T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR SAYISAL YARIGRUBUN PSEUDO-SİMETRİK OLABİLMESİ İÇİN GEREKLİ VE YETERLİ KOŞULLAR

Meral SÜER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
OCAK 2009

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR SAYISAL YARIGRUBUN PSEUDO-SİMETRİK OLABİLMESİ İÇİN GEREKLİ VE YETERLİ KOŞULLAR

Meral SÜER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN: Sedat İLHAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
OCAK 2009

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Meral SÜER tarafından yapılan "BİR SAYISAL YARIGRUBUN PSEUDO-SİMETRİK OLABİLMESİ İÇİN GEREKLİ VE YETERLİ KOŞULLAR " konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Yrd.Doç.Dr.	Sedat İLHAN (Danışman)
Üye :	Prof.Dr.	H.İlhan TUTALAR
Üye :	Prof.Dr.	İrfan AÇIKGÖZ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 26/01/2009

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

/ /2009

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

ÖZ

Bu çalışmada, $g(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla S nin Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere,

$$S = \langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle = \{0 = s_0, s_1, s_2, ..., s_{n-1}, s_n, ..., s_{n(S)} = g(S) + 1, \rightarrow ...\}$$

şeklinde verilen, özellikle indirgenme boyutu 3 olan bir sayısal yarıgrubun pseudo-simetrik olması için gerekli ve yeterli koşulları vermekteyiz.

ABSTRACT

In this study, we give the necessary and sufficient conditions for beeing pseudo-symmetric of the numerical semigroup S which is given as

$$S=\langle s_1,s_2,...,s_n\rangle=\{0=s_0,s_1,s_2,...,s_{n-1},s_n,...,s_{n(S)}=g(S)+1,\rightarrow...\}$$

and, especially, whose embedding dimension is 3, where $g(S)$ and $n(S)$ are Frobenius number and determinant number of S, respectivelly.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında, gerek yönlendirmesi gerekse harcadığı vakitleri için, her şeyden önemlisi gösterdiği ilgi ve yardımlarından dolayı, danışmanım sayın **Yrd.Doç. Dr. Sedat İLHAN**'a teşekkür ederim.

AMAÇ

Bu çalışma, verilen bir $S=\langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle$ sayısal yarıgrubunun özellikle üç elemanla üretilen bir sayısal yarıgrubun pseudo-simetrik olması için gerekli ve yeterli koşulları incelemeyi, bir sayısal yarıgrupta bilinen Frobenius ve Pseudo-Frobenus sayıları, Apery Kümesi, Boşluklar Kümesi ve tip dizisi gibi kavramların pseudo-simetrilik ile olan ilişkisinin araştırılmasını ve bu alanda çalışacak olan araştırmalara ışık tutmayı amaçlamaktadır.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

GİRİŞ

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sayısal yarıgruplarda, özellikle simetrik ve pseudo-simetrik sayısal yarıgruplarda daha önce yapılan çalışmalar yer almaktadır.

İkinci bölümde, sayısal yarıgruplar kavramında önemli bir rolü olan simetrililik ve pseudo-simetrililik, Frobenius ve Pseudo-Frobenius sayısı, Boşluklar kümesi, Apery kümesi, Belirteç sayısı ve Tip dizisi gibi kavramların tanımlarından ve bunlarla ilgili çok kullanılan teoremlerden bahsedilmektedir.

Üçüncü bölümde ise

$$S=\langle s_1,s_2,...,s_n\rangle=\left\{0=s_0,s_1,s_2,...,s_{n-1},s_n,...,s_{n(S)}=g(S)+1,\rightarrow...\right\}$$

şeklinde verilen, özellikle üç elemanla üretilen bir sayısal yarıgrubun pseudo-simetrik olması gerekli koşullar verilmektedir.

Dördüncü bölümde de

$$S=\langle s_1,s_2,...,s_n\rangle=\left\{0=s_0,s_1,s_2,...,s_{n-1},s_n,...,s_{n(S)}=g(S)+1,\rightarrow...\right\}$$

şeklinde verilen, özellikle üç elemanla üretilen bir sayısal yarıgrubun pseudo-simetrik olması için yeterli koşullar verilmektedir.

1. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Temelde bir sayısal yarıgrubun, sıfırı kapsayan ve pozitif tamsayıların sonlu lineer kombinasyonlarının alt kümesi olduğunu söyleyebiliriz. Bu anlamda karşılaşılan ilk problem, 1884'teki Slyvester Problemidir. (Bu problem; $(s_1, s_2) = 1$ olacak şekilde $s_1, s_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere, en büyük g tamsayısının $n_1 s_1 + n_2 s_2$ şeklinde bir lineer kombinasyon olarak yazılıp yazılamayacağı problemi olarak bilinir). Bununla birlikte, Slyvester yine aynı tarihte, $[0, g]$ aralığında olmamasına rağmen bir çok tamsayının s_1 ve s_2 pozitif sayılarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini göstermiştir[7].

Slyvester Probleminin bir genellemesi Frobenius tarafından verildiği Brauner'in 1942'deki " On a problem of partitions" adlı çalışmasından bilinmektedir. Yukarıdaki lineer kombinasyonlar ve Frobenius sayısı olarak bilinen g sayısı hakkında 1958-1978 yılları arasında bir çok bilim adamı çeşitli araştırmalar yapmıştır[7].

Ancak, Gilmer 1984 yılındaki çalışmasında bir sayısal yarıgrubun sonlu olarak türetilebileceğini gösterebilmiştir. Bununla birlikte, Fröberg ve ark.[7] 1987'deki çalışmalarında, bir sayısal yarıgrubun simetrik olmasını ve tipinin bulunmasını araştırmış ve daha sonraları Fransız matematikçinin kendi adını vereceği Apery kümesini

$$S(s) = \{t \in S : \ t - s \notin S, \ s \in S \setminus \{0\}\}$$

olarak tanımlamışlardır[7].

Bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısının bulunması güçlüğünü giderecek bazı formüller Curtis tarafından 1990 yılındaki çalışmasında verilmiştir[16]. Barucci ve ark. 1997’deki çalışmalarında sayısal yarıgruplar ve özelikle bunların tipleri konusunda önemli sonuçlar elde etmişlerdir[15]. Bununla birlikte, Morco D’anna 1998’ de sayısal yarıgrupları, tip dizileri yardımıyla elde etmiş ve sayısal yarıgrupların tip dizilerinden hareketle, onun simetrik ya da pseudo-simetrikliğini ele almıştır[2].

Rosales ve ark. 1996’da sayısal yarıgrupların Apery kümeleri ile pseudo-simetriklik arasındaki ilişkiyi incelemiştir[3].

Rosales ve ark. sayısal yarıgruplar konusunda 2000-2006 tarihleri arasındaki çeşitli çalışmaları bu alanda önemli bir yere sahip olmuştur[1, 8, 9, 12, 13, 14, 19].

Olivera’nın 2004’deki çalışmasında sayısal yarıgrupların simetrik ve pseudo-simetrik olması açısından değerli olmuştur[11]. Simetrik sayısal yarıgrupların özel bir sınıfı da S. İlhan tarafından 2006’daki çalışmasında yer almıştır[17].

Son olarak, Rosales, 2008’deki “ On Half of A Pseudo-symmetric Numerical Semigroups” adlı çalışmasının pseudo-simetrik sayısal yarıgruplar konusunda oldukça önemli bir rol oynadığını söyleyebiliriz[5].

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmanın esasını oluşturan ve tezin iyi anlaşılması için temel tanım ve teoremler yer almaktadır.

2.1 TANIM: İçinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem tanımlanmış olan tek işlemli cebirsel yapıya bir **yarıgrup** denir.

2.2 TANIM: $\langle S, * \rangle$ bir yarıgrup olsun. $T \subseteq S$ olmak üzere $\forall a, b \in T$ için $a * b \in T$ oluyor ise ***T* ye *S* nin bir alt yarıgrubu** denir.

2.3 TANIM: S bir yarıgrup ve $A \subset S$ olsun. A yı kapsayan S nin en küçük alt yarıgrubuna ***A* nın ürettiği yarıgrup** denir. Bu durumda A kümesine de S nin üreteçler kümesi denir ve $S = \langle A \rangle$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $s_1 < s_2 < ... < s_n$ olacak şekilde $A = \{s_1, s_2, ..., s_n\} \subset S$ alınırsa $S = \langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle$ yazılır. Eğer $S = \langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle$ olacak şekilde S nin $A = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ üreteç kümesinden daha küçük bir küme yoksa o zaman $A = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ kümesine **S nin minimal üreteç sistemi** denir.

2.4 TANIM: $\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayılar kümesi olmak üzere $S \subseteq \mathbb{N}$ verilsin. Eğer *S,* $\mathbb{N}$ deki toplama işlemine göre kapalı, birleşmeli ve $0 \in S$ oluyorsa S ye sayısal yarıgrup denir. S bir sayısal yarıgup olmak üzere; $s_1 < s_2 < ... < s_n$ olacak şekilde $s_1, s_2, ..., s_n \in S$ için

$$S = \langle s_1, s_2, ..., s_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i k_i : \ k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

olarak yazılır ve özellikle

$$"(s_1, s_2, ..., s_n) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus S \text{ } kümesi \ sonludur"$$

önermesi doğrudur[15].

2.5 ÖRNEK: $S=\langle 5,6,13\rangle=\{5k_1+6k_2+13k_3;\ \ k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}\}$

$$=\{0,5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow ...\}$$

şeklinde yazılır. Burada $"\rightarrow"$ 15 ten sonraki bütün tamsayıların S kümesinde olduğu anlamındadır.

2.6 ÖRNEK:

$$\begin{aligned} S=\langle 3,5,7\rangle &= \{3k_1+5k_2+7k_3;\ k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}\} \\ &= \{0,3,5,\rightarrow ...\} \end{aligned}$$

olup,

$$\mathbb{N}\setminus S=\{1,2,4\}\ \text{ sonludur } \Leftrightarrow\ (3,5,7)=1 \text{ dir.}$$

2.7 ÖRNEK:

$$\begin{aligned} S=\langle 4,6\rangle &= \{4k_1+6k_2;\ \ k_1,k_2\in\mathbb{N}\} \\ &= \{0,4,6,8,10,12,...\} \end{aligned}$$

olur.

$(4,6)\neq 1$ olduğundan $\mathbb{N}\setminus S$ sonlu değildir.

Bu çalışmamızda $(s_1,s_2,...,s_n)=1$ alacağız.

2.8 TANIM: *S* sayısal yarıgrubu $S=\langle s_1,s_2,...,s_n\rangle$ şeklinde verilsin. O zaman s_1 ve n sayılarına sırasıyla ***S* nin katlılığı** ve **indirgenme boyutu** denir ve sırasıyla $\mu(S)$ ve $\mathrm{e}(\mathrm{S})$ ile gösterilir

2.9 TANIM: *S* bir sayısal yarıgrup olmak üzere ***S* nin Frobenius sayısı** *S* ye ait olmayan en büyük tamsayı olarak tanımlanır ve $g(S)$ ile gösterilir. Yani

$$g(S)=\max\{x\in\mathbb{Z}:x\notin S\}$$

olarak ifade edilir.

Bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısını hesaplamak zordur. Ancak, özel bazı sayısal yarıgruplar için bunu kolayca hesaplamak mümkündür.

2.10 TEOREM: $S=\langle s_1,s_2\rangle$ şeklinde tanımlanan S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı;

$$g(S)=s_1s_2-s_1-s_2$$

şeklinde hesaplanır[7].

2.11 TEOREM: $S=\langle s_1,s_2,s_3\rangle$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir sayısal yarı grup olsun. Eğer,

$2<s_1<s_2<s_3$ için $2<k<(s_1-1)/2+1 \quad (k\in\mathbb{Z})$ ve $s_1-k<s_3/s_2<s_1-k+1$,

$s_2\equiv 1(\bmod s_1)$ ve $s_3\equiv s_1-k+1\ (\bmod s_1)$ alınırsa, o zaman S nin Frobenius sayısı,

$$g(S)=(k-2)s_2+s_3-s_1$$

olarak bulunur[16].

2.12 ÖRNEK:

$$S=\langle 7,8,33\rangle=\{0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,29,30,31,32,33,35,\rightarrow\ldots\}$$

sayısal yarıgrubu için $g(S)=34$ tür.

$2<7<8<33$ için $\quad 2<k<(7-1)/2+1 \quad$ ve $\quad 2<k<4\Rightarrow k=3$ alınır.

$$7-3<\frac{33}{8}<7-3+1,\quad \text{yani}$$

$$4<\frac{33}{8}<5$$

olup

$$8\equiv 1\ (\bmod 7) \quad \text{ve} \quad 33\equiv 7-3+1\ (\bmod 7), \qquad 33\equiv 5 \qquad (\bmod\ 7)$$

yazılır. Böylece, $g(S)=(k-2)s_2+s_3-s_1=(3-1)8+33-7=34$ bulunur.

2.13 TEOREM: $a > 2$ ve a çift tamsayı olmak üzere ;

$S = \langle\, a,\, a+2,\; 2a+1 \,\rangle$ şeklindeki sayısal yarıgruplar için $g(S)$ sayısı,

$$g(S) = \frac{a^2}{2} + a - 1$$

formülü ile elde edilir [17].

2.14 ÖRNEK: $S = \langle 6,8,13 \rangle = \{0,6,8,12,13,14,16,18,19,20,21,22,24,\rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubu için ,

$$g(S) = 36/2 + 6 - 1 = 23$$

olarak bulunur.

2.15 TANIM: S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $g(S)$ olsun.O zaman

$$n(S) = \#\left(\{0,1,2,...,g(S)\} \cap S\right)$$

sayısına **S nin belirteç sayısı** adı verilir.

2.16 NOT: $g(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla, S nin Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $S = \left\{0 = s_0, s_1, ..., s_{n-1}, s_n, ..., s_{n(S)} = g(S)+1, \rightarrow ...\right\}$ şeklinde verilsin. Burada $s_i < s_{i+1}$ olup "$\rightarrow$" , $g(S)+1$ sayısından büyük olan her tamsayının S ye ait olduğunu gösterir.

2.17 TANIM: S sayısal yarıgrup ve Frobenius sayısı $g(S)$ olsun. Eğer

$$\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S \text{ için } g(S) - x \in S$$

oluyor ise S ye **simetrik sayısal yarıgrup** adı verilir.

Öte yandan iki eleman ile üretilen her $S = \langle s_1, s_2 \rangle$ sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu bilinmektedir [16].

2.18 ÖRNEK:

$S = \langle 8,10,17 \rangle = \{0,8,10,16,17,18,20,24,25,26,27,28,30,32,33,34,35,36,37,38,40,\rightarrow ...\}$

sayısal yarıgrubu için,

$$g(S) = 64/2 + 8 - 1 = 39$$

olup $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $39 - x \in S$ olur. Yani, S simetrik sayısal yarıgruptur.

Ancak $S = \langle 5,6,13 \rangle = \{0,5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubunda $g(S) = 14$ olup $x = 5$ için $14 - 5 = 9 \notin S$ çıkar, yani S simetrik olmaz.

2.19 TANIM: S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. $g(S)$ çift ve $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere, eğer

$$g(S) - x \notin S \quad ve \quad x = g(S)/2$$

oluyorsa bir S sayısal yarıgrubu **pseudo- simetriktir** denir.

2.20 ÖRNEK: $S = \langle 5,6,13 \rangle = \{0,5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı $g(S) = 14$ tür. Bununla birlikte $x = 7 \in \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere,

$$14 - 7 = 7 \notin S \quad \text{ve} \quad x = 14/2 = 7$$

olduğundan S pseudo-simetrik bir sayısal yarıgruptur.

2.21 TANIM: S bir sayısal yarıgup ve onun Frobenius sayısı $g(S)$ olsun. Eğer $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $g(S) - x \notin S$ oluyor ise x elemanına **S nin kutup noktası** denir. S nin bütün kutup noktalarının kümesi ;

$$K(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : \; g(S) - x \notin S\}$$

ile gösterilir.

2.22 TEOREM: *S* sayısal yarıgrubunun simetrik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $K(S)=\varnothing$ olmasıdır [18].

2.23 ÖRNEK:

$$S=\langle 7,8,33\rangle=\{0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,29,30,31,32,33,35,\rightarrow ...\}$$

sayısal yarıgrubunda $g(S)=34$ ve

$$K(S)=\left\{x\in\mathbb{Z}\backslash S:(34-x)\notin S\right\}=\{25,17,9\}\neq\varnothing$$

olduğundan *S* sayısal yarıgrubu simetrik değildir. Ancak

$$S=\langle 4,6,9\rangle=\{0,4,6,8,9,10,12,\rightarrow ...\}$$

sayısal yarıgrubunda $g(S)=11$ ve S nin kutup noktalarının kümesi,

$$K(S)=\left\{x\in\mathbb{Z}\backslash S:(11-x)\notin S\right\}=\varnothing$$

olup *S* simetriktir.

2.24 TANIM: $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayılar kümesi ve *S* bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda $\mathbb{N}\backslash S$ kümesinin elemanlarına **S nin (gaps) boşlukları** denir. *S* nin bütün boşluklarının kümesi $H(S)$ ile gösterilir. Yani,

$$H(S)=\{x\in\mathbb{N}:x\notin S\}$$

olarak ifade edilir.

2.25 TEOREM: $S=\langle s_1,s_2\rangle$ şeklinde tanımlanan bir sayısal yarıgrup için,

$$\#\big(H(S)\big)=(s_1-1)(s_2-1)/2$$

ile hesaplanır [14].

2.26 ÖRNEK:

$$S=\langle 7,10\rangle=\{0,7,10,14,17,20,21,24,27,28,30,31,34,35,37,38,40,41,42,44,45,\\ 47,48,49,50,51,52,54,\rightarrow...\}$$

sayısal yarıgrubunda $g(S)=53$ olup

$$\#(H(S))=6.9/2=27$$

olarak hesaplanır. Gerçekten de

$$H(S)=\{1,2,3,4,5,6,8,9,11,12,13,15,16,18,19,22,23,25,26,29,32,33,36,39,43,46,53\}$$

şeklindedir.

2.27 TANIM: *S* bir sayısal yarıgrup ve $n\in S\setminus\{0\}$ olsun.

$$Ap(S,n)=\{s\in S:\ s-n\notin S\}$$

kümesine *S* nin n ye göre Apery kümesi denir. Yani *S* nin *n* ye göre Apery kümesinin elemanları $(\bmod n)$ e göre kalan sınıfların her birindeki en küçük pozitif tam sayılardan oluşmaktadır. Böylece,

$$\#(Ap(S,n))=n \text{ olup } g(S)=\max(Ap(S,n))-n$$

bağıntısı mevcuttur [12].

2.28 NOT: $S=\langle s_1,s_2,...,s_n\rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda,

$$Ap(S,s_1)=\{s\in S:\ s-s_1\notin S\}$$

kümesi, *S* nin $(\bmod s_1)$ e göre tam olarak bir elemanını kapsar. Özel olarak $Ap(S,s_1)$ kümesi, $i=1,2,...,s_1-1$ için $(\bmod s_1)$ ye göre i ye denk olan elemanlardan oluşur. Yani $Ap(S,s_1)$ kümesinin elemanlarını $w(i)$ ile gösteririz ki onlar $(\mathrm{mod}\, s_1)$ e göre i ye denktirler[12].

S sayısal yarıgrubunun Apery kümesi ile Boşluklarının kümesi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle verebiliriz.

2.29 TEOREM: $S=\langle s_1,s_2\rangle$ şeklinde ki bir S sayısal yarıgrubu için,

$$\#(H(S))=\frac{\left[\#(Ap(S,s_1))-1\right]\left[\#(Ap(S,s_2))-1\right]}{2}$$

ve

$$H(S)\cap Ap(S,s_1)=\varnothing \quad , \quad H(S)\cap Ap(S,s_2)=\varnothing$$

bağıntısı mevcuttur [17].

2.30 ÖRNEK: $S=\langle 3,5\rangle=\{0,3,5,6,8,\rightarrow ...\}$ olup $g(S)=3.5-3-5=7$ şeklindedir. Bununla birlikte,

$$Ap(S,3)=\{s\in S: s-3\notin S\}=\{0,5,10\}$$

$$Ap(S,5)=\{s\in S: s-5\notin S\}=\{0,3,6,9,12\}$$

ve

$$H(S)=\{1,2,4,7\}$$

olup,

$$4=\#(H(S))=\frac{(3-1)(5-1)}{2}$$

eşitliği sağlanır.

2.31 NOT: $S=\left\{0=s_0,s_1,...,s_{n-1},s_n,...,s_{n(S)}=g\left(S\right)+1,\rightarrow...\right\}$ bir sayısal yarıgrup, $g\left(S\right)$ ve $n\left(S\right)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, S_i ve $S\left(i\right)$ kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$0\le i\le n\left(S\right)=k$ için

$$S_i=\left\{x\in S: x\ge s_i\right\};$$
$$S\left(i\right)=\left\{x\in\mathbb{N}:\ x+S_i\subset S\right\}$$

Bu durumda aşağıdaki zinciri elde ederiz[2].

$$S_k\subset S_{k-1}\subset...\subset S_1\subset S\subset S\left(1\right)\subset...\subset S\left(k-1\right)\subset S\left(k\right)=\mathbb{N}$$

2.32 TANIM: $S=\left\{0=s_0,s_1,...,s_{n-1},s_n,...,s_{n(S)}=g\left(S\right)+1,\rightarrow...\right\}$ bir sayısal yarıgrup, $g\left(S\right)$ ve $n\left(S\right)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $t=t\left(S\right)=\#\left(S\left(1\right)\setminus S\right)$ sayısına **S sayısal yarıgrubunun tipi** denir

2.33 TANIM: $S=\left\{0=s_0,s_1,...,s_{n-1},s_n,...,s_{n(S)}=g\left(S\right)+1,\rightarrow...\right\}$ bir sayısal yarıgrup, $g\left(S\right)$ ve $n\left(S\right)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere, $1\le i\le n\left(S\right)$ için

$t_i=t_i\left(S\right)=\#\left(S\left(i\right)\setminus S\left(i-1\right)\right)$ sayılarından yararlanarak $\left\{t_1,t_2,...,t_{n(S)}\right\}$ kümesini elde ederiz. Bu kümeye de ***S*** **sayısal yarıgrubunun tip dizisi** adı verilir. Burada,

$$2\le r\le n\left(S\right)\quad \text{ve}\ t_1\ge t_r\ge 1$$

olarak tanımlanır[2].

2.34 ÖRNEK: $S=\langle 4,6,9\rangle=\{0,4,6,8,9,10,12,\rightarrow ...\}$ ve $g(S)=11$ şeklindedir.

Ayrıca,

$$S(0)=S_0=\{x\in S : x\geq s_0\}=S,$$

$$S_1=\{x\in S : x\geq s_1\}=\{4,6,8,9,10,12,\rightarrow ...\}$$

olup,

$$\begin{aligned} S(1)&=\{x\in\mathbb{N} : x+S_1\subset S\} \\ &=\{0,4,6,8,9,10,11,12,13,...\}\end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda S nin tipi

$$t_1=t=\#\left(S(1)\setminus S\right)=\#\left(\{11\}\right)=1$$

olarak bulunur. Böylece S nin tip dizisi de

$$\{1,1,1,1,1,1\}$$

şeklinde olur.

2.35 ÖRNEK: $S=\langle 5,6,11\rangle=\{0,5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow ...\}$ olup $g(S)=14$

şeklindedir. Bu durumda,

$$S(0)=S_0=\{x\in S : x\geq 0\}=S$$

$$S_1=\{x\in S : x\geq 5\}=\{5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow ...\}$$

ve

$$\begin{aligned} S(1)&=\{x\in\mathbb{N} : x+S_1\subset S\} \\ &=\{0,5,6,7,10,11,12,13,14,15,\rightarrow ...\}\end{aligned}$$

olur. Bununla birlikte,

$$t_1=t=\#\left(S(1)\setminus S\right)=\#\left(\{7,14\}\right)=2$$

$$S_2=\{x\in S : x\geq 6\}=\{6,10,11,12,13,15,\rightarrow ...\}$$

olur. Öte yandan,

$$S(2) = \{x \in \mathbb{N} : x + S_2 \subset S\}$$

$$= \{0, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \rightarrow ...\}$$

olup

$$t_2 = \#\left(S(2) \setminus S(1)\right) = \#\left(\{9\}\right) = 1$$

elde edilir. Böylece ,

$$t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$$

bulunur. Yani, S nin tip dizisi

$$\{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

şeklinde olur.

2.36 NOT: Simetrik ve pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun tip dizileri sırasıyla,

$$\{1, 1, ..., 1\} \text{ ve } \{2, 1, 1, ..., 1\}$$

şeklindedir.

2.37 TANIM: S sayısal yarıgrup ve d pozitif bir tamsayı olsun. O zaman $S/d = \{x \in \mathbb{N} : dx \in S\}$ kümesi de aynı zamanda bir sayısal yarıgruptur ve **S nin d ile bölüm kümesi** olarak adlandırılır. Üstelik $S \subseteq S/d$ olup $d = 1$ için $S/d = S$ yazılır.

2.38 ÖRNEK: $S = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow ...\}$ olsun. O zaman, $d = 2$ için S/d kümesi,

$$S/2 = \{x \in \mathbb{N} : 2x \in S\} = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \rightarrow ...\}$$

olarak bulunur.

2.39 TANIM: Negatif olmayan tam sayıların kümesi $\mathbb{N}$ ve S sayısal yarıgrup olmak üzere, $g = \#\left(\mathbb{N} \setminus S\right)$ sayısına **S nin türü (genus)** denir. Yani , $H\left(S\right)$ kümesinin eleman sayısına S nin türü (genus) adı verilir.

2.40 ÖRNEK: $S = \langle 3,5 \rangle = \{0,3,5,6,8,\rightarrow ...\}$ sayısal yarıgrubunu 4. türden olduğunu göstermek zor değildir:

$$H\left(S\right) = \{1,2,4,7\}.$$

2.41 TANIM: $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayılar kümesi, S bir sayısal yarıgrup ve $g\left(S\right)$ onun Frobenius sayısı olsun. Eğer $c-1 \notin S$ ve $c+\mathbb{N} \subseteq S$ olacak şekilde bir tek $c \in S$ varsa c öğesine **S sayısal yarıgrubunun kondüktörü** denir. Bir başka deyişle, $c = g\left(S\right)+1$ eşitliğini sağlayan c sayısına **S nin kondüktörü (iletici̇si)** denir.

2.42 ÖRNEK: $S = \langle 4,6,9 \rangle = \{0,4,6,8,9,10,12,\rightarrow ...\}$ ve $g\left(S\right) = 11$ şeklindedir. Bununla birlikte, $c-1 \notin S$ ve $c+\mathbb{N} \subseteq S$ olacak şekilde bir tek $c \in S$ vardır ve bu değer $c = 12$ olarak bulunur:

$$c+\mathbb{N} = 12+\mathbb{N} = \{c+x : x \in \mathbb{N}\} = \{12+x : x \in \mathbb{N}\} \subseteq S$$

2.43 ÖRNEK: $S = \langle 4,7,9 \rangle = \{0,4,7,8,9,11,\rightarrow ...\}$ ve $g\left(S\right) = 10$ şeklindedir. Öte yandan, $c-1 \notin S$ ve $c+\mathbb{N} \subseteq S$ olacak şekilde bir tek $c \in S$ vardır ve bu değer $c = 11$ olrak hesaplanır:

$$c+\mathbb{N} = 11+\mathbb{N} = \{c+x : x \in \mathbb{N}\} = \{11+x : x \in \mathbb{N}\} \subseteq S$$

2.44 TANIM: Bir S sayısal yarıgrubu, onu kapsayan iki sayısal yarıgrubun arakesiti olarak ifade edilemiyorsa bu durumda **S ye indirgenemez sayısal yarıgrup** denir.

2.45 NOT: *S* bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. O zaman

"*S* simetriktir $\Leftrightarrow$ *S* indirgenemez ve $g(S)$ tektir"

önermesi doğrudur[5] .

2.46 ÖRNEK: $S=\langle 7,8,25\rangle$ sayısal yarıgrubu indirgenemez ve $g(S)=34$ tür. Üstelik, S pseudo-simetriktir. Bununla birlikte, $S=\langle 6,11,15,20,25\rangle=\langle 5,6\rangle\cap\langle 3,11\rangle$ olduğundan indirgenemez değildir. Öte yandan, S simetrik olmaz.

Ancak, $S_1=\langle 5,6\rangle$ ve $S_2=\langle 3,11\rangle$ sayısal yarıgrupları simetrik ve $S_1,S_2\supseteq S$ bağıntısı mevcuttur.

2.47 TANIM: S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. Bu durumda,

$$N(S)=\{\ s\in S:\ s<g(S)\ \}$$

kümesine ***S* nin minimal temsilcisi** denir.

2.48 NOT: S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, onun Frobenius sayısı, boşluklarının kümesi ve minimal temsilcilerinin kümesi sırasıyla, $g(S)$, $H(S)$ ve $N(S)$ ile verilsin. O zaman,

$$\#\big(H(S)\big)+\#\big(N(S)\big)=g(S)+1$$

eşitliği mevcuttur. Ayrıca, $s\in N(S)$ iken

$$g(S)-s\in H(S)$$

olduğundan

$$\#\big(H(S)\big)\geq\#\big(N(S)\big)$$

şeklindedir[5]. Bununla birlikte,

$$n(S) = \#(N(S))$$

olduğu açıktır.

2.49 ÖRNEK: $S = \langle 4,6,9 \rangle = \{0,4,6,8,9,10,12,\rightarrow ...\}$ ve $g(S) = 11$ olur. Bununla birlikte,

$$H(S) = \{1,2,35,7,11\} \text{ ve } N(S) = \{s \in S : s < g(s) = 11\} = \{0,4,6,8,9,10\}$$

olup

$$\#(H(S)) + \#(N(S)) = 11 + 1$$

elde edilir. Öte yandan,

$$n(S) = \#(\{0,1,2,...,11\} \cap S) = \#(\{0,4,6,8,9,10\}) = \#(N(S))$$

yazılır.

2.50 TANIM: S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere,

$$\forall s \in S \setminus \{0\} \text{ için } x + s \in S$$

oluyorsa x tam sayısına **S nin Pseudo-Frobenius sayısı** denir ve S nin bütün pseudo-Frobenius sayılarının kümesi *Pg(S)* ile gösterilir. Yani

$$Pg(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : \ x + s \in S, \ \forall s \in S \setminus \{0\}\}$$

olarak ifade edilir. $\#(Pg(S))$ sayısına S nin tipi de denir.

2.51 ÖRNEK: $S = \langle 4,6,9 \rangle = \{0,4,6,8,9,10,12,\rightarrow ...\}$ ve $g(S) = 11$ olur.

O zaman, S nin bütün pseudo-Frobenius sayılarının kümesi;

$$Pg(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : x + s \in S, \ \forall s \in S \setminus \{0\}\} = \{11\}$$

olarak bulunur.

2.52 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup, $g(S)$ onun Frobenius sayısı ve S nin pseudo-Frobenius sayılarının kümesi *Pg(S)* olsun. O zaman aşağıdakiler mevcuttur:

(1) $g(S) = \max(Pg(S))$

(2) Eğer $x, y \in Pg(S)$ ve $x - y \in S$ ise $x = y$

şeklindedir[5].

2.53 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup olsun. Öte yandan, $g(S)$ ve $Pg(S)$ sırasıyla S nin Frobenius sayısı ve Pseudo Frobenius sayısı olarak verilsin. Buna göre, S sayısal yarıgrubunun simetrik olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$Pg(S) = \{g(S)\}$$

olmasıdır[5].

2.54 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup ve $t(S)$ onun tipi olsun. Bu durumda aşağıdakiler mevcuttur[5]:

(1) S simetriktir $\Leftrightarrow$ $t(S) = 1$

(2) S pseudo-simetriktir $\Leftrightarrow$ $t(S) = 2$

3. BİR SAYISAL YARIGRUBUN PSEUDO-SİMETRİK OLMASI İÇİN GEREKLİ KOŞULLAR

Bu bölümde, verilen bir sayısal yarıgrubun pseudo-simetrik olması için gerekli koşullar bulunmaktadır.

3.1 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. Eğer S pseudo-simetrik ise, o zaman $n \in S \setminus \{0\}$ için

$$\frac{g(S)}{2} + n \in Ap(S,n)$$

şeklindedir.

İSPAT: $\frac{g(S)}{2} \notin S$ olduğundan $\frac{g(S)}{2} + n \in S$ çıkar. O zaman

$$(\frac{g(S)}{2} + n) - n = \frac{g(S)}{2} \notin S$$

yazılabildiğinden,

$$\frac{g(S)}{2} + n \in Ap(S,n)$$

elde edilir.

3.2 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $g(S)$ çift olsun. S pseudo-simetrik ise o zaman $n \in S \setminus \{0\}$ olmak üzere;

$$Ap(S,n) = \{0 = w(1) < w(2) < \ldots < w(n-1) = g(S) + n\} \cup \left\{\frac{g(S)}{2} + n\right\}$$

ve her $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ için

$$w(i) + w(n-i) = w(n-1)$$

eşitlikleri mevcuttur[1].

İSPAT: S pseudo-simetrik sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. O zaman,

$$\frac{g(S)}{2}+n \in Ap(S,n) \text{ ve } \frac{g(S)}{2}+n < \max(Ap(S,n))$$

şeklindedir. Eğer $i \in \{1,...,n-1\}$ ise, o zaman

$$w(i)-n \notin S \quad \text{ve} \quad w(i)-n \neq \frac{g(S)}{2}$$

bulunur. Öte yandan,

$$g(S)-(w(i)-n) \in S$$

olduğundan

$$w(n-1)-w(i)=g(S)+n-w(i) \in S$$

yazarız. Bu durumda,

$$w(n-1) \in Ap(S,n)$$

olduğundan

$$w(n-1)-w(i) \in Ap(S,n)$$

sonucuna varırız. Ayrıca

$$w(n-1)-w(i) \neq \frac{g(S)}{2}+n$$

elde ederiz. Çünkü, aksi halde $w(i)=\frac{g(S)}{2}$ olur ki bu ise $w(i) \in S$ oluşu ile çelişir. Böylece

$$w(i)+w(n-i)=w(n-1)$$

eşitliğini buluruz.

3.3 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. S pseudo-simetrik ise o zaman $n \in S \setminus \{0\}$ için

$$\max \leq_S (Ap(S,n)) = \{g(S)/2 + n, g(S) + n\}$$

olarak yazılır[1].

3.4 ÖRNEK: $S = \langle 4,7,9 \rangle = \{0,4,7,8,9,11,\rightarrow ...\}$ ve $g(S) = 10$ olup

$$Ap(S,4) = \{s \in S : s - 4 \notin S\} = \{0,7,9,14\}$$

şeklindedir. Yani;

$$Ap(S,4) = \{0 = w(1) < w(2) < w(3)\} \cup \left\{\frac{10}{2} + 4\right\}$$

$$= \{0,7,14\} \cup \{9\}$$

olarak yazılır. Ayrıca, burada

$$\max \leq_S (Ap(S,4)) = \{9,14\}$$

şeklindedir.

3.5 ÖRNEK: $S = \langle 5,6,13 \rangle = \{0,5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow ...\}$ ve $g(S) = 14$ olup

$$Ap(S,5) = \{s \in S : s - 5 \notin S\} = \{0,6,12,13,19\}$$

$$= \{0 = w(1), w(2), w(3), w(4)\} \cup \{7 + 5\}$$

$$= \{0,6,13,19\} \cup \{12\}$$

ve

$$\max \leq_S (Ap(S,5)) = \{12,19\}$$

yazılır.

3.6 ÖNERME: $S=\langle n_1,n_2,n_3\rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. Her $i\in\{1,2,3\}$ için

$$c_i=\min\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\ xn_i\in\left\langle\{n_1,n_2,n_3\}\setminus\{n_i\}\right\rangle\right\}$$

sayıları tanımlansın. Eğer

$\{n_i,n_j,n_k\}=\{n_1,n_2,n_3\}$ ve $a,b\in\mathbb{N}$, $b<c_i$ olmak üzere $an_i=bn_j+n_k$

eşitliği varsa $a=c_i$ yazılır [1].

İSPAT: $0\le r<c$ için,

$$\mathrm{a}=\mathrm{qc_i}+\mathrm{r}$$

olacak şekilde $q,r\in\mathbb{N}$ alalım. c_i nin tanımından öyle $\lambda,\mu\in\mathbb{N}$ vardır ki

$$c_in_i=\lambda n_j+\mu n_k$$

yazılır. Bu durumda $an_i=bn_j+n_k$ iken

$$q\lambda n_j+q\mu n_k+rn_i=bn_j+n_k$$

sonucuna varırız. Eğer $\mu=0$ ise, o zaman

$$q\lambda n_j+rn_i=bn_j+n_k$$

yazarız. Bu durumda

$$b>q\lambda$$

yazılır. Böylece

$$r<c_i \text{ iken, } rn_i=(b-q\lambda)n_j+n_k$$

bulunur. Bu ise c_i tanımıyla çelişir. Bu yüzden $\mu\neq 0$ olmalıdır.

Eğer $q=0$ ise o zaman benzer bir çelişki buluruz. Böylece,

$$q\mu>0 \text{ ve } bn_j=q\lambda n_j+(q\mu-1)n_k+rn_i$$

elde ederiz. Buradan

$$b \geq q\lambda \text{ ve } (b - q\lambda)n_j = (q\mu - 1)n_k + rn_i$$

yazarız. Öte yandan, hipotezden $b < c_j$ olup

$$b - q\lambda = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu, $r = 0$ ve $q\mu = 1$ olduğu anlamına gelir. Böylece,

$$\mu = q = 1 \text{ olup } a = c_i$$

sonucuna varırız.

3.7 SONUÇ: S pseudo-simetrik bir sayısal yarıgrup ve $e(S)$, S nin indirgenme boyutu olsun. S nin katlılığı $\mu(S) \geq 4$ ise o zaman

$$e(S) \leq \mu(S) - 1$$

şeklindedir.

İSPAT: İspat için $e(S) \neq \mu(S)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $e(S) = \mu(S)$ ise o zaman S, $\{\mu(S), n_1, ..., n_{\mu(S)-1}\}$ ile minimal olarak üretilir. Bundan dolayı

$$Ap(S,n) = \{0 < n_2 < ... < n_{\mu(S)-1}\} \cup \left\{ n_1 = \frac{g(S)}{2} + e(S) \right\}$$

olarak yazılır.

$$\mu(S) - 1 \geq 3 \quad \text{olduğundan} \quad n_1 \neq n_2 \neq n_{\mu(S)-1}$$

yazılır. Buradan

$$n_{\mu(S)-1} - n_2 \in S$$

sonucuna varırız ki bu $\{\mu(S), n_1, ..., n_{\mu(S)-1}\}$ kümesinin S için bir minimal üreteçler sistemi olduğu gerçeği ile çelişir.

3.8 ÖNERME: $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. Öte yandan, her $i \in \{1,2,3\}$ için

$$c_i = \min\left\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \ \ xn_i \in \left\langle \{n_1, n_2, n_3\} \setminus \{n_i\} \right\rangle \right\}$$

sayıları tanımlansın.

Eğer S pseudo-simetrik ise o zaman

$$g(S)/2 + n_1 \in \{(c_2 - 1)n_2, (c_3 - 1)n_3\}$$

şeklindedir[1].

3.9 ÖNERME: $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. Bununla birlikte, her $i \in \{1,2,3\}$ için

$$c_i = \min\left\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \ \ xn_i \in \left\langle \{n_1, n_2, n_3\} \setminus \{n_i\} \right\rangle \right\}$$

sayıları tanımlansın. Eğer S pseudo-simetrik ve $g(S)/2 + n_1 = (c_2 - 1)n_2$ ise o zaman

$$Ap(S, n_1) = \{an_2 + bn_3 : \ 0 \le a \le c_2 - 2, \ 0 \le b \le c_3 - 1\} \cup \{(c_2 - 1)n_2\}$$

şeklindedir[1].

İSPAT: $c_3 n_3 \notin Ap(S, n_1)$ ve 3.2 Önerme'yi kullanarak, $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$an_2 + bn_3 \in Ap(S, n_1) \setminus \{g(S)/2 + n_1\}$$

ise o zaman $a \le c_2 - 1$ ve $b \le c_3 - 1$ bulunur.

Yani ispatın devamında, $g(S) + n_1 = (c_2 - 2)n_2 + (c_3 - 1)n_3$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$(\mathrm{c}_2 - 2)\mathrm{n}_2, (\mathrm{c}_3 - 1)\mathrm{n}_3 \in \mathrm{Ap}(\mathrm{S}, \mathrm{n}_1) \setminus \{\mathrm{g}(\mathrm{S})/2 + \mathrm{n}_1\}$$

alacak olursak, 3.2 Önerme ve 3.3 Önerme'den, $\exists a,b\in\mathbb{N}$ için $a\le c_2-2$ ve $b\le c_3-1$ olmak üzere,

$$g(S)+n_1=(c_3-1)n_3+an_2=(c_2-2)n_2+bn_3$$

elde ederiz. Öte yandan,

$$(c_3-1)n_3+an_2=(c_2-2)n_2+bn_3$$

eşitliğinden, $a=c_2-2$ ve $b=c_3-1$ sonucunu çıkarırız.

3.10 ÖNERME: $S=\langle n_1,n_2,n_3\rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. Ayrıca, her $i\in\{1,2,3\}$ için

$$c_i=\min\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\quad xn_i\in\left\langle\{n_1,n_2,n_3\}\setminus\{n_i\}\right\rangle\right\}$$

sayıları tanımlansın. Eğer *S* pseudo-simetrik ve $g(S)/2+n_1=(c_2-1)n_2$ ise o zaman aşağıdakiler mevcuttur

(1) $c_1n_1=(c_2-1)n_2+n_3$
(2) $c_2n_2=(c_3-1)n_3+n_1$
(3) $c_3n_3=(c_1-1)n_1+n_2$

İSPAT: 3.3 Önerme'den $(c_2-1)n_2\in Ap(S,n_1)$ olduğundan dolayı

$$(c_1-1)n_1+n_3\notin Ap(S,n_1)$$

yazılır. Böylece, $a\neq 0$ olmak üzere öyle $a,b,c\in\mathbb{N}$ vardır ki

$$(c_2-1)n_2+n_3=an_1+bn_2+cn_3$$

bulunur. 3.9 Önerme'den $(c_2-2)n_2+n_3\in Ap(S,n_1)$ olduğundan

$$b=0\quad\text{ve}\quad c=0$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$an_1 = (c_2 - 1)n_2 + n_3$$

yazarız. Bu durumda 3.6 Önerme'yi kullanarak

$$a = c_1$$

sonucunu elde ederiz. Yani (1) ispatlarız.

Öte yandan $g(S)/2 + n_3 \neq g(S)/2 + n_1 = (c_2 - 1)n_2$ iken 3.8 Önerme'yi göz önüne alarak,

$$g(S)/2 + n_3 = (c_1 - 1)n_1$$

olduğunu buluruz. Yukarıdaki düşünceyle,

$$c_3 n_3 = (c_1 - 1)n_1 + n_2$$

eşitliğini buluruz. Son olarak, $g(S)/2 + n_2 = (c_3 - 1)n_3$ eşitliğinden de

$$c_2 n_2 = (c_3 - 1)n_3 + n_1$$

sonucunu elde ederiz.

3.11 SONUÇ: $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. Eğer S pseudo-simerik ise n_1, n_2 ve n_3 sayıları ikişer ikişer aralarında asaldır.

İSPAT: S bir sayısal yarıgrup ve $obeb\{n_1, n_2, n_3\} = 1$ olduğundan 3.10 Önerme'nin (1) halinden

$$n_3 = c_1 n_1 - (c_2 - 1)n_2$$

yazılır. Böylece,

$$obeb\{n_1, n_2\} = obeb\{n_1, n_2, n_3\} = 1$$

bulunur. Benzer şekilde, 3.10 Önerme'nin (2) ve (3) eşitliklerini göz önüne alarak, $obeb\{n_1, n_3\}$ ve $obeb\{n_2, n_3\}$ için benzer durumun söz konusu olduğu görülür.

3.12 SONUÇ: $S=\langle n_1,n_2,n_3\rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. Eğer S pseudo-simetrik ise o zaman öyle $a,b,c\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ sayıları vardır ki

$$\{\ c(b-1)+1,\ a(c-1)+1,\quad b(a-1)+1\ \}$$

kümesi S nin minimal üreteç sistemidir.

İSPAT: $\{n_1,n_2,n_3\}$, S nin minimal üreteç sistemi olsun. O zaman,

$$\#\left(Ap(S,n_1)\right)=n_1$$

olup, 3.9 Önerme'den

$$n_1=c_3(c_2-1)+1$$

bulunur. Benzer şekilde, $n_2=c_1(c_3-1)+1$ *ve* $n_3=c_2(c_1-1)+1$ olduğunu elde edebiliriz.

3.13 S ONUÇ: $\mathrm{S}=\langle \mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\mathrm{n}_3\rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup olmak üzere, her $i\in\{1,2,3\}$ için

$$c_i=\min\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\quad xn_i\in\left\langle\{n_1,n_2,n_3\}\setminus\{n_i\}\right\rangle\right\}$$

sayıları verilsin. Eğer S pseudo-simetrik yarıgrup ise, o zaman

$$g(S)=2(c_1-1)(c_2-1)(c_3-1)-2$$

şeklindedir.

İSPAT: 3.9 Önerme'yi göz önüne alarak,

$$g(S)+n_1=(c_3-1)n_3+(c_2-2)n_2$$

yazarız. Böylece, 3.12 Sonuç'tan,

$$\begin{aligned}(c_3-1)n_3+(c_2-2)n_2-n_1 &= (c_3-1)\big(c_2(c_1-1)+1\big)+(c_2-2)\big(c_1(c_3-1)+1\big)-\big(c_3(c_2-1)+1\big)\\ &= 2(c_1-1)(c_2-1)(c_3-1)-2\end{aligned}$$

elde ederiz.

3.14 ÖRNEK: $S=\langle 5,6,13\rangle=\{0,5,6,10,11,12,13,15,\to\ldots\}$ ve $g(S)=14$ olan S sayısal yarıgrubunun 2.20 Örnek'ten pseudo-simetrik olduğunu biliyoruz. Öte yandan, $i\in\{1,2,3\}$ için

$$c_i=\min\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \ xn_i\in\left\langle\{n_1,n_2,n_3\}\setminus\{n_i\}\right\rangle\right\}$$

eşitliğini kullanarak,

$$c_1=\min\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \ x.5\in\left\langle\{5,6,13\}\setminus\{5\}\right\rangle\right\}=5$$

$$c_2=\min\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \ x.6\in\left\langle\{5,6,13\}\setminus\{6\}\right\rangle\right\}=3$$

$$c_3=\min\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \ x.13\in\left\langle\{5,6,13\}\setminus\{13\}\right\rangle\right\}=2$$

tam sayıları için

$$g(S)/2+n_1\in\{(c_2-1)n_2,(c_3-1)n_3\}$$

buluruz. Yani,

$$14/2+5\in\{(3-1).6,(2-1)13\}$$

olup örneğimiz 3.8 Önerme'yi doğrular. Bununla birlikte,

S pseudo-simetrik ve $g(S)/2+n_1=(c_2-1)n_2$ yani,

$$14/2+5=(3-1).6=12$$

olduğundan,

$$Ap(S,5)=\{6a+13b:\ 0\le a\le 3-2,\ 0\le b\le 2-1\}\cup\{(3-1).6\}$$

şeklindedir. Yani,

$$Ap(S,5)=\{0,13,6,19\}\cup\{12\}=\{0,6,12,13,19\}$$

olup örneğimiz 3.9 Önerme'yi doğrular. Üstelik,

$$\begin{array}{lcl} (1)\ c_1n_1=(c_2-1)n_2+n_3 & & (1)\ \ 5.5=(3-1).6+13=25 \\ (2)\ c_2n_2=(c_3-1)n_3+n_1 & \text{için} & (2)\ \ 3.6=(2-1)13+5=18 \\ (3)\ c_3n_3=(c_1-1)n_1+n_2 & & (3)\ \ 2.13=(5-1).5+6=26 \end{array}$$

olduğundan örneğimiz 3.10 Önerme'yi doğrular. Son olarak, S pseudo-simetrik olduğu için

$$g(S)=2(c_1-1)(c_2-1)(c_3-1)-2$$

şeklindedir. Çünkü,

$$g(S)=2(5-1)(3-1)(2-1)-2=16-2=14$$

olarak bulunur. Bu durumda örneğimiz 3.13 Sonuç'u da doğrular.

3.15 TEOREM: $S=\langle n_1,n_2,n_3\rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup ve her $i\in\{1,2,3\}$ için

$$c_i=\min\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\ \ xn_i\in\left\langle\{n_1,n_2,n_3\}\setminus\{n_i\}\right\rangle\right\}$$

olsun. Eğer S pseudo simetrik ise

$$\left\{\frac{(n_1-n_2+n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}}{2n_1},\right.$$

$$\frac{(n_1+n_2-n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}}{2n_2},$$

$$\left.\frac{(-n_1+n_2+n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}}{2n_3}\right\}\subset\mathbb{N}$$

şeklindedir[1] .

İSPAT: *a,b,c* bilinmeyenleri ile

$$\begin{cases} n_1 = c(b-1)+1 \\ n_2 = a(c-1)+1 \\ n_3 = b(a-1)+1 \end{cases}$$

eşitlik sistemini göz önüne alalım. Ayrıca

$$\Delta = (n_1+n_2+n_3)^2 - 4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)$$

olarak belirleyelim. Yukarıdaki sistemin çözümü

$$(a,b,c) = \left(\frac{(n_1-n_2+n_3)-\sqrt{\Delta}}{2n_1}, \frac{(n_1+n_2-n_3)-\sqrt{\Delta}}{2n_2}, \frac{(-n_1+n_2+n_3)-\sqrt{\Delta}}{2n_3} \right)$$

olup

$$(a,b,c) = \left(\frac{(n_1-n_2+n_3)+\sqrt{\Delta}}{2n_1}, \frac{(n_1+n_2-n_3)-\sqrt{\Delta}}{2n_2}, \frac{(-n_1+n_2+n_3)-\sqrt{\Delta}}{2n_3} \right)$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \sqrt{(-n_1+n_2+n_3)^2 + 4(n_1-1)n_2n_3} > -n_1+n_2+n_3 \\ \sqrt{\Delta} &= \sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2 + 4n_1(n_2-1)n_3} > n_1-n_2+n_3 \\ \sqrt{\Delta} &= \sqrt{(n_1+n_2-n_3)^2 + 4n_1n_2(n_3-1)} > n_1+n_2-n_3 \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim.

Böylece, bu çözümlerin hepsi reel sayılar olup bunlar, tek pozitif çözüm olan a,b,c sayılarının ikinci seçimidir. Eğer S pseudo-simetrik ise, o zaman 3.12 Sonuç'tan, yukarıdaki denklem sistemi negatif olmayan bir tamsayı çözümüne sahiptir.

3.16 NOT: 3.15 Teorem'de verilenlere göre

$$g(S)=-(n_1+n_2+n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}\ ,$$

ve

$$c_1=\frac{(n_1-n_2+n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}}{2n_1},$$

$$c_2=\frac{(n_1+n_2-n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}}{2n_2},$$

$$c_3=\frac{(-n_1+n_2+n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}}{2n_3}$$

olarak yazılır.

3.17 TEOREM: $abc\geq 2$ olacak şekilde öyle *a, b, c* pozitif tamsayıları vardır ki $S=\langle s_1,s_2,s_3\rangle$ pseudo-simetrik ise o zaman,

$$s_1=1+ab+b\,,\quad s_2=1+bc+c\,,\quad s_3=1+ca+a$$

ile verilir[4] .

3.18 ÖNERME: *S* sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $g(S)$ çift olsun. Eğer S pseudo-simetrik ise o zaman

$$Pg(S)=\{g(S)/2,g(S)\}$$

olarak yazılır[5].

3.19 ÖNERME: *S* sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. Eğer *S* pseudo-simetrik ise o zaman $x\in\mathbb{Z}\setminus S$ için

$$\text{ya}\quad g(S)-x\in S\qquad\text{ya da}\quad x=g(S)/2$$

şeklindedir [5].

3.20 ÖNERME: S sayısal yarıgrup ve $H(S)$ ile $N(S)$ sırasıyla S nin boşlukları ve minimal temsilcilerinin kümesi olsun. Eğer S pseudo-simetrik ise o zaman,

$$\#(H(S)) = \#(N(S)) + 1$$

eşitliği mevcuttur[5].

3.21 ÖRNEK: $S = \langle 5,6,13 \rangle = \{0,5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow ...\}$ ve $g(S) = 14$ olup,

$$Pg(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : \quad x + s \in S, \quad \forall s \in S \setminus \{0\}\}$$
$$= \{7,14\}$$

olarak bulunur. Bununla birlikte, $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için

ya $(14 - x) \in S$ ya da $x = 7$

olduğu açıktır. Öte yandan S nin boşluklarının kümesi $H(S)$,

$$H(S) = \{1,2,3,4,7,8,9,14\}$$

ve S nin minimal temsilcisi

$$N(S) = \{s \in S : s < 14\} = \{0,5,6,10,11,12,13\}$$

olup,

$$\#(H(S)) = \#(N(S)) + 1$$

eşitliğini kolayca elde edebiliriz.

3.22 SONUÇ: S sayısal yarıgrubu pseudo-simetrik olsun. O zaman aşağıdakiler mevcuttur[5] :

(1) *S/2* simetriktir ancak ve ancak $g(S)$, 4 ün bir katı değildir,

(2) *S/2* pseudo-simetriktir ancak ve ancak $g(S)$, 4 ün bir katıdır.

3.23 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ ile $N(S)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve minimal temsilcilerinin kümesi olsun. S pseudo-simetrik ise o zaman

$$\#\left(N(S)\right) = g(S)/2$$

şeklindedir [5] .

3.24 ÖNERME: Tek sayı kondüktörlü bir S sayısal yarıgrubu pseudo-simetrik ise o zaman $(c-1)/2$ den farklı negatif olmayan herhangi bir i tamsayısı için,

$$i \in H(S) \quad \text{iken} \quad c-1-i \notin H(S)$$

şeklindedir [6] .

3.25 ÖNERME: S pseudo-simetrik bir sayısal yarıgrup, kondüktörü c ve $n \in S \setminus \{0\}$ olsun. O zaman $n + (c-1)/2$ sayısından farklı herhangi bir $s \in Ap(S,n)$ için,

$$n + c - 1 - s \in Ap(S,n)$$

şeklindedir.

İSPAT: $n + c - 1 - s - n = c - 1 - s \notin S$ yazılır. Aksi halde $c - s \in S$ olur. Böylece

$$n + c - 1 - s \in Ap(S,n)$$

elde edilir.

3.26 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup $g(S)$, $e(S)$, $\mu(S)$ sırasıyla S nin Frobenius sayısı, gömme boyutu ve katılığı olsun. O zaman

S pseudo-simetrik, $e(S) = 3$ ve $\mu(S) = 4$ ise $x \geq 3$ ve x tek tamsayı olmak üzere,

$$S = \langle\ 4,\ \ x+2,\ \ x+4\ \rangle$$

şeklinde olur.

İSPAT: Eğer $e(S)=3$ ve $\mu(S)=4$ ise o zaman $\{4,n_1,n_2\}$ kümesi S için minimal üreteçler sistemidir. 3.1 Önerme'den $\dfrac{g(S)}{2}+4\in Ap(S,4)$ olduğunu biliyoruz. O zaman, iki durum söz konusudur:

(1) Eğer $\dfrac{g(S)}{2}+4$ bir minimal üreteç ise 3.2 Önerme'den ,

$$Ap(S,4)=\left\{0,n_1=\frac{g(S)}{2}+4,n_2,2n_2=g(S)+4\right\}$$

olduğunu çıkarabiliriz. Eğer, $x=\dfrac{g(S)}{2}$ alırsak, o zaman $n_1=x+4$ ve $n_2=x+2$ olur. Öte yandan $g(S)\notin S$ olduğundan, x tektir.

(2) Eğer $\dfrac{g(S)}{2}+4$ bir minimal üreteç değil ise o zaman

$$Ap(S,4)=\left\{0,n_1,n_2,\frac{g(S)}{2}+4\right\}$$

şeklindedir. Bu yüzden $g(S)+4=n_1$ ya da $g(S)+4=n_2$ olur. $g(S)+4=n_1$ olduğunu farz edelim. Bu durumda 3.2 Önerme'den $n_1-n_2\in S$ sonucunu çıkarırız ki bu $\{4,n_1,n_2\}$ nin minimal üreteçler sistemi olduğu ile çelişir.

4. BİR SAYISAL YARIGRUBUN PSEUDO-SİMETRİK OLMASI İÇİN YETERLİ KOŞULLAR

Bu bölümde, bir sayısal yarıgrubun pseudo-simetrik olması için yeterli koşullar incelenmektedir.

4.1 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. O zaman $n \in S \setminus \{0\}$ olmak üzere, her $i \in \{1,2,...,n-1\}$ için

$$w(i)+w(n-i)=w(n-1)$$

ve

$$Ap(S,n)=\{0=w(1)<w(2)<...<w(n-1)=g(s)+n\} \cup \left\{\frac{g(S)}{2}+n\right\}$$

ise S pseudo-simetriktir.

İSPAT: $x \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x \neq \frac{g(S)}{2}$ ve $x \notin S$ olsun. $g(S)-x \in S$ olduğunu gösterelim. $w \equiv x \pmod n$ olacak şekilde $w \in Ap(S,n)$ alalım. O zaman $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olmak üzere, $x = w - kn$ sayısı için aşağıdaki iki durum söz konusudur:

(1) Eğer $w=\frac{g(S)}{2}+n$ ise , o zaman

$$g(S)-x=g(S)-\left(\frac{g(S)}{2}+n-kn\right)=\frac{g(S)}{2}+(k-1)n$$

olur. Ayrıca, $x \neq \frac{g(S)}{2}$ olması $k \neq 1$ demektir ki bu durumda $k \geq 2$ eşitsizliği elde ederiz. Buradan, $g(S)-x \in S$ olduğunu gösterebiliriz.

(2) Eğer $w \neq \frac{g(S)}{2} + n$ ise , o zaman hipotezden $w(n-1) - w \in S$ olduğu için

$$g(S) - x = g(S) - (w - kn) = g(S) + n - w + (k-1)n = w(n-1) - w + (k-1)n \in S$$

elde ederiz.

4.2 ÖNERME: *S* bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. Eğer $n \in S \setminus \{0\}$ için

$\max \leq_S (Ap(S,n)) = \{g(S)/2 + n, g(S) + n\}$ ise S pseudo-simetriktir[1] .

4.3 TEOREM: $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. Ayrıca, her $i \in \{1,2,3\}$ için

$$c_i = \min\left\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \ xn_i \in \left\langle \{n_1, n_2, n_3\} \setminus \{n_i\} \right\rangle \right\}$$

sayıları tanımlansın. Eğer,

$$c_1 n_1 = (c_2 - 1) n_2 + n_3, \quad c_2 n_2 = (c_3 - 1) n_3 + n_1 \qquad ve \ \ c_3 n_3 = (c_1 - 1) n_1 + n_2$$

eşitlikleri varsa o zaman S pseudo-simetriktir.

İSPAT:

$$2((c_2 - 1) n_2 - n_1) = (c_3 - 1) n_3 + (c_2 - 2) n_2 - n_1$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun yerine

$$(2c_2 - 2) n_2 = (c_3 - 1) n_3 + (c_2 - 2) n_2 + n_1$$

eşitliğini göstermek ispatı bitirir:

$$(2c_2 - 2) n_2 = (c_2 - 2) n_2 + c_2 n_2 = (c_2 - 2) n_2 + (c_3 - 1) n_3 + n_1$$

elde edilir.

4.4 TEOREM: $(c(b-1)+1, a(c-1)+1)=1$ olacak şekilde $a,b,c\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ verilsin. O zaman

$$S=\langle c(b-1)+1,\ a(c-1)+1,\ \ b(a-1)+1\rangle$$

sayısal yarıgrubu pseudo-simetriktir ve

$$g(S)=2(a-1)(b-1)(c-1)-2$$

şeklindedir.

İSPAT: $n_1=c(b-1)+1,\ \ n_2=(c-1)a+1\ \ ve\ \ n_3=b(a-1)+1$ olsun. Bu durumda $(n_1,n_2)=1$ olduğunda S bir sayısal yarıgrup olur. Öte yandan,

$$an_1=(b-1)n_2+n_3,\ bn_2=(c-1)n_3+n_1\ \ ve\ \ cn_3=(a-1)n_1+n_2$$

olduğunu göstermek zor değil. Bununla birlikte,

$$(n_1,n_2)=(n_2,n_3)=(n_1,n_3)=1$$

oldukları göz önüne alınarak $c_1=a,\ c_2=b\ \ ve\ c_3=c$ olduğu ispatlanırsa o zaman $\{n_1,n_2,n_3\}$, S nin minimal üreteçler sistemi olur:

Farz edelim ki $0<x<a\ \ olacak\ şekilde\ x\in\mathbb{N}$ ve $\exists y,z\in\mathbb{N}\ \ için\ \ xn_1=yn_2+zn_3$ varolsun. Bu durumda, $n_1=bn_2-(c-1)n_3$ iken $xn_1=xbn_2-x(c-1)n_3$ eşitliğini elde ederiz. Bu nedenle,

$$yn_2+zn_3=xbn_2-x(c-1)n_3$$

olur ve böylece

$$(xb-y)n_2=(z+x(c-1))n_3$$

yazılır. Öte yandan, $(n_1,n_2)=1$ olduğundan bu son eşitlik bazı pozitif tam sayıları için

$$xb - y = kn_3$$

anlamına gelir ($xb - y \neq 0$ şeklindedir. Çünkü, aksi halde $z = -x(c-1)$ olur ki bu imkansızdır). Buradan, $xb \geq n_3$ yazılır ve sonuç olarak

$$(a-1)b \geq n_3$$

bulunur. Bu da $n_3 = (a-1)b + 1$ ile çelişir. Yani, $a = c_1$ olduğu sonucuna varırız. Benzer şekilde, $c_2 = b$ *ve* $c_3 = c$ olduklarını elde edilebiliriz.

4.5 ÖRNEK: 4.4 Teorem'de $a = 3,\quad b = 4,\quad c = 5 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ alınırsa, $(16,13) = 1$ çıkar ve

$$S = \langle 9,13,16 \rangle = \{0,9,13,16,18,22,25,26,27,29,31,32,34,35,36,38,39,\\ 40,41,42,43,44,45,47,\rightarrow ...\}$$

sayısal yarıgrubu pseudo-simetrik olup,

$$g(S) = 2(3-1)(4-1)(5-1) - 2 = 46$$

bulunur.

4.6 TEOREM: $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ bir sayısal yarıgrup ve

$$\left\{ \frac{(n_1 - n_2 + n_3) + \sqrt{(n_1 + n_2 + n_3)^2 - 4(n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3 - n_1n_2n_3)}}{2n_1}, \right.$$

$$\frac{(n_1 + n_2 - n_3) + \sqrt{(n_1 + n_2 + n_3)^2 - 4(n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3 - n_1n_2n_3)}}{2n_2},$$

$$\left. \frac{(-n_1 + n_2 + n_3) + \sqrt{(n_1 + n_2 + n_3)^2 - 4(n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3 - n_1n_2n_3)}}{2n_3} \right\} \subset \mathbb{N}$$

oluyorsa S pseudo-simetriktir

İSPAT: a,b,c bilinmeyenleri ile

$$\begin{cases} n_1 = c(b-1)+1, \\ n_2 = (c-1)a+1, \\ n_3 = b(a-1)+1, \end{cases}$$

Eşitlik sistemini göz önüne alalım.

$\Delta = (n_1+n_2+n_3)^2 - 4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)$ olarak belirleyelim.

Yukarıdaki sistemin çözümü

$$(a,b,c) = \left(\frac{\left(n_1-n_2+n_3-\sqrt{\Delta}\right)}{2n_1}, \frac{(n_1+n_2-n_3)-\sqrt{\Delta}}{2n_2}, \frac{(-n_1+n_2+n_3)-\sqrt{\Delta}}{2n_3} \right)$$

ve

$$(a,b,c) = \left(\frac{\left(n_1-n_2+n_3+\sqrt{\Delta}\right)}{2n_1}, \frac{(n_1+n_2-n_3)-\sqrt{\Delta}}{2n_2}, \frac{(-n_1+n_2+n_3)-\sqrt{\Delta}}{2n_3} \right).$$

şeklindedir. Burada,

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(-n_1+n_2+n_3)^2 + 4(n_1-1)n_2n_3} > -n_1+n_2+n_3$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2 + 4n_1(n_2-1)n_3} > n_1-n_2+n_3$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(n_1+n_2-n_3)^2 + 4n_1n_2(n_3-1)} > n_1+n_2-n_3$$

olduğuna dikkat edelim.

Bundan dolayı bu çözümlerin hepsi reel sayılar olup bunlardan tek pozitif çözüm, a,b,c sayılarının ikinci seçimidir.

Eğer { a,b,c } tamsayı ise, o zaman 4.4 Teorem den S sayısal yarıgrubu pesudo- simetrik olduğu bulunur. (Burada $n_1,n_2,n_3 \neq 1$ iken $a,b,c \geq 2$ şeklindedir).

4.7 NOT: 4.3 Teorem'de verilenlere göre

$$g(S)=-(n_1+n_2+n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}\ ,$$

ve

$$c_1=\frac{(n_1-n_2+n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}}{2n_1},$$

$$c_2=\frac{(n_1+n_2-n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}}{2n_2},$$

$$c_3=\frac{(-n_1+n_2+n_3)+\sqrt{(n_1+n_2+n_3)^2-4(n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3-n_1n_2n_3)}}{2n_3}$$

olarak yazılır.

4.8 ÖNERME: $S=\langle s_1,s_2,s_3\rangle$ simetrik olmayan bir sayısal yarıgrup, $g(S)$ ve $t(S)$ sırasıyla onun Frobenius sayısı ve tipi olmak üzere,

$$M=\left\{F_i\in\mathbb{Z}\setminus S:\ F_i+s\in S,\quad s\in S\setminus\{0\},\ \ i=1,2,...,t(S)\right\}$$

kümesini tanımlayalım. Yani M, S nin Pseudo Frobenius sayılarının kümesi olsun. Buna göre, S nin kutup noktalarının kümesi $K(S)$ olmak üzere,

$$F_{t(S)}=g(S)\qquad \text{ve}\qquad F_{t(S)-1}=\max(K(S))$$

şeklindedir.

İSPAT: S nin Frobenius sayısı $g(S)=\max(H(S))$ olduğundan $g(S)=\max(K(S))$ yazılır. Böylece,

$$F_{t(S)}=g(S)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $F_{t(S)-1}\in K(S)$ alalım. Bu durumda, $x=g(S)-F_{t(S)-1}$ olduğundan

$$x \in H(S)$$

çıkar. $x \in S$ olduğunu varsayalım. O zaman,

$$F_{t(S)-1} + x = g(S) \in H(S)$$

eşitliğini elde ederiz ki bu ise $F_{t(S)-1} \in K(S)$ varsayımımızla çelişir. Sonunda

$$F_{t(S)-1} \in K(S)$$

elde ederiz.

Şimdi de $F_{t(S)-1}$ sayısının $K(S)$ nin maksimal elemanı olduğunu gösterelim. Aksine, $F_{t(S)-1} < y < F_{t(S)}$ olacak şekilde bir $y \in K(S)$ olduğunu varsayalım. $y_1 + y_2 \in H(S)$ olacak şekilde bir $y_2 \in S$ varolsun.

$$y_1 \in K(S) \text{ iken } g(S) - y_1 \in K(S) \qquad (*)$$

ve

$$y_2 \in S \text{ iken } y_1 + y_2 \in H(S)$$

olur.

İlk olarak, $y_1 + y_2 \notin K(S)$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$g(S) - (y_1 + y_2) = (g(S) - y_1) - y_2 = s \in S \Rightarrow g(S) - y_1 = y_2 + s \in S$$

ise $(*)$ ifadesi ile çelişir.

Daha sonra $y_1 + y_2 \in K(S)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $y_1 + y_2$, $F_{t(S)-1} < y_1 + y_2 < F_{t(S)}$ eşitsizliğini sağlayan bir başka olur. Bu ise $\left[F_{t(S)-1}, F_{t(S)}\right]$ aralığının sonlu oluşu ile çelişir. Yani $F_{t(S)-1} < y < F_{t(S)}$ olacak şekilde bir $y \in K(S)$ yoktur.

4.9 SONUÇ: $S=\langle s_1,s_2,s_3\rangle$ bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. Eğer S nin bir tek Kutup noktası varsa, o zaman S pseudo-simetriktir.

İSPAT: $K(S)=\{x\in\mathbb{Z}\backslash S:\ g(S)-x\notin S\}$ kümesi tek elemanlı olsun. O zaman

$$\min\big(K(S)\big)=\max\big(K(S)\big)=\frac{1}{2}g(S)$$

olur. Öte yandan, 4.8 Önerme'den, bu değer $F_{t(S)-1}$ sayısıdır. Böylece, $t(S)=2$ olup S pseudo-simetriktir.

4.10 TEOREM: $S=\langle s_1,s_2,s_3\rangle$ simetrik olmayan bir yarıgrup ve $abc\geq 2$ olacak şekilde a,b,c pozitif tamsayıları olsun. Bu durumda S sayısal yarıgrubu,

$$s_1=1+ab+b,\quad s_2=1+bc+c,\quad s_3=1+ca+a$$

ile veriliyor ise o zaman S pseudo-simetriktir[4].

4.11 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup ve $Pg(S)$ onun pseudo-frobenius sayılarının kümesi olsun. O zaman

$$Pg(S)=\{\ g(S)/2,\ \ g(S)\ \}$$

oluyorsa S pseudo-simetriktir[5].

4.12 ÖNERME: S sayısal yarıgrubu verilsin. Eğer, $x\in\mathbb{N}\backslash S$ için

$$g(S)-x\in S\ \text{ ya da }\ x=g(S)/2$$

ise S pseudo-simetriktir[5].

4.13 ÖNERME: S bir sayısal yaıgrup, $H(S)$, S nin boşluklarının kümesi ve $N(S)=\{s\in S:\ s<g(S)\}$ olmak üzere,

$$\#\big(H(S)\big)=\#\big(N(S)\big)+1$$

ise S pseudo-simetriktir[5].

4.14 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. $N(S)=\{s\in S:\ s<g(S)\}$ olmak üzere,

$$\#(N(S))=g(S)/2$$

eşitliği sağlanıyorsa S pseudo-simetriktir[5].

4.15 ÖRNEK: 4.10 Teorem'i kullanarak $a.b.c\geq 2$ Olmak üzere, $a=2$, $b=1$ ve $c=3$ alırsak,

$$s_1=1+2.1+1=4,\qquad s_2=1+1.3+3=7\qquad \text{ve}\ \ s_3=1+3.2+2=9$$

seçersek $S=\langle s_1,s_2,s_3\rangle=\langle 4,7,9\rangle$ sayısal yarıgrubu pseudo-simetrik olur.

Gerçekten de 4.11 Önerme'den de

$$Pg(S)=\{5,10\}$$

olup S pseudo-simetriktir. Üstelik, 4.14 Önerme'den de S nin pseudo-simetrik olduğunu görebiliriz:

$$N(S)=\{s\in S:\ s<10\}=\{0,4,7,8,9\}$$

olup

$$\#N(S)=5=\frac{10}{2}$$

şeklindedir. Yani *S,* pseudo-simetriktir. Bununla birlikte, S nin kutup noktalarının kümesi,

$$K(S)=\{x\in\mathbb{Z}\setminus S:\ (10-x)\notin S\}=\{5\}$$

olup 4.9 Sonuç'tan da S nin pseudo-simetrik olduğunu söyleyebiliriz.

4.16 ÖNERME: S sayısal yarıgrup ve $g(S)$ çift olsun. Eğer S indirgenemeyen ise o zaman $g(S)=h+h'$ olacak şekilde $\forall\, h,h' \in \mathbb{Z}\setminus\frac{g(S)}{2}$ için

$$\text{ya } h\in S \quad \text{ya da } h'\in S$$

oluyorsa S pseudo-simetriktir [8].

4.17 ÖNERME: $c=2g-1$ ise kondüktörü c ve türü g olan S sayısal yarıgrubu pseudo-simetriktir[8].

4.18 ÖNERME: S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $g(S)$, $e(S)$, $\mu(S)$ sırasıyla S nin Frobenius sayısı, gömme boyutu ve katılığı olsun. $e(S)=3$ ve $\mu(S)=4$ ise $x\geq 3$, x tek tamsayı olmak üzere,

Eğer $S=\langle\, 4, x+2, x+4\rangle$ ise S pseudo-simetriktir.

İSPAT: $e(S)=3$, $\mu(S)=4$ ve $S=\langle\, 4, x+2, x+4\rangle$ olduğundan S nin üreteçler sistemi, $\{4, x+2, x+4\}$ şeklindedir. Bu durumda,

$$Ap(S,4)=\{0, x+2, x+4, 2x+4\}$$

yazılır. Bu nedenle, $g(S)=2x$ bulunur. Böylece,

$$Ap(S,4)=\left\{0, \frac{g(S)}{2}+4, \frac{g(S)+4}{2}, g(S)+4\right\}$$

yazılabilir ki 4.1 Önerme'den de S pseudo-simetrik çıkar.

4.19 ÖRNEK: 4.18 Önerme' de $x=7$ alırsak

$$S=\langle 4,9,11\rangle=\{0,4,8,9,11,12,13,15,\rightarrow\ldots\} \quad \text{ve} \quad g(S)=14$$

olup. S nin kondüktörü,

$$c=14+1=15$$

sayısıdır. Öte yandan,

$$H(S)=\{1,2,3,5,6,7,10,14\}$$

olup S nin türü

$$g=\#(H(S))=8$$

şeklindedir. Böylece

$$c=15=2.8-1$$

olup S pseudo-simetriktir. Üstelik

$$\begin{aligned} Ap(S,4) &= \{\ x\in S:\ s-4\notin S\} \\ &= \left\{0,\frac{14}{2}+4,\frac{14+4}{2},14+4\right\} \\ &= \{0,11,9,18\} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

KAYNAKLAR

1. Rosales, J. C. ; Garcia-Sanchez, P. A. , *Pseudo-symmetric numerical semigroups with three generators, Journal of Algebra*, **2005**, 291, 46-54.

2. Marco D'Anna, *Type Sequences of Numerical Semigroups*, *Semigroup Forum*, **1998**, Vol.56, 1-31.

3. Rosales, J. C. , *On Symmetric Numerical Semigroups, Journal of Algebra*, **1996**, 182, 422-434

4. Leonid, G. Fel; Francesca, A. , *Gaps in Nonsymmetric Numerical Semigroups*, arXiv: math/0703735v.1[math.AC], **2008**.

5. Rosales, J.C. , *One Half of A Pseudo-symmetric Numerical Semigroup*, *London Mathematical Society* , **2008,** doi:10.1112/blms/bd010.

6. Maria Bras –Amoros, *Acute Semigroups*, *the Order Bound on the Minimum Distance,and the Feng-Rao Improvements*, *Iee Transactions of Information Theory*, **2004**, Vol.50,no.6.

7. Fröberg, R. ; Gottlieb, C. ; Haggkvist, R. , *On Numerical Semigroups*, *Semigroup Forum*, **1987**, Vol.35 , 63-83.

8. Rosales, J. C. ; Branco, M. B. , *Irreducible Numerical Semigroups*, *Pacific Journal of Mathematics,* **2003**, Vol. 209,No:1.

9. Rosales, J. C. , *Nümerical Semigroups with Multiplicity Three and Four*, *Semigroup Forum*, **2005**, Vol. 71, 323-331.

10. David E. Dobbs; Gretchen L. Matthews , *On A Question of Wilf Concerning Numerical Semigroups.*

11. Gilvan O. , *Numerical Semigroups Whose Last Gap is Large*, *Semigroup Forum,* **2004**, Vol. 69, 423-430.

12. Rosales, J.C. , *Numerical Semigroups with Apery Sets of Unique Expression*, *Journal of Algebra*, **2000**, 226, 479-487.

13. Rosales, J. C. ; Branco, M. B. , *Irreducible Numerical Semigroups with Arbitraray Multiplicity and Embedding Dimension*, *Journal of Algebra*, **2003**, 264 305-315.

14. Rosales, J. C. , *Fundamental Gaps of Numerical Semigroups Generated by Two Elements*, *Linear Algebra and its Applications,* **2005**, 405 200-208.

15. Barucci, V. ; Dobbs, D. E. ; Fontana, M. , *Maximality Properties in Nümerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analyticalle İrreducible Local Domains, Memoirs of the Amer* .Math.Soc. , **1997**, vol. 598,

16. Curtis, F. , *On Formulas for the Frobenus Number of A Numerical Semigroup*, *Math.Scand*., **1990**, 67,190-192.

17. İlhan, S. , *On A Class of Telescopic Numerical Semigroups*, *İnternational Journal of Contemporary Matematical Sciences*, **2006**, Vol. 1, no. 2,81-83.

18. Madero, M. ; Herzinger, K. ,*The Apery Sets of Numerical Semigroups*, *Algebra Communications*, **2005**, 33;3831-3838.

19. Rosales, J. C. ; Branco, M. B. , *Numerical Semigroups that can be Expressed As An İntersection of Symetric Numerical Semigroups*, *Journal of Pure An Applied Alcebra,* **2002,** Vol.171, 3003-314 .

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Meral SÜER

Doğum Yeri: Elbistan

Doğum Tarihi: 15/07/1980

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yılı)

Lise: Elbistan Mükrimin Halil Lisesi-1997

Lisans: Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Bölümü-2001

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yılları: Milli Eğitim (Öğretmenlik) 2001- …..