T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

HARMONİK YALINKAT VE HARMONİK ÇOK KATLI FONKSİYONLARIN BAZI ALTSINIFLARI

BİLAL ŞEKER

DOKTORA TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR
MAYIS - 2008

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Bilal ŞEKER tarafından yapılan "Harmonik Yalınkat ve Harmonik Çok Katlı Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan	: Prof.Dr. Sezai OĞRAŞ (Danışman)
Üye	: Prof.Dr. Ali YILMAZ
Üye	: Doç.Dr.Sibel YALÇIN
Üye	: Doç.Dr.H.Özlem GÜNEY
Üye	: Yrd.Doç.Dr.Bilal ÇEKİÇ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 28/05/2008

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2008

Prof. Dr. Necmettin PİRİNÇÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

T E Ş E K K Ü R

Bu tezin hazırlanmasındaki katkılarından dolayı danışman hocam sayın

Prof.Dr.Sezai OĞRAŞ'a

Bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim değerli hocam sayın

Prof. Dr. Çoşkun TAYFUR'a

Kendisiyle çalışma şansını yakaladığım, benimle içtenlikle ilgilenerek değerli bilgilerini paylaşan sayın

Prof. Dr. Jay M. JAHANGIRI'ye

Her konuda desteğini ve tezin yazımı sırasında yardımlarını esirgemeyen sevgili arkadaşım

Dr. Sevtap SÜMER EKER'e

Her zaman yakın ilgi ve desteğini gördüğüm sevgili arkadaşım

Yrd.Doç. Dr. Bilal ÇEKİÇ' e

Varlığını hep yanımda hissetiğim sevgili ***babama***, bugünlere gelmemi sağlayan sevgili ***anneme,*** bana destek olan sevgili ***kardeşlerime*** ve hayatımı daha da anlamlandıran sevgili ***Hilal'e***

Sonsuz teşekkürler…

İ Ç İ N D E K İ L E R

3. BÖLÜM : SÂLÂGEAN–TİPLİ HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLARIN YENİ BİR SINIFI

4. BÖLÜM : SÂLÂGEAN–TİPLİ P-KATLI HARMONİK FONKSİYONLARIN BİR SINIFI

5. BÖLÜM : SÂLÂGEAN–TİPLİ HARMONİK P-KATLI FONKSİYONLARIN YENİ BİR SINIFI

A M A Ç

Son yıllarda, harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisi, oldukça popüler bir araştırma konusu haline gelmiştir. Özellikle, analitik yalınkat (konform) fonksiyonlar hakkında bilinen klasik sonuçların, harmonik dönüşümlere genelleştirilip genelleştirilemeyeceği sorusu, karmaşık analiz alanında çalışan pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir.

Fonksiyonlarla ilgili yapılan çalışmalarda sınır belirleme çabası alışılagelen bir durumdur. Yalınkat fonksiyonlar teorisinde incelenen fonksiyonların katsayı sınırlarını, modülünün alt ve üst sınırlarını bulma problemi, bizi harmonik dönüşümler teorisinde ele alınan fonksiyonların katsayı eşitsizliklerini bulmaya, büyüme, bükülme ve örtme teoremlerinin kesin formlarını elde etmeye yönlendirir.

Bu çalışmadaki esas amacımız, Sâlâgean-tipli harmonik yalınkat ve Sâlâgean-tipli harmonik p-katlı fonksiyonların bazı yeni alt sınıflarını tanımlayıp, bu altsınıfların özelliklerini incelemektir.

Bir diğer amacımız ise, harmonik yalınkat fonksiyonlar teorisinde çalışan araştırmacılara yol gösterici bir kaynak oluşturmaktır.

Ö Z E T

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, harmonik dönüşümlerin, konform dönüşümlerin doğal bir genellemesi olması sebebiyle, analitik yalınkat ve analitik p-katlı fonksiyon sınıflarının tanımları, bu sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili bazı önemli teoremler ve bu sınıfların bazı altsınıfları verilmektedir.

İkinci bölümde, harmonik dönüşümlerin bazı temel özellikleri verilerek, normalize koşulları ile elde edilen yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların S_H sınıfı ve bu sınıfın altsınıflarına ilişkin temel özellikleri incelenmektedir. Ayrıca kesme yapısı metodu (the shear construction) ve bu metotla elde edilen bazı harmonik dönüşüm örnekleri gösterilmektedir. Bundan başka p-katlı harmonik fonksiyonların tanımları ve Sâlâgean operatörü verilmektedir.

Üçüncü bölümde, Sâlâgean-tipli harmonik yalınkat fonksiyonların $S_H(m,n,\alpha,\beta)$ altsınıfı tanımlanmaktadır. Ayrıca bu altsınıftaki fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri, ekstrem noktaları, bükülme sınırları ve konveks kombinasyonu elde edilmektedir.

Dördüncü bölümde, Sâlâgean-tipli p-katlı harmonik fonksiyonların $H_p(m,n,\alpha)$ altsınıfı tanımlanmaktadır. Ayrıca, bu altsınıfa ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri, ekstrem noktaları ve bükülme sınırları hesaplanmaktadır.

Son olarak ***beşinci bölümde***, üçüncü bölümde tanımladığımız $S_H(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının genelleştirilmesi olan, Sâlâgean-tipli p-katlı harmonik fonksiyonların $H_p(m,n,\alpha,\beta)$ altsınıfı tanımlanarak, bu sınıfa ait fonksiyonlar için bazı temel özellikler verilmektedir.

ABSTRACT

This study consists of five chapters.

In the **first chapter**, because of the fact that harmonic mappings are natural generalizations of conformal mapping, definitions of analytic univalent and analytic p-valent functions, some important theorems for the functions belong to these classes and their certain subclasses are given.

In the **second chapter**, by giving some the fundamental properties of harmonic mappings, the class S_H of normalized and sense preserving univalent harmonic functions and the fundamental properties of its subclasses are examined. Moreover, the shear construction method and some of harmonic mappings examples which are obtained by this method are shown. Furthermore, definitions of p-valent harmonic functions and Sâlâgean operator are given.

In the **third chapters**, the subclass $S_H(m,n,\alpha,\beta)$ of Sâlâgean-type harmonic univalent functions is defined. Moreover, it is obtained coefficient inequalities, extreme points, distortion bounds and convex combination for the functions in this subclass.

In the **fourth chapter**, the subclass $H_p(m,n,\alpha)$ of Sâlâgean-type harmonic p-valent functions is defined. Moreover, coefficient inequalities, extreme points and distortion bounds for the functions belong to this subclass are calculated.

Finally, in the **fifth chapter**, by defining the subclass $H_p(m,n,\alpha,\beta)$ of Sâlâgean-type harmonic p-valent functions, which is a generalization of the class $S_H(m,n,\alpha,\beta)$, given in the third chapter, some special properties of the functions belong to this class are given.

G İ R İ Ş

Yalınkat fonksiyonlar teorisi, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biridir. Bu teorinin temelleri, Riemann Dönüşüm Teoremi ile atılmış olmakla birlikte, teorinin başlangıcı, Koebe'nin [25] normalize edilmiş yalınkat bir fonksiyonun kendisinin ve birinci türevinin modülleri üzerindeki sınırların varlığını ispatladığı 1907 yılındaki çalışması ve Bieberbach'ın [6] bu tür fonksiyonların ikinci katsayıları için 1916 yılında elde ettiği katsayı kestirimine dayanır.

Düzlemdeki harmonik dönüşümler, gerçel ve imajiner kısımları birbirinin eşleniği olmayan yalınkat karmaşık değerli harmonik fonksiyonlardır. Diğer bir deyişle, bu dönüşümler Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanmasını gerektirmeyen fonksiyonlardır. Bu nedenle yalınkat karmaşık değerli harmonik fonksiyonların analitik olmasına gerek yoktur. Bu dönüşümler ve onunla ilişkili fonksiyonlar, mühendisliğin farklı dallarında, fizikte, elektronikte, tıpta, aerodinamikte ve uygulamalı matematiğin farklı dallarında oldukça geniş uygulamalara sahiptirler.

Harmonik dönüşümler, konform (analitik yalınkat) dönüşümlerle yakın ilişkilidir. Ancak konform dönüşümlerin aksine, harmonik dönüşümler, resim bölgeleri ile asla belirlenemezler. Bir diğer önemli fark ise, harmonik bir dönüşümün açık birim diskin sınır aralığı üzerinde oluşturulabilmesidir. Diğer taraftan, bu dönüşümler z ve $\overline{z}$ karmaşık değerlerine göre sırasıyla analitik ve koanalitik kısımlarını içeren iki katlı bir seri yapısına sahiptir. Harmonik dönüşümler, konform dönüşümlerin doğal bir genellemesi olmakla beraber, 1920 li yılların ilk yarısına kadar diferansiyel geometriciler tarafından çalışılmıştır. Ancak 1980 li yılların ortalarında harmonik dönüşümler, karmaşık analizciler arasında büyük ilgi çekmeye başlamıştır. 1984 yılında Louis De Branges [7] tarafından normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyonlar için 69 yıl boyunca çözülememiş olan Bieberbach kestirimi ispatlandıktan sonra, doğal olarak bu tür fonksiyonlar için elde edilen sonuçların harmonik dönüşümlere genişletilip genişletilemeyeceği sorusu ortaya çıkmıştır. 1984 yılında James Clunie ve Terry Sheil-Small [8] tarafından yapılan çalışma, bu sorunun cevabının olumlu olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada, konform dönüşümler için elde edilen genişleme ve bükülme teoremleri, örtme teoremleri ve katsayı tahminlerinin, harmonik dönüşümlerde de benzer bir yapıya sahip olduğu ortaya konulmuştur. Ayrıca bu çalışmada, analitik yalınkat fonksiyonlar teorisinde ekstremal rol oynayan Koebe fonksiyonunun benzeri olan harmonik Koebe fonksiyonu oluşturulmuştur. Bu durum özel geometrik koşullara sahip harmonik dönüşümler için zarif ve çok uygun kestirimlerin elde edilmesine sebep olmuştur. Harmonik dönüşümler ile ilgili temel problemlerin birçoğunun çözülememiş olmasına rağmen, Clunie ve Sheil-Small'in yaptığı bu çalışmayla harmonik dönüşümler teorisi tekrar güncel bir araştırma konusu haline gelmiştir.

Düzlemdeki harmonik dönüşüm teorisine diğer bir önemli yaklaşım, Riemann dönüşüm teoreminin uygun bir benzerini aramak olmuştur. Burada konu, kısmi diferansiyel denklemler ve kuazikonform dönüşümler teorisiyle ilişkili hale gelir. 1980 li yıllarda Walter Hengartner ve Glenn Schober, bu konu ile ilgili birçok çalışma yapmışlardır ([17], [18], [19], [20]). Kuazikonform dönüşümler hakkındaki klasik sonuçlar, özellikle bir Beltrami denkleminin çözümleri olarak kuazikonformal homeomorfizmaların varlığı, Riemann dönüşüm teoreminin genellemesi olan aşağıdaki ifadeyi akla getirmiştir:

"D basit bağlantılı bir bölge, w_0 bu bölgede bir nokta ve ω birim diskte $|\omega(z)| < 1$ koşulunu sağlayan analitik bir fonksiyon olarak verilsin. Bu durumda $f(0) = w_0$, $f_z(0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ analitik dilatasyonuna sahip olacak şekilde birim diski D bölgesine dönüştüren, tek bir yön koruyan harmonik dönüşüm vardır".

Ancak, Hengartner ve Schober, aksi bir örnek bularak ileri sürülen bu ifadenin yanlış olduğunu ispatlamışlardır. Böylece verilen hedef bölgesi üzerine resmedilen ve belirlenmiş dilatasyona sahip harmonik dönüşümlerin varlığını engelleyen gizemli bir olguyu keşfetmişlerdir. Fakat dilatasyon daha çok sınırlandırıldığında veya örtenlik koşulu eklenerek daha zayıf hale getirildiğinde, istenilen harmonik dönüşümün var olduğunu göstermişlerdir. Teklik sorusu tam olarak çözülememiş olmasına rağmen, eğer hedef bölge yeteri kadar ideal hale getirilirse dönüşümün tek olacağı bilinmektedir.

Birçok durumda, analitik yalınkat fonksiyonların bazı özellikleri, harmonik dönüşümlerle yapılan genelleştirmelerde önemli rol oynarlar. Ancak bazı özellikler, sadece analitik fonksiyonlara özgü olup, harmonik dönüşümlere genelleştirilemezler. Diğer taraftan, harmonik dönüşümler için elde edilen sonuçların bazıları, konform dönüşümler için elde edilen sonuçlara tam olarak benzemezler. Düzlemdeki harmonik dönüşümler, birçok önemli özelliğe sahip olmasına karşın, bu özellikler daha yüksek boyutlu uzaylara genişletilemez. Hatta, bu klasik sonuçları genelleştirme çabaları üç boyutlu uzaylar için bile başarısızlığa mahkûmdur.

1. B Ö L Ü M

ANALİTİK YALINKAT VE ANALİTİK ÇOK KATLI FONKSİYONLAR

Bu bölümde sırası ile yalınkat fonksiyonlar ve bazı altsınıfları için bir takım önemli tanımlar, teoremler ve bunların sonuçları verilmektedir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bir bölge, açık bağlantılı bir kümedir. Eğer bir bölgenin $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş karmaşık düzlemine göre tümleyeni bağlantılı ise bu bölgeye basit bağlantılı bölge denir. Karmaşık düzlemin bir D bölgesinde $f : D \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin de w_0 noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa, f fonksiyonuna z_0 ***noktasında bir konform dönüşümdür*** denir. Eğer f fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise f fonksiyonu D bölgesinde konformdur.

Bir D bölgesinde regüler bir f fonksiyonuna D ***bölgesinde yalınkattır*** denmesi, f in D deki farklı z değerleri için farklı w değerlerini karşılık getirmesi anlamına gelir. Bu durumda, $w = f(z)$ denklemi, her w değeri için D bölgesinde en fazla bir köke sahiptir. Böyle fonksiyonlar, D bölgesini bire-bir ve konform olarak, w-düzlemindeki bir bölge üzerine dönüştürür.

Yukarıdaki tanıma eşdeğer olarak yalınkatlığı aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz.

Herhangi bir D bölgesinde ve en fazla bir kutup noktası hariç tüm düzlemde analitik bir f fonksiyonu için, $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere,

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

oluyorsa, f fonksiyonuna D ***bölgesinde yalınkattır*** denir. D bölgesindeki yalınkatlık doğal olarak D bölgesinin her alt bölgesinde de sağlanır. Bir D bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu, bir $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda yalınkat ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında ***yerel yalınkat fonksiyon*** adı verilir. Analitik bir f fonksiyonu için $f'(z_0) \neq 0$ koşulu, z_0 noktasında yerel yalınkatlığa eşdeğerdir. Bir bölgede yerel yalınkat olan bir analitik fonksiyon yalınkat olmayabilir.

Yalınkat fonksiyonlar teorisi çok geniş ve karmaşık olduğundan bazı kolaylaştırıcı kısıtlamalar yapmak gerekir. "Her basit bağlantılı D bölgesini, $\Delta = \{ z : |z| < 1 \}$ birim diski üzerine birebir olarak resmeden bir tek f analitik fonksiyonunun var olduğunu" ifade eden ünlü Riemann Dönüşüm Teoremi [1] ile D bölgesi yerine Δ birim diskini alabiliriz.

Genelde Δ birim diskinde analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş yani, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Her $f \in S$ fonksiyonu,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilebilir.

S sınıfındaki fonksiyonların en önceliklisi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$$

şeklinde Taylor serisi açılımına sahip $k(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyon, Δ birim diskini $-1/4$ den $-\infty$ a kadar olan şeridi çıkarılmış tüm karmaşık düzlem üzerine konform olarak dönüştürür. Gerçekten, Koebe fonksiyonu,

$$k(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

olarak tekrar düzenlendiğinde ve $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunun Δ birim diskini konform olarak $\operatorname{Re}\{w\} > 0$ bölgesine dönüştürdüğü düşünüldüğünde, yukarıdaki ifadenin doğru olduğu görülür.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli yer tutan ünlü Bieberbach Teoremi, S sınıfına ait bir f fonksiyonunun a_2 katsayısını hesaplanmasında büyük rol oynar.

Teorem 1.1.1 (Bieberbach Teoremi)

S sınıfındaki her f fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik hali, f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olarak alınması ile mümkündür [10]. ■

Verilen koşullar altında, eşitlik işaretinin korunduğu kabul edilebilir bir fonksiyonun varlığından hareketle eşitsizliği düzeltmek (yani bir üst sınırı azaltmak veya bir alt sınırı arttırmak) imkansız ise, bu eşitsizliğe ***kesin eşitsizlik*** denir. Koebe fonksiyonu S sınıfında ve bu fonksiyon için $a_2 = 2$ olduğundan, Teorem 1.1.1 deki $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği kesindir. Eşitliği sağlayan bir fonksiyona da ***ekstremal fonksiyon*** denir. Böylece Koebe fonksiyonu ekstremal fonksiyon olur.

Bieberbach Teoreminin ilk uygulaması, Koebe'ye ait ünlü bir örtme teoremidir. Her bir $f \in S$ fonksiyonu $f(0)=0$ koşullu açık bir dönüşüm olduğundan f fonksiyonunun görüntüsü orijin merkezli en az bir diski kapsar. 1907 yılında Koebe, ρ pozitif bir sabit olmak üzere, S sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntü kümelerinin, ortak bir $|w|<\rho$ diski kapsadıklarını göstermiştir. Koebe fonksiyonu, $\rho \leq 1/4$ olmasını gerektirir. Daha sonra, Bieberbach [10], ρ sabitinin $1/4$ alınabileceği şeklindeki Koebe Kestirimini ispatlamıştır.

Teorem 1.1.2 (Koebe Dörtte Bir Teoremi)

Δ birim diskinde analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş fonksiyonların S sınıfındaki her fonksiyonun değer kümesi, $\{ w : |w| < 1/4 \}$ diskini kapsar [25]. ■

Bieberbach'a ait $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrik teorisinde daha ileri uygulamalara sahiptir. En önemli sonuç, $f \in S$ iken $|f'(z)|$ için kesin üst ve alt sınırlar veren Koebe Bükülme Teoremidir. Bükülme Terimi, geometrik olarak, $|f'(z)|$ nin f dönüşümü altında sonsuz küçük büyütme çarpanı ya da $|f'(z)|^2$ Jacobien'inin alanın sonsuz küçük büyütme çarpanı olması gerçeğinden çıkmıştır.

Teorem 1.1.3 (Bükülme Teoremi)

Her bir $f \in S$ ve $|z|=r<1$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır [10]. ■

Teorem 1.1.4 (Büyüme Teoremi)

Her bir $f \in S$ ve $|z|=r<1$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır [10]. ■

Aşağıdaki teoremde, bazı durumlarda daha kullanışlı olması açısından büyüme ve bükülme teoremlerinin birleştirilmiş olduğu bir diğer eşitsizlik verilmektedir.

Teorem 1.1.5

S sınıfındaki her bir f fonksiyonu için $|z|=r<1$ olmak üzere

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left|\frac{z f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

olur [10]. ■

Bieberbach Kestirimi

S sınıfındaki her f fonksiyonu $n=2,3,\ldots$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağlar. f, Koebe fonksiyonu veya onun bir dönmesi olmadıkça tüm n değerleri için kesin eşitsizlik sağlanır [6]. ■

Bieberbach Kestirimi, 1916 yılında Bieberbach tarafından ortaya atılmıştır. Uzun yıllar kestirim olarak kalan ve kısmen ispatlanan bu kestirimin tam ispatı 1984 yılında Louis de Branges tarafından yapılmıştır [7].

1.2 Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde, yalınkat fonksiyonların bazı özel alt sınıflarını ele alarak, bu altsınıfların özelliklerinden söz edeceğiz.

Bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesi ve bir $z_0 \in D$ noktasını alalım. z_0 noktasını, her $z \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D kümesine z_0 ***noktasına göre yıldızıl*** veya kısaca ***yıldızıl*** denir. Geometrik olarak, D kümesinin yıldızıl küme olması demek, her noktasının z_0 noktasından "görünür" olması demektir. f fonksiyonu yalınkat ve $\Im = f(\Delta)$ görüntü bölgesi orijine göre yıldızıl ise, yani $w \in \Im$ ve $0 \leq t \leq 1$ alındığında $t\,w \in \Im$ oluyorsa, f fonksiyonuna ***yıldızıl fonksiyon*** denir.

Noktalarının her birine göre yıldızıl olan D kümesine ***konveks küme*** adı verilir. Başka bir ifadeyle, D kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen D kümesinde kalıyorsa, D kümesine konvekstir denir. Genel olarak, bir f fonksiyonu yalınkat ve $f(\Delta)$ görüntü bölgesi konveks ise, f fonksiyonuna ***konveks fonksiyon*** denilmektedir [33].

.

S sınıfının yıldızıl ve konveks fonksiyonları kapsayan altsınıfları, sırasıyla, S^* ve K ile gösterilir. Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları için,

$$K \subset S^* \subset S$$

kapsaması yazılabilir.

f fonksiyonu, konveks bir D bölgesinde analitik ve bu bölgede $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise, f fonksiyonu, D bölgesinde yalınkattır (Noshiro-Warschawski Teoremi [12]).

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde bir diğer önemli sınıf ise $p(0)=1$ ve $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşulları ile Δ birim diskinde analitik

$$p(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

fonksiyonlarının oluşturduğu ***pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar*** sınıfıdır**.** $\wp$ sembolü ile gösterilen bu sınıf, S^* ve K sınıfları ile yakından ilgilidir.

Yalınkat fonksiyonların bazı özel altsınıfları, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar yardımıyla tanımlanabilir. Başka bir deyişle, Δ birim diskinde analitik, $f(0)=f'(0)-1=0$ normalize koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu için

$$f\in S^* \;\Leftrightarrow\; \frac{zf'(z)}{f(z)}\in\wp$$

ve

$$f\in K \;\Leftrightarrow\; 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\in\wp$$

özellikleri sağlanır [12].

Yalınkat fonksiyonların alt sınıfları arasındaki ilişkiyi veren ve Alexander Teoremi olarak bilinen aşağıdaki ifade önemlidir:

f fonksiyonu, Δ bölgesinde $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalleştirilmiş analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$f\in K \;\Leftrightarrow\; z\,f'\in S^*$$

özelliği vardır [4].

Her pozitif $\rho\le 2-\sqrt{3}$ sayısı için her bir $f\in S$ fonksiyonu, $|z|<\rho$ diskini konveks bir bölge üzerine dönüştürür. Bu durum her $\rho>2-\sqrt{3}$ için yanlıştır [12]. Buradaki $2-\sqrt{3}=0{,}267\ldots$ sayısına S sınıfı için ***konvekslik yarıçapı*** denir. ρ sayısı, her $f\in S$ için $f(\rho\, z)$, Δ birim diskinde konveks olacak şekildeki en büyük sayıdır. Her $f\in S$ için ***yıldızıllık yarıçapı*** da $\tanh\frac{\pi}{4}=0{,}655\ldots$ olarak bilinmektedir.

S^* sınıfını kapsayan ve basit bir geometrik tanıma sahip S sınıfının ilginç bir altsınıfı da konvekse-yakın fonksiyonlardır. Bu sınıf, 1952 yılında W.Kaplan tarafından geliştirilmiştir [24].

Bir f fonksiyonu $|z|<1$ bölgesinde analitik olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}>0$$

olacak şekilde konveks bir g fonksiyonu veya eşdeğer olarak,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z\,f'(z)}{g(z)}\right\}>0$$

eşitsizliğini sağlayan yıldızıl bir g fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna ***konvekse-yakın fonksiyon*** adı verilir. $f(0)=f'(0)-1=0$ koşullarını sağlayan, yani normalleştirilmiş konvekse-yakın f fonksiyonlarının sınıfı C ile gösterilir. Burada f fonksiyonunun yalınkat olması öncelikli koşul değildir. Ayrıca g fonksiyonunun $g(0)=g'(0)-1=0$ normalize koşullarını sağlaması gerekmez.

Her konveks fonksiyon konvekse-yakındır. Daha genel olarak, her yıldızıl fonksiyon konvekse-yakındır ve her konvekse-yakın fonksiyon yalınkattır. Bu sonuçlar,

$$K \subset S^* \subset C \subset S$$

kapsama bağıntısı ile özetlenebilir.

S sınıfında konvekse-yakın fonksiyonların ***konvekse-yakınlık yarıçapı*** $0.80\ldots$ olarak bilinmektedir [27]

1936 yılında Robertson [36], α mertebeli konveks ve α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

S sınıfına ait bir f fonksiyonu, tüm $z \in \Delta$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyona ***α mertebeli yıldızıl fonksiyon*** adı verilir. Bu şekildeki fonksiyonların kümesi $S^*(\alpha)$ ile gösterilir. Aynı fonksiyon,

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyona ***α mertebeli konveks fonksiyon*** denir ve bu fonksiyonların kümesi $K(\alpha)$ ile gösterilir.

$$\left.\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right|_{z=0} = 1+\left.\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|_{z=0} = 1$$

olduğundan $\alpha \le 1$ olması gerektiği açıktır. Aksi takdirde $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümelerinin ikisi de boş olacaktır. Ayrıca, $\alpha = 1$ ise $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümeleri sadece bir fonksiyona sahip olur : $f(z)=z$. Genelde $0 \le \alpha < 1$ doğal koşulunu göz önüne alacağız. Burada α değeri arttıkça $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümeleri küçülmektedir.

Alexander Teoreminin, bu sınıflarla

$$f(z) \in K(\alpha) \Leftrightarrow F(z) \equiv z\,f'(z) \in S^*(\alpha)$$

şeklinde bir ilgisi vardır.

1.3 p-Katlı Fonksiyonlar Sınıfı ve Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde p-katlı fonksiyonları ve bazı özel alt sınıflarını tanımlayacağız.

$w = f(z)$ denklemi, bir D bölgesinde her farklı w değeri için en fazla p tane köke sahip ise f fonksiyonuna ***p-katlı fonksiyon*** (veya D bölgesinde p mertebeden çok değerli veya kısaca çok katlı) denir.

$a_p \neq 0$, $p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ olmak üzere, Δ birim diskinde analitik olan

$$f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfını $A(p)$ ile gösterelim.

$A(p)$ sınıfındaki bir f fonksiyonunun, Δ birim diskinde,

$$\mathrm{Re}\frac{z f'(z)}{f(z)} > 0$$

ve

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

koşullarını sağlaması durumunda bu fonksiyonlara, sırasıyla, ***p-katlı yıldızıl fonksiyon*** ve ***p-katlı konveks fonksiyon*** denir. $A(p)$ sınıfının alt sınıfları olan p-katlı yıldızıl ve p-katlı konveks fonksiyonların sınıfları, sırasıyla, S_p^* ve K_p sembolleri ile gösterilir. p-katlı fonksiyonların alt sınıfları, yalınkat fonksiyonların alt sınıflarına ait bazı özellikleri sağlar. Bu özellikler aşağıdaki teoremlerde ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 1.3.1

f fonksiyonu Δ birim diskinde p-katlı yıldızıl bir fonksiyon ise, bu bölgede p-katlıdır. Benzer şekilde f fonksiyonu Δ birim diskinde p-katlı konveks bir fonksiyon ise, yine bu bölgede p-katlıdır [31]. ■

Teorem 1.3.2

$A(p)$ sınıfına ait bir f fonksiyonunun K_p sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşul $\dfrac{z\,f'(z)}{p}$ fonksiyonunun S_p^* sınıfında olmasıdır. Ayrıca

$$K_p \subset S_p^*$$

kapsaması da yazılabilir [31]. ■

K_p ve S_p^*, $p=1$ durumunda sırasıyla, yalınkat fonksiyonların alt sınıfları olarak bilinen konveks ve yıldızıl fonksiyonlar sınıflarını oluşturur. Yani, $K_1 = K \subset S^* = S_1^*$ şeklindedir.

$f \in A(p)$ için Δ birim diskinde

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right) < p+\frac{1}{2}$$

eşitsizliği yazılabiliyorsa, f fonksiyonu Δ bölgesinde p-katlı yıldızıl ve $z\in\Delta$ iken

$$0 < \frac{z\,f'(z)}{f(z)} < \frac{2p(p+1)}{2p+1}$$

özelliği sağlanır [32]. Bu durumda,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0$$

olacak şekilde p-katlı konveks bir $g \in A(p)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, f fonksiyonu ***p-katlı konvekse-yakın fonksiyon*** adını alır ve bu fonksiyonların sınıfı C_p ile gösterilir.

Bununla beraber, f fonksiyonu, $\forall z\in\Delta$ ve $p\in\mathbb{N}$ olmak üzere en az bir $0 \le \alpha < p$ değeri için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right) d\theta = 2p\pi$$

koşullarını sağlıyorsa, ***α-mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyon*** adını alır. $A(p)$ sınıfının alt sınıfı olan α-mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S_p^*(\alpha)$ ile gösterilecektir.

$A(p)$ sınıfına ait bir f fonksiyonu, $\forall z \in \Delta$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere en az bir $0 \le \alpha < p$ değeri için

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(1 + \frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right) d\theta = 2p\pi$$

koşullarını sağlıyorsa, bu fonksiyona ***α-mertebeli p-katlı konveks fonksiyon*** veya ***p-katlı α-konveks fonksiyon*** denir. Bu tür fonksiyonların sınıfı $K_p(\alpha)$ ile gösterilir.

Verilen son tanımda özel olarak $\alpha = 0$ alındığında

$$K_p(0) \subset S_p^*(0) = S_p^*$$

olduğu açıktır. $K_p(\alpha)$ ve $S_p^*(\alpha)$ sınıfları arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 1.3.3

$A(p)$ sınıfına ait bir f fonksiyonunun $K_p(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşul $\dfrac{z\,f'(z)}{p}$ fonksiyonunun $S_p^*(\alpha)$ sınıfında olmasıdır. Bundan başka,

(i) $S_p^*(\alpha) \subseteq S_p^*(0)$

(ii) $K_p(\alpha) \subseteq K_p(0)$

(iii) $K_p(\alpha) \subset S_p^*(\alpha) \subset A(p)$

kapsamalarını yazmak mümkündür. ■

$A(p)$ sınıfına ait bir f fonksiyonunu alalım. Eğer $\forall z \in \Delta$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere en az bir $0 \leq \alpha < p$ değeri için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > \alpha$$

olacak şekilde $g \in K$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, f ***α*-mertebeli p-katlı konvekse yakın fonksiyon** olarak adlandırılır. α mertebeli p-katlı konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $C_p(\alpha)$ ile gösterilir.

1.4 Subordinasyon İlkesi

Subordinasyon ilkesi karmaşık analizde önemli rol oynamaktadır. Son yıllarda karmaşık analiz ile ilgilenen birçok matematikçi, subordinasyon konusunda çalışmalar yapmıştır. Subordinasyon kavramı, ilk olarak E. Lindelöf tarafından ortaya atılmış, ancak temel bağıntılar J.E. Littlewood ve W.W. Rogosinski tarafından bulunmuştur.

f ve g fonksiyonları Δ birim diskinde analitik olsunlar. Δ diskinde

$$f(z) = g\left(w(z) \right)$$

olacak şekilde $|w(z)| < 1$ ve $w(0) = 0$ koşullarını sağlayan analitik (yalınkat olması gerekmeyen) bir w fonksiyonu varsa, ***f* fonksiyonu *g* fonksiyonuna subordinedir** denir ve bu durum $f \prec g$ şeklinde gösterilir.

Pozitif gerçel kısma sahip her fonksiyon, $\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna subordinedir. Yani,

$$p(z) \in \wp \;\Leftrightarrow\; p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

önermesi doğrudur [33].

Subordine olunan fonksiyonun yalınkat olması, en önemli durumdur. g fonksiyonu Δ birim diskinde yalınkat olmak üzere

$$f \prec g \;\Leftrightarrow\; f(0) = g(0) \qquad \text{ve} \qquad f(U) \subset g(U)$$

önermesi doğrudur [10].

1.5 Ekstrem Noktalar

f ve g, X uzayında herhangi iki fonksiyon ve α, β belirli bir $\mathcal{F}$ cismine ait iki sayı olmak üzere, $h = \alpha f + \beta g$ de X uzayında ise bu uzaya, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir ***vektör uzayı*** denir.

Bir topolojik vektör uzayının, konveks kümelerinden oluşan topoloji için bir tabanı varsa bu uzaya ***yerel konvekstir*** denir. Şimdi, X kümesi üzerinde konveks küme ve ekstrem nokta kavramlarını tanımlayalım.

Tanım 1.5.1

Bir vektör uzayında f ve g yi birleştiren $L(f,g)$ doğru parçası, $0 \le t \le 1$ olmak üzere $h = tf + (1-t)g$ formundaki tüm h noktalarının kümesidir. f ve g noktalarına $L(f,g)$ doğru parçasının ***uç noktaları*** denir. Eğer $0 < t < 1$ ise, h noktası $L(f,g)$ nin bir ***iç noktası*** olur.

Tanım 1.5.2

Eğer C kümesindeki her f, g nokta çifti için $L(f,g)$ kümesi de C kümesinde oluyorsa, ***C kümesi X te konvekstir.***

Tanım 1.5.3

Konveks bir C kümesindeki bir h noktası, C kümesinde kapsanan herhangi bir $L(f,g)$ doğru parçasının bir iç noktası değilse bu noktaya C kümesinin bir ***ekstrem noktası*** denir. C kümesinin tüm ekstrem noktalarının kümesini $E(C)$ ile göstereceğiz.

Eğer f, C kümesinin bir iç noktası ise $E(C)$ kümesinde olamaz. Ancak bu, C kümesinin tüm sınır noktalarının $E(C)$ kümesinde olacağı anlamına gelmez.

Eğer bir M kümesi konveks değilse, konveks bir kümeye genişletilebilir. Bir M kümesinin ***kapalı konveks örtüsü (hull)***, M kümesini kapsayan en küçük kapalı konveks kümedir. Bu küme $H(M)$ veya $cl(coM)$ sembolleri ile gösterilir. Böyle bir küme daima vardır. Çünkü kapalı konveks bir $M \subset X$ kümesi için M kümesini kapsayan kapalı konveks kümelerin arakesiti olan $H(M)$, M kümesinin kapalı konveks bir örtüsüdür. Yukarıda verilen bilgiler ışığında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 1.5.4 (Krein-Mil'man Teoremi)

C, bir X yerel konveks topolojik vektör uzayında bir kompakt konveks küme olsun. Bu durumda C, ekstrem noktalarının kapalı konveks örtüsüdür. Sembolik olarak $C = H\ (E(C))$ yazılabilir [26]. ■

Verilen bir M kümesi için pek çok problemin çözümü, M kümesinin ekstrem noktaları için problemi çözmeye indirgenebilir. Bu sebeple $E(M)$ kümesini bulmak oldukça faydalıdır.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde kullanılan kümelerin çoğu konveks değildir. Bununla beraber herhangi bir M kümesi zaten kapalı konveks örtüsünde kapsanır ve M kümesindeki belirli bir ekstremal problemin çözümü, daha büyük olan $H(M)$ kümesindeki çözümü ile aynıdır [12].

2. B Ö L Ü M

HARMONİK YALINKAT VE HARMONİK P-KATLI FONKSİYONLAR

Bu bölümde yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların bazı temel özellikleri verilmektedir. Bununla beraber normalize koşulları ile elde edilen yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların S_H sınıfı ve bu sınıfın altsınıflarına ilişkin temel özellikeri incelenmektedir.

2.1 Harmonik Yalınkat Dönüşümler

Tanım 2.1.1

D, $\mathbb{C}$ karmaşık düzleminde bir bölge ve $u(x,y)$, D bölgesinde ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Her $z \in D$ noktası için

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

şeklindeki Laplace denklemini sağlayan $u(x,y)$ fonksiyonuna ***harmonik fonksiyon*** denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $w = f(z) = u(z) + i\,v(z)$, D bölgesinde tanımlanmış karmaşık değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer u ve v fonksiyonları D bölgesinde gerçel değerli harmonik fonksiyonlar ise, yani u ve v fonksiyonları $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$ Laplace denklemlerini sağlıyorsa, f fonksiyonu D bölgesinde harmoniktir.

Eğer u ve v, D bölgesinde harmonik fonksiyonlar ise xy-düzlemindeki bir D bölgesini, uv-düzlemindeki bir Ω bölgesine bire-bir dönüştüren

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y)$$

dönüşümüne ***harmonik dönüşüm*** denir.

Çalışmamızda harmonik bir dönüşüm, karmaşık değerli yalınkat bir harmonik fonksiyon olarak alınacaktır. Düzlemdeki harmonik dönüşümler, gerçel ve imajiner kısımları birbirinin eşleniği olması gerekmeyen yalınkat karmaşık değerli dönüşümlerdir.

Bir D bölgesinde tanımlı fonksiyonlarının analitikliği, çarpım ve bileşke kuralları altında korunurken bu durum harmonik fonksiyonlar için geçerli değildir. Örneğin verilen $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları bize iki harmonik fonksiyonun çarpımının harmonik olması gerekmediğini gösterir. Bununla beraber $f : D \to \mathbb{C}$ ve $g : D \to \mathbb{C}$ harmonik fonksiyonlar ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonunun harmonik olması gerekmez. Benzer şekilde $f : D \to \mathbb{C}$ harmonik bir fonksiyon ve $g : f(D) \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyon ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu yine harmonik olmayabilir. Ancak, $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve $g : f(D) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu harmonik olması durumunda $g \circ f$ bileşke fonksiyonu harmoniktir. Ayrıca harmonik bir dönüşümün tersi harmonik olmak zorunda değildir. Buradan harmonik dönüşümlerin sınır davranışının, konform dönüşümlerin sınır davranışından çok daha karmaşık olduğunu söyleyebiliriz.

Konformal olması gerekmeyen harmonik dönüşümlerin en temel örnekleri $|\alpha| \neq |\beta|$ olmak üzere

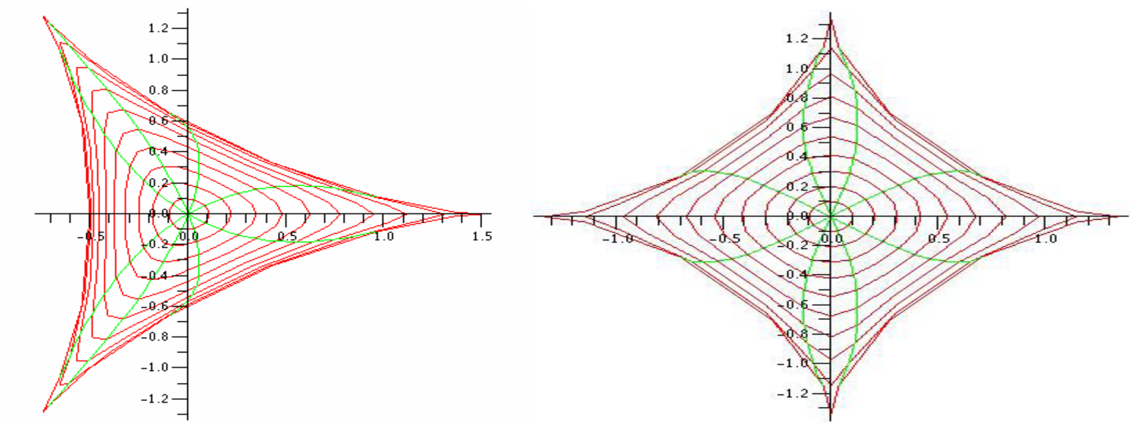
$$f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \overline{z}$$

formundaki afin dönüşümlerdir. $\gamma = 0$ alınması halinde bu dönüşüm, doğrusal dönüşüm formunu alır. Afin dönüşüm olan harmonik dönüşümlerin her bileşkesi harmoniktir. Yani f harmonik ise, $\alpha f + \gamma + \beta \overline{f}$ formunda yazılır.

Diğer bir önemli örnek, $f(z) = z + \frac{1}{2}\overline{z}^2$ şeklindeki harmonik fonksiyondur. Bu fonksiyon birim diski, $|w| = \frac{3}{2}$ çemberi içinde kalan 3 kanatlı bir hiposikloidin iç bölgesi üzerine dönüştürür. Bu fonksiyonun yalınkatlığını göstermek için birim disk içinde bulunan z_1 ve z_2 noktaları için $f(z_1) = f(z_2)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$(\overline{z}_1 + \overline{z}_2).(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 2.(z_2 - z_1)$$

eşitliği elde edilir. $|z_1 + z_2| < 2$ olduğundan yukarıdaki eşitlik $z_1 = z_2$ olmadıkça mümkün değildir. Böylece f fonksiyonu yalınkat olur. $n = 2$ ve $n = 3$ için $f(z) = z + \frac{1}{n}\overline{z}^n$ dönüşümü altında birim diskin görüntüleri Şekil 1 de gösterilmiştir. Şekildeki eğriler eşmerkezcil çemberler ve merkezcil ışınların görüntülerinden oluşmaktadır.



(a) $n = 2$ b) $n = 3$

ŞEKİL 1. Birim diskin $f(z) = z + \frac{1}{n}\overline{z}^n$ dönüşümü altında görüntüsü

Karmaşık analizde $\frac{\partial}{\partial z}$ ve $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ diferensiyel operatörleri oldukça önemli bir yere sahiptir. $z = x + iy$ ve $\overline{z} = x - iy$ karmaşık eşlenik çiftini

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \;,\; y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

şeklinde yazarak bu diferansiyel operatörlerin aşağıda verilen kullanışlı gösterimlerini elde etmek mümkündür :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Yukarıdaki gösterimler ile $f(x+iy)$ fonksiyonunu, z ve $\overline{z}$ değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak

$$f(x+iy) = u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu nedenle sürekli kısmi türevlere sahip $f = u + iv$ karmaşık değerli fonksiyonu için,

$$f_x = u_x + iv_x$$

ve

$$f_y = u_y + iv_y$$

gösterimini kullanabiliriz. Böylece kısmi türevlerle

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}\left[(u_x + v_y) - i(u_y - v_x)\right]$$

$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}\left[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\right]$$

ve

$$|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = u_x v_y - u_y v_x$$

eşitliklerini yazmak mümkündür.

Karmaşık değerli bir f fonksiyonu için $\overline{f_{\overline{z}}}=0$ olması halinde

$$u_x = v_y \quad \text{ve} \quad u_y = -v_x$$

şeklindeki Cauchy-Riemann denklemlerini elde ederiz. Ayrıca yapılan işlemlerle f fonksiyonun

$$\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4 f_{z\overline{z}}$$

şeklinde Laplace denkleminin karmaşık formunu gösterebiliriz. Bu durumda, karmaşık değerli bir fonksiyonunun harmonik olması için gerekli ve yeterli koşul ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonun

$$\Delta f = 4 f_{z\overline{z}} = 0$$

eşitliğini sağlamasıdır. Ayrıca,

$$\overline{(f_z)} = \left(\overline{f}\right)_{\overline{z}}$$

eşitliği z ve $\overline{z}$ değişkenleri arasındaki türev ilişkisini belirtir.

Karmaşık fonksiyonlar kuramının en temel teoremlerinden biri, analitiklik için gerekli ve yeterli bir koşul bulmakla ilgilidir. Bu durumla ilgili olarak aşağıdaki ifadeyi verebiliriz:

"Bir $f = u + iv$ (düzlemsel) harmonik dönüşümünün D bölgesinde analitik olması için gerekli ve yeterli koşul u ve v fonksiyonlarının harmonik eşlenik olması yani $u, v \in C^2(D)$ fonksiyonlarının $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamasıdır."

Doğal olarak en önemli harmonik fonksiyon örnekleri Cauchy-Riemann denklemlerinden elde edilenlerdir. Böylece açık bir kümede tanımlanan analitik bir fonksiyonun gerçel ve imajiner kısımları harmonik olur. Bununla beraber her analitik fonksiyon, bir harmonik fonksiyondur.

$u(x,y)$ basit bağlantılı bir D bölgesinde gerçel değerli harmonik bir fonksiyon olmak üzere, D bölgesi üzerinde $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$ olacak şekilde bir analitik fonksiyon vardır. Bu durum harmonik bir fonksiyondan analitik bir fonksiyona en doğal geçiş yolunu ifade eder.

Bununla birlikte f fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olmak üzere, f fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter koşul $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ fonksiyonunun analitik olmasıdır. Bu durum, analitiklik ve harmoniklik arasındaki bir diğer ilişkiyi ifade eder. Eğer f fonksiyonu analitik ise $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$ eşitliği sağlanır.

Şimdi harmonik fonksiyonlar teorisinde oldukça önemli bir yere sahip olan aşağıdaki teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 2.1.2 (Kanonik Gösterim)

Basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde karmaşık değerli harmonik bir f fonksiyonu, h ve g analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \tag{2.1}$$

gösterimine sahiptir. Bu gösterim sabit farkıyla tektir [34].

İspat :

u ve v basit bağlantılı bir D bölgesinde harmonik fonksiyonlar olmak üzere $f = u + iv$ fonksiyonunu oluşturalım. Bu durumda

$$u = \operatorname{Re} F = \frac{F + \overline{F}}{2} \quad , \quad v = \operatorname{Im} G = \frac{G - \overline{G}}{2i}$$

olacak şekilde D bölgesi üzerinde analitik F ve G fonksiyonları vardır. Böylece h ve g fonksiyonları D bölgesinde analitik olmak üzere kanonik gösterim elde edilir.

$$f = \frac{F + \overline{F}}{2} + \frac{G - \overline{G}}{2} = \left(\frac{F + G}{2}\right) + \left(\frac{\overline{F} - \overline{G}}{2}\right) = h + \overline{g}$$

şeklinde kanonik gösterim elde edilir.

Kanonik gösterim, yukarıda gösterdiğimiz ispatın dışında aşağıdaki şekilde de gösterilebilir:

f harmonik olduğundan f_z fonksiyonu D basit bağlantılı bölgesinde analitik olur. D bölgesinde analitik olan bir h fonksiyonunu $h' = f_z$ şeklinde tanımlayabiliriz. Bilinen f ve h fonksiyonlarından yararlanarak $f = h + \overline{g}$ kanonik gösterimini elde etmek için g fonksiyonunu

$$g = \overline{f - h} = \overline{f} - \overline{h}$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonun D bölgesinde analitik olduğunu yani $g_{\overline{z}} = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$g_{\overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\overline{f} - \overline{h}\right) = \overline{f_z} - \overline{h_z} = \overline{f_z} - \overline{h'} = 0$$

olduğundan g fonksiyonu D bölgesinde analitik olur. Bir f fonksiyonunun kanonik gösteriminin tekliği, hem analitik hem de anti-analitik (yani analitik fonksiyonun eşleniği) olan bir fonksiyonun sabit olması gerçeğinden elde edilir. ■

Yukarıdaki teoremde verilen h ve g fonksiyonlarını sırasıyla f fonksiyonun analitik ve koanalitik kısımları olarak adlandıracağız.

Harmonik dönüşümler teorisinde, bir fonksiyonun jakobiyeni oldukça önemli bir konudur. Aşağıdaki tanımda jakobiyen kavramı verilmektedir.

Tanım 2.1.3

D, $\mathbb{C}$ karmaşık düzleminde bir bölge ve $f = u + iv$ bu bölgede diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun jakobiyeni

$$J_f = \begin{vmatrix} u_x(z) & v_x(z) \\ u_y(z) & v_y(z) \end{vmatrix} = u_x(z)v_y(z) - u_y(z)v_x(z)$$

olarak tanımlanır. $f = u + iv$ fonksiyonunun

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)\ ,\ f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

şeklindeki kısmi türevleri ile J_f jakobiyeni arasındaki ilişki

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2$$

ile verilebilir.

Eğer f analitik bir fonksiyon ise J_f jakobiyeni

$$J_f(z)=(u_x)^2+(v_x)^2=|f'(z)|^2$$

olacaktır.

$f=h+\overline{g}$, Δ birim diskinde harmonik bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun jakobiyeni

$$J_f(z)=|f_z(z)|^2-|f_{\overline{z}}(z)|^2=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2$$

olarak elde edilir. J_f jakobiyeni, D bölgesinde pozitif olduğunda, f harmonik fonksiyonu bu bölgede ***yön koruyan dönüşüm*** olarak adlandırılır. Bir analitik yalınkat fonksiyon, yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonun özel bir durumudur. Analitik f fonksiyonları için

"$J_f \neq 0 \Leftrightarrow$ f, z noktasında yerel olarak yalınkattır"

önermesi iyi bilinen bir sonuçtur. 1936 yılında Hans Lewy bu durumun harmonik dönüşümler için de doğru olduğunu göstermiştir. Bu durum aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.1.4 (Lewy Teoremi)

Bir harmonik dönüşümün z_0 noktasının bir komşuluğunda yerel olarak yalınkat olması için gerekli ve yeterli koşul z_0 noktasında $J_f(z)\neq 0$ olmasıdır [29]. ■

Ancak Lewy'nin teoremi, $\mathbb{R}^3$ te geçerli değildir. Bununla beraber Lewy, bu teoreme ek koşullar ekleyerek $\mathbb{R}^3$ te doğru olduğunu göstermiştir[30].

Harmonik yalınkat fonksiyonları kavramak için ilk çalışmalar Clunie ve Sheil-Small tarafından yapılmıştır [8].

Sonuç 2.1.5

$f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun yön koruyan olması için gerekli ve yeterli koşul

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0 \quad (z \in \Delta)$$

olmasıdır. Başka bir ifadeyle

$$\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1 \quad (z \in \Delta)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [8]. ■

Karmaşık düzlemin her noktasında analitik olan tam fonksiyonlar içinde, karmaşık düzlemi kendi üzerine dönüştüren yalınkat analitik dönüşümlerin sadece a_0 ve a_1 ($a_1 \neq 0$) birer sabit olmak üzere, $f(z) = a_0 + a_1 z$ formundaki doğrusal dönüşümler olduğu iyi bilinir. Bu sonucun benzerini harmonik dönüşümler için de sorgulamak doğaldır. Bu durum aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

Teorem 2.1.6

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ve $|\alpha| \neq |\beta|$ olmak üzere

$$f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \overline{z}$$

formundaki afin dönüşümler, karmaşık düzlemi kendi üzerinde resmeden tek harmonik dönüşümlerdir [8]. ■

1952 yılında Heinz tarafından verilen aşağıdaki yardımcı teorem ile birim diski kendi üzerine resmeden harmonik dönüşümlere ait bir temel özellik oluşturulmuştur.

Yardımcı Teorem 2.1.7 (Heinz Lemma)

$f(0) = 0$ olmak üzere f fonksiyonu, birim diski kendi üzerine harmonik olarak dönüştüren bir fonksiyon olsun. Bu durumda mutlak bir $c > 0$ sabiti için

$$|f_z(0)|^2 + |f_{\overline{z}}(0)|^2 \geq c > 0$$

eşitsizliği sağlanır [15]. ■

Birim diski yalınkat olarak karmaşık düzleme dönüştüren bir analitik fonksiyon yoktur. T. Rado, bu gerçeğin harmonik dönüşümler için de geçerli olduğunu aşağıdaki teoremde ifade etmiştir.

Teorem 2.1.8 (Rado Teoremi)

$\Delta = \{ z : |z| < 1 \}$ birim diskini, karmaşık düzlem üzerine dönüştüren bir harmonik dönüşüm yoktur [35]. ■

Ayrıca Teorem 2.1.6 yardımıyla karmaşık düzlemi, kendine ait uygun bir alt bölgesine dönüştüren bir harmonik dönüşümün olmadığını söyleyebiliriz.

Harmonik dönüşümler teorisinin çoğu konform dönüşümlerin klasik teorisinden esinlenmiştir. Bundan dolayı konform dönüşümlerin doğal bir genellemesi olup **"konformluğa yakın"** olarak adlandırılan kuazikonform dönüşümler ile arasında yakın bir ilişki bulunmaktadır. 1980 yılında W.Hengartner ve G.Schober, harmonik dönüşümler için Riemann dönüşüm teoreminin benzerini oluşturabilmek için birçok çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların çoğu, Beltrami denklemi olarak adlandırılan $f_{\bar{z}} / f_z$ kısmi diferansiyel denkleminin çözümü olan kuazikonform dönüşümler ile ilgilidir. Bununla birlikte Sonuç 2.1.5 te ifade edilen

$$\left| \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} \right| = \left| \frac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z} \right| = \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| < 1$$

eşitsizliği harmonik dönüşümlerin sınıflandırılmasında önemli bir rol oynar. Bu eşitsizlik harmonik dönüşümler ve kuarzikonformal dönüşümler arasında yakın ilişkiyi gösterir. Aşağıda kuazikonform dönüşüm hakkında temel bilgiler verilmiştir. Kuazikonformal dönüşümler ile ilgili daha fazla bilgi için Ahlfors [2] ve Lehto-Virtanen'in [28] kitaplarından yararlanılabilir.

Tanım 2.1.9

$z = x + iy$ olmak üzere $w = f(z) = u + iv$ fonksiyonu, D bölgesinde, kendisi ve birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonların C^1 sınıfına ait bir homeomorfizma olsun. Bu durumda, f homeomorfizması bir z noktasında

$$du = u_x\, dx + u_y\, dy$$
$$dv = v_x\, dx + v_y\, dy$$

diferansiyelleri ile bir doğrusal dönüşüm belirtir. Bu doğrusal dönüşüm önceden tanımlanan

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)\ , \qquad f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

fonksiyonları yardımıyla

$$dw = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z}$$

şeklinde karmaşık formda yazılabilir. Bu dönüşüm geometrik olarak (dx, dy)-düzleminden (du, dv)-düzlemine bir afin dönüşüm belirtir. $w = f(z)$ bir yön koruyan dönüşüm olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği yazmak mümkündür:

$$\left(|f_z| - |f_{\overline{z}}|\right)|dz| \le |dw| \le \left(|f_z| + |f_{\overline{z}}|\right)|dz|\,.$$

Yukarıda elde edilen bu kesin eşitsizlik, geometrik olarak, f fonksiyonu için sonsuz küçük bir çemberi, büyük eksenin küçük eksene oranı

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}$$

olan sonsuz küçük elipslere dönüştürdüğünü söyler. Bu $D_f = D_f(z)$ oranına z noktasında f fonksiyonun ***dilatasyonu*** (genişlemesi) denir. Burada $D_f(z)$ oranının $1 \le D_f(z) < \infty$ eşitsizliğini sağladığı açıktır.

Tanım 2.1.10

K, $1 \le K < \infty$ şeklinde bir sabit sayı olsun. Eğer yön koruyan bir f homeomorfizması, verilen bir bölgenin tümünde $D_f(z) \le K$ eşitsizliğini sağlıyorsa f dönüşümüne ***kuazikonformal*** veya ***K - kuazikonformal dönüşüm*** denir.

$K = 1$ olması durumunda $f_{\bar{z}} = 0$ olacağından, f konform bir dönüşüm olur.

Tanım 2.1.11

$\mu_f = f_{\bar{z}} / f_z$ oranına f fonksiyonun ***karmaşık dilatasyonu*** denir.

Buradan eğer f yön koruyan dönüşüm ise, $0 \le |\mu_f(z)| < 1$ olur. Böylece $D_f(z) \le K$ olması, $|\mu_f(z)| \le (K-1)/(K+1)$ eşitsizliğinin sağlanması ile denktir. Bu durumda, bir yön koruyan homeomorfizmanın kuazikonformal olması için $|\mu_f(z)| \le k < 1$ eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir. f dönüşümünün konform olması için gerekli ve yeterli koşul $\mu_f = 0$ olmasıdır ([2], [28]).

Tanım 2.1.12

$\nu_f = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ oranına f fonksiyonun ***ikinci karmaşık dilatasyonu*** denir.

Harmonik dönüşümler teorisinde, ν_f ikinci karmaşık dilatasyonu ile, μ_f birinci karmaşık dilatasyonuna göre daha kullanışlı sonuçlar elde etmemiz mümkündür. $|\nu_f| = |\mu_f|$ eşitliğinin sağlandığı ve bu sebeple f fonksiyonunun kuazikonformal olması için $|\nu_f(z)| \le k < 1$ eşitsizliğinin sağlanmasının gerekli ve yeterli olacağı açıkça görülebilir. Bu durum aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

Teorem 2.1.13

$f: D \to \mathbb{C}$ dönüşümü $J_f(z) > 0$ olan ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun harmonik olması için gerekli ve yeterli koşul $\omega = \nu_f$ fonksiyonunun analitik olmasıdır [19].

İspat :

$D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde sürekli ikinci kısmi türevlere sahip karmaşık değerli bir f fonksiyonu alalım ve f fonksiyonun $J_f(z) > 0$ olacak şekilde D bölgesinde yerel yalınkat olduğunu kabul edelim. Bu durumda D bölgesinde f fonksiyonun $\omega = \nu_f = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ ikinci karmaşık dilatasyonu için $|\omega(z)| < 1$ olur. $\overline{f_{\bar{z}}} = \omega f_z$ denkleminin $\bar{z}$ ye göre diferansiyeli

$$\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}}\ \omega + f_z\ \omega_{\bar{z}}$$

şeklindedir. Eğer f , D bölgesinde harmonik ise,

$$f_{z\bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta f = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece bu sonuç ω nın analitik olması için D bölgesinde $\omega_{\bar{z}} = 0$ olması gerektiğini söyler. Tersine ω nın analitik olması durumunda $\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}}\,\omega$ eşitliği sağlanır. $|\omega(z)| < 1$ olduğundan $f_{z\bar{z}} = 0$ olur ve bu durum f fonksiyonun harmonik olduğu anlamına gelir. ■

Yukarıda ifade edilen teorem ile harmonik dönüşümler, Cauchy-Riemann denklemlerinin bir genellemesi olan $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ diferansiyel denklemleri tarafından karakterize edilmiştir.

Teorem 2.1.13 ten elde edilen aşağıdaki sonuç, harmonik ve kuazikonform dönüşümler arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Sonuç 2.1.14

Yön koruyan harmonik dönüşümler yerel kuazikonform dönüşümlerdir [34]. ■

Yön koruyan harmonik bir f dönüşümünün ikinci karmaşık dilatasyonu olan ω, modülü daima birden küçük analitik bir fonksiyondur. Bu ω fonksiyonu, f fonksiyonun ***analitik dilatasyonu*** olarak adlandırılır. $\omega(z) \equiv 0$ olması için f fonksiyonun analitik olması gerekli ve yeterlidir.

Sonuç 2.1.5 ile verilen

$$|\omega(z)| = \frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1$$

eşitsizliği bize $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının yerel olarak kuazikonform olduğunu söyler. $\omega(z)$ dilatasyonunun D bölgesinin her yerinde $|\omega(z)| \le K < 1$ eşitsizliğini sağlaması gerekmez. Bu durum harmonik homeomorfizmaların sınır davranışlarının, konform veya kuazikonform dönüşümlerin sınır davranışlarından farklı olabileceğini ifade eder.

D bölgesi üzerinde tanımlanan f harmonik dönüşümünün ikinci karmaşık dilatasyonu ω, $|\omega(z)| \le k < 1$ koşulunu sağlarsa Teorem 2.1.13 den f harmonik dönüşümü $K = (1+k)/(1-k)$ maksimum dilatasyonuna sahip bir kuazikonformal dönüşüm olur. Diğer bir deyişle, f fonksiyonu bir K-kuazikonform dönüşümdür.

Aşağıdaki örnek, Teorem 2.1.13'e ait bir uygulama olarak verilebilir.

Örnek 2.1.15

$$f(z) = z - \frac{1}{n}\overline{z}^n, \qquad n \ge 2$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Her bir $n \ge 2$ değeri için f fonksiyonu harmonik olup, $\omega(z) = -z^{n-1}$ ikinci karmaşık dilatasyonuna sahiptir. f fonksiyonunun birim disk içinde yalınkatlığını göstermek için $z_1, z_2 \in \Delta$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda

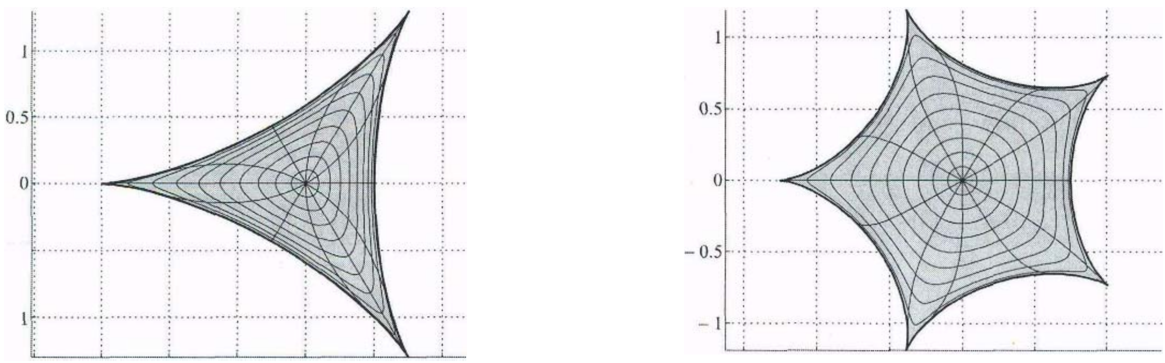
$$n(z_1 - z_2) = \overline{z}_1^{\,n} - \overline{z}_2^{\,n} = (\overline{z}_1 - \overline{z}_2).(\overline{z}_1^{\,n-1} + \overline{z}_1^{\,n-2}.z_2 + \ldots + \overline{z}_2^{\,n-1})$$

eşitsizliğini elde ederiz. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\left|\overline{z}_1^{\,n-1} + \overline{z}_1^{\,n-2}.z_2 + \ldots + \overline{z}_2^{\,n-1}\right| < n$$

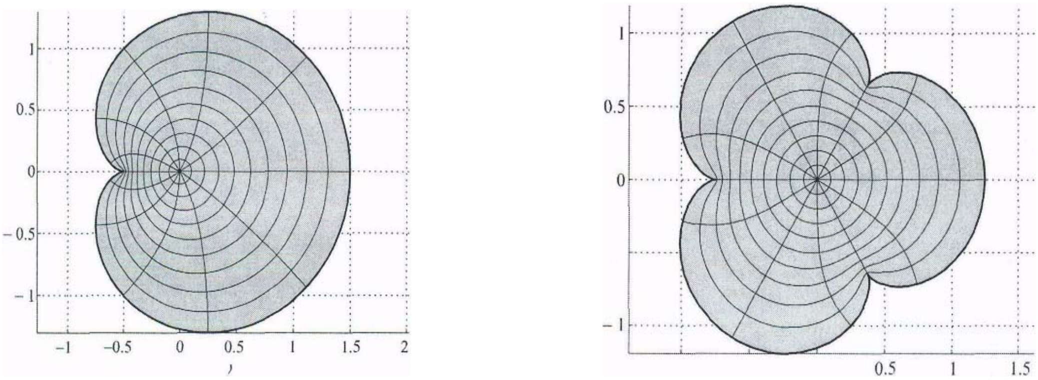
olduğundan yukarıdaki eşitlik $z_1 = z_2$ dışında mümkün olmaz. Böylece f fonksiyonu bire-bir olur. Bu durumda f fonksiyonu, birim diski $|w| = (n+1)/n$ çemberi içinde kalan $n+1$-kanatlı bir hiposikloid tarafından sınırlanan bir bölge üzerine resmeden bir harmonik dönüşümdür. Ayrıca $F(z) = z + \frac{1}{n} z^n$ fonksiyonu, birim diskteki her nokta için $\left|F'(z) - 1\right| < 1$ olduğundan analitik ve yalınkattır. Böylece F, birim diskte normalize edilmiş yalınkat bir fonksiyondur.

$n = 2$ ve $n = 4$ değerleri için f ve F fonksiyonlarının görüntüleri sırası ile Şekil 2 ve Şekil 3 ile gösterilmiştir.



(a) $n = 2$ b) $n = 4$

ŞEKİL 2. Birim diskin $f(z) = z - \frac{1}{n}\overline{z}^n$ dönüşümü altında görüntüsü



(a) $n=2$ b) $n=4$

ŞEKİL 3. Birim diskin $F(z)=z+\dfrac{1}{n}\overline{z}^{n}$ dönüşümü altında görüntüsü

2.2 Harmonik Yalınkat Fonksiyonların S_H ve S_H^0 Altsınıfları

$h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{a}_{-n}\, \overline{z}^{n}$ olmak üzere, Δ birim diskinde harmonik bir $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu

$$f(r\,e^{i\theta})=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\, r^{|n|}\, e^{in\theta} \qquad (0\le r<1)$$

seri gösterimi ile ifade edilebilir. $h(0)=0=h'(0)-1$ olacak şekilde f fonksiyonunu normalize edebiliriz. Sadelik açısından $b_n=\overline{a}_{-n}$ olarak yazalım. Δ birim diski üzerinde tüm harmonik, karmaşık değerli, yön koruyan, normalize edilmiş ve yalınkat dönüşümlerin sınıfı S_H ile tanımlanır. Böylece S_H sınıfındaki bir f fonksiyonu

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{2.2}$$

fonksiyonları Δ birim diskinde analitik olmak üzere $f=h+\overline{g}$ şeklinde gösterilir.

Yön koruma özelliğinden $|b_1|<1$ sonucu bulunur. Bu yüzden S_H sınıfından alınan her f fonksiyonu için $\varphi=(f-\overline{b_1 f})/(1-|b_1|^2)$ dönüşümü S_H sınıfına ait olur. Böylece çalışmalarımızı $S_H^0=\{f\in S_H : g'(0)=b_1=0\}$ ile tanımlı S_H^0 altsınıfına kısıtlayabiliriz. Bu sınıflar arasında $S\subset S_H^0\subset S_H$ kapsaması sağlanır.

S_H sınıfından alınan bir f fonksiyonunu S_H^0 sınıfındaki f_0 fonksiyonuna karşılık getiren $f\mapsto f_0=\varphi\circ f$ dönüşümü

$$f = f_0+\overline{b_1 f_0}$$

eşitliği ile tersinirdir. Böylece $|b_1|<1$ koşulu ile belirlenmiş her b_1 değeri için, φ afin dönüşümü altında $f_0\in S_H^0$ fonksiyonuna karşılık getiren $g'(0)=b_1$ koşullu bir tek $f\in S_H$ fonksiyonu vardır [9].

Tanım 2.2.1

F, D bölgesinde tanımlı fonksiyonların bir ailesi olsun. $f_n\in F$ fonksiyonlarının her yakınsak $\{f_n\}$ dizisi, yine F ailesinde bir fonksiyona yakınsıyorsa F ailesine ***kompakttır*** denir.

Tanım 2.2.2

F, D bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonların bir ailesi olsun. $f_n\in F$ fonksiyonlarının her $\{f_n\}$ dizisi D bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak bir altdiziye sahip ise F ailesine ***normal aile*** denir.

Teorem 2.2.3

S_H^0 ailesi kompakt ve normal bir ailedir [8]. ■

Sonuç 2.2.4

S_H ailesi normal bir ailedir [8]. ■

S ve S_H^0 ailelerinin aksine, S_H ailesi kompakt bir aile değildir. Çünkü $f_n(z) = z + \dfrac{n}{n+1}\bar{z}$ ile tanımlanan afin dönüşümler S_H sınıfındadır. Fakat $n \to \infty$ için $f_n(z) \to f(z) = 2x$ yakınsaması Δ birim diskinde düzgün olmasına rağmen, f limit fonksiyonu yalınkat değildir.

Tanım 2.2.5

$$f_i(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{i_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{i_n}}\, \bar{z}^n \qquad (i = 1, 2)$$

şeklindeki karmaşık değerli iki harmonik dönüşümün ***konvolüasyonu***

$$f_1(z) * f_2(z) = \left(f_1 * f_2 \right)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{1_n} a_{2_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{1_n} b_{2_n} z^n}$$

ile tanımlanır. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonlarının koanalitik kısımları sıfır ise yukarıda verilen konvolüasyon formülü bilinen Hadamard çarpımına indirgenir.

Tanım 2.2.6 (Harmonik Koebe Fonksiyonu)

$$k(z) = z(1-z)^{-2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$$

şeklindeki analitik Koebe fonksiyonu, Δ birim diskini negatif gerçel eksen üzerinde $-1/4$ den $-\infty$ a kadar olan şeridi çıkarılmış tüm karmaşık düzleme konformal olarak dönüştürür. Analitik yalınkat fonksiyonların S sınıfı üzerinde birçok problem için harmonik Koebe fonksiyonu ekstremal fonksiyon olarak rol oynar. Clunie ve Sheil-Small [8] analitik yalınkat fonksiyonlar için tanımlanan Koebe fonksiyonun benzerini S_H^0 harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfı için de ürettiler. Clunie ve Sheil-Small, çalışmalarında harmonik Koebe fonksiyonunu

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

olmak üzere $K = h + \overline{g}$ olarak tanımladılar. Harmonik Koebe fonksiyonu, birim diski harmonik olarak, negatif gerçel eksenden $-\infty < t < -1/6$ şeridi çıkartılmış tüm karmaşık düzlem üzerine dönüştürür. $z = 1$ hariç birim çember üzerindeki her z değeri için $K(z) = -1/6$ olur.

Louis De Branges [7], 1984 yılında S sınıfı için 69 yıllık Bieberbach kestiriminin ispatını yaptıktan sonra, S ailesi ve onun değişik alt sınıfları için elde edilen klasik sonuçların, harmonik yalınkat fonksiyonların S_H ve S_H^0 ailelerine genişletilebilir olup olmadığı sorgulanmaya başlandı. 1984 yılında Clunie ve Sheil-Small, bu genişletmenin mümkün olabileceğini göstererek, bu sınıflar için düşünülen tahminlerin S sınıfındaki tahminlerle benzer olmadığını, ancak uygun yorumlarla bu sınıflardaki harmonik dönüşümler için benzer tahminler yapılabileceğini ortaya koydular.

S_H ve S_H^0 sınıflarındaki fonksiyonlar için katsayı tahmini çalışmaları hala devam etmektedir. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda $|b_2|$ katsayısı için kesin sınır elde edilmiş olmasına rağmen, $|a_2|$ katsayısı için henüz ispatlanmamış olan

$$|a_2| \leq \frac{5}{2}$$

tahmini yapılmıştır [43].

Teorem 2.2.7

$h_0(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ve $g_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ ($z \in \Delta$) olmak üzere, S_H^0 sınıfındaki tüm $f_0 = h_0 + \overline{g}_0$ fonksiyonları için

$$|b_2| \leq \frac{1}{2}$$

katsayı eşitsizliği sağlanır. f fonksiyonun S_H sınıfında olması durumunda

$$|b_1| \leq 1$$

olur [8]. ■

Teorem 2.2.8

$f \in S_H$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{96\pi}{\sqrt{27}} - 1 < 57{,}05$$

eşitsizliği sağlanır [43]. ■

S ailesinden farklı olarak, $f \in S_H$ olması durumunda, $|z|$ değerine bağlı tüm $|f(z)|$ değerleri için pozitif bir alt sınır yoktur. $|\varepsilon| < 1$ olmak üzere tüm ε değerleri için $f(z) = z + \varepsilon\overline{z}$ fonksiyonunun S_H sınıfında olması bu duruma bir örnektir. Ayrıca Clunie ve Sheil-Small, S ailesindeki fonksiyonlar için bükülme özelliğine benzeyen aşağıdaki ilginç sonuçları verdiler.

Teorem 2.2.9

Eğer $f \in S_H^0$ ise, bu durumda

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4}\frac{|z|}{\left(1+|z|\right)^2} \quad (z \in \Delta)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/16\} \subset f(\Delta)$ kapsaması yazılabilir [8]. ■

Teorem 2.2.9 ile verilen sonuç kesin değildir. Bununla beraber K harmonik Koebe fonksiyonu, $1/16$ yarıçapının $1/6$ ya genişletilebileceğini söyler. Böylece kestirim niteliğindeki aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 2.2.10

$\forall\, f \in S_H^0$ fonksiyonu için

$$\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/6\} \subset f(\Delta)$$

kapsaması doğrudur. ■

Bu kestirim, ileride bahsedilecek olan S_H harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfının bir alt sınıfı olan konvekse yakın fonksiyonların C_H^0 sınıfı için de doğrudur [43].

Clunie ve Sheil-Small [8], Bieberbach kestiriminin S_H^0 ailesi için aşağıdaki benzerini ifade etmiştir.

Sonuç 2.2.11

h ve g, (2.2) eşitliği ile verilen fonksiyonlar olmak üzere, eğer $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ ise bu durumda

$$\left.\begin{aligned} \big|\,|a_n| - |b_n|\,\big| &\le \frac{(2n+1)(n+1)}{6} \\ |a_n| &\le \frac{(2n+1)(n+1)}{6} \\ |b_n| &\le \frac{(2n-1)(n-1)}{6} \quad , \ (n = 2,3,\ldots) \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

eşitsizlik sistemi sağlanır. Eşitlik hali sadece harmonik Koebe fonksiyonu için elde edilir [8]. ■

Sheil-Small, 1990 yılında yukarıdaki tahmini geliştirip aşağıda Bieberbach kestiriminin genellemesini elde etmiştir.

Sonuç 2.2.12

Eğer

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{-n} z^n}$$

fonksiyonu S_H sınıfında ise,

$$|a_n| \le \frac{2n^2+1}{3} \qquad (|n| = 2,3,\ldots)$$

eşitsizliği sağlanır [43]. ■

Clunie ve Sheil-Small [8] bütün $f \in S_H$ fonksiyonları için $|a_2| < 12{,}173$ olduğunu göstermişlerdir. Daha sonraları bu kestirim Sheil-Small tarafından bütün $f \in S_H$ fonksiyonları için $|a_2| < 57{,}05$ olarak geliştirildi [43].

S sınıfına ait $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ fonksiyonları için Bieberbach'ın $|a_2| \leq 2$ katsayı eşitsizliği, analitik yalınkat fonksiyonların klasik teorisinde iyi bilinen bir sonuçtur. Teknik bir kestirim görünüşünde olan bu eşitsizlik önemli geometrik yorumlara sahiptir. Bu kestirim, değişik temel dönüşümler yardımıyla büyüme ve bükülme teoremlerinin kesinliğini göstermek için ve Koebe dörtte bir teoreminin kolay bir ispatını elde etmek için kullanılır.

Harmonik dönüşümler için de bu durum oldukça benzerdir. S_H sınıfındaki fonksiyonlar için $|a_2| < 3$ kestirimi yapılmıştır. Bu kestirim kesin olmamakla beraber, daha ileride S_H^0 sınıfındaki fonksiyonlar için kesin büyüme eşitsizlikleri elde edilebileceğinin gerçeklendiğini göstereceğiz ve bu fonksiyonların görüntülerinin, $|w| < 1/6$ diskini kapsadığını ifade eden örtme teoreminin kesin bir biçimini vereceğiz.

Teorem 2.2.13

$f \in S_H$ fonksiyonlarının arasında $|a_2|$ katsayısının en küçük üst sınırı α olsun. Bu durumda $r = |z| < 1$ olmak üzere her $f \in S_H^0$ fonksiyonu için

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \leq |f(z)| \leq \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

eşitsizlikleri sağlanır. Özellikle her bir fonksiyonun görüntüsü $|w| < 1/2\alpha$ diskini kapsar [43]. ■

Teorem 2.2.13'te özel olarak $\alpha = 3$ alınır ise, bu durumda eşitsizliğin her iki tarafı için mümkün olan en iyi kestirim olduğunu gözlemleriz. Bundan başka, Tanım 2.2.6 ile verilen $K = h + \overline{g}$ harmonik Koebe fonksiyonu için $0 \leq r < 1$ olmak üzere

$$K(r) = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{3} - 1\right] \quad \text{ve} \quad K(-r) = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{3} - 1\right]$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

2.3 Kesme Metodu (The Shear Construction)

Bu kesimde belirlenmiş koşullar ile harmonik dönüşümleri oluşturmak için Clunie ve Sheil-Small tarafından tanımlanan bir metot verilecektir. Bu metot, ***"the shear construction"*** olarak bilinir. Buradaki "shear" kelimesinin anlamı, kesmek veya incelterek hemen hemen şeffaf hale getirmektir. Temel olarak bu metot, verilen paralel doğrular boyunca bir konformal dönüşümü kesme metodu ile, bir yönde konveks bölge üzerine dönüştüren bir harmonik dönüşüm oluşturur. Oluşturulan bu harmonik dönüşümün dilatasyonu tanımlanabildiği gibi aynı zamanda görüntüsünün belli genel özellikleri de önceden tahmin edilir.

Tanım 2.3.1

Ω, karmaşık düzlemde bir bölge olsun. Her yatay doğru ile bölgenin arakesiti bağlantılı veya boş ise Ω bölgesine ***yatay yönde konveks bölge (CHD)*** denir.

Teorem 2.3.2

$f = h + \overline{g}$ fonksiyonu Δ birim diskinde harmonik ve yerel yalınkat olsun. Bu durumda f fonksiyonun yalınkat ve görüntüsünün CHD olması için gerekli ve yeterli koşul $h - g$ konform dönüşümün aynı özelliklere sahip olmasıdır [8]. ■

Hemen belirtelim ki yukarıdaki açıklamalarla beraber, $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesinin konveks olması için gerekli ve yeterli koşul, bu bölgenin her yönde konveks olmasıdır. Böylece harmonik bir $f = h + \overline{g}$ dönüşümünün konveks bir görüntüye sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \le \alpha < 2\pi$ olmak üzere, her $e^{i\alpha} f$ rotasyon dönüşümün görüntüsünün CHD olmalısıdır. Teorem 2.3.2 den dolayı bu durum her bir α açısı için $e^{i\alpha}h - e^{-i\alpha}g$ analitik fonksiyonunun yalınkat ve CHD görüntüsüne sahip olmasına denktir. Bu sonuç aşağıdaki teoremde özetlenmiştir.

Teorem 2.3.3

$f = h + \overline{g}$ fonksiyonu Δ birim diskte harmonik ve yerel yalınkat olsun. Bu durumda f fonksiyonunun yalınkat ve görüntüsünün konveks olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $\alpha\,(0 \le \alpha < 2\pi)$ için $e^{i\alpha}h - e^{-i\alpha}g$ analitik fonksiyonunun yalınkat ve görüntüsünün CHD olmasıdır [9]. ■

Sonuç 2.3.4

Eğer $f = h + \overline{g}$ konveks harmonik dönüşüm ise, bu durumda $h + e^{i\beta}g$ dönüşümü her $\beta\,(0 \le \beta < 2\pi)$ değeri için yalınkattır. ■

Teorem 2.3.2, verilen bir dilatasyon ile harmonik dönüşümleri oluşturmak için etkili bir yol gösterir. $|\omega(z)| < 1$ koşulunu sağlayan belirli bir dilatasyon göz önüne alındığında, verilen bir analitik fonksiyondan elde edilen harmonik fonksiyonun yerel yalınkatlığı garanti altına alınır. Gerçekte f fonksiyonunun jakobiyeni

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 = \left(1 - |\omega(z)|^2\right)\left(h'(z)\right)^2 > 0$$

şeklindedir. Çünkü $h - g$ dönüşümünün yalınkat olması sebebiyle

$$\left(1 - |\omega(z)|\right)h'(z) = h'(z) - g'(z) \neq 0$$

yazmak mümkündür.

Örnek 2.3.5

$h - g$ dönüşümünü özdeşlik dönüşümü ve dilatasyonu $\omega(z) = z$ olarak alalım. Böylece

$$h(z) - g(z) = z$$

$$\frac{g'(z)}{h'(z)} = z$$

olur.

İlk denklemin diferansiyeli ile ikinci denklem aşağıdaki gibi doğrusal denklem çifti oluşturur.

$$h'(z) - g'(z) = 1$$

$$zh'(z) - g'(z) = 0$$

Bu denklem çifti

$$h'(z) = \frac{1}{1-z} \quad , \qquad g'(z) = \frac{z}{1-z}$$

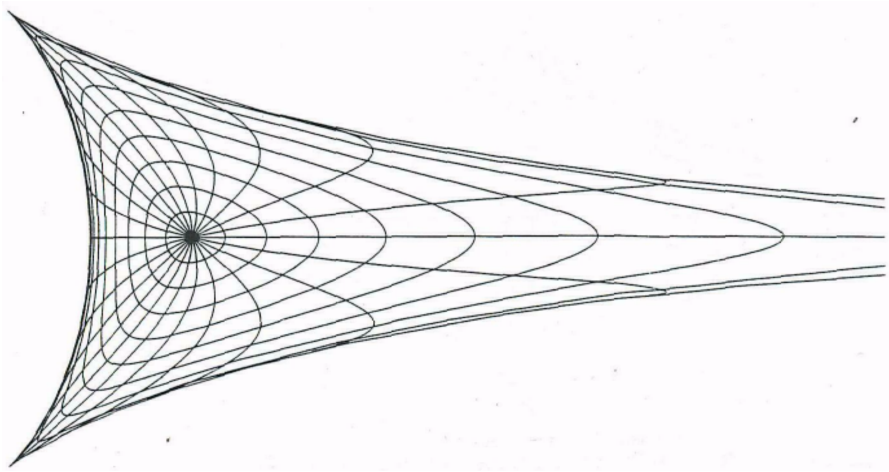
şeklinde bir tek çözüme sahiptir. Bu denklemlerin $h(0) = g(0) = 0$ normalize koşulları altında integre edilmesi ile

$$h(z) = \log\frac{1}{1-z} \quad , \qquad g(z) = -z + \log\frac{1}{1-z}$$

denklemleri bulunur. Teorem 2.3.2 'ye göre $f = h + \overline{g}$ harmonik dönüşümü veya

$$w = f(z) = -\overline{z} - 2\log|1-z|$$

dönüşümü, birim diski yalınkat olarak yatay yönde konveks bir bölge üzerine dönüştürür. Gerçekten Teorem 2.3.2 gereğince, f fonksiyonun bu görüntüsünün $\left|\operatorname{Im}\{w\}\right| < 1$ yatay şeridinde kapsandığını gösterir. Şekil 4 ile bu durum gösterilmekle birlikte, eş merkezli çemberlerin görüntüleri ve merkezcil ışınları da resmedilmektedir.



ŞEKİL 4 $\omega(z) = z$ dilatasyonu ile birim dönüşümün kesimi

Örnek 2.3.6

$\omega(z) = z$ dilatasyonun yerine $\omega(z) = z^2$ dilatasyonun alınması ile oluşan durumu inceleyelim. Burada, $h(z) - g(z) = z$ ve $\dfrac{g'(z)}{h'(z)} = z^2$ doğrusal denklemlerden,

$$s(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

dönüşümü, birim diski $-\pi/4 < \operatorname{Im}\{w\} < \pi/4$ yatay şeridi üzerine dönüştüren bir konformal dönüşüm olmak üzere, $h(z) = s(z)$ ve $g(z) = -z + s(z)$ normalleştirilmiş çözümüne sahip

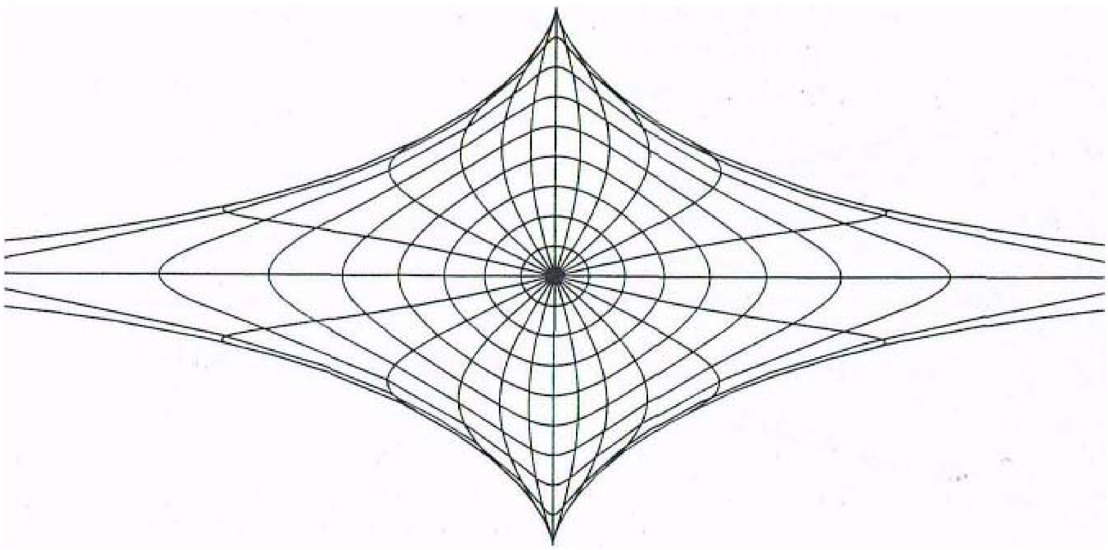
$$h'(z) - g'(z) = 1$$

$$z^2 h'(z) - g'(z) = 0$$

şeklindeki doğrusal denklem çifti elde edilir. Böylece kesme metodu,

$$f(z) = -z + 2\operatorname{Re}\{s(z)\} = -\overline{z} + \log\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$$

şeklinde bir $f = h + \overline{g}$ harmonik dönüşümü oluşturur. Bu dönüşüm Şekil 5 ile gösterilmiştir.



ŞEKİL 5 $\omega(z) = z^2$ dilatasyonu ile birim dönüşümün kesimi

Örnek 2.3.7

Şimdi Δ birim diskini, $\operatorname{Re}\{w\} > -1/2$ yarı düzlemine dönüştüren

$$w = l(z) = \frac{z}{1-z}$$

konformal dönüşümünü göz önüne alalım. Burada $h + g = l$ alınır ve $w(z) = -z$ dilatasyonu seçilirse, $h + \overline{g}$ nın yerel yalınkatlığı garanti edilmiş olur. Oluşturduğumuz

$$h'(z) + g'(z) = l'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$zh'(z) + g'(z) = 0$$

doğrusal denklem sistemi

$$h'(z) = \frac{1}{(1-z)^3} \ , \qquad g'(z) = -\frac{z}{(1-z)^3}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Bu çözümleri integre edersek,

$$h(z) = \frac{1}{2}\left[l(z) + k(z)\right] \ , \qquad g(z) = \frac{1}{2}\left[l(z) - k(z)\right]$$

fonksiyonlarını elde ederiz. Burada $k(z)$, Δ birim diskini $-1/4$ den $-\infty$ a kadar olan şeridi çıkarılmış tüm karmaşık düzlem üzerine konformal olarak dönüştüren Koebe fonksiyonudur. Böylece $L = h + \overline{g}$, Δ birim diskini yalınkat olarak düşey yönde konveks bir bölge üzerine dönüştürür. Dikkat edilirse L dönüşümü

$$L(z) = \operatorname{Re}\{l(z)\} + i \operatorname{Im}\{k(z)\}$$

formuna sahiptir. İddiamız L dönüşümünün görüntüsünün $\operatorname{Re}\{w\} > -1/2$ yarı düzlemi olduğudur. Bunun görmek için $k(z) = \zeta.(1+\zeta)$ olacak şekilde $\zeta = l(z)$ değişimini yapalım. Bu durumda, $\zeta = \xi + i\eta$ gösterimi ile L harmonik dönüşümü

$$L(z) = \xi + i(1+2\xi)\eta \ , \ z = l^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta}{1+\zeta}$$

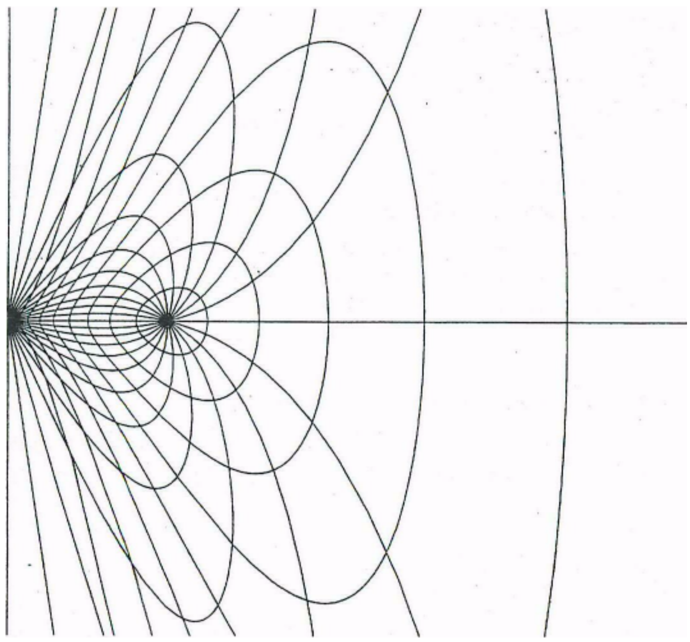
şeklini alır.

Bu durumda, $L \circ l^{-1}$ dönüşümü

$$\zeta = \xi_0 + i\eta \ , \quad \xi_0 > -\frac{1}{2} \qquad (-\infty < \eta < \infty)$$

şeklindeki her düşey doğruyu monoton olarak kendi üzerine resmeder. $|z| < 1$ birim diski içindeki çemberlere karşılık gelen bu doğrular, $z = 1$ noktasında T birim çemberine içten teğettir. Özellikle $w = L(z)$ dönüşümü, Δ birim diskini yalınkat olarak $\mathrm{Re}\{w\} > -1/2$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür.

$L(z) = \mathrm{Re}\{l(z)\} + i\,\mathrm{Im}\{k(z)\}$ harmonik dönüşümü altında karşılık gelen sınır oldukça ilginçtir. $k(z)$ dönüşümü, Δ birim diskini gerçel eksenin bir parçası çıkartılmış tüm düzleme resmederken, l dönüşümü aynı diski, konformal olarak $\mathrm{Re}\{w\} > -1/2$ yarı düzlemine dönüştürdüğünden, T üzerindeki her $z \neq 1$ noktası için $\mathrm{Re}\{l(z)\} = -1/2$ ve $\mathrm{Im}\{k(z)\} = 0$ olur. Sonuç olarak birim çember üzerindeki her $z \neq 1$ noktası için $L(z) = -1/2$ olur. Şekil 6 ile eş merkezli çemberlerin görüntülerinin ve merkezcil ışınlarının L altındaki görüntüsü belirtilerek, bu ilginç davranış gösterilmektedir.



ŞEKİL 6 $\omega(z) = -z$ dilatasyonu ile yarı-düzlem dönüşümün düşey olarak kesimi

Örnek 2.3.7, konform dönüşümlerden farklı olabilen harmonik dönüşümlerin sınır davranışlarının alışılmışın dışında olduğunu gösterir. Carathéodary Genişleme Teoremi, iki Jordan bölge arasındaki bir konformal dönüşümün, kapanışlarının bir homeomorfizmasına daima genişletilebileceğini ifade eder. Gerçekten, Carathéodary Teoremi kuazikonformal dönüşümlere genelleştirilebilir. Burada ihtiyaç duyulan koşul Δ birim diskinde dilatasyonun $|\omega(z)| \le c < 1$ eşitsizliğini sağlamasıdır.

Daha önce tanımladığımız harmonik Koebe fonksiyonu, Clunie ve Sheil-Small [8] tarafından Teorem 2.3.2 göz önüne alınarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

Birim diski yalınkat olarak negatif gerçel eksen üzerinde $-1/4$ ten $-\infty$ kadar olan şeridi çıkartılmış tüm karmaşık düzlem üzerine konformal olarak dönüştüren

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklindeki Koebe fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonun görüntüsü yatay yönde konvekstir. Burada $h - g = k$ alalım. Bununla beraber elde edilecek $f = h + \overline{g}$ harmonik dönüşümün yerel yalınkatlığını garanti etmek için f fonksiyonun dilatasyonunu $\omega(z) = z$ alalım. Oluşturduğumuz

$$h'(z) - g'(z) = k'(z)$$

$$z\,h'(z) - g'(z) = 0$$

doğrusal denklem sistemi

$$h'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^4} \ , \ g'(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^4}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Bu denklemleri $h(0) = g(0) = 0$ normalize koşulları altında integre edersek

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \ , \ g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

fonksiyonlarını elde ederiz.

Yukarıda gösterilen h ve g fonksiyonları ile elde edilen $K = h + \overline{g}$ fonksiyonu harmonik Koebe fonksiyonu olarak bilinir. Harmonik Koebe fonksiyonu, S_H^0 sınıfına ait olmakla beraber, görüntüsünün yatay yönde konveks ve gerçel eksene göre simetrik olduğu açıktır.

Harmonik Koebe dönüşümün görüntüsünü belirlemek için birim diski konformal olarak sağ yarı düzleme dönüştüren

$$\zeta = \frac{1+z}{1-z} = \xi + i\eta$$

şeklindeki Cayley dönüşümünü ele alalım. Bu durumda

$$K(z) = \frac{1}{6}\operatorname{Re}\left(\zeta^3 - 1\right) + \frac{i}{4}\operatorname{Im}\left(\zeta^2 - 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\xi^3 - 3\xi\eta^2 - 1\right) + i\frac{1}{2}\xi\eta, \qquad \xi > 0$$

elde edilir.

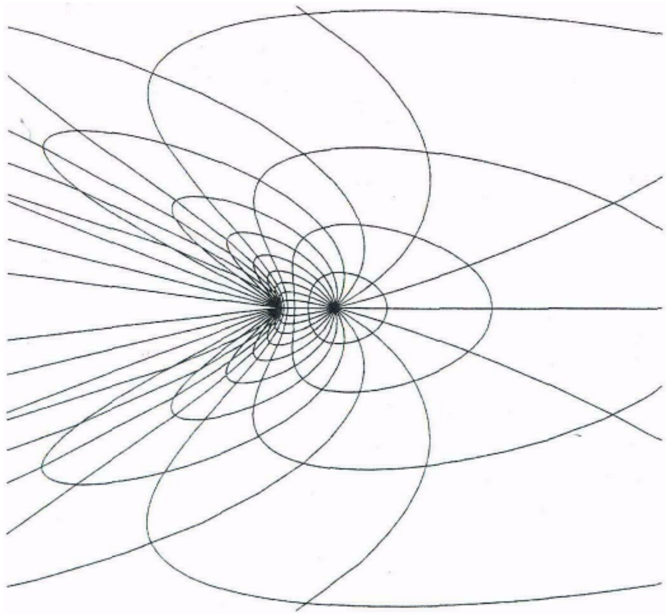
Harmonik Koebe fonksiyonu, birim çember üzerindeki her bir $z\,(z \neq 1)$ noktasını $\xi = 0$ ve $K(z) = -1/6$ olacak şekilde imajiner eksen üzerindeki bir ζ noktası üzerine dönüştürür. Bununla beraber,

$$\{\,\zeta = \xi + i\eta \;:\quad \xi > 0,\; \eta = 0\,\}$$

pozitif gerçel eksenini, $(-1/6, \infty)$ gerçel aralığı üzerine monoton olarak dönüştürür. Ayrıca $c \neq 0$ olmak üzere c gerçel sabiti için, $\xi.\eta = c$ şeklindeki her bir hiperbolü yalınkat olarak

$$\left\{ w = u + i\frac{c}{2} : u = \frac{1}{6}\left(\xi^3 - 3c^2\xi^{-1} - 1\right),\; \xi > 0 \right\}$$

kümesi üzerine dönüştürür. Bu durum açıkça harmonik Koebe dönüşümünün birim diskte yalınkat ve birim diski $\left(-\infty, -1/6\right]$ gerçel aralığı çıkartılmış tüm karmaşık düzleme dönüştürdüğünü gösterir. Harmonik Koebe dönüşümünün görüntüsü şekil 7 de gösterilmiştir.



ŞEKİL 7 Harmonik Koebe Fonksiyonu

2.4 Harmonik Konveks ve Harmonik Konvekse Yakın Yalınkat Dönüşümler

S_H ve S_H^0 sınıfları için doğrudan bir çok sonucu göstermek veya kesin katsayı kestirimleri elde etmek zordur. Bu kesimde S_H ve S_H^0 sınıflarında henüz çözülememiş olan kesin katsayı kestirimlerinin, S_H ve S_H^0 sınıflarının konveks ve konvekse yakın alt sınıflarında çözülebildiği gösterilecektir.

Tanım 2.4.1

$f \in S_H$ (veya özel olarak S_H^0) ve $f(\Delta)$ görüntüsü konveks bir bölge ise, f dönüşümüne Δ birim diskinde ***harmonik konveks dönüşüm*** adı verilir. Harmonik konveks dönüşümler sınıfı K_H (K_H^0) sembolü ile gösterilir.

Harmonik konveks fonksiyonlar, analitik olarak

$$f \in K_H \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{ \arg\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \arg f(r\, e^{i\theta}) \right) \right\} > 0 , \qquad (2.4)$$

$$\left(z = r\, e^{i\theta} \;,\; 0 \le \theta < 2\pi \;,\; 0 \le r \le 1 \right)$$

şeklinde ifade edilir.

Birim diskin konveks bölgeler üzerine konformal dönüşümleri uzun zamandan beri üzerinde çalışılan bir konu olmasının yanısıra pek çok özelliğe sahip olduğu bilinir.

$$\mathrm{Re}\left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \; ; \quad |z| < 1$$

şeklinde tanımlanan bu dönüşümler, gerçekte sınırdaki teğet vektörünün monoton dönüşümünü ifade eder. Burada ifade edilen durum kalıtsal bir özelliktir: Eğer bir analitik fonksiyon birim diski yalınkat olarak bir konveks bölgeye dönüştürürse bu durumda eş merkezli her bir alt disklerini de konveks bir bölgeye dönüştürür.

Birim diski konveks bölgelere resmeden konformal dönüşümlerin, harmonik dönüşümlere genelleştirilmesi durumunda eklenmesi gereken özel koşulların neler olabileceğini sormak doğaldır. Harmonik dönüşümler altında, konveksliğin kalıtsal özellik olup olmadığı diğer bir açık sorudur. Bir önceki bölümde bahsedilen Clunie ve Sheil-Small tarafından verilen Teorem 2.3.3 ile $f = h + \overline{g}$ harmonik konveks dönüşümlerin sınıfı belirlenmiştir. Böylece harmonik konveks dönüşümler ile ilgili kalıtsallık sorusu, bir yöndeki konveks analitik fonksiyonlarla ilgili benzer bir soruya indirgenir. Eğer analitik bir f fonksiyonu birim diskte yalınkat ve onun görüntüsü yatay yönde konveks ise, eş merkezli her alt diskinin görüntüsü de aynı özelliği taşımak zorunda mıdır?

Bu sorunun yanıtı olumsuzdur. 1973 yılında Hengartner ve Schober [16] bir yönde konveksliğin konformal dönüşümler altında kalıtsal bir özellik olmadığını göstermişlerdir.

Goodman ve Saff, $\sqrt{2} - 1 < r < 1$ aralığındaki herhangi bir r yarıçapı için $|z| < r$ diskine kısıtlanmışı bu özelliği sağlamayan, düşey yönde konveks bir fonksiyon örneği oluşturarak, $\sqrt{2} - 1$ yarıçapının en iyi olabilir olduğu kestiriminde bulunmuşlardır [13]. Diğer bir deyişle, belirli bir yöndeki konveks konformal dönüşüm, $r \le \sqrt{2} - 1$ yarıçaplı herhangi bir diske kısıtlanması durumunda bu özelliği sağlar. Ruscheweyh ve Salinas [39], Goodman-Saff kestirimini ispatlamakta kesin başarı elde etmişlerdir. Ardından Clunie ve Sheil-Small'in teoremi ile harmonik konveks dönüşümlerin de aynı özelliğe sahip olduğu sonucu elde edilmiştir. Daha açıkçası, eğer bir f fonksiyonu birim diski harmonik olarak konveks bir bölgeye dönüştürürse, bu durumda her bir $r \leq \sqrt{2}-1$ yarıçapı için, f fonksiyonu $|z|< r$ diskini konveks bir bölge üzerine dönüştürür, ancak $\sqrt{2}-1< r <1$ aralığındaki herhangi bir r yarıçapı için bu kalıtsallık sağlanmayabilir.

Hengartner ve Schober 1970 yılında, özel bir koşul ile bir yönde analitik yalınkat fonksiyonlar için yapısal bir formül geliştirmişlerdir[15]. 1976 yılında ise, Royster ve Ziegler [38], Robertson [37] tarafından daha önceden yapılmış olan çalışmayı genelleştirilmişlerdir. Aslında bu gösterim konveks harmonik dönüşümler hakkında tam olarak bilgi vermektedir. Ancak bu formülü uygulamak zordur. Bundan dolayı, diğer yaklaşımlar daha çok etkilidir. Ruscheweyh ve Salinas, Goodman–Saff kestiriminin ispatında kuvvet serileri için bir konvolüasyon metodunu (Hadamard çarpımları) kullanmışlardır. Ancak biz burada bu metodun detaylarını vermeyeceğiz. Bunun yerine $r \leq \sqrt{2}-1$ koşulu altında, $|z|<r$ alt disklerinin konveks bir bölge üzerine, $\sqrt{2}-1< r <1$ koşulu altında ise konveks olmayan bir bölge üzerine dönüştüren

$$L(z) = \operatorname{Re}\{l(z)\} + i\operatorname{Im}\{k(z)\}$$

harmonik yarı düzlem dönüşümünü göstereceğiz. $L(z)$ dönüşümünün, $w(z)=-z$ dilatasyonu ile, $l(z)=z/(1-z)$ konformal dönüşümünü düşey olarak keserek oluşturulduğunu hatırlatalım. l dönüşümü, birim diski $\operatorname{Re}\{w\}>-1/2$ yarı düzlemi üzerine konformal olarak dönüştüren fonksiyondur. $k(z)=z/(1-z)^2$ Koebe fonksiyonun yalınkat fonksiyonların bütün sınıflarında ekstremal rol oynadığı gibi, l fonksiyonu da, konveks konform dönüşümleri sınıfında ekstremal rol oynar. Gerçekten, $k(z)=z\,l'(z)$ eşitliğini yazmak mümkündür ve böylece l ve k dönüşümleri, konveks ve yıldızıl dönüşümler arasındaki standart ilişki gibi birbirleriyle ilişkilidir. Böylece birim diski $\operatorname{Re}\{w\}>-1/2$ yarıdüzlemi üzerine dönüştüren L harmonik dönüşümünün, konveks harmonik dönüşümler sınıfında bir ekstremal rol oynaması beklenir. Bu bakış açısıyla, L fonksiyonun, konveks harmonik dönüşümler sınıfında konvekslik yarıçapının en küçüğünü vermesi şaşırtıcı değildir. Bununla beraber konveksliğin, harmonik dönüşümler için kalıtsal bir özellik olmayışı, Şekil 6 ile verilen grafikten açıkça görülebilir. Gerçekten Şekil 6 dikkatli incelendiğinde, $w=-1/2$ noktası civarında L dönüşümünün büyük seviye eğrilerinin konveksliğinin bozulduğu görülür.

Şimdi, L dönüşümünün $|z|<r$ alt disklerini, $r\leq\sqrt{2}-1$ olması durumunda konveks bir bölge üzerine, $\sqrt{2}-1<r<1$ olarak seçilmesi durumunda ise konveks olmayan bir bölge üzerine dönüştürdüğünü gösterelim. Bunun için $z=r\,e^{i\theta}$ noktası, $|z|=r$ çemberi çevresinde hareket ederken, resim eğrisinin

$$\Psi_r(\theta)=\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}L(r\,e^{i\theta})\right\}$$

şeklindeki teğeti yönündeki değişimini incelememiz gerekecektir. İlk olarak

$$\frac{\partial}{\partial\theta}l(z)=i\,z\,l'(z)=\frac{iz}{(1-z)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}k(z)=i\,z\,k'(z)=\frac{iz(1+z)}{(1-z)^3}$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(z)=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}l(z)\right\}+i\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}k(z)\right\}$$

eşitliğinin sağlandığını söyleyebiliriz. Buradan

$$\left|1-z\right|^4 A(r,\theta)=r(r^2-1)\sin\theta$$

ve

$$\left|1-z\right|^6 B(r,\theta)=r(1-r^4)\cos\theta-2r^2(1-r^2)(1+\sin^2\theta)$$

olmak üzere doğrudan yapılan hesaplamalar ile

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(z)=A(r,\theta)+i\,B(r,\theta)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi problem teğet vektörünün argümenti veya eşdeğer olarak $0<\theta<\pi$ için $\tan\Psi_r(\theta)$, θ açısının azalmayan bir fonksiyonu olacak şekildeki r değerlerini bulmaya indirgenir. $w=L(r\,e^{i\theta})$ eğrisi gerçel eksene göre simetrik olduğundan, verilen argümenti $0<\theta<\pi$ açık aralığında düşünmek yeterlidir.

$A(r,\theta)$ ve $B(r,\theta)$ bağıntıları ile

$$\tan\Psi_r(\theta)=\frac{B(r,\theta)}{A(r,\theta)}=\frac{2r(\csc\theta+\sin\theta)-(1+r^2)\cot\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

ifadesini yazabiliriz. Yapılacak hesaplamalarla,

$$u=\cos\theta$$

ve

$$p(r,u)=1-6r^2+r^4+12r^2u^2-4r(1+r^2)u^3$$

olmak üzere türev için

$$(1-u^2)\left|1-z^4\right|\frac{\partial}{\partial\theta}\tan\Psi_r(\theta)=p(r,u)$$

şeklindeki eşitliği elde ederiz.

Problemin son hali olarak, $-1\le u\le 1$ aralığının tümünde negatif olmayan $p(r,u)$ kübik polinomu için r parametresinin değerlerini bulmak gerekecektir.

İlk olarak

$$p(r,-1)=(1+r)^4>0\ ;\ p(r,1)=(1-r)^4>0$$

eşitsizliğinin sağlandığını görebiliriz. Eğer $p(r,u)$ fonksiyonun diferansiyeli alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial u}p(r,u)=12\,r\,u\left\{2r-(1+r^2)u\right\}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda $p(r,u)$ fonksiyonu, $u=0$ noktasında bir yerel minimuma ve $u=2r/(1+r^3)$ noktasında bir yerel maksimuma sahip olduğu görülür.

Dolayısıyla $-1 \le u \le 1$ alındığında $p(r,u) \ge 0$ olması için gerek ve yeter koşulun

$$p(r,0) = 1 - 6r^2 + r^4 \ge 0$$

olduğu sonucu elde edilir. Özellikle $r \le \sqrt{2} - 1$ koşulu için $1 - 6r^2 + r^4 \ge 0$ eşitsizliği sağlanır. Bu durum $r < \sqrt{2} - 1$ eşitsizliğinin sağlanması halinde $\Psi_r(\theta)$ teğet açısının θ ile monoton olarak arttığını ifade eder. Ancak $\sqrt{2} - 1 < r < 1$ için $\Psi_r(\theta)$ teğet açısı monoton değildir. Böylece L harmonik dönüşümü, her bir $|z| < r \le \sqrt{2} - 1$ diskini konveks bir bölgeye dönüştürür. Fakat $\sqrt{2} - 1 < r < 1$ olduğunda resim bölgesi konveks değildir.

Tanım 2.4.2

D herhangi bir bölge olsun. Eğer D bölgesinin tümleyeni, birbiri ile kesişmeyen doğru parçalarının bir birleşimi şeklinde yazılabiliyor ise D bölgesine ***konvekse yakın bölge*** denir.

Tanım 2.4.3

$f \in S_H$ (veya özel olarak S_H^0) dönüşümü altında Δ birim diskinin $f(\Delta)$ görüntüsü konvekse yakın bir bölge ise, f dönüşümüne ***konvekse yakın dönüşüm*** adı verilir. Konvekse yakın harmonik dönüşümler sınıfı C_H (C_H^0) sembolü ile gösterilir.

Teorem 2.4.4

K_H^0 sınıfındaki her bir f fonksiyonun birim diskteki görüntüsü, $|w| < 1/2$ diskini tam olarak örter. ■

Teorem 2.4.5

K_H^0 sınıfındaki her bir f fonksiyonun katsayıları, $n = 2,3,...$ olmak üzere

$$|a_n| \le \frac{n+1}{2}$$

$$|b_n| \le \frac{n-1}{2}$$

$$\big|\, |a_n| - |b_n| \,\big| \le 1$$

eşitsizliklerini sağlar. Bu eşitsizlikler kesindir.

Eşitlik durumu

$$L(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{z}{1-z}\right\} + i \operatorname{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\}$$

fonksiyonu için geçerlidir. ■

Teorem 2.4.5, K_H sınıfındaki fonksiyonlar için kesin katsayı sınırının oluşturmasında yol göstericidir.

Sonuç 2.4.6

K_H sınıfındaki her bir f fonksiyonun katsayıları, $n = 2,3,...$ olmak üzere

$$|a_n| \le \frac{n+1}{2} + |b_1| \frac{n-1}{2} < n$$

ve

$$|b_n| \le \frac{n-1}{2} + |b_1| \frac{n+1}{2} < n$$

eşitsizliklerini sağlar [9].

Konvekse yakın analitik yalınkat fonksiyonlar ile konvekse yakın harmonik yalınkat fonksiyonlar arasındaki ilişki, 1984 yılında Clunie ve Sheil-Small tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.4.7

h ve g, Δ birim diskinde analitik olsun ve $|g'(0)| < |h'(0)|$ eşitsizliği sağlansın. Eğer $|\varepsilon| = 1$ olacak şekildeki her ε için $h + \varepsilon g$ konvekse yakın bir fonksiyon ise, bu durumda $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu konvekse yakın harmonik yalınkat olur [8]. ■

Harmonik konveks yalınkat fonksiyonlar ile konvekse yakın harmonik yalınkat fonksiyonlar arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.4.8

$f = h + \overline{g}$, Δ birim diskinde yerel yalınkat ve en az bir ε $(|\varepsilon| \le 1)$ için $h + \varepsilon g$ konveks olsun. Bu durumda f fonksiyonu yalınkat ve konvekse yakındır [8]. ■

Teorem 2.4.9

C_H sınıfına ait bir $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu için, $n = 1, 2, 3, ...$ olmak üzere

$$|a_n| \le \frac{2n^2 + 1}{3}$$

ve

$$|b_n| \le \frac{2n^2 + 1}{3}$$

eşitsizlikleri vardır. Eşitlik durumu

$$k(z) = 2i \operatorname{Im}\left(\frac{3z - z^3}{3(1 - iz)^3} \right) \in \partial C_H$$

fonksiyonu için sağlanır [8]. ■

2.5 Harmonik Yıldızıl Dönüşümler

Tanım 2.5.1

f, S_H sınıfına ait yön koruyan harmonik bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümünün görüntüsü orijine göre yıldızıl ise, bu dönüşümüne ***harmonik yıldızıl dönüşüm*** adı verilir. Geometrik olarak bu durum, görüntünün tümünün orijinden görülebilir olduğu anlamına gelir. Harmonik yıldızıl dönüşümler sınıfı S_H^* sembolü ile gösterilir.

Harmonik yıldızıl dönüşümler, $z \in \Delta$, $0 \le \theta < 2\pi$ ve $0 \le r \le 1$ olmak üzere

$$f \in S_H^* \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\arg f(r\,e^{i\theta}) \Big) > 0\,, \tag{2.5}$$

şeklinde analitik gösterime sahiptir.

Eğer f fonksiyonu, kapalı diske düzgün olarak genişletilebiliyorsa, bu durum $\left\{\arg f(re^{i\theta})\right\}$ fonksiyonunun, θ açısının azalmayan bir fonksiyonu olmasını yani

$$\frac{d}{d\theta}\arg\left\{ f(re^{i\theta})\right\} \ge 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasını gerektirir.

Analitik f fonksiyonları için bu koşul

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \qquad (z \in \Delta)$$

şeklindeki bilinen şeklini alır.

Şimdi, S_H^0 sınıfının harmonik yıldızıl dönüşümleri için kesin katsayı sınırlarını oluşturmaya ve bu yolla Alexander Teoreminin, harmonik dönüşümlerin kısmen bir genişlemesine sahip olduğunu göstereceğiz.

S_H^* ve S_H^{*0}, sırasıyla, S_H ve S_H^0 sınıflarının görüntü bölgesi yıldızıl olan fonksiyonlardan oluşan alt sınıflarını göstersin.

Teorem 2.5.2

S_H^{*0} sınıfındaki her $f = h + \overline{g}$ yıldızıl fonksiyonun katsayıları için, $n = 2,3,...$ olmak üzere

$$|a_n| \leq \frac{(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$|b_n| \leq \frac{(2n-1)(n-1)}{6}$$

$$\big|\, |a_n| - |b_n| \,\big| \leq n$$

eşitsizlikleri vardır [43]. ■

Sonuç 2.5.3

$f = h + \overline{g} \in S_H^*$ şeklindeki her harmonik yıldızıl fonksiyonun katsayıları, $n = 2,3,...$ olmak üzere

$$|a_n| \leq \frac{2n^2+1}{3} \qquad \text{ve} \qquad |b_n| \leq \frac{2n^2+1}{3}$$

eşitsizliklerini sağlar. Buradaki her bir sınır kesindir.

Teorem 2.5.2'nin bir diğer sonucu, harmonik yıldızıl dönüşümlerinin genişlemesindeki kesin üst sınırdır.

Sonuç 2.5.4

S_H^{*0} sınıfındaki her f fonksiyonu

$$|f(z)| \leq \frac{1}{3}\frac{3r+r^3}{(1-r)^3} \qquad |z| = r < 1$$

koşulunu sağlar. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik hali harmonik Keobe fonksiyonu için sağlanır.

Aşağıdaki yardımcı önerme, harmonik yıldızıl dönüşümler ile harmonik konveks dönüşümler arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu teorem, Alexander Teoreminin harmonik dönüşümlere kısmen genişlemesini ifade eder.

Yardımcı Önerme 2.5.5

$f = h + \overline{g}$, S_H^* sınıfında bir fonksiyon olsun. Eğer H ve G

$$zH'(z) = h(z) \quad , \quad zG'(z) = -g(z) \quad , \quad H(0) = G(0) = 0$$

şeklinde tanımlı analitik fonksiyonlar ise, bu durumda $F = H + \overline{G}$ fonksiyonu K_H sınıfındadır [43]. ■

Bu yardımcı önermenin tersi doğru olmadığından Alexander Teoremi, harmonik dönüşümler için tam bir genelleştirmeye sahip değildir. Diğer bir deyişle, $F = H + \overline{G}$ bir konveks dönüşüm ise, $h(z) = zH'(z)$ ve $g(z) = -zG'(z)$ eşitliklerini sağlayan $f = h + \overline{g}$ fonksiyonun yıldızıl dönüşüm olması gerekmediği gibi, f fonksiyonun yalınkat olması da gerekmez. Aksi örnek için

$$L(z) = \operatorname{Re}\{l(z)\} + i\operatorname{Im}\{k(z)\}$$

veya eşdeğer olarak

$$L(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{z}{1-z}\right\} + i\operatorname{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\}$$

konveks dönüşümünü alalım.

$$H(z) = \frac{1}{2}\left[l(z) + k(z)\right] = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}$$

ve

$$G(z) = \frac{1}{2}\left[l(z) - k(z)\right] = -\frac{\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}$$

olmak üzere $F = H + \overline{G}$ şeklinde bir forma sahiptir. Böylece

$$h(z) = zH'(z) = \frac{z}{(1-z)^3} \quad \text{ve} \quad g(z) = -zG'(z) = \frac{z^2}{(1-z)^3}$$

olup buradan da

$$h'(z) = \frac{1+2z}{(1-z)^4} \quad \text{ve} \quad g'(z) = \frac{2z+z^2}{(1-z)^4}$$

yazılır. $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu birim diskte farklı işaretler alan

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

jakobiyene sahiptir. Örneğin $J(0) > 0$ ve $J(-\frac{1}{2}) < 0$. Buradan Lewy' nin teoreminden f fonksiyonu yalınkat değildir.

S sınıfı için yapılan işlemlere benzer olarak, harmonik konveks ve harmonik yıldızıl fonksiyonların analitik gösterimleri olan (2.4) ve (2.5) eşitsizliklerinin sağ taraflarındaki "0" değeri yerine α $(0 \le \alpha < 1)$ alınması durumunda α mertebeli harmonik konveks ve α mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyon sınıflarını tanımlamak mümkündür. Bu sınıflar, sırasıyla, $K_H(\alpha)$ ve $S_H^*(\alpha)$ sembolleri kullanılarak gösterilir. Bu sınıflar için

$$S_H^*(0) \equiv S_H^* \qquad \text{ve} \qquad K_H(0) \equiv K_H$$

denkliklerinin yazılabileceği açıktır. Ayrıca her $f = h + \overline{g}$ harmonik dönüşümünün koanalitik kısmı olan g fonksiyonu sıfır olduğunda, $S_H^*(\alpha) \equiv S^*(\alpha)$ ve $K_H(\alpha) \equiv K\ (\alpha)$ denkliklerini yazmak mümkündür.

2.6 p-katlı Harmonik Fonksiyonlar

Bu kesimde, Duren, Hengartner ve Laugesen [11] tarafından elde edilen harmonik dönüşümler için argüment prensibinden bahsederek, harmonik yalınkat fonksiyonlardan p-katlı harmonik fonksiyonlara geçeceğiz.

Teorem 2.6.1 (Argument Prensibi)

Γ ile sınırlı bir D Jordan bölgesinde tanımlı harmonik bir f fonksiyonunu alalım. f fonksiyonu $\overline{D}$ bölgesinde sürekli ve Γ üzerinde $f(z) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca f fonksiyonu D bölgesinde ayrık sıfırlara sahip olmasın ve bu fonksiyonunun D bölgesindeki sıfırlarının mertebelerinin toplamı m olsun.

Bu durumda $\Delta_\Gamma \arg(f(z))$ değeri, z noktası Γ sınırında dolaşırken $f(z)$ değerinin argümentindeki değişimini ifade etmek üzere,

$$\Delta_\Gamma \arg(f(z)) = 2\pi m$$

olur. ■

Tanım 2.6.2

$p \geq 1$ olmak üzere,

$$h(z) = z^p + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1} \quad , \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{k+p-1} \ , \quad |b_p| < 1 \qquad (2.6)$$

fonksiyonları ile $f = h + \overline{g}$ şeklinde ifade edilen bir fonksiyona ***p-katlı harmonik fonksiyon*** adı verilir. Δ birim diskinde p-katlı harmonik ve yön koruyan fonksiyonların sınıfı $H(p)$ sembolü ile gösterilir [3].

$p \geq 1$ olmak üzere, $H(p)$ sınıfının her bir $|z| = r < 1$ diskini konveks bir bölge üzerine dönüştüren fonksiyonlarından oluşan altsınıfına ***p-katlı harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı*** denir. p-katlı harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı $K_H(p)$ sembolü ile gösterilir.

h ve g (2.6) ile verilen fonksiyonlar olmak üzere, $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun $K_H(p)$ sınıfında olması için $z = r e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ ve $0 \leq r < 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{ \arg\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(r e^{i\theta}) \right) \right\} > 0$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir [8].

Benzer şekilde, $H(p)$ sınıfının, her bir $|z| = r < 1$ diskini orijine göre yıldızıl olan kapalı bir eğri üzerine dönüştüren fonksiyonlarından oluşan altsınıfına ***p-katlı harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı*** denir ve $S_H^*(p)$ sembolü ile gösterilir.

h ve g (2.6) ile verilen fonksiyonlar olmak üzere, $S_H^*(p)$ sınıfındaki bir $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun, $z = r\,e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$ ve $0 \le r < 1$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left(f(r\,e^{i\theta})\right)\right) \ge 0$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir [43].

p-katlı harmonik konveks ve p-katlı harmonik yıldızıl fonksiyonların tanımlarında verilen eşitsizliklerinin sağ taraflarındaki “0” değeri yerine α $(0 \le \alpha < 1)$ alınması durumunda, sırasıyla, ***α mertebeli p-katlı harmonik konveks*** ve ***α mertebeli p-katlı harmonik yıldızıl*** fonksiyon sınıflarını tanımlamak mümkündür. Bu sınıflar, sırasıyla, $K_H(p,\alpha)$ ve $S_H^*(p,\alpha)$ sembolleri kullanılarak gösterilir. Bu tanımlar altında

$$S_H^*(1,0) \equiv S_H^* \qquad \text{ve} \qquad K_H(1,0) \equiv K_H$$

denkliklerinin yazılabileceği açıktır.

2.7 Harmonik Fonksiyonlar için Subordinasyon İlkesi

Bu kesimde, daha önceden analitik yalınkat fonksiyonlarda tanımlamış olduğumuz subordinasyon ilkesini, harmonik fonksiyonlar için vereceğiz.

Tanım 2.7.1

g, Δ birim diskinde harmonik yalınkat bir fonksiyon olsun. Eğer Δ birim diskinde

$$f(z) = g\left(w(z)\right)$$

olacak şekilde $|w(z)| < 1$ ve $w(0) = 0$ koşullarını sağlayan analitik ve yalınkat bir w fonksiyonu varsa, f harmonik fonksiyonu g harmonik fonksiyonuna subordinedir denir ve bu durum $f \prec g$ şeklinde gösterilir. Eğer g birim diskin bir harmonik dönüşümü ve D, $g(0) \in D \subseteq g(\Delta)$ özelliğine sahip basit bağlantılı bir bölge ise, bu durumda g fonksiyonuna subordine olan, birim diski D bölgesi üzerine dönüştüren harmonik bir f dönüşümü vardır. Ayrıca, bu f dönüşümü birim diskin uygun dönmeleri ile bir tektir. Bu durumu görebilmek için, Riemann Dönüşüm Teoremini göz önüne alarak, $w(0)=0$, $w'(0)>0$ koşullarını sağlayan ve Δ birim diskini $f^{-1}(D)$ bölgesine konformal olarak dönüştüren $w(z)$ fonksiyonunu seçmeliyiz. $f(z)=g\circ w$ subordine fonksiyonu, birim diski D bölgesine dönüştüren harmonik bir dönüşüm olup, $w'(0)>0$ normalize koşulları ile tek türlü belirlidir. Bu koşullar altında f harmonik dönüşümü g fonksiyonuna subordinedir ve $D\subset f(\Delta)$ bölgesine karşılık gelir.

2.8 Sâlâgean Operatörü

Yalınkat bir f fonksiyonu için 1983 yılında G.S.Sâlâgean [40],

$$D^0 f(z) = f(z)$$
$$D^1 f(z) = zf'(z)$$
$$\vdots$$
$$D^m f(z) = D(D^{m-1} f(z)) \quad (m\in\mathbb{N}=1,2,3,...)$$

şeklinde bir operatör tanımlanmıştır.

$\Delta=\{z:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$$

formundaki fonksiyonların A sınıfına ait bir f fonksiyonu için

$$D^m f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}k^m a_k z^k \qquad (m\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})$$

olduğu, tanımdan kolayca bulunabilir. Benzer şekilde, Δ birim diskinde analitik ve

$$f(z)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}a_k z^k$$

formundaki fonksiyonların $A(p)$ sınıfına ait bir f fonksiyonu için

$$D^m f(z)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}\left(\frac{k}{p}\right)^m a_k z^k \qquad (m\in\mathbb{N}_0)$$

eşitliği elde edilir.

Yalınkat fonksiyonlar için yapılan çalışmaları harmonik yalınkat fonksiyonlar için tanımlamaya çalışmak alışılagelmiş bir durumdur. Jahangiri, Murugusundaramoorthy ve Vijaya, 2002 yılında Sâlâgean operatörünü S_H sınıfındaki

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \quad , \quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$$

ile verilen h ve g analitik fonksiyonlarıyla yazılan bir $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu için

$$D^m h(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}k^m a_k z^k \quad \text{ve} \quad D^m g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}k^m b_k z^k$$

olmak üzere

$$D^m f(z)=D^m h(z)+(-1)^m\overline{D^m g(z)} \tag{2.7}$$

şeklinde uyarlamışlardır.

Benzer şekilde $H(p)$ sınıfındaki (2.6) ile verilen h ve g analitik fonksiyonlarıyla yazılan bir $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu için Sâlâgean operatörünü

$$D^m h(z)=z^p+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m a_{k+p-1}z^{k+p-1}$$

ve

$$D^m g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m b_{k+p-1}z^{k+p-1}$$

olmak üzere

$$D^m f(z)=D^m h(z)+(-1)^m\overline{D^m g(z)}; \qquad p>m \tag{2.8}$$

şeklinde yazmak mümkündür.

3. B Ö L Ü M

SÂLÂGEAN–TİPLİ HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLARIN YENİ BİR SINIFI

Bu bölümde Sâlâgean-tipli harmonik yalınkat fonksiyonların yeni bir altsınıfını tanımlayıp, bu altsınıfın bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Tanımlayacağımız bu harmonik yalınkat fonksiyonlar için katsayı eşitsizliklerini, ekstrem noktalarını, bükülme sınırlarını ve konveks kombinasyonunu elde edeceğiz. Bu bölümde yapılan çalışma yayına gönderilmiş olup halen incelemededir [41].

3.1 Temel Tanımlar

$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ olmak üzere $f = h + \overline{g}$ şeklindeki fonksiyonları alalım. $0 \le \alpha < 1$, $\beta \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$ ve $z \in \Delta$ iken

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} > \beta\left|\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - 1\right| + \alpha \tag{3.1}$$

eşitsizliğini sağlayan f harmonik dönüşümlerin ailesini $S_H(m,n,\alpha,\beta)$ olarak tanımlayacağız.

$S_H(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının, h ve g_m fonksiyonları

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \qquad g_m(z) = (-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \qquad a_k, b_k \ge 0. \tag{3.2}$$

ile tanımlanmak üzere, $f_m = h + \overline{g_m}$ şeklindeki harmonik dönüşümlerden oluşan altsınıfını $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ olarak tanımlayalım.

$\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfı, S_H sınıfının değişik bilinen altsınıflarını kapsar. Örneğin, Δ birim diskinde α mertebeli yıldızıl ve yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların $S_H^*(\alpha)$ sınıfı için $\overline{S_H}(1,0,\alpha,0)=S_H^*(\alpha)$ eşitliği sağlanır. Bundan başka, Δ birim diskinde α mertebeli konveks ve yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların $K_H(\alpha)$ sınıfı için, $\overline{S_H}(2,1,\alpha,0)=K_H(\alpha)$ olacaktır. $\overline{H}(n,\alpha)$, Sâlâgean-tipli harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı olmak üzere $\overline{S_H}(n+1,n,\alpha,0)\equiv\overline{H}(n,\alpha)$ şeklindedir.

Avcı ve Zlotkiewicz [5], $b_1=0$ olmak üzere, $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ ile verilen h ve g fonksiyonlarıyla elde edilen harmonik $f=h+\overline{g}$ fonksiyonları için

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(|a_k|+|b_k|)\le 1$$

eşitsizliğinin sağlanması durumunda, $f\in S_H^*(0)$ olduğunu ve

$$\sum_{k=2}^{\infty}k^2(|a_k|+|b_k|)\le 1$$

olması durumunda ise, $f\in K_H(0)$ olduğunu göstermişlerdir. Silverman [44], yukarıdaki katsayı eşitsizliklerinin, negatif katsayılı fonksiyonlar için de sağlandığını göstermiştir. Daha sonraları, Silverman ve Silvia [45], yapılan bu çalışmalarda b_1 katsayısının sıfır olması gerekmediğini göstermişlerdir.

Jahangiri [21], $m=1$ ve $\beta=0$ olmak üzere $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ ile verilen h ve g fonksiyonlarıyla elde edilen harmonik $f=h+\overline{g}$ fonksiyonunun $S_H^*(\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-\alpha)|a_k|+\sum_{k=1}^{\infty}(k+\alpha)|b_k|\le 1-\alpha$$

olduğunu ve $K_H(\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-\alpha)|a_k|+\sum_{k=1}^{\infty}k(k+\alpha)|b_k|\le 1-\alpha$$

olduğunu göstermiştir.

3.2 $S_H(m,n,\alpha,\beta)$ ve $\overline{S}_H(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfları için katsayı eşitsizlikleri

Aşağıdaki teoremde bir f fonksiyonunun $S_H(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfında olması için, bu fonksiyonun katsayılarıyla ilgili bir yeterlilik koşulu vereceğiz.

Teorem 3.2.1

$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$ ile verilen h ve g fonksiyonlarından oluşan harmonik $f=h+\overline{g}$ fonksiyonunu alalım. Eğer f fonksiyonu, $a_1=1$, $\alpha\,(0\le\alpha<1)$, $\beta\ge 0$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve $m>n$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}\left|a_k\right|+\frac{(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}\left|b_k\right|\right)\le 2 \qquad (3.3)$$

eşitsizliğini sağlarsa, f fonksiyonu Δ birim diskinde yön koruyan harmonik yalınkat bir fonksiyondur ve $S_H(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına ait olur.

İspat. $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu için, $z_1\neq z_2$ iken

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|=\left|\frac{h(z_1)-h(z_2)+\overline{g}(z_1)-\overline{g}(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|=\left|1+\frac{\overline{g}(z_1)-\overline{g}(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|$$

eşitliğini gözönüne alalım. Bu eşitliğe ters üçgen eşitsizliği uygulanır ve ardından da $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$ fonksiyonları yerlerine yazılırsa,

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|\ge 1-\left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|=1-\left|\frac{\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z_1^k-z_2^k)}{(z_1-z_2)+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z_1^k-z_2^k)}\right|$$

ifadesini elde ederiz.

$|z|<1$ olduğundan

$$1-\left|\frac{\sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_1^k - z_2^k)}{(z_1-z_2)+\sum_{k=2}^{\infty} a_k (z_1^k - z_2^k)}\right| > 1-\frac{\sum_{k=1}^{\infty} k\,|b_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty} k\,|a_k|}$$

$$\geq 1-\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}|b_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}|a_k|}$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. Teoremde verilen (3.3) koşulundan, bu son ifadenin negatif olmadığı görülür. Bu durum f fonksiyonun yalınkatlığını gösterir.

Şimdi f fonksiyonun Δ birim diskinde yön koruyan olduğunu gösterelim.

$$|h'(z)| \geq 1-\sum_{k=2}^{\infty} k\,|a_k|\,|z|^{k-1}$$

$$>1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}|a_k|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}|b_k|$$

$$> \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}|b_k|\,|z|^{k-1}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} k\,|b_k|\,|z|^{k-1}$$

$$\geq |g'(z)|$$

olacağından Sonuç 2.1.5 gereğince f fonksiyonu yön koruyan bir fonksiyondur.

Herhangi bir w dönüşümü için $|1-\alpha+w|>|1+\alpha-w|$ eşitsizliğinin sağlaması $Re\{w\}>\alpha$ olması için gerekli ve yeterlidir. Bu durumda

$$\left|(1-\alpha)D^n f(z)+D^m f(z)-\beta e^{i\theta}\left|D^m f(z)-D^n f(z)\right|\right|$$

$$-\left|(1+\alpha)D^n f(z)-D^m f(z)+\beta e^{i\theta}\left|D^m f(z)-D^n f(z)\right|\right|>0 \quad (3.4)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. $D^n f(z)$ ve $D^m f(z)$ değerleri (3.4) eşitsizliğinde yerine yazılır ve (3.3) eşitsizliği kullanılarak gerekli matematiksel hesaplamalar yapılırsa

$$\left|(1-\alpha)D^n f(z)+D^m f(z)-\beta e^{i\theta}\left|D^m f(z)-D^n f(z)\right|\right|$$

$$-\left|(1+\alpha)D^n f(z)-D^m f(z)+\beta e^{i\theta}\left|D^m f(z)-D^n f(z)\right|\right|$$

$$=\Bigg|(2-\alpha)z+\sum_{k=2}^{\infty}[(1-\alpha)k^n+k^m]a_k z^k+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}[(1-\alpha)k^n+(-1)^{m-n}k^m]\overline{b_k z^k}$$

$$-\beta e^{i\theta}\left|\sum_{k=2}^{\infty}(k^m-k^n)a_k z^k+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}[(-1)^{m-n}k^m-k^n]\overline{b_k z^k}\right|\Bigg|$$

$$-\Bigg|\alpha z-\sum_{k=2}^{\infty}[k^m-(1+\alpha)k^n]a_k z^k+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}[(1+\alpha)k^n-(-1)^{m-n}k^m]\overline{b_k z^k}$$

$$+\beta e^{i\theta}\left|\sum_{k=2}^{\infty}(k^m-k^n)a_k z^k+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}[(-1)^{m-n}k^m-k^n]\overline{b_k z^k}\right|\Bigg|$$

$$\geq 2(1-\alpha)|z|-2\sum_{k=2}^{\infty}\left[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n\right]|a_k||z|^k$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|(1-\alpha)k^n+(-1)^{m-n}k^m\right|+2\beta\left|(-1)^{m-n}k^m-k^n\right|+\left|(1+\alpha)k^n-(-1)^{m-n}k^m\right|\right]|b_k||z|^k$$

$$=\begin{cases} 2(1-\alpha)|z|-2\sum_{k=2}^{\infty}[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]|a_k||z|^k-2\sum_{k=1}^{\infty}[(1+\beta)k^m+(\alpha+\beta)k^n]|b_k||z|^k; & m-n \text{ tek} \\ 2(1-\alpha)|z|-2\sum_{k=2}^{\infty}[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]|a_k||z|^k-2\sum_{k=1}^{\infty}[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]|b_k||z|^k; & m-n \text{ çift} \end{cases}$$

$$>2(1-\alpha)|z|\left\{1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|a_k||z|^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|b_k||z|^{k-1}\right\}$$

$$>2(1-\alpha)\left\{1-\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|a_k|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|b_k|\right)\right\}$$

$$\geq 0$$

elde ederiz. ■

$m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $m>n$ ve $\sum_{k=2}^{\infty}|x_k|+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|=1$ olmak üzere

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}x_k z^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}\overline{y_k z^k} \quad (3.5)$$

harmonik yalınkat fonksiyonları, (3.3) eşitsizliği ile verilen katsayı sınırının kesin olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}|a_k|+\frac{(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}|b_k|\right)$$

$$=1+\sum_{k=2}^{\infty}|x_k|+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|=2$$

eşitliği sağlandığından (3.5) ile verilen fonksiyonlar $S_H(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına aittir.

Aşağıda vereceğimiz teorem h ve g_m,

$$h(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k, \qquad g_m(z)=(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k, \qquad a_k, b_k \geq 0$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere, (3.3) eşitsizliğinin $f_m=h+\overline{g}_m$ şeklindeki fonksiyonlar için yeterli olmanın yanı sıra bir gerekli koşul olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.2

h ve g_m,

$$h(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k, \qquad g_m(z)=(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k, \qquad a_k, b_k \geq 0$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere $f_m=h+\overline{g}_m$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $a_1=1$, $0\leq\alpha<1$, $\beta\geq 0$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve $m>n$ olmak üzere $f_m\in\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ olması için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n\right]a_k+\left[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n\right]b_k\right)\leq 2(1-\alpha) \quad (3.6)$$

eşitsizliğini sağlaması gerekli ve yeterlidir.

İspat:

$\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)\subset S_H(m,n,\alpha,\beta)$ olduğundan, teoremin sadece yeterlilik kısmını ispatlamak yeterli olacaktır. f_m fonksiyonları için

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\}>\beta\left|\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}-1\right|+\alpha$$

eşitsizliğinde $D^n f_m(z)$ ve $D^m f_m(z)$ değerlerini yerlerine yazarsak

$$Re\left\{\frac{(1-\alpha)z-\sum_{k=2}^{\infty}(k^m-\alpha k^n)a_k z^k+(-1)^{2m-1}\sum_{k=1}^{\infty}[k^m-(-1)^{m-n}\alpha k^n]b_k\overline{z}^k}{z-\sum_{k=2}^{\infty}k^n a_k z^k+(-1)^{m+n-1}\sum_{k=1}^{\infty}k^n b_k\overline{z}^k}\right.$$

$$\left.-\frac{\beta e^{i\theta}\left|\sum_{k=2}^{\infty}(k^m-k^n)a_k z^k+\sum_{k=1}^{\infty}[k^m-(-1)^{m-n}k^n]b_k\overline{z}^k\right|}{z-\sum_{k=2}^{\infty}k^n a_k z^k(-1)^{m+n-1}\sum_{k=1}^{\infty}k^n b_k\overline{z}^k}\right\}\geq 0 \quad (3.7)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $0\leq z=r<1$ olmak üzere pozitif gerçel eksen üzerindeki z noktaları seçilerek

$$\frac{1-\alpha-\sum_{k=2}^{\infty}[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]a_k\, r^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]b_k\, r^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}k^n\, a_k\, r^{k-1}-(-1)^{m-n}\sum_{k=1}^{\infty}k^n\, b_k\, r^{k-1}}\geq 0 \quad (3.8)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer (3.6) ile verilen eşitsizlik sağlanmıyor ise bu durumda (3.8) ile verilen eşitsizlik, 1 e yeteri kadar yakın r sayısı için negatif olur. Buradan (3.8) ile verilen eşitsizliği negatif yapan (0,1) açık aralığında bir $z_0=r_0$ noktası vardır. Bu durum f_m fonksiyonun $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına ait olması ile çelişir. O halde (3.6) ile verilen eşitsizlik sağlanıyor demektir. Bu da ispatımızı tamamlar. ■

3.3 $\overline{S}_H(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının ekstrem noktaları

Bu kesimde, $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının $clco\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ kapalı konveks kabuğunun ekstrem noktalarını belirleyeceğiz.

Teorem 3.3.1

h ve g_m,

$$h(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k,\qquad g_m(z)=(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k,\qquad a_k,b_k\geq 0$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere $f_m = h + \overline{g}_m$ fonksiyonunun $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, f_m fonksiyonunun

$$h_1(z) = z,$$

$$h_k(z) = z - \frac{(1-\alpha)}{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n} z^k; \qquad (k = 2,3,\ldots)$$

ve

$$g_{m_k}(z) = z + (-1)^{m-1} \frac{(1-\alpha)}{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n} \overline{z}^k; \qquad (k = 1,2,\ldots),$$

fonksiyonları ile

$$x_k \geq 0, \qquad y_k \geq 0, \qquad x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty}\left(x_k + y_k\right) \geq 0$$

olmak üzere

$$f_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[x_k h_k(z) + y_k g_{m_k}(z)\right]$$

şeklinde yazılabilmesidir. Bu durumda, $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının ekstrem noktaları $\{h_k\}$ ve $\{g_{m_k}\}$ fonksiyonlarıdır.

İspat:

f_m fonksiyonlarının

$$f_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[x_k h_k(z) + y_k g_{m_k}(z)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)z - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n} x_k z^k$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n} y_k \overline{z}^k$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım.

Bu durumda f_m fonksiyonuna Teorem 3.2.2 de verilen katsayı eşitsizliğini uygularsak,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n} x_k \right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n} y_k \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k = 1 - x_1 \leq 1$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece f_m fonksiyonu $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına ait olur.

Tersine, eğer $f_m(z) \in \overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ ise, bu durumda

$$a_k \leq \frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}$$

ve

$$b_k \leq \frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}$$

eşitsizlikleri yazılabildiğinden

$$x_k = \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} a_k, \qquad (k = 2,3,\ldots)$$

ve

$$y_k = \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} b_k, \quad (k = 1,2,3,\ldots)$$

ifadelerini yazabiliriz. Böylece $0 \leq x_k \leq 1, (k = 2,3,\ldots)$ ve $0 \leq y_k \leq 1\ (k = 1,2,\ldots)$ eşitsizlikleri sağlanır. Buradan

$$x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

olarak tanımlayabiliriz ve Teorem 3.2.2 gereğince $x_1 \geq 0$ eşitsizliği sağlanır.

Böylece istenilen

$$x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_k h_k(z) + y_k g_{m_k}(z)$$

eşitliğin sağlandığı görülür. ■

3.4 $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ *sınıfı için bükülme sınırları*

Bu kesimde, $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfındaki fonksiyonlar için bükülme sınırlarını vereceğiz.

Teorem 3.4.1

$\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfındaki f_m fonksiyonları için $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\left|f_m(z)\right| \leq (1+b_1)r + \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-\alpha}{(1+\beta)2^{m-n}-(\alpha+\beta)} - \frac{(1+\beta)-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)}{(1+\beta)2^{m-n}-(\alpha+\beta)}b_1\right)r^2 \quad (3.9)$$

ve

$$\left|f_m(z)\right| \geq (1-b_1)r - \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-\alpha}{(1+\beta)2^{m-n}-(\alpha+\beta)} - \frac{(1+\beta)-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)}{(1+\beta)2^{m-n}-(\alpha+\beta)}b_1\right)r^2 \quad (3.10)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

Teoremin ispatı için (3.9) eşitsizliğini göstermek yeterli olacaktır. (3.10) eşitsizliği için benzer ispat yapılabilir.

$f_m \in \overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ fonksiyonunun mutlak değeri alınarak üçgen eşitsizliği uygulanırsa, katsayı eşitsizliği kullanılarak

$$\left|f_m(z)\right| \le (1+b_1)r + \sum_{k=2}^{\infty}(a_k+b_k)r^k \le (1+b_1)r + r^2\sum_{k=2}^{\infty}(a_k+b_k)$$

$$= (1+b_1)r + r^2\frac{1-\alpha}{2^n((1+\beta)2^{m-n}-(\alpha+\beta))}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^n((1+\beta)2^{m-n}-(\alpha+\beta))}{1-\alpha}(a_k+b_k)$$

$$\le (1+b_1)r + r^2\frac{1-\alpha}{2^n\left((1+\beta)2^{m-n}-(\alpha+\beta)\right)}$$

$$\times\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}a_k + \frac{(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}b_k\right)$$

$$\le (1+b_1)r + \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-\alpha}{(1+\beta)2^{m-n}-(\alpha+\beta)} - \frac{(1+\beta)-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)}{(1+\beta)2^{m-n}-(\alpha+\beta)}b_1\right)r^2$$

yazılır. ■

(3.9) eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonucu yazmak mümkündür.

Sonuç 3.4.2

f_m fonksiyonu $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına ait olmak üzere

$$\left\{w : |w| < \frac{2^m-1-\beta(2^n-2^m)-\alpha(2^n-1)}{(1+\beta)2^m-(\alpha+\beta)2^n} - \frac{(1+\beta)(2^m-1)(\alpha+\beta)(2^n-(-1)^{m-n})}{(1+\beta)2^m-(\alpha+\beta)2^n}b_1\right\} \subset f_m(\Delta)$$

bağıntısı sağlanır.

3.5 $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının kapalılık özellikleri

İkinci bölümde Tanım 2.2.5 ile, iki harmonik fonksiyonun konvolüasyonunu tanımlamıştık. Buna göre

$$f_m(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \overline{z}^k \tag{3.11}$$

ve

$$F_m(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \overline{z}^k \tag{3.12}$$

şeklindeki iki harmonik fonksiyonun konvolüasyonu

$$(f_m * F_m)(z) = f_m(z) * F_m(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k A_k z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_k B_k \overline{z}^k \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir. Bu kesimde, $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının konvolüasyon işlemi altında kapalı olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.5.1

$0 \le \gamma \le \alpha < 1$ olmak üzere, $f_m \in \overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ ve $F_m \in \overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu durumda

$$\left(f_m(z) * F_m(z) \right) \in \overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta) \subset \overline{S_H}(m,n,\gamma,\beta)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat:

(3.11) ile verilen f_m fonksiyonu $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfında ve (3.12) ile verilen $F_m(z)$ fonksiyonu da $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfında olsun. (3.13) ile verilen bu iki fonksiyonun $f_m * F_m$ konvolüasyonunun katsayılarının Teorem 3.2.2’de verilen katsayı eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.

$F_m \in \overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ fonksiyonu için $A_k < 1$ ve $B_k < 1$ olduğunu belirtelim. $0 \le \gamma \le \alpha < 1$ ve $f_m \in \overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ olduğundan, $f_m * F_m$ konvolüasyon fonksiyonu için

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (\gamma+\beta)k^n}{1-\gamma} a_k A_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\gamma+\beta)k^n}{1-\gamma} b_k B_k$$

$$\le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (\gamma+\beta)k^n}{1-\gamma} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\gamma+\beta)k^n}{1-\gamma} b_k$$

$$\le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} b_k$$

$$\le 1$$

yazılabilir. Böylece

$$\left(f_m(z) * F_m(z) \right) \in \overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta) \subset \overline{S_H}(m,n,\gamma,\beta)$$

bağıntısı elde edilir. ■

Şimdi $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına ait fonksiyonların konveks kombinasyonlar altında kapalı olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.5.2

$\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfı konveks kombinasyonlar altında kapalıdır.

İspat:

$i = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$f_{m_i}(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k_i} z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k_i} \overline{z}^k$$

eşitliği ile verilen f_{m_i} fonksiyonları $\overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfında olsunlar. Bu durumda (3.6) ile verilen katsayı eşitsizliğinden,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} a_{k_i} + \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} b_{k_i} \right) \le 2 \qquad (3.14)$$

yazmak mümkündür. $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$, $0 \le t_i \le 1$ olmak üzere f_{m_i} fonksiyonlarının konveks kombinasyonu

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i f_{m_i}(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{k_i} \right) z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i b_{k_i} \right) \overline{z}^k \qquad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir. (3.14) eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{k_i} + \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} t_i b_{k_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} t_i \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} a_{k_i} + \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} b_{k_i} \right) \right\}$$

$$\le 2 \sum_{i=1}^{\infty} t_i$$

$$= 2$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\sum_{i=1}^{\infty} t_i f_{m_i} \in \overline{S_H}(m,n,\alpha,\beta)$ olur. ■

Not 3.5.3

Bu bölümde verilen teoremlerde $\beta = 0$ alınırsa Yalçın [46] tarafından yapılan çalışmadaki sonuçları, $m = n + 1$ ve $\beta = 0$ alınması durumunda ise Jahangiri, Murugusundaramoorthy ve Vijaya [22] tarafından yapılan çalışmadaki sonuçları elde ederiz. Böylece bu bölümde yapılan çalışmanın [22] ve [46] ile verilen çalışmaların genellemesi olduğu açıkça görülebilir.

4. B Ö L Ü M

SÂLÂGEAN–TİPLİ P-KATLI HARMONİK FONKSİYONLARIN BİR SINIFI

Bu bölümde Sâlâgean-tipli p-katlı harmonik fonksiyonların yeni bir sınıfını tanımlayıp, bu sınıfın bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Tanımlayacağımız bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizliklerini, ekstrem noktalarını ve bükülme sınırlarını vereceğiz. Bu bölümde yapılan çalışma "*General Mathematics*" adlı dergide yayınlanmıştır [42].

4.1Temel Tanımlar

$p \geq 1$ olmak üzere,

$$h(z) = z^p + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1} \quad , \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{k+p-1} \; , \quad \left| b_p \right| < 1$$

ile verilen h ve g analitik fonksiyonlarıyla yazılan $H(p)$ sınıfındaki bir $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu için Sâlâgean operatörünün

$$D^m h(z) = z^p + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k+p-1}{p} \right)^m a_{k+p-1} z^{k+p-1} ,$$

$$D^m g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+p-1}{p} \right)^m b_{k+p-1} z^{k+p-1}$$

olmak üzere

$$D^m f(z) = D^m h(z) + (-1)^m \overline{D^m g(z)}; \qquad p > m$$

şeklinde hesaplanacağını biliyoruz.

$p \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$ ve $z \in \Delta$ olmak üzere

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} > \alpha \tag{4.1}$$

eşitsizliğini sağlayan p-katlı harmonik $f = h + \overline{g}$ fonksiyonların ailesini $H_p(m,n,\alpha)$ olarak tanımlayalım. Bundan başka, h ve g_m fonksiyonları

$$h(z) = z^p - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1}, \qquad g_m(z) = (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{k+p-1}, \quad |b_p| < 1 \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $H_p(m,n,\alpha)$ sınıfına ait $f_m = h + \overline{g}_m$ fonksiyonlarından oluşan altsınıfı $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ ile tanımlayalım.

$\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ ve $H_p(m,n,\alpha)$ sınıfları harmonik fonksiyonların bazı özel m ve n değerleri için daha önceden çalışılmış olan altsınıflarını verir. Örneğin, Δ birim diskinde α-mertebeli yıldızıl ve yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı $S_H^*(\alpha)$ olmak üzere, $\overline{H_1}(1,0,\alpha) \equiv S_H^*(\alpha)$ ve $K_H(\alpha)$, Δ birim diskinde α- mertebeli konveks ve yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı olmak üzere $\overline{H_1}(2,1,\alpha) \equiv K_H(\alpha)$ eşitlikleri sağlanır. $\overline{H}(n,\alpha)$, Sâlâgean-tipli harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı olmak üzere $\overline{H_1}(n+1,n,\alpha) \equiv \overline{H}(n,\alpha)$ olur.

Bu bölümde, $K_H(\alpha)$ ve $S_H^*(\alpha)$ sınıfları için bilinen katsayı eşitsizliklerini, $p \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$ ve $z \in \Delta$ olmak üzere

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} > \alpha$$

eşitsizliği ile tanımlanan $H_p(m,n,\alpha)$ sınıfına genişleteceğiz. Ayrıca $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlar için ekstrem noktalarını ve bükülme sınırlarını belirleyeceğiz.

4.2 $H_p(m,n,\alpha)$ ve $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfları için katsayı eşitsizlikleri

Bu kesimde $H_p(m,n,\alpha)$ ve $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıflarındaki fonksiyonlar için bir yeterli katsayı koşulu tanımlayacağız

Teorem 4.2.1

h ve g_m,

$$h(z)=z^p+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k+p-1}z^{k+p-1} \quad , \quad g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_{k+p-1}z^{k+p-1} \ , \quad \left|b_p\right|<1, \quad p\geq 1$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere $f=h+\overline{g}$ fonksiyonunu alalım. Eğer f fonksiyonu, $a_p=1$, $\alpha\,(0\leq\alpha<1)$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve $m>n$ iken $\Psi(m,n,p,\alpha)$ ve $\Theta(m,n,p,\alpha)$ fonksiyonları

$$\Psi(m,n,p,\alpha)=\frac{\left(\dfrac{k+p-1}{p}\right)^m-\alpha\left(\dfrac{k+p-1}{p}\right)^n}{1-\alpha}$$

$$\Theta(m,n,p,\alpha)=\frac{\left(\dfrac{k+p-1}{p}\right)^m-(-1)^{m-n}\alpha\left(\dfrac{k+p-1}{p}\right)^n}{1-\alpha}$$

şeklinde tanımlanmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\Psi(m,n,p,\alpha)\left|a_{k+p-1}\right|+\Theta(m,n,p,\alpha)\left|b_{k+p-1}\right|\right\}\leq 2 \tag{4.3}$$

eşitsizliğini sağlarsa, bu durumda $f\in H_p(m,n,\alpha)$ olur.

İspat:

Teoremi ispatlamak için,

$$Re\left(\frac{D^m f(z)-\alpha D^n f(z)}{D^n f(z)}\right)\geq 0$$

eşitsizliğini göstermek yeterli olacaktır.

$r=0$ olduğu durum açıktır. Şimdi $0<r<1$ için eşitsizliği göstermeye çalışalım. $D^n f(z)$ ve $D^m f(z)$ değerleri, verilen eşitsizlikte yerlerine yazılırsa

$$Re\left(\frac{D^m f(z)-\alpha D^n f(z)}{D^n f(z)}\right)=$$

$$Re\left\{\frac{z^p(1-\alpha)+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m-\alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n\right]a_{k+p-1}z^{k+p-1}}{z^p+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k+p-1}+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n \overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m-(-1)^{m-n}\alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n\right]\overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}{z^p+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k+p-1}+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n \overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}\right\}$$

$$=Re\left\{\frac{(1-\alpha)+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m-\alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n\right]a_{k+p-1}z^{k-1}}{1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k-1}+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n \overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}z^{-p}}\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m-(-1)^{m-n}\alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m\right]\overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}z^{-p}}{1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k-1}+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n \overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}z^{-p}}\right\}$$

elde edilir. Burada $z = re^{i\theta}$ için sadelik açısından

$$A(re^{i\theta}) = \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m} - \alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right] a_{k+p-1}\, r^{k-1} e^{(k-1)i\theta}$$

$$+(-1)^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m} - (-1)^{m-n}\alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right] \overline{b}_{k+p-1}\, r^{k-1} e^{-(k+2p-1)i\theta}$$

$$B(re^{i\theta}) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n} a_{k+p-1}\, r^{k-1} e^{(k-1)i\theta} + (-1)^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n} \overline{b}_{k+p-1}\, r^{k-1} e^{-(k+2p-1)i\theta}$$

alınırsa

$$Re\left(\frac{D^{m} f(z) - \alpha D^{n} f(z)}{D^{n} f(z)}\right) = Re\left[\frac{(1-\alpha)+A(z)}{1+B(z)}\right]$$

eşitliğini elde ederiz.

Pozitif gerçel kısma sahip her fonksiyonun, $\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna subordine olduğunu biliyoruz. Bu durumda, uygun düzenlemeler ile

$$\frac{(1-\alpha)+A(z)}{1+B(z)} \prec (1-\alpha)\frac{1+z}{1-z}$$

subordinasyonunu yazmak mümkündür. Diğer bir deyişle

$$\frac{(1-\alpha)+A(z)}{1+B(z)} = (1-\alpha)\frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

olacak şekilde $|w(z)| < 1$ ve $w(0)=0$ koşullarını sağlayan analitik bir w fonksiyonu vardır. Gerçekten de subordinasyondan elde ettiğimiz yukarıdaki eşitliği $w(z)$ fonksiyonuna göre düzenleyerek, gerekli basit matematiksel hesaplamalar yapılırsa,

$$C(m,n,p,\alpha)=\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}+(1-2\alpha)\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}$$

ve

$$D(m,n,p,\alpha)=\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}+(-1)^{m-n}(1-2\alpha)\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}$$

olmak üzere

$$|\,w(z)\,|=\left|\frac{A(z)-(1-\alpha)B(z)}{A(z)+(1-\alpha)B(z)+2(1-\alpha)}\right|$$

$$=\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right]a_{k+p-1}r^{k-1}e^{(k-1)i\theta}}{2(1-\alpha)+\sum_{k=2}^{\infty}C(m,n,p,\alpha)\,a_{k+p-1}r^{k-1}e^{(k-1)i\theta}+(-1)^{m}\sum_{k=1}^{\infty}D(m,n,p,\alpha)\,\overline{b}_{k+p-1}\,r^{k-1}e^{-(k+2p-1)i\theta}}\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-(-1)^{m-n}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right]\overline{b}_{k+p-1}r^{k-1}e^{-(k+2p-1)i\theta}}{2(1-\alpha)+\sum_{k=2}^{\infty}C(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1}\,r^{k-1}e^{(k-1)i\theta}+(-1)^{m}\sum_{k=1}^{\infty}D(m,n,p,\alpha)\,\overline{b}_{k+p-1}\,r^{k-1}e^{-(k+2p-1)i\theta}}\right|$$

$$\leq\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right]\left|a_{k+p-1}\right|r^{k-1}}{2(1-\alpha)-\sum_{k=2}^{\infty}C(m,n,p,\alpha)\left|a_{k+p-1}\right|r^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}D(m,n,p,\alpha)\left|b_{k+p-1}\right|r^{k-1}}$$

$$+\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-(-1)^{m-n}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right]\left|b_{k+p-1}\right|r^{k-1}}{2(1-\alpha)-\sum_{k=2}^{\infty}C(m,n,p,\alpha)\left|a_{k+p-1}\right|r^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}D(m,n,p,\alpha)\left|b_{k+p-1}\right|r^{k-1}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right]\left|a_{k+p-1}\right|r^{k-1}}{4(1-\alpha)-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C(m,n,p,\alpha)\left|a_{k+p-1}\right|+D(m,n,p,\alpha)\left|b_{k+p-1}\right|\right\}r^{k-1}}$$

$$+\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-(-1)^{m-n}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right]\left|b_{k+p-1}\right|r^{k-1}}{4(1-\alpha)-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C(m,n,p,\alpha)\left|a_{k+p-1}\right|+D(m,n,p,\alpha)\left|b_{k+p-1}\right|\right\}r^{k-1}}$$

$$< \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right]\left|a_{k+p-1}\right|}{4(1-\alpha)-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C(m,n,p,\alpha)\left|a_{k+p-1}\right|+D(m,n,p,\alpha)\left|b_{k+p-1}\right|\right\}}$$

$$+\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-(-1)^{m-n}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\right]\left|b_{k+p-1}\right|}{4(1-\alpha)-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C(m,n,p,\alpha)\left|a_{k+p-1}\right|+D(m,n,p,\alpha)\left|b_{k+p-1}\right|\right\}}$$

bulunur. Teoremde verilen (4.3) eşitsizliğinden yararlanarak, bu son ifadenin üstten 1 ile sınırlı olduğu, yani $|w(z)|<1$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Böylece ispat tamamlanır. ■

$m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $m>n$ $0\le\alpha<1$ ve $\sum_{k=2}^{\infty}|x_k|+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|=1$ olmak üzere

$$f(z)=z^{p}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\Psi(m,n,p,\alpha)}x_k z^{k+p-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Theta(m,n,p,\alpha)}\overline{y_k z^{k+p-1}} \tag{4.4}$$

p-katlı harmonik fonksiyonları, (4.3) eşitsizliği ile verilen katsayı sınırının kesin olduğunu gösterir.

Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\Psi(m,n,p,\alpha)\left|a_{k+p-1}\right|+\Theta(m,n,p,\alpha)\left|b_{k+p-1}\right|\right\}=1+\sum_{k=2}^{\infty}|x_k|+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|=2$$

olacağından, (4.4) eşitliği ile verilen fonksiyonlar $H_p(m,n,\alpha)$ sınıfına aittir.

Aşağıdaki teorem, h ve g_m

$$h(z)=z^p-\sum_{k=2}^{\infty}a_{k+p-1}z^{k+p-1},\qquad g_m(z)=(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_{k+p-1}z^{k+p-1},\quad |b_p|<1$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere, (4.3) eşitsizliğinin $f_m=h+\overline{g}_m$ şeklindeki fonksiyonların $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.2

h ve g_m,

$$h(z)=z^p-\sum_{k=2}^{\infty}a_{k+p-1}z^{k+p-1},\qquad g_m(z)=(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_{k+p-1}z^{k+p-1},\quad |b_p|<1$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere $f_m=h+\overline{g}_m$ fonksiyonunun $a_p=1$, $0\le\alpha<1$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve $m>n$ olmak üzere $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\Psi(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1}+\Theta(m,n,p,\alpha)b_{k+p-1}\right\}\le 2 \tag{4.5}$$

eşitsizliğini sağlamasıdır.

İspat:

$\overline{H_p}(m,n,\alpha) \subset H_p(m,n,\alpha)$ olduğundan, teoremin sadece yeterlilik kısmını ispatlamalıyız. f_m fonksiyonları için

$$Re\left\{\frac{D^m f_m(z)}{D^n f_m(z)}\right\} > \alpha$$

ile verilen koşul

$$Re\left\{\frac{(1-\alpha)z^p - \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m - \alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n\right]a_{k+p-1}z^{k+p-1}}{z^p - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k+p-1} + (-1)^{m+n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n b_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{2m-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m - (-1)^{m-n}\alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n\right]b_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}{z^p - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k+p-1} + (-1)^{m+n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n b_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}\right\} \geq 0 \quad (4.6)$$

eşitsizliğine denktir. $0 \leq z = r < 1$ olmak üzere pozitif gerçel eksen üzerindeki z noktaları seçilerek

$$\left\{\frac{(1-\alpha) - \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m - \alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n\right]a_{k+p-1}r^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}r^{k-1} - (-1)^{m-n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n b_{k+p-1}r^{k-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m - (-1)^{m-n}\alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n\right]b_{k+p-1}r^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}r^{k-1} - (-1)^{m-n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n b_{k+p-1}r^{k-1}}\right\} \geq 0 \quad (4.7)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer (4.6) ile verilen eşitsizlik sağlanmıyor ise bu durumda (4.7) eşitsizliği, 1 e yeteri kadar yakın r sayısı için negatif olur. Böylece (4.7) eşitsizliğini negatif yapan (0,1) açık aralığında $z_0 = r_0$ noktası vardır. Bu durum f_m fonksiyonun $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfına ait olması ile çelişir. O halde (4.5) ile verilen eşitsizlik sağlanmalıdır. Bu ispatı tamamlar. ■

4.3 $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfının ekstrem noktaları

Bu kesimde, $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfının $clco\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ kapalı konveks kabuğunun ekstrem noktalarını belirleyeceğiz.

Teorem 4.3.1

h ve g_m,

$$h(z) = z^p - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1}, \qquad g_m(z) = (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{k+p-1}, \quad |b_p| < 1$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere $f_m = h + \overline{g}_m$ fonksiyonunun $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, f_m fonksiyonunun

$$h_p(z) = z^p$$

$$h_{k+p-1}(z) = z^p - \frac{1}{\Psi(m,n,p,\alpha)} z^{k+p-1}; \qquad (k = 2,3,\ldots)$$

ve

$$g_{m_{k+p-1}}(z) = z^p + (-1)^{m-1} \frac{1}{\Theta(m,n,p,\alpha)} \overline{z}^{k+p-1}; \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

fonksiyonları ile $x_{k+p-1} \geq 0$, $y_{k+p-1} \geq 0$, $x_p = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_{k+p-1} - \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+p-1}$ olmak üzere

$$f_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[x_{k+p-1} h_{k+p-1}(z) + y_{k+p-1} g_{m_{k+p-1}}(z) \right]$$

şeklinde yazılabilmesidir. $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfının ekstrem noktaları $\{h_{k+p-1}\}$ ve $\{g_{k+p-1}\}$ fonksiyonlarıdır.

İspat:

f_m fonksiyonlarının

$$f_m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_{k+p-1}h_{k+p-1}(z)+y_{k+p-1}g_{m_{k+p-1}}(z)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+p-1}+y_{k+p-1})z^p-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\Psi(m,n,p,\alpha)}x_{k+p-1}z^{k+p-1}+(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Theta(m,n,p,\alpha)}y_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Bu durumda f_m fonksiyonuna (4.5) eşitsizliği ile verilen katsayı eşitsizliğini uygularsak,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Psi(m,n,p,\alpha)\left(\frac{1}{\Psi(m,n,p,\alpha)}x_{k+p-1}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\Theta(m,n,p,\alpha)\left(\frac{1}{\Theta(m,n,p,\alpha)}y_{k+p-1}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}x_{k+p-1}+\sum_{k=1}^{\infty}y_{k+p-1}=1-x_p\le 1$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece f_m fonksiyonu $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfına ait olur.

Tersine, eğer $f_m(z)\in\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ ise, bu durumda

$$x_p=1-\sum_{k=2}^{\infty}x_{k+p-1}-\sum_{k=1}^{\infty}y_{k+p-1}$$

alarak,

$$x_{k+p-1}=\Psi(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1},\quad (k=2,3,\ldots)$$

ve

$$y_{k+p-1}=\Theta(m,n,p,\alpha)b_{k+p-1},\ (k=1,2,3,\ldots)$$

ifadelerini yazabiliriz.

Böylece

$$f_m(z) = z^p - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1} + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} \overline{z}^{k+p-1}$$

$$= z^p - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\Psi(m,n,p,\alpha)} x_{k+p-1} z^{k+p-1} + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Theta(m,n,p,\alpha)} y_{k+p-1} \overline{z}^{k+p-1}$$

$$= z^p - \sum_{k=2}^{\infty} \left[z^p - h_{k+p-1}(z) \right] x_{k+p-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[z^p - g_{m_{k+p-1}}(z) \right] y_{k+p-1}$$

$$= \left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_{k+p-1} - \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+p-1} \right] z^p + \sum_{k=2}^{\infty} x_{k+p-1} h_{k+p-1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+p-1} g_{m_{k+p-1}}(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[x_{k+p-1} h_{k+p-1}(z) + y_{k+p-1} g_{m_{k+p-1}}(z) \right]$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. ■

4.4 $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfı için bükülme sınırları

Bu kesimde, $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlar için bükülme sınırlarını vereceğiz.

Teorem 4.4.1

$\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfındaki bir f_m fonksiyonu için

$$\Phi(m,n,p,\alpha) = \frac{1-\alpha}{\left(\frac{p+1}{p}\right)^m - \alpha\left(\frac{p+1}{p}\right)^n},$$

$$\Omega(m,n,p,\alpha) = \frac{1-(-1)^{m-n}\alpha}{\left(\frac{p+1}{p}\right)^m - \alpha\left(\frac{p+1}{p}\right)^n}$$

olmak üzere , $|z| = r < 1$ için

$$\left| f_m(z) \right| \leq (1+b_p)\, r^p + \left\{ \Phi(m,n,p,\alpha) - \Omega(m,n,p,\alpha)\, b_p \right\} r^{n+p} \tag{4.8}$$

ve

$$\left| f_m(z) \right| \geq (1-b_p)\, r^p - \left\{ \Phi(m,n,p,\alpha) - \Omega(m,n,p,\alpha)\, b_p \right\} r^{n+p} \tag{4.9}$$

eşitsizliklerini sağlanır.

İspat:

Teoremin ispatı için (4.8) eşitsizliğini göstermek yeterli olacaktır. (4.9) eşitsizliğinin ispatı benzerdir.

$f_m \in \overline{H_p}(m,n,\alpha)$ fonksiyonunun mutlak değeri alınarak üçgen eşitsizliği ve sonrasında (4.5) ile verilen katsayı eşitsizliği uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
| f_m(z) | &= \left| z^p - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1} + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} \overline{z}^{k+p-1} \right| \\
&\leq r^p + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} r^{k+p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} r^{k+p-1} \\
&= r^p + b_p\, r^p + \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k+p-1} + b_{k+p-1})\, r^{k+p-1} \\
&\leq r^p + b_p\, r^p + \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k+p-1} + b_{k+p-1})\, r^{p+1} \\
&= (1+b_p)\, r^p + \Phi(m,n,p,\alpha) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\Phi(m,n,p,\alpha)} \left(a_{k+p-1} + b_{k+p-1} \right) r^{p+1} \\
&\leq (1+b_p)\, r^p + \Phi(m,n,p,\alpha)\, r^{n+p} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \Psi(m,n,p,\alpha)\, a_{k+p-1} + \Theta(m,n,p,\alpha)\, b_{k+p-1} \right] \\
&\leq (1+b_p)\, r^p + \left\{ \Phi(m,n,p,\alpha) - \Omega(m,n,p,\alpha)\, b_p \right\} r^{n+p}
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

(4.8) eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonucu yazmak mümkündür.

Sonuç 4.4.2

f_m fonksiyonu $\overline{H_p}(m,n,\alpha)$ sınıfına ait olmak üzere

$$\left\{w \ : \ |w|<1-b_p-[\Phi(m,n,p,\alpha)-\Omega(m,n,p,\alpha)b_p] \subset f_m(\Delta)\right\}$$

kapsaması sağlanır.

Not 4.4.3

Bu kesimde verilen teoremlerde $p=1$ alınırsa Yalçın [46] tarafından yapılan çalışmadaki sonuçları ve $m=n+1$, $p=1$ alınırsa Jahangiri, Murugusundaramoorthy ve Vijaya [22] tarafından yapılan çalışmadaki sonuçları elde ederiz.

5. B Ö L Ü M

SÂLÂGEAN–TİPLİ HARMONİK P-KATLI FONKSİYONLARIN YENİ BİR SINIFI

Bu bölümde Sâlâgean-tipli p-katlı harmonik fonksiyonların yeni bir altsınıfını tanımlayıp, bu sınıfın bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Tanımlayacağımız bu sınıfa ait p-katlı harmonik fonksiyonlar için katsayı koşullarını, ekstrem noktalarını ve bükülme sınırlarını elde edeceğiz. Bu bölümde yapılan çalışma yayına gönderilmiş olup halen incelemededir[23].

5.1 Temel Tanımlar

$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ olmak üzere $f = h + \overline{g}$ şeklindeki fonksiyonları alalım. $0 \le \alpha < 1$, $\beta \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$ ve $z \in \Delta$ iken

$$Re\left\{ \frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} \right\} > \beta \left| \frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - 1 \right| + \alpha$$

eşitsizliğini sağlayan $f = h + \overline{g}$ p-katlı harmonik fonksiyonların ailesini $H_p(m,n,\alpha,\beta)$ olarak tanımlayalım.

Bundan başka, h ve g_m fonksiyonları

$$h(z) = z^p - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1}, \qquad g_m(z) = (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{k+p-1}, \quad |b_p| < 1$$

şeklinde tanımlanmak üzere $H_p(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına ait $f_m = h + \overline{g_m}$ fonksiyonlarından oluşan altsınıfı $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ ile tanımlayalım.

$\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ ve $H_p(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfları, harmonik fonksiyonların bazı özel m, n ve β değerleri için daha önceden çalışılmış olan altsınıflarını verir. Örneğin, $\overline{H_1}(1,0,\alpha,0) \equiv S_H^*(\alpha)$ ve $\overline{H_1}(2,1,\alpha,0) \equiv K_H(\alpha)$ eşitlikleri sağlanır. Sâlâgean-tipli harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı $\overline{H}(n,\alpha)$ için $\overline{H_1}(n+1,n,\alpha,0) \equiv \overline{H}(n,\alpha)$ olur.

Bu bölümde, $K_H(\alpha)$ ve $S_H^*(\alpha)$ sınıfları için bilinen katsayı eşitsizliklerini,

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} > \beta\left|\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - 1\right| + \alpha$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların $H_p(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına genişleteceğiz. Ayrıca $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfındaki fonksiyonlar için ekstrem noktaları ve bükülme sınırlarını belirleyeceğiz.

5.2 $H_p(m,n,\alpha,\beta)$ ve $\overline{H}_p(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfları için katsayı eşitsizlikleri

Bu kesimde, $H_p(m,n,\alpha,\beta)$ ve $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıflarındaki fonksiyonlar için bir yeterli katsayı koşulu tanımlayacağız.

Teorem 5.2.1

h ve g_m,

$$h(z) = z^p + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1} \quad , \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{k+p-1} \ , \quad |b_p| < 1, \quad p \geq 1$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunu alalım. Eğer f fonksiyonu, $a_p = 1$, $\alpha\,(0 \leq \alpha < 1)$, $\beta \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $m > n$ iken $\Psi(m,n,p,\alpha,\beta)$ ve $\Theta(m,n,p,\alpha,\beta)$ fonksiyonları

$$\Psi(m,n,p,\alpha,\beta) = \frac{\left(\dfrac{k+p-1}{p}\right)^m (1+\beta) - (\beta+\alpha)\left(\dfrac{k+p-1}{p}\right)^n}{1-\alpha}$$

$$\Theta(m,n,p,\alpha,\beta)=\frac{\left(\dfrac{k+p-1}{p}\right)^{m}(1+\beta)-(-1)^{m-n}\left(\dfrac{k+p-1}{p}\right)^{n}(\beta+\alpha)}{1-\alpha}$$

şeklinde tanımlanmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\Psi(m,n,p,\alpha,\beta)\left|a_{k+p-1}\right|+\Theta(m,n,p,\alpha,\beta)\left|b_{k+p-1}\right|\right\}\leq 2 \tag{5.1}$$

eşitsizliğini sağlarsa, bu durumda $f\in H_p(m,n,\alpha,\beta)$ olur.

İspat:

Teoremi ispatlamak için,

$$Re\left(\frac{D^m f(z)-\alpha D^n f(z)-\beta e^{i\theta}\,|\,D^m f(z)-D^n f(z)|}{D^n f(z)}\right)\geq 0$$

eşitsizliğini göstermek yeterli olacaktır. İşlem sadeliği açısından

$$K(m,n,p,\alpha)=\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-\alpha\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}$$

$$M(m,n,p,\alpha)=\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-(-1)^{m-n}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}\alpha\,,$$

$$R(m,n,p,\alpha)=\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n},$$

$$S(m,n,p,\alpha)=\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{m}-(-1)^{m-n}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^{n}$$

şeklinde alalım.

$r=0$ olduğu durum açıktır. Şimdi $0<r<1$ için eşitsizliği göstermeye çalışalım. $D^n f(z)$ ve $D^m f(z)$ değerleri, verilen eşitsizlikte yerlerine yazılırsa

$$Re\left(\frac{D^m f(z)-\alpha D^n f(z)-\beta e^{i\theta}\left|D^m f(z)-D^n f(z)\right|}{D^n f(z)}\right)$$

$$= Re\left\{\frac{(1-\alpha)z^p+\sum_{k=2}^{\infty}K(m,n,p,\alpha)\,a_{k+p-1}z^{k+p-1}+(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}M(m,n,p,\alpha)\,\overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}{z^p+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k+p-1}+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n \overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}\right.$$

$$\left.-\frac{\beta e^{i\theta}\left|\sum_{k=2}^{\infty}R(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1}z^{k+p-1}+(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}S(m,n,p,\alpha)\overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}\right|}{z^p+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k+p-1}+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n \overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}\right\}$$

$$= Re\left\{\frac{(1-\alpha)+\sum_{k=2}^{\infty}K(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1}z^{k-1}+(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}M(m,n,p,\alpha)\,\overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}z^{-p}}{1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k-1}+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n \overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}z^{-p}}\right.$$

$$\left.-\frac{\beta e^{i\theta}z^{-p}\left|\sum_{k=2}^{\infty}R(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1}z^{k+p-1}+(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}S(m,n,p,\alpha)\,\overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}\right|}{1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k-1}+(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n \overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}z^{-p}}\right\}$$

elde edilir.

Burada sadelik açısından $z = re^{i\theta}$ için

$$T(m,n,p,\alpha) = \left| \sum_{k=2}^{\infty} R(m,n,p,\alpha) a_{k+p-1} r^{k-1} e^{-(k+p-1)i\theta} + (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} S(m,n,p,\alpha) \overline{b}_{k+p-1} r^{k-1} e^{-(k+p-1)i\theta} \right|$$

olmak üzere

$$A(re^{i\theta}) = \sum_{k=2}^{\infty} K(m,n,p,\alpha) a_{k+p-1} r^{k-1} e^{(k-1)\theta i} + (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} M(m,n,p,\alpha) \overline{b}_{k+p-1} r^{k-1} e^{-(k+2p-1)\theta i}$$

$$-\beta e^{-(p-1)i\theta} T(m,n,p,\alpha)$$

$$B(re^{i\theta}) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k+p-1}{p} \right)^n a_{k+p-1} r^{k-1} e^{(k-1)\theta i} + (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+p-1}{p} \right)^n \overline{b}_{k+p-1} r^{k-1} e^{-(k+2p-1)\theta i}$$

alınırsa,

$$Re\left(\frac{D^m f(z) - \alpha D^n f(z)}{D^n f(z)} \right) = Re\left[\frac{(1-\alpha) + A(z)}{1 + B(z)} \right]$$

eşitliğini elde ederiz.

Pozitif gerçel kısma sahip her fonksiyonun, $\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna subordine olduğundan, uygun düzenlemeler ile

$$\frac{(1-\alpha) + A(z)}{1 + B(z)} \prec (1-\alpha) \frac{1+z}{1-z}$$

subordinasyonunu yazmak mümkündür. Diğer bir deyişle

$$\frac{(1-\alpha) + A(z)}{1 + B(z)} = (1-\alpha) \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

olacak şekilde $|w(z)| < 1$ ve $w(0) = 0$ koşullarını sağlayan analitik bir w fonksiyonu vardır. Gerçekten de, subordinasyondan elde ettiğimiz yukarıdaki eşitliği $w(z)$ fonksiyonuna göre düzenleyerek, gerekli basit matematiksel hesaplamalar yapılırsa,

$$C(m,n,p,\alpha)=\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m+(1-2\alpha)\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n$$

ve

$$D(m,n,p,\alpha)=\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m+(-1)^{m-n}(1-2\alpha)\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n$$

olmak üzere,

$$|w(z)|=\left|\frac{A(z)-(1-\alpha)B(z)}{A(z)+(1-\alpha)B(z)+2(1-\alpha)}\right|$$

$$=\frac{\sum_{k=2}^{\infty}R(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1}r^{k-1}e^{(k-1)i\theta}+(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}S(m,n,p,\alpha)\overline{b}_{k+p-1}r^{k-1}e^{-(k+2p-1)\theta i}-\beta e^{-(p-1)i\theta}T(m,n,p,\alpha)}{2(1-\alpha)+\sum_{k=2}^{\infty}C(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1}r^{k-1}e^{(k-1)i\theta}+(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}D(m,n,p,\alpha)\overline{b}_{k+p-1}r^{k-1}e^{-(k+2p-1)\theta i}-\beta e^{-(p-1)i\theta}T(m,n,p,\alpha)}$$

$$\leq\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+\beta)R(m,n,p,\alpha)|a_{k+p-1}|+(1+\beta)S(m,n,p,\alpha)|b_{k+p-1}|\right]r^{k-1}}{4(1-\alpha)-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m(1+\beta)-\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n(\beta+2\alpha-1)\right]|a_{k+p-1}|+\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m(1+\beta)-(-1)^{m-n}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n(\beta+2\alpha-1)\right]|b_{k+p-1}|\right\}r^{k-1}}$$

$$<\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+\beta)R(m,n,p,\alpha)|a_{k+p-1}|+(1+\beta)S(m,n,p,\alpha)|b_{k+p-1}|\right]}{4(1-\alpha)-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m(1+\beta)-\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n(\beta+2\alpha-1)\right]|a_{k+p-1}|+\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m(1+\beta)-(-1)^{m-n}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n(\beta+2\alpha-1)\right]|b_{k+p-1}|\right\}}$$

bulunur. Teoremde verilen (5.1) eşitsizliğinden yararlanarak, bu son ifadenin üstten 1 ile sınırlı olduğu, yani $|w(z)|<1$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Böylece ispat tamamlanır. ■

$m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$ $0 \le \alpha < 1$, $\beta \ge 0$ ve $\sum_{k=2}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = 1$ olmak üzere

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n} x_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n} \overline{y_k z^k} \quad (5.2)$$

p-katlı harmonik fonksiyonları, (5.1) eşitsizliği ile verilen katsayı sınırının kesin olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\Psi(m,n,p,\alpha,\beta) \left| a_{k+p-1} \right| + \Theta(m,n,p,\alpha,\beta) \left| b_{k+p-1} \right| \right] = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = 2$$

olacağından, (5.2) ile verilen fonksiyonlar $H_p(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına aittir.

Aşağıdaki teorem, h ve g_m (4.1) ile verilen fonksiyonlar olmak üzere, (5.1) eşitsizliğinin $f_m = h + \overline{g}_m$ şeklindeki fonksiyonların $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfında olması için gerekli koşul olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.2

h ve g_m,

$$h(z) = z^p - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1}, \qquad g_m(z) = (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{k+p-1}, \quad |b_p| < 1$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere $f_m = h + \overline{g}_m$ fonksiyonunun $a_p = 1$, $0 \le \alpha < 1$, $\beta \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $m > n$ olmak üzere $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\Psi(m,n,p,\alpha,\beta) \left| a_{k+p-1} \right| + \Theta(m,n,p,\alpha,\beta) \left| b_{k+p-1} \right| \right] \le 2 \quad (5.3)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır.

İspat:

$\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta) \subset H_p(m,n,\alpha,\beta)$ olduğundan, teoremin sadece yeterlilik kısmını ispatlamalıyız. f_m fonksiyonları için

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} > \beta\left|\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - 1\right| + \alpha.$$

ile verilen koşul

$$Re\left\{\frac{(1-\alpha)z^p - \sum_{k=2}^{\infty} K(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1}z^{k+p-1} + (-1)^{2m-1}\sum_{k=1}^{\infty} M(m,n,p,\alpha)b_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}{z^p - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k+p-1} + (-1)^{m+n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n b_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}\right.$$

$$\left.-\frac{\beta e^{i\theta}\left|-\sum_{k=2}^{\infty} R(m,n,p,\alpha)a_{k+p-1}z^{k+p-1} + (-1)^{2m-1}\sum_{k=1}^{\infty} S(m,n,p,\alpha)\overline{b}_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}\right|}{z^p - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}z^{k+p-1} + (-1)^{m+n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n b_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}}\right\} \geq 0 \qquad (5.4)$$

eşitsizliğine denktir. $0 \leq z = r < 1$ olmak üzere pozitif gerçel eksen üzerindeki z noktaları seçilerek

$$\frac{(1-\alpha) - \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m (1+\beta) - (\beta+\alpha)\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n\right]a_{k+p-1}r^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}r^{k-1} - (-1)^{m-n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n b_{k+p-1}r^{k+p-1}}$$

$$+\frac{-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^m (1+\beta) - (-1)^{m-n}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n (\beta+\alpha)\right]b_{k+p-1}r^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n a_{k+p-1}r^{k-1} - (-1)^{m-n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^n b_{k+p-1}r^{k-1}} \geq 0 \qquad (5.5)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer (5.4) ile verilen eşitsizlik sağlanmıyor ise bu durumda (5.5) eşitsizliği, 1 e yeteri kadar yakın r sayısı için negatif olur. Böylece (5.5) eşitsizliğini negatif yapan (0,1) açık aralığında $z_0 = r_0$ noktası vardır. Bu durum f_m fonksiyonun $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına ait olması ile çelişir. O halde (5.4) ile verilen eşitsizlik sağlanmalıdır. Bu ispatı tamamlar. ■

5.3 $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının ekstrem noktaları

Bu kesimde, $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının $clco\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ kapalı konveks kabuğunun ekstrem noktalarını belirleyeceğiz.

Teorem 5.3.1

h ve g_m,

$$h(z) = z^p - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1}, \qquad g_m(z) = (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{k+p-1}, \quad |b_p| < 1$$

ile verilen fonksiyonlar olmak üzere $f_m = h + \overline{g}_m$ fonksiyonunun $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul, f_m fonksiyonunun

$$h_p(z) = z^p,$$

$$h_{k+p-1}(z) = z^p - \frac{1}{\Psi(m,n,p,\alpha,\beta)} z^{k+p-1}; \qquad (k = 2,3,\ldots)$$

ve

$$g_{m_{k+p-1}}(z) = z^p + (-1)^{m-1} \frac{1}{\Theta(m,n,p,\alpha,\beta)} \overline{z}^{k+p-1}; \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

fonksiyonları ile $x_{k+p-1} \geq 0$, $y_{k+p-1} \geq 0$ ve $x_p = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_{k+p-1} - \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+p-1}$ olmak üzere,

$$f_m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_{k+p-1}h_{k+p-1}(z)+y_{k+p-1}g_{m_{k+p-1}}(z)\right]$$

şeklinde yazılabilmesidir. $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfının ekstrem noktaları $\{h_{k+p-1}\}$ ve $\{g_{k+p-1}\}$ fonksiyonlarıdır.

İspat:

f_m fonksiyonlarının

$$f_m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_{k+p-1}h_{k+p-1}(z)+(y_{k+p-1}g_{m_{k+p-1}}(z)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+p-1}+y_{k+p-1})z^p-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\Psi(m,n,p,\alpha,\beta)}x_{k+p-1}z^{k+p-1}$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Theta(m,n,p,\alpha,\beta)}y_{k+p-1}\overline{z}^{k+p-1}$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Bu durumda f_m fonksiyonuna katsayı eşitsizliğini uygularsak,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Psi(m,n,p,\alpha,\beta)\left(\frac{1}{\Psi(m,n,p,\alpha,\beta)}x_{k+p-1}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\Theta(m,n,p,\alpha,\beta)\left(\frac{1}{\Theta(m,n,p,\alpha,\beta)}y_{k+p-1}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}x_{k+p-1}+\sum_{k=1}^{\infty}y_{k+p-1}$$

$$=1-x_p$$

$$\leq 1$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece f_m fonksiyonu $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına ait olur.

Tersine, eğer $f_m(z) \in \overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ ise bu durumda

$$x_p = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_{k+p-1} - \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+p-1}$$

alarak,

$$x_{k+p-1} = \Psi(m,n,p,\alpha,\beta)\, a_{k+p-1}, \quad (k = 2,3,\ldots)$$

ve

$$y_{k+p-1} = \Theta(m,n,p,\alpha,\beta)\, b_{k+p-1}, \quad (k = 1,2,3,\ldots)$$

ifadelerini yazabiliriz. Böylece

$$f_m = z^p - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1} + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} z^{-k+p-1}$$

$$= z^p - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\Psi(m,n,p,\alpha,\beta)} x_{k+p-1} z^{k+p-1} + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Theta(m,n,p,\alpha,\beta)} y_{k+p-1} \overline{z}^{k+p-1}$$

$$= z^p - \sum_{k=2}^{\infty} \left[z^p - h_{k+p-1}(z) \right] x_{k+p-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[z^p - g_{m_{k+p-1}}(z) \right] y_{k+p-1}$$

$$= \left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_{k+p-1} - \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+p-1} \right] z^p + \sum_{k=2}^{\infty} x_{k+p-1} h_{k+p-1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+p-1} g_{m_{k+p-1}}(z)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[x_{k+p-1} h_{k+p-1}(z) + y_{k+p-1} g_{m_{k+p-1}}(z) \right]$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. ■

5.4 $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfı için bükülme sınırları

Bu kesimde, $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfındaki fonksiyonlar için bükülme sınırlarını vereceğiz.

Teorem 5.4.1

$\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfındaki bir f_m fonksiyonu için

$$\Phi(m,n,p,\alpha,\beta)=\frac{1-\alpha}{\left(\frac{p+1}{p}\right)^m(1+\beta)-\left(\frac{p+1}{p}\right)^n(\beta+\alpha)}$$

$$\Omega(m,n,p,\alpha,\beta)=\frac{(1+\beta)-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)}{\left(\frac{p+1}{p}\right)^m(1+\beta)-\left(\frac{p+1}{p}\right)^n(\beta+\alpha)}$$

olmak üzere , $|z|=r<1$ için

$$\left|f_m(z)\right|\le(1+b_p)r^p+\left[\Phi(m,n,p,\alpha,\beta)-\Omega(m,n,p,\alpha,\beta)b_p\right]r^{n+p} \qquad (5.6)$$

ve

$$\left|f_m(z)\right|\ge(1-b_p)r^p-\left\{\Phi(m,n,p,\alpha,\beta)-\Omega(m,n,p,\alpha,\beta)b_p\right\}r^{n+p} \qquad (5.7)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

Teoremin ispatı için (5.6) eşitsizliğini göstermek yeterli olacaktır. (5.7) eşitsizliğinin ispatı benzerdir.

$f_m \in \overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ fonksiyonunun mutlak değeri alınarak üçgen eşitsizliği ve sonrasında (5.3) ile verilen katsayı eşitsizliği uygulanırsa,

$$| f_m(z) | = \left| z^p - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} z^{k+p-1} + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} \overline{z}^{k+p-1} \right|$$

$$\leq r^p + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k+p-1} r^{k+p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p-1} r^{k+p-1}$$

$$= r^p + b_p r^p + \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k+p-1} + b_{k+p-1}) r^{k+p-1}$$

$$\leq r^p + b_p r^p + \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k+p-1} + b_{k+p-1}) r^{p+1}$$

$$= (1+b_p) r^p + \Phi(m,n,p,\alpha,\beta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\Phi(m,n,p,\alpha,\beta)} \left(a_{k+p-1} + b_{k+p-1} \right) r^{p+1}$$

$$\leq (1+b_p) r^p + \Phi(m,n,p,\alpha,\beta) r^{n+p} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \Psi(m,n,p,\alpha,\beta) a_{k+p-1} + \Theta(m,n,p,\alpha,\beta) b_{k+p-1} \right]$$

$$\leq (1+b_p) r^p + \left[\Phi(m,n,p,\alpha,\beta) - \Omega(m,n,p,\alpha,\beta) b_p \right] r^{n+p}$$

elde edilir. ■

(5.6) eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonucu yazmak mümkündür.

Sonuç 5.4.2

f_m fonksiyonu $\overline{H_p}(m,n,\alpha,\beta)$ sınıfına ait olmak üzere

$$\left\{ w \ : \ |w| < 1 - b_p - [\Phi(m,n,p,\alpha,\beta) - \Omega(m,n,p,\alpha,\beta) b_p] \subset f_m(\Delta) \right\}$$

kapsaması sağlanır.

Not 5.4.3

Bu kesimde verilen teoremlerde, $p=1$, $\beta=0$ alınırsa Yalçın [46] tarafından yapılan çalışmadaki sonuçları, $m=n+1$, $\beta=0$ ve $p=1$ alınırsa Jahangiri, Murugusundaramoorthy ve Vijaya [22] tarafından yapılan çalışmadaki sonuçları elde ederiz. Ayrıca $p=1$ alınması durumunda 3. Bölümde verdiğimiz sonuçları elde ederiz.

KAYNAKLAR

[1] AHLFORS, L.V., *Complex Analysis*, Third Edition., Mcgraw-Hill, New York, 1979

[2] AHLFORS, L.V., *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1966

[3] AHUJA O.P., JAHANGIRI J.M., *Multivalent harmonic starlike functions*, Ann.Univ.Marie Curie-Sklodowska Sect.A, **LV 1** (2001), 1-13.

[4] ALEXANDER, J.W., *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions,* Ann. of Math*.,* **17** (1915), 12-22

[5] AVCI Y., ZLOTKIEWICZ E., *On harmonic Univalent mappings*, Ann. Univ. Marie Cruie-Sklodowska Sect.A, **44** (1991), 1-7.

[6] BIEBERBACH, L., *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welcheeine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln,* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. (1916) pp. 940–955

[7] BRANGES, L.de., *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. **154** (1985), 137-152

[8] CLUNIE J., SHEIL-SMALL T., *Harmonic Univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math , **9** (1984), 3-25.

[9] DUREN P., *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambride University Press, 2004.

[10] DUREN P., *Univalent Functions,* Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[11] DUREN P., HENGARTNER W., LAUGESEN R.S., *The argument principle for harmonic functions,* Amer. Math. Monthly, **103** (1996), 411-415.

[12] GOODMAN, A.W., *Univalent Functions, Vols. I and II,* Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 1983

[13] GOODMAN, A.W., SAFF E.B., *On univalent functions convex in one direction,* Proc. Amer. Math. Soc. **73** (1979), 183-187.

[14] HEINZ E., *On one-to-one harmonic mappings,* Pacific J. Math. **9**(1959), 101-105.

[15] HENGARTNER W., SCHOBER G., *On schlicht mappings to domains convex in one direction*, Comm. Math. Helv. **45** (1970), 303-314.

[16] HENGARTNER W., SCHOBER G., *A remark on level curves for domains convex in one direction,* Appl. Analysis **3** (1973), 101-106.

[17] HENGARTNER W., SCHOBER G., *Univalent harmonic mappings onto parallel slit domains,* Michigan Math. J. **32** (1985), 131-134

[18] HENGARTNER W., SCHOBER G., *On the boundary behavior of orientation-preserving harmonic mappings,* Complex Variables Theory Appl. **5** (1986), 197-208.

[19] HENGARTNER W., SCHOBER G., *Harmonic mappings with given dilatation*, J. London Math. Soc. **33** (1986), 473-483.

[20] HENGARTNER W., SCHOBER G., *Univalent harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **299** (1987), 1-31.

[21] JAHANGIRI J.M., *Harmonic functions starlike in the unit disc*, J. Math. Anal. Appl., **235** (1999), 470-477.

[22] JAHANGIRI J.M., MURUGUSUNDARAMOORTHY G. and VIJAYA K., *Salagean-type harmonic univalent functions*, South. J. Pure Appl.Math., **2** (2002), 77-82.

[23] JAHANGIRI J.M., ŞEKER B. and SÜMER EKER S., *Salagean-Type Harmonic Multivalent Functions*, (to appear)

[24] KAPLAN, W., *Close-to-convex schlicht functions,* Michigan Math.J., **1**, (1952), 169-185

[25] KOEBE, P., *Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven*, Nach. Ges. Wiss. Gottingen (1907) 191-210

[26] KREIN, M., MILMAN, D. , *On extreme points of regular convex sets*, Studia Mathematica **9** (1940) 133–138

[27] KRZYZ, J., *The radius of close-to convexity within the family of univalent functions,* Bull.Acad.Polon.Sci.,**10** (1962), 201-204

[28] LEHTO O., VIRTANEN K.I., Quasiconformal mappings in the plane, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Newyork, 1973.

[29] LEWY H., *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42**(1936), 689-692.

[30] LEWY H., *On the non-vanishing of the Jacobian of a homeomorphism by harmonic gradients mappings*, Ann. of Math. **88** (1968), 518-529.

[31] NUNOKAWA M., *On the Theory of Multivalent Functions*, Tsukuba J. Math. Vol.11 No.2 (1987), 273-286.

[32] OWA S., *On Nunokawa's conjecture for multivalent functions,* Bull. Austral. Math.Soc., **41**, 301-305 (1990)

[33] POMMERENKE, CH., Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1973.

[34] PONNUSAMY S., RASILA A., *Planar Harmonic Mappings,* Mathematics Newsletter., **17** (2007), 40-57

[35] RADO T., *Über den analytischen Charakter der Minimalflachen,* Math. Z. **24** (1926), 321-327.

[36] ROBERTSON, M.S., *On the theory of univalent functions*, Ann. of Math. **37** (1936), 374–408.

[37] ROBERTSON, M.S., *Analytic functions star-like in one direction*, Amer. J. Math. **58** (1936), 456-472

[38] ROYSTER W.C., ZEIGLER M., *Univalent functions convex in one direction*, Publ. Math. Debrecen, **23** (1976), 339-345.

[39] RUSCHEWEYH ST., SALINAS L., *On the preservation of direction-convexity and the Goodman-Saff conjecture,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A.I.Math, **14** (1989), 63-73.

[40] SALAGEAN G.S., *Subclass of univalent functions,* Complex analysis-Fifth Romanian Finish Seminar, Bucharest, **1** (1983), 362-372.

[41] SEKER B., SÜMER EKER S., *A New class of Salagean-Type Harmonic Univalent Functions* (to appear)

[42] SEKER B., SÜMER EKER S., *On Salagean-type harmonic multivalent functions*, General Mathematics **15** (2007), no. 2, 52–63

[43] SHEIL-SMALL T., *Constants for planar harmonic mappings*, J. London Math. Soc. **42** (1990) 237-248.

[44] SILVERMAN H. , *Harmonic univalent functions with negative coefficients*, J.Math.Anal.Appl. **220** (1998) , 283-289.

[45] SILVERMAN H. and SILVIA E.M. , *Subclasses of harmonic univalent functions*, New Zealand J. Math. **28** (1999), 275-284.

[46] YALÇIN S., *A new class of salagean-type harmonic univalent functions*, Applied Mathematics Letters, Vol.18, **2** (2005), 191-198.

SİMGELER

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	:	Gerçel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	:	Karmaşık Sayılar Kümesi
Δ	:	$\{\, z : \lvert z\rvert < 1 \,\}$, Birim disk
$E(C)$	:	C kümesinin tüm ekstrem noktalarının kümesi
$H(M)$	:	Kapalı konveks örtüsü (konveks hull) $(cl(coM))$
$H\ (E(C))$	:	C kümesinin ekstrem noktalarının kapalı konveks örtüsü
CHD	:	Yatay yönde konveks bölge
$k(z)$	:	$\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe Fonksiyonu
$K = h + \overline{g}$	:	Harmonik Koebe Fonksiyonu
$L(f, g)$	:	Bir vektör uzayında f ve g yi birleştiren doğru parçası
$l(z)$	:	$\dfrac{z}{1-z}$
$L(z)$	:	$\operatorname{Re}\{l(z)\} + i \operatorname{Im}\{k(z)\}$
ζ	:	$\dfrac{1+z}{1-z} = \xi + i\eta$ Cayley dönüşümü
$f(z) \prec F(z)$	:	$f(z)$, $F(z)$ ye subordine
$D^m f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun m. mertebeden Sâlâgean türevi
Δu	:	u fonksiyonunun Laplasiyeni
$g \circ f$	:	g ile f fonksiyonun bileşkesi
$\operatorname{Re}(f)$	:	f fonksiyonunun reel kısmı

$\mathrm{Im}(f)$	: f fonksiyonunun imajiner kısmı
f_z	: f fonksiyonunun z karmaşık değişkenine göre kısmi türevi
J_f	: f fonksiyonunun jakobiyeni
D_f	: f fonksiyonunun dilatasyonu
μ_f	: f fonksiyonunun birinci dilatasyonu
$\omega = \nu_f$	: f fonksiyonunun ikinci dilatasyonu
$f_1 * f_2$	: f_1 ile f_2 fonksiyonun konvolüasyonu
A	: Δ diskinde analitik, $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}$	: Δ diskinde analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{P}$	: Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
K	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	: α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$K(\alpha)$	: α mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{C}$	: Konvekse-yakın fonksiyonlar sınıfı
$A(p)$	: $a_p \neq 0$, $p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ olmak üzere, $\lvert z \rvert < 1$ birim diskinde analitik olan $f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_p^*$	: $A(p)$ sınıfına ait p-katlı yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
K_{p}	: $A(p)$ sınıfına ait p-katlı konveks fonksiyonlar sınıfı
C_p	: $A(p)$ sınıfına ait p-katlı konvekse-yakın fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_p^*(\alpha)$	: α-mertebeli p-katlı yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$K_p(\alpha)$: α-mertebeli p-katlı konveks fonksiyonlar sınıfı

$C_p(\alpha)$: α mertebeli p-katlı konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı

$C^2(D)$: D bölgesinde birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonların sınıfı

S_H : $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ve $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ olmak üzere Δ diski üzerinde tüm harmonik, karmaşık değerli, yön koruyan, normalize edilmiş ve yalınkat $f = h + \overline{g}$ fonksiyonların sınıfı

S_H^0 : $g'(0) = b_1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş fonksiyonlar sınıfı

K_H : Harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı

K_H^0 : $g'(0) = b_1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı

C_H : Harmonik konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı

C_H^0 : $g'(0) = b_1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş harmonik konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı

S_H^* : Harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

S_H^{*0} : $g'(0) = b_1 = 0$ koşulu ile normalize edilmiş harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$K_H(\alpha)$: α mertebeli harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı

$S_H^*(\alpha)$: α mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$H(p)$: Δ diskinde p-katlı harmonik ve yön koruyan fonksiyonların sınıfı

$K_H(p)$: p-katlı harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı

$S_H^*(p)$: p-katlı harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$K_H(p,\alpha)$: α mertebeli p-katlı harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı

$S_H^*(p,\alpha)$: α mertebeli p-katlı harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\overline{H}(n,\alpha)$: Sâlâgean-tipli harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı

D İ Z İ N

Y

Ö Z G E Ç M İ Ş

Adı ve Soyadı : Bilal ŞEKER
Doğum Tarihi : 07.05.1980
Doğum Yeri : Uzundere
Medeni Hali : Bekâr
Ünvanı : Öğretim Görevlisi
Üniversite : Dicle Üniversitesi
Fakülte : Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü : Matematik Bölümü
Anabilim Dalı : Uygulamalı Matematik

EĞİTİMİ

İlk Öğretim : Mehmet Akif İlköğretim Okulu 1985-1990
Orta Öğretim : Yahya Kemal Beyatlı Ortaokulu 1990-1993
Lise : Yahya Kemal Beyatlı Lisesi 1993–1996
Lisans : Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü 1996–2000
Yüksek Lisans : Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim dalı 2000–2003
Çalıştığı Kurumlar : Milli Eğitim Bakanlığı Yavuz Selim İlköğretim 2000–2002
Milli Eğitim Bakanlığı Yahya Kemal Beyatlı Lisesi 2002-2007
Dicle Üniversitesi Fen-Edb. Fakültesi Matematik Bölümü 2007-

ADRES

İş : Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat. Fakültesi Matematik Bölümü
Ev : İluh Mahallesi 619 Sokak No:2 BATMAN
E-mail : bseker@dicle.edu.tr