T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

KOMPLEKS MERTEBELİ SALAGEAN TİPLİ HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR ÜZERİNE

GÜLBAHAR BAYKARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR

HAZİRAN-2008

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Gülbahar BAYKARA tarafından yapılan "Kompleks Mertebeli Salagean Tipli Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar Üzerine" konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Doç.Dr.	H.Özlem GÜNEY (Danışman)
Üye :	Prof.Dr.	Muhammet KAMALİ
Üye :	Prof. Dr.	Sezai OĞRAŞ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 03 / 07 / 2008

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2008

Prof. Dr. Necmettin PİRİNÇÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Öğrencisi olduğum için kendimi ayrıcalıklı bulduğum, her konuda desteğini hep yanımda hisettiğim değerli danışman hocam,

Doç.Dr. H.Özlem GÜNEY'e

Yüksek Lisans Öğrenimim boyunca araştırmalarımda bana yardımcı olan sayın

Prof. Dr. Om P. AHUJA'ya

Tezin yazımı aşamasında hep yanımda olan, benden hiçbir yardımı esirgemeyen sevgili eşim ***Orhan BAYKARA'ya***

Yaşamım boyunca benden esirgemedikleri sevgi, anlayış ve güvenle kendimi gerçekleştirmeme fırsat veren ve desteklerini her zaman hissettiğim sevgili ***anneme ve babama***

Son olarak bu çalışmayı 06-FF-80 nolu projeyle destekleyen Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu - ***DÜBAP***' a katkılarından dolayı,

Sonsuz Teşekkürler…

Gülbahar BAYKARA

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Bu çalışmanın amacı, günümüzde hâlâ açık bir problem olarak kalan harmonik yalınkat fonksiyonların S_H sınıfının yeni bir alt sınıfını tanımlayarak bu alt sınıf için gerekli olan bazı önemli özellikleri ispatlamaktır.

Diğer bir amacımız ise, özellikle analitik ve harmonik fonksiyonlar arasında bir karşılaştırma yapmaktır.

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Çalışmamızın temel taşı olan yalınkat fonksiyonlarla ilgili birtakım önemli tanımlar, teoremler ve bunların sonuçları verilmektedir.

İkinci bölümde; Harmonik fonksiyonların tanımı ve ilgili önemli teoremler verilerek üçüncü bölüm için bir taban oluşturulmaktadır.

Üçüncü bölümde; Gereksiz tekrarlardan kaçınmak ve konunun bütünlüğünü bozmamak amacıyla, ispatlar için doğrudan ulaşılabilecek kaynak gösterilmesi yoluyla konumuz ile ilgili daha önce yapılmış olan çalışmalara yer verilmektedir.

Çalışmamızın esas kısmını oluşturan *dördüncü bölümde* ise, Kompleks mertebeli Salagean tipli harmonik yalınkat fonksiyonların yeni bir sınıfı tanımlanmaktadır. Ayrıca bu sınıf ile ilgili Katsayı tahmini, ekstreme noktaları… verilmektedir.

ABSTRACT

This work consist of four chapters.

İn the first chapter, some important definitions, theorems, these associated with univalent functions which consist of main part of our study are given.

İn the second chapter, by giving the definition of harmonic functions and theorems connected them, a bas efor third chapter is formed.

İn the third chapter, by the aim to avoid unnecesarry repeats and not to damage the completeness of topics, to be straighford word obtained references are prefered.

İn the fourd chapter, which consistof the main part of our study, a new subclasses of salagean type harmonic univalent functions is defined. Furthermore, coefficient estimates, extreme points… are calculated.

SEMBOLLER

N	: Doğal Sayılar Kümesi
N_0	: $N \cup \{0\}$
R	: Gerçel Sayılar Kümesi
C	: Karmaşık Sayılar Kümesi
U	: Birim disk
$f(U)$	: U nun f altındaki görüntüsü
f_z	: f nin z ye göre türevi
$\overline{g}$	: g nin eşleniği
$\operatorname{Im} f$	: f nin imajiner kısmı
$\operatorname{Re} f$	: f nin reel kısmı
∂U	: U nun sınırı
S	: Normalleştirilmiş Yalınkat Fonksiyonların Sınıfı
S^*	: Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı
K_H	: Harmonik Konveks Fonksiyonlar
S_H^*	: Harmonik Yıldızıl Fonksiyonlar
$f \prec g$	: f fonksiyonu g Fonksiyonuna Subordine
$k-UCV$	: $k-$ düzgün konveks fonksiyonların sınıfı
$k-ST$	: $k-$ yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$k-UCV(\alpha)$	: α mertebeli $k-$ düzgün konveks fonksiyonların sınıfı
$k-ST(\alpha)$	: α mertebeli $k-$ yıldızıl fonksiyonların sınıfı

GİRİŞ

Karmaşık Analizin, amaçlarından biri fonksiyonun analitik özellikleri ile analitik bir fonksiyonun görüntüsünün geometrik özellikleri arasındaki bağıntıyı anlatmak olan, Geometrik Fonksiyonlar Kuramıdır. Daha sonra ise diferansiyel geometriciler tarafından keşfedilen Harmonik Fonksiyonlar üzerine çalışmaktır. Harmonik fonksiyon demek, reel ve imajiner kısımlarının eşlenik olması gerekmeyen karmaşık değerli fonksiyonlardır. Harmonik fonksiyonlar konformal dönüşümlerin genelleştirilmişidir ve harmonik fonksiyonlar karmaşık analizde ilk olarak 1980 yılında dikkat çekmiştir.

Harmonik Dönüşümler teorisinin gelişimi iki aşamadan oluşmaktadır. İlk olarak 1920 yılında minimal yüzeylerin kutup noktaları için Diferansiyel Geometriciler tarafından çalışılmış ve Gauss eğrilik gibi minimal yüzeylerin özellikleri harmonik dönüşümler de etkili olmuştur. *Tibor Rado, Lipmon Bers, Erhard Heinz, Johannes Nitsche* ve diğerleri harmonik dönüşümler ile minimal yüzeyler arasındaki bağlantıya 1960 yılndan önce katkıda bulunmuştur.

Son zamanlarda Kompleks Analizciler Konformal dönüşümlerin genelleştirilmişi olarak bilinen harmonik dönüşümlerle ilgilenmişlerdir. İlk olarak 1984 yılında *James Clunie ve Terry Sheil-Small* ilgilenmişlerdir. *Clunie ve Sheil-Small* genişletilmiş tahminlerin kesin sonuçlarını bulmamalarına rağmen klasik olan büyüme, bükülme, katsayı tahminleri geliştirmişlerdir. Ayrıca klasik Koebe fonksiyonunun extreme değerleriyle oynayarak Harmonik Koebe fonksiyonunu elde ettiler. Bu sonuçlar bazı özel geometrik özelliklerle harmonik dönüşümler için doğrulanmıştır. Böylece *Clunie ve Sheil-Small* diğer Kompleks analizcilerin dikkatlerini çekmiştir ve harmonik dönüşüm araştırmalarında etkili olmuştur.

Teorinin diğer bir yönü Riemann dönüşüm teoremi için uygun araştırmalar yapmaktır. Buradaki amaç kısmi türevli eşitlikler ve hemen hemen konformal dönüşümlerin gelişimine katkıda bulunmaktır. 1980 yılında *Hengartner* ve *Glenn Schober* bunlarla ilgili makaleler yazmışlardır. Hemen hemen konformal dönüşümler hakkındaki standart sonuçlar, özellikle *Beltrami* denkleminin bir çözümü olan hemen hemen konformal homeomorfizması için Riemann teoreminin genişletilmişini öne sürmüşlerdir.

1.BÖLÜM

YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde yalınkat fonksiyonlar ile ilgili birtakım önemli tanımlar, teoremler ve bunların sonuçları verilmektedir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Karmaşık düzlemde bir bölge, açık bağlantılı bir kümedir. Herhangi bir D bölgesinde ve en fazla bir kutup noktası hariç tüm düzlemde analitik bir f fonksiyonu için, z_1, $z_2 \in D$ olmak üzere,

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

önermesi doğru oluyorsa, f fonksiyonuna D bölgesinde ***yalınkattır*** denir. D bölgesindeki yalınkatlık doğal olarak D bölgesinin her alt bölgesinde de sağlanır. Bir D bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu , bir $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda yalınkat ise bu f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında ***yerel yalınkat fonksiyon*** denir. Bir bölgede yerel yalınkat olan bir analitik fonksiyon yalınkat olmayabilir.

Analitik yalınkat bir fonksiyon eğriler arasındaki açıyı koruduğundan dolayı *konformal dönüşüm* olarak bilinmektedir.

Riemann dönüşüm teoremi her basit bağlantılı $D \subset C$, $D \neq C$ ve $\zeta \in D$ keyfi noktası için $f(\zeta) = 0$ ve $f'(\zeta) > 0$ koşullarıyla D'yi birim disk olan U'ya dönüştüren bir tek konformal dönüşümün olduğunu ileri sürer. Riemann Dönüşüm teoremine göre, karmaşık düzlemde herhangi basit bağlantılı bir bölge yerine açık birim diski alabildiğimizden, bu çalışma boyunca bölge olarak $U = \{z : |z| < 1\}$ birim diskini gözönüne alacağız.

$U=\{z:|z|<1\}$ birim diskinde analitik, yalınkat ve $f(0)=f'(0)-1=0$ normalize koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Her $f\in S$ fonksiyonu,

$$f(z)=z+a_2z^2+..........=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilebilir.

Bununla beraber, bir $f\in S$ fonksiyonu ile birlikte temel dönüşümler olarak bilinen eşlenik, dönme, genişleme, disk otomorfizmi, erim, atılmış değer ve karekök dönüşümleri S sınıfındadır.

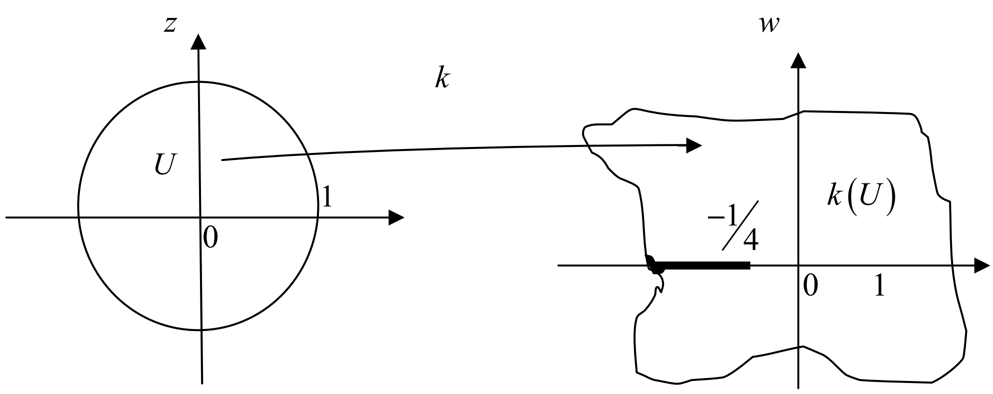
S sınıfındaki fonksiyonların en öncelikli örneği olan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=z+2z^2+3z^3+.........$$

şeklinde Taylor serisi açılımına sahip

$$k(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]=\frac{(1+z)^2-(1-z)^2}{4(1-z)^2}=\frac{z}{(1-z)^2}$$

Koebe fonksiyonu, $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskini , $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar kesik doğru hariç tüm karmaşık düzlemin içine konform olarak dönüştürür (Şekil 1.1.1) ♦



Şekil 1.1.1

Rezidüsü 1 olan, sonsuz basit bir kutup hariç, U bölgesinin dışı olan $\Delta=\{z:|z|>1\}$ bölgesinde analitik ve yalınkat olan

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

fonksiyonlarının sınıfı Σ ile gösterilir. Ayrıca $g(z) \neq 0$ fonksiyonlarının altsınıfları Σ_0 şeklinde gösterilir.

Teorem 1.1.1 (Alan Teoremi):

Σ sınıfından alınan her g fonksiyonu için ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik, g fonksiyonunun, $b_0 \in C$ ve $\alpha \in \Re$ olmak üzere,

$$g(z) = z + b_0 + e^{2i\alpha} z^{-1}$$

şeklinde seçilmesi durumunda gerçekleşir [13]. ♦

"*S sınıfındaki her f fonksiyonu $n = 2,3,4,.........$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağlar*" ifadesi Bieberbach kestirimi olarak bilinmektedir. 1916 yılında Bieberbarch tarafından ortaya atılan ve uzun yıllar kestirim olarak kalan ve kısmen ispatlanan bu kestirimin tam ispatı 1984 yılında Louis de Branges tarafından yapılmıştır.

Teorem 1.1.2 (Bieberbach Teoremi):

S sınıfından alınan her

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonu için

$$|a_2| \leq 2$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için f fonksiyonunun

$$f(z) = e^{-i\alpha} k\left(e^{+i\alpha} z\right) = \frac{z}{\left(1 - e^{-i\alpha} z\right)^2}$$

şeklinde Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir [13]. ♦

Bieberbach'a ait $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrik teorisinde daha ileri uygulamalara sahiptir. En önemli sonuç, $f \in S$ iken $|f'(z)|$ için kesin üst ve alt sınırları veren Koebe Bükülme Teoremidir. Bükülme Terimi, geometrik olarak,

$|f'(z)|$ nin f dönüşümü altında sonsuz küçük büyütme çarpanı ya da $|f'(z)|^2$ Jacobien'inin, alanın sonsuz küçük büyütme çarpanı olması gerçeğinden çıkmıştır.

Teorem 1.1.3 (Bükülme Teoremi):

Her bir $f \in S$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu Koebe fonksiyonu için vardır [13]. ♦

Teorem 1.1.4 (Büyüme Teoremi):

Her bir $f \in S$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır [13]. ♦

Aşağıdaki teoremle, Bükülme ve Büyüme Teoremlerinin birleşmesiyle elde edilen eşitsizlik verilmektedir.

Teorem 1.1.5:

S sınıfındaki her bir f fonksiyonu için $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik hali $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu için sağlanır [13]. ♦

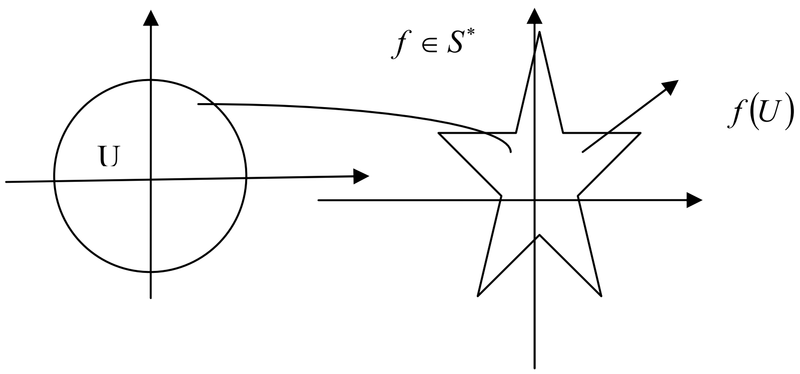
1.2 Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde, yalınkat fonksiyonların bazı özel alt sınıfları tanıtılmakta ve bu alt sınıfların özelliklerinden söz edilmektedir.

Tanım 1.2.1 (Yıldızıl Fonksiyon):

w_0, düzlemdeki bir D kümesinden alınan bir iç nokta olsun. w_o noktasını her $w \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa , D kümesine $w_0 \in D$ ***noktasına göre yıldızıl küme*** denir. Başka bir deyişle; D kümesinin her noktası w_0 noktasından görülebilir ise D kümesine ***yıldızıl küme*** olur.

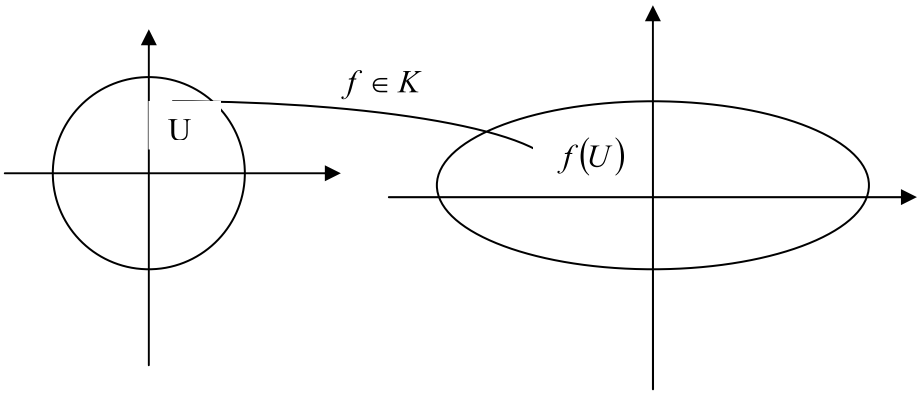
Bir f fonksiyonu U birim diskini w_0 noktasına göre yıldızıl bir bölge üzerine dönüştürüyorsa f fonksiyonuna w_0 ***noktasına göre yıldızıl fonksiyon*** denir. Özel olarak, $w_0 = 0$ alınırsa f fonksiyonuna ***yıldızıl fonksiyon*** denir. Yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.



Şekil 1.2.1

Tanım 1.2.2 (Konveks Fonksiyon):

Düzlemdeki bir D kümesinin içinden alınan w_1 ve w_2 noktalarını birleştiren doğru parçası tamamen D kümesinde kalıyorsa, D kümesine ***konveks'tir*** denir. Konveks bir kümeyi konveks bir kümeye dönüştüren fonksiyona da ***konveks fonksiyon*** denir. Konveks fonksiyonlarının sınıfı K ile gösterilir.



Şekil 1.2.2

Konveks ve Yıldızıl fonksiyon sınıfları için

$$K \subset S^* \subset S$$

şeklinde kapsama bağıntısı yazılabilir.

Teorem 1.2.1:

f fonksiyonu $\overline{U}_R : \{z : |z| \le R\}$ kapalı diskinde analitik ve yalınkat olsun. Bu durumda f fonksiyonu $\overline{U}_R$ diskini konveks bir bölgeye dönüştürmesi için gerekli ve yeterli koşul $C_R : \{z : |z| = R\}$ üzerindeki her z için $\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \ge 0$ olmasıdır [1].

Bununla birlikte $f(0) = 0$ kabul edelim. Bu durumda f fonksiyonunun $\overline{U}_R$ bölgesini $w = 0$ noktasına göre yıldızıl bir bölgeye dönüştürmesi için gerekli ve yeterli koşul $C_R : \{z : |z| = R\}$ üzerindeki her z için $\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \ge 0$ olmasıdır [1].

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasında çok kullanışlı olan bir bağıntı ilk olarak J.W Alexander tarafından

$$f \in K \Leftrightarrow zf' \in S^*$$

şeklinde verilmiştir [13]. ♦

Yukarıdaki tanımlara örnek olarak

$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu konvekstir, ancak $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu yıldızıl olup konveks değildir.

Tanım 1.2.3 (Pozitif Gerçel Kısımlı Fonksiyonlar) :

U bölgesindeki tüm z noktaları için

$$\mathrm{Re}(f(z)) > 0$$

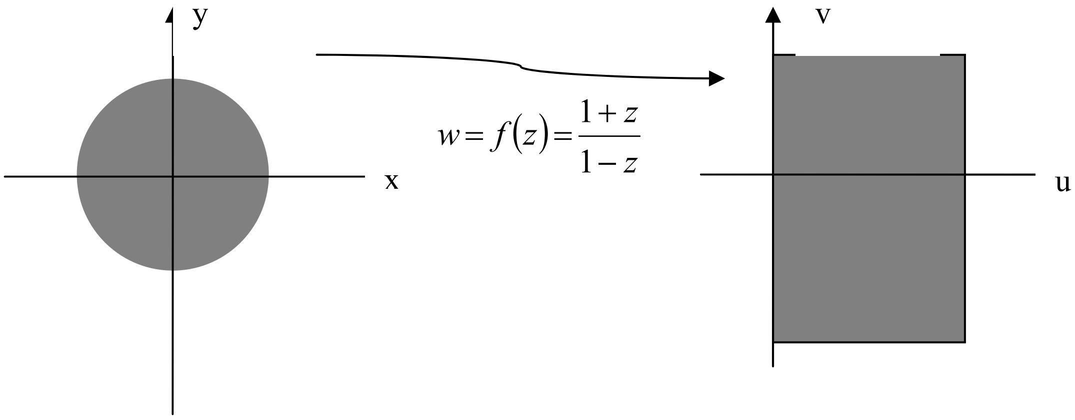
koşulunu sağlayan ve analitik olan

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu kümeye ***pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar sınıfı*** denir ve bu sınıf $\wp$ ile gösterilir. Örnek olarak

$$L_0(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \ldots = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

şeklindeki Mobius fonksiyonu verilebilir. Gerçekten L_0 fonksiyonu U birim diskini sağ yarı düzlem içine dönüştürür.



Şekil 1.2.3

U bölgesinde analitik olan ve $f(0) = f'(0) = 1$ normalize koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu için,

$$f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$$

ve

$$f \in K \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$$

önermeleri doğrudur [13].

$k-UCV$ sınıfını, Kanas ve Wisniowska [15] geometrik tanımı ve konik bölge ile arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak çalışmışlardır. $k-ST$ sınıfı da, [16] de araştırılmıştır. Gerçekten bu sınıf konveks ve yıldızıl fonksiyonların sınıfları arasında iyi bilinen Alexander Teoremi ile ilişkilidir. Özellikle $k=1$ alındığında, C ve S^* sırasıyla, U da konveks ve yıldızıl fonksiyonların sınıflarını göstermek üzere,

$$0-UCV \equiv C \qquad \text{ve} \qquad 0-ST \equiv S^*$$

eşitlikleri yazılır.

Ayrıca, U birim diskinde $0 \leq \alpha < 1$ için α ***mertebeli*** $k-$***düzgün konveks*** ve α ***mertebeli*** $k-$***yıldızıl*** fonksiyonlardan oluşan S' nin iki alt sınıfı da sırasıyla $k-UCV(\alpha)$ ve $k-ST(\alpha)$ ile gösterilir. Bu sınıflar,

$$k-UCV(\alpha)=\left\{ f \in S : \Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| + \alpha \quad \left(z \in U:\ 0 \leq k < \infty \quad ,0 \leq \alpha < 1\right)\right\}$$

ve

$$k-ST(\alpha)=\left\{ f \in S : \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| + \alpha \quad \left(z \in U:\ 0 \leq k < \infty \quad ,0 \leq \alpha < 1\right)\right\}$$

şeklinde tanımlıdırlar. . Özel olarak $\alpha = 0$ alındığında,

$$k-UC(0)=k-UC \quad \text{ve} \quad k-ST(0)=k-ST$$

eşitlikleri yazılır.

Konumuzla çok yakından ilgili olan Subordinasyon ilkesi karmaşık analizde önemli rol oynamaktadır. Son yıllarda karmaşık analiz ile ilgilenen bir çok matematikçi, subordinasyon konusunda çalışmalar yapmıştır. Subordinasyon kavramı, ilk olarak E. Lindelöf [2] tarafından ortaya atılmış, ancak temel bağıntılar J.E. Littlewood [7] ve W.W. Rogosinski [20] tarafından bulunmuştur.

Tanım 1.2.4 (Subordinasyon İlkesi):

f ve g fonksiyonları $f(0)=g(0)$ olacak şekilde U birim diskinde analitik olsunlar. U bölgesinde

$$f(z)=g(w(z))$$

ve

$$|w(z)|<|z|$$

koşullarını sağlayan analitik w fonksiyonu varsa f ***fonksiyonu*** g ***fonksiyonuna subordinedir*** denir ve $f \prec g$ şeklinde gösterilir.

Örneğin, n bir tamsayı olmak üzere U birim diskinde $z^n \prec z$ şeklindedir. $g(w)$ nin yalınkat olması gerekmez. U birim diskinde $z^{2n} \prec z^2$ şeklindedir fakat z^{2n+1}, z^2 ye subordine değildir.

2.BÖLÜM
HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, çalışmamızın esas konusu olan harmonik fonksiyonların tanımı ve ilgili önemli teoremler verilerek üçüncü bölüm için bir taban oluşturulacaktır.

2.1 Harmonik Fonksiyonlar

D karmaşık düzlemde bir bölge ve $u : D \to IR$, ikinci dereceden sürekli kısmi türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall z \in D$ için u fonksiyonu ,

$$\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace's denklemini sağlarsa u fonksiyonuna D'de ***harmoniktir*** denir.

xy- düzlemdeki bir D bölgesinden uv- düzlemindeki bir Ω bölgesine tanımlı u ve v fonksiyonları harmonik iseler $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olmak üzere $w = f(z) = u(z) + iv(z)$ birebir dönüşümüne ***harmonik dönüşüm*** denir. Böylece karmaşık değerli harmonik bir fonksiyonun $D \subset C$ bölgesinin harmonik dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul fonksiyonun D de yalınkat olmasıdır. Bu çalışma boyunca harmonik dönüşüm denildiğinde yalınkat karmaşık değerli harmonik fonksiyon anlaşılacaktır.

D, C de bir bölge olsun ve $f = u + iv$ kompleks değerli fonksiyonunu alalım. Her bir $z \in D$ noktasında $f'(z)$ türevi varsa $f = u + iv$ fonksiyonuna D bölgesinde analitik denildiğini biliyoruz. Bunun bir sonucu olarak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann denklemlerini yazmak mümkündür. Aksine eğer f, birinci kısmi türevlere sahip ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarsa f, D de analitiktir [10].

Cauchy-Riemann denklemlerinden, her analitik fonksiyonun harmonik olduğu söylenebilir. Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan (u, v) fonksiyonlarının bir ikilisine bir ***eşlenik ikili*** denir ve v fonksiyonuna , u fonksiyonunun ***harmonik eşleniği*** adı verilir. Böylece $-u$ fonksiyonu v fonksiyonunun harmonik eşleniği olur.

Harmonik dönüşümler konformal dönüşümlerin genelleştirilmiş durumudur. Harmonik dönüşümlerin sınırdaki davranışı konformal dönüşümlerinkinden daha zordur. Bundan dolayı konformal dönüşümlerin klasik teoremi bizi harmonik dönüşümlere götürecektir.

Örnek 2.1.1:

$w = \alpha z + \beta \bar{z}, |\alpha| \neq |\beta|$ lineer dönüşümü, bir harmonik dönüşümdür, fakat konformal olmayabilir.

$f = u + iv$ fonksiyonunun ***Jacobian matrisi***

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = v_y u_x - v_x u_y$$

şeklinde tanımlanır. Eğer f fonksiyonu analitik ise f fonksiyonunun Jacobiani

$$J_f(z) = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2$$

şeklinde olur. Analitik olan f fonksiyonları için $J_f(z) \neq 0$ sonucunun doğru olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun , z noktasında yerel olarak yalınkat olmasıdır. 1936 da, Hans Lewy bu ispatın harmonik fonksiyonlar içinde doğru olduğunu göstermiştir. Lewy teoremine göre, f fonksiyonunun analitik olduğu D bölgesi boyunca harmonik fonksiyon ya $J_f(z)>0$ ile ***yön koruyan*** yada $J_f(z)<0$ ile ***yön değiştiren*** olur. Eğer f fonksiyonu yön koruyan ise $\bar{f}$ fonksiyonu yön değiştiren olur. Özellikle, konformal dönüşümler yön koruyandırlar.

2.2 Bazı Temel Özellikler

Karmaşık analizde, $z = x + iy$ olmak üzere,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

diferansiyel operatörleri sıkça kullanılır.

$\frac{\partial}{\partial z}$ ve $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ operatörleri lineerdir ve bunlar diferansiyel operatörlerinin genel özelliklerine sahiptirler. Örneğin; çarpım ve bölüm kurallarını sağlarlar ve

$$\frac{\partial}{\partial z}(fg)=f\frac{\partial g}{\partial z}+g\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right)=g^{-2}\left(g\frac{\partial f}{\partial z}-f\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

şeklindedir ve $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ içinde benzer eşitlikler yazılabilir. Karmaşık değerli f fonksiyonu için , $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ eşitliği, Cauchy-Riemann denklemlerini yazmanın başka bir yoludur. Diğer taraftan basit bir hesaplama ile f fonksiyonun Laplacian'ı

$$\Delta f=4\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ikinci basamaktan sürekli kısmi türevlenebilir f fonksiyonları için,

$$f \text{ harmoniktir} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \text{ analitiktir}$$

önermesinin doğru olduğu açıktır. Eğer f fonksiyonu analitik ise $\frac{\partial f}{\partial z}=f'(z)$ olur.

Bununla birlikte

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

eşitliği iki türevi birbirine bağlar. Yine

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

diferansiyeli,

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

olarak yazılabilir, bununla beraber

$$f_z=\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{ve} \quad f_{\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

gösterimini kullanmak daha uygun ve kullanışlı olur. Bileşke fonksiyonların türevleri için zincir kuralını da aşağıdaki gibi yazabiliriz. Eğer $w=f(z)$ ve $z=g(\zeta)$ şeklinde ise, $h=f\circ g$ olmak üzere $w=h(\zeta)$ şeklinde olur.

$$dz = \frac{\partial g}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}} d\overline{\zeta}$$

ve

$$d\overline{z} = \frac{\partial \overline{g}}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{\zeta}} d\overline{\zeta} = \frac{\overline{\partial g}}{\partial \overline{\zeta}} d\zeta + \frac{\overline{\partial g}}{\partial \zeta} d\overline{\zeta}$$

yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$dh = \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}} d\overline{\zeta}\right) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\overline{\partial g}}{\partial \overline{\zeta}} d\zeta + \frac{\overline{\partial g}}{\partial \zeta} d\overline{\zeta}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\overline{\partial g}}{\partial \overline{\zeta}} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial h}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\overline{\partial g}}{\partial \zeta}$$

bulunur.

$f = u + iv$ fonksiyonu için $f_z = \frac{1}{2}\left(f_x - if_y\right)$; $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(f_x + if_y\right)$ eşitlikleri göz önüne alındığında f 'in Jacobianı

$$J_f = \left|f_z\right|^2 - \left|f_{\overline{z}}\right|^2$$

şeklinde de ifade edilebilir. Sonuç olarak , f fonksiyonu $\left|f_z\right| > \left|f_{\overline{z}}\right|$ iken f yerel yalınkat ile yön koruyan ve $\left|f_z\right| < \left|f_{\overline{z}}\right|$ iken yalınkat ve yön değiştirendir. $J_f(z) > 0$ iken $f_z(z) \neq 0$ olur. $w = f(z)$ yön koruyan dönüşümleri için

$$\left(\left|f_z\right| - \left|f_{\overline{z}}\right|\right) \left|dz\right| \leq \left|dw\right| \leq \left(\left|f_z\right| + \left|f_{\overline{z}}\right|\right) \left|dz\right|$$

olduğu görülür. Bu kesin eşitsizlikler, büyük ve küçük eksenlerin oranı olan

$$D_f = \frac{\left|f_z\right| + \left|f_{\overline{z}}\right|}{\left|f_z\right| - \left|f_{\overline{z}}\right|}$$

ile f in sonsuz bir çemberi sonsuz bir elipse dönüştürdüğü geometrik yoruma sahiptirler. $D_f = D_f(z)$, z noktasındaki f ***' in genişletilmişi*** olarak adlandırılır. $1 \leq D_f(z) < \infty$ olduğu da açıktır. K, $1 \leq K < \infty$ şeklinde bir sabit olmak üzere, verilen bölge boyunca $D_f(z) \leq K$ ise yön koruyan f homeomorfizmasına ***hemen-***

hemen konformal yada ***K-hemen-hemen konformal*** denir. Hemen hemen konformal fonksiyonlar basit konformal fonksiyonlardır.

$\mu_f = f_{\bar{z}} / f_z$ oranı f 'in ***karmaşık genişletilmişi*** olarak adlandırılmaktadır. Böylece, f yön koruyan ise $0 \leq |\mu_f| < 1$ olur. $D_f(z) \leq K$ koşulunun sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $|\mu_f| \leq (K-1) / (K+1)$ eşitsizliğin sağlanmasıdır. Bu da gösterir ki, yön koruyan bir homeomorfizmin hemen hemen konformal olması için gerekli ve yeterli koşul μ_f kompleks genişleme verilen bölgede 1 den küçük sayılar için sınırlandırılmalıdır yani ; $|\mu_f| \leq k < 1$ şeklinde olmalıdır. f dönüşümünün konformal olması için gerekli ve yeterli koşul $\mu_f = 0$ olmasıdır.

Harmonik fonksiyonlar teorisinde, ikinci karmaşık genişleme olarak bilinen $v_f = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ eşitliği, birinci kompleks genişleme olan μ_f den daha uygundur. $|v_f| = |\mu_f|$ olduğundan dolayı , f in hemen hemen konformal olması için gerekli ve yeterli koşulun $|v_f| \leq k < 1$ olduğu da açıktır.

Şimdi f , bir $D \subset C$ bölgesinde sürekli ikinci kısmi türeve sahip karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun $J_f(z) > 0$ ile D bölgesinde yerel yalınkat olduğunu kabul edelim. $w = v_f = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ olsun. Bu durumda D bölgesinde $|w(z)| < 1$ olur. $\bar{z}$ ye göre $\overline{f_{\bar{z}}} = w f_z$ eşitliğinin diferansiyeli

$$\overline{f_{z\bar{z}}} = f_{z\bar{z}} w + f_z w_{\bar{z}}$$

olarak bulunur.

Eğer f fonksiyonu D bölgesinde harmonik ise, $f_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}\Delta f$ olur. Böylece w analitik olmak üzere, D bölgesinde $w_{\bar{z}} = 0$ olduğu bulunur. Tersine, eğer w analitik ise, o zaman $\overline{f_{z\bar{z}}} = f_{z\bar{z}} w$ olur. Fakat $|w(z)| < 1$ olduğundan, bu $f_{z\bar{z}} = 0$ ifadesini sağlar ve f harmonik olur. Böylece f fonksiyonun harmonik olması için gerekli ve yeterli koşul w nin analitik olmasıdır.

Aşağıdaki tabloda şu ana kadar yazdığımız analitik fonksiyonlar ile harmonik fonksiyonlar arasındaki kıyaslama verilmiştir.

	ANALİTİK FONKSİYONLAR	**HARMONİK FONKSİYONLAR**
	Harmoniktir	Analitik olmayabilir
	Birleşimleri altında korunurlar	Birleşimleri altında korunmazlar
	$A(D)$ cebirdir	$H(D)$ cebir değildir
	f fonksiyonu analitik ise f^2 yada f^{-1} analitiktir	f fonksiyonu harmonik ise f^2 yada f^{-1} harmonik olması gerekmez
	Reel ve imajiner kısımları eşleniktir	Reel ve imajiner kısımları eşlenik olması gerekmez
	$J_f(z) \neq 0$ jacobian ile yön koruyandır	$J_f(z) > 0$ ise yön koruyan , $J_f(z) < 0$ ise yön değiştirendir
	Sınırdaki davranışı basittir	Sınırdaki davranışı karmaşıktır

2.3 Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar

Bu kesimde, kısmen analitik yalınkat fonksiyonların genelleştirilmiş durumu olarak da düşünülebilen harmonik yalınkat fonksiyonlar verilmektedir.

Tanım 2.3.1: Harmonik Yalınkat Fonksiyon

Basit bağlantılı bir $D \subset C$ bölgesinde, karmaşık değerli f harmonik fonksiyonu, h ve g fonksiyonları D bölgesinde analitik olmak üzere $f = h + \overline{g}$ gösterimine sahiptir. Bu gösterim tektir. Gerçekten, f harmonik ise f_z nin analitik olduğunu biliyoruz. h, D bölgesinde analitik olmak üzere $h' = f_z$ olsun. Yine $g = \overline{f} - \overline{g}$ olsun ve h'ın tanımıyla D'de $g_{\bar{z}} = \overline{f}_z - \overline{h}_z = 0$ olduğunu varsayalım. Böylece g, D'de analitiktir. Gösterimin tekliği hem analitik hem de anti analitik olan fonksiyonun sabit olması gerçeğine bağlıdır (Burada ***anti analitik***, analitik bir fonksiyonun eşleniği anlamındadır). Eğer f gerçel değerli ise $2h$, f'in analitik tamamlayıcısı olmak üzere gösterim, imajiner bir ek sabite kadar, $f = h + \overline{h} = \mathrm{Re}\{2h\}$'a indirgenir.

U birim diskindeki f harmonik dönüşümü için $g(0) = 0$ olacak şekilde ek sabit seçmek uygundur. Bu durumda $f = h + \overline{g}$ gösterimi tektir ve f'in kanonik gösterimi olarak adlandırılır.

D bölgesinde h ve g analitik olmak üzere f fonksiyonunu

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

şeklinde yazabiliriz. $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ve yön koruyan olması için gerekli ve yeterli koşul $|h'(z)| > |g'(z)|,\ z \in D$ koşulunun sağlanmasıdır.

U'da analitik

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{1}$$

fonksiyonları için U'da yön koruyan harmonik yalınkat $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonları ile ilgili ilk çalışma Clunie ve Sheil-Small [6] tarafından yapılmıştır. U'da analitik h ve g fonksiyonları (1) ifadesindeki gibi verilmek üzere, $f = h + \overline{g}$ şeklindeki yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı S_H ile gösterilir.

$g'(0)=0$ şartını sağlayan $f \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı da S_H^0 ile gösterilir ve

$$S_H^0 \subset S_H$$

şeklinde yazılabilir.

S sınıfına ait fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisi bir fonksiyona düzgün yakınsak ise bu fonksiyon ya S sınıfına ait yada sabit olmalıdır. Fakat bu durum S_H sınıfı için geçerli değildir. Örneğin; genel terimi

$$f_n(z) = z + \frac{n}{n+1}\bar{z}$$

olan S_H sınıfına ait fonksiyonlardan oluşan $\{f_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = z + \bar{z}$$

limit fonksiyonu S_H sınıfına ait değildir.

F, D bölgesinde sürekli fonksiyonların bir ailesi olsun. F her bir dizisi, D'nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak bir alt diziye sahipse F ailesine *normaldir* denir.

F, normal bir aile ve φ, U'dan U'ya analitik bir fonksiyon olsun. Eğer her $f \in F$ için $f \circ F$ fonksiyonlarının oluşturduğu aile normal ise, f'e *normal fonksiyon* denir.

S_H sınıfı normaldir ancak kompakt değildir. S_H^0 sınıfı normal ve kompakttır.

Analitik yalınkat fonksiyonların S sınıfı üzerindeki bir çok problemde Koebe fonksiyonu extremal fonksiyon olarak önemli rol oynamaktadır. Analitik yalınkat fonksiyonlar için tanımlanan Koebe fonksiyonun bir benzeri, Clunie-Sheil Small [6] tarafından S_H^0 sınıfı için tanımlanmıştır. Clunie ve Sheil Small tarafından tanımlanan Harmonik Koebe fonksiyonun tanımı aşağıdaki gibidir

Tanım 2.3.2 : Harmonik Koebe Fonksiyonu

$h(0) = g(0) = 0$ varsayımı ile

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}, \qquad g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

olmak üzere $K = h + \overline{g}$ fonksiyonuna ***Harmonik Koebe fonksiyonu*** denir.

Harmonik Koebe fonksiyonu birim diski harmonik olarak , $-\infty < t < -1/6$ şeridi çıkarılmış tüm C düzlemi üzerine dönüştürür. Ayrıca $z = 1$ hariç birim diskteki her z değeri için $K(z) = -1/6$ şeklindedir.

Teorem 2.3.1 :

$f \in S_H^0$ ise

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4}\frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

şeklindedir. Özellikle her $f \in S_H^0$ için $\{w \in C \; |w| < 1/6\} \subset f(U)$ şeklinde olur [6]. Teorem 2.3.1 de verilen sonuç kesin olmamakla birlikte, Harmonik Koebe fonksiyonu $1/16$ yarıçapının $1/6$ olarak alınabileceğini söyler. Ancak bu hâlâ bir kestirimdir. ♦

Kestirim 2.3.1: Her $f \in S_H^0$ fonksiyonu için

$$\{w \in C \; |w| < 1/6\} \subset f(U)$$

kapsaması doğrudur [6]. ♦

Bununla birlikte Clunie ve Sheil-Small [6] , S_H^0 ailesi için Bieberbach kestirimini aşağıdaki harmonik şeklini tahmin etmişlerdir.

Kestirim 2.3.2 : $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ fonksiyonu (1) ile verilsin. Bu durumda

$$\left\| a_n \right| - \left| b_n \right\| \leq n \quad n = 2,3,........$$

$$\left| a_n \right| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)$$

$$\left| b_n \right| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$$

şeklindedir. Eşitlik durumu K Harmonik Koebe fonksiyonu için sağlanır. ♦

Daha sonra Sheil-Small [18] Kestirim 2.3.2'yi geliştirmişler ve Bieberbach kestiriminin aşağıdaki genelleştirilmişini önermişlerdir.

Kestirim 2.3.3 :

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{-n} z^n} \in S_H \quad \text{ise } |n| = 2,3,.... \text{ olmak üzere } |a_n| < \frac{2n^2+1}{3}$$

şeklindedir. ♦

S_H ve S_H^0 sınıfındaki fonksiyonlarla ilgili katsayı tahminleri hâlâ devam etmekte olup $|b_2|$ için kesin bir üst sınır elde edilmesine rağmen $|a_2|$ katsayısı için henüz kesin bir üst sınır bulunamamıştır. Ancak [6] da, her $f \in S_H$ için $|a_2| < 12{,}173$ olduğu bulunmuştur. Bu sonuç her $f \in S_H^0$ için ise $|b_2| \leq \frac{1}{2}$ kesin eşitsizliği doğrudur [18].

Yine, $f \in S_H^0$ sınıfındaki bütün fonksiyonlar için , $|b_2| \leq \frac{1}{2}$ kesin eşitsizliği doğrudur.

Tanım 2.3.3: Harmonik Fonksiyonların Hadamard Çarpımı (Konvolüsyon)

$$f = h + \overline{g} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n z^n}$$

ve

$$F = H + \overline{G} = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n z^n}$$

şeklindeki harmonik fonksiyonlar için, $(f * F) = (h * H) + \left(\overline{g * G}\right)$ ile gösterilen Hadamard çarpım (konvolüsyon)

$$(f * F)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n B_n \, z^n}$$

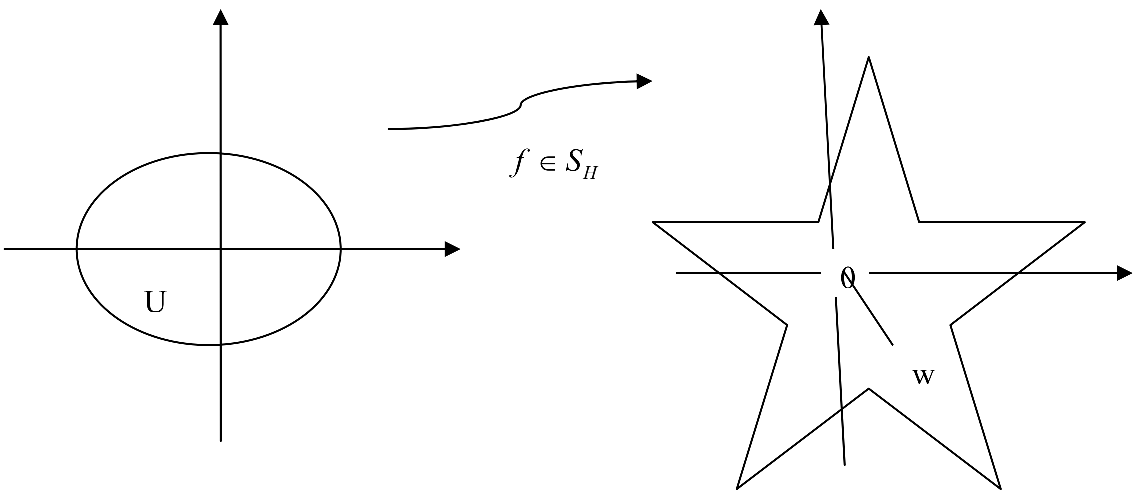
olarak tanımlanır.

2.4 Harmonik Yıldızıl Fonksiyonlar

Yön koruyan bir $f \in S_H$ harmonik dönüşümünün görüntü bölgesi orjine göre yıldızıl olan fonksiyona ***yıldızıldır*** denilir. Bu tüm değer bölgesinin orjinden görülebilmesi anlamına gelir. Başka bir deyişle $w_0 = f(z_0)$ noktası f 'in görüntü bölgesinde ise 0 dan w_0 noktasına birleştiren doğru parçası vardır. Eğer f, kapalı diskte düzgün bir genişlemeye sahip ise eşdeğer bir ifade, $\arg\{f(e^{i\theta})\}$ nın θ 'nın azalmayan fonksiyonu olması veya

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg f\left(re^{i\theta}\right)\right) \geq 0, z \in re^{i\theta}.0 \leq \theta \leq 2\pi, ve 0 \leq r \leq 1$$

olmasıdır.



Şekil 2.4.1

Analitik f fonksiyonları için bu koşul

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \quad ; \quad z \in U$$

şeklindeki bilinen formda olur.

Aşağıdaki teorem S_H^0 harmonik yıldızıl fonksiyonlar için kesin olan katsayı sınırları verilecektir. Bu teorem Sheil-Small [18] tarafından ileri sürülmüştür.

Teorem 2.4.1 :

Her yıldızıl $f \in S_H^0$ fonksiyonunun katsayıları

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1) \qquad\qquad |b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$$

ve

$$\big||a_n| - |b_n|\big| \leq n \qquad n = 2,3,........$$

kesin eşitsizliklerini sağlar. ♦

Sonuç 2.4.1 :

S_H sınıfındaki yıldızıl fonksiyonların katsayıları

$$|a_n| < \frac{1}{3}\left(2n^2+1\right) \qquad\qquad |b_n| < \frac{1}{3}\left(2n^2+1\right) \qquad\qquad n = 2,3,........$$

kesin eşitsizliklerini sağlar.

Teorem 2.4.1'in aşağıdaki diğer sonucu yıldızıl harmonik dönüşümlerin büyümesi üzerindeki kesin üst sınırını verir.

Sonuç 2.4.2: Her $f \in S_H^0$ fonksiyonu için

$$|f(z)| \leq \frac{1}{3}\frac{3r+r^3}{(1-r)^3} \qquad ; \qquad |z| = r < 1$$

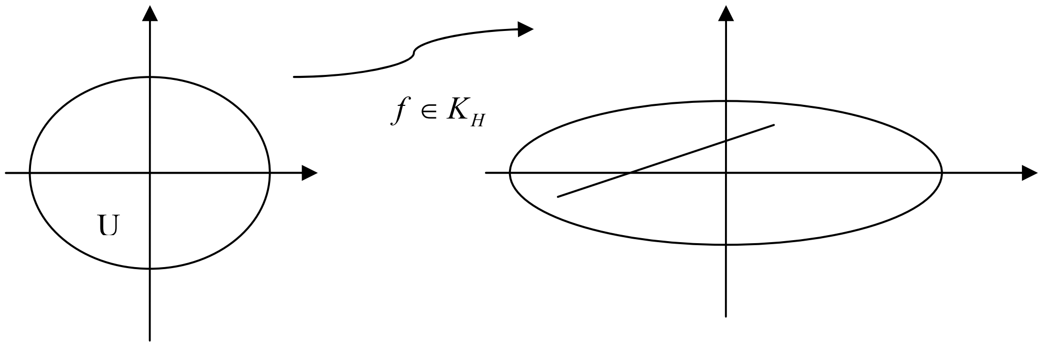
kesin eşitsizliği her yıldızıl $f \in S_H^0$ fonksiyonu için sağlanır. Eşitlik durumu Harmonik Koebe fonksiyonu için sağlanır.

2.5 Harmonik Konveks Fonksiyonlar

f harmonik fonksiyonunun görüntü kümesinden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası görüntü kümesinin içinde kalıyorsa f fonksiyonuna ***konveks fonksiyon*** denir. Bir konveks fonksiyonu

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f\left(re^{i\theta}\right)\right)\right\} \geq 0, z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$$

şeklinde nitelendirebiliriz.



Şekil 2.5.1

Klasik Koebe $1/4$ teoremi, U birim diskinde yalınkat ve analitik olan her bir $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonunun $f(U)$ daki $|w| < \frac{1}{4}$ diskin tamamını kapsadığını söyler.

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + ...$$

Koebe fonksiyonunun, $U = \{\ z : |z| \langle 1\ \}$ birim diskini konformal olarak , $w = \frac{1+z}{1-z}$ dönüşümü altında $-1/4$ den ∞'a kadar kesik doğru hariç tüm karmaşık düzlemin içine dönüştürmesi ve 'Her f fonksiyonunun katsayıları $|a_n| \le n, \quad n = 2,3,4,........$ şeklindeki eşitsizliği sağlar' ifadesi ile bilinen Bieberbach tahmininden, f in değer kümesinin konveks olduğunu varsayılabilir. K, birim diski konformal olarak bir konveks bölgeye dönüştüren $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ şeklindeki fonksiyonların sınıfı olsun. $f \in K$ şeklindeki her fonksiyonun değer kümesi $|w| < \frac{1}{2}$ diskini kapsar ve katsayıları $|a_n| \le 1$ sınırını sağlar.

$$\ell(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + ...$$

fonksiyonu U birim diskini konformal olarak $\text{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$ yarı düzlem üzerine dönüştürür [13]. Bu sonuçlardan konveks konformal dönüşüm konveks harmonik dönüşümlere genişletebilir. K_H sınıfı, $h(0) = g(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ normalize koşulları ile , birim diski konveks bölgeye dönüştüren yön koruyan $f = h + \overline{g}$

şeklindeki harmonik dönüşümlerden meydana gelir. $|g'(0)| < |h'(0)| = 1$ olduğunu kabul edelim (çünkü f yön koruyandır ve Jacobianı pozitiftir). Konveksliği koruyan

$$\varphi(w) = \frac{w - \overline{b_1 w}}{1 - |b_1|^2}, \quad b_1 = g'(0)$$

yön koruyan afin dönüşümü ile $f = h + \overline{g} \in K_H$ fonksiyonu birleştirilerek daha ileri $g'(0) = 0$ normalize koşulu elde edilebilir. Bu sonuçlardan K_H^0 sınıfı elde edilir. Böylece , yön koruyan $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonu K_H^0 sınıfına ait olması demek f 'in birim diski yalınkat bir şekilde konveks bölge üzerine dönüştürmesi ve h ve g analitik fonksiyonlarının

$$h(z) = z + a_2 z^2 + ..., \qquad g(z) = b_2 z^2 + b_3 z^3 + ...$$

yapılarına sahip olmasıdır.

$f \in K_H$ dan $f_0 = (\varphi \ o \ f) \in K_H^0$ a olan dönüşüm $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ ile tersine çevirilebilir.

Aşağıdaki teoremler Clunie ve Sheil-Small [6]'a aittir.

Teorem 2.5.1 : Her bir $f \in K_H^0$ fonksiyonu $f(U)$ değer bölgesindeki $|w| < \dfrac{1}{2}$ diskinin tamamını kapsar. ♦

Teorem 2.5.2 : Her bir $f \in K_H^0$ fonksiyonunun katsayıları

$$|a_n| \le \frac{n+1}{2}, \qquad |b_n| \le \frac{n-1}{2} \qquad \text{ve} \qquad \big||a_n| - |b_n|\big| \le 1 \quad n = 2,3,....$$

için

kesin eşitsizlikleri sağlar. Eşitlik durumu

$$L(z) = \mathrm{Re}\{\ell(z)\} + i\,\mathrm{Im}\{k(z)\} = \frac{1}{2}[\ell(z) + k(z)] + \overline{\frac{1}{2}[\ell(z) - k(z)]}$$

fonksiyonu için sağlanır. ♦

2.6 Salagean Operatörü

$h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $\quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$, $\quad |b_1| < 1$ olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu için Salagean [3] tarafından tanımlanan D^m diferansiyel operatörü ile, Jahangiri ve arkadaşları [9] bu $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu için Salagean operatörünü

$$D^m h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^m a_k z^k \ , \quad D^m g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^m b_k z^k$$

olmak üzere

$$D^m f(z) = D^m h(z) + (-1)^m \overline{D^m g(z)} \tag{2}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

3.BÖLÜM
SALAGEAN TİPLİ BAZI ÖZEL SINIFLAR

Bu kesimde, daha önce çalışılmış, S_H *sınıfının bazı altsınıflarınının katsayı problemleri ile ilgili teoremler yer almaktadır. Bu bölüm çalışmamızın esasını oluşturan 4. bölüm için taban oluşturmaktadır.*

Yalçın [14] tarafından tanımlanan $S_H(m,n;\alpha)$ sınıfı ile ilgili katsayı tahminleri ile $S_H(m,n;\alpha)$ nin $\overline{S_H}(m,n,\alpha)$ alt sınıfına ait bazı teoremler aşağıdaki gibidir.

$0 \le \alpha < 1$, $m \in IN$, $n \in IN_0$, $m > n$ ve $z \in U$ için $S_H(m,n;\alpha)$, (2) de tanımlanan $D^m f$ türev operatörü

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} > \alpha \tag{3}$$

olacak şekilde harmonik fonksiyonlarının ailesini tanımlasın.

$\overline{S_H}(m,n,\alpha)$ alt sınıfı,

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \ , \quad g_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \ ; \quad a_k, b_k \ge 0 \tag{4}$$

şeklindeki $f_m = h + \overline{g_m}$ harmonik fonksiyonlarından oluşsun.

$\overline{S_H}(m,n,\alpha)$ sınıfı iyi bilinen S_H sınıfının alt sınıflarını kapsar. Örneğin, $\overline{S}_H(1,0,\alpha) \equiv F(\alpha)$, [8], U 'da α mertebeli yıldızıl, yön koruyan f harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfıdır, $\overline{S}_H(2,1,\alpha)$ U 'da α mertebeli konveks, yön koruyan f harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfıdır ve $\overline{S}_H(n+1,n,\alpha) \equiv \overline{H}(n,\alpha)$, [9], Salagean tipte harmonik fonksiyonların sınıfıdır.

$b_1 = 0$ olmak üzere , (1) ifadesindeki f harmonik fonksiyonlar için Avcı ve Zlotkiewicz[19] $\sum_{k=2}^{\infty} k^2(|a_k| + |b_k|) \le 1$ ise $f \in HK$ olduğunu göstermişler, Silverman [5] ise, negatif katsayıya sahip ise gerekli olan katsayı durumlarını ispatlamıştır. Daha sonra, Silverman ve Silvia [4] b_1'in sıfır olmadığı durumda [5] ve [19] sonuçlarını geliştirmişlerdir.

$m=1$ olmak üzere , (4) ifadesindeki f harmonik fonksiyonlar için Jahangiri [8], $f \in F(\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $\sum_{k=2}^{\infty}(k-\alpha)\,|a_k| + \sum_{k=1}^{\infty}(k+\alpha)|b_k| \leq 1-\alpha$ ve $f \in \overline{S}_H(2,1,\alpha)$,

ayrıca

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-\alpha)\,k|a_k| + \sum_{k=1}^{\infty}(k+\alpha)k|b_k| \leq 1-\alpha$$

olması gerektiğini göstermiştir.

Teorem 3.1.1 : h ve g, (1) de tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere $f = h + \overline{g}$ şeklinde olsun. Bu durumda , $f \in S_H(m,n;\alpha)$ ve U bölgesinde harmonik yalınkat ve yön koruyan iken $0 \leq \alpha < 1$**,** $m \in IN$ **,** $n \in IN_0$ **,** $m > n$ değerlerinde katsayı eşitsizliği

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^m - \alpha k^n}{1-\alpha}|a_k| + \frac{k^m - (-1)^{m-n}\alpha k^n}{1-\alpha}|b_k|\right) \leq 2 \qquad (5)$$

şeklindedir [14] . ♦

Aşağıdaki teorem (5) şartının, $f_m = h + \overline{g}_m \in \overline{S}_H(m,n;\alpha)$ için aynı zamanda gerekli olduğunu da söyler.

Teorem 3.1.2 : (4) te verilen fonksiyonlarla $f_m = h + \overline{g}_m$ şeklinde olsun. Bu durumda

$$f_m \in \overline{S}_H(m,n;\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(k^m - \alpha k^n\right)a_k + \left(k^m - (-1)^{m-n}\alpha k^n\right)b_k\right] \leq 2(1-\alpha) \qquad (6)$$

olmasıdır. ♦

Kapalı konveks kabuk, bir M kümesini kapsayan en küçük kapalı konveks kümedir. M 'nin kapalı konveks kabuğu $H(M)$ ile gösterilir.

$\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ sınıfının clco$\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ ile tanımlanan kapalı konveks kabuğunun extreme noktalarını veren aşağıdaki teorem önemlidir.

Teorem 3.1.3 : f_m, (4) te verildiği gibi olsun. Bu durumda $f \in S_H(m,n,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$h_1(z) = z, h_k(z) = z - \frac{1-\alpha}{k^m - \alpha k^n} z^k \ (k = 2,....)$$

ve

$$g_{m_k}(z) = z + (-1)^{m-1} \frac{1-\alpha}{k^m - (-1)^{m-n} \alpha k^n} \overline{z}^k \ (k = 1,2,........),$$

$$x_j \geq 0, y_j \geq 0 \qquad x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} (x_k + y_k) \geq 0$$

olmasıdır. $\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ sınıfının extreme noktaları $\{h_k\}$ ve $\{g_{m_k}\}$ fonksiyonlarıdır. ♦

Görüntü kümesinin davranışı hakkında bilgi veren büyüme teoremi de aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.4 : $f_m \in \overline{S}_H(m,n,\alpha)$ olduğunu kabul edelim. O halde $|z| = r < 1$ için

$$|f_m(z)| \leq (1+b_1)r + \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-\alpha}{2^{m-n}-\alpha} - \frac{1-(-1)^{m-n}\alpha}{2^{m-n}-\alpha}\right)r^2, \qquad |z| = r < 1,$$

ve

$$|f_m(z)| \geq (1-b_1)r - \frac{1}{2^n}\left(\frac{1-\alpha}{2^{m-n}-\alpha} - \frac{1-(-1)^{m-n}\alpha}{2^{m-n}-\alpha}\right)r^2, \qquad |z| = r < 1,$$

şeklindedir. ♦

Aşağıda vereceğimiz örtü teoremi Teorem 3.1.4'ün direkt bir sonucudur.

Sonuç 3.1.5 : (4) ifadesi ile, $f_m \in \overline{S}_H(m,n,\alpha)$ olsun . Bu durumda

$$\left\{ w : |w| < \frac{2^m - 1 - (2^n - 1)\alpha}{2^m - \alpha 2^n} - \frac{2^m - 1 - (2^n - (-1)^{m-n})\alpha}{2^m - \alpha 2^n} b_1 \right\} \subset f_m(U)$$

olur. ♦

Yine , $\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ sınıfının Hadamard çarpım altında kapalı olduğunu gösteren aşağıdaki teorem önemlidir.

Teorem 3.1.6 :

$0 \leq \beta \leq \alpha < 1$ için $f_m \in \overline{S}_H(m,n;\alpha)$ ve $F_m \in \overline{S_H}(m,n;\beta)$ olsun. Bu durumda $f_m * F_m \in \overline{S_H}(m,n;\alpha) \subset \overline{S_H}(m,n,\beta)$ olur. ♦

Teorem 3.1.7 :

$\overline{S}_H(m,n;\alpha)$ sınıfı konveks birleşimi altında kapalıdır. ♦

Son zamanlarda Rosy ve arkadaşları [17]

$$\operatorname{Re}\left\{\left(1+e^{i\alpha}\right)\frac{zf'(z)}{f(z)}-e^{i\alpha}\right\}\geq\gamma,\quad 0\leq\gamma<1,\ \alpha\in\Re \tag{7}$$

eşitsizliğini sağlayan f harmonik yalınkat fonksiyonların $G_H(\gamma)\subset S_H$ alt sınıfını tanımlamışlardır. (1) ifadesinde verilen $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n-1-\gamma}{1-\gamma}|a_n|+\frac{2n+1+\gamma}{1-\gamma}|b_n|\right]\leq 2,\quad 0\leq\gamma<1 \tag{8}$$

sağlanır. Bu durumda f, U sınıfında Goodman-Ronning tipte harmonik yalınkat fonksiyon olarak adlandırılır. Bu koşul eğer h ve g fonksiyonları

$$h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n\ ,\qquad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|z^n \tag{9}$$

şeklinde olursa sağlanmış olur.

$RS_H(k,\gamma)$,

$$\operatorname{Re}\left\{\left(1+e^{i\alpha}\right)\frac{D^{k+1}f(z)}{D^k f(z)}-e^{i\alpha}\right\}\geq\gamma\quad,\quad 0\leq\gamma<1,\ \alpha\in\Re \tag{10}$$

olacak şekilde (1) ifadesinde tanımlanan f harmonik fonksiyonlarının ailesi olarak tanımlansın.

Ayrıca , $\overline{RS}_H(k,\gamma)$ sınıfı , h ve g_k

$$h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n\ ,\quad g_k(z)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|z^n \tag{11}$$

olacak şekilde $RS_H(k,\gamma)$ sınıfındaki $f_k=h+\overline{g}_k$ harmonik fonksiyonlarını kapsayan bir altsınıfı olsun.

Aşağıdaki teoremlerle de $G_H(\gamma)$ sınıfı için [17] de verilen katsayı eşitsizliğinin (10) ifadesindeki $RS_H(k,\gamma)$ sınıfına genişletildiği verilir. Ayrıca $\overline{RS}_H(k,\gamma)$ sınıfındaki fonksiyonlar için konveks birleşimleri , hadamard çarpımları, bükülme teoremini ve uç noktalarını vereceğiz.

Teorem 3.1.8: $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu (1) ifadesindeki gibi olsun. Eğer $a_1 = 1$ ve $0 \leq \gamma < 1$ şeklinde iken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left[(2n-1-\gamma)|a_n| + (2n+1+\gamma)|b_n| \right] \leq 2(1-\gamma) \qquad (12)$$

eşitsizliği sağlanırsa f, U sınıfında harmonik yalınkat , yön koruyan ve $f \in RS_H(k,\gamma)$ olduğu görülür. ♦

Aşağıdaki teoremle (11) ifadesinde tanımlanan h ve g_k fonksiyonları için $f_k = h + \overline{g_k}$ fonksiyonu için gerekli ve yeterli olan katsayı eşitsizliğini verelim.

Teorem 3.1.9: $f_k = h + \overline{g_k}$ fonksiyonu (11) ifadesindeki gibi olsun. O zaman

$$f_k \in \overline{RS}_H(k,\gamma) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^k \left[(2n-1-\gamma)|a_n| + (2n+1+\gamma) \right] \leq 2(1-\gamma) \qquad (13)$$

olur. ♦

Şimdiki teoremde de $\overline{RS}_H(k,\gamma)$ sınıfındaki fonksiyonlar için bir teorem betimleyeceğiz.

Teorem 3.1.10: f_k , (11) ifadesinde verildiği gibi tanımlansın. O zaman

$$f_k \in \overline{RS}_H(k,\gamma) \Leftrightarrow f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n h_n(z) + Y_n g_{k_n}(z) \right) \qquad (14)$$

$h_1(z) = z,$

$$h_n(z) = z - \frac{1-\gamma}{n^k(2n-\gamma-1)} z^n, (n = 2,3,..)$$

$$g_{k_n}(z) = z + (-1)^k \frac{1-\gamma}{n^k(2n+\gamma+1)} z^{-n}, (n = 1,2,3,.....)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) = 1, \quad X_n \geq 0, Y_n \geq 0.$$

Özellikle , $\{h_n\}$ ve $\{g_{k_n}\}$, $\overline{RS}_H(k,\gamma)$ sınıfının extreme fonksiyonlarıdır. ♦

Aşağıdaki teoremde bu sınıf için katsayıyı sağlayan $\overline{RS}_H(k,\gamma)$ sınıfındaki fonksiyonlar için büyüme sınırlarını verelim.

Teorem 3.1.11: $f_k \in \overline{RS}_H(k,\gamma)$ olsun. O zaman $|z| = r < 1$ için

$$|f_k(z)| \leq (1+b_1)r + \frac{1}{2^k}\left(\frac{1-\gamma}{3-\gamma} - \frac{3+\gamma}{3-\gamma}|b_1|\right)r^2$$

ve

$$|f_k(z)| \geq (1-b_1)r - \frac{1}{2^k}\left(\frac{1-\gamma}{3-\gamma} - \frac{3+\gamma}{3-\gamma}|b_1|\right)r^2$$

eşitsizlikleri elde edilir. ♦

Teorem 3.1.12: $0 \leq \beta \leq \gamma < 1$ için $f_k \in \overline{RS}_H(k,\gamma)$ ve $F_k \in \overline{RS}_H(k,\beta)$ şeklinde olsun. Bu durumda

$$(f_k * F_k) \in \overline{RS}_H(k,\gamma) \subset \overline{RS}_H(k,\beta)$$

olur. ♦

Teorem 3.1.13: $\overline{RS}_H(k,\gamma)$ sınıfı konveks birleşimleri altında kapalıdır. ♦

4.BÖLÜM
KOMPLEKS MERTEBELİ SALAGEAN TİPLİ HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLARIN BİR ALT SINIFI

Bu bölüm çalışmamızın esasıdır. Bu bölümde S_H sınıfının yeni bir alt sınıfı tanımlanarak, bu alt sınıfın bazı özellikleri incelenmektedir.

Basit bağlantılı karmaşık bir D bölgesinde u ve v reel harmonik fonksiyonlar olmak üzere , karmaşık değerli $f = u + iv$ fonksiyonunu alalım. Basit bağlantılı bir D bölgesinde h ve g nin analitik olduğu durumlarda $f = h + \overline{g}$ şeklinde yazabildiğimizi ve f in D bölgesinde yön koruyan ve yerel yalınkat fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşulun $|h'(z)| > |g'(z)|$, $z \in D$ olduğunu biliyoruz.

$U = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde harmonik, yalınkat, yön koruyan ve $f(0) = f_z(0) - 1 = 0$ normalize şartlarına sahip $f = h + \overline{g}$ fonksiyonların sınıfı S_H olsun. Bu durumda $f = h + \overline{g} \in S_H$ için h ve g analitik fonksiyonları

$$h(z) = z + \sum_{p=2}^{\infty} a_p z^p \ , \qquad g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p z^p \ , \qquad |b_1| < 1 \tag{1}$$

şeklinde ifade edilebilir.

(1) ifadesinde verilen $f = h + \overline{g}$ için f fonksiyonunun *Salagean* operatörü :

$$D^m h(z) = z + \sum_{p=2}^{\infty} p^m a_p z^p \qquad \text{ve} \qquad D^m g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} p^m b_p z^p$$

olmak üzere

$$D^m f(z) = D^m h(z) + (-1)^m \overline{D^m g(z)}, m \in IN_0 = \{0,1,2,.........\} \tag{2}$$

şeklinde ifade edilmektedir. D^m *Salagean* operatörü olmak üzere $|z| = r < 1$,her z için

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^m f(z)}{(1-t)z + tD^n f(z)} - 1\right)\right] \geq k\left|\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^m f(z)}{(1-t)z + tD^n f(z)} - 1\right)\right|$$

olacak şekildeki $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının sınıfını $0 \leq k < \infty,$ $\gamma \in C - \{0\},$ $m \in IN, n \in IN_0$ ve $0 \leq t \leq 1$ değerleri için $U_H^{m,n}(\gamma, k, t)$ şeklinde gösterilir.

$$\operatorname{Re} w > k\left|w-1\right| \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\left(1+ke^{i\theta}\right)w - ke^{i\theta}\right) \geq 0$$

gerçeği kullanılarak yukarıdaki eşitsizlikten

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{\left(1+ke^{i\theta}\right)}{\gamma}\left(\frac{D^m f(z)}{(1-t)z+tD^n f(z)}-1\right)\right] > 0, \qquad (3)$$

olarak da yazılabilir.

$U_H^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfı S_H 'ın iyi bilinen alt sınıflarını içerir. Örneğin, $U_H^{1,0}(1-\beta,k,t)$ sınıfı Ahuja ve arkadaşları [11] tarafından çalışılmıştır. Yine $U_H^{1,0}(1,0,1)$ ile gösterilen,

$$U_H^{1,0}(1,0,1) = \left\{ f \in H : \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{z'f(z)} > 0,\ z \in U \right\}$$

sınıfı Silverman [4] , [5] tarafından ve $U_H^{1,0}(1,0,0)$ ile gösterilen

$$U_H^{1,0}(1,0,0) = \left\{ f \in H :\ \operatorname{Re}\frac{f'(z)}{z'} > 0 \right\}$$

sınıfıda Ahuja ve Jahangiri [12] tarafından tanımlanmıştır.

Bu bölümde ilk olarak, $U_H^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfındaki normalize edilmiş harmonik fonksiyonlar için gerekli bir katsayı şartı tanımlayacağız. Daha sonra $U_H^{m,n}(\gamma,k,t)$ nin $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ alt sınıfı için bu şartın yeterli olduğunu kabul edeceğiz. Son olarak da $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ alt sınıfının extreme noktalarını, büyüme teoremlerini, konvulasyon şartlarını, konveks birleşimlerini ve genelleştirilmiş Bernardi-Libera-Livingston integral operatörünü bu alt sınıfındaki fonksiyonlar için özellikler belirteceğiz.

4.1 $U_H^{m,n}(\gamma,k,t)$ *Sınıfının Katsayı Hesabı*

Teorem 4.1.1:

$k \in [0,\infty)$, $m \in IN, n \in IN_0$ ve $0 \leq t \leq 1$ ve $\gamma \in C-\{0\}$, olsun. (1) gereği $f = h + \overline{g}$ şeklinde olduğunu kabul edelim.

Eğer

$$\sum_{p=2}^{\infty}\left\{2\left[(k+1)\left|p^m-p^n t\right|\right]+2\left|\gamma\right|p^n t\right\}\left|a_p\right|+\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left|(2\gamma-1)tp^n+(-1)^{m-n}p^m\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m-tp^n\right|\right\}\left|b_p\right|$$

$$\leq \left|2\gamma\right| \tag{4}$$

eşitsizliği sağlanırsa $f \in U_H^{m,n}(\gamma,k,t)$ dir ve f, U da harmonik, yön koruyan ve yalınkattır.

İspat :

$$\left|h'(z)\right| \geq 1-\sum_{p=2}^{\infty}p\left|a_p\right|r^{p-1} > 1-\sum_{p=2}^{\infty}p\left|a_p\right| \geq 1-\sum_{p=2}^{\infty}\frac{p\left[2(k+1)\left|p^m-p^n t\right|+2\left|\gamma\right|p^n t\right]}{2\left|\gamma\right|}\left|a_p\right|$$

$$\geq \sum_{p=1}^{\infty}\frac{p\left(\left|(2\gamma-1)tp^n+(-1)^{m-n}p^m\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m-tp^n\right|\right)}{2\left|\gamma\right|}\left|b_p\right|$$

$$\geq \sum_{p=1}^{\infty}p\left|b_p\right| \geq \sum_{p=1}^{\infty}p\left|b_p\right|r^{p-1} \geq \left|g'(z)\right|$$

eşitsizliği göz önüne alındığında f fonksiyonu U bölgesinde yön koruyan ve yerel yalınkat olduğunu ispatlamış oluruz. f fonksiyonunun U bölgesinde yalınkat olması için $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. U bölgesi basit bağlantılı ve konveks olduğundan dolayı $z_1, z_2 \in U$ $z_1 \neq z_2$ ve $0 \leq t \leq 1$ değeleri için

$$z(t)=(1-t)z_1+tz_2$$

eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca,

$$f(z_1)-f(z_2)=\int_0^1\left[(z_1-z_2)h'(z(t))+\overline{(z_1-z_2)g'(z(t))}\right]dt$$

olduğundan,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right)=\int_0^1\operatorname{Re}\left[h'(z(t))+\frac{\overline{(z_1-z_2)g'(z(t))}}{z_1-z_2}\right]dt > \int_0^1\left[\operatorname{Re}h'(z(t))-\left|g'(z(t))\right|\right]dt$$

yazılır. Fakat (4) gereği

$$\operatorname{Re}h'(z(t))-\left|g'(z(t))\right| \geq 1-\sum_{p=2}^{\infty}p\left|a_p\right|-\sum_{p=1}^{\infty}p\left|b_p\right| \geq 1-\sum_{p=2}^{\infty}\frac{2\left[(k+1)\left|p^m-p^n t\right|\right]+2\left|\gamma\right|p^n t}{2\left|\gamma\right|}\left|a_p\right|$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left|(2\gamma-1)tp^n+(-1)^{m-n}p^m\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m-tp^n\right|}{2\left|\gamma\right|}\left|b_p\right| \geq 0$$

elde edilir. Bundan dolayı f fonksiyonunun U bölgesinde yalınkat olduğu görülür.

Son olarak $f \in S_H$ (4) eşitsizliğini sağlar, $f \in U_H^{m,n}(\gamma,k,t)$ olduğunu ispatlarsak ispat tamamlanmış olur. (4) teki eşitsizliğe göre

$$A(z) = \gamma\left[(1-t)z + tD^n f(z)\right] + \left(1 + ke^{i\theta}\right)\left[D^m f(z) - (1-t)z - tD^n f(z)\right]$$

$$B(z) = \gamma\left[(1-t)z + tD^n f(z)\right]$$

iken

$$\operatorname{Re}\left(\frac{A(z)}{B(z)}\right) \geq 0$$

eşitsizliğin ispatlanması gerekir. Bu durumda

$$|A(z) + B(z)| - |A(z) - B(z)| \geq 0$$

koşulunun sağlaması gerekli ve yeterlidir.

Başka bir deyişle

$$|A(z) + B(z)| - |A(z) - B(z)| =$$

$$\Bigg|2\gamma z + \sum_{p=2}^{\infty}\left\{\left((2\gamma-1)tp^n + p^m\right) + ke^{i\theta}\left(p^m - tp^n\right)\right\}a_p z^p +$$

$$\overline{(-1)^n\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left((2\gamma-1)tp^n + (-1)^{m-n}p^m\right) + ke^{i\theta}\left((-1)^{m-n}p^m - tp^n\right)\right\}b_p z^p}\Bigg| -$$

$$\left|\sum_{p=2}^{\infty}\left(p^m - tp^n\right)a_p + (-1)^n\sum_{p=1}^{\infty}\left[(-1)^{m-n}p^m - tp^n\right]\overline{b_p} + ke^{i\theta}\left[\sum_{p=2}^{\infty}\left(p^m - tp^n\right)a_p + (-1)^n\sum_{p=1}^{\infty}\left((-1)^{m-n}p^m - tp^n\right)\overline{b_p z^p}\right]\right|$$

$$\geq |z|\left[2|\gamma| - \sum_{p=2}^{\infty}\left[\left|(2\gamma-1)tp^n + p^m\right| + (2k+1)\left|p^m - tp^n\right|\right]\left|a_p\right|\right] -$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left[\left|(2\gamma-1)tp^n + (-1)^{m-n}p^m\right| + (2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m - tp^n\right|\right]\left|b_p\right|$$

$$\geq |z|\left[2|\gamma| - \sum_{p=2}^{\infty}\left\{2\left[(k+1)\left|p^m - p^n t\right|\right] + 2|\gamma|\left|p^n t\right|\right\}\left|a_p\right|\right] -$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left[\left|(2\gamma-1)tp^n + (-1)^{m-n}p^m\right| + (2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m - tp^n\right|\right]\left|b_p\right|$$

olduğunu yazabiliriz. (4) den dolayı bu son eşitsizlik negatif değildir buda teoremin ispatladığını gösterir.

$\sum_{p=2}^{\infty}\left|x_p\right| + \sum_{p=1}^{\infty}\left|y_p\right| = 1$ olmak üzere

$$f(z)=z+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{2|\gamma|}{2(k+1)\left|p^m-tp^n\right|+2|\gamma|p^n t}x_p z^p+$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2|\gamma|}{\left|(2\gamma-1)tp^n+(-1)^{m-n}p^m\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m-tp^n\right|}\overline{y_p z^p}$$

fonksiyonu Teorem 4.1.1 deki katsayı eşitsizliğinin kesinliğini gösterir.

Teorem 4.1.1 yardımıyla $U_H^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfının $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ alt sınıfını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$, (4) koşulunu sağlayan , (1) şeklindeki $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarının ailesi olsun. $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)\subset U_H^{m,n}(\gamma,k,t)$ olduğu açıktır. ♦

4.2 $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ Sınıfının Extreme Noktaları

clco $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ ile tanımlanan $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ nin kapalı konveks kabuğunun extreme noktalarını aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 4.2.1: f , (1) ifadesinde verilen fonksiyon olsun. O zaman

$$h_1(z)=z,\quad h_p(z)=z+\frac{2|\gamma|}{2(k+1)\left|p^m-tp^n\right|+2|\gamma|p^n t}z^p;(p=2,3,...)$$

$$g_p(z)=z+\frac{2|\gamma|}{\left|(2\gamma-1)tp^n+(-1)^{m-n}p^m\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m-tp^n\right|}\left(\overline{z}\right)^p;(p=1,2,3,.....),$$

$\sum_{p=1}^{\infty}(x_p+y_p)=1,\ x_p\geq 0, y_p\geq 0$ olmak üzere,

$$f\in clcoU_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)\Leftrightarrow f(z)=\sum_{p=1}^{\infty}(x_p h_p+y_p g_p) \qquad (5)$$

olmasıdır. Özellikle , $\{h_p\}$ ve $\{g_p\}$, $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfının extreme noktalarıdır.

İspat : (5) şeklindeki fonksiyonlar için,

$$f(z)=\sum_{p=1}^{\infty}(x_p h_p+y_p g_p)=\sum_{p=1}^{\infty}(x_p+y_p)z+\sum_{p=2}^{\infty}\frac{2|\gamma|}{2(k+1)\left|p^m-tp^n\right|+2|\gamma|p^n t}x_p z^p+$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2|\gamma|}{\left|(2\gamma-1)tp^n+(-1)^{m-n}p^m\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m-tp^n\right|}y_p\left(\overline{z}\right)^p$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{2(k+1)\left|p^m-tp^n\right|+2|\gamma|p^nt}{2|\gamma|}\left(\frac{2|\gamma|}{2(k+1)\left|p^m-p^nt\right|+2|\gamma|p^nt}x_p\right)+$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left|(-1)^{m-n}p^m+(2\gamma-1)tp^n\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m-tp^n\right|}{2|\gamma|}$$

$$\left(\frac{2|\gamma|}{\left|(-1)^{m-n}p^m+(2\gamma-1)tp^n\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m-tp^n\right|}y_p\right)$$

$$=\sum_{p=2}^{\infty}x_p+\sum_{p=1}^{\infty}y_p=1-x_1\leq 1,$$

elde edilir, böylece $f\in clcoU_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ ifadenin doğru olduğu görülmüş olur.

Aksine,

$f\in clcoU_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ olsun. $\sum_{p=1}^{\infty}(x_p+y_p)=1$ iken

$$x_p=\frac{2(k+1)\left|p^m-p^nt\right|+2|\gamma|p^nt}{2|\gamma|}a_p \quad ; \quad p=2,3,.....$$

$$y_p=\frac{\left|(2\gamma-1)tp^n+(-1)^{m-n}p^m\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m-tp^n\right|}{2|\gamma|}b_p \quad ; \qquad p=1,2,......$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$f(z)=\sum_{p=1}^{\infty}\left(x_ph_p+y_pg_p\right)$$

şeklinde olurki bu da istenen sonuçtur. ♦

4.3 $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ Sınıfının Büyüme Teoremleri

Teorem 4.3.1: Eğer $f\in U_{\overline{H}}^{m,n,}(\gamma,k,t)$ ve $|z|=r<1$ şeklinde ise, bu durumda

$$|f(z)|\leq(1+|b_1|)r+\left(\frac{2|\gamma|}{2|\gamma|2^nt+2(k+1)\left|2^m-2^nt\right|}-\frac{\left|(2\gamma-1)t+(-1)^{m-n}\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}-t\right|}{2|\gamma|2^nt+2(k+1)\left|2^m-2^nt\right|}|b_1|\right)r^2$$

ve

$$\left|f(z)\right| \geq \left(1-\left|b_1\right|\right)r-\left(\frac{2|\gamma|}{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}-\frac{\left|(2\gamma-1)t+(-1)^{m-n}\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}-t\right|}{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}\left|b_1\right|\right)r^2$$

elde edilir.

İspat : Burada ispatı sadece sağ taraf için yapalım. Çünkü sol tarafın ispatı da benzer şekilde yapılır.

$f \in U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ olsun. f 'in mutlak değerini alırsak

$$\left|f(z)\right| \leq \left(1+\left|b_1\right|\right)r+\sum_{p=2}^{\infty}\left(\left|a_p\right|+\left|b_p\right|\right)r^n \leq \left(1+\left|b_1\right|\right)r+\sum_{p=2}^{\infty}\left(\left|a_p\right|+\left|b_p\right|\right)r^2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ ve (4)'ün tanımına göre,

$$\left|f(z)\right| \leq \left(1+\left|b_1\right|\right)r+\sum_{p=2}^{\infty}\left(\left|a_p\right|+\left|b_p\right|\right)r^n \leq \left(1+\left|b_1\right|\right)r+\sum_{p=2}^{\infty}\left(\left|a_p\right|+\left|b_p\right|\right)r^2$$

$$\leq \left(1+\left|b_1\right|\right)r+\frac{2|\gamma|}{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}{2|\gamma|}\left(\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\right)r^2$$

$$\leq \left(1+\left|b_1\right|\right)r+\frac{2|\gamma|}{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}{2|\gamma|}\left|a_p\right|+$$

$$\frac{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}{2|\gamma|}\left|b_p\right|$$

$$\leq \left(1+\left|b_1\right|\right)r+\frac{2|\gamma|}{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}\left(1-\frac{\left|(2\gamma-1)t+(-1)^{m-n}\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}-t\right|}{2|\gamma|}\left|b_n\right|\right)r^2$$

$$=\left(1+\left|b_1\right|\right)r+\left(\frac{2|\gamma|}{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}-\frac{\left|(2\gamma-1)t+(-1)^{m-n}\right|+(2k+1)\left|(-1)^{m-n}-t\right|}{2(k+1)\left|2^m-2^n t\right|+2|\gamma|2^n t}\left|b_1\right|\right)r^2$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. ♦

4.4 $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ *Sınıfının* ***Kapalılık Özellikleri***

Aşağıdaki teoremde $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfının konveks birleşim özelliğini vereceğiz.

Teorem 4.4.1: $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfı konveks birleşimler altında kapalıdır.

İspat : $j=1,2,3,..........$ için, f_j fonksiyonu

$$f_j(z)=z+\sum_{p=2}^{\infty}a_j z^p+\overline{\sum_{p=1}^{\infty}b_{j_p}z^p}$$

ile verilmek üzere, $f_j\in U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ şeklinde olduğunu kabul edelim. $\sum_{j=1}^{\infty}t_j=1$, $0\le t_j\le 1$ değerleri için f_j fonksiyonun konveks birleşimlerini

$$\sum_{j=1}^{\infty}t_j f_j(z)=z+\sum_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}t_j a_{j_p}\right)z^p+\overline{\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}t_j b_{j_p}\right)z^p}$$

şeklinde yazabiliriz.

$U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ ve (4) ifadesindeki tanıma göre $\sum_{j=1}^{\infty}t_j f_j(z)\in U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ olduğu görülür. ♦

Aşağıdaki teoremle $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfının konvolüsyon özelliklerini vereceğiz.

Teorem 4.4.2: Eğer f ve F fonksiyonları $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfında ise bu durumda $(f*F)\in U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ şeklinde olur.

İspat : $F\in U_{\overline{H}}^{m,n}(k,t)$ olduğundan ,

$$|A_p|\le\sum_{p=2}^{\infty}\left(\frac{2(k+1)|p^m-tp^n|+2|\gamma|p^n t}{2|\gamma|}\right)|A_p|\le 1, p\ge 2$$

ve

$$|B_P|\le\sum_{P=1}^{\infty}\left(\frac{|(2\gamma-1)tp^n+(-1)^{m-n}p^m|+(2k+1)|(-1)^{m-n}p^m-tp^n|}{2|\gamma|}\right)|B_p|\le 1, p\ge 1$$

şeklinde yazarız.

Böylece , $f\in U_{\overline{H}}^{m,n}(k,t)$ olduğundan

$$\sum_{p=2}^{\infty}\left\{2(k+1)\left|p^m - tp^n\right| + 2|\gamma| p^n t\right\}\left|a_p A_P\right| + \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left|(2\gamma-1)tp^n + (-1)^{m-n}p^m\right| + (2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m - tp^n\right|\right\}\left|b_p B_P\right|$$
$$\leq$$
$$\sum_{p=2}^{\infty}\left\{2(k+1)\left|p^m - tp^n\right| + 2|\gamma| p^n t\right\}\left|a_p\right| + \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left|(2\gamma-1)tp^n + (-1)^{m-n}p^m\right| + (2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m - tp^n\right|\right\}\left|b_p\right|$$
$$\leq 2|\gamma|$$

bulunur. Buradan $(f * F) \in U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ elde edilir. ♦

Son olarak

$$L_c(f(z)) = \frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1} f(t)dt; c > -1$$

ile tanımlanan $L_c(f)$ genelleştirilmiş Bernardi-Libera-Livingston integral operatörü altında $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfının kapalılık özelliklerini inceliyelim.

Teorem 4.4.3: $f \in U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ olsun. O zaman $L_c(f)$**,** $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ sınıfına aittir.

İspat : $L_c(f)$ gösteriminden , $A_p = \dfrac{c+1}{c+p}a_p$, $B_p = \dfrac{c+1}{c+p}b_p$ olmak üzere,

$$L_c(f(z)) = \frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1}\left(h(t) + \overline{g(t)}\right)dt = \frac{c+1}{z^c}\left\{\int_0^z t^{c-1}\left(t + \sum_{p=2}^{\infty} a_p t^p\right)dt + \overline{\int_0^z t^{c-1}\left(\sum_{p=1}^{\infty} b_p t^p\right)dt}\right\}$$
$$= z + \sum_{p=2}^{\infty} A_P z^p + \overline{\sum_{p=1}^{\infty} B_p z^p}$$

şeklinde ifade edilir. $U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ tanımına göre

$$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{2(k+1)\left|p^m - tp^n\right| + 2|\gamma| p^n t}{2|\gamma|}\frac{c+1}{c+p}\left|a_p\right| +$$
$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left|(2\gamma-1)tp^n + (-1)^{m-n}p^m\right| + (2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m - tp^n\right|}{2|\gamma|}\frac{c+1}{c+p}\left|b_p\right|$$
$$\leq \sum_{p=2}^{\infty}\frac{2(k+1)\left|p^m - tp^n\right| + 2|\gamma| p^n t}{2|\gamma|}\left|a_p\right| +$$
$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left|(2\gamma-1)tp^n + (-1)^{m-n}p^m\right| + (2k+1)\left|(-1)^{m-n}p^m - tp^n\right|}{2|\gamma|}\left|b_p\right|$$
$$\leq 1$$

yazabiliriz. Böylece Teorem 4.4.1 den $L_c(f) \in U_{\overline{H}}^{m,n}(\gamma,k,t)$ olduğu bulunur. ♦

KAYNAKLAR

[1] A.W.GOODMAN; *Univalent Functions, Volume I, Page 111; [1913-1/B-1341,p.9].*

[2] E.LINDELOF; *Memorie sur certains inegalities dans la theorie des fonctions monogeneswetsurquelques proprietes nouvelles de ces fonctions dans le Voisinage d'un point singulier essentiel.Acta Soc.Sci.Fenn.35(1909), no.7,1-35.*

[3] G.S.SALAGEAN, *Subclasses of univalent functions, Complexs Analysis-Fifth Seminar, Bucharest, 1.1983.pp.362-372.*

[4] H.SILVERMAN, E. M.SILVIA, S*ubclasses of Harmonic univalent functions, New Zealand J.Math. 28 (1999) 275-284,*

[5] H.SILVERMAN, *Harmonic univalent function with negative coefficients, J.Math.Anal.Appl.220 (1998) 283-289.*

[6] J.CLUNIE and T.SHEIL-SMALL; *Harmonik Univalent Functions, Ann.Sci.Fenn.Serr.A.I 9(1984),3-25.*

[7] J.E.LITTLEWOOD; *On inequalities in the theory of functions. Pro.london Math.Soc.23(1925),481-519 and Lectures on the theory of functions. Oxford Universty Pres: London,1944.*

[8] J.M.JAHANGIRI, *Harmonic functions starlike in the unit disk, J.math.Anal.Appl.235 (1999) 470-477.*

[9] JAY MAY. JAHANGIRI, G.MURUGUSUNDOROMOORTHY, K.VIJAYA; *Salagean Type Harmonic Univalent Functions Lecture Notes , December 31 2002.*

[10] L.V.AHLFORS ; *Complex Analysis (Third Edition, McGraw Hill, New York , 1979).*

[11] Om P.AHUJA, AGHALARY R AND JOSHI S.B; *Harmonic Univalent Functions associated eith k.uniformly starlike functions, Math. Sci.Res. J. 9(1) 2005 , 9-17.*

[12] Om P. AHUJA and J. M. JAHANGIRI ; *Noshiro type Harmonic Univalent Functions Mathematicia (Japonicae), 2 (2002), 253-259.*

[13] P.L DUREN; *Univalent Functions, Grundlehren dep Math. Wissenchaften 259, Springer-Verlag,New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo,1983.*

[14] SİBEL YALÇIN*; A New Class of Salagean Type Harmonic Univalent Functions Lecture Notes, May 1 2004.*

[15] S. KANAS and A.WISNIOWSKA , *Conic Regions and k-uniform Convexity, J.Comput Ann 105 (1999) 327-336.*

[16] S. KANAS and A.WISNIOWSKA, *Conic Regions and k-starlike functions Rev. Roumanie. Math Pures Appl.. 45 (2002) 647-657.*

[17] T.ROSY, B.ADOLPH STTEPHEN and K.G.SUBRAMANIAN, GOODMAN *Ronning Type Harmonik Univalent Functions.Kyungpook Math. J.4([2001)45-54.*

[18] T.SHEILL-SMALL, *Constants for Planar Harmonic Mapping, J.London Math.Soc. 42(2) (1990) 237-248.*

[19] Y.AVCI, E.ZLOTKIEWICZ, *On Harmonic univalent mappings. Ann.Univ.Marie Curie Sklodowska Sect.A .44 (1990) 1-7.*

[20] W.W. ROGOSINSKI; *On Subordinate Functions. Proc. Cambridge Philos.Soc, 35(1939) , 1-26 and On the coefficients of Subordinate Functions. Proc. London Math.Soc, 48(1943), 48-82.*

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Gülbahar BAYKARA

Doğum Tarihi : 15.07.1983

Medeni Hali : Evli

Ünvanı : Matematikçi

EĞİTİMİ

Orta Öğretim : Bursa Merinos İlköğretim Okulu

Lise : Bursa Atatürk Lisesi 1996-1999

Lisans : Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü 2000-2004

ADRES

Ev : Fırat Bulvarı Yeşil Yurt Sitesi B Blok Kat:2 No:7
DİYARBAKIR/ Gaziler