T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

HADAMARD ÇARPIM İLE TANIMLI k-DÜZGÜN ÇOKDEĞERLİ HARMONİK FONKSİYONLARIN YENİ BİR SINIFI

F. MÜGE SAKAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK ANABİLİM DALI)

DİYARBAKIR

TEMMUZ-2008

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Fethiye Müge SAKAR tarafından yapılan "Hadamard Çarpım ile tanımlı k-düzgün Çokdeğerli Harmonik Fonksiyonların Yeni bir Sınıfı" konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Doç.Dr.	H.Özlem GÜNEY (Danışman)
Üye :	Prof.Dr.	Muhammet KAMALI
Üye :	Prof. Dr.	Sezai OĞRAŞ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 03 / 07 / 2008

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2008

Prof. Dr. Necmettin PİRİNÇÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde ve karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında yol gösterici olan, yaşama dair her konuda her zaman ilgi ve desteğini hep yanımda hissettiğim,
Sayın danışman hocam;

Doç. Dr. H. Özlem GÜNEY ’e,

Tezimin oluşturulması sırasında bilgi ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen Sayın hocam;

Prof. Dr. Om. P. Ahuja ’ya,

Tezimi oluştururken her zaman daha iyisini yapabilmem için benden yardımlarını esirgemeyen sevgili eşim ***M. Nafi SAKAR’a*** ve hayatımda ondan daha değerli hiçbirşey olmadığına tüm kalbimle inandığım birtanecik ***oğluma,***

Tüm yaşantım boyunca her zaman desteklerini gördüğüm, bana duydukları sevgi, anlayış ve güvenle beni bu günüme getiren canım ***anneme ve babama,***

Son olarak bu çalışmayı 07-02-21 nolu projeyle destekleyen Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu - ***DÜBAP***’ a katkılarından dolayı,

Sonsuz teşekkürler….

F.Müge SAKAR

İ Ç İ N D E K İ L E R

A M A Ç

Son zamanlarda harmonik fonksiyonlar kuramı, karmaşık analiz alanında çalışan pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Herhangi bir fonksiyonun harmonik yalınkat olması durumu, bu fonksiyonun davranışının belirlenmesinde oldukça önemli rol oynamaktadır.

Bu çalışmadaki amacımız, öncelikle, harmonik fonksiyonların yeni bir alt sınıfını tanımlamak ve bu sınıf ile ilgili bazı önemli teoremleri ispatlamaktır.

Bir diğer amacımız ise, özellikle birinci bölüm ile bu alanda çalışan araştırmacılara yol gösterici bir kaynak oluşturmaktır.

Ö Z E T

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi. Ayrıca bu bölümde h, g birim diskte analitik fonksiyonlar olmak üzere $h(0)=g(0)=h'(0)-1=0$ şeklinde normalize edilmiş, yön koruyan harmonik yalınkat $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ tipindeki fonksiyonların S_H sınıfı ve bunun alt sınıflarının temel özellikleri incelendi.

İkinci bölümde, çokdeğerli harmonik fonksiyonların $H(p)$ sınıfının $H_F(p,t,\alpha,k)$ ve $H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ ile adlandırılan yeni iki özel alt sınıfı çalışıldı. Ayrıca bu sınıflar ile ilgili Katsayı Kestirimleri, Büyüme sınırları, extreme noktaları ve Kapalılık özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelendi.

SUMMARY

This work consists of three chapters.

In the *first chapter*, basic definitions and theorems, which will be used in other chapters are given. Furthermore, the class S_H of sense preserving univalent harmonic functions $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ normalized by $h(0)=g(0)=h'(0)-1=0,$ where h and g are analytic functions on unit disk, and the fundamental properties of its subclasses are investigated in this chapter.

In the *second chapter* , which consists of the main part of our study, two special subclasses named $H_F(p,t,\alpha,k)$ and $H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ of the class $H(p)$ of harmonic multivalent functions are defined. Furthermore, coefficient estimates, distortion boundary, extreme points and closure properties concerned with this classes are shown with details.

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
U	$\{z : z \in \mathbb{C} \ ve \ \lvert z\rvert < 1\}$ şeklindeki açık birim disk
$f(U)$	U nun f fonksiyonu altındaki görüntüsü
f_z	f fonksiyonunun z'ye göre türevi
$\overline{f}$	f fonksiyonunun eşleniği
$\operatorname{Im} f$	f fonksiyonunun imajiner kısmı
$\operatorname{Re} f$	f fonksiyonunun reel kısmı
Δu	U nun Laplasiyeni
S	Normalize edilmiş yalınkat fonksiyonların sınıfı
S^*	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
K	Konveks fonksiyonların sınıfı
P	Gerçel kısmı pozitif olan fonksiyonların sınıfı
$f * g$	f ve g fonksiyonlarının hadamard çarpımı
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir.
$K(z)$	$\dfrac{z}{(1-z)^2}$, Koebe fonksiyonu
A	Analitik fonksiyonların sınıfı
$H(p)$	Çokdeğerli harmonik fonksiyonlar sınıfı
S_H	Yön koruyan, harmonik, yalınkat fonksiyonların sınıfı
$S^0{}_H$	$g'(0)=0$ bağıntısını sağlayan $f(z) \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı
$\overline{S_H}$	S_H sınıfının kapanışı
$J_f(z)$	f fonksiyonunun z deki jakobiyeni
$d_f(z)$	f fonksiyonunun z'deki tam diferansiyeli

$\alpha(z)$	f fonksiyonunun genişlemesi
$\overline{co}A$	A yı bulunduran bütün kapalı konveks kümelerin kesişimi
P_H	Reel kısmı pozitif normalize edilmiş harmonik fonksiyonların sınıfı
PR_H	Reel katsayılı $f \in P_H$ fonksiyonların sınıfı
μ	Olasılık ölçüsü
CRA	Yalınkat ve reel eksen yönünde konveks fonksiyon
$h^{(n)}$	h ın n. mertebeden türevi
$\Delta_\Gamma \arg(f(z))$	$f(z)$ nin argümanının değişimi.
$k-UCV$	$k-$ düzgün konveks fonksiyonların sınıfı
$k-ST$	$k-$ yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$k-UCV(\alpha)$	α mertebeli $k-$ düzgün konveks fonksiyonların sınıfı
$k-ST(\alpha)$	α mertebeli $k-$ yıldızıl fonksiyonların sınıfı

ÖNSÖZ

Düzlemde harmonik dönüşüm, reel ve sanal kısımları eşlenik olmayan yalınkat, karmaşık değerli harmonik fonksiyonlardır. Bir başka ifadeyle, Cauchy-Riemann eşitsizliklerini sağlamayan ve dolayısıyla analitik olmak zorunda olmayan fonksiyonlardır.

Düzlemsel harmonik yalınkat dönüşümler minimal yüzeylerin gösteriminde kullanılmaktadır. Örneğin, E. Heinz [6], 1952 yılında bu gösterimleri birim disk üzerinde parametrik olmayan minimal yüzeylerin Gaussion eğriliğinin çalışmalarında kullanmıştır. Mühendislik, fizik, elektronik, tıp, aerodinamik ve matematik biliminin diğer branşlarında da kullanılmaktadır.

Düzlemde harmonik dönüşümler teorisinin gelişmesi iki temel esasa dayanmaktadır**.** 1920'lerin başında diferansiyel geometriciler minimal yüzeyler teorisindeki doğal rollerinden dolayı harmonik dönüşümleri çalışmışlardır. İzotermal parametreler ile minimal yüzeylerin gösteriminde üç koordinat fonksiyonların her biri harmoniktir**.** Böylece onun temel düzlemindeki parametrik olmayan minimal bir yüzeyin izdüşümü bir harmonik dönüşümü ifade etmektedir. Gauss eğriliği gibi minimal yüzeylerin özellikleri bu harmonik dönüşümlerle etkili olarak çalışılabilir. Tibar, Rado, Lipman Bers, Erhard Heinz, Johannes Nitsche ve diğerleri harmonik dönüşümler ve minimal yüzeyler arasındaki ilişkiyi örneklemek için (1960'dan önce) ilk katkılarını yapmışlardır.

Harmonik yalınkat dönüşümler konformal dönüşümlerle yakından ilişkilidir. Fakat konformal dönüşümlerin aksine, harmonik yalınkat dönüşümler görüntü bölgeleriyle belirlenmez. Aralarındaki diğer önemli bir fark ise, harmonik yalınkat dönüşümlerin değerini, açık birim diskin sınırındaki aralık üzerinde almasıdır. Diğer taraftan, harmonik dönüşümler karmaşık değerli z ve z'nin eşleniği olan $\bar{z}$ ile sırasıyla analitik ve anti-analitik kısımdan oluşmuş iki katlı seri yapısına sahiptirler. Bu nedenle, Fourier serilerine benzer bir kuvvet serisi sayılırlar. Harmonik yalınkat dönüşümlerin çalışması bu ilginç özelliğinden dolayı oldukça önemlidir.

Son zamanlarda karmaşık analizciler konformal dönüşümlerin bir genelleştirmesi olarak harmonik dönüşümleri çalışmışlardır. Bir çalışmada James Clunie ve Terry Sheil-Small genişletilmiş tahminlerin belli formlarının hala belirlenmemiş olmasına rağmen klasik büyüme ve bükülme teoremlerinin, örtü teoremlerinin ve katsayı tahminlerinin geçerli bir benzerliğini bulmuşlardır. Bu kişiler aynı zamanda klasik Koebe Fonksiyon Teorisinde extremal rol oynayan bir "*Harmonik Koebe Fonksiyonunu"* da oluşturmuşlardır. Bunlar harmonik dönüşümler için özel geometrik özellikler ile bazılarının sağlandığı zarif ve mantıklı olan varsayımı ortaya çıkarır. Clunie ve Sheil Small'ın çalışması diğer karmaşık analizcilerin ilgisini çekmiştir ve harmonik dönüşümler araştırmalarda yeniden aktif bir alan haline gelmiştir.

Bu teorinin başka bir yönü, "*Riemann Dönüşüm Teoremi'nin"* uygun bir harmonik benzerini araştırmaktır. Buradaki konu kısmi diferansiyel eşitlikler ve hemen hemen konformal dönüşümler teorisi arasında bir ilişki kurabilmektir. 1980'lerde Walter Hengartner ve Glenn Schober diğerlerine ait bu konuyla ilgili, bir dizi makale yazmışlardır. Hemen hemen konformal dönüşümler hakkındaki standart sonuçlar özellikle Beltrami eşitliğinin çözümü gibi, hemen hemen konformal homeomorfizimlerin varlığı Riemann Teoreminin ayrıntılı bir genelleştirmesini ortaya koymaktadır. Basit bağlantılı bir Ω bölgesi, Ω da bir w_0 noktası ve U birim diskindeki $|w(z)|<1$ özelliğini sağlayan analitik bir w fonksiyonu verilmiş olsun. Ω daki U bölgesinde $f(0)=w_0$, $f_z(0)>0$ özellikleri ve $w=\overline{f_{\bar{z}}}/f_z$ analitik genişlemesi ile tek bir (yön koruyan) $f(z)$ dönüşümü vardır. Bununla beraber Riemann'ın Teoreminin bir genişlemesi yanlış olarak ortaya çıkmıştır. Hengartner ve Schober basit zıt örnekleri bulmuşlardır ve verilen bölgedeki genişletilmiş harmonik dönüşümün varlığını önleyen "çökertme" adlı gizemli bir olguyu keşfetmişlerdir. Bununla beraber eğer, genişlemeye daha ileri kısıtlamalar yapılırsa yada üzerine terimi daha zayıf olarak göz önüne alınırsa dönüşümün varolduğu söylenebilir.

Tekliğin sorusu ise tamamen bilinmemektedir. Fakat eğer hedef bölge yeteri kadar iyi ise, dönüşümün tek olduğu bilinir. Eğer hedef bölge konveks ise, durum daha uygun olur. Verilen konveks bölge üzerine harmonik dönüşümler sınıra tekabül edenlerin terimleriyle tam olarak tanımlanabilirler. Bu Rado-Kneser-Choquet Teoremi olarak bilinen mükemmel bir sonucun içeriğidir.

Bu harmonik dönüşümlerin üç ardışık sınır değeri ile ifade edilebilen konformal dönüşümlerden daha esnek bir yapıda olduğunu gösterir. Teorem konveks harmonik dönüşümler için extremal problemlerin etkili bir çalışmasını ortaya koyar. Diğer bir sonuç harmonik dönüşümlerdeki, Caratheodory's yakınsama teoreminin ihmal edilmesiyle ortaya çıkmıştır. Fakat ihmal durumu doğru bir genelleştirmenin nasıl formüle edilebileceğini önermektedir.

Düzlemde harmonik dönüşümler onların daha yüksek boyuttaki benzerleri ile paylaşılamayan birçok mükemmel özelliğe sahiptirler. Bu sınıflandırmada bazı açık problemlerin hala var olmasına rağmen, üç boyutlu uzaya bu özelliği genelleştirmek için yapılan çalışmalar hayal kırıklığı ile sonuçlanmıştır.

1. BÖLÜM

HARMONİK YALINKAT DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde, ilk olarak harmonik yalınkat fonksiyonların daha iyi anlaşılabilmesi için analitik ve yalınkat fonksiyonlar ile bunların bazı alt sınıfları için birtakım önemli tanım, teorem ve sonuçlar verilecek, daha sonra, yön koruyan harmonik yalınkat dönüşümlerin bazı temel özellikleri ve bu dönüşümlerin konform dönüşümlerle aralarındaki farklar ile normalize edilmiş yön koruyan harmonik yalınkat dönüşümlerin S_H *sınıfı ve bunun alt sınıflarının bazı özellikleri verilecektir.*

1.1 Genel Bilgiler

Bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinin her iç noktasında türevlenebilen fonksiyonlara ***analitik fonksiyon*** denir [9].

Bir f fonksiyonunun D bölgesinde ***yalınkat fonksiyon*** olabilmesi için,

$$\forall\ z_1, z_2 \in D \text{ için } f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

önermesi sağlanmalıdır [23]. Yani f fonksiyonu bu bölgedeki, bir tek noktada aynı değeri iki kez almıyorsa, f fonksiyonuna D ***bölgesinde yalınkattır*** denir. Yalınkat fonksiyonlara tek katlı, univalent veya schlicht fonksiyon da denilmektedir.

D bölgesindeki yalınkatlık D nin her alt bölgesinde de sağlanır. Bir D bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu bir $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda yalınkat ise, f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında ***yerel yalınkat fonksiyon*** denir. Bir fonksiyonun yerel yalınkat olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır. Ayrıca bir bölgede yerel yalınkat olan bir analitik fonksiyon yalınkat olmak zorunda değildir.

Eğer f fonksiyonu, Ω bölgesinde analitik, yalınkat ve f, Ω dan D ye tanımlanmış bir fonksiyon ise, f fonksiyonuna $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesinin bir ***Konformal Dönüşümü*** denir. Harmonik dönüşümler teorisinin çoğu, klasik konformal dönüşümler teorisinden esinlenmiştir.

Bir bölge açık bağlantılı bir küme olarak tanımlanır. Eğer bu bölgenin karmaşık uzaya genişlemesi de bağlantılı ise, bu bölgeye ***Basit Bağlantılıdır*** denir.

$D_1 \neq \mathbb{C}$ olmak üzere D_1, z-düzleminde verilen herhangi bir basit bağlantılı bölge ve D_2, w-düzleminde verilen herhangi bir basit bağlantılı bölge olsun. 1851'de G.Bernard Riemann, D_1 bölgesini D_2 bölgesi üzerine dönüştüren analitik bir f fonksiyonunun her zaman var olduğunu göstermiştir. *Riemann Dönüşüm Teoreminin* bu orijinal versiyonu *Geometrik Fonksiyon Teorisinin* doğuşuna neden olmuştur. Fakat bu teorem tamamlanamamıştır ve birçok uygulaması da 20. yüzyılın başlarına kadar bulunamamıştır. Koebe [23], 1907'de basit bağlantılı bir D bölgesinde hem analitik hem de yalınkat olan fonksiyonları elde etmiştir.

$U=\{z : z \in \mathbb{C} \;\; ve \;\; |z|<1\}$ birim diskinde analitik, yalınkat ve $f(0)=f'(0)-1=0$ normalleştirme koşullarını sağlayan f fonksiyonuna ***normalize edilmiş yalınkat fonksiyon*** denir [30]. Bu fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Her $f \in S$ fonksiyonu,

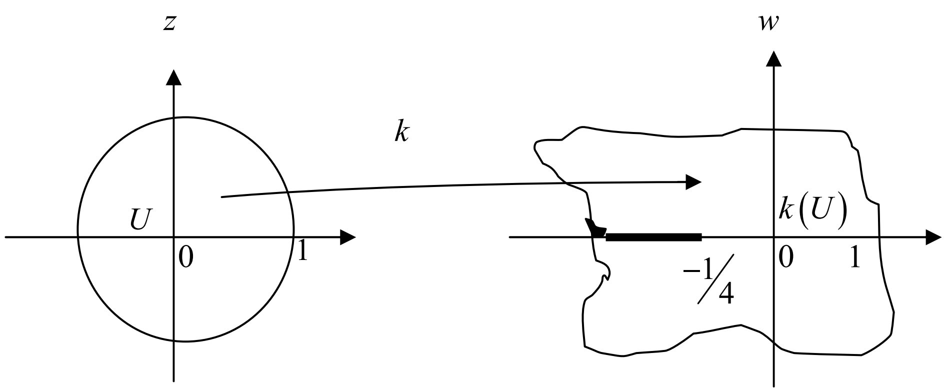
$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde bir Taylor Serisi ile ifade edilebilir .

S sınıfındaki bir fonksiyonun en iyi örneği, extremal fonksiyon olarak bilinen ve

$$k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right] = \frac{(1+z)^2 - (1-z)^2}{4(1-z)^2} = z(1-z)^{-2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$$

şeklinde ifade edilen ***Koebe Fonksiyonu'***dur. Bu fonksiyon $U=\{z : |z|<1\}$ birim diskini $w = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ dönüşümüyle $-1/4$ den $-\infty$' a kadar kesilmiş düzlem üzerine konformal olarak dönüştürür (Şekil 1.1.1).



Şekil 1.1.1

Koebe fonksiyonunun birim diski resmettiği bölgenin “maksimal” özelliği, simetrik oluşu ve katsayılarının ölçüsü bizi, 1916 yılında Bieberbach tarafından ortaya atılmış ve uzun yıllar kestirim olarak kalmış Bieberbach Kestirimine götürür. Louis de Branges tarafından 1984 yılında tam ispatı yapılan ***Bieberbach Kestirimi,*** f fonksiyonu S sınıfında,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki Maclaurin açılımına sahip ise, her bir $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağladığını söyler [5].

S sınıfına ait bir f fonksiyonunun ikinci katsayısı ünlü Bieberbach Tahminine temel olan ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$ olması durumunda $|a_2| \leq 2$ olduğunu ileri süren ***Bieberbach Teoremi*** ile hesaplanabilir. Eşitlik halinin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun, Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olan ,

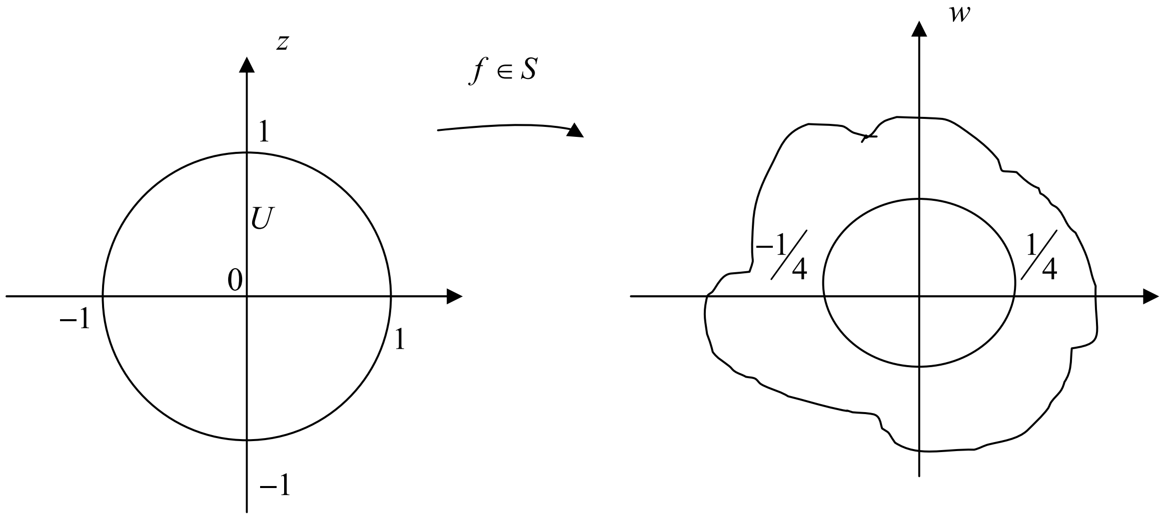
$$f(z) = e^{-i\theta} k\left(e^{i\theta} z\right) = \frac{z}{\left(1 - e^{i\theta} z\right)^2} \tag{1.1.1}$$

şeklinde olmasıdır. Biliyoruz ki, eğer verilen koşullar altında, eşitsizlik için üst sınırı azaltmak veya alt sınırı arttırmak imkansız ise, bu eşitsizlik ***kesindir***. Bu gerçek altında, $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği kesindir. Eşitliği sağlayan fonksiyona da ***ekstremal fonksiyon*** denir. Böylece (1.1.1) ile verilen fonksiyon ekstremal bir fonksiyon olur [32].

Bieberbach Teoreminin ilk uygulaması ünlü bir örtme teoremidir. Her bir $f \in S$ fonksiyonu $f(0) = 0$ koşullu bir dönüşüm olduğundan f fonksiyonunun görüntüsü orjinde olan en az bir diski kapsar. Özellikle, Koebe fonksiyonu, $\rho \leq \frac{1}{4}$ olmasını gerektirir. Yani, S sınıfındaki her bir fonksiyonun görüntüsü $\left\{ w : |w| \leq 1/4 \right\}$ diskini kapsar (Şekil 1.1.2). Buna göre f fonksiyonu için en kesin alt ve üst sınırları bulmamız her bir $f \in S$ için ;

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \qquad ; |z| = r < 1 \tag{1.1.2}$$

eşitsizliği sağlayan ***Koebe Bükülme Teoremi*** ile mümkün olacaktır. Her iki eşitsizlik de kesindir. f in, $z \in U, z \neq 0$ olmak üzere Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi halinde eşitlik durumu vardır.



Şekil 1.1.2

Bieberbach [14] ilk olarak bir yalınkat fonksiyonun türevinin argumanı ile ilgili olan ve $f \in S$ ise U birim diskindeki her bir z için,

$$\left|\arg f'(z)\right| \leq 2\ln\frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliğinin sağlandığını söyleyen teoremi ispatlamıştır. Bu eşitsizlik kesin değildir. Daha sonra Loewner'e [27] ait daha karmaşık yöntemler kullanarak, Rus matematikçi G.M.Glouzin [12], 1936 yılında daha kesin olan $f \in S$ ise,

$$\left|\arg f'(z)\right| \leq \begin{cases} 4\arg\sin r & , r \leq \sqrt{2}/2 \\ \pi + \ln\dfrac{r^2}{1-r^2} & , \sqrt{2}/2 < r < 1 \end{cases}$$

eşitsizliğinin var olduğunu söyleyen ***Dönme Teoremini*** bulmuştur. Bükülme teoreminde verilen eşitsizliğinin integralini alırsak, $|f(z)|$ fonksiyonu için sınırları elde edemeyebiliriz. 1924 yılında Pravilov [14] bu düşünceyi genelleştirerek $0 \leq r < 1$ için $m'(r)$ ile $M'(r)$ gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$$m'(r) \leq \left|f'(z)\right| \leq M'(r) \qquad (1.1.3)$$

olduğu kabulü altında,

$$\int_o^r m'(t)\,d_t \le |f(z)| \le \int_o^r M'(t)\,d_t$$

eşitsizliğinin sağlandığını bulmuştur. Bükülme teoremine göre (1.1.3) de, $m'(r) = \dfrac{1-r}{(1+r)^3}$ ve $M'(r) = \dfrac{1+r}{(1-r)^3}$ alabiliriz. Bu durumda, integral alırsak her $f \in S$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2} \qquad ; |z| = r < 1$$

şeklindeki ***Büyüme Teoremini*** elde etmiş oluruz.

θ gerçel olmak üzere, sırasıyla $z = re^{-i\theta}$ ve $z = -re^{-i\theta}$ alındığında $f(z) = z\left(1 + ze^{i\theta}\right)^{-2}$ fonksiyonu için eşitlik sağlanır [9]. Büyüme ve Bükülme Teoremlerinin birleştirilmesiyle elde edilen,

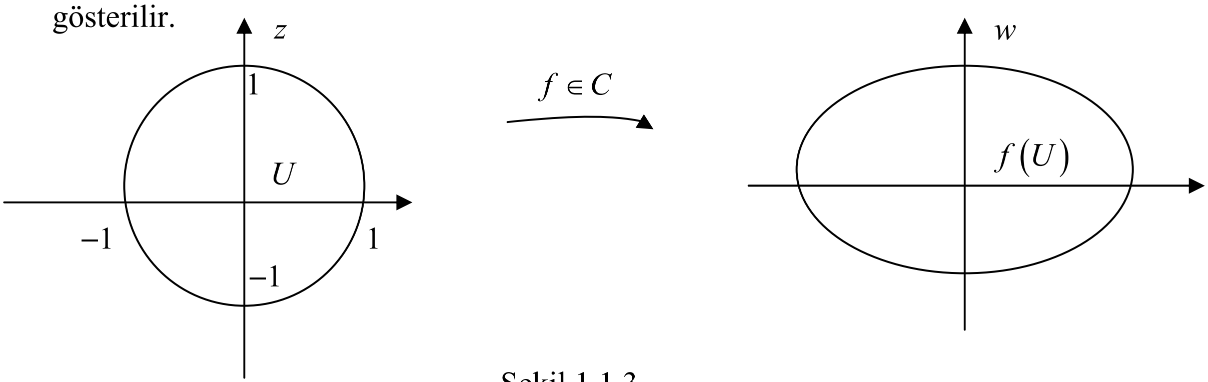
$$\frac{1-|r|}{1+|r|} \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+|r|}{1-|r|} \qquad ; z = r < 1$$

şeklindeki eşitsizliğinin olduğunu söyleyen bir diğer ifade ise daha kullanışlıdır. $z \in U$ ve $z \ne 0$ olmak üzere eşitlik durumu f in Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi halinde vardır [9].

S sınıfının önemli bir alt sınıfı konveks fonksiyonlardan oluşur. Düzlemdeki bir D kümesi içinden alınan z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçası tamamen D bölgesi içinde kalıyorsa D ye ***Konveks (dışbükey) Küme*** denir.

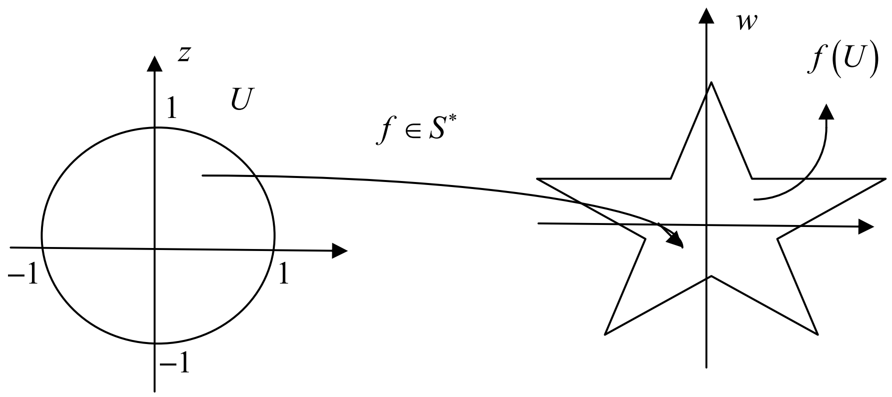
Herhangi bir dairesel disk veya yarı düzlem bir konveks kümedir.

U birim diskinde analitik ve görüntü kümesi konveks olan fonksiyonlara ise ***Konveks Fonksiyonlar*** denir [15].(Şekil 1.1.3). Konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir.



Şekil 1.1.3

S sınıfının diğer önemli bir alt sınıfı ise, yıldızıl fonksiyonlardan oluşur. Bir $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ için, z_0 noktasından çıkan her ışın ile D nin arakesiti tümüyle D de kalan doğru parçası veya bir ışın ise D bölgesine z_0 ***noktasına göre yıldızıldır*** denir. Eğer D bölgesi her $z \in D$ için yıldızıl ise yıldızıl bölge olur. U birim diskinde analitik ve görüntü kümesi orjine göre yıldızıl olan fonksiyonlara ise ***Yıldızıl Fonksiyonlar*** denir (Şekil 1.1.4) [15]. Yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.



Şekil 1.1.4

$p(0)=1$ ve $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşulu ile U bölgesinde analitik

$$p(z)=1+a_1z+a_2z^2+...$$

fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye ***Pozitif Gerçel Kısımlı Fonksiyonlar*** sınıfı denir ve $\wp$ ile gösterilir. Bu sınıf S^* ve C sınıfları ile yakından ilgilidir.

f fonksiyonu, konveks bir D bölgesinde analitik ve bu bölgede $\operatorname{Re} f'(z)>0$ ise, f fonksiyonu, D bölgesinde yalınkattır denir [9]. Bu ifade, ***Noshiro-Warschawski Teoremi*** olarak bilinmektedir.

U birim diskinde analitik olan ve

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z_n$$

gösterimine sahip fonksiyonların kümesi A olsun.

Yalınkat fonksiyonların bazı özel sınıfları, pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar yardımıyla tanımlanabilir. U bölgesinde analitik,

$f(0)=f'(0)-1=0$ normalize koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu için,

$$f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'}{f} \in \wp$$

ve

$$f \in C \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''}{f'} \in \wp$$

önermeleri doğrudur [9]. Başka bir ifade ile,

$f \in A$ fonksiyonunun U da konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul,

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \qquad ;\forall z \in U$$

olmasıdır [9].

$f \in A$ fonksiyonunun U da yıldızıl olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \qquad ;\forall z \in U$$

olmasıdır [9].

f fonksiyonu U bölgesinde $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşullarıyla normalleştirilmiş olmak üzere,

$$f \in C \Leftrightarrow zf' \in S^*$$

önermesini sağlar. Bu ifade yalınkat fonksiyonların alt sınıfları arasındaki ilişkiyi verir ve ***Alexander Teoremi*** olarak bilinir [9].

Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları için,

$$C \subset S^* \subset S$$

şeklindeki kapsama zinciri yazılabilir.

Yukarıdaki tanımlara örnek olarak,

$$\frac{z}{1-z}, \quad \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad \text{ve} \quad \frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonları verilebilir. Bu fonksiyonların ilk ikisi konveks fonksiyon olduğu halde $\frac{z}{(1-z)^2}$ ile verilen Koebe Fonksiyonu konveks olmayıp yıldızıl bir fonksiyondur.

S^* sınıfını kapsayan ve S sınıfının bir alt sınıfı olan fonksiyonlar konvekse-yakın fonksiyonlardır. Bu sınıf 1952 yılında Kaplan tarafından geliştirilmiştir.

Bir f fonksiyonu $|z|<1$ bölgesinde analitik olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}>0$$

olacak şekilde konveks bir g fonksiyonu veya eşdeğer olarak

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\}>0$$

eşitsizliğini sağlayan yıldızıl bir g fonksiyonu varsa f fonksiyonuna ***konvekse-yakın fonksiyon*** denir. $f(0)=f'(0)-1=0$ normalleştirme koşullarını sağlayan yani normalleştirilmiş konvekse-yakın f fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir. Özel bir alt sınıfını $g \in \mathbb{C}$ olmak şartıyla K_0 olarak alabiliriz. f fonksiyonunun yalınkat olmak zorunda olmadığına ve g fonksiyonunun da $g(0)=g'(0)-1=0$ şeklindeki normalleştirme koşullarını sağlamak zorunda olmadığına dikkat edilmelidir.

Konvekse-yakın fonksiyonlar için Kaplan Teoremi olarak bilinen aşağıdaki ifade önemlidir.

f fonksiyonu, $U=\{z:|z|<1\}$ bölgesinde analitik, yerel yalınkat ve $f'(z)\neq 0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konvekse-yakın olması için gerekli ve yeterli şart $\theta_1<\theta_2$ ve $z=re^{i\theta}$ olmak üzere,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta>-\pi$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [9].

Burada $f'(z)\neq 0$ koşulu gereklidir. Aksi takdirde $f(z)=z^n \;\; ;(n\geq 1)$ fonksiyonu teoremi gerçekler. Fakat yalınkat değildir. Böylece konvekse yakın da olamaz.

Konveks, yıldızıl ve konvekse-yakın fonksiyon sınıfları için aşağıdakiler yazılabilir.

- Her konveks fonksiyon konvekse-yakındır.
- Her yıldızıl fonksiyon konvekse-yakındır.
- Her konvekse-yakın fonksiyon yalınkattır.

Bunu kısaca

$$C \subset S^* \subset K \subset S$$

şeklinde ifade etmek mümkündür.

Son olarak analitik yalınkat fonksiyonlar ile ilgili aşağıdaki tanım ve özellikleri verelim.

$f_k(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n_k} z^n \in A$ için, $k = 1, 2...$ olmak üzere,

$$(f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n_1} a_{n_2} z^n = (f_2 * f_1)(z)$$

ifadesine f_1 ve f_2 fonksiyonlarının ***Hadamard Çarpımı (Konvolusyon)*** denir.

Bu tanım ışığında Hadamard çarpımı adi çarpma işleminin cebirsel özelliklerine sahiptir.

$k = 1, 2...$ olmak üzere, $f_k(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{nk} z^n \in A$ için,

1. $[f_1 * (cf_2)](z) = c(f_1 * f_2)(z)$
2. $[f_1 * (f_2 + f_3)](z) = (f_1 * f_2)(z) + (f_1 * f_3)(z)$
3. $[f_1 * (f_2 * f_3)](z) = [(f_1 * f_2) * f_3](z)$ şeklindedir.

$\dfrac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ geometrik serisi S sınıfı için Hadamard çarpım işlemine göre birim elemandır. Hadamard çarpım işleminin uygulamalarından biri, analitik fonksiyonlar sınıfının alt sınıflarının bu çarpım sonucunda korunup korunmamasıdır. Ruscheweyh ve Sheil-Small [36], Hadamard çarpım işleminin bu uygulaması ile ilgili Polya-Schoenberg tahminini ve aşağıdaki sonuçları ispat etmişlerdir.

$$f(z) \in K,\ g(z) \in K \quad ise \quad (f * g)(z) \in K$$

$$f(z) \in K,\ g(z) \in C \quad ise \quad (f * g)(z) \in C$$

$$f(z) \in K,\ g(z) \in S^* \quad ise \quad (f * g)(z) \in S^*$$

Hadamard çarpım işleminin bir diğer uygulaması da bazı analitik fonksiyon sınıflarının analitik ifadesidir. Ruscheweyh [37], Silverman, Silvia, Telage [40] tarafından verilen bazı sonuçları ise aşağıdaki şekilde verebiliriz.

U birim diskinde analitik $\quad f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \quad$ bir fonksiyonunun

1. Yalınkat olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$f(z)*\frac{z}{(1-xz)(1-yz)}\neq 0; \qquad 0<|z|<1, \ \ |x|\leq 1, \ \ |y|\leq 1, \ \ x\neq y$$

2. Yıldızıl olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$f(z)*\frac{1}{1+ix}\left[\frac{z}{(1-z)^2}+ix\frac{z}{1-z}\right]\neq 0; \qquad x\in\mathbb{R}, \ \ 0<|z|<1$$

3. Konveks olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$f(z)*\frac{z+xz^2}{(1-z)^3}\neq 0; \qquad |x|=1, \ \ 0<|z|<1$$

olmasıdır.

U birim diskinde $k-$ ***düzgün konveks*** ve $k-$***yıldızıl*** fonksiyonlardan oluşan S' nin iki ilginç alt sınıfı sırasıyla $k-UCV$ ve $k-ST$ ile gösterilir. Bu sınıflar,

$$k-UCV=\left\{f\in S:\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \quad \left(z\in U:\ 0\leq k<\infty\right)\right\}$$

ve

$$k-ST=\left\{f\in S:\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| \quad \left(z\in U:\ 0\leq k<\infty\right)\right\}$$

şeklinde tanımlıdırlar.

$k-UCV$ sınıfını, Kanas ve Wisniowska [21] geometrik tanımı ve konik bölge ile arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak çalışmışlardır. $k-ST$ sınıfı da, [22] da araştırılmıştır. Gerçekten bu sınıf konveks ve yıldızıl fonksiyonların sınıfları arasında iyi bilinen Alexander Teoremi ile ilişkilidir. Özellikle $k=1$ alındığında, C ve S^* sırasıyla, U da konveks ve yıldızıl fonksiyonların sınıflarını göstermek üzere,

$$0-UCV\equiv C \qquad \text{ve} \qquad 0-ST\equiv S^*$$

eşitlikleri yazılır.

Ayrıca, U birim diskinde $0 \leq \alpha < 1$ için α ***mertebeli*** $k-$***düzgün konveks*** ve α ***mertebeli*** $k-$***yıldızıl*** fonksiyonlardan oluşan S' nin iki alt sınıfı da sırasıyla $k-UCV(\alpha)$ ve $k-ST(\alpha)$ ile gösterilir. Bu sınıflar,

$$k-UCV(\alpha)=\left\{ f \in S : \Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| + \alpha \quad \left(z \in U:\ 0 \leq k < \infty \quad ,0 \leq \alpha < 1\right)\right\}$$

ve

$$k-ST(\alpha)=\left\{ f \in S : \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| + \alpha \quad \left(z \in U:\ 0 \leq k < \infty \quad ,0 \leq \alpha < 1\right)\right\}$$

şeklinde tanımlıdırlar. . Özel olarak $\alpha = 0$ alındığında,

$$k-UC(0)=k-UC \quad \text{ve} \quad k-ST(0)=k-ST$$

eşitlikleri yazılır.

Analitik ve yalınkat fonksiyonlar ile ilgili bazı temel gerçekleri verdikten sonra şimdi de bu çalışmamızın esası olan harmonik fonksiyonlar ile ilgili önemli tanım ve teoremleri verebiliriz.

Tanım 1.1.1: D, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir bölge olsun. Her $z \in D$ için, gerçel değerli $u(x,y)$ fonksiyonu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1.4}$$

şeklindeki Laplace denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna D de ***gerçel harmoniktir*** denir. Bir fonksiyonun harmonik olması için sadece Laplace denklemini sağlaması yetmez. Harmonik fonksiyon, Laplace denklemini sağlayan, kendisi ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar olarak tanımlıdırlar.

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

şeklindeki tüm lineer fonksiyonlar ve

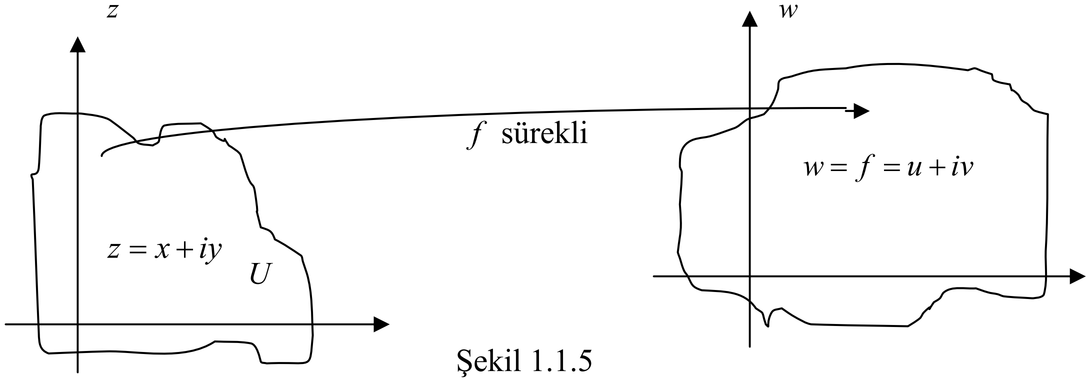
$$\sum_{i=j=1}^{n} a_{ij} = 0$$

olmak üzere $u=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ şeklindeki ikinci dereceden homojen tüm polinomlar $\mathbb{R}^n$ de harmoniktir. Aslında sürekli bile olmayan fakat Laplace denklemini sağlayan, yani ikinci mertebeden $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}},......\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^{\ 2}}$ kısmi türevleri var ve bu kısmi türevlerin toplamı sıfır olan fonksiyonlar vardır. Örneğin; $z=x+iy$ karmaşık değişken olmak üzere,

$$u(x,y)=\begin{cases} \operatorname{Re} e^{-1/z^4} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ile tanımlı $u(x,y)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlar ancak u fonksiyonu orjinde sürekli değildir.

xy-düzlemindeki bir D bölgesinden uv-düzlemindeki Ω bölgesine tanımlı bire bir $u=u(x,y)$ ve $v=v(x,y)$ dönüşümlerini gözönüne alalım. u ve v fonksiyonları harmonik ise, bire bir olan bu dönüşüme ***Harmonik Dönüşüm*** denir. Karmaşık değerli harmonik bir fonksiyonun bir $D\subseteq\mathbb{C}$ bölgesinde harmonik dönüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul onun D de yalınkat olmasıdır. Genellikle, harmonik dönüşüm denildiğinde yalınkat karmaşık değerli harmonik fonksiyon düşünülür. $z=x+iy$ ve $w=u+iv$ olmak üzere $f(z)=u(z)+iv(z)$ yazmak uygundur (Şekil 1.1.5).



Şekil 1.1.5

Karmaşık değerli $f=u+iv$ fonksiyonunun bir D bölgesinden alınan her z noktası için $f'(z)$ türevi varsa analitik olduğunu biliyoruz.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad ve \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

şeklindeki Cauchy-Riemann denklemleri de hemen elde edilebilecek sonuçlardır. Aksine f sürekli birinci kısmi türeve sahip ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarsa, f in D de analitik olduğu bilinir. Cauchy-Riemann denklemlerinden her analitik fonksiyonun harmonik olduğu söylenebilir.

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan (u,v) fonksiyon ikilisine ***eşlenik çift*** denir ve v fonksiyonuna, u fonksiyonunun harmonik eşleniği adı verilir. Böylece $-u$ fonksiyonu da v fonksiyonunun ***harmonik eşleniği*** olur. Eşlenik fonksiyon bir sabit eklenmesiyle lokal olarak belirlenebilir.

Bu çalışma boyunca gerçel ve imajiner kısımlarının eşlenik olması gerekmeyen karmaşık değerli harmonik fonksiyonları göz önüne alacağız. Analitiklik şartı ortadan kaldırıldığı anda, ciddi problemler ortaya çıkmaktadır. Örneğin, analitik fonksiyonlar bileşke işlemi altında korunur ancak harmonik fonksiyonlar korunmaz. Analitik bir fonksiyonun harmonik fonksiyonu, harmoniktir. Fakat bir harmonik fonksiyonun analitik fonksiyonunun, harmonik olması gerekmez. Yine analitik fonksiyonlar bir cebir yapısı oluştururlar ancak harmonik fonksiyonlarda bu özellik yoktur.

Harmonik dönüşümlerin sınır davranışı konformal dönüşümlerinkinden daha karışık olabilmektedir. Bununla birlikte, konformal dönüşümlerin klasik teorisinin büyük bir kısmı harmonik dönüşümlere taşınabilir.

Tanım 1.1.2: $f = u + iv$ fonksiyonunun ***Jakobiyeni*** ,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

olarak tanımlanır.

Eğer f analitik ise f in Jakobiyeni $J_f(z) = |f'(z)|^2$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.1.3: D, $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemde bir bölge ve $f : D \to \mathbb{C}$ birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer $z \in D$ için, $J_f(z) > 0$ ise f fonksiyonuna D de ***Yön Koruyan*** ve $J_f(z) < 0$ ise f fonksiyonuna D de ***Yön Çeviren*** denir. Eğer f fonksiyonu yön koruyan ise, $\overline{f}$ fonksiyonu yön çevirendir. Yine, konformal dönüşümler yön koruyandırlar.

Karmaşık analizde ortak olarak kullanılan aşağıdaki iki basit diferansiyel operatör çok kullanışlıdır. Bunlar $z = x + iy$ olmak üzere,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

şeklindedir. Karmaşık değerli bir f fonksiyonu için Cauchy-Riemann denklemlerini yazmanın bir diğer yolu ise, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ yazmaktır. Yine f in Laplace denklemi

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece sürekli ikinci kısmi türevli f fonksiyonları için

$$f \ harmoniktir \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \ analitiktir$$

önermesinin doğru olduğu açıktır. Eğer f analitik ise $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$ bilinen türevdir. Tanımlanan bu operatörler lineerdirler. Bu operatörler ile,

$$\frac{\partial}{\partial z}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\dfrac{\partial f}{\partial z} - f\dfrac{\partial g}{\partial z}}{g^2}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu özellikler $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ için de benzerdir. Yine ,

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

özelliği iki türev arasındaki bağıntıyı vermektedir.

$\frac{\partial f}{\partial z}$ ve $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ gösterimleri yerine sırasıyla f_z ve $f_{\bar{z}}$ sembollerini kullanmak daha uygundur. Buna göre D, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $f = u + iv$ D de diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$f_z = \frac{1}{2}\left(f_x - if_y\right) \qquad \text{ve} \qquad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(f_x + if_y\right)$$

olarak tanımlanabilirler. Buna göre, $f = u + iv$ fonksiyonunun Jakobiyeni

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$$

şeklinde yazılabilir.

f fonksiyonunun z_0 noktasındaki tam diferansiyeli

$$df(z) = f_z(z_0)\,dz + f_{\bar{z}}(z_0)\,d\bar{z}$$

şeklindeki bir afin dönüşüm olup z_0 merkezli çemberleri yarı eksen uzunlukları

$$\left|f_z(z_0)\right| - \left|f_{\bar{z}}(z_0)\right| \qquad \textit{ve} \qquad \left|f_z(z_0)\right| + \left|f_{\bar{z}}(z_0)\right|$$

olan elipslere dönüştürür.

h ve g bir D bölgesinde yerel analitik fonksiyonlar olmak üzere D de harmonik her f fonksiyonu

$$f = h + \bar{g} \tag{1.1.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu gösterim fonksiyonunun ***Kanonik gösterimi*** olarak adlandırılır ve bu gösterim tektir. Gerçekten, f f harmonik ise, f_z nin analitik olduğunu biliyoruz. h, D bölgesinde analitik olmak üzere, $h' = f_z$ olsun. Yine $g = \overline{f} - \overline{g}$ olsun. h ın tanımıyla D de $\overline{g_z} = \overline{f_z} - \overline{h_z}$ olduğunu varsayalım. Böylece g, D de analitiktir. Gösterimin tekliği hem analitik hem de anti-analitik olan fonksiyonun sabit olması gerçeğine bağlıdır. (Burada ***anti-analitik,*** analitik bir fonksiyonun eşleniği anlamındadır). Eğer f gerçel değerli ise, $2h$, f in analitik tamamlayıcısı olmak üzere gösterim, imajiner bir ek sabite kadar, $f = h + h = \mathrm{Re}\{2h\}$ a indirgenir.

Teorem 1.1.1: h ve g basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik olsunlar. $\overline{g}$, $z \to \overline{g(z)}$ fonksiyonunu göstermek üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun $z_0 \in D$ noktasındaki Jacobiyeni,

$$J_f(z_0) = |h'(z_0)|^2 - |g'(z_0)|^2$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.4: D, $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemde bir bölge ve $f : D \to \mathbb{C}$ yön koruyan bir homeomorfizm olsun.Eğer D bölgesinde

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \le K$$

olacak şekilde bir $K > 1$ sabit sayısı varsa f fonksiyonuna D de ***K-Hemen Hemen Konformal (K-quasiconformal) Dönüşüm*** denir. $K = 1$ olması durumunda, $f_{\bar{z}}(z) = 0$ olup f fonksiyonu konformal bir dönüşüm olur.

$$\alpha(z) = \frac{\overline{f_{\bar{z}}(z)}}{f_z(z)} \tag{1.1.6}$$

oranına da, f fonksiyonunun ***Genişlemesi (Dilatation)*** denir ve f fonksiyonunun bu genişlemesi için

$$\left|\alpha(z)\right| \le \frac{K-1}{K+1}$$

elde edilir.

Ayrıca f fonksiyonu yön koruyan bir fonksiyon yani $J_f(z) > 0$ ise,

$$\left|\alpha(z)\right| = \left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right| < 1 \qquad (1.1.7)$$

olur [8].

Bu teorem bize $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının yerel olarak hemen hemen-konformal olduğunu gösterir.

$\alpha(z)$ genişlemesinin, D bölgesinin tamamında $\left|\alpha(z)\right| \le K < 1$ eşitsizliğini sağlaması gerekmez. Bu ise, bize harmonik homeomorfizmlerin sınır davranışının konform veya hemen hemen-konform dönüşümlerinkinden farklı olabileceğini gösterir.

Tanım 1.1.5: $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonu (1.1.7) bağıntısını sağlıyorsa f fonksiyonuna ***Yerel Yalınkattır*** denir. Eğer f, D de bire-bir ve yön koruyan bir fonksiyon ise, f fonksiyonuna D de ***Yalınkattır*** denir.

Teorem 1.1.2: Bir $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonunun yerel olarak bire bir olması için gerekli ve yeterli koşul

$$J_f(z) \ne 0$$

olmasıdır.

Harmonik dönüşümler Cauchy-Riemann şartlarının bir genellemesi olarak düşünülen diferensiyel denklemler ile de belirlenebilir.

Teorem 1.1.3: Basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik ve $|\alpha(z)|<1$ olsun. D de tanımlı, sabit olmayan karmaşık değerli bir f fonksiyonunun yön koruyan harmonik yalınkat bir fonksiyon olması için gerekli ve yeterli şart,

$$\overline{f_{\bar{z}}}(z)=\alpha(z)f_z(z) \tag{1.1.8}$$

kısmi türevli diferansiyel denkleminin yalınkat bir çözümünün olmasıdır [17].

Diğer taraftan, harmonik bir fonksiyonun tersi var ise, tersinin de harmonik fonksiyon olması gerekmez. Aşağıdaki teorem harmonik bir fonksiyonun tersinin ne zaman harmonik bir fonksiyon olduğunu gösterir.

Teorem 1.1.4: Analitik ve afin olmayan bir f harmonik fonksiyonunun eğer varsa, tersinin de harmonik olması için gerekli ve yeterli şart a,b,c,σ karmaşık sayılar, $|b|>\sup_z\left|e^{-\sigma z}\right|$ olmak üzere f fonksiyonunun,

$$f(z)=a\left[\sigma z+\log\left(b-e^{-\sigma z}\right)\overline{\left(b-e^{-\sigma z}\right)^{-1}}\right]+c$$

şeklinde olmasıdır[33].

Teorem 1.1.5: $\mathbb{C}$ karmaşık düzleminin tamamında harmonik yalınkat dönüşümler sadece

$$f(z)=Az+B\bar{z}+C, \qquad |A|\neq|B|, \qquad A,B,C\in\mathbb{C}$$

afin dönüşümleridir [8].

1.2. S_H ve $S_H^{\,0}$ Sınıfları

$D\subset\mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $\xi\in D$ olmak üzere $f(\xi)=0$ ve $f'(\xi)>0$ koşulunu sağlayan tek bir $f:D\to U$ konform dönüşümünün var olduğunu söyleyen Riemann Dönüşüm Teoremine [9] göre, sınırı birden fazla noktadan oluşan basit bağlantılı yalınkat olan her bölge bire-bir ve konform olarak birim diskin içine dönüştürülebilinir. Bu nedenle karmaşık düzlemde basit bağlantılı herhangi bir D bölgesi yerine açık birim diski alabiliriz. Buradaki çalışmamızda bölge denildiği zaman $U:\{z:|z|<1\}$ açık birim diski anlaşılmalıdır.

U da analitik,

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n \tag{1.2.1}$$

fonksiyonları için U da yön koruyan harmonik yalınkat $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarıyla ilgili ilk çalışma 1984 de Clunie ve Sheil Small [8] tarafından yapılmıştır.

f, U da analitik h *ve* g fonksiyonları (1.2.1) de verildiği gibi olmak üzere, $f=h+\overline{g}$ şeklindeki yön koruyan harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı S_H , $g'(0)=0$ bağıntısını sağlayan $f\in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı ise, $S_H{}^0$ ile gösterilir.

S_H ve $S_H{}^0$ sınıflarının birinden diğerine geçmek mümkündür. Gerçekten her $f\in S_H$ için,

$$f_0=\frac{f-\overline{b_1 f}}{1-|b_1|^2}$$

fonksiyonu S_H sınıfına aittir. Tersine her $f_0\in S_H{}^0$ için $f=f_0+\overline{b_1 f_0}$ fonksiyonu S_H sınıfına aittir. Böylece, $S_H{}^0$ alt sınıfı için elde edilen bazı sonuçlar S_H sınıfına genelleştirilebilir.

U da analitik, yalınkat ve $h(0)=h'(0)-1=0$ şeklinde normalize edilmiş h fonksiyonlarının S sınıfını göz önüne alalım. S sınıfı için birçok özellik iyi bilinmektedir [38],[9],[6]. Ayrıca $h\in S$ ve $|\varepsilon|<1$ olmak üzere, $f=h+\varepsilon\overline{h}\in S_H$ şeklindedir. Buna rağmen S ve S_H sınıfları arasında önemli farklılıklar vardır.

S sınıfına ait fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisi bir fonksiyona düzgün yakınsıyor ise bu fonksiyon ya S sınıfına aittir ya da sabit bir fonksiyon olmak zorundadır. Fakat bu durum S_H sınıfı için geçerli değildir. Örneğin genel terimi

$$f_n(z)=z+\frac{n}{n+1}\overline{z}$$

olan, S_H sınıfına ait fonksiyonlardan oluşan $\{f_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=z+\overline{z}=2x$$

olup limit fonksiyonu S_H sınıfına ait değildir.

Ayrıca S ile S_H sınıfları arasındaki başka bir önemli fark; $\theta \to f\left(re^{i\theta}\right)$ dönüşümü birim çemberin C Jordan eğrisi üzerine yön koruyan bir homeomorfizmi ise, f in U ya harmonik genişlemesinin C ile sınırlı bir bölge üzerine yalınkat bir dönüşüm olması gerekmez. Ancak C nin sınırladığı bölgenin konveks olması halinde bunun doğru olduğu Choquet [6] tarafından 1945 yılında gösterilmiştir.

Tanım 1.2.1: *F,* bir D bölgesinde sürekli fonksiyonların bir ailesi olsun. F in her bir dizisi, D nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak bir alt diziye sahip ise, F e ***Normal Aile*** denir.

Tanım 1.2.2: F , normal bir aile ve $\varphi : U \to U$ analitik bir fonksiyon olsun. Eğer her $f \in F$ için $f \circ \varphi$ fonksiyonlarının oluşturduğu aile normal ise, f fonksiyonuna ***Normal Fonksiyon*** denir.

Eğer *F,* analitik veya harmonik fonksiyonlardan oluşan bir aile ise F in normal olması, yerel olarak sınırlı olmasını gerektirir [13].

${S_H}^0$ kompakt ve normal bir ailedir [8]. Bunun yanında S_H normaldir fakat kompakt değildir [8]**.** Bu sınıflar için kısaca,

$$S \subset {S_H}^0 \subset S_H$$

şeklindeki kapsama zinciri yazılabilir.

Tanım 1.2.3: B, $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ üzerinde bir X vektör uzayının alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in B$ ve her $\lambda\left(0 < \lambda < 1\right)$ için $\lambda x + \left(1-\lambda\right)y \in B$ ise, B ye ***konvekstir*** denir.

B konveks bir küme olmak üzere, farklı her $x, y \in B$ ve $0 < \lambda < 1$ için bir $z \in B$ noktası, $z = \lambda x + \left(1-\lambda\right)y$ olarak yazılamıyorsa, z ye B nın bir ***extreme (uç) noktası*** denir. B nın extreme noktalarının kümesi E_B ile gösterilir

Tanım 1.2.4: B, topolojik bir vektör uzayının bir alt kümesi olmak üzere, B yi bulunduran bütün kapalı konveks kümelerin kesişimine B nin ***Kapalı Konveks Zarfı*** denir ve $\overline{co}B$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.1: Eğer B, yerel konveks topolojik bir vektör uzayının kompakt bir alt kümesi ise, $\overline{co}B = \overline{co}E_B$ olur. Eğer $\overline{co}B$ kompakt ise $\overline{co}B = \overline{co}E_B$. Eğer $\overline{co}B$ kompakt ise $E_{\overline{co}B} \subset B$ şeklindedir [38].

Bu teorem, kompakt konveks kümelerin extreme noktaları tarafından yeniden oluşturulabileceğini ifade etmektedir.

Teorem 1.2.2: S_H sınıfının kapanışı $\overline{S_H}$ olmak üzere,

$$\overline{S_H} = \left\{ f_0 + \varepsilon \overline{f_0} : f_0 \in S_H{}^0 ve \left|\varepsilon\right| \le 1 \right\}$$

yazılır. Ayrıca, $f \in \partial S_H = \dfrac{\overline{S_H}}{S_H}$ olması için gerekli ve yeterli şart $\left|\varepsilon\right| = 1$ olmasıdır. f_0, $S_H{}^0$ 'ın bir extreme noktası ise ∂S_H üzerinde bulunan

$$f = f_0 + e^{i\alpha}\overline{f_0}$$

şeklindeki her fonksiyon, $\overline{S_H}$ ın kapalı konveks zarfının bir extreme noktasıdır [8].

S_H sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için üst sınır bulma problemi hala çalışılan açık bir problemdir. Şimdiye kadar $\left|b_2\right|$ için kesin sınır elde edilmiş olup $\left|a_2\right|$ için ise daha ispatlanmamış olan

$$\left|a_2\right| \le \frac{5}{2}$$

tahmini yapılmıştır. Katsayı problemi için,

$$g(z) = \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} \right)(1-z)^{-3} + \overline{\left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} \right)(1-z)^{-3}}$$

fonksiyonunun bir extremal fonksiyon olduğu tahmin edilmektedir.

Teorem 1.2.3: $f_0 = h_o + \overline{g_0} \in S_H{}^0$ ve $z \in U$ için,

$$h_0(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{1.2.2}$$

olmak üzere,

$$\left|b_2\right| \le \frac{1}{2} \tag{1.2.3}$$

ve $f \in S_H$ ise,

$$|b_1| < 1 \tag{1.2.4}$$

şeklindedir [8].

Teorem 1.2.4: $f = h + \overline{g} \in S_H$ ve $z \in U$ için, h ve g (1.2.1) da verildiği gibi olmak üzere,

$$|b_2(f)| < \begin{cases} \dfrac{1+|a_2|^2}{2} & ; |a_2| \le 1 \\ |a_2| & ; |a_2| > 1 \end{cases}$$

şeklindedir [31].

Teorem 1.2.5: $f \in S_H$ olsun. Bu durumda,

$$|a_2| \le \frac{96\pi}{\sqrt{27}} - 1 < 57,05$$

şeklindedir [39].

Analitik yalınkat fonksiyonlarda olduğu gibi, S_H sınıfındaki fonksiyonların a_2 katsayısı için bulunacak sınırlar bizi S_H ve $S_H{}^0$ sınıflarına ait fonksiyonların mutlak değeriyle ilgili alt ve üst sınırları bulmaya götürür.

Teorem 1.2.6: $f = h + \overline{g} \in S_H$ ve h, g fonksiyonları (1.2.1) şeklindeki gibi verilmiş olsun.

$$\alpha = \sup\left\{|a_2(f)| : f \in S_H\right\} \tag{1.2.5}$$

olmak üzere, $|z| \le r < 1$ için,

$$|\arg h'(z)| \le 2\alpha \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right),$$

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \le |h'(z)| \le \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}} \tag{1.2.6}$$

ve

$$\left|f(z)\right| \le 2\int_0^r \frac{(1+t)^{\alpha-1}}{(1-t)^{\alpha+1}} d_t \tag{1.2.7}$$

yazılır [39].

Teorem 1.2.6 da, $\left|f(z)\right|$ için elde edilen üst sınırlar sadece r ye bağlı olmayıp, $|\varepsilon|<1$ için $f(z)=z+\varepsilon\bar{z}$ fonksiyonunda olduğu gibi, $|b_1|$ e bağlı olarak da elde edilebilir.

Sonuç 1.2.1: $f_0 = h_o + \overline{g_0} \in S_H{}^0$ ve $|\varepsilon|<1$ ise $|z|=r<1$ için,

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \le \left|h_0(z)+\varepsilon g_0(z)\right| \le \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}-1\right] \tag{1.2.8}$$

olur [39].

Teorem 1.2.7: $f \in S_H{}^0$ ise $z \in U$ için,

$$\left|f(z)\right| \ge \frac{1}{4}\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \tag{1.2.9}$$

şeklindedir. Böylece , $\left\{w : |w| < \tfrac{1}{16}\right\} \subseteq f(U)$ olur [8].

Bunun yanında, $f \in S_H{}^0$ için $\left\{w : |w| < \tfrac{1}{6}\right\} \subseteq f(U)$ olduğu tahmin edilmesine rağmen henüz ispatlanamamıştır.

Sonuç 1.2.2: $f \in S_H$ ise,

$$\left\{w : |w| < \left(\tfrac{1}{16}\right)\left(1-\left|b_1(f)\right|\right)\right\} \subseteq f(U)$$

şeklindedir [8] .

1.3 Harmonik Koebe Fonksiyonu

Uzun zamandır, analitik yalınkat fonksiyonların S sınıfı üzerindeki birçok problem için extremal fonksiyonların önemli rol oynadığı bilinmektedir. Harmonik Koebe Fonksiyonu harmonik yalınkat fonksiyonların S_H^0 sınıfı için Koebe Fonksiyonunun olası bir benzeridir.

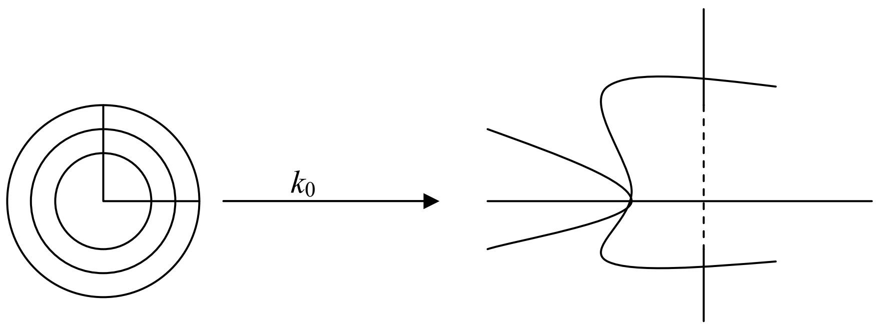
S_H^0 ın yapısındaki extremal elemanlar S deki Koebe fonksiyonuna benzer bir rol oynar. Fakat bu henüz tam olarak ispatlanamamıştır.

Teorem 1.3.1: Bir $h+\overline{g}$ harmonik fonksiyonun reel eksen yönünde yalınkat ve konveks olması için gerek ve yeter şart $h-g$ analitik fonksiyonun yalınkat ve reel eksen yönünde konveks (CRA) olmasıdır [8].

Clunie ve Sheil Small [8] Teorem 1.3.1'i kullanarak klasik Koebe fonksiyonuna benzer olan bir fonksiyonu S_H^0 ailesi için elde etmişlerdir. Gerçekten,

$$h(z)=\frac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \qquad \text{ve} \qquad g(z)=\frac{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

ile tanımlanmış $k_0=h+\overline{g}\in S_H^0$ şeklindeki ***Harmonik Koebe Fonksiyonunu*** oluşturmuşlardır. k_0, U birim diskini yalınkat olarak $-\infty<t<-1/6$ reel kısmı kesik olan $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemi üzerine dönüştürür (Şekil 1.3.1). Ayrıca $z=1$ hariç birim diskteki tüm z için $k_0(z)=-1/6$ dır.



Şekil 1.3.1

1.4 Konveks ve Konvekse -Yakın Harmonik Yalınkat Dönüşümler

K, K_H ve $K_H{}^0$ sırasıyla *S, S_H* ve $S°_H$ ın *f(U)* resmi konveks, C, C_H *ve* $C_H{}^0$ da *f(U)* resmi konvekse yakın f fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıfları göstersin. Aşağıda, Clunie J ve T. Sheil Small [8] tarafından elde edilen K_H sınıfına ait bazı önemli özellikler verilmiştir.

Teorem 1.4.1: $f = h + \overline{g}$, U da yerel olarak harmonik yalınkat bir fonksiyon olsun. $f(U)$ nun imajiner yönde konveks olması için gerekli ve yeterli şart, $h+g$ analitik fonksiyonunun U yu imajiner eksen yönünde konveks bir bölge üzerine konform ve yalınkat olarak dönüştürmesidir.

Teorem 1.4.2 : $f = h + \overline{g} \in K_H$ olması için gerekli ve yeterli şart $0 \le \theta < \pi$ ve $z \in U$ için,

$$h(z) - e^{2i\theta} g(z) \tag{1.4.1}$$

analitik fonksiyonunun her θ yönünde konveks olmasıdır. Bu durumda, $h + \varepsilon g$ fonksiyonları $|\varepsilon| \le 1$ için U da konvekse yakındır.

Teorem 1.4.3: $f = h + \overline{g} \in K_H$ ise, $z_1, z_2 \in U$ için,

$$\left| \frac{g(z_1) - g(z_2)}{h(z_1) - h(z_2)} \right| < 1 \qquad ve \qquad |g(z)| < |h(z)|; \quad 0 < |z| < 1$$

şeklindedir.

Teorem 1.4.4: $f \in K_H{}^0$ olsun. Bu durumda $f(U)$, $|w| < \dfrac{1}{2}$ açık dairesi ile örtülür.

Teorem 1.4.5: $f = h + \overline{g} \in K_H$ ise, $z \in U$ için**,**

$$\operatorname{Re}\left\{ \left[e^{-i\alpha} h'(z) + e^{-i\alpha} g'(z) \right] \left[e^{i\beta} - e^{-i\beta} z^2 \right] \right\} \ge 0 \tag{1.4.2}$$

olacak şekilde α ve β sayıları vardır.

Kuvvet serilerinin katsayıları arasındaki eşitsizlikleri göstermek için kullanılan domine seriler ve bunların sağladığı özellikleri aşağıda verelim. Bu bağıntılar, katsayı eşitsizliklerinin elde edilmesine yardımcı olacaktır.

Teorem 1.4.6: $f = h + \overline{g} \in K_H$ ise, $|z| = r < 1$ ve $n = 1,2,3...$ için,

$$\left|h^{(n)}(z)\right| \le \frac{(n+1)!}{2(1-r)^{n+2}} \tag{1.4.3}$$

ve

$$\left|g^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!(n+2r-1)}{2(1-r)^{n+2}} \tag{1.4.4}$$

şeklindedir.

Eşitlik hali,

$$l_0(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) \tag{1.4.5}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

Teorem 1.4.7: $f = h + \overline{g} \in K_H{}^0$ ve $n = 2,3...$ için,

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

$$\big||a_n| - |b_n|\big| \le 1 \tag{1.4.6}$$

$$|a_n| \le \frac{(n+1)}{2} \qquad \textit{ve} \qquad |b_n| \le \frac{(n-1)}{2} \tag{1.4.7}$$

dir. Eşitlik hali (1.4.5) de verilen $l_0(z)$ fonksiyonu için sağlanır.

Sonuç 1.4.1: $f = h + \overline{g} \in K_H$ ve $n = 1,2,3$ için

$$|a_n| \le \frac{n-1}{2}|b_1| + \frac{n+1}{2}$$

ve

$$|b_n| \le \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}|b_1|$$

şeklindedir.

Konvekse-yakın analitik yalınkat fonksiyonlar ile konvekse-yakın harmonik yalınkat fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 1.4.8: H ve G, U da analitik ve $|G'(0)| < |H'(0)|$ olsun. $|\varepsilon| = 1$ olan her ε için $H + \varepsilon G$ konvekse-yakın ise, $F = H + \overline{G}$ fonksiyonu da harmonik yalınkat ve konvekse-yakındır [8].

Yine, Clunie ve Sheil Small [8] tarafından 1984 yılında aşağıdaki teoremler elde edilmiştir.

Teorem 1.4.9: $f = h + \overline{g}$, U da yerel yalınkat ve belli bir ε, $(|\varepsilon| \leq 1)$ için, $h + \varepsilon g$ fonksiyonunun konveks olması durumunda f yalınkat ve konvekse-yakın bir fonksiyon olur.

Teorem 1.4.10: $f = h + \overline{g} \in C_H$ ise, $n = 1,2,3...$ için,

$$|a_n| \leq \frac{1}{3}\left(2n^2 + 1\right) \quad \text{ve} \qquad |b_n| \leq \frac{1}{3}\left(2n^2 + 1\right)$$

dir.

Eşitlik hali,

$$k(z) = 2i \operatorname{Im}\left(\frac{3z - z^3}{3(1 - iz)^3}\right) \in \partial C_H \tag{1.4.8}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

1.5 Yıldızıl Harmonik Yalınkat Dönüşümler

S^*, S_H^* *ve* $S_H^{*\,0}$ sırasıyla S, S_H *ve* S_H^0 ın f *(U)* görüntü bölgesi yıldızıl olan fonksiyonların oluşturduğu alt sınıfları göstersin. 1989 yılında Cima ve Livingston [7] tarafından elde edilen, S_H^* *ve* $S_H^{*\,0}$ sınıflarının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.5.1: $f = h + \overline{g} \in S_H^*$ ise,

$$\int_0^z \frac{e^{-i\theta} h(\zeta) - e^{i\theta} g(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

fonksiyonu imajiner eksen yönünde konvekstir.

Teorem 1.5.2: $f \in S^{*}_{H}$ ise,

fonksiyonu $K_H{}^0$ sınıfına $F(z)=\int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$ aittir.Buradaki integral, 0 ile z noktasını birleştiren doğru parçası boyuncadır.

Uyarı: Analitik fonksiyonlarda olduğu gibi, Teorem 1.5.2'nin tersi doğru değildir. Yani $F \in K_H{}^0$ iken, $f = zF'$, $S_H^{*\,0}$ sınıfına ait olmayabilir. Çünkü, Choquet Teoremi yıldızıl bir eğri için sağlanmaz [6]. Buna bir örnek verelim.

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=\frac{z}{(1-z)^3}-\overline{\left(\frac{z^2}{(1-z)^3}\right)}$$

olsun. Bu durumda,

$$F(z)=\int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta=\frac{z-\left(z^2/2\right)}{(1-z)^2}-\overline{\left(\frac{z^2/2}{(1-z)^2}\right)}=l_0(z)$$

dir. Ancak $l_0(z)\in K_H{}^0$ olmasına rağmen, $f(z)\notin S_H^{*\,0}$ dır. Çünkü f in $S_H^{*\,0}$ sınıfına ait olması için h ın yerel yalınkat olması gerekmektedir. Oysa, $z=-1/2$ için,

$$h'(z)=\frac{1+2z}{(1-z)^4}=0$$

şeklindedir.

Teorem 1.5.3: $f=h+\overline{g}\in S_H^{*}$ ise, $|z|=r<1$ için,

$$\left|h^n(z)\right|\le\frac{(n+1)!(2n+3r+1)}{6(1-r)^{n+3}}$$

ve

$$\left|g^n(z)\right|\le\frac{n!\left[(n-1)(2n-1)+(9n-3)r+6r^2\right]}{6(1-r)^{n+3}}$$

olur. Eşitlik hali

$$k_0(z)=\operatorname{Re}\left\{\frac{z}{(1-iz)^2}\right\}+i\operatorname{Im}\left\{\frac{3z-z^3}{3(1-iz)^3}\right\} \qquad (1.5.1)$$

Harmonik Koebe fonksiyonu için geçerlidir.

Sonuç 1.5.1: $f=h+\overline{g}\in S_H{}^{*}$ ve $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ ise,

$n=2,3...$ için ,

$$\left||a_n|-|b_n|\right| \le n,$$

$$|a_n| \le \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{ve} \quad |b_n| \le \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$$

dir. Eşitlik (1. 5.1) da verilen $k_0(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Sonuç 1.5.2: $f = h + \overline{g} \in S_H^*$ ise, $n = 2,3...$ için ,

$$|a_n| \le \frac{1}{6}\left[(n+1)(2n+1) + |b_1|(n-1)(2n-1)\right] < \frac{1}{3}(2n^2+1)$$

ve

$$|b_n| \le \frac{1}{6}\left[(n-1)(2n-1) + |b_1|(n+1)(2n+1)\right] < \frac{1}{3}(2n^2+1)$$

dir. Eşitlik (1. 4.8) de verilen $k(z) \in \partial S^*{}_H$ fonksiyonu için geçerlidir.

1. 6 Tipik Reel Harmonik Yalınkat Dönüşümler

Tanım 1.6.1: f , U dan $\mathbb{C}$ ye harmonik bir fonksiyon olsun, $f \in \mathbb{R}$ olduğunda $z \in \mathbb{R}$ ise, f 'e U da ***Tipik Reel Harmonik Fonksiyon*** denir. Eğer $f = h + \overline{g}$ şeklindeki tipik reel harmonik fonksiyonu $z \in U$ için $|g'(z)| < |h'(z)|$, $0 < r < 1$ için, $f(r) > 0,\ f(0) = 0\ ve\ |h'(0)| = 1$ normalizasyon şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyonların sınıfı T_H ile, $g'(0) = 0$ olan T_H daki fonksiyonların sınıfı da $T_H{}^0$ ile gösterilir. Eğer $f \in S_H$ ve f reel katsayılı ise, $f \in T_H$ dır. Ayrıca, $f = h + \overline{g} \in T_H$ ise, $z \in U$ için,

$$\left(\operatorname{Im} f(z)\right)\left(\operatorname{Im}(z)\right) \ge 0 \tag{1.6.1}$$

dır. f normalizasyon şartlarını sağladığı zaman bu durumun tersi de doğru olur.

Teorem 1.6.1: $f = h + \overline{g} \in T_H{}^0$ ise, $h - g$ analitik tipik reel fonksiyonlar T sınıfına aittir. Aksine, eğer $h - g \in T$, $h(0) = g(0) = g'(0) = h'(0) - 1 = 0$ ve $z \in U$ için, $|g'(z)| < |h'(z)|$ ise $f = h + \overline{g} \in T_H{}^0$ [31].

Teorem1.6.2: $f=h+\overline{g}\in T_H{}^0$ ise, $|z|=r<1$ ve $n=2,3...$ için,

$$\left|h^n(z)\right|\leq\frac{(n+1)!(2n+3r+1)}{6(1-r)^{n+3}} \qquad ve$$

$$\left|g^n(z)\right|\leq\frac{n!\left[(n-1)(2n-1)+(9n-3)r+6r^2\right]}{6(1-r)^{n+3}}$$

dir. Eşitlik halleri, $k_0(z)$ fonksiyonu (1.5.1) da verildiği gibi olmak üzere, $f(z)=ik_0(-iz)$ fonksiyonu için geçerlidir [31].

Sonuç 1.6.1: $f=h+\overline{g}\in T_H^0$ ve $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ ise, $n=2,3...$için,

$$\left||a_n|-|b_n|\right|\leq n,$$

$$|a_n|\leq\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ve } |b_n|\leq\frac{(n-1)(2n-1)}{6} \qquad (1.6.2)$$

dir. Eşitlik halleri $k_0(z)$ fonksiyonu (1.5.1) da verildiği gibi olmak üzere, $f(z)=ik_0(-iz)$ fonksiyonu için geçerlidir [31].

Sonuç 1.6.2: $f=h+\overline{g}\in T_H$ ve $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ ise, $n=2,3...$ için,

$$|a_n|\leq\frac{1}{6}\left[(n+1)(2n+1)+|b_1|(n-1)(2n-1)\right]<\frac{1}{3}\left(2n^2+1\right)$$

ve $n=1,2,3...$ için,

$$|b_n|\leq\frac{1}{6}\left[(n-1)(2n-1)+|b_1|(n+1)(2n+1)\right]<\frac{1}{3}\left(2n^2+1\right) \text{ dir.}$$

Eşitlik hali, $f(z)=2\operatorname{Re}\left\{\frac{3z+z^2}{3(1-z)^3}\right\}\in\partial T_H$ fonksiyonu için geçerlidir [8].

1.7 Pozitif Reel Kısımlı Harmonik Dönüşümler

$f = h + \overline{g}$ olmak üzere $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\left(h + \overline{g}\right)$ olduğundan, U da analitik ve reel kısmı pozitif fonksiyonların sınıfı ile, harmonik ve reel kısmı pozitif fonksiyonların sınıfı arasında yakın bir ilişkinin olduğu görülmektedir. Bu bölümde, bu iki sınıf arasındaki ilişki verilecektir. Ayrıca analitiklik halinde geçerli olan bazı sonuçların, harmonik olması durumundaki geçerliliğine bakılacaktır.

Tanım 1.7.1: U da harmonik, $\operatorname{Re} f(z) > 0$ şartını sağlayan ve $f(0) = 1$ şeklinde normalize edilmiş $f = h + \overline{g}$ fonksiyonlarının sınıfını P_H ile gösterelim. P_H ın $f_{\overline{z}}(0) = 0$ özelliğine ait fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıfı da $P_H^{\,0}$ ile gösterelim. U da analitik, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ şartını sağlayan ve $p(0) = 1$ şeklinde normalize edilmiş fonksiyonlarının sınıfı P olmak üzere, $P \subset P_H$ şeklindedir.

Teorem 1.7.1: Eğer, $f = h + \overline{g} \in P_H$ ise, $p = h + g \in P$ şeklindedir. Aksine, h *ve* g, U da analitik, $h'(0) - 1 = g(0) = 0$ *ve* $h + g \in P$ ise, $f = h + \overline{g} \in P_H$ yazılır [18].

Öztürk [31], 1995 yılında bu teoremden faydalanarak aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Sonuç 1.7.1: P_H konveks ve kompakttır.

Sonuç 1.7.2: $f = h + \overline{g} \in P_H$ ise $X = \{\eta : |\eta| = 1\}$ ve $z \in U$ için,

$$h(z) + g(z) = \int_{|\eta|=1} \frac{1+\eta z}{1-\eta z} d\mu(\eta)$$

ve

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\eta|=1} d\mu(\eta) = 1$$

olacak şekilde $X = \{\eta : |\eta| = 1\}$ üzerinde bir tek μ olasılık ölçüsü vardır.

Teorem 1.7.2: $f \in P_H$ ise, $z \in U$ için,

fonksiyonu da P_H sınıfına aittir. $F(z) = \dfrac{1}{z}\displaystyle\int_0^z f(\zeta) d\zeta$ Buradaki integral 0 ile z

noktasını birleştiren doğru parçası boyuncadır.

Teorem 1.7.3: Reel katsayılı $f \in P_H$ fonksiyonların sınıfını PR_H ile gösterelim. Böylece, $F = H + \overline{G} \in T_H^0$ ise $z \in U$ için,

$$f(z) = \frac{1-z^2}{z} H(z) - \overline{\frac{1-z^2}{z} G(z)}$$

fonksiyonu PR_H sınıfına aittir. Aksine, $f = h + \overline{g} \in PR_H$ ise,

$$F(z) = H(z) + \overline{G(z)} = \frac{z}{1-z^2} h(z) - \overline{\frac{z}{1-z^2} g(z)}$$

fonksiyonu da T_H^0 sınıfına aittir.

Teorem 1.7.4: $f = h + \overline{g} \in PR_H$ ise,

$$h(z) + g(z) = \int_{|\eta|=1} \frac{1-z^2}{1-2z\operatorname{Re}\eta + z^2} d\mu(\eta); \quad \frac{1}{2\pi} \int_{|\eta=1|} d\mu(\eta) = 1$$

olacak şekilde $X = \{\eta : |\eta| = 1\}$ üzerinde bir tek μ olasılık ölçüsü vardır.

Teorem 1.7.5: *D,* konveks bir bölge, $f = h + \overline{g}$ ve $f_z + f_{\overline{z}} = h' + \overline{g'} \in P_H$ ise, $h + g$ yalınkattır.

Teorem 1.7.6: $f \in P_H$ *ve* $|z| = r < 1$ ise,

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq \frac{1+r}{1-r} \tag{1.7.1}$$

olur. Eşitliği sağlayan fonksiyonlardan biri,

$$f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + i \operatorname{Im}\left(\frac{1+3z}{1-z}\right) \tag{1.7.2}$$

fonksiyonudur. [18].

Teorem 1.7.7: $f = h + \overline{g} \in P_H$ ve $z \in U$ için, $J_f(z) \neq 0$ olsun. Böylece, $|z| = r < 1$ için,

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}, \qquad |g'(z)| \leq \frac{r^2}{(1-r)^2},$$

ve $n = 2, 3, \ldots$ için,

$$\left|h^{n}\left(z\right)\right| \le \frac{\left(n+1\right)}{\left(1-r\right)^{n+2}} \quad \text{ve} \qquad \left|g^{n}\left(z\right)\right| \le \frac{n!\left(n+2r-1\right)}{\left(1-r\right)^{n+2}}$$

şeklindedir. Eşitlik halleri;

$$f\left(z\right) = \frac{1}{\left(1-z\right)^{2}} - \overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2}}$$

fonksiyonu için geçerlidir [18].

Sonuç 1.7.3: $f = h + \overline{g} \in P_H$ ise,

$$\left|\left|a_n\right| - \left|b_n\right|\right| \le 2$$

dir [31].

Sonuç 1.7.4: $f\left(z\right) = h\left(z\right) + \overline{g\left(z\right)} \in P_H^{\ 0}$ ve $z \in U$ için, $J_f\left(z\right) \ne 0$ olsun. Böylece, $\left|z\right| = r < 1$ için,

$$h\left(z\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \ g\left(z\right) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \tag{1. 7.3}$$

$$\left|a_n\right| \le n+1 \ \text{ ve } \ \left|b_n\right| \le n-1 \tag{1. 7.4}$$

olur [31].

1.8 Harmonik Fonksiyonlar İçin Subordinasyon Prensibi

Subordinasyon kavramı ilk olarak Lindelöf [26] tarafından oluşturulmuş fakat terim olarak ilk kez Littlewood [24],[25] ve Rogosinski [34],[35] tarafından tanıtılmış ve bazı temel sonuçlar bulunmuştur. Özellikle 1981 yılında Miller ve Mocanu'nun [28] makalesinden sonra bu teori çok fazla gelişme göstermiştir. Günümüzde subordinasyon teorisi karmaşık analizde çok önemli bir rol oynamaktadır.

Tanım 1.8.1 f, U da harmonik yalınkat bir fonksiyon olsun. w fonksiyonu da U da analitik olsun ve $\left|w\left(z\right)\right| \le 1$, $w\left(0\right) = 0$, $w'\left(0\right) > 0$ şartlarını sağlasın. Eğer $z \in U$ için,

$$f(z)=F(w(z))$$

yazılabiliyorsa , f fonksiyonu F e ***Subordinedir*** denir ve $f \prec F$ şeklinde gösterilir.

Eğer D, $f(0)\in D\subseteq f(U)$ özelliğinde basit bağlantılı bir bölge ise, $f(U)=D$ bağıntısını sağlayan ve F e subordine olan tek bir f fonksiyonu vardır. Gerçekten w fonksiyonu U dan $F^{-1}(D)$ üzerine $w(0)=0$, $w'(0)>0$ şartlarını sağlayan konform bir dönüşüm olarak tanımlanabilir.

Subordinasyon kavramı içerisinde fonksiyonun kendisi ve türevlerini içeren bir ifade varsa bu şekildeki ifadelere ***Diferensiyel Subordinasyon*** adı verilir[29]. Diferensiyel subordinasyon kavramı birinci, ikinci ve n-inci mertebeden diferensiyel subordinasyon şeklinde gruplanabilir.

1.9 Harmonik Fonksiyonlar İçin Hadamard Çarpımı(Konvolüsyon)

İki karmaşık değerli harmonik fonksiyonun ***Hadamard çarpımı (konvolüsyon)***

$$f=h+\overline{g}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n} \text{ ve } \quad F=H+\overline{G}=z+\sum_{n=2}^{\infty}A_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^n}$$

olmak üzere,

$$(f*F)(z)=\left[(h*H)+\overline{(g*G)}\right](z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nA_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nB_nz^n}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu Konvolüsyon formülü f ve F in anti-analitik kısımlarının sıfır olması durumunda ünlü Hadamard Çarpımına indirgenir.

Analitik fonksiyonlar için iki konveks fonksiyonun Hadamard çarpımının konveks olduğu ve $\dfrac{z}{1-z}$ sağ yarı düzlem dönüşümünün Hadamard çarpımın birimi olduğunu biliyoruz. Ancak harmonik durumda, sonsuz tane sağ yarı düzlem dönüşümü vardır ve bir $f\in S_H$ harmonik konveks fonksiyonu ile bu sağ yarı düzlem dönüşümlerinden birinin harmonik Hadamard çarpımın, f in konvekslik hatta yalınkatlık özelliklerini koruması gerekmez.

Örneğin;

$f_1(z) = \text{Re}\left\{\frac{z}{1-z}\right\} + i\,\text{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\}$ ve $f_2(z) = \textit{düzgün altıgen}$ harmonik dönüşümlerini göz önüne alırsak, $f_1 * f_2$ nin yalınkat olmadığı görülebilir.

D deki fonksiyonların harmonik fonksiyonlar için Hadamard çarpımı ile ilgili bir sonuç aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.9.1: Eğer $f \in S_H$ ve $\varphi \in S$ konveks dönüşümler ise,

$$f * \left(\alpha\overline{\varphi} + \varphi\right) \in S_H$$

fonksiyonu $|\alpha| \le 1$ olmak üzere D yi konvekse-yakın bir bölge üzerine dönüştürür [8].

1.10 Çokdeğerli Harmonik Fonksiyonlar

Son beş yıl boyunca açık birim diskteki çokdeğerli harmonik fonksiyonlar üzerine birçok çalışma oluşturulmuştur.

Harmonik yalınkat fonksiyonlardan çokdeğerli harmonik fonksiyonlara geçerken ortaya aşikar olmayan bir durum çıkar. Bu durumda harmonik fonksiyonlar için Duren, Hengartner ve Laugesen tarafından elde edilmiş aşağıdaki argument prensibine gereksinim vardır.

Teorem 1.10.1: f**,** Γ sınırlı D Jordan bölgesinde harmonik bir fonksiyon olsun. f in $\overline{D}$ de sürekli, Γ üzerinde $f(z) \neq 0$ olduğunu ve D de hiçbir singüler sıfıra sahip olmadığını varsayalım. D deki sıfırların mertebelerinin toplamı m olsun. Bu durumda z, Γ üzerinde gezerken $\Delta_\Gamma \arg\left(f(z)\right)$ $f(z)$'nin argümanının değişimini tanımlamak üzere, $\Delta_\Gamma \arg\left(f(z)\right) = 2\pi m$ olur

Teorem 1.10.1, Om. P. Ahuja ve Jahangiri'yi [1] U daki bütün çokdeğerli harmonik ve yön koruyan fonksiyonların $p \ge 1$ olmak üzere $H(p)$ sınıfının belirli alt sınıflarını çalışmak için yönlendirmiştir. h ve g fonksiyonları

$$h(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p-1} z^{n+p-1}, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+p-1} z^{n+p-1} \qquad ,|b_p| < 1 \qquad (1.10.1)$$

şeklinde tanımlanmak üzere, $H(p)$ deki bir f fonksiyonu $f = h + \overline{g}$ olarak yazılabilir.

$p \geq 1$ için $SH(p)$, U birim diskini orjine göre yıldızıl olan kapalı bir eğri üzerine dönüştüren, harmonik yıldızıl fonksiyonları kapsayan $H(p)$ nin alt sınıfını tanımlasın.

p-değerli dönüşümlerin yön koruyan olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = z + \overline{z}^{-2}$, $D = \{z : |z| < 2\}$ üzerinde 4-değerlidir ve $|a(0)| = 0$ ve $|a(1,5)| = 3$ olur [10].

Teorem 1.10.2: Eğer, (1.10.1) ile verilen $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu $a_p = 1$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + p - 1)\left(|a_{n+p-1}| + |b_{n+p-1}|\right) \leq 2p \qquad (1.10.2)$$

şartını sağlıyorsa, f, U da harmonik, yön koruyan ve $f \in SH(p)$ olur [1].

2. BÖLÜM

HADAMARD ÇARPIM İLE TANIMLI k- DÜZGÜN ÇOKDEĞERLİ HARMONİK FONKSİYONLARIN YENİ BİR SINIFI

Bu bölümde, Hadamard Çarpım ile tanımlı, birim diskte $k-$düzgün harmonik fonksiyonlar ile ilgili çokdeğerli yön koruyan karmaşık harmonik fonksiyonların yeni bir sınıfını tanımlayarak, bu alt sınıfa ait katsayı kestirimlerini, extreme noktalarını, büyüme ve bükülme teoremlerini ve kapalılık özelliklerini vereceğiz.

2.1 $H_F(p,t,\alpha,k)$ Sınıfının Tanımı:

Basit bağlantılı bir $D\subset\mathbb{C}$ karmaşık bölgesinde tanımlı harmonik bir fonksiyonun, $f=h+\overline{g}$, $z\in D$ şeklinde ifade edilebildiğini biliyoruz. Burada h ve g, f in sırasıyla analitik ve anti-analitik kısımlarıdır. Özellikle eğer f fonksiyonunun anti-analitik kısmı sıfır ise, f fonksiyonu analitik duruma indirgenir. D bölgesinde $z\to f(z)$ dönüşümünün yön koruyan ve yalınkat olması için gerekli ve yeterli koşul f in Jakobiyeninin pozitif yani ,

$$J_f(z)=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2>0,\quad z\in D$$

olmasıdır.

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \quad \text{ve} \quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n \quad ,|b_1|<1 \tag{2.1.1}$$

ile U birim diskinde harmonik, yön koruyan ve yalınkat olan $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarının sınıfını H ile gösterelim. H sınıfı Clunie ve Sheil Small [8] tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır.

$p\geq 1$ belirli pozitif tamsayısı için, $t\geq 1$ bir tamsayı olmak üzere,

$$h(z)=z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}a_nz^n, \qquad g(z)=\sum_{n=p+t-1}^{\infty}b_nz^n \qquad |b_{p+t-1}|<1 \tag{2.1.2}$$

şeklinde yön koruyan tüm çokdeğerli harmonik $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarının ailesini $H(p)$ ile tanımlayalım. Özellikle $H(1)=H$ dır.

$f\in H(p)$ fonksiyonu eğer, her bir $z=re^{i\theta}$ $,0\leq\theta<2\pi,\ 0\leq r<1$ için,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left(f\left(re^{i\theta}\right)\right)\right)\geq p\alpha \quad ,0\leq\alpha<1$$

şartını sağlarsa f fonksiyonuna α ***Mertebeli Çokdeğerli Yıldızıl Harmonik Fonksiyon*** denir. α mertebeli çokdeğerli yıldızıl harmonik fonksiyonların $S_H^*\left(1,\alpha\right)$ ve $S_H^*\left(p,\alpha\right)$ sınıfları [4], [2] ve [16] de çalışılmıştır.

$$F\left(z\right)=H\left(z\right)+\overline{G\left(z\right)}=z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}\left|A_n\right|z^n+\overline{\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left|B_n\right|z^n}$$

belirli bir çokdeğerli harmonik fonksiyon olsun. $\left(f*F\right)$, f ve F harmonik fonksiyonlarının Hadamard çarpımı ve

$k\ \left(0\le k<\infty\right)$, $p\ \left(p\ge 1\right)$, $\alpha\ \left(0\le\alpha<1\right)$, $t\ \left(t\ge 1\right)$, $z\in U$ için $H\left(p\right)$ de,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z\left(f*F\right)'\left(z\right)}{z'\left(f*F\right)\left(z\right)}\right)\ge k\left|\frac{z\left(f*F\right)'\left(z\right)}{z'\left(f*F\right)\left(z\right)}-p\right|+p\alpha \tag{2.1.3}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların ailesi, $H_F\left(p,t,\alpha,k\right)$ olsun. Burada

$z=\dfrac{\partial}{\partial\theta}(r\,e^{i\theta})$, $f'(z)=\dfrac{\partial}{\partial\theta}f(r\,e^{i\theta})$ şeklindedir.

$$\operatorname{Re}w>k\left|w-p\right|+p\alpha\Leftrightarrow\operatorname{Re}\left(\left(1+ke^{i\theta}\right)w-kpe^{i\theta}\right)\ge p\alpha$$

gerçeğini kullanarak (2.1.3) den f fonksiyonunun $H_F\left(p,t,\alpha,k\right)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\left(1+ke^{i\theta}\right)z\left(f*F\right)'\left(z\right)}{z'\left(f*F\right)\left(z\right)}-kpe^{i\theta}\right)\ge p\alpha\quad ,0\le\alpha<1 \tag{2.1.4}$$

olması gerektiği bulunur.

$H_F\left(p,t,\alpha,k\right)$ sınıfı $H\left(p\right)$ veya H sınıfının daha önce çalışılmış birçok alt sınıfını kapsayan, daha geniş bir sınıftır. Örneğin;

$H_{\left(\frac{z}{1-z}\right)+\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)}}\left(p,t,\alpha,0\right)=S_H^*\left(p,\alpha\right)$;[3],[16]

$H_{\left(\frac{z}{1-z}\right)+\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)}}\left(p,t,0,0\right)=S_H^*\left(p,0\right)$;[2]

$H_{\left(\frac{z}{1-z}\right)+\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)}}\left(1,1,\alpha,0\right)=S_H^*\left(1,\alpha\right)=S_H^*\left(\alpha\right)$;[19]

$H_{\left(\frac{z}{1-z}\right)+\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)}}\left(1,1,0,0\right)=S_H^*\left(0\right)=S_H^*$;[41],[42]

$$H_{\left(\frac{z}{1-z}\right)+\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)}}\left(p,t,\alpha,1\right)=\left\{f\in H\left(p\right):\operatorname{Re}\left(\left(1+e^{i\theta}\right)\frac{zf'}{z'f}-pe^{i\theta}\right)\geq p\alpha\right\}\;;[20]$$
$$H_{\left(\frac{z}{1-z}\right)+\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)}}\left(1,1,\alpha,k\right)=G_H\left(k,\alpha,1\right)\qquad;[4]$$

şeklindedir.

Son olarak, $p\geq 1$ için $TH\left(p\right)$,

$$h\left(z\right)=z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}\left|a_n\right|z^n,\qquad g\left(z\right)=\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left|b_n\right|z^n \tag{2.1.5}$$

şeklindeki h ve g fonksiyonları için $H\left(p\right)$ deki $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarının sınıfını tanımlamak üzere,

$$H_{\overline{F}}\left(p,t,\alpha,k\right)=TH\left(p\right)\cap H_F\left(p,t,\alpha,k\right)$$

ailesini tanımlayalım.

2.2 $H_F\left(p,t,\alpha,k\right)$ ve $H_{\overline{F}}\left(p,t,\alpha,k\right)$ Sınıflarının Katsayı Kestirimleri:

Bu kesimde ilk olarak $H_F\left(p,t,\alpha,k\right)$ sınıfındaki harmonik fonksiyonlar için gerekli bir katsayı şartını verdikten sonra bu şartın $H_{\overline{F}}\left(p,t,\alpha,k\right)$ sınıfındaki fonksiyonlar için yeterli de olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.2.1: h ve g fonksiyonları (2.1.2) de verildiği şekilde tanımlanmak üzere $f=h+\overline{g}$ olsun. Eğer $k\geq 0,\quad p\geq 1,\quad 0\leq\alpha<1$ ve (tamsayı) $t\geq 1$ iken

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[\frac{n\left(1+k\right)-p\left(k+\alpha\right)}{\left(p\left(1-\alpha\right)+1\right)-\left|p\left(1-\alpha\right)-1\right|}\right]\left|a_nA_n\right|+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[\frac{n\left(1+k\right)+p\left(k+\alpha\right)}{\left(p\left(1-\alpha\right)+1\right)-\left|p\left(1-\alpha\right)-1\right|}\right]\left|b_nB_n\right|\leq\frac{1}{2} \tag{2.2.1}$$

ise, $f\in H_F\left(p,t,\alpha,k\right)$ olur.

İspat : (2.1.4) ışığında

$$w=\frac{\left(ke^{i\theta}+1\right)\left[z\left(h*H\right)'\left(z\right)-\overline{z\left(g*G\right)'\left(z\right)}\right]-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)\left[\left(h*H\right)\left(z\right)+\overline{\left(g*G\right)\left(z\right)}\right]}{\left(h*H\right)\left(z\right)+\overline{\left(g*G\right)\left(z\right)}}:=\frac{A(z)}{B(z)}$$

iken $\operatorname{Re}\left(w\right)>0$ olduğunu göstermeliyiz. Yani "$\operatorname{Re}\left(w\right)>0\Leftrightarrow\left|1+w\right|\geq\left|1-w\right|$"

gerçeğini kullanarak

$$\left|A\left(z\right)+B\left(z\right)\right|-\left|A\left(z\right)-B\left(z\right)\right|\geq 0 \tag{2.2.2}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (2.2.2) de verilen $A(z)$ ve $B(z)$ için gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$
\begin{aligned}
&\left|A(z)+B(z)\right|= \\
&=\left|\left(1+ke^{i\theta}\right)\left[pz^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}na_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\overline{nb_nB_nz^n}\right]-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)\left[z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}a_nA_nz^n+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\overline{b_nB_nz^n}\right]+z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}a_nA_nz^n+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\overline{b_nB_nz^n}\right| \\
&=\Bigg|\left(1+ke^{i\theta}\right)pz^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}\left(1+ke^{i\theta}\right)na_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left(1+ke^{i\theta}\right)n\overline{b_nB_nz^n}-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)a_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)\overline{b_nB_nz^n}+ \\
&\qquad\qquad +z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}a_nA_nz^n+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\overline{b_nB_nz^n}\Bigg| \\
&=\left|\left(p+kpe^{i\theta}-kpe^{i\theta}-p\alpha+1\right)z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n\left(1+ke^{i\theta}\right)-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)+1\right]a_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n\left(1+ke^{i\theta}\right)+p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)-1\right]\overline{b_nB_nz^n}\right| \\
&=\left|\left[p(1-\alpha)+1\right]z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n\left(1+ke^{i\theta}\right)-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)+1\right]a_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n\left(1+ke^{i\theta}\right)+p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)-1\right]\overline{b_nB_nz^n}\right|
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left|A(z)-B(z)\right|= \\
&=\left|\left(1+ke^{i\theta}\right)\left[pz^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}na_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\overline{nb_nB_nz^n}\right]-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)\left[z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}a_nA_nz^n+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\overline{b_nB_nz^n}\right]-z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}a_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\overline{b_nB_nz^n}\right| \\
&=\Bigg|\left(1+ke^{i\theta}\right)pz^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}\left(1+ke^{i\theta}\right)na_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left(1+ke^{i\theta}\right)n\overline{b_nB_nz^n}-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)a_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)\overline{b_nB_nz^n}- \\
&\qquad\qquad -z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}a_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\overline{b_nB_nz^n}\Bigg| \\
&=\left|\left(p+kpe^{i\theta}-kpe^{i\theta}-p\alpha-1\right)z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n\left(1+ke^{i\theta}\right)-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)-1\right]a_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n\left(1+ke^{i\theta}\right)+p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)+1\right]\overline{b_nB_nz^n}\right| \\
&=\left|\left[p(1-\alpha)-1\right]z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n\left(1+ke^{i\theta}\right)-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)-1\right]a_nA_nz^n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n\left(1+ke^{i\theta}\right)+p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)+1\right]\overline{b_nB_nz^n}\right|.
\end{aligned}
$$

yazılır. Buradan,

$$\left|A(z)+B(z)\right|-\left|A(z)-B(z)\right|$$

$$\geq\left(\left[p(1-\alpha)+1\right]-\left|p(1-\alpha)-1\right|\right)|z|^{p}-\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n(1+k)-p(k+\alpha)+1\right]\left|a_nA_n\right||z|^{n}$$

$$-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n(1+k)+p(k+\alpha)-1\right]\left|b_nB_n\right||z|^{n}-\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n(1+k)-p(k+\alpha)-1\right]\left|a_nA_n\right||z|^{n}$$

$$-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n(1+k)+p(k+\alpha)+1\right]\left|b_nB_n\right||z|^{n}$$

$$=\left(\left[p(1-\alpha)+1\right]-\left|p(1-\alpha)-1\right|\right)|z|^{p}$$

$$-\sum_{n=p+t}^{\infty}2\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|a_nA_n\right||z|^{n}-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}2\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]\left|b_nB_n\right||z|^{n}$$

$$=\left(\left[p(1-\alpha)+1\right]-\left|p(1-\alpha)-1\right|\right)|z|^{p}\left\{1-\sum_{n=p+t}^{\infty}\frac{2\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]}{\left[p(1-\alpha)+1\right]-\left|p(1-\alpha)-1\right|}\left|a_nA_n\right| -\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\frac{2\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{\left[p(1-\alpha)+1\right]-\left|p(1-\alpha)-1\right|}\left|b_nB_n\right|\right\}$$

$$\geq 0$$

elde edilir. Hipotez gereği bu son ifade negatif olmayandır. Böylece, ispat tamamlanır.

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\left|X_n\right|+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left|Y_n\right|=1$$

olmak üzere,

$$f(z)=z^{p}+\sum_{n=p+t}^{\infty}\frac{\left[p(1-\alpha)+1\right]-\left|p(1-\alpha)-1\right|}{2\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]}X_nz^{n}+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\frac{\left[p(1-\alpha)+1\right]-\left|p(1-\alpha)-1\right|}{2\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]B_n}\overline{Y_n}\,\overline{z^{n}} \tag{2.2.3}$$

fonksiyonları (2.2.1) ile verilen katsayı eşitsizliğinin kesin olduğunu gösterir.

Sonuç 2.2.1: h ve g fonksiyonları (2.1.2) ile verilmek üzere $f=h+\overline{g}$ olsun. $0\leq\alpha<1$ için $p\geq\dfrac{1}{1-\alpha}$ alalım. Bu durumda eğer,

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|a_nA_n\right|+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]\left|b_nB_n\right|\leq 1$$

şartı sağlanırsa $f\in H_F(p,t,\alpha,k)$ olur.

Sonuç 2.2.2: h ve g fonksiyonları (2.1.1) ile verilmek üzere $f = h + \overline{g}$ olsun. Yine $0 \le \alpha < 1$ için $1 \le p \le \dfrac{1}{1-\alpha}$ alalım. Bu durumda eğer,

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|a_n A_n\right| + \sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]\left|b_n B_n\right| \le p(1-\alpha)$$

ise $f \in H_F(p,t,\alpha,k)$ olur.

Aşağıdaki teoremde yukarıda verilen gerekli şartın $H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ için yeterli de olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.2.2 : h ve g fonksiyonları (2.1.5) ile verilmek üzere $f = h + \overline{g}$ olsun ve $k \ge 0$, $0 \le \alpha < 1$ alalım. Bu durumda,

i) $1 \le p \le \dfrac{1}{1-\alpha}$ iken $f \in H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|a_n A_n\right| + \sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]\left|b_n B_n\right| \le p(1-\alpha)$$

olmasıdır.

ii) $p(1-\alpha) \ge 1$ iken $f \in H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|a_n A_n\right| + \sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]\left|b_n B_n\right| \le 1 \qquad (2.2.4)$$

olmasıdır.

İspat: Sonuç (2.2.1) ve Sonuç (2.2.2) ye göre, (2.2.4) şartı sağlanmazsa $f \in H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ de olan (2.1.5) ile verilen $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu için gerekli ve yeterli şart (2.1.4) eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Eşdeğer olarak,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\left(1+ke^{i\theta}\right)\left[z(h*H)'(z)-\overline{z(g*G)'(z)}\right]-p\left(ke^{i\theta}+\alpha\right)\left[(h*H)(z)+\overline{(g*G)(z)}\right]}{\left[(h*H)(z)+\overline{(g*G)(z)}\right]}\right) \ge 0 \quad (2.2.5)$$

eşitsizliğini elde etmeliyiz. $0 \le z = r < 1$ olmak üzere z nin değerlerini pozitif reel eksen üzerinde seçerek ve $\operatorname{Re}\left(-e^{i\theta}\right) \ge -\left|e^{i\theta}\right| = -1$ eşitliğini kullanarak (2.2.5) eşitsizliği

$$= \mathrm{Re}\left\{ \frac{\left(1+ke^{i\theta}\right)\left[pz^p - \sum_{n=p+t}^{\infty} n|a_nA_n||z^n| - \sum_{n=p+t-1}^{\infty} n|b_nB_n||z^n|\right] - \left(ke^{i\theta}+\alpha\right)p\left[z^p - \sum_{n=p+t}^{\infty}|a_nA_n|z^n + \overline{\sum_{n=p+t-1}^{\infty}|b_nB_n|z^n}\right]}{p\left[z^p - \sum_{n=p+t}^{\infty}|a_nA_n|z^n + \overline{\sum_{n=p+t-1}^{\infty}|b_nB_n|z^n}\right]} \right\}$$

$$\geq \left\{ \frac{(1+k)\left[pr^p - \sum_{n=p+t}^{\infty} n|a_nA_n|r^n - \sum_{n=p+t-1}^{\infty} n|b_nB_n|r^n\right] - (k+\alpha)p\left[r^p - \sum_{n=p+t}^{\infty}|a_nA_n|r^n + \sum_{n=p+t-1}^{\infty}|b_nB_n|r^n\right]}{p\left[r^p - \sum_{n=p+t}^{\infty}|a_nA_n|r^n + \sum_{n=p+t-1}^{\infty}|b_nB_n|r^n\right]} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{p(1-\alpha)r^p - \sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n(1+k) - p(k+\alpha)\right]|a_nA_n|r^n - \sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]|b_nB_n|r^n}{p\left[r^p - \sum_{n=p+t}^{\infty}|a_nA_n|r^n + \sum_{n=p+t-1}^{\infty}|b_nB_n|r^n\right]} \right\}$$

indirgenir. $r \to 1^-$ alarak

$$\frac{p(1-\alpha) - \left\{ \sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n(1+k) - p(k+\alpha)\right]|a_nA_n| + \sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]|b_nB_n| \right\}}{1 - \sum_{n=p+t}^{\infty}|a_nA_n| + \sum_{n=p+t-1}^{\infty}|b_nB_n|} \geq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz Eğer (2.2.5) şartı sağlanmazsa, bu durumda (2.2.6) nın payı (i) ve (ii) şartlarından dolayı 1 e yeteri kadar yakın r sayıları için negatif olur. Bu (2.2.6) nın sol tarafını negatif yapan $z_0 = r_0 > 1$, sayısının varolduğunu gösterir. Bu da bir çelişkidir.

2.3 $H_{\overline{F}}(p,t;\alpha,k)$ Sınıfının Büyüme Sınırları :

Bu kesimde (2.1.3) tanımını kullanarak $H_{\overline{F}}(p,t;\alpha,k)$ sınıfı için büyüme sınırlarını elde edeceğiz.

Teorem 2.3.1: $f \in H_{\overline{F}}(p,t;\alpha,k)$ ise, bu durumda $|z| = r < 1$ ve $A_n \leq B_n$ için,

$$\left|f(z)\right| \le \begin{cases} \left(1+\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1} + \left(\dfrac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|} - \dfrac{\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}\left|b_{p+t-1}B_{p+t-1}\right|\right)r^{p+1} \; ; p(1-\alpha)\le 1 \\ \left(1+\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1} + \left(\dfrac{1}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|} - \dfrac{\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}\left|b_{p+t-1}B_{p+t-1}\right|\right)r^{p+1} ; p(1-\alpha)\ge 1 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

ve

$$\left|f(z)\right| \ge \begin{cases} \left(1-\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1} - \left(\dfrac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|} - \dfrac{\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}\left|b_{p+t-1}B_{p+t-1}\right|\right) r^{p+1}; p(1-\alpha)\le 1 \\ \left(1-\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1} - \left(\dfrac{1}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|} - \dfrac{\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}\left|b_{p+t-1}B_{p+t-1}\right|\right)r^{p+1}; p(1-\alpha)\ge 1 \end{cases} \tag{2.2.8}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliklerdeki alt ve üst sınırlar büyültülemez ve küçültülemez.

İspat: $p(1-\alpha)\le 1$ olduğunu varsayalım. $p(1-\alpha)\ge 1$ için de ispat benzerdir.

$f \in H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ ve $\left|A_{p+t}\right| \le \left|A_n\right|, \left|A_{p+t}\right| \le \left|B_n\right|$ ise, Teorem 2.2.2 gereği aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \left|f(z)\right| &= \left|z^p - \sum_{n=p+t}^{\infty}\left|a_n\right|z^n + \sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left|b_n\right|\overline{z^n}\right| \qquad ,\left|z\right| = r < 1 \\ &= \left|z^p - \sum_{n=p+t}^{\infty}\left|a_n\right|z^n + \sum_{n=p+t}^{\infty}\left|b_n\right|\overline{z^n} + \left|b_{p+t-1}\right| \sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left|b_n\right|\left(\overline{z}\right)^{p+t-1}\right| \\ &= \left|z^p + \left|b_{p+t-1}\right|\left(\overline{z}\right)^{p+t-1} - \sum_{n=p+t}^{\infty}\left(\left|a_n\right|z^n - \left|b_n\right|\overline{z^n}\right)\right| \end{aligned}$$

$$\leq \left(1+\left|b_{p+t-1}\right|\right) r^{p+t-1} + \sum_{n=p+t}^{\infty} \left(\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\right) r^{n}$$

$$\leq \left(1+\left|b_{p+t-1}\right|\right) r^{p+t-1} + \sum_{n=p+t}^{\infty} \left(\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\right) r^{p+1}$$

$$= \left(1+\left|b_{p+t-1}\right|\right) r^{p+t-1} + \frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}$$

$$\sum_{n=p+t}^{\infty} \frac{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}{p(1-\alpha)} \left(\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\right) r^{p+1}$$

$$= \left(1+\left|b_{p+t-1}\right|\right) r^{p+t-1} + \frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}$$

$$\left(\sum_{n=p+t}^{\infty} \frac{\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}{p(1-\alpha)} \left|a_n\right| + \frac{\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}{p(1-\alpha)} \left|b_n\right| \right) r^{p+1}$$

$$\leq \left(1+\left|b_{p+t-1}\right|\right) r^{p+t-1} + \frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}$$

$$\left(\sum_{n=p+t}^{\infty} \frac{\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]}{p(1-\alpha)} \left|A_n a_n\right| + \frac{\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{p(1-\alpha)} \left|B_n b_n\right| \right) r^{p+1}$$

$$\leq \left(1+\left|b_{p+t-1}\right|\right) r^{p+t-1} + \frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}$$

$$\left(1 - \frac{\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{p(1-\alpha)} \left|b_{p+t-1} B_{p+t-1}\right| \right) r^{p+1}$$

$$= \left(1+\left|b_{p+t-1}\right|\right) r^{p+t-1}$$

$$+ \left(\frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|} - \frac{\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|} \left|b_{p+t-1} B_{p+t-1}\right| \right) r^{p+1}.$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde,

$$\left|f(z)\right| = \left| z^p - \sum_{n=p+t}^{\infty} \left|a_n\right| z^n + \overline{\sum_{n=p+t-1}^{\infty} \left|b_n\right| z^n} \right| \qquad ,\left|z\right| = r < 1$$

$$= \left| z^p - \sum_{n=p+t}^{\infty} \left|a_n\right| z^n + \sum_{n=p+t}^{\infty} \left|b_n\right| z^n + \left|b_{p+t-1}\right| \left(\overline{z}\right)^{p+t-1} \right|$$

$$= \left| z^p + \left|b_{p+t-1}\right| \left(\overline{z}\right)^{p+t-1} - \sum_{n=p+t}^{\infty} \left(\left|a_n\right| z^n - \left|b_n\right| \left(\overline{z}\right)^n \right) \right|$$

$$\geq \left(1-\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1}-\sum_{n=p+t}^{\infty}\left(\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\right)r^{n}$$

$$\geq \left(1-\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1}-\sum_{n=p+t}^{\infty}\left(\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\right)r^{p+1}$$

$$=\left(1-\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1}-\frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}$$

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\frac{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}{p(1-\alpha)}\left(\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\right)r^{p+1}$$

$$=\left(1-\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1}-\frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}$$

$$\left(\sum_{n=p+t}^{\infty}\frac{\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}{p(1-\alpha)}\left|a_n\right|+\frac{\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}{p(1-\alpha)}\left|b_n\right|\right)r^{p+1}$$

$$\geq \left(1-\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1}-\frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}$$

$$\left(\sum_{n=p+t}^{\infty}\frac{\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]}{p(1-\alpha)}\left|A_n a_n\right|+\frac{\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{p(1-\alpha)}\left|B_n b_n\right|\right)r^{p+1}$$

$$\geq \left(1-\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1}-\frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}\left(1-\frac{\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{p(1-\alpha)}\left|b_{p+t-1}B_{p+t-1}\right|\right)r^{p+1}$$

$$=\left(1-\left|b_{p+t-1}\right|\right)r^{p+t-1}-\left(\frac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}-\frac{\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}\left|b_{p+t-1}B_{p+t-1}\right|\right)r^{p+1}$$

olarak bulunur.

Sonuç 2.3.1 ***:***

Eğer, $f\in H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ ise,

$$\left\{w:|w|<\begin{array}{ll}1-\dfrac{p(1-\alpha)}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}-\dfrac{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)-\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]\left|B_{p+t-1}\right|\right]\left|b_{p+t-1}\right|}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|} & ;p(1-\alpha)\leq 1\\ 1-\dfrac{1}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|}-\dfrac{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)-\left[(p+t-1)(1+k)+p(k+\alpha)\right]\left|B_{p+t-1}\right|\right]\left|b_{p+t-1}\right|}{\left[(p+t)(1+k)-p(k+\alpha)\right]\left|A_{p+t}\right|} & ;p(1-\alpha)\geq 1\end{array}\right\}\subset f(U)$$

olur.

2.4 $H_{\overline{F}}(p,t;\alpha,k)$ Sınıfının Kapalılık Özelliği :

Bu kesimde clco$H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ ile tanımlanan $H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ sınıfının kapalı konveks zarfının extreme noktalarını ve $H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ sınıfının konveks bileşimler altında kapalı olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.4.1: $|A_n| \neq 0 \ (n = p+t, n = p+t-1, ...)$ ve $|B_n| \neq 0 \ (n = p+t-1, n = p+t, ...)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda f fonksiyonunun clco$H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ da olması için gerekli ve yeterli koşul

$h_{p+t-1}(z) = z^p,$

$$h_n(z) = \begin{cases} z^p - \dfrac{p(1-\alpha)}{\left[n(1+k) - p(k+\alpha)\right]|A_n|} z^n & (n = p+t, p+t+1, ...),\ p(1-\alpha) \leq 1 \\ z^p - \dfrac{1}{\left[n(1+k) - p(k+\alpha)\right]|A_n|} z^n & (n = p+t, p+t+1, ...),\ p(1-\alpha) \geq 1 \end{cases}$$

ve

$$g_n(z) = \begin{cases} z^p + \dfrac{p(1-\alpha)}{\left[n(1+k) + p(k+\alpha)\right]|B_n|} \overline{z^n} & (n = p+t-1,\ p+t, ...),\ p(1-\alpha) \leq 1 \\ z^p + \dfrac{1}{\left[n(1+k) + p(k+\alpha)\right]|B_n|} \overline{z^n} & (n = p+t-1,\ p+t, ...),\ p(1-\alpha) \geq 1 \end{cases}$$

$X_{p+t-1} \equiv X_p = 1 - \left(\sum\limits_{n=p+t}^{\infty} X_n + \sum\limits_{n=p+t-1}^{\infty} Y_n \right), \quad X_n \geq 0,\ Y_n \geq 0,$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=p+t-1}^{\infty} X_n h_n(z) + Y_n g_n(z), \quad z \in U \tag{2.2.9}$$

şeklinde olmasıdır.

Özellikle $H_{\overline{F}}(p,t,\alpha,k)$ sınıfının extreme noktaları $\{h_n\}$ ve $\{g_n\}$ fonksiyonlarıdır.

İspat: İspatı $p(1-\alpha) \leq 1$ için yapalım. $p(1-\alpha) \geq 1$ durumundaki ispatta, benzer şekilde yapılabilir.

$p(1-\alpha) \leq 1$ olduğunu varsayalım. (2.2.9) şeklindeki fonksiyonlar için

$$f(z) = z^p - \sum_{n=p+t}^{\infty} \frac{p(1-\alpha)}{\left[n(1+k) - p(k+\alpha)\right]|A_n|} X_n z^n + \sum_{n=p+t-1}^{\infty} \frac{p(1-\alpha)}{\left[n(1+k) + p(k+\alpha)\right]|B_n|} Y_n \overline{z}^{n}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan, $0 \leq X_p \leq 1$ için

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\frac{\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]|A_n|}{p(1-\alpha)}\left(\frac{p(1-\alpha)}{\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]|A_n|}X_n\right)+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\frac{\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]|B_n|}{p(1-\alpha)}\left(\frac{p(1-\alpha)}{\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]|B_n|}Y_n\right)$$

$$=\left(\sum_{n=p+t}^{\infty}X_n+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}Y_n\right)=\left(1-X_p\right)\leq 1$$

olur. Böylece Teorem 2.2.2 den $f\in H_{\overline{F}}\left(p,t,\alpha,k\right)$ bulunur.

Diğer tarafı ispatlamak için, $f\in H_{\overline{F}}\left(p,t,\alpha,k\right)$ olsun. Teorem 2.2.2 den

$$|a_n|\leq\frac{p(1-\alpha)}{\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]|A_n|}\quad,\quad |b_n|\leq\frac{p(1-\alpha)}{\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]|B_n|}.$$

yazılır. Şimdi

$$X_n=\frac{\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]|a_nA_n|}{p(1-\alpha)}\quad,\quad Y_n=\frac{\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]|b_nB_n|}{p(1-\alpha)}$$

alalım ve $X_p=1-\left(\sum_{n=p+t}^{\infty}X_n+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}Y_n\right)$; $X_p\geq 0$ tanımlayalım. Bu durumda,

$$f(z)=z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}|a_n|z^n+\overline{\sum_{n=p+t-1}^{\infty}|b_n|z^n}\qquad ;\ 0\leq X_n\leq 1,\qquad 0\leq Y_n\leq 1$$

$$=z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}\frac{p(1-\alpha)X_n}{\left[n(1+k)-p(k+\alpha)\right]|A_n|}z^n+\overline{\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\frac{p(1-\alpha)Y_n}{\left[n(1+k)+p(k+\alpha)\right]|B_n|}z^n}$$

$$=z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}\left(z^p-h_n(z)\right)X_n-\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left(z^p-g_n(z)\right)Y_n$$

$$=\left(1-\left(\sum_{n=p+t}^{\infty}X_n+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}Y_n\right)\right)z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}h_n(z)X_n+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}g_n(z)Y_n$$

$$=X_pz^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}X_nh_n(z)+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}Y_ng_n(z).$$

gerekli gösterimi elde ederiz. Böylece f fonksiyonu (2.2.9)ile ifade edilebilir.

Çalışmamıza ait son teoremimiz $H_{\overline{F}}\left(p,t,\alpha,k\right)$ sınıfının elamanlarının konveks bileşimi ile ilgili olan aşağıdaki teoremdir.

Teorem 2.4.2: $H_{\overline{F}}\left(p,t,\alpha,k\right)$ sınıfı konveks lineer bileşimi altında kapalıdır.

İspat: $i=1,2,...$ için f_i fonksiyonları

$$f_i\left(z\right)=z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}\left|a_{i_n}\right|z^n+\overline{\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left|b_{i_n}\right|z^n}$$

ile verilmek üzere $f_i\in H_{\overline{F}}\left(p,t,\alpha,k\right)$ olduğunu varsayalım**.** Aynı zamanda $F_i(z)=z^p+\sum_{n=p+t}^{\infty}\left|A_{i_n}\right|z^n+\overline{\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left|B_{i_n}\right|z^n}$ belirli harmonik fonksiyonlarının verildiğini varsayalım.

$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i=1,\quad 0\le\mu\le1$ için, f_i fonksiyonunun konveks bileşimi

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i f_i\left(z\right)=z^p-\sum_{n=p+t}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\left|a_{i_n}\right|\right)z^n+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\left|b_{i_n}\right|\right)\left(\overline{z}\right)^n \tag{2.2.10}$$

olarak yazılabilir.

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n\left(1+k\right)-p\left(k+\alpha\right)\right]\left|a_{i_n}A_{i_n}\right|+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n\left(1+k\right)+p\left(k+\alpha\right)\right]\left|b_{i_n}B_{i_n}\right|$$

$$\le\begin{cases}p\left(1-\alpha\right) & ;p\left(1-\alpha\right)\ge1\\ 1 & ;p\left(1-\alpha\right)\le1\end{cases}$$

olduğundan ve (2.2.10) eşitliği

$$\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n\left(1+k\right)-p\left(k+\alpha\right)\right]\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\left|a_{i_n}A_{i_n}\right|+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n\left(1+k\right)+p\left(k+\alpha\right)\right]\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\left|b_{i_n}B_{i_n}\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\left\{\sum_{n=p+t}^{\infty}\left[n\left(1+k\right)-p\left(k+\alpha\right)\right]\left|a_{i_n}A_{i_n}\right|+\sum_{n=p+t-1}^{\infty}\left[n\left(1+k\right)+p\left(k+\alpha\right)\right]\left|b_{i_n}B_{i_n}\right|\right\}$$

$$\le\begin{cases}p\left(1-\alpha\right)\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i=p\left(1-\alpha\right) & ;\ p\left(1-\alpha\right)\le1\\ \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i=1 & ;\ p\left(1-\alpha\right)\ge1\end{cases}$$

olduğunu verir. Böylece (2.2.1) ile verilen katsayı eşitsizliği sağlanır. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i f_i\left(z\right)\in H_{\overline{F}}\left(p,t,\alpha,k\right)$$

sınıfında olduğu görülür.

KAYNAKLAR

[1] OM. P. AHUJA and J.M. JAHANGIRI, Multivalent Harmonic Starlike Functions, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A, 55 (2001), 1-13.

[2] OM. P. AHUJA and J.M. JAHANGIRI, Multivalent Harmonic Starlike Functions, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Vol. LV, 1 Sectio A 55(1), (2001), 1-13.

[3] OM. P. AHUJA and J.M. JAHANGIRI, Multivalent Harmonic Starlike Functions With Missing Coefficients, Math. Sci. Res. J, 7(9), (2003), 347-352.

[4] OM. P. AHUJA, R. AGHALARY and S. B. JOSHI, Harmonic Univalent Functions Associated with k-unıformly Starlike Functions, Math. Sci. Res. J, 9(1), (2005), 9-17.

[5] BIEBERBACH, L. ;Über die Koeffizienten derjenigen Potenz reihen, welcheeine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. (1916) pp. 940-955.

[6] CHOQUET, G. ;Sur Un Typ De Transformation Analytique Generalisant la Representation Conforme et Definie au Moyen de Functions Harmoniques. Bull. Sci. Math. 69, 2 (1945) 156-165.

[7] CIMA, J. A. ve A. E. LIVINGSTON. 1989 Integral Smoothness Properties of Some Harmonic Mappings, Complex Variables, 11, 105-110.

[8] CLUNIE, J. ve T. SHEIL-SMALL. ;Harmonic Univalent Functions. Ann. Acad. Sci. Fen. Ser. A. I. ,9(1984),3-35.

[9] DUREN, P.L. ; Univalent Functions, Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, (1983).

[10] P. DUREN, W.HENGARTNER , and R.S. LAUGESEN , The Argument Principle for Harmonic Functions, Amer. Math. Monthly, 103(5)(1996), 441-415.

[11] E. HEINZ, Über die Lösungen der Minimalflachengleichung, (German) Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. Math.-Phys.-Chem. Abt. ,(1952), 51-56.

[12] GLOUZIN, G.M. ; On Distortion Theorems in The Theory of Conformal Mappings, Math. Sb. ,1(43) (1936), 127-135 (in Russian).

[13] GOLUZIN, M. ;Geometric Theory of Functiıns of A Complex Variable. Amer. Math. Soc. Trans. of Math. Monographs, 29, Providence RI 676p. (1969).

[14]GOODMAN, A.W. ; Univalent Functions, Vols.I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, (1983).

[15]GOODMAN, A. W. ;Univalent Functions. Mariner Publ. Comp, Inc. Vols I,107-108 (1983).

[16] H. O. GUNEY and O. P. AHUJA, Inequalities İnvolving Multipliers for Multivalent Harmonic Functions, J. Ineq. Pure Appl.Math, 7(5), Article 190,(2006), 1-9.

[17] HENGARTNER, W. ve G. SCHOBER. Harmonic Mappings With Given Dilation. J. London Math. Soc. ,33 (1986), 473-483.

[18] JAKUBOWSKI, Z. J. ,W. MAJCHRZAK ve K. SKALSKA. Harmonic Mappings With a Positive Real Part. Marerially XIV Konferencji Szkoleniowej Z Theory Zagadnien Ekstremalny, 17,24. ,(1993).

[19] J. M. JAHANGIRI, Harmonic Functions Starlike in the Unit Disc, J. Math. Anal. Appl. ,235, (1999), 470-477.

[20] J. M. JAHANGIRI, G. MURUGUSUNDARAMOORTHY and K. VIJAYA, On Starlikeness of Certain Multivalent Harmonic Functions, Journal of Natural Geometry 24, (2003), 1-10.

[21] S. KANAS and A. WISNIOWSKA Conic Regions and $k-$uniform Convexity, J. Comput Ann 105(1999) 327-336.

[22] S. KANAS and A. WISNIOWSKA, Conic Regions and $k-$starlike functions Rev. Roumaine. Math Pures Appl.. 45 (2002) 647-657.

[23] P. KOEBE, Uber die Uniformisierung Beliebiger Analytischer Kurven, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen. Math.-Phys. Kl., (1907), 191-210.

[24] LITTLEWOOD J.E. ;On Inequalities in The Theory of Functions, Proc. London Math. Soc. ,23 (1925), 481-519.

[25] LITTLEWOOD J.E. ;Lectures on Theory of Functions, Oxford University Press: London, (1944).

[26] LİNDELÖF E. ;Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogéres et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta. Soc. Sci. Fenn. ,35 (1909), No.7, 1-35.

[27] LOEWNER, C. ; Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I. Math. Ann. **,**89 (1923), 103-121.

[28] MILLER S.S. ,MOCANU P.T. ;Differential Subordinations and Univalent Functions, Machigon Math. J. ,28 (1981), 157-171.

[29] MILLER S.S. ,MOCANU P.T. ;On Some Classes of first order Differential Subordinations, Machigan Math. J., 32 (1985), 185-195.

[30] NEHARI Z. ; Conformal Mapping, New York, (1952).

[31] ÖZTÜRK, M. ;Reel Kısmı Pozitif ve Tipik Reel Harmonik Fonksiyonlar. Hacettepe Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 16, (1995), 79-89.

[32] POMMERENKE, CH. ;Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, (1973).

[33] REICH, E. The Composition of Harmonic Mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. 12 (1987), 47-53.

[34] ROGOSINSKI W. ;On Subordinate Functions, Proc. Cambridge Philos. Soc. 35 (1939), 1-26.

[35] ROGOSINSKI W. ;On The Coefficients of Subordinate Functions, Proc. London Math. Soc. 48 (1943), 48-82.

[36] RUSCEHEWEYH ST. , SHEIL-SMALL T. ,Hadamard Products of Schlicht Functions and the Poyla-Schoenberg Conjecture, Comm. Math. Helv. 48, (1973), 119-135.

[37] RUSCEHEWEYH ST. ,Neighborhoods of Univalent Functions, Proc. Amer. Math. Soc., 81, (1981), 521-527.

[38] CHOBER, G. Univalent Functions-Selected Topics Lecture Notes in Math. 478 Springer-Verlag New York, 200p. (1975).

[39] SHEIL- SMALL, T. ;Constants For Planar Harmonic Mappings, J. London Math. Soc. 42, 2 (1990) 237-248.

[40] SILVERMAN H. ,SILVIA E.M. and TELAGE D. ;Convolution Condition For Convexitiy, Starlikness and Sprallikness, Math. Z. ,162 (1978), 125-130.

[41] SILVERMAN H, Harmonic Univalent Functions With Negative Coefficients, J. Math. Anal. Appl, 220, (1998), 283-289.

[42] SILVERMAN H. and SILVIA E.M. Subclasses of Harmonic Univalent Functions, New Zealand J. Math, 28, (1999), 275-284.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	**:** F.Müge SAKAR
Doğum Yılı	**:** 23.07.1983
Doğum Yeri	**:** Diyarbakır
Medeni Hali	: Evli

Eğitim ve Akademik Durumu

İlkokul	**:** 1990/1995 Ali Emiri İlkokulu
Ortaokul	**:** 1995/1998 Ali Emiri Ortaokulu
Lise	**:** 1998/2001 Ziya Gökalp Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı)
Üniversite (Lisans)	**:** Dicle Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.
Yabancı Dil	**:**İngilizce

Adres

Ev	**:** Diclekent Bulvarı, Altın 3 Sitesi, D Blok, No: 6 DİYARBAKIR
Telefon	**:** 0.505.745 08 32
e-mail	**:**mugesakar@hotmail.com