından sınır koşullarının (x 'in farklı değerlerindeki koşullar) özel olarak incelenmesiyle lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşmak mümkündür $[7]$.

Fiziksel problemlerin formüle edilmesinde sık sık kullanılan üç önemli tipte sınır koşulları vardır. Bunlar :

(a)Dirichlet koşulları: u bir D bölgesinin ∂D sınırındaki tüm noktalar için tanımlanmıştır. Verilen $L_x u(x) \equiv 0$ denkleminin D bölgesi içindeki ∂D 'de belirtilen u değerleri için problemin çözümünü bulmaya *Dirichlet sınır-değer problemi* denir.

(b)Neumann koşulları: $\frac{\partial D}{\partial n}$ normal türevin ∂D sınırındaki değerleri özel hale getirilmiştir. Bu durumda, problem *Neumann sınır- değer problemi* denir.

(c)Robin koşulları: $(\frac{\partial D}{\partial n} + au)$ değeri ∂D sınırında özel hale getirilmiştir. Bu değerlere karşılık gelen probleme *Robin sınır-değer problemi* denir.

Bir kısmi diferansiyel denklem ile belirtilen; tanımlı bir bölgede verilen başlangıç ve /veya sınır (ve diğer ek şartları) şartlarıyla ve aşağıda verilen koşulları sağlayan problem *iyi tanımlanmıştır* denir:

- **Varlık : **Problemin en az bir çözümü olmalıdır .
- **Teklik : **En çok bir çözüm vardır.
- **Kararlılık:** Sonuç kararlı olmalıdır; yani sürekli olarak verilere bağlı olmalıdır. Başka bir değişle verilen verilerde olabilecek küçük bir değişiklik çözümde de küçük bir değişiklik oluşturmalıdır.

Kararlılık kriteri fiziksel problemler için gerekli bir kriterdir. Matematiksel bir problemde; verilerdeki küçük bir değişiklik, çözümde de küçük bir değişiklik oluşturuyorsa, genellikle fiziksel olarak gerçekçi kabul edilir [3].

1.4.Diferansiyel Denklem Çözüm Yöntemleri

Bir diferansiyel denklemi çözeceğiz dediğimiz zaman bu diferansiyel denklemin bir veya daha fazla çözümünü bulacağız anlamına gelmez. Diferansiyel denklemlerin çok çeşitli çözüm yöntemleri vardır. Fakat bu yöntemler her diferansiyel denkleme uygulanamaz.

Farz edelim ki bir diferansiyel denklemi belli bir yöntem ile çözdük. Fakat, bu sonlu elemanter fonksiyonların toplamı şeklinde (veya diğer bir deyişle kapalı biçiminde) bir f fonksiyonu bulduk anlamına gelmez. Yani, bir diferansiyel denklemi çözdüğümüzde çözüm için bir formül bulduk anlamına gelmez. Nispeten çok az sayıda diferansiyel denklemin çözümü açık şekilde yazılabilir. Bazı diferansiyel denklemler tam yöntemler uygulanarak çözülemezler. Böyle diferansiyel denklemler yaklaşık olarak çeşitli yöntemler uygulanarak çözülürler.

Bu yöntemlerden bazıları seri yöntemi, nümerik yöntemler ve grafik yöntemidir. Seri yönteminde çözümler sonsuz seri toplamlar şeklindedir. Nümerik yöntemlerle, bağımsız değişkenlerin seçilen değerleri için çözüm fonksiyonunun yaklaşık değerleri bulunur. Grafik yöntemiyle çözümlerin yaklaşık grafikleri bulunur. Fakat bu yöntemler tam analitik çözüm yöntemleri gibi istenilen sonuçları vermez. Çünkü elde edilen çözümler yaklaşık çözümlerdir.

Bu yüzden modern bilim ve mühendislik problemleri diferansiyel denklemlerin önemini arttırmıştır.

2.HİPERBOLİK TANJANT(TANH METHOD) YÖNTEMİ

2.0.GİRİŞ

Lineer olmayan dalga olayı doğa bilimlerinin birçok alanında karşımıza çıkar. Örneğin, sıvı dinamiği [8], kimya (kimyasal reaksiyonlar) [9], matematiksel biyoloji (popülasyon dinamiği) [10], katı hal fiziği (lattice titreşimleri)[11] vb. alanlarda rastlanmaktadır. Bu problemlerin tam çözümünü elde etmeye yönelik artan ilgiye karşılık olarak çok farklı analitik çözüm yöntemleri uygulanmaktadır. Hiperbolik tanjant yöntemi bir boyutlu lineer olmayan dalga ve değişimsel (evolution) denklemlerinin yönlendirilmiş dalga (Traveling Wave) çözümlerinin bulunmasında kullanılan çok güçlü bir yöntemdir. Bu yöntem özellikle dağıtıcı etkiler, reaksiyon-yayılım olayları ve iç çevrim problemlerinin çözümünde etkili olduğu görülmüştür. Çok geniş bir çeşitlilikteki lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin tam [12,14] ve yaklaşık çözümleri [13] direkt ve sistematik bir şekilde bu yöntem ile bulunabilir.

Tanh yöntemi bu şekli ile ilk kez Willy Malfliet (1992) [11] ve arkadaşları tarafından (1996) geliştirilmiştir [12,15]. Çünkü daha önceden de tanh-fonksiyonu yöntemi çeşitli araştırmacılar tarafından kullanılmıştır. Bu teknik önceden Huibin ve Kelin (1990) [16] tarafından yüksek basamaktan bir KdV denklemini çözmek için ve başka araştırmacılar tarafından (örneğin B.Liu ve arkadaşları(1993) [17]) pek pratik olmayan bir şekilde kullanılmıştır. Bu araştırmacılar olası bir çözüm bulmak için tanh fonksiyonu şeklinde bir kuvvet serisini ele alarak bu açılımı direkt olarak denklemde yerine koyarak çözmeye çalışmışlardır. Fakat bu kuvvet serisinin katsayılarının ve hızının hesaplanabilmesi için çok sayıda cebirsel denklem çözümü gerekmektedir. Bu sebeple G.C.Das ve Jnanjyoti Sarma (1999) gibi araştırmacılar bu yönteme tanh-yöntemi denilmesine karşı çıkmışlardır [18].

Korunumlu (lineer olmayan dalgaların şekillerini kaybetmeden yayıldığı) sistemlerde, çözümler direkt olarak integral alınarak, uygun dönüşümler, değişkenlerin değiştirilmesiyle veya diğer özel tekniklerle bulunabilir. Ayrıca kısmi diferansiyel denklemler Hirota bilineer tekniği $[20]$, Truncated Painleve açılımı $[21]$, direkt cebirsel yöntemler$[21,22]$ vb. daha sofistike yöntemlerle çözülebilir. Diğer kısmi diferansiyel denklemleri çözmek kolay olmayabilir. Örneğin, KdV-Burger denklemi $[24]$ o kadar kolay olmasına rağmen, bu denklemin kapalı biçimdeki çözümlerini elde etmek için özel dönüşümlere ihtiyaç duyulur.

Bu cebirsel karmaşıklıktan kurtulmak için Tanh yöntemi geliştirilmiştir $[11]$. Bu teknik tamamıyla yönlendirilmiş dalgaların bulunmasıyla kısıtlı bir tekniktir. Bu yüzden, bir boyutlu şok dalgaları ve tek (solitary) dalga çözümleriyle ilgilenilmiştir. Tanh yöntemi ve onun genelleştirilmesine dayandırılarak yönlendirilmiş dalga çözümlerinin tam çözümünü bulmak için birçok bilgisayar yazılım programları geliştirilmiştir $[25]$.

Bu teknikte, hiperbolik tanjant fonksiyonunun türevleri de tekrar hiperbolik tanjant fonksiyonu olacağından tanh fonksiyonu şeklinde yeni bir değişken tanımlanmıştır. Örneğin

$$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$$

$$(\tanh x)'' = -2\tanh x(\tanh x)' = -2\tanh x + 2\tanh^2 x \qquad \text{v.b...}$$

Bu şekilde, direkt analiz ile geniş bir sınıftaki denklemlere bu yöntem uygulanabilmektedir. Şimdi bu yöntemin nasıl uygulandığını gösterelim:

2.1.Tanh Yönteminin Ana Hatları

Bir boyutlu lineer olmayan değişimsel ve dalga denklemleri genellikle

$$u_t = G(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, ...) \qquad \text{veya} \qquad u_{tt} = G(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, ...) \tag{2.1.1}$$

şeklinde gösterilir. Biz bu denklemlerin varsa yönlendirilmiş dalga çözümlerini ve bunların nasıl hesaplanacağını göstereceğiz.

İlk adım olarak x ve t bağımsız değişkenlerini yeni bir $\xi = k(x - Vt)$ değişkeni ile birleştirelim. Bu dönüşümü yapıldığında $u(x,t)$ fonksiyonu

$$u(x,t) = U(\xi) \qquad , \xi = k(x - Vt) \tag{2.1.2}$$

şekline dönüşür. Buradaki $U(\xi)$, V hızıyla ilerleyen dalga çözümlerini gösterir. Genellikle, k dalga sayısı keyfi olarak alınır, fakat bazı durumlarda özel bir sabit değer olarak da alınabilir $[22]$. Bu değişken hareketin ilerleme yönünü belirler. Buradaki k yönlü dalgaların dalga sayısını, V yönlü dalganın hızını göstermektedir. Her iki parametrede belirsiz olup, $k > 0$ durumunu ele alacağız. $u(x,t)$ bağımlı değişkeni $U(\xi)$ ile değiştirildiğinde $(2.1.1)$ denklemi

$$-kV\frac{dU}{d\xi} = G(U, k\frac{dU}{d\xi}, k^2\frac{d^2U}{d\xi^2}, ...) \tag{2.1.3}$$

veya

$$k^2V^2\frac{d^2U}{d\xi^2} = G(U, k\frac{dU}{d\xi}, k^2\frac{d^2U}{d\xi^2}, ...) \tag{2.1.4}$$

$U(\xi)$ şeklinde adi diferansiyel denklemlere dönüşürler.

Bizim ana amacımız bu adi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini hiperbolik tanjant fonksiyonu biçiminde bulmaktır. Bu amaçla da $(2.1.3)$ ve $(2.1.4)$ adi diferansiyel denklemlerinde yeni bir $Y = \tanh(\xi)$ bağımsız değişkeni tanımlanarak ve gerekli dönüşüm yapılarak $U(\xi)$ ifadesinin mümkün olabilecek sayıda integrali alınır. Daha sonra

$$\xi \to \pm\infty \quad \text{için} \quad U(\xi) \to 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d^nU(\xi)}{d\xi^n} \to 0 \quad (n = 1,2,3,...) \tag{2.1.5}$$

sınır koşulları göz önünde bulundurularak varsa tüm integral sabitleri sıfır olarak alınır.

Yönlendirilmiş dalga çözümlerinin $\tanh(\xi)$ şeklinde olduğu varsayılarak, $Y = \tanh(\xi)$ şeklinde yeni bir bağımlı değişken tanımlanarak $U(\xi) = F(Y)$ adi diferansiyel denklemindeki katsayılar yalnız Y değişkenine bağlı olup $(2.1.3)$ ve $(2.1.4)$ denklemindeki $\frac{d}{d\xi}$, $(1-Y^2)\frac{d}{dY}$, ... vb. ifadeler ile yer değiştirir. Böylece

$$u(x,t)=U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n \quad \text{ve} \quad Y=\tanh(\xi)=\tanh\left[k(x-Vt)\right] \qquad (2.1.6)$$

şeklinde çözümler bulunur.

Buradaki N değeri, $(2.1.6)$ denkleminin adi diferansiyel denkleme yerleştirilmesiyle elde edilen en yüksek dereceli terimlerin eşitlenmesi ile bulunur.

Şayet gerekirse, bu işlemlere sınır koşulları da eklenebilir. Her zamanki sınır koşullarında, yani, $\xi\to+\infty$ veya $\xi\to-\infty$ için $U(\xi)\to 0$ iken $Y\to+1$ veya $Y\to-1$ için $S(Y)\to 0$ olur. Bu genelleştirmeyi kaybetmeden, yalnız $Y\to+1$ limit değeri göz önünde bulundurulur.

Bir çok durumda N değeri 2 olarak bulunduğundan, $N=2$ olması durumunu ele alarak yöntemin işleyişini inceleyelim.

Bu durumda dalga çözümlerinin nasıl yok olduğu bilinmediğinden iki olası çözüm elde edilir.

Birinci çözüm:

$$S(Y)=F(Y)=b_0(1-Y)(1+b_1Y)=(1-Y)T(Y) \quad \text{ve} \quad T(1)\neq 0 \qquad (2.1.7a)$$

şeklindedir.

İkinci çözüm ise

$$S(Y)=G(Y)=d_0(1-Y)^2 \qquad (2.1.7b)$$

şeklindedir.

Birinci durumda $\xi\to+\infty$ için $S(Y)\approx e^{-2\xi}$ iken, ikinci durumda $\xi\to+\infty$ için $S(Y)\approx e^{-4\xi}$ oluşur.

Genelde N farklı açılım elde edilebilir. Böylece, $m=1,2,....$ olmak üzere $(1-Y)^m$ şeklinde bir çözüm olabileceğinden $(2.1.6)$ denklemi

$$u(x,t)=U(\xi)=(1-Y)^m\sum_{n=0}^{N}a_nY^n \quad , \quad Y=\tanh(\xi) \qquad (2.1.8)$$

ifadesine dönüşür. Bu durumda her bir m değeri için açılımın ayrı ayrı hesaplanması gerekir. Bu da bu tekniği daha sistematik hale getirir.

Ayrıca, $S(Y)$ ifadesinin bazı kısıtlamalarla gösterilmesi bize giden dalganın hızını belirlememizi sağlar. Bu hızın elde edilmesi pertürbasyon tekniğinde önemli bir yeri vardır $[4]$. Şimdi Tanh yöntemini göstermek için çok bilinen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde ayrıntılı bir şekilde uygulayalım.

2.2.Yöntemin Uygulamaları

Örnek 2.1. Burgers Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (2.2.1)$$

şeklinde ifade edilen Burgers denklemi en önemli lineer olmayan yayılım denklemlerinden biridir.

Bu denklem akışkanlar dinamiğindeki yayılan dalgalar için en basit lineer olmayan denklem modelidir. İlk olarak Burger tarafından (1948) bir boyutlu türbülansı tanımlamak için kullanılmıştır. Ayrıca bu denklem vizkositeli[2](viscous) bir ortamdaki ses dalgaları (Lighthill,1956), sıvı dolu vizkositeli elastik tüplerdeki dalgalar gibi birçok fiziksel problemlerde karşımıza çıkar $[3]$.

Bir önceki örnekte olduğu gibi öncelikle $u(x,t)=U(\xi)=U[k(x-Vt)]$ değişken değiştirmesi yapılarak kısmi diferansiyel denklem

$$-V\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}-ak\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=0 \qquad (2.2.2)$$

adi diferansiyel denklemine dönüştürülür. Bu denklemin bir defa integrali alınırsa,

[2] Vizkozluk , sıvı kesme hareketine karşı bir direnç gösterir ve bu direnç viskozluk adı verilen iç sürtünme şeklindedir.Vizkosite komşu sıvı tabakalarının birbiri üzerinde kaymalarından kaynaklanan sürtünme nedeni ile de ortaya çıkar.

$$-VU(\xi)+\frac{1}{2}U(\xi)^2-ak\frac{dU(\xi)}{d\xi}=C \qquad (2.2.3)$$

elde edilir. Bu denklemde de integral sabitini $C=0$ alınarak $Y=\tanh(\xi)=\tanh\left[k(x-Vt)\right]$ olmak üzere $U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n$ değişken değiştirmesini yapılırsa

$$-VS(Y)+\frac{1}{2}S(Y)^2-ak\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}=0 \qquad (2.2.4)$$

elde edilir. Bu denklemde $(2.1.6)$ açılımı yerleştirildiğinde

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}-ak\left(1-Y^2\right)\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}=0 \qquad (2.2.5)$$

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}-ak\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}+ak\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n+1}=0 \qquad (2.2.6)$$

ifadesine ulaşılır. Bundan sonra en yüksek dereceli Y terimlerini eşitlenir. Bu yerleştirmeden sonra, $(2.2.6)$ denkleminde ikinci terimde Y^{2N} ve son terimde Y^{N+1} ifadeleri oluşur. $2N=N+1$ eşitliğinden $N=1$ bulunur. Buradan, $S(Y)=b_0(1-Y)$ şeklinde bir tek çözüm elde edilir. Bu çözüm $(2.2.6)$ denkleminde yerine konursa

$$-V\left[b_0(1-Y)\right]+\frac{1}{2}b_0^2(1-Y)^2-ak\left(1-Y^2\right)(-b_0)=0 \qquad (2.2.7)$$

elde edilir. Bu ise

$$-V\left[b_0(1-Y)\right]+\frac{1}{2}b_0^2(1-Y)^2-ak\left(1-Y^2\right)(-b_0)=0 \qquad (2.2.8)$$

biçiminde yazılır. Bu denklemde de $(1-Y)$ çarpanını sadeleştirdiğimizde

$$-Vb_0+\frac{1}{2}b_0^2(1-Y)+akb_0(1+Y)=0 \qquad (2.2.9)$$

bulunur. Burada $Y \to 1$ limit değerini alınırsa

$$-Vb_0 + akb_0(1+1) = 0 \tag{2.2.10a}$$

$$V = 2ak \tag{2.2.10b}$$

hız değeri elde edilir. $(2.2.9)$ denklemi açık bir şekilde yazılırsa

$$-Vb_0 + \frac{1}{2}b_0^2 - \frac{1}{2}b_0^2 Y + akb_0 + akb_0 Y = 0 \tag{2.2.11}$$

$$ak - V + \frac{1}{2}b_0 + \left(ak - \frac{1}{2}b_0\right)Y = 0 \tag{2.2.12}$$

olur. Buradaki tüm katsayılar;

$$Y^0 \text{ terimli katsayılar: } \quad ak - V + \frac{1}{2}b_0 = 0 \tag{2.2.13a}$$

$$Y^1 \text{ terimli katsayılar: } \quad ak - \frac{1}{2}b_0 = 0 \tag{2.2.13b}$$

sıfırı eşitlenip çözüldüğünde

$$b_0 = V = 2ak \tag{2.2.14}$$

bulunur. Buradan, şok dalgasının bir çözümü

$$F(Y) = 2ak(1-Y) \tag{2.2.15}$$

biçiminde bulunur.

Örnek 2.Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{2.2.16}$$

şeklinde yazılır. Buradaki b sabittir. KdV denklemi en önemli kısmi diferansiyel denklemlerden biridir. Bu denklem sıvı dinamiğinde dikdörtgen şeklindeki bir kanaldaki sığ su dalgalarını tanımlamak için kullanılır. Bu denklem lineer olmayan terimin uç etkilerinin dağılım ile dengelendiği zamana bağlı dalga dağılım (dispersive) olayı için basit ve faydalı bir model denklemidir. İlk olarak iki Hollandalı bilim adamı D.J.Korteweg ve G. de Vries (1895) tarafından birleşik yönü sığ su dalgalarının yayılımını göstermek için kullanılmıştır. Bu denklemin tam çözümüne *soliton* denir. Su dalgaları (Johnson, 1980; Debnath, 1984), bir plazmadaki ion-akustik dalgalar (Washimi ve Taniuti, 1966), sıvı-gaz kabarcıklarındaki basınç dalgalarında (Van

Wijngarden, 1968), bir tüpte dönen akış (Leibovich, 1970) vb. gibi birçok fiziksel problemlerde bu denklem karşımıza çıkar $[3]$.

Bu denklemi tanh yöntemiyle çözelim. Öncelikle $u(x,t)=U(\xi)=U[k(x-Vt)]$ değişken değiştirmesi yapılır.

$$-V\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}+bk^2\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3}=0 \qquad (2.2.17)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin bir defa integralini alınırsa $(2.2.17)$ denklemi

$$-VU(\xi)+\frac{1}{2}U(\xi)^2+bk^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=C \qquad (2.2.18)$$

denklemine dönüşür. Buradaki integral sabitini $C=0$ alıp,

$Y=\tanh(\xi)=\tanh\left[k(x-Vt)\right]$ olmak üzere $U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n$ değişken değiştirmesini yapılırsa

$$-VS(Y)+\frac{1}{2}S(Y)^2+bk^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}\right]=0 \qquad (2.2.19)$$

denklemini elde edilir. Daha sonra bu denklem tanh fonksiyonuna bağlı kuvvet serileri şeklinde yazıldığında

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}+bk^2\sum_{n=0}^{N}\left\{\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)na_nY^{n-1}\right]\right\}=0 \qquad (2.2.20)$$

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}+bk^2\sum_{n=0}^{N}\left[n(n-1)a_nY^{n-2}-2n^2a_nY^n+n(n+1)Y^{n+2}\right]=0 \qquad (2.2.21)$$

bulunur. Bu denklemde en yüksek dereceli Y terimleri eşitlenir. Bu yerleştirmeden sonra, $(2.2.21)$ denkleminde ikinci terimde Y^{2N} ve son terimde Y^{N+2} ifadeleri oluşur. $2N=N+2$ eşitliğinden $N=2$ bulunur. $N=2$ değeri için $(2.1.6)$ denklemi yazılırsa, uygun çözümlerden biri bulunabilir. $S(Y)=F(Y)=b_0(1-Y)(1+b_1Y)$ çözümünü ele alalım. Bu ifadeyi $(2.2.19)$ denklemine yerleştirildiğinde

$$-Vb_0\left(1-Y\right)\left(1+b_1Y\right)+\frac{1}{2}b_0^2\left(1-Y\right)^2\left(1+b_1Y\right)^2+$$
$$bk^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\left(b_0b_1-b_0-2b_0b_1\right)\right]=0 \qquad (2.2.22)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde de $(1-Y)$ çarpanını sadeleştirip

$$-Vb_0\left(1+b_1Y\right)+\frac{1}{2}b_0^2\left(1-Y\right)\left(1+b_1Y\right)^2+$$
$$bk^2\left(1+Y\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\left(b_0b_1-b_0-2b_0b_1\right)\right]=0 \qquad (2.2.23)$$

denkleminin $Y\to 1$ limit değerini alınırsa

$$-V\left(1+b_1\right)+2bk^2\left(2b_0b_1+2b_0\right)=0 \qquad (2.2.24a)$$
$$V=4bk^2 \qquad (2.2.24b)$$

hızı elde edilir.

$(2.2.23)$ denklemindeki tüm katsayılar sıfıra eşitlendiğinde,

$$Y^0 \text{ terimli katsayılar: } -Vb_0+\frac{b_0^2}{2}-2bk^2b_0b_1=0 \qquad (2.2.25a)$$
$$Y^1 \text{ terimli katsayılar: } -Vb_0b_1+b_0^2b_1\frac{b_0^2}{2}-4bk^2b_0b_1+2bk^2b_0=0 \qquad (2.2.25b)$$
$$Y^2 \text{ terimli katsayılar: } \frac{b_0^2b_1^2}{2}-b_0^2b_1+4bk^2b_0b_1+2bk^2b_0=0 \qquad (2.2.25c)$$
$$Y^3 \text{ terimli katsayılar: } 6bk^2b_0b_1-\frac{b_0^2b_1^2}{2}=0 \qquad (2.2.25d)$$

$$b_0=12bk^2 \qquad \text{ve} \qquad b_1=1 \qquad (2.2.26)$$

bulunur. Buradan

$$F(Y)=12bk^2\left(1-Y\right)\left(1+Y\right) \qquad \text{ve} \qquad V=4bk^2 \qquad (2.2.27a)$$

çözümü bulunur. Ayrıca $\left(1-Y^2\right)=\sec h^2$ olduğundan

$$u(x,t)=12bk^2\sec h^2k\left(x-Vt\right) \qquad (2.2.27b)$$

fonksiyonu çan şeklinde iyi bilinen bir tek(solitary) dalgadır.

KdV denkleminin diğer çözümünü bulmak için $(2.2.19)$ denklemine $S(Y)=G(Y)=d_0(1-Y)^2$ ifadesini yerleştirilirse

$$-Vd_0(1-Y)^2+\frac{1}{2}d_0^2(1-Y)^4+bk^2(1-Y^2)\frac{d}{dY}\left[(1-Y^2)2d_0(1-Y)\right]=0 \qquad (2.2.28a)$$

$$-V(1-Y)+\frac{1}{2}d_0(1-Y)^3+2bk^2(1+Y)\left(3Y^2-2Y-1\right)=0 \qquad (2.2.28b)$$

$$-V+\frac{1}{2}d_0(1-Y)^2-2bk^2(1+Y)(3Y+1)=0 \qquad (2.2.28c)$$

elde edilir.

$$Y^0 \text{ terimli katsayılar: } -V+\frac{d_0}{2}-2bk^2=0 \qquad (2.2.29a)$$

$$Y^1 \text{ terimli katsayılar: } -d_0-8bk^2=0 \qquad (2.2.29b)$$

$$Y^2 \text{ terimli katsayılar: } \frac{d_0}{2}-6bk^2=0 \qquad (2.2.29c)$$

Buradan da KdV denkleminin ikinci çözümü olmadığı görülür.

Örnek 3.KdV-Burgers (KdVB) denklemi

Bu denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (2.2.30)$$

şeklinde gösterilir. Buradaki $u(x,t)$ korunumlu ($\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\,dx=0$; yani, tüm t değerleri için $u(x,t)$ altındaki alan korunur veya $\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\,dx$ bir hareket sabitidir) bir niceliktir.

KdV-Burgers denklemi akışkan mekaniğinde çok kullanılan bir denklemdir. Bu denklem, bir elastik tüpteki dağılan ve yayılan sığ su dalgaları tanımlar $[26]$.

Bu denklemde de öncelikle $u(x,t)=U(\xi)=U[k(x-Vt)]$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$-V\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}-ak\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}+bk^2\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3}=0 \qquad (2.2.31)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin de bir kez integrali alınırsa

$$-VU(\xi)+\frac{1}{2}U(\xi)^2-ak\frac{dU(\xi)}{d\xi}+bk^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=C \qquad (2.2.32)$$

elde edilir. Buradaki integral sabitini $C=0$ alıp, $Y=\tanh(\xi)=\tanh\left[k\left(x-Vt\right)\right]$ olmak üzere $U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$-VS(Y)+\frac{1}{2}S(Y)^2-ak\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}+bk^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}\right]=0 \quad (2.2.33)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede $(2.1.6)$ açılımı yerine yerleştirildiğinde

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}-ak\left(1-Y^2\right)\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}+$$
$$bk^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}\right]=0 \qquad (2.2.34)$$

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}-ak\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}+ak\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n+1}+$$
$$bk^2\sum_{n=0}^{N}\left[n\left(n-1\right)a_nY^{n-2}-2n^2a_nY^n+n\left(n+1\right)Y^{n+2}\right]=0 \qquad (2.2.35)$$

ifadesine ulaşılır. Bu yerleştirmeden sonra, $(2.2.35)$ denkleminde en yüksek dereceli Y ikinci terimde Y^{2N} ve son terimde Y^{N+2} ifadeleri oluşur. Buradan $2N=N+2$ eşitliğinden $N=2$ bulunur. Daha öncede belirtildiği üzere 2 farklı çözüm $(4a,b)$ olabilir. Öncelikle $T(Y)=\left(1+b_1Y\right)$ olmak üzere $S(Y)=F(Y)=b_0\left(1-Y\right)T(Y)$ şeklindeki çözümünü ele alalım. Bu ifadeyi $(2.2.33)$ denkleminde yerine konularak,

$$-V\left(1-Y\right)T(Y)+\frac{1}{2}k\left(1-Y\right)^2T(Y)^2-ak\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y\right)T(Y)\right]+$$
$$bk^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y\right)T(Y)\right]\right]=0 \qquad (2.2.36)$$

$(1-Y)$ ortak çarpanı sadeleştirip ve $Y\to 1$ limit alınarak hız

$$V = 4bk^2 + 2ak \qquad (2.2.37)$$

şeklinde bulunur.

Ayrıca bu hız değeri, $U(\xi) \approx e^{-2\xi}$ asimptotik biçiminin, integral sabiti $C = 0$ alınarak $(2.2.32)$ denkleminde yerine konulduğunda da aynı sonuç elde edilir.

Geriye kalan katsayılarda basit cebirsel işlemlerinden sonra

$$k = \frac{a}{10b}: \quad \text{V}=24bk^2 \quad \text{ve } F(\text{Y}) = 36bk^2(1-Y)\left(1+\frac{1}{3}Y\right) \qquad (2.2.38)$$

olarak bulunur ki buradaki $Y = \tanh\left[k(x-Vt)\right]$' dir.

Ayrıca, bu KdVB çözümü

$$F(Y) = 12bk^2(1-Y)(1+Y) + 24k^2(1-Y) \qquad (2.2.39a)$$

$$=12bk^2 \sec h^2\xi + 24bk^2(1-\tanh\xi) \quad , k = \frac{a}{10b} \qquad (2.2.39b)$$

şeklinde de yazılabilinir. Bu ifade özel bir tek dalga bileşenini (10c denkleminin sağ tarafındaki ilk terim ve ikinci terim bir Burgers şok dalgasıdır.) belirtir.

KdVB denklemi Jeffrey ve Mohamed tarafından $A\sec h^n\xi + B\tan h^n\xi + D$ şeklinde çözülmüştür $[26]$. Fakat onlar bu çözümü elde etmek için yedi parametreyi hesaplamak zorunda kalmışlardır. Bu denklem ayrıca farklı araştırmacılar tarafından farklı yöntemlerle uygulanarak bulunmuştur.

Bu denklemin ikinci çözümü $G(Y) = d_0(1-Y)^2$ için de gerçek bir çözüm bulunur. Aynı asimptotik yaklaşımla, yani $(2.2.32)$ denkleminde $U(\xi) \approx e^{-4\xi}$ olarak alınırsa hız ifadesi

$$V = 16bk^2 + 4ak \qquad (2.2.40)$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse $(2.2.37)$ denklemindeki k yerine $2k$ yazıldığında da aynı sonuç bulunur. Geri kalan değişkenler

$$d_0=-12bk^2 \text{ ve eğer } c=-\frac{a}{10b} \text{ olursa } \quad \mathrm{V}=-24bk^2 \qquad (2.2.41)$$

bulunur. $k=-w$ için

$$k=\frac{a}{10b}, \quad \mathrm{V}=-24\mathrm{bw}^2 \text{ ve } \mathrm{Y}=\tanh\left[\mathrm{w}\left(\mathrm{x\text{-}Vt}\right)\right], \quad \mathrm{G}\left(\mathrm{Y}\right)=-12bw^2\left(1+Y\right)^2 \qquad (2.2.42)$$

çözümü elde edilir.

İkinci çözüm simetriden de elde edilebilinir. Şöyle ki $(2.2.33)$ denklemindeki V değişkeni $-V$ ve $S(Y)$ ifadesi $S(Y)-2V$ ile değiştirildiğinde de $(2.2.41)$ çözümü elde edilir.

İntegral sabitinin sıfırda farklı olması durumunda aynı işlemler uygulanabilir. Bu durumda $\xi\to+\infty$ iken $U(\xi)\neq 0$ olur. $(2.2.32)$ denkleminin sağ tarafındaki ifade sıfırdan farklı ($C\neq 0$)olursa; bu durumda

$$U(\xi)=W(\xi)+V-v \qquad (2.2.43)$$

şeklinde yeni bir lineer dönüşüm yaparak C sabit sayısından kurtulmuş olunur. Bu durumda buradaki v hızı

$$v^2=V^2+2C \qquad (2.2.44)$$

olur. v hızı $C=0$ durumundaki hızı gösterir. $W(\xi)$ ifadesi $(2.2.32)$ denklemindeki lineer olmayan dalga denklemini sağlar ve $(2.2.38)$ veya $(2.2.41)$ denklemindeki aynı çözümler elde edilir.

Buradan şu önemli sonucu elde edebiliriz: hız ile sınır koşulları arasında çok yakın bir ilişki vardır. $(2.2.33)$ denkleminden direkt olarak

$$Y\to\pm1 \text{ için } \quad VS(Y)=\frac{1}{2}S(Y)^2 \qquad (2.2.45)$$

bağıntısı bulunur. Öyleki $S(\pm1)=0$ veya $S(\pm1)=2V$ olur.

Biz genellikle aşağıdaki koşulları göz önünde bulunduracağız:

$$Y\to+1 \text{ için } S(Y\to+1)\to 0 \text{ olur.}$$

$$Y\to-1 \text{ için } S(Y\to-1)\to 0 \text{ (KdV için)}$$

$$S(Y \to -1) \to 0 \quad (\text{KdV durumu}) \tag{2.2.46}$$

veya

$$S(Y \to -1) = 2V \, (\text{Burger veya KdVB için}) \tag{2.2.47}$$

olur. Buna rağmen KdV için (veya $S(\pm 1) = 0$ olduğu durumlarda) durumunda hızın sınır koşullarından pek etkilenmediği görülmüştür. Fakat yine de $Y \to +1$ için $S(Y)$' nin asimptotik davranışından hız belirlenebilir.

Örnek 4. DD (Dissipative-Dispersion) Denklemi

Farklı bir lineer olmayan dağılım-yayılım (Dissipative-Dispersion) denklemi Kakutani ve Kawahara (1970) tarafından elde edilmiştir $[27]$. Bu araştırmacılar soğuk ionlardan ve sıcak elektronlardan oluşan iki sıvılı bir plazma modelini araştırmışlardır. Dalga boylarının uzunluğunun sınırlanmasıyla, ion-akustik dalgalarının enerji düzeyinin yükseltilmesiyle elde edilen bir dalga denklemidir. Bu denklemde dağılım ve yayılım etkileri sırasıyla yük ayrılmalar ile elektron ve ion çarpışmalarıyla gösterilmiştir. KdV benzeri bu denklem gerçekte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.2.48}$$

şeklinde olup, $u(x,t)$ niceliği ion hızını veya yoğunluğunu göstermektedir. a ve b değerlerinin ikisi de pozitiftir. Denklemdeki 3.terim dağılım etkisini gösterirken son terimdeki parantez içindeki ifade elektron-ion çarpışmalarının frekansıyla doğru orantılı olarak bazı yayılım etkilerini temsil eder.

Bu denklemin analitik bir çözümü olmadığından ve a değeri nispeten küçük olduğundan $(2.2.48)$ denklemindeki son terim ihmal edilecektir. Bu durumda KdV tipindeki

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{2.2.49}$$

bağıntısı elde edilir. Kolaylık açısından bu denkleme *DD(dağılım(Dispersion) ve yayılım (Dissipation)) denklemi* diyeceğiz.

Şimdi bu denklemin çözümüne geçelim. Daha önce olduğu gibi aynı sınır koşulları uygulanacaktır. Daha önce uygulanan aynı işlem basamakları uygulanırsa, yani değişken değiştirip

$$-V\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}+akV\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}+bk^2\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3}=0 \qquad (2.2.50)$$

ve integral sabitini $C=0$ alıp bir kez integral alınırsa

$$-VU(\xi)+\frac{1}{2}U(\xi)^2+bk^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}+akV\frac{dU(\xi)}{d\xi}=0 \qquad (2.2.51)$$

denklemi elde edilir. Daha sonra yeni Y değişkeni bu denkleme yerleştirildiğinde

$$-VS(Y)+\frac{1}{2}S(Y)^2+bk^2\left(1-Y^2\right)\left[-2Y\frac{dS(Y)}{dY}+\left(1-Y^2\right)\frac{dS^2(Y)}{dY^2}\right]+$$
$$akV\left(1-Y^2\right)\left(\frac{dS(Y)}{dY}\right)=0 \qquad (2.2.52)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n$ açılımı yerleştirildiğinde

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}+bk^2\left(1-Y^2\right)\sum_{n=0}^{N}\left\{\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)na_nY^{n-1}\right]\right\}+$$
$$akV\left(1-Y^2\right)\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}=0 \qquad (2.2.53)$$

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}+bk^2\sum_{n=0}^{N}\left[n\left(n-1\right)a_nY^{n-2}-2n^2a_nY^n+n\left(n+1\right)Y^{n+2}\right]+$$
$$akV\left(\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}-\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n+1}\right)=0 \qquad (2.2.54)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemdeki en yüksek dereceli terim ile lineer olmayan terim eşitlendiğinde $2N=N+2\Rightarrow N=2$ bulunur.

Her zamanki gibi ilk çözüm $T(Y)=(1+b_1Y)$ olmak üzere

$S(Y)=F(Y)=b_0(1-Y)T(Y)$ şeklindedir.

$(2.2.51)$ denkleminde $U(\xi)\to e^{-2\xi}$ asimptotik biçimin yerine konulmasıyla,

$$-Ve^{-2\xi}+\frac{1}{2}e^{-4\xi}+4bk^2e^{-2\xi}-2akVe^{-2\xi}=0 \tag{2.2.55a}$$

$$e^{-2\xi}\left(-V+4bk^2-2akV\right)=0 \tag{2.2.55b}$$

$$\mathrm{V}=\frac{4bk^2}{1+2ak} \tag{2.2.55c}$$

bulunur. Şimdi, $S(Y)=F(Y)=b_0(1-Y)(1+b_1Y)$ ve $(2.2.55c)$ denklemlerini $(2.2.52)$ denklemine yerleştirip

$$-Vb_0(1-Y)(1+b_1Y)+\frac{1}{2}b_0^2(1-Y)^2(1+b_1Y)^2+akV\left(1-Y^2\right)b_0\left(b_1-1-2b_1Y\right)+$$
$$bk^2\left(1-Y^2\right)b_0\left[-2Y\left(b_1-1-2b_1Y\right)+\left(1-Y^2\right)\left(-2b_1\right)\right]=0 \tag{2.2.56}$$

$(1-Y)b_0$ çarpanı sadeleştirilirse

$$-V(1+b_1Y)+\frac{1}{2}b_0(1-Y)(1+b_1Y)^2+akV(1+Y)\left(b_1-1-2b_1Y\right)+$$
$$bk^2(1+Y)\left[-2Y\left(b_1-1-2b_1Y\right)+\left(1-Y^2\right)\left(-2b_1\right)\right]=0 \tag{2.2.57}$$

denklemi bulunur. Bu denklem de açılırsa

$$-V(1+b_1Y)+\frac{1}{2}b_0(1-Y)\left(1+2b_1Y+b_1^2Y\right)+akV(1+Y)\left(b_1-1-2b_1Y\right)+$$
$$bk^2(1+Y)\left[-2Yb_1+2Y+4b_1Y^2-2b_1+2b_1Y^2\right]=0 \tag{2.2.58}$$

bulunur. Bu denklemden aşağıdaki katsayılar elde edilir:

Y^0 terimli katsayılar: $-V+\frac{1}{2}b_0-2bk^2b_1-akV+akVb_1=0$ $\quad(2.2.59a)$

Y^1 terimli katsayılar: $-Vb_1+b_0b_1-4bk^2b_1+2bk^2-\frac{b_0}{2}-akV-akVb_1=0$ $\quad(2.2.59b)$

Y^2 terimli katsayılar: $\quad \dfrac{b_0 b_1^2}{2} + 4bk^2 b_1 + 2bk^2 - b_0 b_1 - 2akVb_1 = 0 \qquad (2.2.59c)$

Y^3 terimli katsayılar: $\quad 6bk^2 b_1 - \dfrac{b_0 b_1^2}{2} = 0 \qquad (2.2.59d)$

ve birkaç cebirsel işlemden sonra

$$k = -\frac{5}{12}a, \quad b_0 = 36bk^2, \quad b_1 = \frac{1}{3}, \quad V = 24bk^2 \qquad (2.2.60)$$

olarak bulunur . $k = -c$ olarak alırsak, değişkenler

$$k = \frac{5}{12}a: \quad V = 24bk^2 \qquad (2.2.61)$$

bulunur. Dolayısıyla $\quad Y = \tanh\left[k\left(x - Vt\right)\right]$ olmak üzere

$$F\left(\mathrm{Y}\right) = 36bk^2\left(1+Y\right)\left(1 - \frac{1}{3}Y\right) \qquad (2.2.62)$$

çözümü elde edilir. $(2.2.49)$ denklemindeki son terimden dolayı tek dalga yok olur ve onun yerine soldan sağa doğru hareket eden bir şok dalgası oluşur.

Bu denklemin ikinci durum $G\left(Y\right) = d_0\left(1-Y\right)^2$ için çözümüne bakalım. Bu ifade $(2.2.52)$ denkleminde yazılırsa,

$$-Vd_0\left(1-Y\right)^2 + \frac{1}{2}d_0^2\left(1-Y\right)^4 + akV\left(1-Y^2\right)2d_0\left(1-Y\right) +$$
$$bk^2\left(1-Y^2\right)d_0\left[-4Y\left(1-Y\right) + \left(1-Y^2\right)\left(-2Y\right)\right] = 0 \qquad (2.2.63)$$

bulunur. $\left(1-Y\right)^2 d_0$ çarpanı sadeleştirilirse

$$-V + \frac{1}{2}d_0\left(1-Y\right)^2 + 2akV\left(1+Y\right) + bk^2\left(1+Y\right)\left[-4Y + \left(1+Y\right)\left(-2Y\right)\right] = 0 \qquad (2.2.64)$$

elde edilir.

Y^0 terimli katsayılar: $\quad -V + \dfrac{1}{2}d_0 = 0 \qquad (2.2.65a)$

Y^1 terimli katsayılar: $-Vb_1-\frac{3}{2}d_0=0$ $$(2.2.65b)$$

Y^2 terimli katsayılar: $\frac{3}{2}d_0-6bk=0$ $$(2.2.65c)$$

Y^3 terimli katsayılar: $-\frac{d_0}{2}=0$ $$(2.2.65d)$$

Y^4 terimli katsayılar: $2bk^2=0$ $$(2.2.65e)$$

Buradan da görüleceği üzere çözüm yoktur.

Örnek 5. Birleşik KdV-MKdV Denklemi:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-2Bu\frac{\partial u}{\partial x}-3Cu^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (2.2.66)$$

şeklinde gösterilir. DNA dinamiğinde $[28]$ ve gezegensel plazmalarda bir model denklemidir $[29-31]$. Buradaki B ve C niceliklerinin özel değerler vermemize gerek yoktur. Fakat bu nicelikler bazı değerleri alamazlar.

Şimdi çözüme geçelim. Geleneksel olarak $u(x,t)=U(\xi)=U[k(x-Vt)]$ dönüşümü yapılırsa

$$-kV\frac{dU(\xi)}{d\xi}-2BkU(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}-3CkU(\xi)^2\frac{dU(\xi)}{d\xi}+k^3\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3}=0 \qquad (2.2.67)$$

elde edilir. Bu denklemin bir kez integrali alınarak integral sabiti $C=0$ alınırsa

$$-VU(\xi)-BU(\xi)^2-CU(\xi)^3+k^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=0 \qquad (2.2.68)$$

ve daha sonra $Y=\tanh(\xi)$ dönüşümü yapılırsa,

$$-VS(Y)-BS(Y)^2-CS(Y)^3+k^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}\right]=0 \quad (2.2.69)$$

bulunur. Bu KdV denklemiyle aynı lineer özelliklere sahip olduğundan buradaki hız değeri KdV denkleminin hızına benzeyecektir. $U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n-B\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}-C\sum_{n=0}^{N}a_n^3Y^{3n}+$$
$$k^2\sum_{n=0}^{N}\left[n(n-1)a_nY^{n-2}-2n^2a_nY^n+n(n+1)Y^{n+2}\right]=0 \quad (2.2.70)$$

$3N=N+2$ eşitleme işleminden sonra $N=1$ bulunur. Dolayısıyla $L(Y)=a_0(1-Y)$ şeklinde bir çözüm aranılır. Bu ifade $(2.2.69)$ denkleminde yerine bırakılıp, $(1-Y)$ çarpanını sadeleştirilip, $Y\rightarrow 1$ limit değeri alınırsa

$$-Va_0-Ba_0^2(1-Y)^2-Ca_0^3(1-Y)^3+k^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)(-a_0)\right]=0 \quad (2.2.71a)$$
$$-Va_0+k^2(1+1)(2a_0)=0 \quad (2.2.71b)$$

eşitliğinden

$$V=4k^2 \quad (\text{KdV hızı}) \quad (2.2.72)$$

elde edilir. $(2.2.71a)$ denklemi açık bir şekilde yazılarak,

$$-Va_0-Ba_0(1-Y)-Ca_0^2(1-Y)^2+k^2(1+Y)2Y=0 \quad (2.2.73a)$$

$$-V-Ba_0+Ba_0Y-Ca_0^2+Ca_0^2Y-Ca_0^2Y^2+2k^2Y+2k^2Y^2=0 \quad (2.2.73b)$$

bulunur. Buradan

Y^0 terimli katsayılar: $-V-Ba_0-Ca_0^2=0$ $\quad (2.2.74a)$

Y^1 terimli katsayılar: $Ba_0+Ca_0^2+2k^2=0$ $\quad (2.2.74b)$

Y^2 terimli katsayılar: $-Ca_0^2+2k^2=0$ $\quad (2.2.74c)$

katsayıları elde edilir. Birkaç cebirsel işlemden sonra,

$$a_0^2 = \frac{2k^2}{C} \text{ ve } a_0 = \frac{-6k^2}{B} \text{ eşitliğinden } k = \frac{\sqrt{6}}{3}\frac{B}{\sqrt{C}} \;,\; a_0 = \frac{-6}{B}\frac{B^2}{18C} = -\frac{B}{3C} \qquad (2.2.75)$$

elde edilir. Buradan,

$$L(Y) = -\frac{B}{3C}(1-Y) \;,\quad k = \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{B}{C} : \; V=4k^2 \;,\quad B>0 \text{ ve } C>0 \qquad (2.2.76)$$

çözümü bulunur. Bu denklem soldan sağa doğru hareket eden (negatif) bir şok dalgasıdır. Daha karışık farklı bir çözüm de bulunulabilir.

$$D(Y) = \frac{(1-Y)(1+dY)}{(a+bY^2)} \qquad (2.2.77)$$

ifadesi $(1-Y)T(Y)$ biçiminde olduğundan ele alınabilir. Buradaki hız bir önceki ifadedeki hız ile aynıdır.

Bir kaç cebirsel işlemden sonra $d=1$ için aşağıdaki çözüm bulunur:

$$S(Y) = 12k^2\frac{(1-Y)(1+Y)}{(a_+ + a_- Y^2)} \;,\; a_\pm = B \pm \sqrt{B^2 - 18k^2 C},\; Y = \tanh\left[k(x - Vt)\right],\; V = 4k^2 \; (2.2.78)$$

$(1-Y^2) = \sec h^2$ olduğundan kayda değer bir tek (solitary) dalgadır. Böyle bir çözüm olabilir. Çünkü $(2.2.69)$ denkleminin son teriminin $(1-Y^2)$ şeklinde bir çarpanı vardır ve kalan terimlerde $S(Y)$ çözümüyle doğru orantılıdır.

Doğal olarak bu sonucun elde edilebilmesi B, C ve k üzerinde bazı kısıtlamalar olmalı ki payda yok olmasın. Şöyle ki, $0 \le Y^2 \le 1$ ve her c değeri için $B^2 \ge 18k^2C$ olması halinde gerçek bir çözüm elde edilir. Burada elde edilen sonuç daha geneldir. Çünkü burada k katsayısı bağımsız bir parametredir.

Bu sonuçlar Khan ve arkadaşları $[28]$ tarafından keyfi bir fonksiyonun direkt olarak yerleştirilmesiyle elde edilmiştir. $T(Y)$ fonksiyonu diğer durumlar içinde bir kesir değeri olarak alınabilir $[11]$. Hız değeri tekrar sınır koşullarına bağlıdır. $(2.2.69)$ denkleminden

$$-VS(-1)-BS(-1)^2-CS(-1)^3=0 \qquad (2.2.79)$$

veya

$$V=-BS(-1)-CS(-1)^2=0 \quad \text{ve} \quad S(-1)\neq 0 \qquad (2.2.80)$$

olur. Bu bağıntılar, beklendiği gibi hız ile sınır koşullarını birbirine bağlar ve sonuçlar her iki çözümü sağlar.

Örnek 6. Genişletilmiş KdV-MKdV-Burgers Denklemi:

Geçmiş yıllarda Mohamed [32] (2.2.66) denklemine benzer bir KdV-MKdV çözdü. Burada fazladan bir terim eklenerek bu denklem incelenmiştir. Bu nedenle

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}-6u^2\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (2.2.81)$$

denklemi ele alındı. Klasik olarak bilinen $u(x,t)=U(\xi)=U[k(x-Vt)]$ dönüşümü yapılırsa

$$-V\frac{dU(\xi)}{d\xi}+6U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}-6U(\xi)^2\frac{dU(\xi)}{d\xi}+bk^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}-ak\frac{dU(\xi)}{d\xi}=0 \qquad (2.2.82)$$

elde edilir. Bu denklemin bir kez integrali alınıp, tekrar integral sabiti $C=0$ alınırsa,

$$-VU(\xi)+3U(\xi)^2-2U(\xi)^3+bk^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}-ak\frac{dU(\xi)}{d\xi}=0 \qquad (2.2.83)$$

denklemi elde edilir. Daha sonra $Y=\tanh(\xi)$ dönüşümünü yapıldığında,

$$-VS(Y)+3S(Y)^2-2S(Y)^3+k^2(1-Y^2)\frac{d}{dY}\left[(1-Y^2)\frac{dS(Y)}{dY}\right]-$$
$$ak(1-Y^2)\frac{dS(Y)}{dY}=0 \qquad (2.2.84)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde (2.1.6) açılımı yazılırsa,

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n \; -3\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n} -2\sum_{n=0}^{N}a_n^3Y^{3n} - ak\left(1-Y^2\right)\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}+$$

$$bk^2\sum_{n=0}^{N}\left[n\left(n-1\right)a_nY^{n-2}-2n^2a_nY^n+n\left(n+1\right)Y^{n+2}\right]=0 \qquad \left(2.2.85\right)$$

denklemindeki $3N = N+2$ eşitleme işleminden sonra $N=1$ bulunur. Dolayısıyla $S\left(Y\right)=d_0\left(1-Y\right)$ şeklinde bir çözüme bakılır. Bu ifade $\left(2.2.84\right)$ denkleminde yerine bırakılırsa

$$-Vd_0\left(1-Y\right)+3d_0^2\left(1-Y\right)^2-2d_0^3\left(1-Y\right)^3+bk^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\left(-d_0\right)\right]$$

$$-ak\left(1-Y^2\right)\left(-d_0\right)=0 \qquad \left(2.2.86\right)$$

denklemi elde edilir. Burada $\left(1-Y\right)$ çarpanını sadeleştirip, $Y\to 1$ limit değerini alınırsa

$$-V+3d_0\left(1-Y\right)-2d_0^2\left(1-Y\right)^2+bk^2\left(1+Y\right)2Y+ak\left(1+Y\right)=0 \qquad \left(2.2.87a\right)$$

$$-Vd_0+k^2\left(1+1\right)\left(2d_0\right)=0 \qquad \left(2.2.87b\right)$$

$$V=d_0+4k^2d_0 \qquad \left(2.2.87c\right)$$

hız ifadesi bulunur. $\left(2.2.86\right)$ denklemi açılırsa

$$-V+3d_0\left(1-Y\right)-2d_0^2\left(1-Y\right)^2+bk^2\left(1+Y\right)2Y+ak\left(1+Y\right)=0 \qquad \left(2.2.88\right)$$

$$-V+3d_0-3d_0Y-2d_0^2+4d_0^2Y-2d_0^2Y^2+2bk^2Y+2bk^2Y^2+ak+akY=0 \qquad \left(2.2.89\right)$$

bulunur. Buradan

Y^0 terimli katsayılar: $-V+3d_0-2d_0^2+ak=0$ $\qquad \left(2.2.90a\right)$

Y^1 terimli katsayılar: $-3d_0+4d_0^2+2bk^2+ak=0$ $\qquad \left(2.2.90b\right)$

Y^2 terimli katsayılar: $-2d_0^2+2bk^2=0$ $\qquad \left(2.2.90c\right)$

katsayıları elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$d_0=k\sqrt{b}\;\;,\;\; k=\frac{1}{6\mathrm{b}}\left(3\sqrt{b}-a\right) \;\text{ ve }\; V=3d_0-2d_0^2+ak=\frac{2k}{3}\left(3\sqrt{b}-a\right) \qquad \left(2.2.91\right)$$

bulunur. Buradan

$$u(x,t) = k\sqrt{b}\left\{1 - \tanh\left[k(x - Vt)\right]\right\} \quad , \quad k = \frac{1}{6b}\left(3\sqrt{b} - a\right),\ V = \frac{2k}{3}\left(3\sqrt{b} - a\right) \qquad (2.2.92)$$

şok dalgası profili elde edilir.

Örnek 7. Lineer Olmayan İç Çevrim Terimli Fisher Denklemi:

Fisher denklemine lineer olmayan bir iç çevrim terimi eklenerek incelendi. Murray $[10]$ bu durumda dalga çözümlerinin varlığını göstermiştir. Bununla beraber bir çözüm elde edilmemişti. Bu yüzden

$$\frac{\partial u}{\partial t} + K\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) \qquad (2.2.93)$$

denklemini ele aldık. Yeni bir değişken olarak $u(x,t) = U(\xi) = U[k(x - Vt)]$ tanımlayarak

$$-kV\frac{dU(\xi)}{d\xi} + kKU(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi} = k^2\frac{dU^2(\xi)}{d\xi^2} + U(\xi)[1 - U(\xi)] \qquad (2.2.94)$$

denklemi elde edilir. Fisher denklemindeki aynı sınır koşulları alınırsa, yani,

$$\xi \to \infty \text{ iken } U(\xi)\ ,\ \frac{\mathrm{d}U(\xi)}{d\xi} \text{ ve } \frac{\mathrm{d}^2U(\xi)}{d\xi^2} \to 0$$

ve

$$U(\xi) \to 1\ ,\ \xi \to -\infty \text{ iken } \frac{\mathrm{d}U(\xi)}{d\xi} \text{ ve } \frac{\mathrm{d}^2U(\xi)}{d\xi^2} \to 0$$

olmalıdır. Bu yüzden, sonuç 0 ile 1 aralığında oluşur. Daha sonra $Y = \tanh(\xi)$ dönüşümünü yapılırsa,

$$kV\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY} + k^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}\right] + -kK\left(1-Y^2\right)S(Y)\frac{dS(Y)}{dY} +$$
$$S(Y) - S(Y)^2 = 0 \qquad (2.2.95)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $(2.1.6)$ açılımı yazıldığında,

$$kV\left(1-Y^2\right)\sum_{n=0}^{N} na_n Y^{n-1} + k^2\sum_{n=0}^{N}\left[n\left(n-1\right)a_n Y^{n-2} - 2n^2 a_n Y^n + n\left(n+1\right)Y^{n+2}\right]$$

$$-kK\left(1-Y^2\right)\left(\sum_{n=0}^{N} a_n Y^n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} na_n Y^{n-1}\right) + \sum_{n=0}^{N} a_n Y^n - \sum_{n=0}^{N} a_n^2 Y^{2n} = 0 \qquad (2.2.96)$$

elde edilir. Aynı eşitleme işleminden, yani, en büyük dereceli lineer terim ile en büyük dereceli lineer olmayan terimin eşitlenmesiyle $2N+1 = N+2 \Rightarrow N=1$ bulunur. O halde çözümümüz $S\left(Y\right) = d_0\left(1-Y\right)$ şeklinde olmalıdır. Bu ifade $\left(2.2.95\right)$ denkleminde yazılırsa

$$kV\left(1-Y^2\right)\left(-d_0\right) + k^2\left(1-Y^2\right)\left(2d_0\right) - kK\left(1-Y^2\right)d_0\left(1-Y\right)\left(-d_0\right) +$$

$$d_0\left(1-Y\right) - d_0^2\left(1-Y\right)^2 = 0 \qquad (2.2.97)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa

$$-kV\left(1+Y\right) + 2k^2Y\left(1+Y\right) + kKd_0\left(1-Y^2\right) + 1 - d_0\left(1-Y\right) = 0 \qquad (2.2.98a)$$

$$-kV - kVY + kKd_0 - kKd_0Y^2 + 2k^2Y + 2k^2Y^2 + 1 - d_0 + d_0Y = 0 \qquad (2.2.98b)$$

elde edilir. Bu denklemde $Y \to 1$ limit değeri alındığında,

$$-kV\left(1+1\right) + 2k^2\left(1+1\right) + 1 = 0 \qquad (2.2.99)$$

$$V = \frac{4k^2+1}{2k} \qquad (2.2.100)$$

hız değeri elde edilir. $\left(2.2.98b\right)$ denkleminden

Y^0 terimli katsayılar: $-kV + kKd_0 + 1 - d_0 = 0 \qquad (2.2.101a)$

Y^1 terimli katsayılar: $-kV + 2k^2 + d_0 = 0 \qquad (2.2.101b)$

Y^2 terimli katsayılar: $-kKd_0 + 2k^2 = 0 \qquad (2.2.101c)$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden

$$d_0 = \frac{2k}{K} \quad , \quad d_0 = kV - 2k^2 \quad , \quad V = \frac{4k^2+1}{2k} \qquad (2.2.102)$$

ve

$$d_0 = \frac{1}{2} \qquad , \quad \mathrm{k} = \frac{K}{4} \tag{2.2.103}$$

bulunur. Buradan

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(1-\tanh\xi) \quad \text{ve} \quad \xi = \frac{\mathrm{K}}{4}\left[x - \left(\frac{K^2+4}{2K}\right)t\right] \tag{2.2.104}$$

tam çözümü elde edilir.

Dikkat edilirse $K \to 0$ limit değeri için $(2.2.93)$ denklemi, lineer yayılmasız Fisher denklemine

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) \tag{2.2.105}$$

dönüşür. $(2.2.104)$ denkleminden $\xi = -\frac{t}{4}$ olur. Bu ifade x değişkeninden bağımsız olduğundan bundan sonra Fisher denklemi yerine Verhulst denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-u) \tag{2.2.106}$$

incelenmiştir. Bu denklem, yayılmayan lojistik büyümeyi gösterir. $(2.2.106)$ denklemi, D ve d pozitif parametreler olmak üzere kolayca

$$\frac{\partial u}{\partial t} + K\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + pu(1-u) \tag{2.2.107}$$

denklemine genişletilebilinir. Uygun bir dönüşüm ile bu denklem orijinal formunda yazılabilir. Ve Tanh yöntemi ile çözülürse $\xi = k(x - Vt)$ değişkenindeki

$$k = \frac{K}{4} \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{V} = \frac{8\mathrm{K}^2 + 2Dp}{K} \tag{2.2.108}$$

bulunur.

Fisher denklemindeki genel dalga biçimleri, $t = 0$ ve hız değeri 2’den küçük olarak tanımlıdır. Bu da sabit olmayan dalgalar oluşturur.

Örnek 8. Köpük Akış Model Denklemi:

Verbist ve Weaire $[33]$, $A\left[\sim \alpha\left(x,t\right)\right]$ kesit alanından geçen köpüğün akışını

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\alpha^2 - \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) \qquad (2.2.109)$$

denklemi ile tanımlamışlardır.

Bu lineer olmayan denklem sınır koşulları olmadan Tanh yöntemi ile çözülebilinir. Bu yüzden öncelikle, $u\left(\xi\right) = u\left[k\left(x - Vt\right)\right] = \alpha\left(x,t\right)$ şeklinde bir sabit dalga biçimi tanımlanır. Buradan $(2.2.109)$ denklemi

$$-V\frac{du(\xi)}{d\xi} = -\frac{\partial}{d\xi}\left(u(\xi)^2 - \frac{\sqrt{u(\xi)}}{2}\frac{du(\xi)}{d\xi}\right) \qquad (2.2.110)$$

denklemine dönüşür. Bu denklem de açık bir şekilde yazılırsa

$$-V\frac{du(\xi)}{d\xi} = -\left(2u(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{1}{4\sqrt{u(\xi)}}\left(\frac{du(\xi)}{d\xi}\right)^2 - \frac{\sqrt{u(\xi)}}{2}\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}\right) \qquad (2.2.111)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemin sağ tarafındaki köklü terimi yok etmek için

$$u\left(\xi\right) = w^2\left(\xi\right) \qquad (2.2.112)$$

şeklinde bir değişken tanımlanarak bu değişkene göre $(2.2.110)$ denklemi tekrar yazılırsa

$$-2Vw(\xi)\frac{dw(\xi)}{d\xi} = -\frac{d}{d\xi}\left(w(\xi)^4 - k\frac{w(\xi)}{2}2w(\xi)\frac{dw(\xi)}{d\xi}\right) \qquad (2.2.113)$$

$$2V\frac{dw(\xi)}{d\xi}-4w(\xi)^2\frac{dw(\xi)}{d\xi}+2k\left(\frac{dw(\xi)}{d\xi}\right)^2-kw(\xi)\frac{d^2w(\xi)}{d\xi^2}=0 \qquad (2.2.114)$$

elde edilir.

Bundan sonra Tanh yöntemi gereğince, $w(\xi)=S(\tanh\xi)=S(Y)$ dönüşümü ile

$$2V\frac{dS(Y)}{dY}-4S(Y)^2\frac{dS(Y)}{dY}+2k\left(1-Y^2\right)\left(\frac{dS(Y)}{dY}\right)^2+$$
$$kS(Y)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}\right]=0 \qquad (2.2.115)$$

denklemi elde edilir. M değerini elde etmek için eşitleme işlemi uygulanır.

$$2V\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}-4\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}\left(na_nY^{n-1}\right)+2k\left(1-Y^2\right)\left(\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}\right)^2+$$
$$k\sum_{n=0}^{N}a_nY^n\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}\right]=0 \qquad (2.2.116)$$

$$2V\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}-4\sum_{n=0}^{N}na_n^3Y^{3n-1}+2k\left(\sum_{n=0}^{N}n^2a_n^2Y^{2n-2}-n^2a_n^2Y^{2n}\right)+$$
$$k\sum_{n=0}^{N}a_nY^n\frac{d}{dY}\left[\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}-na_nY^{n+1}\right]=0 \qquad (2.2.117)$$

Bu denklemdeki kübik ikinci terim ile diğer ikinci dereceli terim karşılaştırıldığında $3N-1=2N\rightarrow N=1$ değeri kolayca bulunur. Buradan

$$S(Y)=b_0+b_1Y \qquad (2.2.118)$$

çözüm ifadesi bulunur. Bu çözüm $(2.2.115)$ denklemine yerleştirildiğinde

$$2Vb_1-4\left(b_0+b_1Y\right)^2b_1+2k\left(1-Y^2\right)\left(b_1\right)^2+k\left(b_0+b_1Y\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)b_1\right]=0 \qquad (2.2.119)$$

$$-V-2b_0^2-4b_0b_1-2b_1^2Y^2+kb_1-kb_1Y^2-kb_0Y-kb_1Y^2=0 \qquad (2.2.120)$$

elde edilir. Bu denklemden

Y^0 terimli katsayılar: $V-2b_0^2+kb_1=0$ $\quad (2.2.121a)$

Y^1 terimli katsayılar: $-4b_0b_1-kb_0=0$ $\quad (2.2.121b)$

Y^2 terimli katsayılar: $-2b_1^2-2kb_1=0$ $\quad (2.2.121c)$

katsayıları elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde;

$$b_1(b_1+k)=0 \quad ; \; b_1\neq 0 \quad \text{olduğundan} \quad b_1=-k \qquad (2.2.122a)$$

$$(4b_1+k)=0 \quad \text{olduğundan } b_0=0 \qquad (2.2.122b)$$

$$V-2b_0^2+kb_1=0 \Rightarrow V=-k^2 \qquad (2.2.122c)$$

bulunur.

$b_1=-k$, $a_0=0$ ve $V=k^2$ buradan da $\mathrm{S}(\mathrm{Y})=-kY$ veya $\mathrm{w}(\xi)=-\tanh\xi$ $(2.2.123)$

olur. Sonuç olarak $(2.2.112)$ denkleminden

$$u(\xi)=k^2\tanh^2\xi \quad \text{veya} \quad \alpha(\xi)=k^2\tanh^2\left[k\left(x-c^2t\right)\right] \qquad (2.2.124)$$

genel çözümü elde edilir. Eğer, sınır koşullarını$\left(x\to+\infty \text{ 'daki sıfır akış }\right)$göz önünde bulundurulursa

$$\alpha(x,t)=k^2\tanh^2\left[k\left(x-c^2t\right)\right] \qquad x\leq k^2t \qquad (2.2.125a)$$

$$=0 \qquad x\geq k^2t \qquad (2.2.125b)$$

sonuçları elde edilir.

Bu şok dalgası (sürekli olarak sıvı eklendiğinde) ıslak köpük ile kuru köpük arasındaki geçişi tanımlar.

2.3. Tanh Yönteminin Denklem Sistemlerine Uygulanması

Tanh yöntemini denklem sistemlerine de uygulayabiliriz. Tanh yöntemini denklem sistemlerine uygularken farklı bir işlem uygulamayacağız. Sadece bu denklemlerde tek bağımlı değişken yerine u ve ζ şeklinde iki bağımlı değişken ele alacağız.

Şimdi bu yöntemi Klasik Boussinesq (CB)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\zeta)u\right]=-\frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}u \\ &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

denklemleri üzerinde uygulayalım $[34]$. Burada iki farklı fonksiyon olduğundan, bu fonksiyonların her biri için $\xi=k\left(x-Vt\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\zeta\left(x,t\right)=\zeta\left(\xi\right) \\ &u\left(x,t\right)=U\left(\xi\right) \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

değişken değiştirmesi yapıldığında,

$$-V\frac{d\zeta(\xi)}{d\xi}+\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{d\zeta(\xi)}{d\xi}+\zeta(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}+\frac{1}{4}k^2\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3}=0 \tag{2.3.3}$$

$$-V\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}+\frac{d\zeta(\xi)}{d\xi}=0 \tag{2.3.4}$$

denklemleri elde edilir. $\left(2.3.3\right)$ ve $\left(2.3.4\right)$ denklemlerinin bir kez integralleri alınıp, integral sabiti $C=0$ alınırsa,

$$-V\zeta(\xi)+U(\xi)+U(\xi).\zeta(\xi)+\frac{1}{4}k^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=0 \qquad (2.3.5)$$

$$\zeta(\xi)=VU(\xi)-\frac{1}{2}U(\xi)^2 \qquad (2.3.6)$$

denklemleri elde edilir. Daha sonra $(2.3.6)$ denklemi $(2.3.5)$ denkleminde yerine konarak

$$-V\left(VU(\xi)-\frac{1}{2}U(\xi)^2\right)+U(\xi)+U(\xi).\left(VU(\xi)-\frac{1}{2}U(\xi)^2\right)+\frac{1}{4}k^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=0 \qquad (2.3.7a)$$

$$4\left(1-V^2\right)U(\xi)+6U(\xi)^2-2U(\xi)^3+\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=0 \qquad (2.3.7b)$$

adi diferansiyel denklemi bulunur. Daha sonra $Y=\tanh(\xi)$ dönüşümünü yapılırsa,

$$4\left(1-V^2\right)S(Y)+6S(Y)^2-2S(Y)^3+\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}\right]=0 \qquad (2.3.8)$$

yazılır. Bu denklemde $Y=\tanh(\xi)=\tanh\left[k(x-Vt)\right]$ olmak üzere

$U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n$ açılımı yerleştirilerek

$$4\left(1-V^2\right)\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+6\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}-2\sum_{n=0}^{N}a_n^3Y^{3n}+\sum_{n=0}^{N}n(n-1)a_nY^{n-2}+$$
$$2\sum_{n=0}^{N}na_nY^n+\sum_{n=0}^{N}(n+1)a_nY^{n+2}=0 \qquad (2.3.9)$$

denklemi elde edilir. Bu yerleştirmeden sonra, $(2.3.9)$ denkleminde en yüksek dereceli Y terimleri üçüncü terimdeki Y^{3N} ve son terimdeki Y^{N+2} ifadeleridir. Buradan $3N=N+2$ eşitliğinden $N=1$ bulunur. Daha öncede belirtildiği üzere $S(Y)=d_0(1-Y)$ şeklinde çözüm olabilir. Öncelikle bu ifade $(2.3.8)$ denkleminde yerine konursa,

$$4\left(1-V^2\right)d_0\left(1-Y\right)+6\left(d_0\left(1-Y\right)\right)^2-2\left(d_0\left(1-Y\right)\right)^3+$$
$$\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\left(-d_0\right)\right]=0 \qquad (2.3.10a)$$

ifadesi bulunur. Uygun sadeleştirmeler yapıldığında

$$4\left(1-V^2\right)d_0\left(1-Y\right)+6d_0-6d_0Y-2d_0+4d_0Y-2d_0Y^2+2d_0Y+2d_0Y^2=0 \qquad (2.3.10b)$$

olur. Bu denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek

Y^0 terimli katsayılar: $4\left(1-V^2\right)+4d_0=0 \qquad (2.3.11)$

olur. Buradan

$$d_0=V^2-1 \qquad (2.3.12)$$

bulunur. Böylece

$$U\left(\xi\right)=S\left(Y\right)=\left(V^2-1\right)\left(1-Y\right) \qquad (2.3.13)$$

çözümü elde edilir. Bu eşitlik $(2.3.6)$ denklemine konulursa

$$\zeta(\xi)=V\left(V^2-1\right)\left(1-Y\right)-\frac{1}{2}\left(\left(V^2-1\right)\left(1-Y\right)\right)^2 \qquad (2.3.14)$$

$\zeta(\xi)$ fonksiyonu elde edilir.

SONUÇ

Bu tezimizde, özellikle yayılımları içeren lineer olmayan dalga denklemlerinin çözümünde Tanh yöntemini kullandık. Bu yöntemin temel amacı yönlendirilmiş dalga çözümlerinin hiperbolik tanjant fonksiyonu (Tanh) biçiminde gösterilmesine dayanır. Burada hiperbolik tanjant fonksiyonu bağımsız bir değişken olarak kullanılmıştır. Ayrıca, arzu edilen sonuçlara sınır koşullarının yerleştirilmesiyle ve asimptotik bir yaklaşımla hızın belirlenmesi bu yöntemin kullanımındaki kolaylığı üzerinde büyük bir etkisi vardır. Bu yöntemle uzun cebirsel işlemlerden kurtulmuş oluruz.

Polinom şeklindeki ifadelerle uğraştığımızdan, kapalı formdaki çözümler direkt ve zarif bir şekilde elde edilmiştir.

Son bölümde bu yöntem ile lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin de çözülebileceği gösterilmiştir.

Bu yöntem son yıllarda farklı araştırmacılar tarafından tanh-sech yöntemi $[35-37]$, genişletilmiş tanh yöntemi $[38,39]$,sin-cosine yöntemi $[40-43]$, Jacobi eliptik-fonksiyon yöntemi $[44]$ adlandırmaları ile geliştirilmiştir.

Bu yönteme dayanılarak, günümüzde birçok lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümünü araştıran çok güçlü sembolik bilgisayar yazılımları geliştirilmiştir. Bu programlar yardımıyla otomatik olarak tanh, sech, cn veya sn fonksiyonları şeklindeki polinomların yönlendirilmiş dalga çözümleri hesaplanabilir $[45]$.

Sonuç olarak, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam yönlendirilmiş dalga çözümlerinin elde edilmesinde tanh yöntemi çok kullanışlı bir yöntemdir.

KAYNAKLAR

[1] **Poincare, H. , 1890** , Sur les e quations aux de rive es partielles de la physique mathematique, Amer. J. Math. 12 (1890), 211-294.

[2] **Brezis, H. and Browder, F. , 1998,** Partial Differential Equations in the 20th Century, Advances in Mathematics 135, 76-144, Article No. AI971713.

[3] **Debnath, L., 1997,** Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Birkhäuser, Boston .

[4] **ROSS, Shepley L., 1964,** Differential Equations, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.

[5] **ERTAŞ, A., 2001,** Kısmi Diferansiyel Denklemler, ISBN 975-7635-08-01, Diyarbakır.

[6] **Myint-U, T., 1980,** Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Elsevier North Holland, Inc., New York.

[7] **AKKAYA, V., 2000**, Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Analitik Yöntemleri Yüksek Lisans Tezi.

[8] **Whitham, G., 1974**, Linear and nonlinear Waves, Wiley, New York.

[9] **Gray, P., Scott, S., 1990**,Chemical Oscillations and Instabilities ,Clarendon Press, Oxford.

[10] **Murray, J., 1989,** Mathematical Biology , SpringerVerlag, Berlin.

[11] **Malfliet, W., 1992,** Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, Am. J. Phys. 60, 650-654.

[12] **Malfliet, W. and Hereman, W., 1996,** The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations, Physica Scripta 54, 563-568 .

[13] **Malfliet, W. and Hereman, W., 1996,** The tanh method: II. Perturbation technique for conservative systems, Physica Scripta 54, 569-575 .

[14] **Malfliet, W., 2004,** The tanh method: a tool for solving certain classes of nonlinear evolution and wave equations, J. Comp. Appl. Math 164-165, 529-541 .

[15] **Malfliet, W. and Wieers, E., 1996,** J.Plasma Phys.56,563.

[16] **Huibin, L. And W. Klein, W., 1990,** J. Phys. A :Math. Gen. 23, 3923.

[17] **Liu, B. Q., Pan, Z. L., Qu, B. Z. And Jiang, X. F., 1993,** Phys. Lett. A180,61.

[18] **Das, G. C. and Sarma J., 1999,** Response to ‘‘Comment on ‘A new mathematical approach for findingthe solitary waves in dusty plasma’’ .Phys. Plasmas 6, 4392 .

[19] **Hirota, R.,1980,** in “Backlaund Transformations”(Edited by R. Bullough and P. Caudrey), Springer-Verlag, Berlin.

[20] **Kurdyashov, N.,1991,** Physics Letters A 155, 269.

[21] **Hereman, W.and Takaoka, M.,1990,** J. Phys. A :Math. Gen. 23, 4805.

[22] **Coffey, M., 1990,** SIAM J. Appl. Math. 50, 1580.

[23] **Jeffrey, A. And Xu, S.,1989,** Wave Motion 11, 559.

[24] **Baldwin, D., Goktas, U., W. Hereman ve arkadaşları, 2004,** Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear PDEs, J. Symb. Comp. 37, 669-705.

[25] **Johnson, R.,1973,** J.Fluid Mech. 86, 415.

[26] **Jeffrey, A. and Mohamed, M.,1990,** Wave Motion 14, 369.

[27] **Kakutani, T. and Kawahara, T.,1970,** J. Phys. Soc. Japan 29, 1068.

[28] **Khan, A.,Bhaumik, D. And Dutta-Roy, B.,1985,** Bull. Math. Biol. 47, 783.

[29] **Rao. N., Shukla, P. And Yu, M.,1985,** Plan. Space Sci. 38, 543.

[30] **Verheest, F.,1992,** Planet. Space Sci. 40, 543.

[31] **Verheest, F.,1993,** Double Layers and Other Nonlinear Potential Structures in Plasmas(Edited by R. Schrittwiesser), World Scientific,Singapore.

[32] **Mohamad, M.,1992,** Math. Meth. Appl. Sci. 15, 74.

[33] **Verbist, G. and Weaire, D.,1994,** Europhys. Lett. 26, 631.

[34] **Li, Y., Ma, W. and Zhang Jin, E., 2000,** Darboux transformation of classical

Boussinesq system and its new solutions, Phys. Lett. A, 275, 60-66.

[35] **Wazwaz, A.M., 2004,** The tanh method for travelling wave solutions of nonlinear equations. Applied Mathematicsand Computation. 154(3),713–723.

[36] **Wazwaz, A.M., 2005,**The tanh method: exact solutions of the Sine-Gordon and the Sinh-Gordon equations.Applied Mathematics and Computation. 167(2),1196-1210.

[37] **Wazwaz, A.M., 2005,**The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and Burgers-Fisher equation, Applied Math. and Computation.,169,321-338.

[38] **Fan, E., 2000,** Extented tanh-function method and its applications to nonlinear equations. Phys. Lett. A.277,212.

[39] **Elwakil, S.A., El-labanya, S.K., Zahran, M.A. and Sabrya, R., 2003,** Two New App. of the Modified Extended Tanh-Function Method, Z. Naturforsch, 58a, 39 – 44.

[40] **Wazwaz, A.M., 2006,** The tanh and the sine-cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 11(2), 148-160.

[41] **Wazwaz, A.M., 2006,** The tanh method and the sine-cosine method for solving the KP-MEW equation. Int. J.Comput. Math. 82 (2), 235-246.

[42] **Wazwaz, A.M., 2004,** New compactons, solitons and periodic solutions for nonlinear variants of the KdV and the KP equations. Chaos, Solitions and Fractals. 22 (1), 249-260

[43] **Wang, D.S., Ren, Y.J. and Zhang, H.Q., 2005,** Further extended sinh-cosh and sin-cos methods and new non-traveling wave solutions of the (2+1) dimensional dispersive long wave equations, Appl. Math. E-Notes, 157-163.

[44] **Parkes, E.J., Duffya, B.R. and Abbott, P.C., 2002,**The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations, Physics Letters A 295 (2002) 280–286.

[45] **Malfliet, W. and Hereman,2005, W.,**The Tanh Method: A Tool to Solve Nonlinear Partial Differential Equations with Symbolic Software, 9th World Multiconference on Systemics, Cybernetics, and Informatics (WMSCI 2005), Orlando, Florida, July 10-13, pp. 165-168.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Diyarbakır ’ da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır ’ da tamamladım. 1992 yılında Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi (İNG) bölümünü kazandım. 1997 yılında mezun olduktan sonra 1998 yılında Milli Eğitim Bakanlığı’nca Diyarbakır’a matematik öğretmeni olarak atandım. Halen Diyarbakır Anadolu Lisesi’nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.

Mustafa MIZRAK