T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ SAYISAL YARIGRUPLARI

RÜVEYDE AKGÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
HAZİRAN-2008

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

RÜVEYDE AKGÜL tarafından yapılan“ FIBONACCI SAYISAL YARIGRUPLARI” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Yrd.Doç.Dr. Sedat İLHAN (Danışman)

Üye : Prof.Dr. Hüseyin AYDIN

Üye : Prof.Dr. Sezai OĞRAŞ

Yedek Üye: Prof.Dr. Hasan İlhan TUTALAR

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 04/06/2008.

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

/ /

Prof. Dr. Necmettin PİRİNÇÇİOĞLU

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında, gerek yönlendirmesi gerekse harcadığı vakitleri için, her şeyden önemlisi gösterdikleri ilgi ve yardımlarından dolayı, danışmanım sayın
Yrd. Doç. Dr. Sedat İlhan'a teşekkür ederim.

Bu Çalışma, Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeler Koordinatörlüğü'nün DÜBAP - 06 -FF-79 Nolu Projesi ile desteklenmiş olup desteklerinden dolayı kendilerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AMAÇ

Bu çalışma, Fibonacci sayıları yardımıyla tanımlanan Lucas sayılarından da yararlanarak ve sayısal bir yarıgrupta bilinen temel kavramları kullanarak Fibonacci sayısal yarıgruplarını oluşturmayı ve bilinen kavramların yapısını incelemeyi amaçlamaktadır.

ÖZET

Bu çalışmada, Fibonacci sayılarının bazı özelliklerini incelemekte ve Lucas sayıları tanımlanarak bunların ilginç özelliklerini vermekteyiz.

Ayrıca, sayısal yarıgrupların özellikleri ile birlikte Fibonacci sayıları tarafından üretilen Fibonacci sayısal yarıgruplarının yapısını incelemekteyiz. Bununla birlikte, bu konuda bazı sonuçlar elde etmekteyiz.

SUMMARY

In this study, we investigate some properties of Fibonacci numbers and give interesting properties of those by defining Lucas numbers.

Also,we study the properties of numerical semigroups and the structure of Fibonacci numerical semigroups which generate by Fibonacci numbers.

Consequently, we obtain some results about the above subject.

GİRİŞ

Bu çalışma beş bölümden oluşmakta olup, Fibonacci sayıları ile üretilen sayısal yarıgrupların yapısını incelemeyi amaçlamaktadır.

İlk Bölümde Fibonacci sayılarının tanımı ve Fibonacci sayıları için Lucas Teoremi verildi. Fibonacci sayıları içerisinden seçilen asallar Fibonacci asal sayılarını oluşturmaktadır. Legendre ve Lagrange ifadesinde kullanılan Legendre sembolü tanımlanmaktadır. Ayrıca Fibonacci sayıları için Z. H. Sun teoremleri ve E. Lehmer teoremleri ifade edilmektedir.

İkinci bölümde Lucas sayılarının tanımı ve Lucas sayıları için Binet formülü ifade edilmektedir. Fibonacci sayıları için ifade edildiği gibi Lucas sayıları için de Lucas sayıları içerisinden seçilen asallarla Lucas asalları elde edilmiştir. Yine Legendre, Lagrange , Z. H. Sun teoremlerinin ifadesi Lucas sayıları içinde kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde ise, sayısal yarıgrupların tanımı, Frobenius sayısı, Kutup kümesi, Apery kümesi ve Gaps(boşluk) gibi sayısal yarıgruplar için kullanılan temel kavramlar tanımlanmıştır.

Fibonacci sayısal yarıgruplarının yapısı incelenmekte ve yarıgruplardan yararlanarak Lucas sayısal yarıgruplar verilmekle birlikte bunlarla ilgili bazı sonuçlar dördüncü bölümde yer almaktadır.

Son bölümde ise elde edilen sonuçlar bulunmaktadır.

1. BÖLÜM

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Fibonacci sayılarına özellikle doğada çok sık rastlamaktayız. Bu sayılar bitki yaprakları, bitki tohumları, çiçek yaprakları ve kozalaklarda sıkça karşımıza çıkmaktadır. Daha da ilginci bu sayılara Pascal veya Binom üçgeninde, Mimar Sinan'ın eserlerinde rastlanmaktadır.

Fibonacci dizisindeki bir terim, ondan önce gelen bir terime bölündüğünde, dizinin elemanları büyüdükçe bu oranın, irrasyonel bir sayı olan altın oran sayısına yaklaştığı görülmektedir. Matematikte ise başta geometri alanında kullanılan Pascal üçgenini göz önünde bulundurursak, üçgeni oluşturduktan sonra, katsayıların sıralı çapraz toplamları Fibonacci dizisini vermektedir.

İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci (ya da Pisalı Leonardo veya Leonardo Pisano) (1170-1250) yıllarında yaşamış olup 1200 yıllarında ondalık sayı sistemini bulduktan sonra kitabı Liber Abaci yi yazmış ve doğadaki birçok oluşumun düzeninde altın oranı keşfetmiştir. Fibonacci sayılarını ise ardışık her bir sayının birbirine oranının sayılar büyüdükçe altın orana yaklaştığını bulmuştur.1228 yılındaki Liber Abaci'nin ikinci baskısında 123-124 sayfalarında yer alan ve tavşan üretmek gibi matematikle pek ilgisi olmadığı bir konuyla ilgilenmiştir.

Fibonacci sayılarında asal olanları , n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, … değerleri için F_n'nin asal sayılar olduğunu ve $n \leq 10000$ için bütün F_n asalları Brilhart tarafından verildiği bilinmektedir. Öte yandan a ve b iki Fibonacci asal sayısı olmak üzere $F_0 = a$, $F_1 = b$ ve $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olacak şekilde bir Fibonacci asalının bulunmadığı Ronald Graham tarafından kanıtlanmıştır. V. Semirnov, M. (2004), tamsayı dizisinden yararlanarak Fibonacci sayı dizisini incelemiş olup aynı yılda Jastrzebska, M., Grabowski A. (2004), Fibonancci sayılarının bazı matematiksel formüllerini incelemiştir. Jovanovic , R. (2001), Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bağıntıyı incelemiştir.

Lucas sayıları ise, Fransız matematikçi Edvard Lucas tarafından 2,1,3,4,7,11, ... L_n sayı dizisi elde edilmiştir. Lucass sayıları içinde asal olanlara Lucas asal sayıları adı verilir. n = 0, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71, 79, 113, 313, 353, 503, 613, 617, 863, 1097, 1361, 4787, 4793, 5851, 7741 değerleri için $\{L_n\}$ Lucas asal sayı dizisi oluşturduğu bununla birlikte, $n \leq 500$ ve $n \leq 10000$ için bütün Lucas asallarının sırasıyla Brillhart ve Williams tarafından bulunduğu bilinmektedir. Ayrıca Dubner H., Keller W.(1999), Fibonacci ve Lucas asalları ile ilgilenmiştir.

F.Curtis(1990), sayısal yarıgrupların Frobenius sayısı kavramını ele almıştır. J.C. Rosales (2000) yarıgrup kavramından yola çıkarak sayısal yarıgrupları incelemiş ve bu yarıgrupların özel koşullarından biri olan Apery kümesini incelemiştir. Fibonacci sayılarının keşfinden bugüne hala güncel çalışmalar devam etmektedir. Sedat İlhan (2006), teleskopik sayısal yarıgrupların sınıflandırılması üzerine çalışmalar yapmış olup M. Madero ve K.Herzinger 2005, Apery kümeleri J.C. Rosales çalışmasından yararlanarak Apery kümelerini daha farklı yollarla formülüze etmiştir. 2005 yılında J.C. Rosales, iki elemanla üretilen sayısal yarıgruplarda esas boşluk (gap) kavramını incelemiştir.

2. BÖLÜM

FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI

Bu bölümde, ileride kullanılacak olan Fibonacci sayısal yarıguplarının temelini oluşturan Fibonacci sayıları ve bu sayılardan elde edilen Lucas sayılarının tanım ve bağıntıları hakkında temel bilgiler yer almaktadır.

2.1 Fibonacci Sayıları

Bu kesimde Fibonacci sayıları, Fibonacci asal sayıları ve bu sayılar arasındaki bazı bağıntılar verilmektedir.

2.1.1 Tanım: $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere n = 0, 1, 2, ... için, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ şeklinde tanımlanan F_n sayısına n. Fibonacci sayısı denir. Fibonacci sayılarından oluşan $\{F_n\}$ dizisine de Fibonacci sayı dizisi adı verilir.

n negatif tamsayısı için $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ eşitliğinden yaralanarak,

$F_{-1} = 1$, $F_{-2} = -1$, $F_{-3} = 2$, $F_{-4} = -3$, ... şeklinde Fibonacci sayı dizisi yazılabilir.

Bu da bize negatif tamsayılar için de F_n Fibonacci sayı dizisini oluşturabileceğimizi gösterir. F_n nin bazı negatif tamsayı değerleri aşağıda verilmektedir.

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1
F_n	-8	5	-3	2	-1	1

Bununla birlikte, bazı n doğal sayıları için Fibonnacci sayılarını

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

tablosu ile verebiliriz. Tabloda da görüldüğü gibi ,

$F_n = 1 \Leftrightarrow$ n = 1 ya da n = 2 yazarız.[11]

Ayrıca pozitif ve negatif Fibonacci sayıları arasındaki bağıntı aşağıdaki önerme ile verilebilir.

2.1.2 Önerme: n bir tamsayı olmak üzere,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

Dir. [12]

Öte yandan n tamsayısının tek veya çift olması halinde F_n Fibonacci sayısı aşağıdaki önerme ile ifade edilebilir.

2.1.3 Önerme: $n \in Z$ için,

$$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \quad (F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2) \text{ ve } F_{2n} = F_n^2 + 2F_nF_{n-1}$$

dir.[15]

Şimdi de n ile F_n arasındaki bağıntıları ele alalım.

2.1.4 Teorem (Lucas Teoremi) : m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$$

Dir.[9]

2.1.5 Önerme :m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere $m \neq 2$ olsun.

$$F_m \mid F_n \Leftrightarrow m \mid n$$

dir.

İspat : $m \neq 2$ ve m, n pozitif tamsayılar olmak üzere ,

$m \mid n \Leftrightarrow (m,n) = m \Leftrightarrow F_{(m,n)} = F_m \Leftrightarrow (F_m, F_n) = F_m \Leftrightarrow F_m \mid F_n$ dir.

2.1.6 Önerme: $k, n \in N$ için, $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$ dir.

2.1.7 Teorem: $k, n \in N$ için, $k > 1$ ve $k < n$ ise, $F_k < F_n$ dir.

İspat : $k, n \in N$ ve $k > 1$ alalım. $k < n \Rightarrow \exists\, t \in N \ni n = k+t$

$$\Rightarrow F_n = F_{k+t} = F_t F_{k+t} + F_{t-1} F_k > F_k \text{ elde edilir.}$$

2.1.8 Önerme:

a) n > 1, n $\in$N için , $F_n < F_{n+1}$ dir.

b) n $\in$N için, $F_n \leq F_{n+1}$ dir.

c) k, n $\in$N için , $F_n \mid F_{nk}$ dir.

d) r $\leq$ n olmak üzere, $F_{n^2} - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r} F_{r^2}$ dir.

2.1.9 Lemma: m ve n pozitif tamsayıları verilsin. m$\mid F_n$ olacak şekilde en küçük n pozitif tamsayısı r(m) olsun. Buna göre m$\mid F_n \Leftrightarrow$ r(m)$\mid$n önermesi doğrudur [9].

İspat : r(m) in tanımından yola çıkarak ;

$$m \mid F_n \Leftrightarrow m \mid (F_n, F_{r(m)}) \Leftrightarrow m \mid F_{(n,r(m))} \Leftrightarrow (n,r(m)) = r(m) \Leftrightarrow r(m) \mid n$$

elde edilir. [9]

2.1.10 Önerme :Aşağıda verilen, Cassini ve Catalan Özdeşlikleri olarak bilinen özdeşlikler yardımıyla (-1) in kuvvetlerini Fibonacci sayıları cinsinden ifade etmek mümkündür.

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \text{ dir.}$$

Şimdi de F_n Fibonacci sayısını ifade eden bazı özdeşlikleri verelim.

2.1.11 Teorem: n$\in$Z olmak üzere, F_n Fibonacci sayısı verilsin. O zaman aşağıdaki özdeşlikler mevcuttur.

a) $F_n = \dfrac{F_{n+2} + F_{n-2}}{3}$

b) $F_n = 2F_{n+2} - F_{n+3}$

c) $F_n = F_{n+3} - 2F_{n+1}$

d) $F_n = 3F_{n+2} - F_{n+4}$

İspat a) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = F_n + F_{n-1} + F_n = 2F_n + F_{n-1}$

$F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ den,

$$F_{n+2} + F_{n-2} = 3F_n \Rightarrow F_n = \frac{F_{n+2} + F_{n-2}}{3}$$

Çıkar.[16]

(b), (c) ve (d) de benzer şekilde ispatlanır.

2.1.12 Önerme : n∈ Z olmak üzere,

a) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

b) $F_{3n} = F_{n+1}^3 - F_n^3 - (n-1)^3$

dir. [16]

Aşağıdaki teorem ile F_n , F_{2n} , F_{3n} ve F_{4n} sayılarının sonlu toplamlarını verelim.

2.1.13 Teorem :

a) $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

b) $\sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+2} - 1$

c) $\sum_{i=0}^{n} F_{3i} = \frac{1}{2}[F_{3n+2} - 1]$

d) $\sum_{i=0}^{n} F_{4i} = F_{2n+1}^2 - 1$

dir.[16]

2.1.14 Not : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ eşitliğini kullanarak F_n Fibonacci sayısını tanımlamak mümkündür. Buna göre F_n, F_{2n} ve F_{3n} sayılarını kombinasyon hesabı yardımıyla aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

2.1.15 Teorem :

a) $\sum_{i=1}^{n}\binom{n-i}{i-1}=F_n$

b) $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}F_i=F_{2n}$

c) $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}2^i F_i=F_{3n}$

dir. [16]

2.1.16 Tanım (Fibonacci Asal Sayıları)

n $\in$ Z ve n $\geq$ 2 için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ile tanımlanan F_n Fibonacci sayısı asal ise bu sayıya Fibonacci asal sayısı denir.

2. 1. 17 Not : n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, …değerleri için F_n 'nin asal sayılar olduğu ve n $\leq$ 10000 için bütün F_n asallarının Brilhart tarafından verildiği bilinmektedir. [14]

Öte yandan a ve b iki Fibonacci asal sayısı olmak üzere F_0 = a, F_1 = b ve n $\geq$ 2 için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olacak şekilde bir Fibonacci asalının bulunmadığı Ronald Graham tarafından kanıtlanmıştır. [10]

Şimdi de F_n Fibonacci sayısının asal olması için bazı gerek ve yeterli koşulları verelim.

2. 1.18 Önerme : n > 1, n$\in$ N ve n $\neq$ 4 olsun . Eğer F_n asal ise n asaldır. [11]

2.1.19 Tanım : p tek asal sayı ve (p,a) = 1 olsun. Eğer $x^2 \equiv$a (p) kongrüansı çözülebilirse a ya p modülüne göre kuadratik rezidü(karesel kalan)denir.

Eğer $x^2 \equiv$a (p) kongrüansı çözülemez ise a ya p modülüne göre kuadratik olmayan rezidü adı verilir.

Bu durumda kuadratik rezidü için R, kuadratik olmayan rezidü için N gösterimlerini kullanacağız. [17]

2.1.20 Tanım :(Legendre Sembolü)

p tek asal sayı ve (a,p)=1 olsun. $\left(\frac{a}{p}\right)$ şeklinde gösterilen Legendre sembolü ,

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1 & ;\ \text{aRp}\\ -1 & ;\ \text{aNp}\end{cases}$$

olarak tanımlanır. [17]

2.1.21 Not : a ve p nin Legendre sembolü $\left(\frac{a}{p}\right)$ olsun. $P \neq 2,5$ olmak üzere,

$$\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)=\begin{cases}1 & ,\ p\ \equiv \pm 1 (\operatorname{mod} 5)\\ -1 & ,\ p\ \equiv \pm 2 (\operatorname{mod} 5)\end{cases}$$

olarak tanımlanır. [9]

2.1.22Teorem (Legendre) : p ≠ 2 asal sayı olsun. $F_p \equiv \left(\frac{p}{5}\right) (\operatorname{mod} p)$ dir.

İspat : $\binom{p}{k} k! =$ p(p-1)...(p-k+1) ≡0 (mod p) olarak tanımlanır. Burada k=1, 2, ..., p-1 için $p \left| \binom{p}{k} \right.$ olduğu çıkar. Altın orandan,

$$F_p = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p\right\}$$

$$= \frac{1}{2^p\sqrt{5}}\sum_{k=o}^{p}\binom{p}{k}\left(\left(\sqrt{5}\right)^k - \left(-\sqrt{5}\right)^k\right)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}5^{\frac{k-1}{2}} \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) (\operatorname{mod} p) \ \text{(k tek tamsayısı için),}$$

elde edilir [9].

2.1.23 Teorem (Legendre,Lagrange): p≠2 olmak üzere, p asal sayı olsun.

$$F_{p-1} \equiv \frac{1-\left(\frac{p}{5}\right)}{2} (\operatorname{mod} p) \ \text{ ve } \ F_{p+1} \equiv \frac{1+(\frac{p}{5})}{2} (\operatorname{mod} p)$$

dir[9].

2.1.24 Sonuç : p asal sayı olsun. $p \mid F_{p-(\frac{p}{5})}$ dir [9].

2.1.25 Sonuç : k≠ 0 bir tamsayı olsun. p, F_k nın 2 den farklı bir asal böleni ise, o zaman,

$$\frac{F_{kp}}{F_k} \equiv p(\bmod 5p^2)$$

dir [9].

2.1.26 Teorem(Z.H.Sun) : p> 5 ve p asal sayı olsun. Buna göre ,

1)p≡1 (mod 3) ise, o zaman,

a) $p \mid F_{\frac{p-1}{3}} \Leftrightarrow p = x^2 + 135y^2$ $(x, y \in Z)$,

b) $p \mid F_{\frac{p-1}{6}} \Leftrightarrow p = x^2 + 540y^2$ $(x, y \in Z)$

yazılır.

2) p≡2 (mod 3) ise, ozaman ,

a) $p \mid F_{\frac{p+1}{3}} \Leftrightarrow p = 5x^2 + 27y^2$ $(x, y \in Z)$,

b)$p \mid F_{\frac{p+1}{6}} \Leftrightarrow p = 5x^2 + 108y^2$ $(x, y \in Z)$

dir [9].

2.1.27 Teorem (E.Lehmer) : a, b $\in Z$ ve $2 \mid b$ olmak üzere, $p = a^2 + b^2$ ve $p \equiv 1, 9 \pmod{20}$ koşullarını sağlayan bir p asal sayısı verilsin. Buna göre,

i) Eğer, $p \equiv 1, 29 \pmod{40}$ ise, o zaman, $p \mid F_{\frac{p-1}{4}} \Leftrightarrow 5 \mid b$;

ve

ii) Eğer , $p \equiv 9, 21 \pmod{40}$ ise, o zaman, $p \mid F_{\frac{p-1}{4}} \Leftrightarrow 5 \mid a$

dır [9].

2.1.28 Teorem: p asal ve $p > 5$ olmak üzere, aşağıdakiler mevcuttur.

(i) **(E.Lehmer)** Eğer $p \equiv 1 \pmod 8$ ise, o zaman, $p \mid F_{\frac{p-1}{4}} \Leftrightarrow p = x^2 + 80y^2$ $(x, y \in Z)$,

(ii) **(Z.H.Sun, Z.W.Sun)** Eğer $p \equiv 5 \pmod 8$ ise, o zaman, $p \mid F_{\frac{p-1}{4}} \Leftrightarrow p = 16x^2 + 5y^2$

$(x, y \in Z)$ dir [9].

2.2 Lucas Sayıları

2.2.1 Tanım: Bu kesimde Lucas sayıları tanımlanmakta ve bu sayılar ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiler verilmektedir.

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere n=2, 3, 4, … için $L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$ şeklinde tanımlanan L_n sayısına n. Lucas sayısı denir. Buna göre 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, … şeklinde Lucas sayı dizisini oluşturabiliriz.

2.2.2 Not: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … şeklindeki $\{F_n\}$ Fibonacci sayı dizisi 1170 -1250 yılları arasında Leonardo Fibonacci tarafından oluşturulmuştur. n∈Z için $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ eşitliğinden yararlanarak Eduard Lucas adlı Fransız matematikçi de 2, 1, 3, 4, 7, 11, ... L_n şeklindeki Lucas sayı dizisini elde etmiştir.

Aşağıdaki tabloda n'nin bazı değerleri için F_n Fibonacci sayısı ile L_n Lucas sayısı karşılaştırılmaktadır.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

Bununla birlikte negatif n tamsayıları için de Lucas sayılarını tanımlamak mümkündür.

2.2.3 Teorem : n ∈ Z için ,

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

dir [12].

Şimdi de L_n Lucas sayısının çeşitli ifadelerini görelim.

2.2.4 Önerme : n ∈ Z olmak üzere, L_n sayısını F_n Fibonacci sayıları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

a) $L_n = F_n + 2F_{n-1}$

b) $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$

c) $L_n = F_{n+3} - 2F_n$

d) $L_n = F_{n+2} - F_n + F_{n-1}$

e) $L_n = \dfrac{F_{2n}}{F_n}$

dir [16].

L_n Lucas sayılarını yine Lucas sayıları cinsinden ifade etmekte mümkündür.

2.2.5 Önerme: $n \in Z$ olmak üzere,

a) $L_n = 2L_{n+2} - L_{n+3}$

b) $L_n = 3L_{n+2} - L_{n+4}$

dir [16].

Şimdi de F_n Fibonacci sayısını L_n Lucas sayıları cinsinden ifade edelim.

2.2.6 Önerme: $n \in Z$ olmak üzere,

a) $F_n = \dfrac{L_n + 2L_{n-1}}{5}$

b) $F_n = \dfrac{L_{n+2} - L_{n-2}}{5}$

c) $F_n = \dfrac{L_{n+3} - 2L_n}{5}$

d) $F_n = \dfrac{2L_{n+1} - L_n}{5}$

e) $F_n = \dfrac{2L_{n+2} - 3L_n}{5}$

dir.

Tek ve çift Fibonacci sayısını ifade edebildiğimiz gibi aşağıdaki teorem ile tek ve çift Lucas sayılarını da ifade edebiliriz.

2.2.7 Teorem : $n \in Z$ olmak üzere,

a) $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$

b) $L_{2n+1} = F_{n+1}L_{n+1} + F_nL_n$

dir [16].

Altın oran ile Fibonacci arasındaki benzer bir ilişki altın oran ile Lucas sayıları için de söz konusudur.

2.2.8 Teorem (Binet Formülü) : Altın oran $H=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ olmak üzere ,

$$(-1)^{n+1}H^{2n}+L_nH^n=1$$

dir [9].

Son olarak Lucas sayılarının bazı sonlu toplamlarını verelim.

2.2.9 Teorem :

a) $\sum_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2}-1$

b) $\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n}-2$

c) $\sum_{i=0}^{n} L_i^2 = L_nL_{n+1}-2$

d) $\sum_{i=1}^{n} L_{2i}^2 = F_{4n+2}+2n-1$

dir.

Kombinasyon hesabı yardımıyla da Lucas sayısını ifade edebiliriz.

2.2.10 Teorem: k,m,n $\in$ Z olmak üzere,

$$L_{km+n}=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}F_j^k\,F_{k-1}^{m-j}\,L_{j+n}$$

dir[9].

2.2.11 Sonuç : k,n $\in$ Z için,

$$L_{k+n}=F_kL_{n+1}+F_{k-1}L_n$$

dir [9].

2.2.12 Tanım :Lucas Asalları

Lucas sayıları içinde asal olanlara Lucas asal sayıları adı verilir. n=0, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71, 79, 113, 313, 353, 503, 613, 617, 863, 1097, 1361, 4787, 4793, 5851, 7741 değerleri için $\{ L_n \}$ Lucas asal sayı dizisi oluşturduğu bununla birlikte, n ≤ 500 ve n ≤ 10000 için bütün Lucas asallarının sırasıyla Brillhart ve Williams tarafından bulunduğu bilinmektedir [14].

Şimdi de Lucas asal sayıları için bazı gerekli ve yeterli koşulları verelim.

2.2.13 Teorem (Legendre, Lagrange):

p≠2 asal olmak üzere, $L_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ dir.

İspat : $L_p = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p$

$$= \frac{1}{2^p} \sum_{k=o}^{p} \binom{p}{k} \left(\left(\sqrt{5}\right)^k + \left(-\sqrt{5}\right)^k \right)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 5^{\frac{k}{2}} \equiv \frac{1}{2^{p-1}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p) \text{, (k tek tamsayısı için)}$$

elde edilir [9].

2.2.14 Önerme : p≠2 asal olmak üzere,

$$\frac{L_{p-1}L_{p+1} - 1}{5} = F_p^2$$

dir [14].

2.2.15 Önerme : p≠2 asal olmak üzere,

$$F_{p-1}F_{p+1} = F_{\frac{(p-1)}{2}} L_{\frac{(p-1)}{2}} F_{\frac{(p+1)}{2}} L_{\frac{(p+1)}{2}}$$

dir [14].

2.2.16 Teorem (Z.H.Sun) : p ≡ 3, 7 (mod 20) asal sayı ve 2p $=x^2+5y^2$ olacak şekilde x, y pozitif tamsayıları olsun. O zaman ,

$$L_{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{x-y}{2}} \frac{x}{y} (\mathrm{mod}\, p)$$

dir [9].

2.2.17 Teorem (Z.H.Sun) : p ≡1, 4 (mod 15) asal sayı ve p ≠ 2 olmak üzere, p =x^2+15y^2 olacak şekilde x,y ∈ Z olsun. O zaman ,

$$L_{\frac{p-1}{3}} \equiv \begin{cases} 2 & , (\bmod p) : y \equiv 0 (\bmod 3) \\ -1 & , (\bmod p) : y \equiv 0 (\bmod 3) \end{cases}$$

dir [9].

2.2.18 Teorem (Z.H.Sun) : p ≡ 2, 8 (mod 15) asal sayı ve p = $5x^2+3y^2$ olacak şekilde x, y ∈ Z tanımlansın. O zaman,

$$L_{\frac{p+1}{3}} \equiv \begin{cases} -2 & , (\bmod p) : y \equiv 0 (\bmod 3) \\ 1 & , (\bmod p) : y \equiv 0 (\bmod 3) \end{cases}$$

dir [9].

2.2.19 Tanım : p bir asal sayı olsun. $p^2 \mid F_{p-(\frac{p}{5})}$ olmak üzere, p asalı Wall-Sun-Sun asalı olarak adlandırılır [9] .

2.2.20 Teorem : p > 5 asal olsun. O zaman p ,

$$\text{Wall-Sun-Sun asaldır} \Leftrightarrow L_{p-(\frac{p}{5})} \equiv 2(\frac{p}{5})(\bmod p^4)$$

dir.

3. BÖLÜM
SAYISAL YARIGRUPLAR

Bu bölümde, sayısal yarıgruplar tanımlanmakta ve bu gruplarda Frobenius sayısı, Apery kümesi, boşluk kümesi ve kutup kümesi gibi kavramlar incelenmektedir.

3.1 Sayısal Yarıgruplarda Temel Tanımlar

Bu kesimde, sayısal yarıgruplarla ilgili önemli temel tanım ve ifadeler yer almaktadır.

3. 1.1 Tanım: G boş olmayan bir küme ve ‘’o‘’ ikili işlem olsun. Eğer, ‘’o ‘’ işlemi aşağıdaki koşulu sağlıyorsa (G, o) ikilisine bir yarıgrup denir.

$$\forall\, a, b, c \in G \text{ için } ao\,(boc)=(aob)oc$$

3.1.2 Tanım: (S, o) bir yarıgrup ve T de S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun T, ‘’o’’ işlemine göre kapalı oluyorsa T ye S nin bir alt yarıgrubu denir.

3.1.3 Lemma: S bir yarıgrup ve $\{T_i : i \in I\}$kümesi S nin alt yarıgruplarının bir ailesi olsun. Buna göre, $T=\bigcap_{i\in I} T_i$ kümesi de S’nin bir alt yarıgrubudur.

İspat: a, b $\in$ T alalım. O zaman $a, b \in \bigcap_{i\in I} T_i \Rightarrow \forall\, i \in I,\ a, b \in T_i \Rightarrow aob \in T_i$

$$\Rightarrow aob \in \bigcap_{i\in I} T_i$$

$$\Rightarrow aob \in T$$

elde edilir.

3.1.4 Tanım: S bir yarıgrup ve $A \subset S$ olsun. A yı kapsayan S nin en küçük alt yarıgrubuna A nın ürettiği yarıgrup denir. Bu durumda A kümesine de S nin üreteçler kümesi denir ve $S = \langle A\rangle$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $s_1 < s_2 < ...< s_n$ olacak şekilde $A=\{s_1, s_2 ,..., s_n\}\subset S$ alınırsa $S=< s_1, s_2, ..., s_n >$ yazılır. Eğer $S=<s_1, s_2,..., s_n>$ olacak şekilde S nin $A=\{s_1, s_2 ,..., s_n\}$üreteç kümesinden daha küçük bir küme yoksa o zaman $A=\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ kümesine S nin minimal üreteç sistemi adı verilir.

3.1.5 Tanım: N negatif olmayan tamsayılar kümesi ve $S \subseteq N$ verilsin. Eğer S, N deki toplama işlemine göre kapalı, birleşmeli ve $0\in S$ oluyorsa S ye sayısal yarıgrup denir.

S bir sayısal yarı grup olmak üzere; $s_1 < s_2 < ... < s_n$ olacak şekilde $s_1, s_2, ... , s_n \in S$ için

$$S=\langle s_1, s_2, ..., s_n\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} s_i k_i : k_i \in N\}$$

ve

$$\text{“ obeb } (s_1, s_2, ..., s_n) = 1 \Leftrightarrow (N \backslash S) \text{ kümesi sonludur ”}$$

önermesi doğrudur [1].

3.1.6 Örnek: $S=\langle 5, 6, 13\rangle = \{ 5k_1+6k_2+13k_3 ; k_1, k_2, k_3 \in N \}$

$=\{0, 5, 6, 10 , 11, 12, 13, 15, \rightarrow ...\}$

şeklinde yazılır. Burada "→",15 ten sonraki bütün tamsayıların S’de olduğu anlamındadır.

3.2 Sayısal Yarıgruplarda Frobenius Sayısı

Bu kesimde, bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısı tanımlanmakta ve Frobenius sayısını veren bazı formüller bulunmaktadır.

3.2.1 Tanım: S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, Z (tam sayılar kümesi) de olup S de olmayan elemanların maksimumuna S nin Frobenius sayısı denir ve g(S) ile gösterilir. Yani,

$$g(S) = \max (Z \backslash S)$$

olarak yazılır. Bu durumda N = S alınırsa g(N) = -1 bulunur.

Herhangi bir S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısını veren genel bir formül bulunmamaktadır. Ancak S sayısal yarıgrubunun daha özel tanımlanmasıyla onun Frobenius sayısının hesaplanması daha kolay olabilir.

3. 2.2 Teorem: $S = \langle s_1, s_2\rangle$şeklinde tanımlanan S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı;

$$g(S) = s_1 s_2 - s_1 - s_2$$

şeklinde hesaplanır [3].

3.2.3 Örnek :

$S=\langle 7,12\rangle=\{0,7,12,14,19,21,24,26,28,31,33,35,36,38,40,42,43,45,47,48,49,50,52,54,55,56,57,59,60,61,62,63,64,66,\rightarrow ...\}$ yarıgrubunun Frobenius sayısı;

g(S) = 7.12 -12-7 = 84-19 = 65 olarak bulunur.

3.2.4 Teorem: S = <s_1, s_2, s_3 > aşağıdaki koşulları sağlayan bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer,

$2 < s_1 < s_2 < s_3$ için $2 < k < (s_1-1)/2+1$ ($k \in Z$) ve $s_1-k < s_3/s_2 < s_1-k+1$,

$s_2 \equiv 1(\text{mod } s_1)$ ve $s_3 \equiv s_1-k+1(\text{mod} s_1)$ alınırsa, o zaman S nin Frobenius sayısı,

$$g(S)=(k-2)\, s_2+s_3-s_1$$

ile hesaplanır [5].

3. 2.5 Örnek: S = < 7, 8, 33 > = {0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,31,32,33,35, →...}

$2 < 7 < 8 < 33$ olarak alınırsa $2 \leq k \leq (7-1)/2+1 \Rightarrow 2 \leq k \leq 4$ olmak üzere ,

k=3 için ;

$7-3 < 33/8 < 7-3+1$ $8 \equiv 1(\text{mod}7)$ ve $33 \equiv 7-3+1(\text{mod}7)$ olup,

$g(S)=(3-2)\, 8+33-7= 34$ olarak bulunur.

3. 2.6 Teorem: a > 2 ve a çift tamsayı olmak üzere;

S = < a, a+2 , 2a+1> şeklindeki sayısal yarıgruplar için g(S) sayısı ,

$$g(s)=\frac{a^2}{2}+a-1$$

ile hesaplanır [4].

3.2.7 Örnek: S = <6, 8, 13 > = {0 ,6 ,8 ,12,13,14,16,18,19,20,21,22,24, →...} sayısal yarıgrubu için,

$$g(S) = 36/2+6-1 = 23$$

olarak bulunur.

3.3 Sayısal Yarıgrupta Önemli Bazı Kavramlar

Bu kesimde ise bir sayısal yarıgrupta bilinmesi gereken simetrilik, kutup, boşluk ve Apery küme gibi önemli bazı kavramlar verilmektedir.

3. 3.1 Tanım: S bir sayısal yarıgrup ve Frobenius sayısı g(S) olsun. $\forall x \in Z \setminus S$ için $g(S)-x \in S$ oluyorsa S ye simetrik sayısal yarıgrup adı verilir. Öte yandan iki eleman ile üretilen her $S = < s_1, s_2 >$ sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu bilinmektedir [3].

3. 3.2 Örnek :

$S = < 8, 10, 17> =\{0,8,10,16,17,18,20,24,25,26,27,28,30,32,33,34,35,36,37,38,40,\rightarrow...\}$

Sayısal yarıgrubu için

$$g(S) = 64/2+8-1 = 39$$

olup $\forall x \in Z \setminus S$ için $39-x \in S$ dir. Yani S simetrik sayısal yarıgruptur.

Ancak $S = < 5, 6, 13 > = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13,15, \rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubunda $g(S)=14$ olup $x=5$ için $14-5 =9 \notin S$ çıkar. Böylece S simetrik olmaz.

3. 3.3 Tanım: S bir sayısal yarıgrup ve S nin Frobenius sayısı g(S) olsun. $x \in Z \setminus S$ için $g(S)-x \notin S$ oluyorsa x elemanına S nin kutup noktası denir. S nin kutup noktalarının kümesi ;

$$K(S)=\{x \in Z \setminus S: \ g(S)-x \notin S\}$$

ile gösterilir.

3. 3.4 Teorem: S sayısal yarıgrubunun simetrik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $K(S)=\emptyset$ olmasıdır [6].

3. 3.5 Örnek: $S =<7, 8, 33 >$ sayısal yarı grubu için $g(S)=34$ ve

$$K(S)=\{x \in Z \setminus S: (34-x) \notin S\}=\{32, 31,...\} \neq \emptyset$$

olduğundan S sayısal yarıgrubu simetrik değildir.

3.3.6 Tanım: N \ S kümesinin elemanların her birine S nin boşluğu (S nin N deki boşluğu (gap)) adı verilir. S nin boşlukları kümesi,

$$H(S) = \{ s \in N: \ s \notin S \}$$

şeklinde ifade edilir.

Verilen bir S sayısal yarı grubunda boşlukların sayısını bulmak oldukça zordur. Bununla birlikte özel bazı sayısal yarıgruplar için #(H(S)) sayısını bulmak mümkündür.

3. 3.7 Teorem: $S = < s_1, s_2 >$ şeklinde bir sayısal yarıgrup için,

$$\#(H(S)) = (s_1-1)(s_2-1)/2$$

ile hesaplanır [8].

3. 3.8 Örnek :

$S=<7,10>=\{0,7,10,14,17,20,21,24,27,28,30,31,34,35,37,38,40,41,42,44,45,47,48,49,50,51,52, 54,\rightarrow\ldots\}$ için ,

$$\#(H(S))=6.9/2=27$$

dir. Gerçekten de

$$H(S)=\{1,2,3,4,5,6,8,9,11,12,13,15,16,18,19,22,23,25,26,29,32,33,36,38,39,43,46,53\}$$

dir.

3.3.9 Tanım: S bir sayısal yarıgrup ve $n\in S\backslash\{0\}$olsun.

$$Ap\ (S,n)=\{s\in S:s-n\notin S\}$$

kümesine S nin n ye göre Apery kümesi denir. Yani S nin n ye göre Apery kümesin elemanları (modn) e göre kalan sınıfların her birindeki en küçük pozitif tamsayılardan oluşmaktadır. Böylece,

$$\#(Ap(S,n)) = n \text{ olup, } g(S)=\max\ (Ap(S,n))-n$$

bağıntısı mevcuttur [2].

3.3.10 Not: $S = <s_1, s_2, \ldots, s_n>$ sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda,

$$Ap\ (S,s_1)=\{s\in S:s-s_1\notin S\}\text{kümesi,}$$

S'nin mods_1' e göre tam olarak bir elemanını kapsar. Özel olarak Ap (S,s_1) kümesi, $i=1, 2, \ldots, s_1-1$ için mods'ye göre i'ye denk olan elemanlardan oluşur. Ap (S,s_1) kümesinin elemanlarını w(i) ile gösteririz ki onlar mods_1'e göre i'ye denktirler.

Üstelik, $\max\ (Ap\ (S,s_1))=g(S) + s_1$ olduğu bilinmektedir [6].

3. 3.11 Örnek:$S = < 6, 9, 10 > = \{0, 6,9,10,12,15,16,18,19,20,21,22,24\rightarrow,...\}$sayısal yarıgrubu için g(S)=23 olup

$$Ap(S,6) = \{s\in S:s-6\notin S\} =\{0, 9, 10, 19, 20, 29\}$$

yazılır.

3. 3.12 Teorem: $S=<s_1,s_2>$ şeklindeki sayısal yarıgrubu için;

$$Ap(s,s_1)=\{(s_1-r)s_2 : r=1, 2, ..., s_1\}$$

ve

$$Ap(s,s_2)=\{(s_2-r)s_1 : r=1, 2, ..., s_2\}$$

şeklindedir [7].

3. 3.13 Örnek: $S=< 4 ,5 >=\{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12,\rightarrow...\}$

$$Ap(S,4)=\{(4-r)5 : r=1, 2, 3, 4 \}=\{0, 5,10,15 \}$$

ve

$$Ap(S,5)=\{(5-r)4 : r = 1, 2, 3, 4, 5\}=\{0 ,4, 8, 12, 16 \}$$

olarak bulunur. Bununla birlikte H(S) ve Ap(S,n) arasındaki bağıntıyı aşağıdaki teorem ile birlikte verelim.

3. 3.14 Teorem: $S=< s_1, s_2 >$ şeklindeki S sayısal yarı grubu için,

$$\#(H(S))=\frac{[\#(Ap (S, s_1))-1][\#(Ap(S, s_2)-1]}{2}$$

ve

$$H(S) \cap Ap(S,s_1)=\varnothing \quad , \quad H(S)\cap Ap(S,s_2)=\varnothing$$

bağıntısı mevcuttur.

4. BÖLÜM

FİBONACCİ SAYISAL YARIGRUPLARI

4.1 Fibonacci Sayısal Yarıgrupları

Bu kesimde Fibonacci sayısal yarıgrupları tanımlanmakta ve bu yarıgruplarda bazı sonuçlar elde edilmektedir.

4.1.1 Tanım : $(s_1, s_2, ..., s_n)=1$ ve $3 \leq s_1 < s_2 < ... < s_n$ Fibonacci sayıları olmak üzere , $S=< s_1, s_2, ..., s_n >$ sayısal yarıgrubuna Fibonacci sayısal yarıgrubu denir. Bundan sonra $i=1, 2, ..., n$ için, $S = < s_1, s_2, ..., s_n >$ için Fibonacci sayısal yarıgrubunda s_i yerine F_i ve S= F olarak yazacağız.

4.1.2 Örnek: F=< 5, 8, 13 > sayısal yarıgrubu < 5, 8 > elemanlarından oluşan Fibonacci sayısal yarıgrubunu düşünelim. O zaman,

F=< 5, 8 > ={0, 5 ,8 ,10 ,13 ,15 ,16 ,18 ,20 ,21,23,24,25,26,28 →...}sayısal yarıgrubu için,

Ap(F,5)={(5-r)8 r:1,2,3,4,5}={0, 8 ,16 ,24 ,32} ve

Ap(F,8)={(8-r)5 r:1,2,3,4,5,6,7,8}={0, 5 ,10 ,15 ,20 ,25 ,30 ,35 } olarak yazılır.

Buradan #(Ap(F,5))=5 ve #(Ap(F,8))=8 olup # (H(F))=(5-1).(8-1)/2=14 bulunur. Böylece, $H(F)\cap Ap(F,5)=\emptyset$ ve $H(F)\cap Ap(F,8)=\emptyset$ olduğu görülür.

4.1.3 Teorem : i , k ≥3 tamsayıları için $r= [\frac{F_i - 1}{F_k}]$ ve $(F_{i+2}, F_{i+k}) = 1$ olmak üzere,

$F=< F_i, F_{i+2}, F_{i+k} >$ Fibonacci sayısal yarıgrubunu düşünelim. O zaman F nin Frobenius sayısı,

$$g(F) = \begin{cases} (F_i - 1)F_{i+2} - F_i(rF_{k-2} + 1) & ; \quad r = 0 \text{ veya } r \geq 1 \text{ ve } F_{k-2}F_i < (F_i - rF_k)F_{i+2} \\ (rF_k - 1)F_{i+2} - F_i((r-1)F_{k-2} + 1) & ; \text{ diğer yerlerde} \end{cases}$$

dir [13].

4.1.4 Örnek : $F=< F_4, F_6, F_7 > = < 3, 8, 13 >$ Fibonacci sayısal yarıgrubunu alalım. Burada

i=4 , k=3 için,

$r = [\frac{F_4 - 1}{F_3}] = [\frac{3-1}{2}]=1$ ve $F_1 F_4 < (F_4 - 1F_3) F_6$ olduğundan ,

g(S)= $(F_4 - 1) F_6 - F_4 \ (1 F_1 + 1)$ =2.8-3.2=10 bulunur.

K(F)= {x∈Z\F ;(10-x)∉F}={7, 5, …}≠∅ olduğunudan F sayısal yarıgrubu simetrik değildir.

4.1.5 Örnek : F_5, F_7 ve F_{11} asal sayıları ile üretilen ,

F=<5,13,89>={0,5,10,13,15,18,20,23,25,26,28,30,31,33,35,36,38,40,43,45,46,48,→…}

Fibonacci sayısal yarıgrubunu düşünelim. i = 5, k = 6 alırsak ,

r= $[\frac{F_5 - 1}{F_6}] = [\frac{5-1}{8}] = 0$ ve $F_4 \ F_5 < (F_5 - 0 F_6) F_7$ olduğundan F in Frobenius sayısı

g(F)= $(F_5 - 1) F_7 - F_5 (0+1)$=(5-1)13-5=47 hesaplanır.

F Fibonacci sayısal yarıgrubunun kutup noktalarının kümesi ,

K(F) = {x∈Z/F ; (47-x)∉F}={46,45,…}≠∅ olduğundan F sayısal yarıgrubu simetrik değildir.

Şimdi de Fibonacci sayısal yarıgruplarda elde ettiğimiz bazı sonuçları verelim.

4.1.6 Sonuç : F= $< F_i, F_j >$ ve $F_1 =< F_k, F_m >$ Fibonacci sayısal yarıgrupları verilsin.

$$F_i \mid F_k \text{ ve } F_j \mid F_m \Rightarrow F_1 \subseteq F \text{ dir.}$$

İspat : $y \in F_1 \Rightarrow y = pF_k + qF_m$

$= paF_i + qbF_j = mF_i + nF_j \Rightarrow y \in F$

dir.

4.1.7 Örnek : i = 4, j=6, k=8 ve m=12 alırsak, F= $< F_4, F_6 > = < 3, 8 >$,

$F_1 = < F_8, F_{12} > = < 21, 144 >$ olup $F_1 \subseteq F$ dir.

4.1.8 Sonuç : F= < F_i, F_j > ve F_1=< F_k , F_s > Fibonacci sayısal yarıgrupları verilsin.

$F_k = F_i + F_j$ ve $F_j \mid F_s$ ise, $F_1 \subseteq$ F dir.

İspat : F_s =a F_j , x∈ F_1 $\Rightarrow$ x =b F_k + c F_s ;b,c ∈ N.

$\Rightarrow$ x =b F_i + b F_j +c F_s = b F_i + b F_j +ac F_j = b F_i +(b+ac) F_j

= b F_i +t F_j $\Rightarrow$ x∈ F.

4.1.9 Örnek : F bir Fibonacci sayısal yarıgrubu olsun**.** F=< F_4, F_5 > ve F_1=< F_6, F_{10} > seçersek**,** $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_{10} = 55$ olduğu bilinmektedir. Böylece F= < 3,5 > ve F_1= < 8,55 > F_6= F_4+ F_5 ve $5 \mid 55$ olup $F_1 \subseteq$ F yazılır.

4.2 Lucas Sayısal Yarıgrupları

Bu kesimde de Lucas sayısal yarıgrubunun temel tanımı verilmektedir.

4.2.1 Tanım: (s_1, s_2, …, s_n) = 1 ve $3 \leq s_1 < s_2 < ... < s_n$ Lucas sayıları olmak üzere S=< s_1,s_2,…..s_n> sayısal yarıgrubuna Lucas sayısal yarıgrubu denir. Bundan sonra i=1, 2, …,n için S=< s_1, s_2, …, s_n > için Lucas sayısal yarıgrubunda s_i yerine L_i ve S= L olarak yazacağız.

4.2.2 Örnek : L= < L_3, L_4 >=< 4,7 >={ 0,4,7,8,11,12,14,15,16, →…}

5. BÖLÜM
SONUÇLAR

Bu bölümde, çalışmamızdan elde ettiğimiz bazı sonuçları vermekteyiz.Bu sonuçlar Acta Universitatis Apulensis dergisinde kabul edilmiş olup basımdadır [18].

5.1.1 Sonuç : $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$ dir.

İspat : Teorem 2.2.9 (a) dan $L_0 + L_1 + L_2 + ... + L_n = L_{n+2} - 1$

$L_1 + L_2 + ... + L_n = L_{n+2} - 1 - 2$

olup

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

elde edilir.

5.1.2 Sonuç : $\sum_{i=1}^{n} iL_i = nL_{n+2} - L_{n+3} + 4$ dir.

İspat:Tümevarımla ispatlarsak, n=1 için önerme doğrudur.

$L_1 = 1L_3 - L_4 + 4 = 4 - 7 + 4 = 1$

n=k için doğru olsun.Yani $\sum_{i=1}^{n} iL_i = 1L_1 + 2L_2 + ... + nL_n = nL_{n+2} - L_{n+3} + 4$ olsun.

1+($1L_1 + 2L_2 + ... + nL_n$)+(n+1) L_{n+1} = $nL_{n+2} - L_{n+3} + 4$ +(n+1) L_{n+1}

=n($L_{n+4} - L_{n+3}$) $- L_{n+3} + 4$ +(n+1)($L_{n+3} - L_{n+2}$)=n $L_{n+4} - nL_{n+3} - L_{n+3} + 4 +$ (n+1) L_{n+3}

-(n+1) L_{n+2} =n L_{n+4} +4- (n+1) L_{n+4} +(n+1) L_{n+3}=(n+1) $L_{n+3} - L_{n+4} + 4$

=(n+1) $L_{(n+1)+2} - L_{(n+1)+3} + 4$

olur ki n=n+1 için de önerme doğru olur.

5.1.3 Sonuç : n ≥ 1 için L_{3n} çifttir.

İspat: Teorem 2.1.15 ten n ≥ 1 için F_{3n} çift olduğunu biliyoruz. Öte yandan, Önerme 2.2.4 (a) dan $L_n = F_n + 2F_{n-1}$ kullanırsak , $L_{3n} = F_{3n} + 2F_{3n-1}$ çift olduğunu kolayca görürüz.

5.1.4 Sonuç: S=<F_i, F_{i+2}, F_{i+3}>= <$F_i, F_i + F_{i+1}, F_i + 2F_{i+1}$> Fibonacci sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı g(S)= F_i ([$\frac{Fi-2}{2}$])+$F_{i+1}(F_i - 1)$

Burada [x]=x 'ten küçük ya da eşit olan en büyük tamsayıdır.

İspat : g (a,a+d,….,a+kd)= a ([$\frac{a-2}{k}$])+d (a-1) eşitliğinde a= F_i, d= F_{i+1} ve k= 2 alırsak istenen sonuç elde edilir.

5.1.5 Örnek :S=<F_5, F_7, F_8>=<5,13,21>

Fibonacci sayısal yarıgrubunu düşünelim.

S={0,5,10,13,15,18,20,21,23,25,26,28,30,31,33,34,35,36,38,→…}olup

Ap(S,5)={0,13,21,34,42} ve H(S) ={1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,14,16,17,19,22,24,27,29,32,37}

g(S)= 5([$\frac{5-2}{2}$])+8(5-1)=5.1+8.4=37 dir. Öte yandan

K(S)= {x∈Z \ S ;(37-x)∉5 }={ 8,29}≠∅ olduğundan simetrik değildir.

5.1.6 Sonuç: n ≥ 1 için S=<$F_{3n}, F_{3n}+2,\ 2F_{3n}+1$> Fibonacci sayısal yarıgrupları verilsin.O zaman ,

$$g(S)=\frac{(F_{3n})^2}{2}+F_{3n}-1$$

dir. Üstelik S simetriktir.

İspat: F_{3n}=x alalım.Teorem 2.1.15 den x çifttir ve x ≥ 2 dir. Öte yandan obeb(x,x+2)=2 olup 2x+1 ∈ $\langle \frac{x}{2}, \frac{x+2}{2} \rangle$ olur.Bu durumda (4)den g(S) = $\frac{a^2}{2}+a-1$ elde edilir ve yine [4] den simetrik olur.

5.1.7 Örnek: S=<$F_{3n}, F_{3n}+2,\ 2F_{3n}+1$> Fibonacci sayısal yarıgrubunu düşünelim.Yani n=2 için S=<8,10,17>={0,8,10,16,17,18,20,24,25,26,27,28,30,32,33,34,35,36,37,38,→…} alalım. O zaman , S nin Frobenius sayısı g(S) =$\frac{8^2}{2}+8-1=39$ olarak bulunur.

5.1.8 Sonuç : n, k ≥2 için S= $<L_n, L_{n+1}, L_{n+k}>=<L_n, L_{n+1}>$ dir.

ve g(S) =$L_n L_{n+1} - L_n - L_{n+1}$ dir.

İspat: Sonuç 2.2.11 de $L_{k+n} = F_k . L_{n+1} + F_{k-1} L_n$ dir. Bu durumda,

S= $<L_n, L_{n+1}, L_{n+k}>=<L_n, L_{n+1}>$ yazılır.

Böylece Teorem 3.2.2 den g(S) =$L_n L_{n+1} - L_n - L_{n+1}$ elde edilir.

5.1.9 Sonuç : n ≥ 3 için S= $<L_n, L_{n+2}, L_{n+3}>$ Lucas sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı,

$$g(S)=L_n\left(\left[\frac{L_n-2}{2}\right]\right)+L_{n+1}.(L_n-1)$$

dir.

İspat: $L_{n+3} = L_n + 2L_{n+1}$ dir. $L_{n+3} = L_{n+2} + L_{n+1} = L_n + L_{n+1} + L_{n+1} = L_n + 2L_{n+1}$ dir.

Böylece,

S= $<L_n, L_{n+2}, L_{n+3}> = <L_n, L_n + L_{n+1}, L_n + 2L_{n+1}>$ yazılır. $L_n = a$, d=L_{n+1} ve k=2

dersek, S = < a, a+d , a+2d > olur. Öte yandan [13]' ten de

$$g(S) = a\left(\left[\frac{a-2}{k}\right]\right)+d\,(a-1)$$

yazılır.Böylece ispat tamamlanır.

5.1.10 ÖRNEK : n=3 için S=< L_3, L_5, L_6 > = < 4,11,18 > sayısal yarıgrubunu ele alalım.O zaman S nin Frobenius sayısı,

$$g(S) = L_3\left(\left[\frac{L_3-2}{2}\right]\right)+L_4(L_3-1)=4(1)+7(4-1)=4+21=25$$ olarak bulunur.Gerçekten,

S=<4,11,18> = {0,4,8,11,12,15,16,18,19,20,22,23,24,26,27,→…} den de g(S)=25 çıkar.

5.1.11 Sonuç: n ≥ 1 için S= $<L_{3n}, L_{3n}+2, 2L_{3n}+1>$ Lucas sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman,

$$g(S)=\frac{(L_{3n})^2}{2}+L_{3n}-1$$

dir.

İspat: Önerme 2.2.4 ten L_{3n} çift olduğu bilinmektedir. L_{3n}=a dersek a ≥ 2 için çift sayı olup S=$<a, a+2, 2a+1>$ halini alır ki [4] ten g(S) = $\frac{a^2}{2}+a-1$ yazarız.

5.1.12 ÖRNEK: n=2 için S= $<L_6, L_6+2, 2L_6+1>$=<18,20,37> için g(S)=$\frac{18^2}{2}+18-1$=179 çıkar.

6. EK

Sayısal yarıgruplar konusunda yapılan çalışmalara ışık tutabileceğini ümit ettiğimiz ve bilgisayar ortamında bu yarıgrupların oluşturulmasında oldukça değerli olan bilgisayar yazılım programını [6] 'dan yararlanarak CD şeklinde ekte sunmayı uygun görmekteyiz.

KAYNAKLAR

[1] V.Barucci, D.E. Dobbs, and M.Fontana (Providence,1997) ;Maximality Properties in Numerical semigroups and Applications to One-Dimensional Analyticalle Irreducible Local Domains,Memoirs of the Amer.Math.Soc.,vol.598,A.Math.Soc.

[2] J.C Rosales (2000) ;Numerical semigroup with Apery sets of Unique Expression,Journal of Algebra 226,479-487.

[3] R.Fröberg C.Gotlieb and R.Haggkvist (1987); On Numerical Semigroups ,Semigroup Forum Vol .35,63-83.

[4] Sedat İLHAN (2006) ;On a class of telescopic numerical semigroups , international Journal of Contemporary Matematical Sciences, vol .1,no.2,81-83.

[5] F.Curtis(1990) ; On formulas for the frobenus number of a numerical semigroup , Math.Scand . 67,190-192.

[6] M.Madero and K.Herzinger (2005); Apery Sets of Numerical Semigroups ,Comm.in Algebra, 33 :3831-3838.

[7] Sedat İLHAN (2006); On Apery sets of symmetric numerical semigroups İnternational Mathematical Forum,vol.1,no.10,481-484.

[8] J.C.Rosales (2005) ; Fundamental gaps of numerical semigoups generated by two elements, Linear Algebra and Its Applications, 405, 200-208.

[9] Sun, Z.H. (2003) ; Congruences for Fibonacci numbers , pp 1-13.

[10] V Semirnov, M. (2004); A new Fibonacci-like sequence of composite numbers ,Journal of integers Sequences, vol 7, 1-3.

[11] Jastrzebska, M., Grabowski, A. (2004); Some properties of Fibonancci numbers, Formalized Mathematics vol 12 no .3,307-313.

[12] Jovanovic , R.(2001); the relations between the Fibonacci and the Lucas numbers,pp1-7.

[13] Marin, J.M., Alfonsin, J.L. R.Revuelta ,M. P(2006);On the Frobenius number of Fibonacci

Numerical Semigroups ,AMS Classification number , pp 1-10.

[14] Dubner H.,Keller ,W.(1999); New Fibonacci and Lucas primes Mathematics of computation vol . 68, n.225, pp 417-427.

[15]Wikipedia (2006); The Free Encyclopedia Fibonacci number , pp1-17.

[16] R. Knott (2008); Fibonacci and Golden Ratio Formulae pp 1-31.

[17] Prof.Dr. Hüseyin Altındiş (1999);Sayılar Teorisi ve Uygulamaları , Kayseri .

[18] İlhan S. and Kiper R.(2008); On the Frobenius number of some Lucas numerical semigroups, Acta Universitatis Apulensis no .16/2007(in press).

ÖZGEÇMİŞ

16.08.1983 yılında, Hatay ili İskenderun ilçesinde doğdum. İlkokul 1989-1994 yılları arasında İskenderun Demir-Çelik İlkokulu, ortaokulu 1994-1997'de İskenderun Abdulkadir Kocabaş İlköğretim okulunda, Liseyi 1997-2001'de İskenderun Süper Lisesi'nde tamamladım. 2001'de Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünü kazandım. 2005 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım.