T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Yasin KAYA tarafından yapılan " Hardy-Steklov Operatörü " konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan : Yard. Doç. Dr.	Bilal ÇEKİÇ
Üye : Prof. Dr.	Ali YILMAZ
Üye : Doç. Dr.	Farman MAMMADOV

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 18/06/2008

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2008

Prof. Dr. Necmettin PİRİNÇÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisansımda değerli bilgileriyle bana yol gösterici olan ve bazı yeni konuları öğrenmem de yardımcı olan değerli danışmanım Doç.Dr. Farman MAMMADOV'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Hardy Tipli Eşitsizlikler, Hardy Operatörü ve Hardy-Steklov Operatörü birbiriyle yakından ilişkili(birbiriyle iç içe) olan matematik konularıdır.

Bu tezin amacı, bir integral operatörü olan ve Hardy tipli eşitsizliklerle iç içe olan Hardy-Steklov operatörünün özelliklerini(sınırlılık, süreklilik, kompaktlık) ve bu operatörün Hardy tipli eşitsizliklerde oynadığı rolü incelemektir.

ÖZET

Hardy ve Hardy-Steklov operatörleri doğal olarak Hardy tipli eşitsizlikleri ilgilidir. Asıl amacı bu konuları çalışmak olan tez sırasıyla, genel olarak, şöyle özetlenebilir:

İlk bölüm olan giriş bölümünde konunun önemi ve doğuşu hakında bilgi verilmektedir.

Metrik uzaylar, normlu uzaylar, L^p uzayları, operatörler gibi temel konular ikinci bölümde verilmektedir.

Lebesgue integral teorisinde merkezi bir yeri olan yakınsaklık teoremleri üçünçü bölümde verilmektedir.

Tezdeki teoremlerin ispatları için gerekli olan Fubini-Tonelli teoremleri dördüncü bölümde verilmektedir

Operatör teorisinde önemli olan interpolasiyon beşinci bölümde yer almaktadır.

Zayıf türev, Sobolev gömme teoremleri gibi konuları içeren Sobolev uzayı altıncı bölümde verilmektedir.

Daha farklı uzaylarda çalışmamıza izin veren homojen tip uzaylar ve önemli örtme teoremleri yedinci bölümde yer almaktadır.

Son olarak tezin konusu olan Hardy-Steklov operatörü ve tez konusunun ayrılmaz bir konusu olan Hardy operatörleri ve Hardy eşitsizlikleri konuları birlikte sekizinci bölümde verilmiştir. Yani, bu bölüm Hardy-Steklov operatörünün sınırlılığı ve kompaktlığı kriterleriyle ilgileniyor ve Hardy-Steklov operatörünün, Hardy tipli eşitsizliklerde nerede yer aldığını gösteriyor.

SUMMARY

Hardy and Hardy-Steklov operators are, naturally, related to Hardy type inequalities. Thesis whose main aim is to study these topics can sum up as follows, generally:

First chapter which is introduction gives information about important of the topic and its birth.

Metric spaces, normed spaces, L^p spaces, operators such as basic topics are given in the second chapter.

Convergence theorems which take a central place in Lebesgue integration theory are given in the third chapter.

Fubini-Tonelli theorems which needed to prove theorems in the thesis are given in the fourth chapter.

Interpolation which is important in operator theory takes place in the fifth chapter.

Sobolev space which includes such as weak derivative, Sobolev embedding theorems is given in the sixth chapter.

Finally, Hardy-Steklov operator which is topic of the thesis and Hardy operator and Hardy inequalities which are indispensible from topic of thesis together are given in the eighth chapter. Namely, this chapter deals with boundedness and compactnees criteria of Hardy-Steklov operator and shows where Hardy-Steklov operator took place in Hardy type inequalities.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Son zamanlarda integral operatörlerinin araştırılmasında çıkan önemli ilerlemeler,fonksiyonel uzaylarının yeni çeşitlerinin ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Bu açıdan Hardy tip, Riesz tip, maksimal operatör, singular integral operatör ve diğer potansiyel tip (Hardy-Steklov operatörü, Calderon-Zeygmund operatörü, bazı diyadik ve diyadik olmayan kesikli operatörler) operatörler için bulunan yeni ve modern eşitsizlikler göz önüne alınmalıdır.

Böyle eşitsizliklerin L^p uzaylarındaki ifadeleri klasik olarak değerlendirilmektedir. Ayrıca L^p uzayları dışına çıkıldığında önceki teori ve uzayların yetersiz olduğu ortaya çıkıyor.

Son yılların araştırmaları bu boşluğu doldurmaktadır. Bu açıdan birkaç yöntemi dikkate alıyoruz.

Homojen Tip Uzaylar

Genel Lebesgue Uzaylar

Modullar ifadelerle tanımlanan uzayları ve genel çok boyutlu uzay durumlarını göz önüne alıyoruz. Potansiyel tipli operatörlerin özelliklerinin homojen tipli uzaylarda ifade edilmesinin daha uygun olacağını düşünüyoruz.

Modular uzaylar derken bildiğimiz kuvvete yükseltme işlemiyle oluşan L^p uzaylarını değil, konveks fonksiyonlarla oluşan (tanımlanan) eşitsizlikleri kast ediyoruz.

Aslında her şey G. H. Hardy'nın 1920 de yayımlanmış bir notta(ispatsız) eğer $a > 0, f(x) \geq 0, p > 1$ ve $\int_a^\infty f^p(x)\,dx$ yakınsak ise bu durumda

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^\infty f^p(x)\,dx \tag{1.1}$$

olduğunu ifade etmesiyle başladı

G. H. Hardy diğer matematikçilerle (1.1) eşitsizliğiyle ilgili bir takım iletişimlerde bulundu ve $f(x) \geq 0$, $p > 1$; f herhangi sonlu $(0, X)$ aralığı üzerinde ve f^p $(0, \infty)$ aralığında integrallenebilir için aşağıdaki eşitsizliği ifade ve ispat etti.

$$\int_{o}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)\,dt\right)^{p} dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}\int_{0}^{\infty} f^{p}(x)\,dx \qquad (1.2)$$

Daha sonra (1.2) eşitsizliği bir model gibi alınarak daha genel eşitsizlikler elde etmek için üzerinde geniş çapta araştırmalar yapıldı ve $p > 1$, $\epsilon < p - 1$, tüm nonnegatif ölçülebilir fonksiyonlar için ilk ağırlıklı eşitsizlik verildi:

$$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)\,dt\right)^{p} x^{\varepsilon}dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^{p}\int_{0}^{\infty} f^{p}(x)\,x^{\varepsilon}dx \qquad (1.3)$$

burada $\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^{p}$ olabilecek en iyi sabittir. Bu konu üzerinde yoğun araştımalar yapıldı ve başarılı sonuçlar elde edildi. Çalışmalar devam etmekte ve yeni sonuçlar bulunmaya devam edilmektedir. Hardy ve Hardy-Steklov operatöleri Hardy tipli eşitsizliklerle iç içe bulunmaktadır.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde temel kavramlar genel olarak ispatsız verilecektir: L^pUzayı, Banach Uzayı, Lineer Operatörler, Bazı Eşitsizlikler gibi konular verilecek.

2.1. Metrik ve Normlu Uzaylar

Tanım 2.1.1. X bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer d

(i) her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$,

(ii) $d(x,y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,

(iii) her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

(iV) her $x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

koşullarını sağlarsa d ye X üzerinde bir *metrik* ve (X, d) çiftine bir *metrik uzay* denir.

Tanım 2.1.2. Bir X vektör uzayı üzerinde bir *norm* $\|\,.\,\|: X \to \mathbb{R}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur.

(i) her $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) her $x \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iii) her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$d(x,y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$ için metriğiyle normlu bir vektör uzayı, bir metrik uzay olur.

Örnek 2.1.3. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı için $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sıralı reel sayı n lisi ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

bir normlu uzay olur ve bu genellikle ℓ_p^n ile gösterilir.

Örnek 2.1.4. $I = [a, b]$ ve $B(I)$, $I \to \mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan tüm sınırlı fonksiyonların koleksiyonunu(kümesi) göstersin. Genellikle $\|f\|_\infty$ ile gösterilen ve adına *düzgün norm*, *supremum norm* veya ∞- *norm* denilen önemli bir norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.5. X bir vektör uzayı, $\|\,.\,\|_1$ ve $\|\,.\,\|_2$ X üzerinde birer norm olsunlar. Eğer

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \ \ (\text{ her } x \in X \text{ için })$$

olacak şekilde a ve b pozitif sayıları var ise $\|\,.\,\|_1$ *denktir* $\|\,.\,\|_2$ denir.

Eğer iki norm denk ise, bu durumda (x_n) $\|\,.\,\|_1$ normunda Cauchy dizisi ise $\|\,.\,\|_2$ normunda da Cauchy dizisi olur.

Önerme 2.1.6. Sonlu boyutlu bir uzayda tüm normlar denktir.

Tanım 2.1.7. (X, d) bir metrik uzay olsun ve (x_n), X te bir dizi olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ var ve her $m, n \geq N$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Önerme 2.1.8. Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

Önerme 2.1.9. Eğer bir Cauchy dizisi yakınsak bir alt diziye sahip ise kendisi de yakınsak olur.

Tanım 2.1.10. (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X teki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya *tamdır* denir.

Tanım 2.1.11. Eğer bir E kümesinin her açık örtüsü yine E yi örten sonlu bir alt örtüye sahip ise E nin *kompakt* olduğu söylenir.

Teorem 2.1.12. (Heine-Borel Teoremi) Bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart E nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Tanım 2.1.13. (X, d) bir metrik uzay ve eğer X teki her (x_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahip ise (X, d) metrik uzayına *dizisel kompakttır* denir.

Önerme 2.1.14. Her (X, d) kompakt metrik uzayı dizisel kompakttır.

Tanım 2.1.15. A, (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\bar{A}$ kompakt ise A ya *ön-kompakt* denir.

Kompakt kümeler daima kapalı olduğundan, kompakt kümelerin ön-kompakt olduğu söylenebilir.

Tanım 2.1.16. Eğer $f: X \to Y$ fonksiyonu, $a \in X$ ya yakınsayan X teki her (a_n) dizisi için $\big(f(a_n)\big)$ dizisi de $f(a)$ ya yakınsıyorsa, f fonksiyonuna a da *dizisel süreklidir* denir. Yani:

$$(a_n \to a) \Rightarrow \big(f(a_n) \to f(a)\big).$$

Eğer bir fonksiyon bir noktada sürekli ise dizisel sürekli de olur. Bunun karşıtı doğru değildir.

Tanım 2.1.17. A ve B, X normlu uzayının iki alt kümesi ve $A \subset B$ olsun. Eğer her bir $v \in B$ ve $\varepsilon > 0$ için $\|v - u\|_X < \varepsilon$ olmasını sağlayan bir $u \in A$ varsa A ya B de *yoğundur* denir ve $\bar{A} = B$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.18. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur. Yani $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir.

Tanım 2.1.19. Eğer X normlu uzayı sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip ise X e *ayrılabilirdir* denir.

Örnek 2.1.20. $\mathbb{R}$ ayrılabilir normlu uzaydır. Çünkü $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur ve sayılabilir bir kümedir.

Tanım 2.1.21. Bir tam normlu X uzayına bir *Banach uzayı* denir. Yani X teki her Cauchy dizisi ($n, m \to \infty$ için $\|x_n - x_m\| \to 0$) yakınsak dizidir ($n \to \infty$ için bir $x \in X$ vardır ve $\|x_n - x\| \to 0$).

Örnek 2.1.22. $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan reel değerli sürekli fonksiyonlar vektör uzayı $C[a, b]$,

$$\|f\| = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$$

normuna göre Banach uzayı olur.

$\mathbb{R}$ üzerindeki bir lineer(vektör) uzayda çok önemli bir kavram olan konveksliği tanımlayalım.

Tanım 2.1.23. X reel sayılar üzerinde bir vektör uzayı ve $K \subset X$ olsun. x, y noktaları K ya ait olduğunda x, y uclu tüm parça da K ya ait oluyorsa, yani

$$ax + (1 - a)y \,, \qquad 0 \le a \le 1$$

formunu sağlayan tüm noktalar da K ya ait oluyorsa, K nın *konveks* olduğu söylenir [30].

2.2. L^p Uzayları

Tanım 2.2.1. (X, M, μ) bir ölçüm uzayı ve f, X üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon, $0 < p < \infty$ için

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

($p < 1$için üçgen eşitsizliği sağlamadığından, $p < 1$ için bu bir norm değildir).
şeklinde tanımlanır ve $\|f\|_p = \infty$ olabilir ve

$$L^p(X, M, \mu) = \left\{f: X \to \mathbb{C}: f \text{ ölçülebilirdir ve } \|f\|_p < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır ve p nin limit değeri $p = \infty$ için

$$\|f\|_\infty = \inf\{\, a \geq 0: \mu(\{x: |f(x)| > a\}) = 0 \,\}$$

veya bazen f nin *esas supremumu* denilen

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$$

ile tanımlanır ve

$$L^\infty = L^\infty(X, M, \mu) = \{f: X \to \mathbb{C}: f \text{ ölçülebilirdir ve } \|f\|_\infty < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır [17].

Bu tanımlarda iki fonksiyon hemen hemen her yerde eşit ise, bu iki fonksiyon aynı fonksiyon kabul edilir.

Karışıklığa yol açmadığı durumlarda $L^p(X, M, \mu)$ yerine $L^p(\mu)$, $L^p(X)$ veya kısaca L^p ifadesini kullanabiliriz.

Teorem 2.2.2. $1 \leq p \leq \infty$ için, L^p Banach uzayı olur.

2.3. Zayıf L^p

Tanım 2.3.1. Eğer f, X üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve $0 < p < \infty$ ise

Zayıf L^p,

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{1/p} < \infty$$

şeklinde tanımlanır ve burada

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}).$$

$[f]_p$ bir norm değildir (üçgen eşitsizliği sağlamaz).

L^p ile zayıf L^p arasındaki ilişki şu şekildedir:

$$L^p \subset \text{zayıf } L^p \quad \text{ve} \quad [f]_p \leq \|f\|_p \,.$$

Örnek 2.3.2. $f(x) = x^{-1/p}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde ve Lebesgue ölçümüne göre zayıf L^p dedir, L^p de değildir.

2.4. Bazı Eşitsizlikler

Eşitsizlikler L^p uzaylarının uygulamalarında çok önemlidir.

Teorem 2.4.1 (Hölder Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ olsun. $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ve eğer f ve g fonksiyonları X üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar ise,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

olur.

Ayrıca f ve g fonksiyonları X üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar ise,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

eşitsizliği de sağlanır.

Hölder eşitsizliği, L^p uzayları için çok önemli ve gereklidir.

Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ olduğunda, Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinen

$$\int_X |fg| \leq \left(\int_X |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.4.2. (Minkowski eşitsizliği) Eğer $1 < p < \infty$ ve $f, g \in L^p$ ise, bu durumda

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

olur.

Teorem 2.4.3. (Chebyshev Eşitsizliği) Eğer $f \in L^p$ $(0 < p < \infty)$ ise, bu durumda herhangi bir $a > 0$ için,

$$\mu(\{x: |f(x)| > a\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{a}\right)^p$$

olur [17].

Teorem 2.4.4. (Young Eşitsizliği) $y = \phi(x)$, $x \geq 0$ için sürekli, reel değerli ve kesin artan ve $\phi(0)$=0 olsun. Eğer $x = \psi(y)$, ϕ nin tersi ise, bu durumda $a, b > 0$ için

$$ab \leq \int_0^a \phi(x)dx + \int_0^b \psi(y)dy$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.4.5. (İntegraller için bir Minkowski eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ ve (a, b) aralığında ölçülebilir nonnegatif olan herhangi bir f fonksiyonu için

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)^p dy\right)^{1/p} \leq \int_a^b \left(\int_a^b f^p\,(x,y)dy\right)^{1/p}$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 2.4.6. (Jensen eşitsizliği) (X, μ) sonlu bir ölçüm uzayı olsun. I, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $\Phi: I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $f(x) \subset I$ olacak şekilde $f \in L^1(X, \mu)$ olduğunu varsayalım ve $\Phi \circ f \in L^1(X, \mu)$ olsun. Bu durumda

$$\Phi\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(X)}\int_X (\Phi \circ f) d\mu$$

eşitsizliği vardır.

2.5. Operatörler

Tanım 2.6.1. X ve Y normlu iki uzay olsunlar. X ten Y ye bir T fonksiyonuna bir operatör veya bir *dönüşüm* denir.

T nin $x \in X$ teki değeri, $T(x)$ veya Tx ile gösterilir.

Eğer T,

(i) her $x, y \in X$ için $T(x+y) = Tx + Ty$

(ii) her $x \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $T(\alpha x) = \alpha Tx$

şartlarını sağlarsa, T ye bir lineer operatör veya lineer dönüşüm denir. Eğer $Y = \mathbb{R}$ (reel sayıların normlu uzayı) ise bu durumda T ye bir fonksiyonel denir ve genellikle F ile gösterilir. Bu tanımdaki iki özelliğe denk olarak

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \text{ , her } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ve } x, y \in X$$

şeklinde de verilir.

Örnek 2.6.2. Reel değerli $f(x) = \alpha x$ (α sabit bir reel sayı, $x \in \mathbb{R}$) fonksiyonu lineerdir.

Örnek 2.6.3. T, $C[0,1]$ ($[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar) her bir elemanını onun Riemann integraline götürsün, yani

$$Tf = \int_0^1 f(t)\,dt$$

tanımı ile T lineer olur.

Tanım 2.6.4. Eğer her $x \in X$ için, $Tx = 0$ ise T ye *sıfır operatörü*; her $x \in X$ için, $Tx = x$ ise T ye *özdeşlik operatörü* denir. Genellikle, *özdeşlik operatörü* I ile gösterilir.

Tanım 2.6.5. Eğer sabit bir $M \geq 0$ sayısı varsa ve her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$$

oluyorsa T operatörüne *sınırlıdır* denir. Eğer böyle bir sabit yok ise T ye sınırsızdır denir.

Teorem 2.6.6. X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda, T nin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul T, X teki sınırlı kümeleri Y deki sınırlı kümelere götürmesidir.

Tanım 2.6.7. Eğer $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\|x - x_0\| < \delta \text{ olduğunda } \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

olmasını sağlayan ε ve x_0 bağlı bir $\delta > 0$ var ise T ye $x_0 \in X$ te *süreklidi*r denir. Eğer T, X in her noktasında sürekli ise T ye X *üzerinde süreklidir* denir.

Lineer ve lineer olmayan operatör teorisinde, sürekli operatörler sınıfı en çok faydalı olandır.

Tanım 2.6.8. Eğer $\varepsilon > 0$ için x_0 dan bağımsız bir $\delta > 0$ vardır öyle ki X teki herhangi x_0 ve x için

$$\|x - x_0\|_X < \delta \text{ olduğunda } \|Tx - Tx_0\|_Y$$

oluyorsa T ye *düzgün süreklidir* denir.

Teorem 2.6.9. Eğer T bir lineer operatör ise, bu durumda $T(0) = 0$.

Teorem 2.6.10. Bir T operatörü normlu bir X uzayında sürekli olması için gerek ve yeter koşul eğer $x_n \to x_0$, $Tx_n \to Tx_0$ olmasını gerektirirse($x_0, x \in X$).

Teorem 2.6.11. X ve Y normlu uzaylar ve T, X ten Y ye bir lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) T süreklidir.

(ii) T orjinde süreklidir.

(iii) T sınırlıdır.

Tüm $T: X \to Y$ lineer operatörlerin kümesini $L(X, Y)$ ile, sınırlı lineer operatörlerin kümesini de $B(X, Y)$ ile gösteririz ve bunlar vektör uzayı yapısına sahiptirler. Ayrıca $B(X, Y)$, $L(X, Y)$ uzayının alt uzayıdır.

Tanım 2.6.12. $T: X \to Y$ sınırlı lineer operatör ise *operatör norm* $\|T\|$

$$\|T\| = \inf\{ M: \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X , her\ x \in X \}$$

ile verilir.

Teorem 2.6.13. Sınırlı bir T operatörü için aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) $\|T\| = \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\right\}$.

(ii) $\|T\| = inf\ \{M: \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X , her\ x \in X\}$.

(iii) $\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq 1\right\}$

Tanım 2.6.14. X üzerindeki lineer fonksiyoneller uzayına Xin *cebirsel dual uzayı*, X üzerindeki sınırlı(sürekli) fonksiyoneller uzayına ise X *in topolojik dual uzayı* denir [24].

Notasiyonla göstermek gerekirse X in cebirsel dual uzayı $L(X, \mathbb{R})$, X in topolojik dual uzayı $B(X, \mathbb{R})$ dir.

X in topolojik dual uzayını, X^* işareti ile gösteririz.

X^*,

$$\|F\| = \sup\{|F(x)|: \|x\| \leq 1\}$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

Tanım 2.6.15. X ve Y Banach uzayları olsun ve $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. T nin *kompakt* olması için gerek ve yeter koşul X teki her sınırlı S kümesinin $T(S)$ görüntüsü Y de ön-kompakt olmalıdır. Literatürde '' *kompakt* '' yerine bazen ''*tamamen sürekli* '' terimi kullanılır.

Açıktır ki: kapalı birim yuvarın görüntüsünün ön- kompakt olması, kompaktlık için yeterlidir.

Teorem 2.6.16. Her kompakt lineer operatör sınırlıdır.

2.7. Muckenhoupt Sınıfı

Tanım 2.7.1. Lokal olarak $\mu -$integrallenebilir ve hemen hemen her yerde pozitif $w: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir *ağırlık fonksiyonu* denir [19].

Tanım 2.7.2. $1 < p < \infty$, eğer (w, σ) ağırlık fonksiyonları çifti için

$$\sup_B \left(\frac{1}{\mu B}\int_B w(x)\,d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu B}\int_B \left(\sigma(x)\right)^{-1/p-1} d\mu\right)^{p-1} < \infty$$

olursa (w,σ) $A_p = A_p(X)$ *sınıfına(Muckenhoupt sınıfı)* ait olduğu söylenir, burada supremum tüm $B \subset X$ yuvarları üzerinde alınmaktadır. $p = 1$durumu için

$$\frac{1}{\mu B}\int_B w(x)\,d\mu \le \sup_{x\in B} \text{ess}\, \sigma(x)$$

Eğer $\sigma = w$ ise, bu durumda sade bir şekilde w nin $A_p(X)$ sınıfına ait olduğu söylenir.

Eğer her $\varepsilon \in (0,1)$ için, eğer B, X in içinde bir yuvar, $E \subset B$ μ ölçülebilir, ve $\mu E < \delta\mu B,$ bu durumda $wE \le \varepsilon wB$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise bir w ağırlığının $A_\infty = A_\infty(X)$ ait olduğu söylenir.

$A_p(X)$ sınıflarının temel özellikleri:

(i) Eğer bazı $p \in [1,\infty)$ için $w \in A_p(X)$ ise, bu durumda her $q \in [p,\infty)$ için $w \in A_q(X)$ olur.

(ii) Eğer bazı $p \in [1,\infty)$ için $w \in A_p(X)$ ise, bu durumda $w \in A_{p-\varepsilon}(X)$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.

(iii) Eğer $w \in A_\infty(X)$ ise bu durumda Hölder eşitsizliğinin karşıtı sağlanır, açık söylemek gerekirse, tüm $B \subset X$ yuvarları için

$$\frac{1}{\mu B}\int_B \left(w(x)\right)^{1+\delta} d\mu \le c\left(\frac{1}{\mu B}\int_B \left(w(x)\right)\right)^{1+\delta}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

3.BÖLÜM

YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Bu bölümde Lebesgue integral teorisinde merkezi bir yeri olan, bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde eğer $f_k \to f$ oluyorsa hangi şartlarda $\int_E f_k \to \int_E f$ olduğunu ifade eden teoremleri göreceğiz.

Teorem 3.1.1. (Monoton yakınsaklık teoremi, Beppo Levi Teoremi) $\{f_k\}$, E de ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun.

(i) Eğer E de hemen hemen her yerde $f_k \nearrow f$ ve E de hemen hemen her yerde tüm k lar için $f_k \geq \phi$ olacak şekilde bir $\phi \in L(E)$ varsa, bu durumda $\int_E f_k \to \int_E f$ olur.

(ii) Eğer E de hemen hemen her yerde $f_k \searrow f$ ve E de hemen hemen her yerde tüm k lar için $f_k \leq \phi$ olacak şekilde bir $\phi \in L(E)$ varsa, bu durumda $\int_E f_k \to \int_E f$ olur.

Teorem 3.1.2. (Düzgün Yakınsaklık Teoremi) $k = 1, 2, 3, \ldots$, $f_k \in L(E)$, $\{f_k\}$ E de f ye düzgün yakınsasın ve $\mu(E) < +\infty$ olsun. Bu durumda $f \in L(E)$ ve $\int_E f_k \to \int_E f$ olur.

Teorem 3.1.3. (Fatou Teoremi) $\{f_k\}, E$ de ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer E de hemen hemen her yerde tüm k lar için $f_k \geq \phi$ olacak şekilde bir $\phi \in L(E)$ varsa, bu durumda

$$\int_E \left(\liminf_{k\to\infty} f_k\right) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k$$

olur.

Sonuç 3.1.4. $\{f_k\}, E$ de ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer E de hemen hemen her yerde tüm k lar için $f_k \leq \phi$ olacak şekilde bir $\phi \in L(E)$ varsa, bu durumda

$$\int_E \left(\limsup_{k\to\infty} f_k\right) \geq \limsup_{k\to\infty} \int_E f_k$$

olur.

Teorem 3.1.5. (Lebesgue Dominated Yakınsaklık Teoremi) $\{f_k\}$, E de hemen hemen her yerde $f_k \to f$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer E de hemen

hemen her yerde tüm k lar için $|f_k| \leq \phi$ olacak şekilde bir $\phi \in L(E)$ varsa, bu durumda $\int_E f_k \to \int_E f$ olur.

Eğer E sonlu ölçümlü ise bu durumda Lebesgue dominated yakınsaklık teoreminin bir özel hali olan aşağıdak yararlı i teorem vardır.

Sonuç 3.1.6. (Sınırlı Yakınsaklık Teoremi) $\{f_k\}$, E de hemen hemen her yerde $f_k \to f$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\mu(E) < +\infty$ ve E de hemen hemen her yerde $|f_k| \leq M$ olacak şekilde sonlu bir M sabiti varsa, bu durumda $\int_E f_k \to \int_E f$ olur.

4. BÖLÜM

FUBİNİ-TONELLİ TEOREMLERİ

$I = \{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$, $f(x, y)$ bu dikdörtgende tanımlanmış olsun. Eğer f sürekli ise

$$\iint_I f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx$$

klasik formülü ile işlem yapabiliriz ve n değişkenli fonksiyonlar için de benzer bir formül vardır.

Bu bölümde bunun genel durumunu ve tekrarlı integrallerin Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlarıyla olan ilgili sonuçları verilecektir.

Önce gerekli bazı bilgiler belirtilecektir.

$$I_1 = \{\, \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n): a_i \le x_i \le b_i, i = 1, \dots, n \,\}$$

$$I_2 = \left\{\, \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m): c_j \le y_j \le d_j, j = 1, \dots, m \,\right\}$$

olsunlar. Burada $I_1 = \mathbb{R}^n$, $I_2 = \mathbb{R}^m$ olabilir. $I = I_1 \times I_2$ aralığı, $(n+m)$- boyutlu ve $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ gibi noktalardan oluşur. Böyle noktaları $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ile göstereceğiz. I da tanımlanmış $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ fonksiyonu $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ şeklinde yazılacak ve onun integrali $\int_I f$, $\iint_I f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y}$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.1.1. (Fubini Teoremi) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in L(I)$, $I = I_1 \times I_2$ olsun. Bu durumda

(i) hemen hemen her $\boldsymbol{x} \in I_1$ için, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ I_2 de $\boldsymbol{y}$ nin bir fonksiyonu olarak ölçülebilir ve integrallenebilirdir;

(ii) $\int_{I_2} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$ in bir fonksiyonu olarak I_1 de ölçülebilir ve integrallenebilirdir ve

$$\iint_I f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} = \int_{I_1} \left[\int_{I_2} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}\right] d\boldsymbol{x}$$

olur.

Fubini teoreminden çok katlı integralin sonluluğu buna karşılık gelen tekrarlı integrallerin de sonluluğu çıkar. Bunun karşıtı doğru değildir, hatta tüm tekrarlı integraller birbirine eşit olsa bile. Ama f nonnegatif ise aşağıdaki temel sonuç vardır.

Teorem 4.1.2. (Tonelli Teoremi) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ nonnegatif ve $I = I_1 \times I_2$ aralığında ölçülebilir olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in I_1$ için, $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ I_2 de $\boldsymbol{y}$ nin bir fonksiyonu olarak ölçülebilirdir. Dahası $\int_{I_2} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$**,** $\boldsymbol{x}$ in bir fonksiyonu olarak I_1 de ölçülebilirdir ve

$$\iint_I f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \int_{I_1}\left[\int_{I_2} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\right]d\boldsymbol{x}$$

olur. Burada $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ nin rolleri değişebileceğinden f nonnegatif ve ölçülebilir ise bu durumda

$$\iint_I f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \int_{I_1}\left[\int_{I_2} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\right]d\boldsymbol{x} = \int_{I_2}\left[\int_{I_1} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}\right]d\boldsymbol{y}$$

olur.

Özel olarak söylemek gerekirse $f \geq 0$ olduğunda şu önemli gerçeği elde ederiz: Fubininin herhangi üç integralinin birinin sonluluğundan öteki ikisinin sonluluğu çıkar. Buradan, ölçülebilir herhangi bir f için, $|f|$ için bu integrallerden biri sonlu ise f integrallenebilirdir ve f nin tüm üç integralleri eşittir.

5. BÖLÜM

L^p UZAYLARININ İNTERPOLASYONU

Operatörlerin interpole edilmesi matematiğin çok yerinde görülür. Özelikle kısmi diferansiyel denklemlerde, harmonik analizde, operatör teorisinde yaklaşıklık teorisinde(approximation) teorisinde çok kullanılır. Ünlü uygulamaları arasında Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve Hausdorff-Young eşitsizliği vardır.

5.1. Riesz-Thorin İnterpolasyon Teoremi

Teorem 5.1.1. (X, M, μ) ve (Y, N, ν) semifinite ölçüm uzayları olsunlar ve p_0 , p_1 , q_0, q_1 $[1, \infty]$ aralığının elemanları olsunlar. $0 < t < 1$ için p_t , q_t

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_o} + \frac{t}{p_1},$$

$$\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

şeklinde tanımlansınlar. Eğer $T: L^{p_0}(\mu)+L^{p_1}(\mu) \rightarrow L^{q_0}(\nu)+L^{q_1}(\nu)$ bir lineer operatör öyle ki $f \in L^{p_0}(\mu)$ için $\|Tf\|_{q_0} \leq M_0\|f\|_{p_0}$ ve $f \in L^{p_1}(\mu)$ için $\|Tf\|_{q_1} \leq M_1\|f\|_{p_1}$ olsun, bu durumda

$f \in L^{p_t}(\mu)$ için $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_{p_t}$

olur [17].

5.2. Sublineer Operatör

Tanım 5.2.1. D, (X, M, μ) üzerindeki ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan bir lineer uzay ve T, D den (Y, N, ν) üzerindeki tüm ölçülebilir fonksiyon uzayına. Eğer T her $f, g \in D$ ve $c \in \mathbb{C}$ için

$$|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg| \text{ ve } |T(cf)| = |c||Tf|$$

oluyorsa T ye *sublineer operatör* denir.

Tanım 5.2.2. $L^p(\mu) \subset D$, $(1 \leq p, q \leq \infty)$ için $T: L^p(\mu) \rightarrow L^q(\nu)$ sublineer operatör ve her $f \in L^p(\mu)$ için

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı varsa T *ye güçlü tip* (p,q) ve $(1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty)$, $L^p(\mu) \in D$, $T: L^p(\mu) \to zayıf L^q(\nu)$ ve her $f \in L^p(\mu)$ için

$$[TF]_q \leq C\|f\|_p$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı varsa T ye *zayıf tip* (p,q) denir. Son olarak eğer T güçlü tip (p,∞) ise T ye *zayıf tip* (p,∞) denir.

5.3. Marcinkiewicz İnterpolasiyon Teoremi

Teorem 5.3.1. (X,M,μ) ve (Y,N,ν) ölçüm uzayları ve $p_{0,}$ $p_{1,}$ q_0, q_1 $[1,\infty]$ aralığının elemanları olsunlar ve $p_0 \leq q_0, p_1 \leq q_1$, $q_0 \neq q_1$, ve

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_o} + \frac{t}{p_1},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

burada $0 < t < 1$ dir [17].

Eğer T , $L^{p_0}(\mu)$ + $L^{p_1}(\mu)$ den Y üzerinde zayıf tip (p_0,q_0) ve zayıf tip (p_1,q_1) olan ölçülebilir fonksiyonlar uzayına ise

bu durumda T güçlü tip (p,q) olur. Daha tam olarak ifade edilirse, eğer $j = 0{,}1$ için $[Tf]_{q_j} \leq C_j\|f\|_{p_j}$ ise bu durumda $\|Tf\|_q \leq B_p\|f\|_p$ olur, burada B_p, p ye ek olarak sadece q_j , p_j , C_j bağlıdır [17].

Sonuç 5.3.2. (İki Teoremin karşılaştırılması): Marcinkiewicz teoremi, Riesz- Thorin teoreminden farklı olarak q_j, p_j üzerine bazı kısıtlamalar bırakıyor. İlginç olarak uygulamalar bu şartları sağlıyor. Marcinkiewicz hipotezleri daha zayıftır: T nin sublineer olmasına izin verilebiliyor ve T uc noktalarda zayıf tip olması yeterlidir. Sonuçta iki teoremde de $T: L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ sınırlıdır. Fakat Riesz-Thorin teoremi T operatör normu için daha iyi kestirim veriyor. Sonuç olarak biri diğerini kapsamıyor.

Uygulama 5.3.3. *Hardy-Littlewood maximal operatörü* $Hf(x)$ şöyle tanımlanır:

$$Hf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(r,x))} \int_{B(r,x)} |f(y)|\, dy$$

sublineer operatördür ve her $f \in L^{\infty}$ için $\|Hf\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ sağlanır. Ayrıca H zayıf tip $(1,1)$ dir. Bu durumda Marcinkiewicz interpolasiyon teoreminden şu sonuç elde edilir: Eğer $1 < p < \infty$ ve $f \in L^{p}(\mathbb{R}^{n})$ ise

$$\|Hf\|_{p} \leq Cp(p-1)^{-1}\|f\|_{p}$$

olacak şekilde bir $C \geq 0$ sabiti vardır.

6. BÖLÜM

SOBOLEV UZAYI

6.1. Zayıf Türev

Bu bölümde tanım kümesi $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt kümesi olan Ω ve n-boyutlu Lebesgue ölçüsü ile donatılmış olan Sobolev fonksiyon uzayı tanıtılacaktır. Özel durumlarda $\mathbb{R}^n = \Omega$ olabilecektir. Burada $L^p(\Omega)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ için p. kuvveti integrallenebilen ölçülebilen Lebesgue fonksiyonlar uzayını gösterir.

Tanım 6.1.1. Eğer $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir ve her kompakt $K \subset \mathbb{R}$ alt kümesi için

$$\int_K |f|^p dx < \infty$$

oluyorsa f fonksiyonunun *lokal* L^p *uzayına* ait olduğu söylenir. Bu uzay $L^p_{loc}(\Omega)$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.2. $\frac{1}{x}$ $L^1_{loc}\big((0,1)\big)$ ait, $L^1\big((0,1)\big)$ ait değildir.

Her $1 \le p \le \infty$ için

$L^1_{loc}(\Omega) \supset L^p_{loc}(\Omega) \supset L^p(\Omega)$

kapsaması vardır. Buradan $L^1_{loc}(\Omega)$, integrallenebilir en geniş fonksiyonlar uzayı olduğu çıkar.

Tanım 6.1.3. n pozitif bir tamsayı olsun. Bir n bileşenli $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ şeklindeki vektöre n boyutlu *multi(çoklu)-indis* denir, burada α_i , $i = 1,2, \dots, n$, negatif olmayan tamsayılardır. $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ sayısına *multi-indisin büyüklüğü* veya *uzunluğu* denir.

Verilmiş α, β için,

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_n!$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

şeklinde tanımlanırlar.

$f(x),\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ için , $D^{\alpha} f$, f nin $|\alpha|$ merteben türevini gösterir.

Tanım 6.1.4. X metrik uzayı üzerinde $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun supp f ile gösterilen *desteği*

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X: f(x) \neq 0\}}$$

kümesidir. Eğer supp f, X in kompakt bir alt kümesi ise f *kompakt desteğe* sahiptir denir. X üzerinde kompakt desteğe sahip sürekli fonksiyonlar uzayı $C_c(X)$ ile gösterilir. $C_b(X)$ ile X üzeride sınırlı sürekli fonksiyon uzayı gösterilir ve düzgün norma göre bu Banach uzayı olur [24].

$C_c(X)$, $C_b(X)$ deki kapanışını $C_0(X)$ ile gösteririz. $C_c(X)$ ve $C_0(X)$ notasyonlarının aynı anlamda yani kompakt destekli fonksiyonlar uzayı anlamıyla kullanılır.

Sürekli fonksiyonlar uzayında

$C(X) \supset C_b(X) \supset C_0(X) \supset C_c(X)$

kapsaması vardır. Eğer X kompakt ise bu durumda bu uzaylar eşittir [24].

$C_0(\mathbb{R}^n)$ uzayı, sonsuzda sıfır olan sürekli fonksiyonlardan oluşur, sıfır olma şartı $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$ dir.

Örnek 6.1.5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $f(x) = x^2$ $C(\mathbb{R})$ içinde, $C_b(\mathbb{R})$ içinde değildir. $f(x) = 1$ sabit fonksiyonu $C_b(\mathbb{R})$ içinde, $C_0(\mathbb{R})$ içinde değildir. $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu $C_0(\mathbb{R})$ içinde, $C_c(\mathbb{R})$ içinde değildir.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \text{ ise} \\ 0, & |x| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $C_c(\mathbb{R})$ içindedir [24].

Tanım 6.1.6. Ω, $\mathbb{R}^n$ kümesinin açık bir alt kümesi olsun. Eğer $\varphi: \Omega \to R$ fonksiyonunun tüm mertebelerdeki sürekli kısmi türevlerinin desteği, Ω nın kompakt bir alt kümesi ise φ ye, Ω üzerinde bir *test fonksiyonu* denir. Ω üzerindeki test fonksiyonları $C_c^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 6.1.7. $f, g_\alpha \in L_{loc}^1(\Omega)$ ve her $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega g_\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi dx$$

oluyorsa, bu durumda $g_\alpha = \partial^\alpha f$ ye f nin α. *zayıf kısmi türevi* denir.

Tanım 6.1.8. k pozitif bir tamsayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve Ω, $\mathbb{R}^n$ nin açık bir alt kümesi olsun. $0 \leq |\alpha| \leq k$ mertebeden tüm zayıf kısmi türevleri için $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega)$ olan $f: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonların oluşturduğu uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{k,p}(\Omega)$ ile gösterilir.
$W^{k,p}(\Omega)$ üzerinde bir norm $1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p dx \right)^{1/p}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)| \right\}$$

ile tanımlanır. Burada supremum, esas supremum anlamında yorumlanmalıdır [24].
$W^{k,p}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.
Şimdi de Ω sınırı üzerinde sıfır(vanish) olan bir Sobolev uzayı tanımlanacaktır.

Tanım 6.1.9. $C_c^\infty(\Omega)$ nın $W^{k,p}(\Omega)$ deki kapanışı

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}$$

ile tanımlanır.

6.2. Sobolev Gömme Teoremleri

Tanım 6.2.1. V, W Banach uzayları ve $V \subset W$ olsun. Eğer

$$\|v\|_W \leq c\|v\|_V \text{ , her } v \in V \qquad (6.2.1)$$

oluyorsa V uzayının W ya *sürekli olarak gömüldüğü* söylenir. $V \hookrightarrow W$ ile gösterilir. Eğer (6.2.1) eşitsizliği sağlanırsa ve V deki her bir sınırlı dizi W da bir yakınsak alt diziye sahip ise V uzayının W ya *kompakt olarak gömüldüğü* söylenir. $V \hookrightarrow\hookrightarrow W$ ile gösterilir.

Eğer $V \hookrightarrow W$ ise V deki fonksiyonlar, W da kalan diğer fonksiyonlardan daha düzgün(smooth) olurlar.

Teorem 6.2.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ bir lipschitz bölgesi(domain) olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar vardır.

(i) Eğer $q \leq p^*$ ve $k < \frac{n}{p}$ ise $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, burada $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$.

(ii) Eğer $q < \infty$ ve $k = \frac{n}{p}$ ise $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

(iii) Eğer $k > \frac{n}{p}$ ise $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\left[\!\left[\frac{n}{p}\right]\!\right]-1,\beta}(\Omega)$

Burada $\beta = \begin{cases} \left[\!\left[\frac{n}{p}\right]\!\right] + 1 - \frac{n}{p}, & \frac{n}{p} \neq t\text{amsayı ise} \\ \text{herhangi pozitif sayı} < 1, & \frac{n}{p} = \text{tamsayı ise} \end{cases}$

Bir boyutlu $\Omega = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ sınırlı aralığı ve $k \geq 1, p \geq 1$ için

$W^{k,p}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \hookrightarrow C[a, b]$

olur.

Teorem 6.2.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ bir lipschitz bölgesi(domain) olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar vardır.

(i) Eğer $q < p^*$ ve $k < \frac{n}{p}$ ise $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, burada $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$.

(ii) Eğer $q < \infty$ ve $k = \frac{n}{p}$ ise $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$.

(iii) Eğer $k > \frac{n}{p}$ ise $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k-\left[\!\left[\frac{n}{p}\right]\!\right]-1,\beta}(\Omega)$

burada $\beta \in \left[0, \left[\!\left[\frac{n}{p}\right]\!\right] + 1 - \frac{n}{p}\right)$ dir.

7. BÖLÜM

HOMOJEN TİP UZAYLAR ve BAZI ÖRTME TEOREMLERİ

Bu bölümde homojen tip uzaylar ve bazı önemli örtme (covering) teoremlerini tanıtacağız.

7.1. Homojen Tip Uzaylar

Tanım 7.1.1. Bir homojen tip uzay $(X, d\, \mu)$ bir μ ölçümüne sahip öyle ki bu ölçüm kompakt destekli sürekli fonksiyonlar uzayı $L^1(X, \mu)$ de yoğun olan bir topolojik uzaydır ve nonnegatif reel değerli $d: X \times X \longmapsto \mathbb{R}^1$ fonksiyonu aşağıda sıralanan özellikleri sağlar [19].

(i) her $x \in X$ için $d(x, x) = 0$

(ii) her $x \neq y$ ve $x, y \in X$ için $d(x, y) > 0$

(iii) Bir $a_0 > 0$ sabiti vardır öyle ki her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq a_0 d(y, x)$.

(iv) Bir $a_1 > 0$ sabiti vardır öyle ki her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq a_1\big(d(x, z) + d(z, y)\big)$.

(v) x in, X deki her V komşuluğu için $r > 0$ vardır öyle ki $B(x, r) = \{y \in X; d(x, y) < r\}$ yuvarı V nin içinde kalır.

(vi) Her $x \in X$ ve her $r > 0$ için $B(x, r)$ yuvarları ölçülebilirdir.

(vii) Her $x \in X$ ve her $0 < r < \infty$ için bir $b > 0$ sabiti vardır öyle ki $\mu B(x, 2r) \leq bB(x, r)$.

Homojen tip uzaya birkaç örnek verelim.

(1) R^n uzayı, Euclid uzaklığı ve Lebesgue ölçümü ile klasik bir homojen tip uzaydır.

(2) $X = [0, \infty)$, $d(x, y) = |x^r - y^r|$, $d\mu = x dx$ ölçümü ile.

(3) $X = (0,1)$, $d(x, y)$ x ve y yi içeren en küçük dyadic aralığın uzunluğu olsun.

Önerme 7.1.2. $(X, d\, \mu)$ bir homojen tip uzay olsun. Bu durumda X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir δ quasi-metrik vardır.

(1) δ denktir d ye, ilgili olarak

$$\delta(x,y) \le d(x,y) \le 3a_1^2\delta(x,y)\ , \tag{7.1.1}$$

burada a_1 homojen tip uzayında geçen sabittir.

(2) her $B_\delta(x,r)$ yuvarı , $(B_\delta(x,r) = \{y;\ \delta(x,y) < r\})$ X in bir açık alt kümesidir.

(3) Her $x \in X$, $R > 0$, $y \in B_\delta(x,R)$ ve $r > 0$ öyle ki $0 < r \le a_1'(1+a_0')R$ burada $a_1' = 3a_1^3$, $a_0' = 3a_1^2a_0$ ve pozitif c sabiti x, R, y ve r den bağımsız olarak aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\mu\big(B_\delta(x,R) \cap B_\delta(y,r)\big) \ge c\mu B_\delta(y,r). \tag{7.1.2}$$

Teorem 7.1.3. Her homojen tip uzay metriklenebilirdir. Özel olarak $(X, d\ \mu)$ de bir $B_d(x,r)$ yuvarı verildiğinde $(X, \rho\ \mu)$ içinde bir $B_\rho(x,r_1)$ yuvarı bulunabilir öyle ki $B_\rho(x,r_1) \subset B_d(x,r) \subset B_\rho\left(x, 2^{1+\log_{a_1+2a_1^2(1+a_0)}} r_1\right)$ olur, burada ρ, d ye denktir ve a_1, a_0 homojen tip uzayı tanımındaki sabitlerdir [19].

Şimdi de homojen tip uzayların geometrisi ile ilgili bazı önermeleri ifade edelim.

Önerme 7.1.4. $c > 0$ verilsin, eğer $B(x,r) \cap B(y,r') \ne \emptyset$ ve $r \le cr'$ olursa bu durumda $B(x,r) \subset B(y, a_2r')$ olacak şekilde $a_2 = a_1\big(1 + ca_1(1+a_0)\big)$ vardır.

Önerme 7.1.5. $(X, d\ \mu)$ bir homojen tip uzay olsun. Bu durumda $i \ne j$ ve $d\big(x_i, x_j\big) > r2^{-n}$ için her $B(x,r)$ yuvarının h^n den daha fazla $\{x_i\}$ noktalarını içeremeyecek şekilde $h = (b, a_1)$ sabiti vardır.

Önerme 7.1.6. $(X, d\ \mu)$ bir homojen tip uzay olsun. Eğer $d(x,y) \ge r$ ise bu durumda $B\left(x, \frac{r}{2a_1}\right) \cap B\left(y, \frac{r}{2a_0a_1}\right) = \emptyset$.

Önerme 7.1.7. $(X, d\ \mu)$ bir homojen tip uzay olsun. Bu durumda

(1) Eğer $\mu(x_0) > 0, x_0 \in X$ ise, bu durumda $B(x_0, r) = \{x_0\}$ olmasını sağlayan $r > 0$ sayısı vardır.

(2) Eğer $\mu X < \infty$ ise, bu durumda her $x \in X$ için $X = B(x_0, R)$ olacak şekilde $R > 0$ vardır.

7.2. Bazı Örtme Teoremleri

Tüm örtme teoremleri aynı fikre dayanırlar: metrik uzaydaki keyfi bir kümenin örtüsünden, belli bir mantığa göre olabildiğince ayrık bir alt örtü seçilir. Böyle bir sonucu elde edebilmek için örtü kümelerinin bir bakıma iyi yapıda (genellikle yuvarlar seçilir) olması gerekir [23].

Teorem 7.2.1. (Temel Örtme Teoremi) Bir X metrik uzayında düzgün sınırlı çaplı her $\mathcal{F}$ yuvarlar ailesi

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B$$

olacak şekilde bir ayrık alt aile $\mathcal{G}$ yi içerir. Aslında, $\mathcal{F}$ nin her B yuvarı, yarıçapı B nin en azında yarısı olan $\mathcal{G}$ nin bir yuvarıyla karşılaşır [23].

Teorem 7.2.2. (Vitali Örtme Teoremi) A doubling metrik ölçüm uzayının (X,μ) içinde bir alt küme olsun. $\mathcal{F}$ merkezleri A da olan kapalı yuvarların bir koleksiyonu olsun ve her $a \in A$ için

$$\inf\{r > 0 : B(a,r) \in \mathcal{F}\} = 0$$

Bu durumda A nın hemen hemen tümünü $\mathcal{F}$ nin bir sayılabilir ayrık altailesi $\mathcal{G}$ deki yuvarlarla μ örtülebilir, yani

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{\mathcal{G}} B\right) = 0.$$

Aşağıdaki teorem için kapalı küp ile her zaman kenarları koordinat eksenlerine paralel olan kapalı küpleri kast ederiz.

Teorem 7.2.3. (Besicovitch Örtme Teoremi) $A \subset \mathbb{R}^N$ olsun. Her $x \in A$ için merkezi x olan bir $Q(x)$ küpü verilmiş olsun. Eğer A sınırsız ise ek olarak $\sup_{x\in A}\operatorname{diam}Q(x) < \infty$ olsun. Bu durumda elemanları A da olan bir $\{x_k\}_{k\in N}$ dizisi vardır öyle ki

(i) $A \subset \bigcup_{k\in N} Q(x_k)$

(ii) $\{Q_k\}_{k\in N}$ dizisi $Q(x)$ düzgün lokal sonludur (uniformly locally finite)dir, yani sadece N ye bağlı bir θ_N sabiti vardır öyle ki

$$\sum_{k\in N} \chi Q_k(y) \le \theta_N, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

(iii) Sadece N bağlı bir ξ_N sayısı vardır öyle ki $\{Q_k\}_{k\in N}$ dizisi ξ_N tane alt diziye ayrıtılabilir ve bu alt dizilerin içindeki küplerin içi kesişmez.

Teorem 7.2.4. (Whitney Tip Örtme Teoremi) $E \subset X$, $E \neq X$ açık bir küme ve $c \geq 1$ olsun. Bu durumda

(i) $E = \bigcup_j B_j$, burada $\tilde{B}_j = B(x_j, r_j)$;

(ii) X in her noktasının en çok η=η(b, a_1, a_0, c) $\tilde{B}_j$ yuvarlarına ait olduğunu belirten bir η tamsayı vardır(burada b, a_1, a_0 homojen tip uzay tanımında geçen sayılardır);

(iii) $\tilde{\tilde{B}}_j \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$ her j için, burada $\tilde{\tilde{B}}_j = B(x_j, 3a_1 c r_j)$

olacak şekilde bir $\{B_j\} = \{B(x_j, r_j)\}$ bir yuvarlar dizisi vardır [19].

8. BÖLÜM

HARDY-STEKLOV OPERATÖRÜ

Tezin konusu bu bölümde işlenecektir. Hardy eşitsizlikleri hakında bilgi verilecektir. Hardy tipli eşitsizlikler, Hardy Tipli Operatörler ve Hardy-Steklov Operatörü üzerinde yapılmış çalışmalar verilecektir.

8.1. Hardy Eşitsizliğinin Klasik Formları

G. H. Hardy 1920 de yayımlanmış bir notta(ispatsız) eğer $a > 0, f(x) \geq 0, p > 1$ ve $\int_a^\infty f^p(x)\,dx$ yakınsak ise bu durumda

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^\infty f^p(x)\,dx \qquad (8.1.1)$$

olduğunu ifade etmiştir [2].

G. H. Hardy diğer matematikçilerle (8.1.1) eşitsizliğiyle ilgili bir takım iletişimlerde bulundu ve $f(x) \geq 0$, $p > 1$; f herhangi sonlu $(0, X)$ aralığı üzerinde integrallenebilir ve f^p $(0,\infty)$ aralığında integrallenebilir içinaşağıdaki eşitsizliği ifade ve ispat etti.

$$\int_o^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)\,dx \qquad (8.1.2)$$

Daha sonra (8.1.2) eşitsizliği bir model olarak alınarak daha genel eşitsizlikler elde etmek için üzerinde geniş çapta araştırmalar yapıldı ve $p > 1,\ \epsilon < p-1$, tüm nonnegatif ölçülebilir fonksiyonlar için ilk ağırlıklı eşitsizlik verildi:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)\,x^\varepsilon dx \qquad (8.1.3)$$

burada $\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p$ olabilecek en iyi sabittir. (8.1.3) eşitsizliğinden çıkan dual eşitsizlik

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p x^\varepsilon dx \le \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)\,x^\varepsilon dx \qquad (8.1.4)$$

olur, $p>1$, $\varepsilon > p-1$ ile, tüm nonnegatif ölçülebilir f fonksiyonları için, burada $\left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^p$ sabiti kesindir [2].

Geçen on yıllarda (8.1.3) eşitsizliği Hardy eşitsizliğinin modern formu olarak bilinen

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b f^p(x)\,v(x)dx\right)^{1/p} \qquad (8.1.5)$$

formuna genişletildi,

burada a, b reel sayılar ve $\infty \le a < b \le \infty$,

u ve v ağırlık fonksiyonları: (a, b) aralığında hemen hemen her yerde(hhh) pozitif ve ölçülebilir fonksiyonlardır,

p, q reel sayılar ve $0 < q \le \infty,\ 1 \le p \le \infty$ dir [2].

Biliniyor ki (8.1.5) eşitsizliğinin $f \ge 0$ ölçülebilir fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter koşul

$A < \infty,$

burada

$$A = \sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)\,dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'} \qquad (8.1.6)$$

burada $p' = \frac{p}{p-1}$, ve $1 < p \le q < \infty$ için,

ve

$$A = \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t)\,dt\right)^{r/q}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)dx\right)^{1/r} \qquad (8.1.7)$$

$0 < q < p < \infty,\ q \neq 1,\ 1 < p < \infty$ için ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

(8.1.4) eşitsizliğinin dual genişlemesi aşağıdaki şekildedir:

$$\left(\int_a^b \left(\int_x^b f(t)\,dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b f^p(x)\,v(x)dx\right)^{1/p} \qquad (8.1.8)$$

Biliniyor ki (8.1.6) eşitsizliğinin tüm $f \geq 0$ ölçülebilir fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\tilde{A} < \infty,$$

burada

$$\tilde{A} = \sup_{a<x<b}\left(\int_a^x u(t)\,dt\right)^{1/q}\left(\int_x^b v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'} \qquad (8.1.9)$$

$1 < p \leq q < \infty$ durumu için,

ve

$$\tilde{A} = \left(\int_a^b \left(\int_a^x u(t)\,dt\right)^{r/q}\left(\int_x^b v^{1-p'}(t)dt\right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)dx\right)^{1/r} \qquad (8.1.10)$$

$0 < q < p < \infty,\ q \neq 1,\ 1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Diğer durumlar için [2] bakılabilir.

8.2. En İyi Sabitler

(8.1.5) deki en iyi C sabiti $p < q$ için

$A \leq C \leq k(p,q)$ sağlanır ve $q < p$ için (8.2.1)

$q^{1/q}\left(\frac{p'q}{r}\right)^{1/q'} A \leq C \leq q^{1/q}(p')^{1/q'}A.$ (8.2.2)

(8.2.1) deki $k(p,q)$ sabitin değişik formları olduğu görünüyor. Örneğin

$$k(p,q) = p^{1/q}(p')^{1/p'}$$

veya

$$k(p,q) = q^{1/q}(q')^{1/p'}$$

veya

$$k(p,q) = \left(1+\frac{q}{p'}\right)^{1/q}\left(1+\frac{p'}{q}\right)^{1/p'}$$

veya, $p < q$ için

$$k(p,q) = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{q}{s}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right)\Gamma\left(\frac{q-1}{s}\right)}\right]^{s/q}$$

burada $s = {}^{q}/_{p} - 1$, [2] bakılabiliir.

8.3. Ağırlıklı Lebesgue Uzayları ve Hardy Operatörleri

$0 < s \leq \infty$, w , (a,b) üzerinde ağırlık fonksiyonu ve $f = f(x)$, (a,b) üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar olsun,

$$L^s(a,b;w) = L^s(w) \tag{8.3.1}$$

ile gösterilen ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{s,w} = \left(\int_a^b |f(x)|^s w(x)dx\right)^{1/s} < \infty$$

$$\|f\|_{\infty,w} = \text{ess sup}_{a<x<b}|f(x)| < \infty \tag{8.3.2}$$

şartını sağlayan tüm fonksiyonlardan oluşur.

Eğer H Hardy operatörünü gösterirse,

$$(Hf)(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{8.3.3}$$

bu durumda (8.1.5) Hardy eşitsizliği

$$\|Hf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \tag{8.3.4}$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitsizlik $f \geq 0$ fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$A < \infty, \tag{8.3.5}$$

burada A sırasıyla (8.1.6) veya (8.1.7) ile verilir.

Eşlenik Hardy operatörü $\widetilde{H}$

$$\left(\widetilde{H}f\right)(x) = \int_x^b f(t)\,dt \qquad (8.3.6)$$

ile tanımlanır.

Buna karşılık gelen eşlenik Hardy eşitsizliği

$$\left\|\widetilde{H}f\right\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \qquad (8.3.7)$$

bu durumda $f \geq 0$ fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\tilde{A} < \infty, \qquad (8.3.8)$$

burada $\tilde{A}$ sırasıyla (8.3.2) veya (8.3.3) ile verilir.

Açıkçası H tan $\widetilde{H}$ ya adımı ve (8.3.5) şartından (8.3.8) şartına basit yerine koyma ile yapılabilir.

Burada daha önemli olan (8.3.4) ve (8.3.7) eşitsizliklerinin

$$\|Tf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \qquad (8.3.9)$$

formunun bir genel ağırlıklı norm eşitsizliğinin prototipi olmasıdır. Burada T bir genel integral operatörüdür. Böylece (8.3.9) eşitsizliği T nin $L^p(v)$ yi $L^q(u)$ ya (sürekli olarak) eşleştirdiğini anlatır:

$T: L^p(v) \to L^q(u)$.

Aşağıda T nin özel durumları için (8.3.9) formundaki eşitsizliklerin değişik durumları gösterilecektir. Bazen bu operatörler özel fonksiyon sınıfları üzerinde tanımlanacaktır, örneğin monoton fonksiyonlar gibi.

8.4. Duallik

$1 < s < \infty$ için ağırlıklı Lebesgue uzayı $L^s(w)$ üzerinde duallik , $f \in L^s(w)$

$$\langle g, f\rangle = \int_a^b g(x)f(x)\,dx \qquad (8.4.1)$$

iç çarpımı ile tanımlanır. Bu durumda $L^s(w)$ ye dual uzay $L^{s'}(\widehat{w})$ uzayı ile saptanabilir, burada $s' = \frac{s}{s-1}$, $\widehat{w} = w^{1-s'}$ dir.

Özel olarak, $\|g\|_{s',w^{1-s'}} = \sup_{\|f\|_{s,w}=1} |\langle g, f\rangle|$ böylece

$$\left(L^s(w)\right)^* = L^{s'}(w^{1-s'}). \tag{8.4.2}$$

Gerçekten: Hölder eşitsizliğinden

$$|\langle g, f\rangle| \leq \int_a^b |g(x)| w^{-1/s}(x) |f(x)| w^{1/s}(x) dx$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)|^s\, w(x) dx\right)^{1/s} \left(\int_a^b |g(x)|^{s'}\, w^{-s'/s}(x) dx\right)^{1/s'}$$

$$= \|f\|_{s,w} \cdot \|g\|_{s',w^{1-s'}}$$

$$\frac{s}{s'} = s - 1 = \frac{1}{s'-1}$$

ve eğer

$$f = \frac{|g|^{s'-1} \operatorname{sgn} g w^{1-s'}}{\|g\|_{s',w^{1-s'}}^{s'/s}}$$

ise bu durumda $\|f\|_{s,w} = 1$ ve $\langle g, f\rangle = \|g\|_{s',w^{1-s'}}$.

Ayrıca H ve $\widetilde{H}$ Hardy operatörleri karşılıklı olarak eşleniktir; daha tam olarak, eğer

$H: L^p(v) \to L^q(u)$, $1 < p, q < \infty$ ise,

bu durumda $(H)^* = \widetilde{H}$ ve

$\widetilde{H}: L^{q'}(u^{1-q'}) \to L^{p'}(v^{1-p'})$.

Gerçekten: Fubini teoreminden,

$$\langle g, Hf\rangle = \int_a^b g(x) \int_a^x f(t) dt dx = \int_a^b f(t) \int_t^b g(x) dx dt = \langle f, \widetilde{H}g\rangle$$

Burada birinci (sonuncu) parantezler $L^q(u)$ deki ($L^p(v)$ deki) dualliği gösterir [2].

8.5. Bazı Diğer Kriterler

(8.1.5) Hardy eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A < \infty,$$

burada A, $p \leq q$ için (8.1.6) ile ve $p > q$ için (8.1.7) ile verilir. Şimdi bazı alternatif kriterler verilecektir. Öncelikle bazı notasyonlar tanıtılacaktır.

$$V(x) = \int_a^x v^{1-p'}(t)dt. \tag{8.5.1}$$

Bu durumda A sayısını yeniden

$$A = \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{1/q} V^{1/p'}(x)$$

olarak yazılabilir.

Teorem 8.5.1. $1 < p \leq q < \infty$ olsun. Bu durumda Hardy eşitsizliği

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)\, dt \right)^q u(x)\, dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b f^p\,(x) v(x) dx \right)^{1/p} \tag{8.5.2}$$

tüm $f \geq 0$ fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$B < \infty, \tag{8.5.3}$$

burada

$$B = \sup_{a<x<b} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{-1/p} \left(\int_a^x u(t) \left(\int_a^t v^{1-p'}\,(s)ds \right)^q dt \right)^{1/q} \tag{8.5.4}$$

yani,

$$B = \sup_{a<x<b} V^{1/p(x)} \left(\int_a^x u(t) V^q\,(t)dt \right)^{1/q} \tag{8.5.4*}$$

Ayrıca, (8.5.2) deki C sabiti

$$B \leq C \leq p'B \tag{8.5.5}$$

sağlar.

Teorem 8.5.2. $0 < q < p < \infty,\ p > 1, \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ olsun ve V, (8.5.1) ile verilsin. Bu durumda (8.5.2) deki Hardy eşitsizliğinin tüm $f \geq 0$ fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$B < \infty, \qquad (8.5.6)$$

burada

$$B = \left(\int_a^b \left(\int_a^t u(s) V^q(s) ds \right)^{r/q} V^{-r/q}(t) dV(t) \right)^{1/r} \qquad (8.5.7)$$

Ayrıca (8.5.2) deki C sabiti

$$q p^{-1/r} (p')^{1/q'} r^{-1/r'} 2^{-1/q} B \leq C \leq q^{1/q} p' B$$

sağlar.

8.6. Hardy Operatörünün Kompaktlığı

Ω, $\mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $\partial\Omega$ onun sınırı olsun.

$W_0^{1,p}(\Omega) = \{g : |\nabla g| \in L^p, g|_{\partial\Omega}\}$ Sobolev uzayı olsun. Eğer $1 < q \leq \frac{Np}{N-p}$ ise

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad (8.6.1)$$

gömmesinin sürekli, eğer $1 < q < \frac{Np}{N-p}$,$(1 < p < N)$ ise gömmesinin kompakt olduğu biliniyor.

$$p^* = \frac{Np}{N-p} \qquad (8.6.2)$$

değerine (8.6.1) gömmesinin kritik üssü denir.

Eğer $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ yuvarı ise ve $g(x) = g(|x|) = g(r),\ 0 < r < R$, radial fonksiyonları göz önünde bulundurulur ise bu durumda (8.6.1) gömmesi, $u(r) = v(r) = r^{N-1}$ çok özel ağırlıklarıyla,

$$\left(\int_0^R |g(r)|^q r^{N-1}\, dr\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^R |g'(r)|^p r^{N-1}\, dr\right)^{1/p} \qquad (8.6.3)$$

şeklindeki Hardy eşitsizliği olarak yazılabilir.

Buradan, şu doğal soru oluşur: Belirli bir p için, $p > 1$, verilmiş u ve v (genel) ağırlıkları için, bir $p^* = p^*(p, u, v)$, $p^* \geq p$ parametresi var mıdır öyle ki diferansiyellenebilir g ve $g' \in L^p(v)$ fonksiyonları ve $g(R) = 0$ için tanımlanan gömülme,

$$\left(\int_0^R |g(r)|^q u(r)\, dr\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^R |g'(r)|^p\, v(r) dr\right)^{1/p} \qquad (8.6.4)$$

eşitsizliği ile $q \leq p^*$ için sürekli, $q < p^*$ için kompakt ve $q > p^*$ için sağlamasın?

(8.6.4) eşitsizliği

$$(\widetilde{H}f)(x) = \int_x^R f(t)\, dt$$

şeklinde tanımlanan eşlenik Hardy operatörü için

$$\left\|\widetilde{H}f\right\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v} \qquad (8.6.5)$$

ifadesine denk olduğundan söz konusu problem $\widetilde{H}$ operatörü için yeniden formülle edilebilir: $p > 1$ için, $\widetilde{H}$, $q < p^*$ için $\widetilde{H}: L^p(v) \to L^q(u)$ fonksiyonu kompakt, $q \leq p^*$ için $\widetilde{H}: L^p(v) \to L^q(u)$ sürekli ve $q > p^*$ için (8.6.5) için eşitsizliği sağlanmayacak şekilde bir $p^* = p^*(p, u, v)$ kritik üssü var mı dır?

Şimdi bazı notasyonlar verilecek.

$p > 1$ ve p belirlenmiş olsun. $r \leq \infty$, $(0, R)$ aralığında tanımlanmış fonksiyonları göz önünde bulundurulacaktır, ve basitlik için, u ve v ağırlık fonksiyonları her $r < R$ için

$u \in L^1(0,R),\ v^{1-p'} \in L^1(r,R)$

ve $v^{1-p'} \notin L^1(0,R)$ (8.6.6)

sağladığı kabul edilecektir.

$$U(r) = \int_0^r u(t)\,dt, \quad V(r) = \int_r^R v^{1-p'}(t)dt \tag{8.6.7}$$

notasyonları kullanarak (8.6.6) şu anlama gelir:

$$U(0) = 0,\ U(R) < \infty, V(0) = \infty, V(R) = 0. \tag{8.6.8}$$

Eğer $1 < p \leq q < \infty$ için

$$B_q(r) = U^{1/q}(r)V^{1/p'}(r)$$

gösterimi kullanılırsa, (8.6.5) eşitsizliği sağlanır, yani,

$\widetilde{H}: L^p(v) \rightarrow L^q(u)$ sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{0<r<R} B_q(r) < \infty.$$

Eğer $\widetilde{H}$ fonksiyonunun kompakt olması isteniyorsa bu şartın kuvvetlendirilmesi gerekir: gerekli ve yeterli şart

$$\lim_{r\to 0} B_q(r) = \lim_{r\to r} B_q(r) = 0 \tag{8.6.9}$$

olur.

Bu alt bölümde (8.6. alt bölümünde bundan sonra)

$$\sup_{0<r<R} B_{\tilde{q}}(r) < \infty$$

olacak şekilde en az bir

$$\tilde{q} > p \tag{8.6.10}$$

var olduğunu kabul edilecektir, yani, (8.6.5) teki eşlenik Hardy eşitsizliği $q = \tilde{q}$ için sağlanır.

Tanım 8.6.1.

$$S = \left\{ s > p\colon \sup_{0<r<R} B_s(r) < \infty \right\}$$

kümesini düşünelim. (8.6.10) kabulünden , S boş küme değildir: $\tilde{q} \in S$. Sonuç olarak,

$$p^* = \sup S \tag{8.6.11}$$

olarak p^*(∞ olması mümkün) sayısı tanımlanabilir.

Eğer $q = p^*$ ise durumun ne olacağı henüz açık değildir. Uygun u ve v ağırlıkların seçimiyle tüm durumların gerçekleştiği gösterilecektir:

$\widetilde{H}\colon L^p(v) \to L^{p^*}(u)$

fonksiyonunun kompakt olabileceği, sürekli fakat kompakt olamayacağı, veya hiç sürekli olamayacağı gösterilecektir.

Fakat ilk önce p^* için

$$p^* = p' \liminf_{r\to 0} \frac{|\log U(r)|}{\log V(r)} \tag{8.6.12}$$

formülünün var olduğunu gösterelim.

Bu amaçla,

$$W(r) = \frac{|\log U(r)|}{\log V(r)} \tag{8.6.13}$$

$$W_0 = \liminf_{r\to 0} W(r) \tag{8.6.14}$$

şeklinde olmak üzere notasyonları veriyoruz. Bu durumda açıkça

$$B_q^q(r) = U(r) V^{\frac{q}{p'}}(r) = \big(V(r)\big)^{\frac{(q - p'W(r))}{p'}} \tag{8.6.15}$$

olur ve (eğer W_0 sonlu ise)

$$\limsup_{r\to 0} \big(q - p'W(r)\big) = q - p'W_0$$

olur.

Lemma 8.6.2. $p > 1$ olsun ve u ve v ağırlık fonksiyonlarının (8.6.6) sağladığını varsayalım. Bu durumda (8.6.10) kabulü sağlanır $\Leftrightarrow$ $W_0 > p - 1$.

Teorem 8.6.3. $p > 1$ olsun ve u ve v ağırlık fonksiyonlarının (8.6.6) ve (8.6.10) kabulünü sağladığını varsayalım. p^*, (8.6.11) ile verilsin. Bu durumda (8.6.12) formüllü sağlanır ve $1 \leq q < p^*$ için

$\widetilde{H}: L^p(v) \rightarrow L^{p^*}(u)$ kompakt olur [2].

Eğer $p^* < \infty$ ve $q > p^*$ise (8.6.5) deki Hardy eşitsizliği sağlamaz.

Ayrıca, $q = p^*$ için,

$\widetilde{H}: L^p(v) \rightarrow L^{p^*}(u)$ süreklidir $\Leftrightarrow$ r sıfırın yakınında için $U(r)V^{\frac{p^*}{p'}}(r)$ sınırlıdır, ve kompakt olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{r\to 0} U(r)V^{\frac{p^*}{p'}}(r) = 0\,.$$

Örnek 8.6.4. (i) Eğer, $R < \infty$ için, $u(r) = r^{\alpha},\ \alpha > 1$, ve $v(r) = r^{p-1}$, seçilirse

$B_q(r) = \left(\frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)^{1/q} \left(\log\frac{R}{r}\right)^{r/p'}$ olur, buradan $r \to 0$ olur iken $B_q(r) \to 0$ olur. Böylece $S = (p, \infty)$ ve $p^* = \infty$ olur.

(ii) Eğer, $R < \infty$ için, $u(r) = r^{\alpha},\ \alpha > -1$, ve $v(r) = r^{\beta(p-1)}$ (β < -1 ile), seçilirse bu durumda

$$B_q(r) = \text{sabit}\left[r^{\frac{(\alpha+1)p'}{q}}\left(r^{\beta+1} - R^{\beta+1}\right)\right]^{\frac{1}{p'}}$$

ve

$$p^* = \frac{(\alpha+1)p'}{-\beta-1}$$

bulunur.

Sonuç olarak $\widetilde{H}: L^p(v) \rightarrow L^q(u)$ operatörü $q \leq p^*$ için sürekli ve $q < p^*$ için kompakt olur.

(iii) $u(r) = v(r) = r^{N-1}$ özel seçimi için, yani $\alpha = N - 1$ ve $\beta = \frac{N-1}{1-p}$, daha önce (8.6.2) den

$$p^* = \frac{Np}{N-p}$$

kritik üssü elde edilmişti.

Gelecek örnek $\widetilde{H}: L^p(v) \to L^{p^*}(u)$ fonksiyonunun kritik üs değerinde sürekli olması gerekmediğini gösterecektir.

Örnek 8.6.5. $v(r) = r^{N-1}, 1 < p < N$ olsun ve $k > p - 1$ şeklinde herhangi bir sayı olsun. r yakın 0 için,

$$U(r) = \int_0^r u(s)\, ds = r^{\frac{k(N-p)}{p-1}} m(r)$$

kabul edilsin, burada m

$$\lim_{r\to 0} \frac{\log m(r)}{\log r} = 0$$

olacak şekilde pozitif düzgün(smooth) fonksiyondur. (8.6.8) şartları sağlanır, ve

$$\lim_{r\to 0} \frac{\log V(r)}{|\log r|} = \frac{N-p}{p-1}$$

gösterilebileceğinden

$$W_0 = \lim_{r\to 0} W(r) = \lim_{r\to 0} \frac{|\log U(r)|}{\log V(r)} = k > p - 1$$

bulunur, yani (8.6.10) kabullü lemma 8.6.2. den sağlanır.

$p^* = p'k$ için

$$B_{p^*}^{p^*}(r) = V^k(r)U(r) = \text{sabit} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^k m(r)$$

bulunur.

Buradan

$m(r) = |\log r|$ için, $q = p^*$ ile (8.6.5) Hardy eşitsizliği sağlanmaz,

$m(r) = 1$ için, $\widetilde{H}: L^p(v) \to L^{p^*}(u)$ operatörü sürekli fakat kompakt değildir,

$m(r) = |\log r|^{-1}$ için kompakttır.

8.7. Bir N −Boyutlu Hardy Operatörü

$x \in \mathbb{R}^N$, $B(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| \leq |x|\}$ yuvarını göstersin, $|B(x)|$ yuvarın hacmini göstersin. Bu durumda N −boyutlu Hardy operatörü

$$(\mathcal{H}_N f)(x) = \frac{1}{|B(x)|} \int_{B(x)} f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

şeklinde tanımlanır.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{H}_N f(x)|^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx, \ 1 < p < \infty$$

eşitsizliği sağlanır. $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ sabiti yine olabilecek en iyi sabittir. Bu Hardy eşitsizliği genel N − boyutlu u ve v ağırlıklarına ve p, q parametrelerinin tüm alanlarına, $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$ genişletildi [2].

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{H}_N f(x)|^q u(x) dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p\, v(x)\right)^{1/p} \qquad (8.7.1)$$

eşitsizliği için geçerlilik şartları(gerekli ve yeterli) bir boyutlu duruma karşılık gelen şartların tam benzeridir [2]. Buradan $1 < p \leq q < \infty$ için bu şartlar

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x)} u(y)\, |y|^{-q} dy\right)^{1/q} \left(\int_{B(x)} v^{1-p'}(y) dy\right)^{1/p'} < \infty$$

olur.

8.8. Genel Hardy Tipli Operatörler

Tanım 8.8.1. K ile gösterilen ve

$$(Kf)(x) = \int_a^x k(x,t)\, f(t) dt, \quad x \in (a,b)$$

şeklinde tanımlanan operatöre genel Hardy operatörü denir.

Basitlik için $(a, b) = (0, \infty)$ durumuyla ilgileneceğiz: (Genel durum için [2] bakılabilir)

$$(Kf)(x) = \int_0^x k(x,t)\, f(t)dt, \quad x > 0.$$

Kernel k nın aşağidaki durumları sağladığını kabul edeceğiz.

$k(x,t) \geq 0,\ 0 < t < x,$

k, x te artan ve k, t de azalandır,

ve

$k(x,t) \approx k(x,z) + k(z,t), \quad 0 < t < z < x.$

Böyle kernellere bazen Oinarov kerneller denir.

K nın eşlenik operatörü(eşlenik operator $\widetilde{K}$)

$$\left(\widetilde{K}g\right)(x) = \int_x^\infty k(t,x)\, g(t)dt, \qquad x > 0$$

şeklinde verilir.

Teorem 8.8.2. (Genel Hardy operatörün $p \leq q$ durumu için) $1 < p \leq q < \infty$ ve K Tanım 8.8.1. de geçen genel Hardy operatörü olsun. $s > 0$ için ve k Oinarov kernel olmak üzere $(K_s h)$, $\left(\widetilde{K}_s h\right)(x)$

$$(K_s h) = \int_0^\infty k^s\,(x,t)h(t)dt$$

$$\left(\widetilde{K}_s h\right)(x) = \int_x^\infty k^s\,(t,x)h(t)dt \tag{8.8.1}$$

şeklinde tanımlanıyorlar. Bu durumda

$$\left(\int_0^\infty (Kf)^q(x)\, u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty f^p(x)\, v(x)dx\right)^{1/p} \tag{8.8.2}$$

eşitsizlikleri tüm $f \geq 0$ fonksiyonlarını sağlanması için gerek ve yeter şart

$$A_0 = \sup_{t>0}\left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/q}(t)\, (K_0 v^{1-p'})^{1/p'}(t) < \infty \qquad (8.8.3.)$$

ve

$$A_1 = \sup_{t>0}\left(\widetilde{K}_0 u\right)^{1/q}(t)\left(K_{p'} v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) < \infty. \tag{8.8.4}$$

(8.8.2) deki en iyi C sabiti

$$C \approx \max(A_0, A_1) \tag{8.8.5}$$

sağlar.

Şimdi de

$$\left(\widetilde{K} g\right)(x) = \int_x^\infty k(t,x)\, g(t) dt, \quad x > 0 \tag{8.8.6}$$

şeklinde tanımlanan eşlenik operatör $\widetilde{K}$ için eşitsizlik ifade edilecektir.

Teorem 8.8.3. $1 < p \leq q < \infty$ ve $\widetilde{K}, (8.8.6)$ formüllü ile tanımlanan eşlenik Hardy operatörü olsun. K_s ve $\widetilde{K}_s$ (8.7.1) deki formül ile verilsin. Bu durumda

$$\left\|\widetilde{K} g\right\|_{q,u} \leq C\|g\|_{p,v}$$

eşitsizliği tüm $g \geq 0$ fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter şart

$$\tilde{A}_0 = \sup_{t>0}\left(K_q u\right)^{1/q}(t)\left(\widetilde{K}_0 v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) < \infty \tag{8.8.7.}$$

ve

$$\tilde{A}_1 = \sup_{t>0}(K_0 u)^{1/q}(t)\left(\widetilde{K}_{p'} v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) < \infty. \tag{8.8.8}$$

C sabiti (8.8.2) dekinin aynısıdır.

Şimdi de genel Hardy operatörünün $p > q$ durumu için gereken bazı notasyonlar verilecek ve ardından teorem ifade edilecektir.

$0 < p < q < \infty, p > 1$ olsun, ve r

$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ile tanımlansın. B_0, B_1 sayıları

$$B_0 = \left\{\int_0^\infty \left[\left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/q}(t)\left(K_0 v^{1-p'}\right)^{1/q'}(t)\right]^r v^{1-p'}(t)\, dt\right\}^{1/r},$$

$$B_1 = \left\{ \int_0^\infty \left[(\widetilde{K}_0 u)^{1/p}(t) (K_{p'} v^{1-p'})^{1/p'}(t) \right]^r u(t)\, dt \right\}^{1/r} . \tag{8.8.9}$$

Aşağıdaki teorem için $1 < q < p < \infty$ kısıtlı durumu alınarak teorem ifade edilecektir.

Teorem 8.8.4. $1 < q < p < \infty$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ olsun. K bir genel Hardy tipli operatör olsun. Bu durumda (8.8.2) eşitsizliği tüm $f \geq 0$ sağlaması için gerek ve yeter şart

$$\max(B_0, B_1) < \infty, \tag{8.8.10}$$

burada $B_0,\ B_1$ (8.8.9) da tanımlanmışlardır.

Ayrıca, (8.8.2) deki en iyi C sabiti

$$C \approx \max(B_0, B_1) \tag{8.8.11}$$

sağlar.

8.9. Bir Hardy-Knopp Eşitsizliği

Teorem 8.9.1. Φ pozitif, konveks ve $(-\infty, \infty)$ de kesin monoton bir fonksiyon olsun. Bu durumda her ölçülebilir reel değerli f fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \Phi\left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right) \frac{dx}{x} \leq \int_0^\infty \Phi(f(x)) \frac{dx}{x}$$

eşitsizliği vardır [2].

8.10. Hardy-Steklov Operatörünün Özellikleri

Tanım 8.10.1. $a = a(x)$, $b = (x)$ fonksiyonları $[0, \infty]$ aralığında kesin artan ve diferansiyellenebilen ve

$a(0) = b(0) = 0$

$a(x) < b(x),\ 0 < x < \infty$ için

$a(\infty) = b(\infty)$

şartlarını sağlayan

$$(Tf)(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt \tag{8.10.1}$$

ile gösterilen ve $f = f(t) \geq 0,\ \ 0 < t < \infty$ için tanımlanan (8.10.1) formülüne Hardy-Steklov operatörü denir [2].

[20] de Heining ve Sinnamon $1 < p \leq q < \infty$ ve $0 < q < p < \infty$ durumları için u ve v ağırlık çiftini T nin sınırlılığı için karakterize ettiler.

Teorem 8.10.2. u ve v $(0, \infty)$ de ağırlık fonksiyonları olsunlar.

$$\left(\int_0^\infty (Tf)^q(x)\, v(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty f^p\,(x)u(x)dx\right)^{1/p} \tag{8.10.2}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım.

(i) Eğer $1 < p \leq q < \infty$ ise, bu durumda (8.10.2) $f \geq 0$ den bağımsız olarak $C > 0$ ile sağlanır $\Leftrightarrow$ sup $B(x,t) < \infty$, burada

$$B(x,t) = \left(\int_t^x v(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_{a(x)}^{b(t)} u^{1-p'}\,(s)ds\right)^{1/p'} \tag{8.10.3}$$

ve supremum

$$0 < t \leq x < \infty \text{ ve } a(x) \leq b(t) \tag{8.10.4}$$

durumlarını sağlayan tüm t ve x ler üzerinde alınıyor.

(ii) Eğer $0 < q < p < \infty$ ve $1 < p < \infty$ ise, bu durumda (8.10.2) $f \geq 0$ den bağımsız olarak $C > 0$ ile sağlanır $\Leftrightarrow A = \max(A_1, A_2) < \infty$,

burada

$$A_1 = \left(\int_0^\infty\left(\int_{b^{-1}(a(t))}^t\left(\int_{a(t)}^{b(x)} w(s)\,ds\right)^{r/p'}\left(\int_x^t v(s)\,ds\right)^{r/p} v(x)dx\right)\sigma(t)dt\right)^{1/r} \tag{8.10.5}$$

ve

$$A_2 = \left(\int_0^\infty\left(\int_t^{a^{-1}(b(t))}\left(\int_{a(x)}^{b(t)} w(s)\,ds\right)^{r/p'}\left(\int_t^x v(s)\,ds\right)^{r/p} v(x)dx\right)\sigma(t)dt\right)^{1/r} \tag{8.10.6}$$

$w = u^{1-p'}$, ${}^{1}/_{r} = {}^{1}/_{q} - {}^{1}/_{p}$ ile, ve σ

$$\sigma(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{(M_k,M_{k+1})}(t)\frac{d}{dt}(b^{-1}\circ a)^k(t), \tag{8.10.7}$$

şeklinde tanımlanan normalize fonksiyonudur,

burada $(b^{-1}\circ a)^k$, k kere tekrarlı bileşkeyi gösteriyor ve $\{M_k\}$

$M_0 = b^{-1}(1)$, $\quad M_{k+1} = a^{-1}\big(b(M_k)\big)$ $\quad$ eğer $k \geq 0$ ise, ve

$M_k = b^{-1}\big(a(M_{k+1})\big)$ $\quad$ eğer $k < 0$ ise

ile tanımlanan dizidir.

Teorem 8.10.3. $1 < p \leq q < \infty$ ve u ve v $(0,\infty)$ de tanımlanmış ağırlık fonksiyonları olsunlar. Bu durumda $T: L^p(0,\infty;u) \to L^q(0,\infty;v)$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\text{Sup}\, B(x,t) < \infty, \tag{8.10.8}$$

$$\text{her } x > 0 \text{ için} \qquad \lim_{t\to x^-} B(x,t) = \lim_{t\to b^{-1}(a(x))^+} B(x,t) = 0, \tag{8.10.9}$$

ve

$$\lim_{x\to t^+} B(x,t) = \lim_{x\to a^{-1}(b(t))^-} B(x,t) = 0, \qquad \text{her } t > 0 \text{ için}, \tag{8.10.10}$$

Burada $B(x,t)$, (8.10.3) ile veriliyor ve (8.10.8) deki supremum (8.10.4) sağlayan tüm x ve t ler üzerinde alınmaktadır [31].

Teorem 8.10.4. $1 < q < p < \infty$ ve u ve v $(0,\infty)$ de tanımlanmış ağırlık fonksiyonları olsunlar. Bu durumda $T: L^p(0,\infty;u) \to L^q(0,\infty;v)$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$A = \max(A_1, A_2) < \infty$,

burada A_1 ve A_2, (8.10.5) ve (8.10.6) ile veriliyor [31].

T ye eşlenik olan operatör $\tilde{T}$ ile gösterilir,

$$\big(\tilde{T}f\big)(x) = \int_{b^{-1}(x)}^{a^{-1}(x)} f(t)\,dt$$

şeklide tanımlanır.

Teorem 8.10.5. $1 < p \leq q < \infty$ ve u ve v $(0,\infty)$ de tanımlanmış ağırlık fonksiyonları olsunlar. Bu durumda $\tilde{T}: L^p(0,\infty;u) \to L^q(0,\infty;v)$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\sup \tilde{B}(x,t) < \infty,$$

$$\text{her } x > 0 \text{ için } \lim_{t\to x^-} \tilde{B}(x,t) = \lim_{t\to b^{-1}(a(x))^+} \tilde{B}(x,t) = 0$$

ve

$$\text{her } t > 0 \text{ için } \lim_{x\to t^+} \tilde{B}(x,t) = \lim_{x\to a^{-1}(b(t))^-} \tilde{B}(x,t) = 0$$

burada

$$\tilde{B}(x,t) = \left(\int_{a(x)}^{b(t)} v(s)\,ds \right)^{1/q} \left(\int_t^x u^{1-p'}(s)ds \right)^{1/p'}$$

ve supremum

$0 < t \leq x < \infty$ ve $a(x) \leq b(t)$

durumlarını sağlayan tüm t ve x ler üzerinde alınıyor [31].

Teorem 8.10.6. $1 < q < p < \infty$ ve u ve v $(0,\infty)$ de tanımlanmış ağırlık fonksiyonları olsunlar. Bu durumda $\tilde{T}: L^p(0,\infty;u) \to L^q(0,\infty;v)$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(a(t))}^{t} \left(\int_{a(t)}^{b(x)} v(s)\,ds \right)^{r/q} \left(\int_x^t w(s)\,ds \right)^{r/q'} w(x)dx \right) \sigma(t)dt \right)^{1/r} < \infty$$

ve

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^{a^{-1}(b(t))} \left(\int_{a(x)}^{b(t)} v(s)\,ds \right)^{r/q} \left(\int_t^x w(s)\,ds \right)^{r/q'} w(x)dx \right) \sigma(t)dt \right)^{1/r} < \infty$$

burada $w = u^{1-p'}$, $1/_r = 1/_q - 1/_p$ ve σ, (8.10.7) ile tanımlanıyor.

Şimdi de P. Ortega Salvador ve Consuelo Ramirez Torreblanca tarafından ispatlanan Hardy-Steklov operatörü için ağırlıklı modular eşitsizlikleri verilecek ve ispatları yazılacaktır [33].

Bunun için önce gerekli bazı kavramları ve Hardy-Steklov operatörünün bir parça daha genelleştirilmiş tanımı ve notasyonlar verilecektir.

$-\infty \leq a < b \leq \infty$ ve s, h: $(a,b) \to \mathbb{R}$ ve tüm $x \in (a,b)$ için $s(x) \leq h(x)$ olan artan ve sürekli fonksiyonlar olsunlar. g, (a,b) de tanımlanan pozitif bir fonksiyon olsun ve yine T ile gösterilen Hardy-Steklov operatörü

$$Tf(x) = g(x) \int_{s(x)}^{h(x)} f(t)\, dt$$

şeklinde tanımlansın [33].

$$\Phi_2^{-1}\left(\int_a^b \Phi_2\big(Tf(x)\big)\, u(x) dx \right) \leq \Phi_1^{-1}\left(\int_{s(a)}^{h(b)} \Phi_1\big(Cf(x)\big)\, v(x) dx \right) \qquad (8.10.11)$$

ve

$$\Phi_2^{-1}\left(\Phi_2(\lambda) \int_{\{x\in(a,b:Tf(x)>\lambda)\}} u \right) \leq \Phi_1^{-1}\left(\int_{s(a)}^{h(b)} \Phi_1(Cf)\, v \right) \qquad (8.10.12)$$

burada Φ_1, Φ_2 pozitif , $[0,\infty)$ de kesin artan olarak tanımlanıyor. Nonnegatif olan u ve v fonksiyonları sırasıyla (a,b) ve $\big(s(a), h(b)\big)$ de tanımlanıyorlar.

Bir N- fonksiyonu ile $[0,\infty)$ da tanımlanan sürekli ve konveks Φ fonksiyonu kast edilir öyleki $s > 0$ ise $\Phi\,(\mathrm{s}) > 0$, $s \to 0$ olduğunda $\frac{\Phi(s)}{s} \to 0$ ve $s \to \infty$ olduğunda $\frac{\Phi(s)}{s} \to \infty$ olur. Her Φ N- fonksiyonu

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt$$

formundaki bir gösterimi kabul eder. Burada φ artan, sağdan her noktada sürekli $\varphi(0)=0$, eğer $s>0$ ise $\varphi(s)>0$ ve $s\to\infty$ olduğunda $\varphi(s)\to\infty$ şartlarını sağlar. φ fonksiyonuna, ϕ nin yoğunluk fonksiyonu denir. N-fonksiyon φ verilsin, $\Psi\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ olarak $\Psi(t)=\ \sup_{s\geq 0}\big(st-\Phi(s)\big)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon da bir N fonksiyondur ve Φ nin tümleyeni olarak adlandırılır. Φ ve Ψ fonksiyonları Young eşitsizliğini sağlar: eğer $s,t\geq 0$ ise, bu durumda $st\leq\Phi(s)+\Psi(t)$.

Teorem 8.10.8. Φ_1 bir N fonksiyonu ve $\Phi_2\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\Phi_2(0)=0$, $\lim_{t\to\infty}\Phi_2(t)=\infty$ şartlarını sağlayan ve pozitif kesin artan sürekli bir fonksiyon olsun. $\Phi_1\circ\Phi_2^{-1}$ alt toplamsal(subadditive) olsun. Ψ_1, Φ_1 nın N $-$fonksiyon tümleyeni olsun. $u$ve v sırasıyla (a,b) , $\big(s(a),h(b)\big)$ de tanımlanmış nonnegatif fonksiyonlar olsun. Bu durumunda aşağıdaki ifadeler denktir [33].

(i) (8.10.11) eşitsizliğinin tüm pozitif fonksiyonları sağlaması için $C>0$ vardır.

(ii) Tüm $\lambda>0$ ve tüm pozitif f fonksiyonların için

$$\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_{\left\{x\in(a,b):\int_{s(x)}^{h(x)}f>\lambda\right\}}\Phi_2(\lambda g)\,u\right)\leq\Phi_1^{-1}\left(\int\limits_{s(a)}^{h(b)}\Phi_1\big(Cf(x)\big)\,v(x)dx\right)\qquad(8.10.13)$$

eşitsizliğinin sağlanması için $C>0$ vardır.

(iii) Tüm $\lambda>0$ ve tüm $x,y\in(a,b)$ $x<y$ ve $s(y)\leq h(x)$ ile

$$\int\limits_{s(y)}^{h(x)}\Psi_1\left(\frac{\alpha(\lambda,x\,,y)}{C\lambda v}\right)v\leq\alpha(\lambda,x,y)<\infty$$

eşitsizliğinin sağlanması için $C>0$ vardır, burada

$$\alpha(\lambda,x,y)=\Phi_1\circ\Phi_2^{-1}\left(\int\limits_x^y\Phi_2(\lambda g)\,u\right).$$

Teorem 8.10.9. Φ_1,Φ_2,Ψ_1, u ve v Teorem 8.7.8. deki gibi olsunlar. g monoton olsun. Aşağıdaki ifadeler denk olur.

(i) (8.10.12) eşitsizliğinin tüm pozitif fonksiyonları sağlaması için $C>0$ vardır.

(ii) Tüm $\lambda > 0$ ve tüm $x, y \in (a,b)$ $x < y$ ve $s(y) \leq h(x)$ ile

$$\int_{s(y)}^{h(x)} \Psi_1\left(\frac{\left(\inf_{(x,y)} g\right)\beta(\lambda, x, y)}{C\lambda v}\right) v \leq \beta(\lambda, x, y) < \infty$$

eşitsizliğinin sağlanması için $C > 0$ vardır, burada

$$\beta(\lambda, x, y) = \left(\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}\right)\left(\Phi_2(\lambda)\int_x^y u\right).$$

Teorem 8.10.8. ve Teorem 8.10.9. $1 < p \leq q < \infty$ için ağırlıklı güçlü ve zayıf tip (p,q) eşitsizliklerini bir özel durum gibi içine aldığı gözlemlenebilir. Dikkat edilirse $g \equiv 1$ ise bu durumda güçlü tip (8.10.11) eşitsizliği ve zayıf tip (8.10.12) eşitsizliği denk olurlar. Ama $\Phi_1(t) = t^p$ ve $\Phi_2(t) = t^q$, $1 < p \leq q < \infty$, olsa bile genel monoton g için (8.10.11) ve (8.10.12) denk olmazlar.

Teoremleri ispat etmek için aşağıdaki lemma kullanılacaktır [33].

Lemma 8.10.9. $\{(a_j, b_j)\}$, $\Omega = \{x \in (a,b): s(x) < h(x)\}$ açık kümesinin bağlantılı bileşenleri olsunlar. Bu durumda

(a) tüm $j \neq i$ için $\left(s(a_j), h(b_j)\right) \cap \left(s(a_i), h(b_i)\right) = \emptyset$.

(b) Her j için

(i) $a_i \leq m_k^j < m_{k+1}^j \leq b_j$ tüm k ve j ler için;

(ii) $(a_j, b_j) = \cup_k \left(m_k^j, m_{k+1}^j\right)$, hemen hemen her yerde tüm j ler için;

(iii) $s\left(m_{k+1}^j\right) < h\left(m_k^j\right)$ tüm k ve j ler için ve eğer $a_j < m_k^j < m_{k+1}^j < b_j$ ise $s\left(m_{k+1}^j\right) = h\left(m_k^j\right)$.

olacak şekilde bir (sonlu veya sonsuz) $\{m_k^j\}$ reel sayı dizisi vardır.

Şimdi teoremlerin ispatına geçilecektir.

İspat (Teorem 8.10.8. ispatı) (i)⇒(ii) olduğu açıktır.

(ii)⇒(iii). $\lambda > 0, n \in \mathbb{N}$ ve $x,\ y \in (a,b)$ $x < y$ ve $s(y) \leq h(x)$ ile, olsun. Eğer $s(y) = h(x)$ ise, ispatlanacak bir şey yok. Kabul edelim $s(y) < h(x)$ olsun. $\frac{\Psi_1(t)}{t}$ fonksiyonu, 0 dan ∞ ' a tüm değerleri artarak aldığından

$$\int_{s(y)}^{h(x)} \Psi_1\left(\frac{\varepsilon}{v + {}^1\!/_n}\right)\frac{v + {}^1\!/_n}{\varepsilon} = 2C\lambda \tag{8.10.14}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır, burada C, (8.10.13) eşitsizliğinin sabitidir.

f fonksiyonu

$$f = \frac{1}{C}\Psi_1\left(\frac{\varepsilon}{v + {}^1\!/_n}\right)\frac{v + {}^1\!/_n}{\varepsilon}\chi\big(s(y), h(x)\big)$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer $z \in (x,y)$ ise

$$\int_{s(z)}^{h(z)} f \geq \int_{s(y)}^{h(x)} f = \int_{s(y)}^{h(x)} \frac{1}{C}\Psi_1\left(\frac{\varepsilon}{v + {}^1\!/_n}\right)\frac{v + {}^1\!/_n}{\varepsilon} = 2\lambda > \lambda.$$

Bu $(x,y) \subset \{z \in (a,b): \int_{s(z)}^{h(z)} f > \lambda\}$ olduğunu gösteriyor. Bu durumda (ii), $\Phi_1\left(\frac{\Psi_1(t)}{t}\right) \leq \Psi_1(t)$ eşitsizliği ve (8.10.14)

$$\begin{aligned}
\alpha(\lambda, x, y) &= \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}\left(\int_x^y \Phi_2(\lambda g)\, u\right) \\
&\leq \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}\left(\int_{\left\{z\in(a,b):\int_{s(z)}^{h(z)} f>\lambda\right\}} \Phi_2(\lambda g)\, u\right) \\
&\leq \int_{s(a)}^{h(b)} \Phi_1\big(Cf(t)\big)\left(v(t) + \frac{1}{n}\right)dt \\
&= \int_{s(y)}^{h(x)} \Phi_1\left(\Psi_1\left(\frac{\varepsilon}{v + {}^1\!/_n}\right)\frac{v + {}^1\!/_n}{\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \int_{s(y)}^{h(x)} \Psi_1\left(\frac{\varepsilon}{v + {}^1\!/_n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2C\lambda\varepsilon \qquad (8.10.15)$$

verir. Bu eşitsizlik $\alpha(\lambda, x, y) < \infty$ olduğunu gösterir.

ψ_1, $\Psi_1$nin yoğunluk fonksiyonu ise

$$\Psi_1(x) \leq x\psi_1(x) \leq \Psi_1(2x) \qquad (8.10.16)$$

olduğu bilinir.

Bir taraftan, (8.10.15) ile, (8.10.16) ve (8.10.14) eşitsizliğindeki sağ taraf,

$$J = \int_{s(y)}^{h(x)} \psi_1\left(\frac{\alpha(\lambda, x, y)}{4C\lambda\left(v + {}^1\!/_n\right)}\right) \leq \int_{s(y)}^{h(x)} \psi_1\left(\frac{\varepsilon}{2\left(v + {}^1\!/_n\right)}\right)$$

$$\leq 2\int_{s(y)}^{h(x)} \Psi_1\left(\frac{\varepsilon}{\left(v + {}^1\!/_n\right)}\right)\frac{v + {}^1\!/_n}{\varepsilon} = 4C\lambda. \qquad (8.10.17)$$

Diğer yandan, (8.10.16) deki eşitsizliğin sol tarafı

$$J \geq \int_{s(y)}^{h(x)} \Psi_1\left(\frac{\alpha(\lambda, x, y)}{4C\lambda\left(v + {}^1\!/_n\right)}\right)\frac{4C\lambda\left(v + {}^1\!/_n\right)}{\alpha(\lambda, x, y)}$$

$$= \frac{4C\lambda}{\alpha(\lambda, x, y)} \int_{s(y)}^{h(x)} \Psi_1\left(\frac{\alpha(\lambda, x, y)}{4C\lambda\left(v + {}^1\!/_n\right)}\right)\left(v + \frac{1}{n}\right) \qquad (8.10.18)$$

verir. (8.10.17) ve (8.10.18) bir araya getirilirse

$$\frac{4C\lambda}{\alpha(\lambda, x, y)} \int_{s(y)}^{h(x)} \Psi_1\left(\frac{\alpha(\lambda, x, y)}{4C\lambda\left(v + {}^1\!/_n\right)}\right)\left(v + \frac{1}{n}\right) \leq J \leq 4C\lambda$$

elde edilir. $n \to \infty$ yapılıp ve monoton yakınsaklık teoremi uygulanırsa

$$\int_{s(y)}^{h(x)} \Psi_1\left(\frac{\alpha(\lambda,x,y)}{4C\lambda v}\right)v \leq \alpha(\lambda,x,y)$$

elde ederiz.

(iii)⇒(i). Eğer tüm $x \in (a,b)$ için $s(x) = h(x)$ ise, ispatlanacak bir şey yok.

$s(z) < h(z)$ olacak şekilde $z \in (a,b)$ var olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\Omega = \{x \in (a,b): s(x) < h(x)\}$ boş olmayan bir açık kümedir. $\{(a_j,b_j)\}_j$, Ω nın bağlantılı bileşenlerinin koleksiyonu olsun, her j için, $\{m_k^j\}$ lemma 8.10.9. ile verilen dizi olsun.

Belirlenmiş(fixed) j, k için ve $x \in (m_k^j, m_{k+1}^j)$

$$Tf(x) = g(x)\int_{s(x)}^{h(x)} f = g(x)\int_{s(x)}^{s(m_{k+1}^j)} f + g(x)\int_{s(m_{k+1}^j)}^{h(m_k^j)} f + g(x)\int_{h(m_k^j)}^{h(x)} f$$

olur. Bu durumda

$$\int_a^b \Phi_2\,(Tf)u = \sum_{j,k}\int_{m_k^j}^{m_{k+1}^j} \Phi_2\left(g(x)\int_{s(x)}^{s(m_{k+1}^j)} f + g(x)\int_{s(m_{k+1}^j)}^{h(m_k^j)} f + g(x)\int_{h(m_k^j)}^{h(x)} f\right)u(x)dx$$

$$\leq \sum_{j,k}\int_{m_k^j}^{m_{k+1}^j} \Phi_2\left(g(x)\int_{s(x)}^{s(m_{k+1}^j)} 3f\right)u(x)dx$$

$$+\sum_{j,k}\int_{m_k^j}^{m_{k+1}^j} \Phi_2\left(g(x)\int_{s(m_{k+1}^j)}^{h(m_k^j)} 3f\right)u(x)dx$$

$$+\sum_{j,k}\int_{m_k^j}^{m_{k+1}^j} \Phi_2\left(g(x)\int_{h(m_k^j)}^{h(x)} 3f\right)u(x)dx = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}).$$

(III) hesaplayalım. j, k belirliyelim(fix) ve $x_0 = m_k^j$ ile tanımlanmış $\{x_n\}$ dizisi ve

$\int_{h(m_k^j)}^{h(x_n)} f = \int_{h(x_n)}^{h(x_{n-1})} f$ ifadesini düşünelim. Bu dizi

$$\int_{h(x_{n+2})}^{h(x_{n+1})} f = \frac{1}{4} \int_{h(m_k^j)}^{h(x_n)} f$$

sağlar.

Her $n \in \mathbb{N}$ için , $f_n = f\chi_{(h(x_{n+2}),h(x_{n+1}))}$ olsun. Eğer $x \in (x_{n+1}, x_n)$ ise bu durumda $\{x_n\}$ tanımından

$$\int_{h(m_k^j)}^{h(x)} 4f_n \geq \int_{h(m_k^j)}^{h(x_{n+1})} 4f_n = 4 \int_{h(x_{n+2})}^{h(x_{n+1})} f = \int_{h(m_k^j)}^{h(x_n)} f$$

elde edilir.

Bu aşağıdakini gösterir:

$$(x_{n+1}, x_n) \subset E_n = \left\{ x \in \left(m_k^j, m_{k+1}^j\right) : \int_{h(m_k^j)}^{h(x)} 12f_n > \lambda_n \right\}, \qquad (8.10.19)$$

burada $\lambda_n = \int_{h(m_k^j)}^{h(x_n)} 3f$.

$\int_{h(m_k^j)}^{h(x)} 12f_n$ monotonluğundan, E_n $\left(\gamma, m_{k+1}^j\right)$ şeklinde bir aralık olduğu açıktır. $x \in E_n$ olsun. Bu durumda

$$\lambda_n < \int_{h(m_k^j)}^{h(x)} 12f_n = \int_{h(m_k^j)}^{h(x)} 12Cf_n \frac{\alpha\left(\lambda_n, x, m_{k+1}^j\right)}{Cv\alpha\left(\lambda_n, x, m_{k+1}^j\right)} v$$

veya, denk olarak,

$$2\alpha\left(\lambda_n, x, m_{k+1}^{j}\right) \leq \int_{h\left(m_k^j\right)}^{h(x)} 24Cf_n \frac{\alpha\left(\lambda_n, x, m_{k+1}^{j}\right)}{\lambda_n C v} v.$$

Young eşitsizliği ve (iii) uygulanırsa

$$2\alpha\left(\lambda_n, x, m_{k+1}^{j}\right) \leq \int_{h\left(m_k^j\right)}^{h(x)} \Phi_1(24Cf_n)\, v + \int_{h\left(m_k^j\right)}^{h(x)} \Psi_1\left(\frac{\alpha\left(\lambda_n, x, m_{k+1}^{j}\right)}{\lambda_n C v}\right) v$$

$$\leq \int_{h\left(m_k^j\right)}^{h(x)} \Phi_1(24Cf_n)\, v + \alpha\left(\lambda_n, x, m_{k+1}^{j}\right),$$

elde edilir, bu da

$$\alpha\left(\lambda_n, x, m_{k+1}^{j}\right) \leq \int_{h\left(m_k^j\right)}^{h(x)} \Phi_1(24Cf_n)\, v$$

verir. Yukarıdaki eşitsizlik tüm $x \in E_n$ için sağladığından, infimum alınıp

$$\int_{E_n} \Phi_2(\lambda_n g)\, u \leq \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}\left(\int_{h\left(m_k^j\right)}^{h\left(m_{k+1}^j\right)} \Phi_1(24Cf_n)\, v\right) \tag{8.10.20}$$

elde edilir. (8.10.19), (8.10.20) den, f_n tanımından ve $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ nin alt toplamsallığından,

$$(\mathrm{III}) = \sum_{j,k} \int_{m_k^j}^{m_{k+1}^j} \Phi_2\left(g(x) \int_{h\left(m_k^j\right)}^{h(x)} 3f\right) u(x)dx$$

$$= \sum_{j,k} \sum_{n} \int_{x_{n+1}}^{x_n} \Phi_2\left(g(x) \int_{h\left(m_k^j\right)}^{h(x)} 3f\right) u(x)dx$$

$$\leq \sum_{j,k} \sum_{n} \int_{x_{n+1}}^{x_n} \Phi_2\left(g(x) \int_{h\left(m_k^j\right)}^{h(x_n)} 3f \right) u(x)dx$$

$$\leq \sum_{j,k} \sum_{n} \int_{E_n} \Phi_2(g(x)\lambda_n)\, u(x)dx$$

$$\leq \sum_{j,k} \sum_{n} \left(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}\right) \left(\int_{h\left(m_k^j\right)}^{h\left(m_{k+1}^j\right)} \Phi_1(24Cf_n)v \right)$$

$$= \sum_{j,k} \sum_{n} \left(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}\right) \left(\int_{h(x_{n+2})}^{h(x_{n+1})} \Phi_1(24Cf)v \right)$$

$$\leq \sum_{j,k} \sum_{n} \left(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}\right) \left(\int_{h\left(m_k^j\right)}^{h\left(m_{k+1}^j\right)} \Phi_1(24Cf)v \right)$$

elde edilir.

(I) hesaplanması benzer bir şekilde

$$\text{(I)} \leq \sum_{j,k} \left(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}\right) \left(\int_{s\left(m_k^j\right)}^{s\left(m_{k+1}^j\right)} \Phi_1(24Cf)v \right)$$

elde edilerek yapılabilir.

(II) hesaplamak için, $\lambda_{j,k} = \int_{s\left(m_{k+1}^j\right)}^{h\left(m_k^j\right)} 3f$ olsun. Young eşitsizliğinden ve (iii) den

$$2\alpha\left(\lambda_{j,k}, m_k^j, m_{k+1}^j\right) = \int_{s\left(m_{k+1}^j\right)}^{h\left(m_k^j\right)} 6Cf \frac{\alpha\left(\lambda_{j,k}, m_k^j, m_{k+1}^j\right)}{C\lambda_{j,k} v} v$$

$$\leq \int_{s\left(m_{k+1}^{j}\right)}^{h\left(m_{k}^{j}\right)} \Phi_1(6Cf)v + \int_{s\left(m_{k+1}^{j}\right)}^{h\left(m_{k}^{j}\right)} \Psi_1\left(\frac{\alpha\left(\lambda_{j,k}, m_k^j, m_{k+1}^j\right)}{C\lambda_{j,k} v}\right) v$$

$$\leq \int_{s\left(m_{k+1}^{j}\right)}^{h\left(m_{k}^{j}\right)} \Phi_1(6Cf)v + \alpha\left(\lambda_{j,k}, m_k^j, m_{k+1}^j\right)$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\alpha\left(\lambda_{j,k}, m_k^j, m_{k+1}^j\right) \leq \int_{s\left(m_{k+1}^{j}\right)}^{h\left(m_{k}^{j}\right)} \Phi_1(6Cf)v$$

ve bu

$$(\mathrm{II}) = \sum_{j,k} \int_{m_k^j}^{m_{k+1}^j} \Phi_2\left(g \int_{s\left(m_{k+1}^{j}\right)}^{h\left(m_{k}^{j}\right)} 3f\right) u \leq \sum_{j,k} \left(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}\right)\left(\int_{s\left(m_{k+1}^{j}\right)}^{h\left(m_{k}^{j}\right)} \Phi_1(6Cf)\, v\right)$$

olmasını gerektirir.

(I)-(III) hesaplamaları bir araya getirilirse, $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ nın alt toplamsallığı uygulanırsa ve j ve k dan sonuç olarak (i) elde edilir.

Teorem 8.10.9. ispatı için [33] kaynağına bakılabilir.

8.11. Genelleştirme

Daha önce 8.8. alt bölümünde

$$(Kf)(x) = \int_0^x k(x,t)\, f(t)dt$$

incelenmişti. Bundan hareketle

$$\left(K_{a,b}f\right)(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t)\, f(t)dt \tag{8.11.1}$$

şeklindeki operatörlere genişletme yapılabilir. Burada nonnegatif olan kernel k aşağıdaki şartları sağlar:

$k(x,t)$, x te artan ve t de azalandır.

$k(x,z) \leq C_1\left(k\big(x\,,b(y)\big)+k(y,z)\right)$, tüm $y \leq x$ ler için ve $a(x) \leq z \leq b(y)$, $C_1 \geq 1$ sabiti ile [2].

Teorem 8.11.1. $1 < p \leq q < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t)\, f(t)dt\right)^q u(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty f^p\,(x)v(x)dx\right)^{1/p}$$

eşitsizliği tüm $f \geq 0$ fonksiyonlarını sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{x\leq y, a(y)\leq b(x)}\left(\int_x^y u(s)\,k^q\big(s,b(x)\big)ds\right)^{1/q}\left(\int_{a(y)}^{b(x)} v^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} < \infty$$

ve

$$\sup_{x\leq y, a(y)\leq b(x)}\left(\int_x^y u(s)\,ds\right)^{1/q}\left(\int_{a(y)}^{b(x)} k^{p'}(x,s)v^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} < \infty.$$

8.12. Bir N −Boyutlu Hardy-Steklov Operatörü

Alt bölüm 8.7. dekine benzer olarak N −boyutlu Hardy-Steklov operatörü

$$(\mathcal{H}_N f)(x) = \int\limits_{a(|x|)<|y|<b(|x|)} f(y)\,dy, \qquad x,y \in \mathbb{R}^N, \tag{8.12.1}$$

burada a ve b Tanım 8.7.1. de geçen fonksiyonlardır [2].

Teorem 8.12.1. $f \geq 0$, $u(x)$ ve $v(x)$ $\mathbb{R}^N$ de ağırlık fonksiyonları, $0 < q < \infty, 1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}(\mathcal{H}_N f)^q\,(x)u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} f^p\,(x)v(x)dx\right)^{1/p} \tag{8.12.2}$$

eşitsizliği tüm $f \geq 0$ sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{a(t)}^{b(t)} F(s)\, ds\right)^q U(t)\, dt\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty F^p\,(t)V(t)dt\right)^{1/p} \tag{8.12.3}$$

eşitsizliğinin tüm $F \geq 0$ için sağlamasıdır [2].

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Hardy ve Hardy-Steklov operatörlerinin Hardy tipli eşitsizliklerle olan ilişkileri kaynaklar(yayınlar) taranarak sonuçlar tezde yer verilmiştir.

Literatürde Hardy-Steklov operatörleri için modullar eşitsizlikler yenidir. Bu konu üzerinde çalışılarak yeni eşitsizlikler elde edilebilir. Ayrıca potansiyel(genel) Hardy tipli eşitsizlikler üzerinde çalışılarak daha genel veya daha güçlü teoremler elde edilebilir. Bu operatör eşitsizliklerinin başka uzaylardaki formları elde edilmeye çalışılabilir

Doğal olarak Hardy-Steklov operatörünün yeni bazı özellikleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] A.S. Besicovitch, (1945) , A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions (I), (II), Proc. Cambridge Phil. Soc. 41 103–110, 42 (1946) 110.

[2] A. Kufner, L.E. Persson, (2003),Weighted Inequalities of Hardy Type, World Sci. Publishing, Singapore,.

[3] B. Muckenhoupt,(1972)Hardy's inequality with weights, Studia Math. 44, 31-38. MR 47:418

[4] B. Çekiç, (2005), Değişken Üstlü Lebesgue ve Sobolev Uzaylarında Gömme Tipli Eşitsizlikler,Doktora Tezi.

[5] B. Musayev,M. Alp. (2000).Fonksiyonel Analiz.

[6] Bradley, (1978), Hardy inequalities with mixed norms, Canad. Math. Bull. 21, 405-408. MR 80a:26005

[7] C. Bennett, R. Sharpley, (1988), Interpolation of Operators, Academic Press.

[8] D. E. Edmunds, P. Gurka and L. Pick, (1994), Compactness of Hardytype integral operators in weighted Banach function spaces, StudiaMath. **109** 73,90.

[9] D. E. Edmunds.V.Kokliashvili, A. Meski.(2002). Bounded and Compact İntegral operators

[10] D. Cruz-Uribe, SFO, and C.J. Neugebauer, Weighted norm inequalities for the centered maximal operator on R+, Richerche di Mat., to appear.

[11] E. I. Berezhnoi, (1991)Weighted inequalities of Hardy type in generalideal spaces, *Soviet Math. Dokl.* **43**, 492{495.

[12] E.Kreyszig, (1987), Introductory Functional Analysis with Apllication,Wiley.

[13] E. Sawyer, (1985) Weighted inequalities for the two-dimensional Hardy operator, Studia Math., 82 ,1–16.

[14] F. Farassat,*(1996)* Introduction to Generalized Functions With Applications in Aerodynamics and Aeroacoustics. NASA Technical Paper 3428, Langley Research Center ,Hampton, Virginia

[15] Federer, H.: (1969),Geometric Measure Theory. Berlin–Heidelberg–NewYork: Springe

[16] Fefferman, C. and Stein, E.M. (1971). Some maximal inequalities, *Am. J. Math.*, **93**, 107–115.

[17] G. B. Folland. (1984), Reel Analysis.New York,Wiley.

[18] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, (1967) Inequalities, Cambridge Univ. Press, Cambridge .

[19] Genebashvili, I., Gogatashvili, A., Kokilashvili, V. and Krbec, M. (1998). Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics,.Longman, Oxford.

[20] H. Heinig and G. Sinnamon, (1998). Mapping properties of integral averaging operators.Studia Math. 129(2), 157-177.

[21] J.B.Conway.(2000). A Course in Operator Theory.

[22] J. Gil de Lamadrid; J. P. Jans, (Oct., 1959), Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 10, No. 5. , pp. 710-715.

[23] J.Heinonen.(2001). Lecture on Analysis on Metric Spaces. Springer.

[24] J.K. Hunter, B. Nachterguele (2001) Applied Analysis. World Scientific

[25] J.L. Pick and B. Opic, (1994). On the geometric mean operator, J. Math. Anal. Appl. **183**, 652–662 .

[26] L.-E. Persson and V. D. Stepanov, (2002). Weighted integral inequalities with the geometric mean operator, J. Inequal. Appl. **7**,727–746

[27] Opic,B.; Kufner,A.:(1990) Hardy-type Inequalities. Pitman Research Notes in Math., Series219, Longman Sci&Tech., Harlow,.

[28] K. F. Andersen and B. Muckenhoupt, Weighted weak type Hardy inequalities with appli- cations to Hilbert transforms and maximal functions, Studia Math. 72 (1982), 9-26. MR 83k:42018.

[29] L.C. Evans and R.F. Gariepy, (1992), Measure theory and fine properties of functions, Boca Raton,CRC Press.

[30] P.D.Lax, (2002). Functional Analysis. Wiley.

[31] P. Jain and B. Gupta, (2003).Compactness of Hardy Steklov operator, J. Math. Anal. Appl. **288**, No. 2, 680–691

[32] P. Ortega Salvador, (2000) Weighted generalized weak type inequalities for modified Hardy operators, Collect. Math. **51** (2), pp. 149–155.

[33] P. Ortega Salvador,C.R.Torreblanca,(2006) Weighted Modular İnequalities for Hardy-Steklov Operators,j. Mat.Anal.322.803-814

[34] R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull.Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569-645. MR 56:6264

[35] P.R. Masani, H. Niemi, (1989) The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems.II. Pettis integration, Adv. Math. 75 121–167.

[36] R.A.Adams, (1975). Sobolev Space,Akademic Press, New York.

[37] R. A. Mac´ıas and C. Segovia, (1979),Lipschitz functions on spaces of homogeneous type, Adv. in Math. **33**, 257–270.

[38] R. Mashiyev, B. Çekiç, S. Ogras, (2006),On Hardy's inequality in *Lp(x)(*0,∞*)*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 7 (3) ,Article 106.

[39] S . G. Krantz and S.-Y. Li, (2001),Boundedness and compactness of integral operators on spaces of homogeneous type and applications, II, *J. Math. Anal. Appl.* 258 642–657.

[40] Saxe, Karen. (2002) Beginning Functional Analysis. Spiringer-verlag New York,Inc.

[41] Stein, Elias M. (Nov., 1956) Interpolation of Linear Operators**.** Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 83, No. 2., pp. 482-492. -

[42] Spiegel, Murray R. Theory and Problems of Real Variables.1969.McGraw-Hill,inc.

[43] V.Burenkov, P. Jain,T. Tararykova.(2007), On Hardy-Steklov andGeometric Steklov Operators .Math.Nachr.280,11,1244-1256

[44] Williams,Vernon., (May, 1971) Generalized Interpolation Spaces**.** Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 156. pp. 309-334.

[45] W. Rudin, (1987), Real and complex analysis, New York, McGraw–Hill.

[46] W.P.Ziemer,(1989). Weakly Diffrentiable Function, Grad. Text in Math. 120.New York Springer.