

**T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI EVREN MODELLERİ İÇİN
GRAVİTASYONEL ENERJİ ve MOMENTUMUN
HESAPLANMASI**

Serdar ELHATISARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN: Prof. Dr. İrfan AÇIKGÖZ

FİZİK ANABİLİM DALI

**DIYARBAKIR
NİSAN 2009**

ÖZ

Einstein'ın gravitasyonel alan denklemleri ile ilgili araştırmaları kuramın temel ilkelerinin yanı sıra ilgili sistemler için uygun bir enerji-momentum korunum yasası elde etme temeline dayanmaktaydı. Gerçekte de, fizikteki gelişmelere yön veren temel etken, korunum yasalarını elde etmek için yeni enerji biçimlerini tanımlama girişimleridir. Çünkü bilindiği gibi, enerji kavramı fiziksel kuramların tümünde temel rolü üstlenmektedir. Fakat görelî gravite kuramlarında arzu edilen yeni enerji biçimi tanımlama konusundaki çabalar ciddi zorluklarla karşı karşıya kalmaktadır. Buradaki temel zorluk, gravitasyonel alana ait ve fiziksel açıdan tam olarak anlamlı bir enerji ifadesinin tanımlanması ile ilgilidir.

Bu çalışma kapsamında, görelî gravite kuramında enerji-momentum korunum yasası elde etme adına gerçekleştirilen çalışmalardan bazıları tekrar gözden geçirildi ve enerji-momentum yerelleşme problemi ile ilgili bir araştırma gerçekleştirildi. Çeşitli evren modelleri için Einstein, Landau-Lifshitz, Bergmann-Thomson e-m pseudokompleksleri ve bunların teleparalel versiyonları kullanılarak GG ve TPG kuramlarında e-m dağılımları elde edildi. Ayrıca yine bu evren modelleri için Møller (1958) e-m pseudokompleksi kullanılarak sadece GG kuramında enerji-momentum dağılımları araştırıldı. Gerçekleştirilen hesaplamalar sonunda bu evren modelleri için GG kuramında dört farklı temsil ile birbirinden farklı e-m dağılımları elde edilse de Einstein, Landau-Lifshitz ve Bergmann-Thomson temsilleri ile bunların teleparalel versiyonlarının aynı sonuçları verdiği gözlemlendi. Ayrıca, bu evren modellerinden birine ait alt durumlar için gerçekleştirilen hesaplamalarda Møller dışındaki tüm temsillerin e-m dağılımı için sıfır değerini verdiği gözlemlendi. Dolayısıyla Møller dışındaki temsillerle elde edilen bu sonuçlar, Tryon tarafından ileri sürülen büyük patlama modelini desteklemektedir ve bu uzay-zamanın Evren'i modelleme adına en az FRW modeli kadar uygun bir yapıda olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Genel Görelilik, Teleparalel, Enerji-Momentum, Pseudokompleks.

ABSTRACT

Einstein's researches related to gravitational field equations were based on basis of derivation of a suitable energy-momentum conservation law for relevant systems as well as basic principles of the theory of General Relativity. In practice, the main factor directing the development in physics is attempts to define new energy forms in order to obtain conservation laws. Because, it is known that the concept of energy plays an essential role in all physical theories. However, the attempts to define desirable new energy forms in theories of relativistic gravity come up against serious problems. The basic problem here is related to define an energy expression which is regarding to gravitational field and physically meaningful.

In this study, some of various energy-momentum pseudocomplexes constituted to get energy-momentum conservation law in theories of relativistic gravity were reviewed and a research related to energy-momentum localization problem was carried out. For various universe models, energy-momentum distributions in General Relativity and Teleparallel Gravity were obtained using Einstein, Landau-Lifshitz, Bergmann-Thomson energy-momentum pseudocomplexes and their teleparallel versions. Furthermore, energy-momentum distributions in General Relativity were investigated by using Møller (1958) energy-momentum pseudocomplexes for the same space-time models. After all executed calculations, it was observed that Einstein, Landau-Lifshitz and Bergmann-Thomson representations and their teleparallel versions gave the same results while different energy momentum distribution for each one of these different representations was obtained in these universe models. In addition, it was observed that all representations except that of Møller (1958) give zero value for energy-momentum distribution in executed calculations for subgroups of one of these universe models. Therefore, these obtained results for all representations except for Møller support the "big bang" model proposed by Tryon and show that this space-time is as suitable as Freidmann-Robertson-Walker model for modeling the Universe.

Keywords: General Relativity, Teleparallel, Energy-Momentum, Pseudocomplex.

TEŐEKKÖRLER

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi olmak üzere tüm sahip olduklarıyla yanımda olan aileme sonsuz teőekkürlerimi bir borç bilmekteyim. Bunun yanında, bir an için bile güvenmekten vazgeçmeyen tüm yakın arkadaşlarıma, tez çalışmam süresince çeşitli aşamalarda öneri ve yardımlarını esirgemeyen Murat KORUNUR'a ve ayrıca danışman hocam Prof. Dr. İrfan AÇIKGÖZ'e teőekkürlerimi sunarım.

Serdar ELHATISARI

Diyarbakır, 2009

İÇİNDEKİLER

	<u>SAYFA</u>
ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜRLER	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1. GİRİŞ	1
KAYNAKLAR	6
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	8
KAYNAKLAR	21
3. MATERİYAL VE METOT	24
3.1. TENSÖR CEBİRİ	24
3.1.1. Tensörler.....	24
3.1.2. Manifold.....	24
3.1.3. Koordinat Dönüşümleri.....	26
3.1.4. Kovaryant, Kontravaryant ve Karma Tensör.....	26
3.1.5. Tensörlerle İlgili Temel İşlemler.....	28
3.1.6. Simetrik ve Anti Simetrik Tensör.....	30
3.1.7. Tensör Yoğunlukları.....	32
3.1.8. Kronecker ve Levi-Civita Tensörleri.....	32
3.2. GENELGÖRELİLİK: RIEMANN UZAY-ZAMANI	33
3.2.1. Metrik Tensör.....	33
3.2.2. Yardımcı Alanlar ve Türev İşlemi.....	35
3.2.2.1. Affine Bağlantı.....	35

3.2.2.2. Kovaryant Türev.....	37
3.2.2.3. Christoffel Sembolleri.....	39
3.2.3. Riemann-Christoffel (Eğrilik) Tensörü.....	40
3.2.4. Ricci Tensörü ve Eğrilik Skalari.....	43
3.3. TELEPARALLEL GRAVİTE: WEITZENBÖCK UZAY-ZAMANI.....	43
3.3.1. Tetrad Alanı.....	45
3.3.2. Affine Bağlantı: Weitzenböck Bağlantısı.....	46
3.3.3. Burulma Tensörü.....	47
3.4. EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ.....	48
3.4.1. Hamilton (Minimum Eylem) İlkesi.....	49
3.4.2. Einstein Alan Denklemleri: Boş Uzay.....	51
3.4.3. Einstein Alan Denklemleri: Madde Bulunduran Uzay.....	54
3.5. ENERJİ VE MOMENTUM.....	56
3.5.1. Enerji-Momentum Tensörü.....	56
3.5.2. Enerji-Momentum Korunumu ve Enerjinin Yerelleşmesi.....	58
3.5.3. Enerji-Momentum Pseudokompleksleri.....	61
3.5.3.1. Einstein.....	62
3.5.3.2. Landau-Lifshitz.....	63
3.5.3.3. Bergmann-Thomson.....	66
3.5.3.4. Møller (1958).....	68
3.5.4. Teleparalel Gravitede Alan Denklemleri ve Enerji-Momentum Pseudo Komplekslerinin Teleparalel Versiyonları.....	71
3.5.4.1. Einstein.....	73
3.5.4.2. Landau-Lifshitz.....	73
3.5.4.3. Bergmann-Thomson.....	74
3.5.5. Møller Gravitasyonel Tetrad Kuramında E-M Pseudokompleksi (1961).....	74
KAYNAKLAR.....	80
4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	82
4.1. BIANCHI-BEHR VI_h UZAY-ZAMAN MODELİ.....	82

4.1.1. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ Evren Modelinde Einstein E-M Dağılımı.....	84
4.1.2. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ Evren Modelinde Landau-Lifshitz E-M Dağılımı.....	86
4.1.3. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ Evren Modelinde Bergmann-Thomson E-M Dağılımı.....	87
4.1.4. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ Evren Modelinde Møller E-M Dağılımı.....	88
4.1.5. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ Evren Modelinde Teleparalel Einstein, Landau-Lifshitz ve Bergmann-Thomson E-M Dağılımı.....	91
4.2. BIANCHI $VI_{h=-1/9}$ UZAY-ZAMAN MODELİ.....	100
4.2.1. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Einstein E-M Dağılımı.....	102
4.2.2. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Landau-Lifshitz E-M Dağılımı.....	103
4.2.3. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Bergmann-Thomson E-M Dağılımı.....	104
4.2.4. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Møller E-M Dağılımı.....	106
4.2.5. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Teleparalel Einstein, Landau- Lifshitz ve Bergmann-Thomson E-M Dağılımı.....	107
4.3. TARTIŞMA.....	114
KAYNAKLAR.....	125
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	126

ÇİZELGELER

SAYFA

Çizelge 4.1.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG Einstein temsilinde süperpotansiyel hesapları.....	85
Çizelge 4.2.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	85
Çizelge 4.3.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG L-L temsilinde süperpotansiyel hesapları.....	86
Çizelge 4.4.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	87
Çizelge 4.5.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG B-T temsilinde süperpotansiyel hesapları.....	87
Çizelge 4.6.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	88
Çizelge 4.7.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG Møller temsilinde süperpotansiyel hesapları.....	88
Çizelge 4.8.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG Møller temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	89
Çizelge 4.9.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait Weitzenböck bağlantının bileşenleri.....	91
Çizelge 4.10.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $T^{\lambda}_{\mu\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.....	92
Çizelge 4.11.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $T^{\lambda\mu}_{\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.....	93
Çizelge 4.12.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $T^{\lambda\mu\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.....	94
Çizelge 4.13.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $Z^{\lambda\mu\nu}$ biçimindeki süperpotansiyel bileşenleri.....	96
Çizelge 4.14.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $Z^{\lambda\mu\nu}_{\lambda}$ biçimindeki süperpotansiyel bileşenleri.....	97
Çizelge 4.15.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $U^{\lambda\mu\nu}_{\lambda}$ biçimindeki teleparalel Freud süperpotansiyel bileşenleri.....	98
Çizelge 4.16.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	100
Çizelge 4.17.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	100
Çizelge 4.18.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	100

Çizelge 4.19.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG Einstein temsilinde süperpotansiyel hesapları.....	102
Çizelge 4.20.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	103
Çizelge 4.21.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG L-L temsilinde süperpotansiyel hesapları.....	103
Çizelge 4.22.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	104
Çizelge 4.23.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG B-T temsilinde süperpotansiyel hesapları.....	105
Çizelge 4.24.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	105
Çizelge 4.25.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG Møller temsilinde süperpotansiyel hesapları.....	106
Çizelge 4.26.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG Møller temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	106
Çizelge 4.27.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait Weitzenböck bağlantının bileşenleri.....	107
Çizelge 4.28.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $T^{\lambda}_{\mu\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.....	107
Çizelge 4.29.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $T^{\lambda\mu}_{\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.....	108
Çizelge 4.30.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $T^{\lambda\mu\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.....	109
Çizelge 4.31.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $Z^{\lambda\mu\nu}$ biçimindeki süperpotansiyel bileşenleri.....	110
Çizelge 4.32.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $Z_{\lambda}^{\mu\nu}$ biçimindeki süperpotansiyel bileşenleri.....	111
Çizelge 4.33.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $U_{\lambda}^{\mu\nu}$ biçimindeki teleparalel Freud süperpotansiyel bileşenleri.....	112
Çizelge 4.34.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	113
Çizelge 4.35.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	113
Çizelge 4.36.	Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modelinde teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	113
Çizelge 4.37.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için GG Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	116

Çizelge 4.38.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için GG L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	116
Çizelge 4.39.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için GG B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	116
Çizelge 4.40.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için GG Møller temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	116
Çizelge 4.41.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	117
Çizelge 4.42.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	117
Çizelge 4.43.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	117
Çizelge 4.44.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (i)$ için GG Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	119
Çizelge 4.45.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (i)$ için GG L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	119
Çizelge 4.46.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (i)$ için GG B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	119
Çizelge 4.47.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (i)$ için GG Møller temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	120
Çizelge 4.48.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (i)$ için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	120
Çizelge 4.49.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (i)$ için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	121
Çizelge 4.50.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (i)$ için teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları....	121
Çizelge 4.51.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (ii)$ için GG Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	122
Çizelge 4.52.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (ii)$ için GG L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	122
Çizelge 4.53.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (ii)$ için GG B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	123
Çizelge 4.54.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (ii)$ için GG Møller temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.....	123
Çizelge 4.55.	Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (ii)$ için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....	123

- Çizelge 4.56. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (ii)$ için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....124
- Çizelge 4.57. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B) - (ii)$ için teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.....124

ŞEKİLLER

	<u>SAYFA</u>
Şekil – 1 Manifold.....	24
Şekil – 2 Manifold ve Koordinat Yamaları.....	25
Şekil – 3 Eğri Bir Yüzey Üzerinde Tensör Bileşenlerinin Gösterimi.....	27
Şekil – 4 Kontravaryant ve Kovaryant Tensörün Temsili.....	28
Şekil – 5 Farklı Uzay-zamanlar Arasındaki İlişki.....	44

SİMGELER VE KISALTMALAR

ÖG	: Özel Görelilik
GG	: Genel Görelilik
TPG	: Teleparalel Gravite
MGT	: Møller Gravitasyonel Tetrad
E-M	: Enerji-Momentum
L-L	: Landau-Lifshitz
B-T	: Bergmann-Thomson
$G_{\mu\nu}$: Einstein Tensörü
$T_{\mu\nu}$: Madde ve Alanlar Enerji-Momentum Tensörü
$t_{\mu\nu}$: Gravitasyonel Alan Enerji-Momentumu
$g_{\mu\nu}$: Metrik Tensör
$\eta_{\alpha\beta}$: Minkowski Metrik Tensörü
$R_{\mu\nu}$: Riemann Tensörü
R	: Ricci Skaleri
Λ	: Kozmolojik Sabit
$\mathfrak{S}^{\lambda}_{\kappa}$: Tensör Yoğunluğu
$\frac{\partial T_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ veya $T_{\mu;\nu}$: Parçalı Türev
$\partial_{\nu}, \partial^{\nu}$: $\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}$
$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$: Affine Bağlantı: Christoffel Sembolleri
$\nabla_{\nu} T_{\mu}$ veya $T_{\mu;\nu}$: Kovaryant Türev
$h^{(a)}_{\mu}$: Tetradlar
$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$: Affine Bağlantı: Weitzenböck Bağlantısı
$T^{\lambda}_{\mu\nu}$: Burulma Tensörü
S	: Eylem
L	: Lagrangian

${}_F U_\mu^{v\lambda}$: Freud Süperpotansiyeli
$H_\mu^{v\lambda}$: Einstein Süperpotansiyeli
E_μ^μ	: GG Einstein E-M Pseudokompleksi
$\mathcal{P}^{\mu\nu\lambda\kappa}$: Landau-Lifshitz Süperpotansiyeli
$L^{\mu\nu}$: GG Landau-Lifshitz E-M Pseudokompleksi
$\Pi^{\mu\nu\lambda}$: Bergmann-Thomson Süperpotansiyeli
$B^{\mu\nu}$: GG Bergmann-Thomson E-M Pseudokompleksi
$\mathcal{X}_\mu^{v\lambda}$: GG Møller Süperpotansiyeli
M_μ^v	: GG Møller E-M pseudokompleksi
$Z^{\lambda\mu\nu}$: Teleparalel Süperpotansiyel
$U_\mu^{v\lambda}$: Teleparalel Freud Süperpotansiyel
hE_μ^v	: Teleparalel Einstein E-M Pseudokompleksi
$hL^{\mu\nu}$: Teleparalel Landau-Lifshitz E-M Pseudokompleksi
$hB^{\mu\nu}$: Teleparalel Bergmann-Thomson Süperpotansiyeli
$\mathfrak{A}_\mu^{v\lambda}$: Møller Gravitasyonel Tetrad Kuramı Süperpotansiyeli
\mathfrak{M}_μ^v	: Møller Gravitasyonel Tetrad Kuramı E-M pseudokompleksi

1. GİRİŞ

Görelilik kuramının ortaya çıkmaya başlaması fiziksel kavramlarda bazı değişimleri beraberinde getirdi. 1887’de Voigt¹ hareket eden bir referans sistemi için matematiksel olarak uygun bir t' yerel zaman ifadesini tanımladı. Benzer ifade 1892 yılında H. A. Lorentz^{2,3} tarafından da yazıldı. Lorentz bu ifadenin matematiksel uygunluğuna ek olarak bir takım fiziksel sonuçlar da elde etti ve bu çalışmalarını esirin varlığını göz önüne alarak gerçekleştirdi. Fakat E. W. Morley ve A. A. Michelson⁴’un gerçekleştirdiği deneyin esir hakkında ortaya çıkardığı olumsuz sonuçlar kuram için büyük zorluklar doğurdu. Bu durumu düzeltmek için Lorentz⁵ ve ayrıca bağımsız olarak Fitzgerald⁶ “*tüm cisimler v gibi bir öteleme hızı ile hareket ettikleri zaman boyutları değişir*” şeklinde bir hipotez ileri sürdüler. Bu çalışmalar 19. yüzyılın sonlarında ilk olarak J. J. Larmor⁷ tarafından formüle edildi ve ilerde Poincaré tarafından “*Lorentz Dönüşümleri*” olarak adlandırılacak olan denklemler kuruldu. Larmor bu denklemlerle ayrıca zaman ölçüsünde de bir değişim olduğunu gösterdi.

$$x = \frac{x_0 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y = y_0 \quad z = z_0 \quad t = \frac{t_0 - \frac{vx_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.1)$$

J. C. Maxwell’in 19. yüzyılın en büyük buluşlarından biri olan ışığın elektromanyetik dalga olduğunu keşfetmesiyle doğal olarak ışığın denklemleri de bulunmuş oldu ve ışığın yüksek hızı sayesinde bu denklemler Larmor tarafından yüksek hızlı sistemler için yazılan (1.1) dönüşüm denklemlerinin öncelikli uygulama alanını oluşturdu. Dolayısıyla, 1904 yılında Lorentz birincil sistemdeki alan yoğunluklarının uygun seçilmesi koşuluyla Maxwell denklemlerinin (yani ışığın denklemlerinin) bu koordinat dönüşümleri altında invaryant (değişmez) olduğunu kanıtladı⁸. Fakat Lorentz’e göre bu değişmezlik durumu sadece yüksüz uzayda Maxwell denklemleri için geçerlidir ve yük yoğunluğu ile akımı içeren terimler birincil ve hareketli sistemlerde aynı değildir. Lorentz in bu çalışmalarındaki boşluklar Poincaré⁹ tarafından dolduruldu. Poincaré daha önceki çalışmalarda da kabul edildiği gibi Maxwell denklemlerinin boş uzayda sağlandığını varsaydı ve

Lorentz'in yük yoğunluğu ile akım için yazdığı denklemleri düzeltti ve bu sayede elektron kuramındaki alan denklemlerinin tam kovaryanslığı türetilmiş oldu.

Görelilik kuramının en temel biçimi A. Einstein tarafından oluşturuldu. Einstein¹⁰ 1905 yılında,

- I- Fizik yasaları bütün eylemsiz sistemlerde aynı şekli alır,
- II- Işığın boşluktaki hızı kaynağın hızından bağımsız olarak bütün eylemsiz sistemler için aynıdır,

gibi iki temel ilkeye dayanan ve Özel Görelilik (ÖG) olarak adlandırdığı kuramı çok net bir biçimde kurdu.

Einstein bu çalışmasında Newton mekaniği denklemlerini invaryant bırakan Galileo dönüşümlerinin, Maxwell denklemlerini ve ışığın hızını değişmez bırakan ve 10 parametrelili uzay-zaman dönüşümleri olan Lorentz dönüşümleri ile yer değiştirmesi gerektiğini önerdi. Ayrıca Newton mekaniği denklemleri Lorentz dönüşümleri altında invaryant kalmadığından dolayı Einstein hareket denklemlerini Lorentz invaryant olacak şekilde yeniden düzenledi. Bu girişim sonunda hem mekanik hem elektrodinamik denklemlerinin aynı biçimde olmaları ve aynı anda belli bir koordinat dönüşümü altında invaryant kalmaları sağlandı.

Einstein'in ÖG kuramı Newton mekaniğinde geçerli olan mutlak uzay ve mutlak zaman kavramlarını reddetmektedir. ÖG kuramı eylemsiz ($ivme = a = 0$) sistemleri açıkladığından dolayı bu kuramda sadece ivme mutlak bir kavram olarak kalmayı sürdürür. Bu durum Einstein'in, ÖG kuramının daha genel bir kuramın özel bir durumu olduğunu düşünmesine neden oldu. 1907 yılında Einstein¹¹ "*Denklik İlkesi*"ni açıklayan makalesini yayınlamaya başlar ve bu genel kuramı kurma adına çalışmalarına başlar. 1908 yılında H. Minkowski¹² görelilik üzerine yazmaya başlar ve görelilik kuramının kabulüne katkıda bulundu. Özellikle Minkowski, uzay ve zamanın beraber düşünüldüğünü, görelilik kuramının en doğal bir biçimde ifade edilebildiği dört boyutlu uzay-zamanı keşfetti ve bu keşfi ile genel kurama giden yolu açmış oldu.

Einstein 9 yıl süren çalışmaları sonunda 1916 yılında Genel Görelilik (GG) kuramı olarak adlandırdığı bu genel kuramını açıklayan makalesini¹³ yayınladı. Bu kurama göre artık mutlak ivme kavramı da reddedilmektedir, yani koordinat sistemleri arasındaki eylemsiz olma ya da olmama zorunluluğu ortadan

kalkmaktadır. Bu durum aynı zamanda kuramın temel ilkelerinden biri olan “*Denklik İlkesi*” ile daha net bir biçimde anlaşılabilir. Bu ilkeye göre “*bütün koordinat sistemleri denktir*” ve aslında bu ifade bu kuramın neden GG kuramı olarak adlandırıldığını ve gerçekten de bu kuramın özel bir durumunun ($ivme = 0$) ÖG kuramına karşılık geldiğini göstermektedir.

Bu genel kuramın diğer temel ilkesi ise “*Genel Kovaryanslık*” ilkesidir. Bu ilkeye göre;

- I- Fizik yasaları için bütün koordinat sistemleri aynı derecede uygundur,
- II- Fizik yasalarını tanımlayan denklemler tensörel biçimde olmalı ve Riemann uzay-zamanında ifade edilmelidir,
- III- Fizik yasalarını tanımlayan denklemler bütün koordinat sistemlerinde aynı biçimde olmalıdır.

Einstein bu iki temel ilkeyi matematiksel olarak formüle etmeyi başardı ve özgün şekli

$$G = \kappa T \quad (1.2)$$

olan ve kütle çekim etkisini ifade eden denklemleri buldu. Buradaki G (Einstein Tensörü) uzayın eğriliği, T enerji-momentum tensörü ve κ ise bağlanma sabitidir. Bu (1.2) denklemi daha açık olarak

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

şeklinde yazılır. Einstein’ın bu denklemi, eşitliğin bir tarafı uzay-zaman geometrisini ($R_{\mu\nu}$: Ricci tensör, R : Riemann skaleri, $g_{\mu\nu}$: Metrik tensör) temsil etmesine karşın diğer tarafı enerji-momentum tensörünü (maddeyi) içerdiğinden dolayı enerji-momentum dağılımına karşılık gelen uzay-zaman geometrisini hesaplamamıza olanak sağlar. Burada Λ kozmolojik sabittir.

Einstein’ı genel kovaryant alan denklemleri ile ilgili araştırmalara sürükleyen etken, bu kuramın temel ilkelerinin yanı sıra enerji-momentum korunum yasasıdır. Aslında fizikteki gelişmeleri karakterize eden temel etken korunum yasalarını elde etmek için yeni enerji biçimlerini tanımlama girişimleridir¹⁴. Çünkü enerji kavramı fiziksel kuramların tümünde temel rolü üstlenmektedir. Fiziksel bir sistemin geçmişte hangi süreçlerden geçtiği ve gelecekte de bu süreçlerin nasıl devam edeceğine dair,

yani genel olarak sistemin hareketi (dinamiği) ile ilgili sorular sisteme ait enerji (madde) dağılımı ile ilgili bilgiler sayesinde cevaplanabilir. Bu amaç doğrultusunda ilk çalışmalar Newton zamanına rastlamaktadır. Newton mekanik sistemleri için “*korunumlu kuvvetler*” niceliğini tanımladı. 19.yüzyılda ise akışkan maddelerde enerji korunumunu sağlayabilmek için “*yüzey gerilim enerji kavramı*” ortaya atıldı. Klasik elektrodinamikte bu amaç için Maxwell ve Poynting “*elektrik ve manyetik alan yoğunlukları*”nı tanımladılar. ÖG kuramında ise enerji korunumu kütleinin enerjiye denk olduğunu ifade eden ünlü

$$E = mc^2 \quad (1.4)$$

denklemleriyle sağlanmaktadır. Fakat GG kuramında bu yeni enerji biçimi tanımlama ile ilgili girişimler ciddi zorluklarla karşı karşıya kalmaktadır. Buradaki temel zorluk gravitasyonel alanın enerji kısmının tanımlanması ile ilgilidir. GG kuramı ışığın büyük kütleli cisimleri tarafından saptırılması, Merkür’ ün günberi noktasının ilerlemesi, ışığın gravitasyonel kırmızıya kayması, kara delikler ve diğer X ışını kaynakları, kozmik ışınlar, yıldızların keşfi vb. gibi Newton Gravite kuramının cevaplamakta yetersiz kaldığı olayları çok başarılı bir biçimde cevaplamasına karşın, ortaya çıkışının üzerinden neredeyse bir yüzyıl geçmiş olmasına rağmen henüz enerji tanımı, yani Gravitasyonel alanla bağlantılı korunumlu nicelikler üzerine genel bir kabullenim yoktur.

Einstein GG kuramındaki genel kovaryant gravitasyonel alan denklemleri ile ilgili çalışmalarında enerji korunum yasasını

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} E_\mu^\nu = 0 \quad (1.5)$$

$$E_\mu^\nu = \sqrt{-g} (T_\mu^\nu + t_\mu^\nu) \quad (1.6)$$

şeklinde formüle etti¹³. Buradaki $T_{\lambda\kappa}$ maddenin enerji-momentum tensör yoğunluğu ve $t_{\lambda\kappa}$ gravitasyonel alanın enerji-momentum pseudotensör yoğunluğudur.

Pseudotensörler koordinat sistemine bağlı olmadıklarından dolayı kovaryant değildir ve dolayısıyla fiziksel olarak gerçek anlamda yerel gravitasyonel alan enerji-momentum yoğunluğunu sağlamaz. Fakat buna rağmen gravitasyonel alanın öz

enerjisi için kullanılan pseudotensör yaklaşımı yok sayılmamıştır ve uzun yıllardır incelenmeye devam edilmektedir.

Gravitasyonel alan enerjisi ile ilgili diğer bir seçeneysel (alternatif) yaklaşım Teleparalel Gravite¹⁵ (TPG) kuramıdır. GG kuramına göre gravitasyonel etkileşme maddenin uzay-zamanda oluşturduğu eğrilik kavramıyla açıklanmasına karşın TPG kuramında ise gravitasyonel etkileşme uzay-zamandaki burulma kavramıyla açıklanmaktadır. Mutlak paralelizm olarak da adlandırılan bu kuram Weitzenböck geometrisine¹⁶ dayanan bir koordinat dönüşüm grubunun (denklemlerinin)^{17,18} bir ayar kuramına karşılık gelir ve elektromanyetik kuramı ile graviteyi birleştirme girişimi ile ortaya çıkmıştır.

Bu iki kuramı birleştirme adına ilk girişim 1918 de H. Weyl¹⁹ tarafından gerçekleştirildi. Weyl'in bu girişimi tam olarak başarıyla sonuçlanmamasına rağmen ayar dönüşümü ve ayar invaryansı gibi kavramları ilk defa ortaya çıkardı (kuantum-elektrodinamik ve alan kuramlarında kullanılan bu kavramlar klasik-elektrodinamikteki yük korunumu gibi kavramlara karşılık gelir). Daha sonraki yıllarda Einstein, E. Cartan ve R. Weitzenböck gibi birçok fizikçi ve matematikçi aynı doğrultuda çalışmalara başladı. Einstein ve Cartan birbirlerinden bağımsız olarak, eğriliğin olmadığı ve burulmanın¹⁸ bir kuvvet rolü²⁰ üstlenerek gravitasyonel alana katkıda bulunduğu bir uzay kavramını ifade ettiler. Bu çalışmalar sonrasında TPG kuramının ilk temel biçimi yapılandırılmış oldu, fakat sonrasındaki 30 yıl boyunca bu kuramla ilgili herhangi bir gelişme yaşanmamıştır. 1960'lara gelince Møller^{21,22} ayar kuramları bağlamında Einstein'in hem GG hem TPG kuramlarındaki çalışmalarını tekrar gözden geçirdi ve GG alan denklemlerinin, çözümlerindeki herhangi bir gereksiz sonuçla karşı karşıya kalmamak için yeniden düzenlenmesi gerektiğini önerdi. Møller²³, bu çalışmaları sonrasında tetrad uzayında tanımlı yeni bir alan kuramı yapılandırarak GG kuramını yeniden düzenledi.

Bu çalışmadaki amaç bazı evren modelleri için çeşitli enerji-momentum pseudokomplekslerini ve bunların teleparalel versiyonlarını kullanarak her iki kuramda da madde ve gravitasyonel alanın toplamından kaynaklanan enerji ve momentum yoğunluklarını hesaplamak ve sonuçları karşılaştırmaktır.

KAYNAKLAR

1. Voigt, W. “*Ueber das Doppler’sche Princip*”, *Göttinger Nachrichten* **1887**, 7, 41–51.
2. Lorentz, H. A. “*La Theorie electromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants.*”, *In. C. P.* **1892**, Vol.2, 164-343.
3. Lorentz, H. A. “*Versuch einer theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.*”, *In. C. P.* **1895**, Vol.5, 1-138.
4. Michelson, A. A. And Morley, E. W. “*On the Relative Motion of the Earth and the Liminiferous Ether.*”, *American Journal of Science* **1887**, 34(203), 333-345,
5. Lorentz, H. A. “*The relative motion of the earth and the ether.*”, *Versl. Kon. Akad. Vetensch* **1892**, 1, 74.
6. Fitzelgerald, G. F. “*The Ether and the Earth’s Atmosphere.*”, *Science* **1889**, 13, 390.
7. Larmor, J. J. “*Aether and Matter*”, *Cambridge.***1900**, 167-177.
8. Lorentz, H. A. “*Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light.*”, *Proceeding of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences* **1904**, 6, 809.
9. Poincaré, H. “*Sur la dynamique de l’electron*”, *Comptes Rendus* **1905**, 140, 1504-1508.
10. Einstein, A. “*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*”, *Annalen der Physik* **1905**, 322(10), 891-921. (İngilizce Tercümesi için bkz; *The Principle of Relativity* (Methuen, 1923, reprinted by Dover Publications), sayfa35.)
11. Einstein, A. *Jahrb, Radioakt.*; **1907**, 4, 411.
12. Minkowski, H. “*Raum und Zeit.*”, *80. Versammlung Deutscher Naturforscher, Köln* **1908**.
13. Einstein, A. “*The Foundation of the General Theory of the Relativity*”, Dover Publications, Inc. New York, **1916**.
14. Trautman, A. “*Gravitation: An Introduction to Current Research*” Witten, L., Edit., Wiley, New York, **1962**.

15. Teleparalel Gravite Kuramı ile ilgili temel kaynakların bulunabileceği kaynak;
Gronwald, F.; Hehl, F. W. “*in Proc. School of Cosmology and Gravitation on Quantum Gravity.*”, **1996**.
16. Weitzenböck, R. “*Invarianten Theorie*”, Gronningen, Noordhoft, **1923**.
17. Hehl, F.W.; McCrea, J.D.; Mielke, E.W.; Ne’emann, Y. *Phys. Rep.* **1995**, 258, 1.
18. Hayashi, K.; Shirafuji, T. *Phys. Rev.* **1978**, D19, 3524-3553.
19. O’Raifeartaigh, L. *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press, Princeton, **1998**.
20. de Andrade, V. C.; Pereira, J. G. *Phys. Rev.* **1997**, D56, 4689-4695.
21. Møller, C. *Ann. Phys.* **1958**, 4, 347-371.
22. Møller, C. *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **1961**, 10, 1–50.
23. Møller, C. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **1978**, 39, No.13, 1–131.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Madde^a ve gravitasyonel alanların toplamından kaynaklanan toplam enerji-momentum dağılımı *enerji-momentum pseudokompleksi* olarak adlandırılır. Bu enerji-momentum kompleksini en uygun bir biçimde tanımlayabilmek için birçok girişim yapılmıştır. Bu bağlamda, genel olarak görelî sistem için enerjinin, momentumun ve açısal momentumun anlamlı bir ifadesini elde etmek adına ilk enerji-momentum kompleksi Einstein¹ tarafından önerilmiştir. Einstein'in bu temsili kapalı bir fiziksel sistem için memnun edici sonuçlar vermesine karşın enerjinin yerelleşmesi ile ilgili problemleri tam olarak çözememektedir.

Einstein'in bu çalışmasından sonra birçok fizikçi enerji-momentum pseudokompleksi için farklı ifadeler önerdi. Tolman² tarafından Genel Görelilik kuramında enerji-momentum korunum yasaları kullanılarak kapalı bir fiziksel sistemin toplam enerji-momentum dağılımını veren yeni bir ifade ve pseudokompleks elde edildi. Tolman tarafından türetilen bu ifade Einstein temsiline denktir, fakat Einstein temsillerinde alan değişkenleri olarak metrik tensör kullanılmasına karşın Tolman temsili metrik tensör yoğunluklarıyla ifade edilmektedir. Sözü edilen bu iki pseudokompleks anti-simetrik olduklarından dolayı açısal momentum için bir korunum yasası yazılamamaktadır.

Landau ve Lifshitz³ tarafından e-m korunum yasasını elde edebilmek adına koordinat sisteminde metrik tensörün türevinin sıfıra eşit olduğu özel noktaların seçilebileceği varsayımı kullanıldı. Bu varsayımlar sayesinde simetrik bir e-m pseudokompleksi tanımlandı ve bunun sonuca olarak açısal momentum için bir korunum ifadesi yazıldı.

Bergmann ve Thomson⁴ tarafından temel korunum yasaları ile fiziksel yasaların invaryanslık özellikleri arasında var olan ve mekanik ve alan kuramlarının tümünde geçerli olan ilişkiden yararlanılarak GG kuramında uygun bir e-m korunum yasası elde edilebileceği önerildi. Yukarıda ifade edilen bu ilişki genel kovaryanslık ilkesiyle birleştirildi ve her bir sonsuz küçük koordinat dönüşümünün bir korunumlu niceliğe karşılık geldiği ifade edildi. Sonuç olarak, GG kuramında e-m korunum

a. Bu çalışma boyunca gravitasyonel alan dışındaki her şey "madde" olarak isimlendirilecektir. Yani, buradaki madde kelimesi aynı zamanda elektromanyetik alan vb. nicelikleri de kapsayacaktır

yasasını sağlayan ve ayrıca açısal momentum için de bir korunum ifadesini veren temsil elde etme girişimi başarıyla sonuçlanmıştır.

Yukarıda söz edilenlerin yanı sıra birçok yazar^{5,6,7} tarafından farklı e-m pseudokompleksleri önerildi. Fakat bu temsillerin hiç biri enerji yerelleşmesi ile ilgili problemin üstesinden tam anlamıyla gelememektedir ve bu temsillerin tümü ancak ve ancak kartezyen koordinatların kullanılması durumunda anlamlı sonuçlar vermektedir. 1958 'de Mller⁸ tarafından bu problemin üstesinden gelebilmek adına, keyfi bir fiziksel sistem için tutarlı bir *enerji yoğunluğu* ifadesinin GG kuramı erevesi içinde belirlenebileceği ve bu sayede gravitasyonel alan enerjisinin yerelleşmesine fiziksel bir anlam kazandırmanın mümkün olduğu ifade edildi. Bu bağlamda Mller tarafından kapalı bir fiziksel sistemin enerjisi için bu yeni temsilin *akım kuramı* ile aynı sonuçları verdiği gösterildi. Ayrıca bu yeni temsilin, kapalı bir evrenin toplam enerjisinin yanı sıra sistemin herhangi bir kısmının içerdiği enerji için de anlamlı bir sonuç vermesinin mümkün olduğu (akım kuramının da benzer sorulara mutlak cevaplar veremediğine dayanarak) ifade edildi. Mller tarafından e-m korunum yasası elektrodinamikteki Poynting teoremine benzer olarak farklı biçimde yazıldı ve GG kuramında korunum yasasını sağlayan ve kartezyen koordinatlardan keyfi bir koordinat sisteminde dönüşüm yapılması durumunda da anlamlı sonuçlar veren (koordinat bağımsız) bir pseudokompleks elde edildi.

Daha sonra, 1961 yılında enerji yerelleşmesi ile ilgili problem Mller⁹ tarafından tekrar değerlendirildi ve 1958 yılında tanımladığı enerji yoğunluğu ifadesinin enerji dağılımını belirlemek için gerekli tüm özelliklere sahip olmadığı çeşitli hesaplamalarla gösterildi ve bu eksikliği gidermek için önceki çalışmasında ifade ettiği koşullardan birinde gerekli düzeltme yapıldı. Metrik tensör bileşenlerinin gravitasyonel alanın temel değerkenleri olmadıklarını gösteren bazı belirtiler olduğu ve buna dayanarak gravitasyonel alanın belirlenmesi için temel değerken olarak metrik tensör bileşenlerinin yerine tetradların kullanımının daha yararlı olacağı ifade edildi. Ayrıca Einstein' in TPG kuramı ile ilgili çalışmalarını *ayar kuramları* bağlamında tekrar gözden geçirilerek tetrad uzayında tanımlı Mller Gravitasyonel Tetrad kuramı olarak adlandırılan yeni bir alan kuramı yapılandırıldı.

Mller' in bu çalışması bir taraftan GG kuramı adına yeni gelişmeler olarak değerlendirilirken diğer taraftan, en son 1930'ların başında inceleme konusu olan ve

ilk biçimi Einstein, Cartan ve Weitzenböck tarafından kazandırılan TPG kuramıyla ilgili çeşitli çalışmaların yapılmaya başlanmasına neden olmuştur. 1962’de Pellegrini ve Plebariki¹⁰ tarafından TPG kuramı için Lagrangian formülasyonu bulundu. Daha sonra, Lagrangianın uzay-zamanda (genişletilmiş) kapsamlı bir dönüşüm durumunda invariant olması gerekliliği kullanılarak Hayashi ve Nakano¹¹ tarafından dönüşüm grupları için bir *ayar kuramı* formüle edildi. Birkaç yıl sonra da Hayashi¹² tarafından bu ayar kuramı ile TPG kuramı arasındaki bağlantıya dikkat çekildi ve bu dönüşüm grubuna ait ayar kuramının Weitzenböck uzay-zamanında tanımlanan bir gravitasyonel kuram olduğu bulundu. 1979’da ise Hayashi ve Shirafuji¹³ tarafından sıfır eğrilik ve sıfırdan farklı burulmayla karakterize edilen Weitzenböck uzay-zamanında tanımlı bu gravitasyonel kuram formüle edildi.

Görelî Gravite (Kütle Çekim) durumlarında, gravitasyonel (Kütle Çekimsel) alanların enerjisini, momentumunu ve açısal momentumunu belirlemek için yukarıda sözü edildiği gibi birçok yazar çeşitli kuramlar ve bu kuramlarda da farklı temsiller (e-m pseudokompleksler) tanımlamaya çalışırken aynı zamanda birçok yazar da bu tanımlı temsiller yardımıyla evrenin ve gravitasyonel sistemlerin sahip olduğu özellikleri belirlemeye çalışmışlardır. Bu amaç doğrultusunda Tryon¹⁴ tarafından kuantum alan kuramına dayalı bir büyük patlama modeli önerildi. Bu modele göre evrenimiz, homojen, izotropik, kapalı ve eşit miktarda madde ile karşıt maddeden oluşmaktadır. Tryon, evrenimizde korunan bütün niceliklerin sıfır olması ve buna bağlı olarak kapalı tüm evren modelleri için toplam enerjinin sıfır olması gerektiğini ifade etti. Sonraki yıllarda Rosen¹⁵ tarafından izotropik biçimdeki Robertson-Walker çizgi elemanını kullanılarak homojen, izotropik ve kapalı bir evren değerlendirildi. Rosen, Einstein e-m pseudokompleksini kullanarak madde ve gravitasyonel alanın enerjisini içeren evrenin toplam enerjisinin sıfıra eşit olduğunu buldu. Bu ilginç sonuç Görelî Gravite kuramlarıyla ilgilenen birçok fizikçiyi ve matematikçiyi etkilemiştir.

Johri ve ark.¹⁶ tarafından gravitasyonel enerjinin evrenin gelişimindeki (evrimindeki) rolü incelendi. Bu çalışmada, Landau-Lifshitz (L-L) pseudokompleksini kullanarak Friedmann-Robertson-Walker evren modelleri için yapılan hesaplamalar; (i) kozmolojik akışkanın durum denkleminde bağımsız olarak, uzaysal olarak kapalı bir evrenin toplam enerjisinin her zaman için sıfıra eşit olduğu,

(ii) uzaysal olarak düz bir evrenin sonlu bir hacimle kuşatılmış bir bölgesinde toplam enerjinin her zaman için sifıra eşit olduğu sonuçları ortaya çıkardı.

Xulu¹⁷ tarafından Landau-Lifshitz, Papapetrou ve Weinberg e-m pseudokompleksleri kullanılarak izotropik olmayan Bianchi-I evren modeli için toplam enerji hesaplandı ve sonucun sifıra eşit olduğu bulundu. Bu çalışmada, elde edilen sonuçların Banerjee ve Sen¹⁸ tarafından Einstein e-m pseudokompleksi kullanılarak aynı evren modeli için elde edilen sonuçlarla örtüştüğüne dikkat çekildi ve bu modeller için evrenin toplam enerjisinin sifıra eşit olması sonucunun Tryon' un görüşünü desteklediği ifade edildi. Bir süre sonra Radinschi¹⁹ tarafından Tolman temsili kullanılarak Bianchi-I metriğine dayalı izotropik olmayan bir evren modeli için enerji dağılımı hesaplandı. Bu çalışmada, madde ve gravitasyonel alandan kaynaklanan toplam enerjinin sifıra eşit olduğu bulundu ve bu sonuçların Banerjee ve Sen¹⁸ ve Xulu¹⁷ tarafından elde edilen sonuçlarla aynı olduğu ve dolayısıyla da Tryon¹⁴ düşüncesinin desteklendiği ayrıca ifade edildi.

Radinschi²⁰ tarafından Tolman e-m pseudokompleksi kullanılarak statik, küresel simetrik ve tekil olmayan kara delik uzay-zamanında enerji dağılımı hesaplandı ve bu hesaplamaların tümünü kartezyen koordinatlarda gerçekleştirildi. Sonuç olarak

$$E(r) = M \left(1 - Q \left(\frac{r^3}{r_1^3} \right) \right) \quad (2.1)$$

şeklindeki enerji dağılımının her yerde pozitif ve merkezde sifıra eşit olduğu bulundu ($r \rightarrow 0$ iken $E(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ iken $E(r) \rightarrow M$ ve $0 \leq r < \infty$ iken $E(r) > 0$). Buradaki M sistemin durgun kütesidir. Elde edilen bu sonuçların daha önce I-C. Yang²¹ tarafından Einstein ve Weinberg temsilleri kullanılarak ulaşılan sonuçlarla örtüştüğü ifade edildi.

Virbhadra²² tarafından L-L ve Tolman e-m pseudokompleksleri kullanılarak Kerr-Newman kara deliği için enerji dağılımı hesaplandı. Bu hesaplamalar sonucunda her iki temsilin de tam olarak aynı sonuçları verdiği ve toplam enerjinin kara deliğin içindeki ($E^{ic} \neq 0$) ve dışındaki ($E^{dis} \neq 0$) enerjilerin toplamından oluştuğu saptandı:

$$E_{L-L} = E_{Tot} = M - \frac{Q^2}{r} \left[\frac{a^2}{3r^2} + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.2)$$

Burada M (r yarıçaplı) küresel bir kara deliğin kütlesi, $Q^2 a^2 / (3r^3)$ yüklü cisimlerin dönmesinden kaynaklanan manyetik alan enerjisidir. Fakat yük parametresinin değiştirilmesi durumunda Kerr kara deliğinin ($Q=0$) dışında hiçbir enerjinin belirlenemediği ifade edilerek, gravitasyonel alanla elektromanyetik alan arasında dikkate değer bir farklılığın var olduğunu vurgulandı ve gravitasyonel alan enerjisinin sistemin iç bölgesinde hapsedilmiş olmasına karşın elektromanyetik alan enerjisi için böyle bir sınırlamanın olmadığını ifade edildi. Ayrıca, dönme parametresinin değiştirilmesiyle ($a=0$) elde edilen sonuçların Vaidya²³ ve Tod²⁴ tarafından Reissner-Nordström metriği için elde edilen sonuçlarla aynı olduğu ifade edildi. Virbhadr²⁵ 'nın daha sonraki çalışmasında Einstein ve Møller temsilleri kullanılarak aynı uzay-zaman için enerji dağılımlarını değerlendirildi. Einstein temsiline de önceki çalışmasında Tolman ve L-L temsilleriyle elde edilen (2.2) denklemini verdiği sonuç bulundu. Fakat Møller temsili kullanarak yapılan hesaplamaların

$$E_{\text{Møl}}(r) = M - \frac{Q^2}{r} \left[\frac{2a^2}{3r^2} + 1 \right] \quad (2.3)$$

biçiminde, diğer temsillerle elde edilen ifadenin iki katı gibi bir değer verdiği saptandı. Ayrıca, tüm temsiller için Kerr uzay-zamanındaki enerji yoğunluğunun sifıra eşit olduğu bulundu.

Virbhadr²⁶ tarafından Einstein, Tolman, L-L, Papapetrou ve Weinberg e-m pseudokompleksleri kullanılarak Kerr-Newman Kartezyen koordinatlarda herhangi bir Kerr-Newman metriği için keyfi kütle (M), yük (Q) ve dönme parametreleriyle enerji ve momentum,

$$E(r) = M - \frac{Q^2}{4r} \left[1 + \frac{(a^2 + r^2)}{ar} \arctan\left(\frac{a}{r}\right) \right] \quad (2.4)$$

$$P_1(r) = P_2(r) = P_3(r) = 0 \quad (2.5)$$

ve açısal momentumun uzaysal bileşenleri,

$$J^{12}(r) = a \left\{ M - \frac{Q^2}{4r} \left[1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{(a^2 + r^2)^2}{a^3 r} \arctan\left(\frac{a}{r}\right) \right] \right\} \quad (2.6)$$

$$J^{23}(r) = J^{31}(r) = 0$$

şeklinde elde edildi. $r \rightarrow \infty$ durumunda toplam enerji, momentum ve açısal

momentum ifadeleri sırasıyla $E = M$, $P_1 = P_2 = P_3 = 0$ ve $J^{12} = Ma$ olur. Ayrıca bu çalışmada, Kerr-Newman metriği için enerji ve enerji akım yoğunluğu bileşenleri

$$(L^{00}, L^{10}, L^{20}, L^{30}) = \frac{Q^2 r^4}{8\pi(r^4 + az^2)^3} \times (r^4 + 2a^2 r^2 - a^2 z^2, -2ayr^2, 2axr^2, 0) \quad (2.7)$$

olarak elde edilmiştir. (2.4) denkleminde Kerr kara deliği ($Q = 0$) için sistemin enerjisinin iç bölgede hapsedildiği ve enerjinin r 'den bağımsız olduğu, (2.7) denkleminde de kara deliğin dışında enerji ve enerji akım yoğunluğu bileşenlerinin sıfıra eşit olduğu sonucuna ulaşıldı. Bu sonuçlar, Virbhadra^{22,25,27} ve Cooperstock²⁸ tarafından daha önceki çalışmalarda yapılan varsayımları desteklemektedir. Yine (2.4) denkleminde, Reissner-Nordström ($a = 0$) metriği için enerji

$$E(r) = M - \frac{Q^2}{2r} \quad (2.8)$$

olarak bulunmuştur. (2.8) denkleminin Hawking, Penrose, Ludvigsen-Vickers, Bergqvist-Ludvigsen, Dougan-Mason ve Hayward yarı-yerel kütleleri ile elde edilen sonuçlarla örtüştüğü, buna karşın Komar yarı-yerel kütlesiyle elde edilen

$$E_{Mol}(r) = M - \frac{Q^2}{r} \quad (2.9)$$

şeklindeki enerji ifadesiyle farklılık gösterdiği vurgulanmıştır. Ayrıca, (2.4) denklemini kullanarak Kerr metriği ($Q = 0$) için enerji ifadesinin $E = M$ biçiminde elde edilebileceği ve bu sonucun Komar ve Bergqvist-Ludvigsen yarı-yerel kütleleri kullanılarak elde edilen olay ufku enerjisiyle örtüştüğü, fakat Hawking, Penrose, Dougan-Mason yarı-yerel kütlelerinin birbirlerinden ve Einstein, Tolman, L-L, Papapetrou, Weinberg temsillerinden farklı sonuçlar verdiği ifade edilmiştir. Yine bu çalışmada Bonnor-Vaidya metriği için elde edilen enerji dağılımının Tod²⁹ tarafından Penrose yarı yerel kütlesi için elde edilen sonuçlarla örtüştüğü vurgulanmıştır.

Kerr-Newman metriği için enerji dağılımının hesabı, Xulu³⁰ tarafından Bergmann-Thomson (B-T) e-m pseudokompleksi kullanılarak tekrarlandı. Yapılan hesaplamalar, B-T temsiliyle elde edilen sonuçların daha önce Einstein, Tolman, L-L, Papapetrou ve Weinberg temsilleri kullanılarak elde edilenlerle örtüştüğü saptandı. Bu sonuç, GG kuramında enerji yerelleşmesi için Cooperstock³¹ tarafından ileri sürülen *Cooperstock Hipotezinin* desteklendiğini gösterir.

Xulu³² tarafından Møller temsilini kullanarak statik olmayan ve küresel simetrik biçimindeki en genel metrikler için enerji dağılımları elde edildi ve bu sonuçlar daha önce Einstein temsili kullanılarak elde edilen sonuçlarla^{23,24,33} karşılaştırıldı. Schwarzschild, Vaidya ve Janis-Newman-Winicour uzay-zamanlarında bu iki farklı temsille elde edilen sonuçların birbirleriyle örtüştüğü (tümü için $E_{Eins} = E_{Møl} = M$) fakat Reissner-Nordström uzay-zamanı için Einstein temsili ile elde edilen enerji ifadesinin (2.8) denklemi biçiminde olmasına karşın, Møller temsili ile elde edilen ifadenin (2.9) denklemi biçiminde olduğu bulundu. Bu sonuç, Xulu tarafından Virbhadr³³ ile aynı doğrultuda, Møller temsili koordinat bağımsız olmasına rağmen tanımlı herhangi bir uzay-zamanın enerji dağılımını elde etmek için kullanılabilir en iyi temsilin hala Einstein e-m pseudokompleksi olduğu biçiminde yorumlandı.

Xulu³⁴ tarafından L-L ve Papapetrou pseudokompleksleri kullanılarak Melvin manyetik evreni için enerji dağılımı elde edildi. Yapılan hesaplamalar sonunda bu uzay-zaman için farklı temsillerin aynı sonuçları verdiği bulundu:

$$E_{L-L}(r) = E_{Papa}(r) = \frac{1}{6} B_0^2 r^3 + \frac{1}{20} \frac{G}{c^4} B_0^4 r^5 + \frac{1}{140} \frac{G^2}{c^8} B_0^6 r^6 + \frac{1}{2520} \frac{G^3}{c^{12}} B_0^8 r^9 \quad (2.10)$$

Manyetik alan varlığında sistemin enerjisinde bir artış gözlemlendi ve ayrıca bu çalışmada elde edilen sonuçların daha önceki çalışmada³⁵ Einstein temsili kullanılarak aynı uzay-zaman için elde edilen sonuçlarla birebir örtüştüğü vurgulandı ($E_{Eins} = E_{L-L} = E_{Papa}$). Xulu, bu iki çalışmadaki sonuçların GG kuramında tanımlanan pseudokomplekslerin kullanımlarındaki yararlılıklarını desteklediğini ifade etti. Birkaç yıl sonra Radinschi ve Yang³⁶ tarafından aynı evren modeli için Møller temsili kullanılarak enerji dağılımını hesaplandı. Bu çalışmada, enerji dağılımının

$$E(r) = \frac{1}{3} B_0^2 r^3 - \frac{1}{15} \frac{G}{c^4} B_0^4 r^5 + \frac{1}{70} \frac{G^2}{c^8} B_0^6 r^7 \quad (2.11)$$

biçiminde manyetik alana bağlı olduğu ve Xulu tarafından diğer temsiller kullanılarak elde edilen (2.2) denkleminde farklı olduğu vurgulandı.

Sharif³⁷ tarafından çeşitli e-m pseudokompleksleri kullanılarak farklı kozmolojik modeller için enerji ve momentum değerlendirildi ve bu analiz ayrıca

gravitasyonel dalgalar için de kapsamlaştırıldı: (i) Bianchi-I metriği için Einstein, L-L, Papapetrou ve Weinberg temsilleri kullanılarak enerji dağılımlarının sıfıra eşit olduğu bulundu. (ii) Eksenel olarak simetrik skaler alan durumunda Møller yöntemi kullanılarak enerji dağılımı için Schwarzschild metriği ile tutarlı M kütlesi elde edildi. Ayrıca, düzgün yüklü kara delik, Kerr-Newman metriği ve Melvin manyetik evreni içinde fiziksel açıdan ilgi çekici sonuçlara ulaşıldı. (iii) Ehler-Kundt yöntemi ile düzlem gravitasyonel dalgaların test parçacıklara sabit bir enerji ve momentum aktardığı biçiminde fiziksel açıdan makul bir sonuç elde edildi. Fakat diğer durumlara da uygulanabilecek temel bir formül kanıtlanamadı. Ayrıca Qadir-Sharif formalizmi kullanılarak da aynı sonuçlara ulaşıldı. (iv) Silindirik gravitasyonel dalgalar için Einstein, L-L ve Papapetrou e-m dağılımları kullanılarak birbirlerine benzer ve fiziksel açıdan kabul edilebilir sonuçlar elde edildi. (v) Einstein ve Papapetrou temsilleri kullanılarak dönen silindirik bir grup gravitasyonel dalgalar için e-m dağılımları hesaplandı ve her iki temsilde de sonlu değerler ve iyi tanımlı ifadeler elde edildi. Einstein ve Papapetrou e-m pseudokompleksleri için elde edilen sonuçların tam olarak aynı olmadığı, fakat bazı terimlerim benzer oldukları vurgulandı. (vi) Son olarak küresel gravitasyonel dalgalar için Qadir-Sharif temsili kullanılarak fiziksel olarak makul sonuçlar elde edildi ve bu sonuçların Møller temsili kullanılarak elde edilenleri desteklediği vurgulandı. Sonuç olarak bu incelemelerde birçok uzay-zaman için çeşitli yöntemlerin aynı ve fiziksel olarak anlamlı sonuçları verebileceği bulundu.

Sharif ve Fatima³⁸ tarafından Einstein, L-L, Papapetrou ve Møller e-m pseudokompleksleri kullanılarak Einstein alan denklemlerinin iki tam çözümü için e-m yoğunlukları araştırıldı. Hesaplamalar sıfırdan farklı (non-null) Einstein-Maxwell çözümleri (bu çözümler metrik fonksiyonunun bazı özel değerleri için Gödel çözümlerinin elektromanyetik genellemesine ve Gödel metriğine indirgenir) ve tekilliklerden yoksun kozmolojik model biçimindeki uzay-zamanlar için gerçekleştirildi. Elde edilen sonuçlardan, kullanılan bu dört temsilin de e-m yoğunluk bileşenleri için sonlu değerler ve iyi tanımlı ifadeler verdiği, fakat değerlendirildikleri uzay-zamanların hiç birinde aynı sonuçları vermediği gözlemlendi.

Dąbrowski ve Garecki³⁹ tarafından Einstein ve B-T temsilleri kullanılarak homojen Gödel evrenleri (bir toz bulutu acausal(nedensel olmayan) Gödel evreni ve

bir skaler-alan casual(nedensel) Gödel evreni) için enerji, momentum ve açısız momentum nicelikleri incelendi. Einstein pseudokompleksi ile yapılan hesaplamalarla pseudotensörün izsiz (traceless) olduğu, simetrik olmadığı ve gravitasyonel enerji yoğunluğunun negatif olduğu bulundu. Ayrıca, bu temsilde gravitasyonel Poynting vektörünün sıfıra eşit olduğu görüldü. Öte yandan, toplam (madde ve gravitasyonel alan) enerji yoğunluğu acausal model için sıfır olmasının karşın causal model için negatif olarak elde edildi. Açısız momentum dağılımı için ise B-T açısız momentum pseudokompleksi kullanılarak her iki Gödel modelinde de sıfırdan farklı sonuçlar elde edildi.

Gad⁴⁰ tarafından Møller e-m pseudokompleksi kullanılarak Weyl metriği için enerji ve momentum yoğunlukları hesaplandı. Ayrıca, bu sonuçlar yardımıyla Weyl metriğinin özel bir durumuna karşılık gelen Curzon metriği için enerji ve momentum yoğunlukları da elde edildi. Bu hesaplamalarla elde edilen sonuçlar Gad⁴¹ tarafından daha önce dört farklı temsil (Einstein, L-L, Papapetrou, B-T) kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Sonuç olarak Møller temsilinin diğer dört temsilden farklı enerji yoğunluğu vermesine karşın aynı momentum yoğunluğu verdiği gösterildi. Öte yandan, Møller temsiliyle elde edilen enerji yoğunluğunun sadece $r \rightarrow \infty$ durumunda diğer dört temsil kullanılarak elde edilenle örtüştüğü bulundu.

Gad ve Fouad⁴² tarafından Einstein, B-T, L-L ve Papapetrou e-m pseudokompleksleri kullanılarak Kantowski-Sachs uzay-zamanı için enerji ve momentum dağılımı araştırıldı. Yapılan hesaplamalar sonunda Einstein ve B-T temsilleriyle enerji dağılımları için

$$\begin{aligned}
 E_{Eins}(=P_0) &= E_{B-T}(=P^0) = \frac{1}{2Ar} (A^2 r^2 + B^2) \\
 P_1 &= P_2 = P_3 = 0 \\
 P^1 &= P^2 = P^3 = 0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

biçiminde aynı ifadeler elde edilmesine karşın, L-L ve Papapetrou temsiliyle enerji dağılımları için,

$$\begin{aligned}
E_{L-L}(=P^0) &= \frac{B^2}{2r^3}(A^2r^2 + B^2) \\
E_{Pap}(=P^0) &= \frac{A}{2r}(r^2 + B^2) \\
P^1 = P^2 = P^3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

biçiminde birbirlerinden ve diğer temsillerden farklı değerler elde edildi.

GG kuramında sisteme ve özellikle gravitasyonel alana ait enerjiyle bağlantılı niceliklerin tanımlanması adına araştırmalar bu şekilde devam ederken daha önce de sözü edildiği gibi enerji problemi için fiziksel açıdan daha anlamlı sonuçlar elde etme adına alternatif kuramlar da (özellikle ayar kuramlarına dayalı) geliştirilmektedir. Bu alternatif kuramlardan birinin Møller⁴³ tarafından tetrad uzayında yeni bir alan kuramı yapılandırılarak oluşturulduğu ifade edilmişti (Bu kuram, TPG kuramı kapsamında da değerlendirilebilir). Bu kuramın ortaya çıkışından kısa bir süre sonra Meyer⁴⁴ tarafından parametrelerin özel olarak seçilmesi durumunda Poincaré ayar kuramının Møller kuramını da kapsadığı gösterildi. Her iki kuramda da korunum yasalarının alan denklemlerinden türetilebileceği ve bu ifadelerin GG kuramındakilerle aynı biçime sahip oldukları bulundu. Ayrıca alan denklemlerinin invaryanslık özellikleri de karşılaştırıldı.

Saen ve Juan⁴⁵ tarafından Møller' in kuramı çerçevesinde özel bir tetrad alanı kullanılarak homojen izotropik kozmolojiler tanımlandı. Bu çalışmada, enerji yoğunluğunun herhangi bir olası değeri için evrenin açık veya kapalı olabileceği kanıtlandı. Ayrıca görünür boyut M ile M 'den daha büyük boyutlu galaksilerin sayısı arasındaki ilişkinin GG kuramındakinden farklı olduğu bulundu.

Mikhail ve ark.⁴⁶ tarafından Møller Lagrangianı kullanılarak MGT kuramı için süperpotansiyel ve e-m pseudokompleksi türetildi (bu temsil Møller 'in teleparalel versiyonu olarak da adlandırılır). Küresel simetrik durumlar için Møller denklemlerinin iki farklı tam çözümü elde edildi ve türetilen süperpotansiyel kullanılarak her bir çözüm için enerji değerleri bulundu. Bu iki farklı çözümün aynı Riemannian (Schwarzschild) metriğini vermesine rağmen farklı enerji değerleri verdiği bulundu. Bu durumun Møller kuramında bazı çelişkilerin varlığına işaret ettiği ve bu çelişkilerden kurtulmak için bazı önerilerin değerlendirilebileceği ifade edildi. Bir sonraki yıl yine Mikhail ve ark.⁴⁷ tarafından küresel simetrik ve öz olmayan (improper) dönmelere karşılık gelen tetradlar için Møller alan

denklemlerinin genel çözümü elde edildi ve önceki çalışmada ulaşılan çözümlerin bu genel çözümün özel durumlarına karşılık geldiği kanıtlandı.

Shirafuji ve ark.⁴⁸ tarafından gravitasyonel tetrad kuramının özel bir grubunda (MGT) küresel simetrik durum için en genel çözüm bulundu ve tetradların Schwarzschild metriğini verdiği gösterildi. Bu çalışmada, Euclide uzanım ve süperpotansiyel yöntemleri kullanılarak enerji ifadeleri hesaplandı. Tetradların uzay-zaman bileşenlerinin sonsuzda $1/\sqrt{r}$ 'den daha hızlı sifıra gitmemesi koşuluyla bu iki yöntemin birbirlerinden farklı sonuçlar verdiği ve bu sonuçların merkezi çekim kısmına ait gravitasyonel kütleden farklı olduğu bulundu. Sonuç olarak bu durumun yalıtılmış bir küresel kısmı tanımlayan tetrad uzay-zaman bileşenlerinin sonsuzda $1/\sqrt{r}$ 'den daha hızlı sifıra gitmesi gerektiği gerçeğini gösterdiği ifade edildi.

Nashed⁴⁹ tarafından MGT kuramına ait e-m pseudokompleksi⁴³ kullanılarak Kerr uzay-zamanı için enerji dağılımı değerlendirildi ve hesaplamalar sonunda bu uzay-zamandaki enerji ifadesi $E = M$ olarak bulundu. Sonuç olarak elde edilen bu sonucun fiziksel açıdan makul ve GG kuramında elde edilen sonuçlarla^{22,25,26} örtüştüğü ifade edildi.

Aydoğdu ve Saltı⁵⁰ tarafından MGT kuramına ait e-m pseudokompleksi⁴⁶ kullanılarak Bianchi-I kozmolojik modeller için evrenin toplam enerjisi incelendi. Hesaplamalar sonunda toplam enerji sifıra eşit olarak bulundu ve bu sonucun GG kuramında farklı temsiller kullanılarak elde edilen sonuçlarla^{15,17,18,19,37} örtüştüğü ifade edildi. Ayrıca Bianchi-I evren modelleri için elde edilen bu sonuçların da Tryon¹⁴ un düşüncesini desteklediği vurgulandı. Sonuç olarak, daha önce GG kuramı kapsamında incelenen bu problemin burada kullanılan temsil sayesinde alternatif bir kuram için genişletildiği ifade edildi.

Aydoğdu ve Saltı⁵¹ tarafından iki farklı gravite kuramında (GG ve MTG) Møller e-m pseudokompleksleri kullanılarak sekiz farklı kara delik modeli için enerji dağılımı değerlendirildi (küresel topolojili anti-de Sitter C metriği, düzgün yüklü kara delik, konformal skaler dyon kara deliği, yüklü bir kara delik dyadosphere, düzgün kara delik, yüklü topolojik kara delik, yüklü kütleless bir skaler alanlı kara delik ve Schwarzschild-de Sitter uzay-zamanı). Hesaplamalar sonunda bu farklı gravitasyonel kuramların ikisinde de aynı enerji dağılımı ifadesi elde edildi. Ayrıca, yine aynı yazarlar⁵² tarafından farklı bir çalışmada yine iki farklı kurama (GG ve MGT) ait

Møller temsilleri kullanılarak Reissner-Nordström kara deliği için dyadosphere bölgede enerji dağılımı değerlendirildi. Møller temsilinin bu iki farklı kuramdaki versiyonları için de aynı ve fiziksel olarak makul enerji ifadesi bulundu. Sonuç olarak bu iki çalışmada elde edilen bulguların; (i) tanımlı bir uzay zaman için enerji dağılımını değerlendirme konusunda e-m pseudokomplekslerinin önemini ve (ii) Lessner⁵³ in tanımlı bir uzay-zamanda enerji dağılımını hesaplamak için en etkili temsilin Møller temsili olduğu düşüncesini güçlendirdiği ifade edildi.

Genel Görelilikteki Einstein, L-L ve B-T enerji-momentum pseudokompleksi ifadelerinin teleparalel versiyonları Vargas⁵⁴ tarafından tanımlandı ve bu temsillerden Einstein ile L-L pseudokompleksleri kullanılarak homojen, izotropik ve açık Friedman-Robinson-Walker evren modeli için toplam enerjisinin sıfıra eşit olduğu bulundu. Bu sonucun, literatürdeki^{15,24,55} mevcut GG kuramında elde edilen sonuçlarla örtüştüğü ifade edildi.

Sharif ve Amir⁵⁶ tarafından Møller temsilinin teleparalel versiyonu kullanılarak kararlı aksi-simetrik Lewis-Papapetrou uzay zamanları için e-m dağılımı değerlendirildi. Hesaplamalar sonunda enerji yoğunluğunun sıfırdan farklı ve iyi tanımlı, momentumun ise θ doğrultusu dışında sabit bir değere sahip olduğu bulundu. Yine aynı yazarlar⁵⁷ tarafından aynı temsil kullanılarak uzaysal olarak homojen dönen uzay-zamanlar için e-m dağılımı incelendi. Yapılan hesaplamalarla enerji ve momentum yoğunluğu için sonlu ve iyi tanımlı, fakat GG kuramında elde edilenden farklı sonuçlara ulaşıldı. Öte yandan, bazı varsayımların yapılması durumunda enerji ve momentum yoğunluğu bileşenlerinin her iki kuramda da aynı değere sahip olabilecekleri gösterildi. Ayrıca bu nicelikler uzaysal olarak homojen dönen uzay-zamanların bazı özel durumları için analiz edildi.

Sharif ve Amir⁵⁸ tarafından Levi-Civita metriğinin teleparalel versiyonu bulundu ve tetrad ve burulma alanları elde edildi. Burulma tensörünün vektör, tensör ve aksiyal-vektör kısımları değerlendirildi ve vektör kısmının sadece radyal yön doğrultusunda uzandığı, aksiyal-vektör kısmının ise metriğin köşegen olmasından dolayı her yerde sıfıra eşit olduğu bulundu. Yine aynı çalışmada Einstein, L-L, B-T ve Møller temsillerinin teleparalel versiyonları kullanılarak bu metrik için e-m dağılımları bulundu ve sonuçlar daha önce GG kuramı çerçevesinden elde edilenlerle karşılaştırıldı. Momentum ifadesinin her iki kuramda ve tüm temsiller için sabit

olduğu, enerji ifadesi için ise iki farklı kuramda sadece Møller temsilleriyle elde edilen sonuçların denk olduğu gözlemlendi. Ayrıca, Møller e-m dağılımının teleparalel kuramdaki bağlanma sabiti λ 'dan bağımsız olduğu sonucuna varıldı.

Sharif ve Nazir⁵⁹ tarafından Einstein, L-L, B-T ve Møller temsillerin GG ve TPG kuramlarındaki versiyonları kullanılarak Bell-Szekeres metriği için bu iki kuramda enerji-momentum dağılımı araştırıldı. Hesaplamalar sonunda bu temsillerin tümünün her iki kuramda da aynı e-m yoğunluk bileşenlerini verdiği gösterildi. Ayrıca Møller temsiliyle her iki kuramda da sabit bir enerji ifadesi elde edildi.

Reboucas-Tiomno-Korotkii-Obukhov ve Gödel metrikleri için Aydoğdu ve ark.⁶⁰ tarafından GG ve TPG kuramlarında B-T enerji-momentum pseudokompleksi kullanılarak toplam enerji araştırıldı. Ayrıca, yine bu uzay-zamanlar için bazı kinematiksel nicelikler hesaplandı ve elde edilen sonuçlardan bu uzay-zamanların kesmenin olmadığı (shear-free) genişleme ve sıfırdan farklı dört-ivme ve girdap özellikli (vorticity) oldukları bulundu. İki farklı gravitasyonel kuramdaki B-T temsillerinin farklı yaklaşımlar durumunda aynı ve birbirleriyle uyumlu enerji yoğunluğu ifadesi verdiği gözlemlendi.

Koronur ve ark.⁶¹ tarafından Einstein, L-L, B-T temsillerinin GG ve TPG kuramlarındaki versiyonları kullanılarak en genel köşegensel metriğin betimlediği bir evren modeli için enerji ve momentum nicelikleri değerlendirildi. Hesaplamalar sonunda, Einstein ve B-T temsilleriyle aynı enerji dağılımı elde edildi, buna karşın L-L temsili durumunda diğer iki temsilin verdiği değerlerle örtüşmeyen bir değere ulaşıldı. Ayrıca, iyi bilinen ve önemli uzay-zaman modellerinden sekiz tanesi değerlendirilerek ve bu modeller için enerji dağılımları hesaplandı. Bianchi-I modeli için tüm temsiller yardımıyla aynı sonuca ulaşıldı. Bu sonucun daha önce bir çok yazar^{15,16,18,228,34,54} tarafından elde edilenlerle örtüştüğu ve bunun sonucu olarak Tryon¹⁴ tarafından ortaya atılan görüşleri desteklediği vurgulandı.

KAYNAKLAR

1. Einstein, A. *The Foundation of the General Theory of the Relativity*, Dover Publications, Inc., New York. **1916**.
2. Tolman, R.C. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford Univ. Press, London. **1934**.
3. Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley Press. **1987**.
4. Bergmann, P.G.; Thomson, R. *Phys. Rev.* **1953**, D89, 400–407.
5. Papapetrou, A. *Proc. R. Irish Acad.* **1948**, A52, 11.
6. Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principle and Applications of General Theory of Relativity*, Wiley, New York, **1972**.
7. Qadir, A. Sharif, M., *Phys. Lett.* **1992**, A167, 331–334.
8. Møller, C. *Ann. Phys.* **1958**, 4, 347–371.
9. Møller, C. *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **1961**, 10, 1–50.
10. Pellegrini, C.; Plebanski, J. *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.*, **1962**, 2, 2.
11. Hayashi, K.; Nakano, T. *Prog. Theor. Phys.* **1967**, Vol38, No2, 491–507.
12. Hayashi, K. *Phys. Lett.* **1977**, B69, 441.
13. Hayashi, K.; Shirafuji, T. *Phys. Rev.* **1979**, D19, 3524–3553.
14. Tryon, E. P. *Nature* **1973**, 246–396.
15. Rosen, N. *Gen. Rel. Grav.* **1994**, 26, 319–321.
16. Johri, V. B.; Kalligas, Ç. D.; Singh, G. P.; Everitt, C. W. F., *Gen. Rel. Grav.* , **1995**, 27, 313–318.
17. Xulu, S. S. *Int. J. Theor. Phys.* **2000**, 39, 1153–1161.
18. Banerjee, N.; Sen, S. *Pramana-Journal of Physics*, **1997**, 49, 609.
19. Radinschi, I. *Acta Phys.Slov.*, **2000**, 50, 609-614.
20. Radinschi, I. *Mod. Phys. Lett.* **2000**, A15, 2171–2176.
21. Yang, I-C. *Chin. J. Phys.* **2000**, 38, 1040–1043.
22. Virbhadra, K. S. *Phys. Rev.* **1990**, D41, 1086–1090.
23. Vaidya, C. P. *J. Univ. Bombay*, **1952**, XX1, Part 3, 1.
24. Tod, K. P. *Proc. R. Soc.* **1983**, A388, 457.

25. Virbhadra, K. S. *Phys. Rev.* **1990**, D42, 2919–2921.
26. Aguirregabiria, M. J.; Chamorro, A.; Virbhadra K.S. *Gen.Rel.Grav.* **1996**, 28, 1393–1400.
27. Virbhadra, K. S. *Phys. Rev.* **1990**, D42, 1066–1067.
28. Cooperstock, F. I. in *Topics on Quantum Gravity and Beyond*, Essays in honor of L. Witten on his retirement, edited by F. Mansouri and J. J. Scanio, World Scientific, Singapore, **1993**; *Gen. Relativ. Grav.* **1994**, 26, 323–2327.
29. Aguirregabiria, J. M.; Chamorro, A.; Virbhadra, K. S. (Tod, K. P. ile yapılan özel görüşme) *Gen. Relativ. Grav.* **1996**, 28, 1393–1400
30. Xulu, S. S. arXiv:hep-th/0308077
31. Cooperstock, F. I. *Mod. Phys Lett.* **1999**, A14, 1531.; *Annals of Phys.* **2000**, 282, 115.; Faraoni, V.; Cooperstock, F. I. *Astrophys. J.* 2003, 587, 483.; Cooperstock, F. I.; Tieu, S. *gr-qc/0302020*.
32. Xulu, S. S. *Astrophys.Space Sci.* **2003**, 283, 23–32.
33. Virbhadra, K. S. *Phys. Rev.* **1999**, D60, 104041(6 sayfa).
34. Xulu, S. S. *Int. J. Mod. Phys.* **2000**, A15, 4849–4856.
35. Xulu, S. S. *Int.J.Mod.Phys.* **2000**, A15, 2979–2986
36. Radinschi, I.; Yang, I-C. *Fizika* **2005**, B14, 311-316.
37. Sharif, M. *Nuovo Cim.* **2003**, B118, 669–683,
38. Sharif, M.; Fatima, T. *Int.J.Mod.Phys.* **2005**, A20, 4309–4337.
39. Dąbrowski, M. P.; Garecki, J. *Phys.Rev.* **2004**, D70 043511 (10 sayfa)
40. Gad, R.M. *Astrophys. Space Sci.* **2006**, 302, 141.
41. Gad, R.M. *Astrophys. Space Sci.* **2004**, 295, 459.
42. Gad, R.M.; Fouad, A. *Astrophys. Space Sci.* **2007**, 310, 135.
43. Møller, C. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **1978**, 39, No.13, 1–131.
44. Meyer, H. *Gen. Rel. Grav.* **1982**, 14, 531–547.
45. Saez, D.; de Juan, T. *Gen. Rel. Grav.* **1984**, 16, 501–512.
46. Mikhail, F.I.; Wanas, M.I.; Hindawi, A.; Lashin, E.I. *Int. J. Theo.Phys.* **1993**, 32, 1627–1642.
47. Mikhail, F.I.; Wanas, M.I.; Lashin E.I.; Hindawi, A. *Gen. Rel. Grav.* **1994**, 26, 869–876.

48. Shirafuji, T.; Nashed, G. G.; Hayashi, K. *Prog. Theo. Physics* **1995**, Vol. 95, No. 3, 665–678.
49. Nashed, Gamal G. L. *Nuovo Cim.* **2004**, B119, 967–975.
50. Aydoğdu, O.; Saltı, M. *Astrophys.Space Sci.* **2005**, 299, 227–232.
51. Saltı, M.; Aydoğdu, O. *Int. J. Theor. Phys.* **2006**, 45, 2481–2495.
52. Aydoğdu, O.; Saltı, M. *Pramana* **2006**, 67, 239–247.
53. Lessner, G. *Gen. Relativ. Gravit.* **1990**, 28, 527–536.
54. Vargas, T. *Gen. Rel. Grav.* **2004**, 36, 1255–1264.
55. Penrose, R. *Proc. Roy. Soc.* **1982**, A381, 53.
56. Sharif, M.; Amir, M. J. *Mod. Phys. Lett.* **2007**, A22, 425–434; Addendum-ibid **2009**, A23, 3431–3433.
57. Sharif, M.; Amir, M. J. *Int. J. Theor. Phys.* **2008**, 47, 1742–1750.
58. Sharif, M.; Amir, M. J. *Can. J. Phys.* **2008**, 86, 1091–1096.
59. Sharif, M.; Nazir, K. *Braz. J. Phys.* **2008**, 38, 156–166.
60. Aydoğdu, O.; Saltı, M.; Korunur, M. *Acta Phys. Slov.* **2005**, 55, 537–548.
61. Korunur, M.; Havare, A.; Saltı, M. *Pramana*, **2006**, 68, 735–748.

3. MATERYAL ve METOT

3.1. TENSÖR CEBİRİ

3.1.1. Tensörler

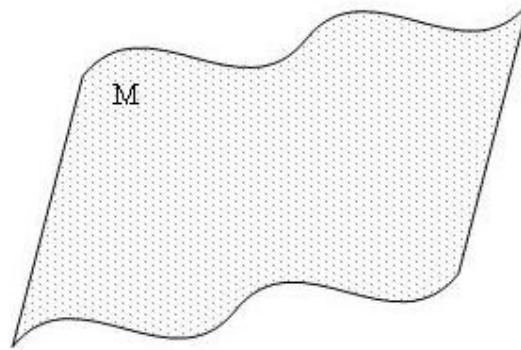
Newton kuramı ile ilgili çalışmalarda vektörleri etkili bir biçimde kullanabilmemiz gerekir. Çünkü vektörler birden fazla denklem takımını tek bir denkleme indirger, yani özetleyicidir. Ayrıca problemleri görünür hale getirir ve denklemlerin kolayca çözümlerini sağlar. Newton kuramında vektörlerin kullanımına benzer biçimde görelilik kuramlarında da bu görevi tensörler üstlenmektedir ve vektörlerin Newton kuramında sağladığı tüm katkılar tensörler tarafından görelilik kuramlarında sağlanır.

Tensörler ilk olarak Ricci-Curbastro ve Levi-Civita tarafından 1900 'lerden önce geliştirildi ve katların esnek şekil değişikliğini(deformasyonunu) tanımlamak için kullanıldı. Temel düşüncesini Riemann'dan aldı ve asıl önemini GG kuramının yayınlanması ile kazandı ve sonuç olarak fizikte zaten birer tensör olan vektörler gibi evrensel bir dil haline geldi.

Genel anlamda tensörler, koordinat dönüşümleri durumunda çeşitli özelliklere göre dönüşen ve manifold olarak adlandırılan bir geometri (uzay-zaman) üzerinden tanımlanan niceliklerdir. Vektörler ve skalerler, tensörlerin özel bir durumuna karşılık gelen niceliklerdir; örneğin, 1-ranklı tensör bir vektör ve 0-ranklı bir tensör ise skalerdir.

3.1.2. Manifold

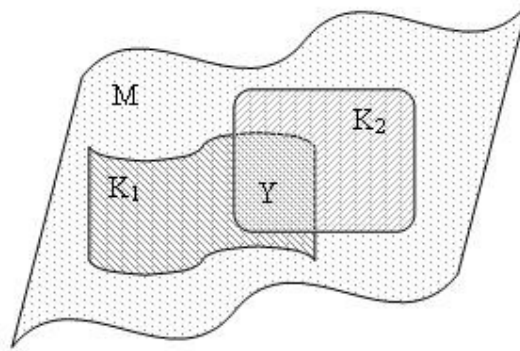
Basit bir tanım yapacak olursak manifold, yerel olarak n-boyutlu Euclidean uzayının bir parçasına benzeyen bir geometridir. Genel anlamda, sürekli olarak parametre edilebilen herhangi bir cümleye denir.



Şekil - 1

Bu cümledeki herhangi bir noktayı özel olarak belirtmek için gerekli bağımsız parametre sayısına manifoldun boyutu, parametrelerin kendilerine ise manifoldun koordinatları denir. Şekil-1 'deki M manifoldu N-boyutlu olsun, bu durumda bu manifold üzerindeki her nokta N-boyutlu bir Euclide uzayı gibi düşünülebilir ve bu her noktadaki uzay $x^1, x^2, x^3, \dots, x^N$ tane gerçel bağımsız koordinat tarafından temsil edilir. Örneğin, klasik mekanikte bir parçacığın faz uzayının konum koordinatları (q_1, q_2, q_3) ve momentum uzayı koordinatları (p_1, p_2, p_3) ile parametre edilebilir, bu durumda faz uzayındaki noktaların bir cümlesi 6-boyutlu bir manifoldu ve bu parametrelerin her biri bu manifoldun koordinatlarını tanımlar. Özet olarak, manifold öyle bir matematiksel uzaydır ki her bir noktasının komşuluğu bir Euclide uzayına benzer.

Manifold ile ilgili kilit nokta herhangi bir manifoldun bütününün soysuzlaşmamış bir koordinat sistemiyle kaplanamayacağı gerçeğidir. Bu yüzden, herhangi bir manifold en az iki farklı koordinat sistemiyle yamalanarak (bkz. Şekil-2) kaplanabilir ve böyle bir durumda da bu koordinat sistemleri bazı bölgelerde (Y bölgesi) üst üste gelir.



Şekil - 2

Dolayısıyla, manifoldun sadece bir kısmını (veya bütününü) kaplayan ve koordinat yamaları olarak adlandırılan (K_1 ve K_2) koordinat sistemleriyle çalışmak zorundayız^{1,2}.

Manifold kuramında üst üste gelen bu bölgede gerçekleştirilecek bir koordinat dönüşümü bir koordinat yamasından değerini elde etmemizi sağlar.

Koordinat dönüşümleri altında geometrik niceliklerin davranışları da tensör hesabında saklıdır.

3.1.3. Koordinat Dönüşümleri

Daha önceki tanımlarda da anlaşıldığı gibi manifold üzerindeki herhangi bir nokta birçok farklı koordinat yamalarıyla kaplanabilir. Bu koordinat yamalarının manifold üzerinde üst üste geldikleri nokta(noktalar)da bir koordinattan diğerine gittiğimiz zaman niceliklerin nasıl davrandıklarını bilmemiz gerekir. Bu amaçla

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} \quad (3.1)$$

biçiminde verilen bir koordinat dönüşümü göz önüne alırız. Yeni koordinatlardaki her bir ifadenin eski koordinatlar cinsinden türevini alarak $n \times n$ 'lik bir katsayılar dönüşüm matrisi elde ederiz.

$$\left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (3.2)$$

Koordinat dönüşümleri gerçekleştirilirken dönüşüm denklemleri, bu katsayılar dönüşüm matrisinin elemanları kullanılarak yazılır. Bu katsayılar matrisinin determinanı, dönüşümün Jacobianı olarak adlandırılır.

$$J' = \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| \quad (3.3)$$

3.1.4. Kontravaryant, Kovaryant ve Karma Tensörler

Manifold üzerinde seçilen iki noktayı birleştiren sonsuz küçük bir yer değiştirme tensörünü değerlendirelim. Bu yer değiştirme tensörü x^{μ} koordinat sisteminde dx^{μ} ve x'^{μ} koordinat sisteminde ise dx'^{μ} ile temsil edilir. Dolayısıyla katsayılar dönüşüm matrisinin elemanları kullanılarak x^{μ} koordinat sisteminden x'^{μ} koordinat sistemine dönüşüm;

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad (3.4)$$

biçiminde bir bağıntı ile sağlanabilir. Bu (3.4) dönüşüm kuralı *kontravaryant tensör* olarak adlandırılan bir tensör grubu için;

$$T'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} T^{\nu} \quad (3.5)$$

biçiminde genelleştirilebilir. Daha yüksek ranklı bir tensör için dönüşüm ise

$$T'^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} \dots T^{\lambda\kappa\dots} \quad (3.6)$$

biçiminde olur.

İncelediğimiz bu dönüşüm kuralı uzaydaki tüm tensörlere uygulanamayabilir.

Örneğin, parçalı türev işlemcisi $\partial/\partial x^{\mu}$,

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \quad \partial'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \quad (3.7)$$

biçiminde dönüşür, yani dönüşüm katsayıları kontravaryant tensörlerin dönüşüm katsayılarının tam tersi olur. Bu sebeple, (3.7) dönüşüm kuralı *kovaryant tensör* olarak adlandırılan bir tensör grubu için genelleştirilebilir:

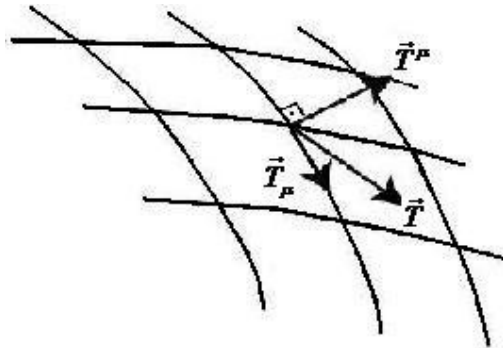
$$T'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} T_{\nu} \quad (3.8)$$

Benzer biçimde daha yüksek ranklı kovaryant tensör için dönüşüm denklemi,

$$T'_{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} \dots T_{\lambda\kappa\dots} \quad (3.9)$$

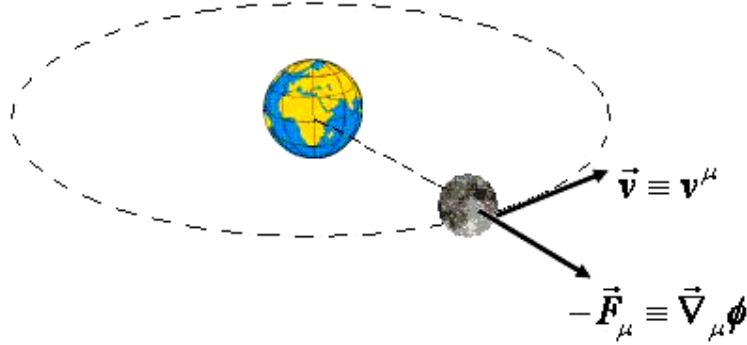
biçiminde olur.

Kontravaryant tensör ile kovaryant tensör arasındaki fark 1-ranklı tensör için ifade edilen Şekil-3 'ten açıkça görülebilir:



Şekil - 3

Yüzey üzerindeki bir tensörün bu yüzeye teğet olan bileşeni kontravaryant, yüzeye dik olan bileşeni ise kovaryant tensör bileşenidir³. Örneğin, iki kütleli etkileşimini ifade eden aşağıdaki mekanik sistemde



Şekil - 4

yörüngede dolaşan kütleli hız vektörü bir kontravaryant tensör ile temsil edilirken, bir skaler fonksiyonun gradiyenti olan etkileşme (çekim) kuvveti ise kovaryant tensör ile temsil edilir.

Yukarıda incelediğimiz iki tensör grubunun yanı sıra hem dönüşüm hem de ters dönüşüm matrisinin elemanlarını içeren, diğer bir ifadeyle hem kontravaryant hem de kovaryant rankı sıfırdan farklı olan ve *karma tensörler* diye adlandırılan tensör grubu vardır. Bu tensör grubu için dönüşüm denklemi,

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu}} T^{\kappa}_{\alpha\beta} \quad (3.10)$$

biçiminde olur.

Rank cinsinden tensörler (p, q) ifadesi ile gösterilir. Burada p , tensörün kontravaryant rankı ve q ise kovaryant rankı temsil eder. Örneğin, bir skaler $(0, 0)$ basamaktan ve bir kontravaryant vektör $(1, 0)$ basamaktan bir tensördür.

3.1.5. Tensörlerde Temel İşlemler

Buradaki temel işlemler, bir ya da daha fazla tensör kullanılarak yapılan hesaplamalar sonunda yine tensör olan herhangi bir niceliğin elde edildiği işlemlerdir. Bir niceliğin tensör olup olmadığı ise ancak koordinat dönüşümü altındaki davranışına (invariant kalıp kalmadığını) bakılarak anlaşılır.

Aynı (p, q) basamaktan tensörler toplanabilir ve çıkarılabilir. A^μ_ν ve B^μ_ν birer tensör olmak üzere

$$T^\mu_\nu = A^\mu_\nu \pm B^\mu_\nu \quad (3.11)$$

yazılabilir. Eğer T^μ_ν ifadesi dönüşüm kuralına uyuyorsa tensör olan iki ifadenin toplamının ya da farkının da bir tensör olduğu söylenebilir.

ISPAT:

$$T'^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} A^\lambda_\kappa + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} B^\lambda_\kappa \quad (3.12)$$

$$T'^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} (A^\lambda_\kappa + B^\lambda_\kappa) \quad (3.13)$$

$$T'^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} T^\lambda_\kappa \quad (3.14)$$

Bu sonuç T^μ_ν 'nin bir tensör olduğunu gösterir.

(p_1, q_1) Basamaktan bir tensör ile (p_2, q_2) basamaktan bir tensörün çarpımı $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ basamaktan bir tensör ile sonuçlanır:

$$T^{\mu\nu}_\lambda = A^\mu B^\nu_\lambda. \quad (3.15)$$

(p, q) Basamağından bir tensör ϕ gibi bir skalerle çarpıldığı zaman sonuç yine (p, q) basamaktan bir tensördür.

(p, q) Basamaktan bir tensör, büzme işlemi ile farklı basamaktan bir tensöre dönüştürülebilir. Örneğin, $T^{\mu\lambda\kappa}_\nu$ biçimindeki bir tensörde ν ile κ 'yı birbirlerine eşit olarak alırsak

$$T^{\mu\lambda\kappa}_\nu = T^{\mu\lambda} \quad (3.16)$$

biçiminde bir tensör elde edilir.

ISPAT:

$$T'^{\mu\lambda\kappa}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\nu} T^{\alpha\beta\gamma}_\delta \quad (3.17)$$

$\nu = \kappa$ için;

$$T'^{\mu\lambda\nu}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} T^{\alpha\beta\gamma}_\gamma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \delta^\gamma_\gamma T^{\alpha\beta}_\gamma \quad (3.18)$$

$$T'^{\mu\lambda\nu}_\nu = T'^{\mu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}. \quad (3.19)$$

Yukarıdaki bu üç işlem çeşitli amaçlar için birleştirilerek uygulanabilir. Özellikle indis alçaltma ya da yükseltme amacıyla çarpma işlemi ile büzme işlemi birlikte kullanılabilir. Örneğin, $A_{\mu\nu}$ ile $B_{\lambda}{}^{\mu}$ gibi iki tensörün çarpımı,

$$A_{\mu\nu}B_{\lambda}{}^{\mu} = T_{\nu\lambda} \quad (3.20)$$

ile sonuçlanır.

$\varphi = \varphi(x^{\mu})$ ifadesinin skaler bir alanı (0-ranklı en basit tensör alanı) temsil ettiğini varsayalım, bu durumda φ 'nin parçalı türevi,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}} = \varphi_{,\nu} \quad (3.21)$$

olur ve bu ifade,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} \quad (3.22)$$

biçiminde tensör dönüşüm kuralına uyan bir kovaryant tensördür. t_{μ} gibi 1-ranklı kovaryant tensörün kısmi türevi,

$$\frac{\partial t_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = t_{\mu,\nu} \quad (3.23)$$

olur. Bu ifade için dönüşüm denklemi ise

$$\frac{\partial t'_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} t_{\lambda} \right) = \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} t_{\lambda} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial t_{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} \quad (3.24)$$

biçiminde olur. (3.24) denkleminin sağ tarafındaki birinci terim olmasaydı bu denklemin 2-ranklı bir kovaryant tensör için dönüşüm kuralını sağladığı söylenebilirdi, fakat bu terimden dolayı denklem dönüşüm kuralına uymaz ve dolayısıyla $t_{\mu,\nu}$ ifadesinin bir tensör olmadığı anlaşılır. Sonuç olarak, 0-ranklı tensörler dışındaki tensörlerle yapılan kısmi türev işlemleri tensöriyel olmayan ifadelerle sonuçlanır.

3.1.6. Simetrik ve Anti-simetrik Tensörler

$T^{\mu\nu}$ biçimindeki bir kontravaryant tensör x^{μ} gibi herhangi bir koordinat sisteminde simetrik (yada anti-simetrik) ise bu durumda bu tensörün tüm koordinat sistemlerinde simetrik (yada anti-simetrik) olduğu söylenebilir ve bu simetri (yada anti-simetri) durumu

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} , \quad \text{simetri} \quad (3.25)$$

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu} , \text{ anti-simetri} \quad (3.26)$$

ile gösterilir. Aynı tanımlamalar kovaryant tensörler için de geçerlidir. Simetrik kovaryant tensör $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ ve anti-simetrik kovaryant tensör $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ 'dır. Karma tensörlerle ilgili genelleştirilebilecek herhangi bir simetri ya da anti-simetri durumu yoktur.

2-ranklı bir kontravaryant ya da kovaryant tensör bir simetrik ve bir anti-simetrik tensörün toplamı biçiminde yazılabilir:

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} . \quad (3.27)$$

Burada,

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} , \quad S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \quad (3.28)$$

ve

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} , \quad A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \quad (3.29)$$

olarak tanımlanır.

$T^{\mu\nu}$ gibi kontravaryant bir tensörün matris formu aşağıdaki gibi olur:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{11} & \dots & T^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{n1} & \dots & T^{nn} \end{pmatrix} . \quad (3.30)$$

Yukarıdaki $T^{\mu\nu}$ tensörünün simetrik olması durumunda bağımsız bileşenlerinin sayısı,

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad (3.31)$$

ya da anti-simetrik olması durumunda bağımsız bileşenlerinin sayısı,

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad (3.32)$$

yardımla hesaplanır.

Genel anlamda, simetri ya da anti-simetri durumu tanımlayacak olursak $T^{\mu\nu\lambda}$ gibi bir tensörün $T^{\mu\nu\lambda} = T^{\nu\mu\lambda}$ ya da $T^{\mu\nu\lambda} = -T^{\nu\mu\lambda}$ olması durumunda μ ile ν indislerine göre simetrik ya da anti-simetrik olduğu söylenir ve bu durum tüm koordinat sistemlerinde geçerlidir. Ayrıca, $T^{\mu\nu\lambda} = T^{\nu\mu\lambda} = T^{\lambda\nu\mu} = T^{\mu\lambda\nu}$ ya da

$T^{\mu\nu\lambda} = -T^{\nu\mu\lambda} = -T^{\lambda\nu\mu} = -T^{\mu\lambda\nu}$ durumunda ise $T^{\mu\nu\lambda}$ tensörünün tam simetri ya da anti-simetriye sahip olduğu söylenir ve bu durum tüm koordinat sistemlerinde geçerlidir.

3.1.7. Tensör Yoğunlukları

Tensör yoğunlukları, koordinat dönüşümü yapılırken dönüşüm denkleminin dönüşüm Jacobianının belli kuvvetleriyle de çarpımı dışında aynen tensörler gibi dönüşen nicelikleridir. Örneğin, 2-ranklı ve w ağırlıklı bir tensör yoğunluğu için dönüşüm kuralı,

$$\mathfrak{S}^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\nu}} \mathfrak{S}^{\lambda}_{\kappa} \quad (3.33)$$

biçimindedir. Buradaki tensör yoğunluğu $\mathfrak{S}^{\lambda}_{\kappa}$

$$\mathfrak{S}^{\lambda}_{\kappa} = \det \left| \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu\kappa}} \right|^w T^{\lambda}_{\kappa} = \sqrt{(-g)}^w T^{\lambda}_{\kappa} \quad (3.34)$$

olarak tanımlanır ve Jacobianın kuvveti (w) ağırlık olarak adlandırılır. Ağırlığı sıfır olan bir tensör yoğunluğu, normal bir tensördür.

3.1.8. Kronecker ve Levi – Civita Tensörleri

Kronecker delta,

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \quad (3.35)$$

ilişkisiyle tanımlanan bir karma tensördür. Yukarıdaki eşitlikte x^{λ} ve x^{ν} ifadeleri $\lambda \neq \nu$ durumunda iki bağımsız koordinat olurlar ve bu yüzden bu ifadelerin birbirlerine göre türevleri,

$$\lambda \neq \nu \text{ durumunda } \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\lambda}_{\nu} = 0 \quad (3.36)$$

$$\lambda = \nu \text{ durumunda } \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = \delta^{\lambda}_{\lambda} = 1 \quad (3.37)$$

olur.

Kronecker deltasının daha genel biçimi Levi-Civita sembolü diye adlandırılır, fakat Kronecker deltasının aksine Levi-Civita sembolleri tensör yoğunluğudur. Örneğin, $\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ Levi-Civita sembolü, +1 ağırlıklı, anti-simetrik ve 4-ranklı bir kontravaryant tensör yoğunluğudur. Levi-Civita sembolünün indisleri 0123 'ün tek permütasyonu durumunda -1, çift permütasyonu durumunda +1, diğer tüm farklı durumlarda ise 0 değerini alır.

$$\varepsilon^{0123} = \varepsilon^{2301} = -\varepsilon^{0132} = -\varepsilon^{0321} = +1 \quad (3.38)$$

$$\varepsilon^{0120} = \varepsilon^{0331} = \varepsilon^{0110} = \varepsilon^{3121} = 0 \quad (3.39)$$

Levi-Civita için genel dönüşüm kuralı,

$$\varepsilon'^{\mu\nu\lambda\kappa} = \det \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^w \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\sigma}} \varepsilon^{\alpha\beta\eta\sigma} \quad (3.40)$$

şeklindedir.

3.2. GENEL GÖRELİLİK: RIEMANN UZAY-ZAMANI

GG kuramının ortaya çıkışı ve gelişimi hakkında genel bir tartışma Giriş kısmında yapılmıştı. GG 'deki temel nicelikleri incelemeye önce bu kuramın dayandırıldığı temel varsayımları⁴ ve temel ilkeleri aşağıda sıralayalım:

- A. Kuramın temelindeki uzay-zaman Riemann uzay-zamanıdır ve bu uzay-zamanın temel yapısı (temel bileşeni) metrik tensördür. Bu Kuramdaki tüm fizik yasaları kovaryant ya da genel koordinat dönüşümü grubu altında invaryant kalan denklemlerle ifade edilir.
- B. Denklik ilkesi.
- C. Gravitasyonel alan denklemleri hareket ilkesinden yola çıkılarak türetilebilir.
- D. Alan denklemleri, değişkenleri ikinci basamaktan daha yüksek olmayan kısmi diferansiyel denklemlerdir.
- E. Gravitasyonel alan metrik tensör tarafından tam bir biçimde tanımlanabilir.

3.2.1. Metrik Tensör

x^{μ} ve $x^{\mu} + dx^{\mu}$ gibi iki komşu iki nokta arasındaki sonsuz küçük mesafe (çizgi elemanı ya da aralık) ds ile gösterilir. Bu çizgi elemanın karesi,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (3.41)$$

denklemini ile tanımlanır ve metrik diye adlandırılır. Örneğin, bir odanın sıcaklığını ölçmek için odanın herhangi bir köşesindeki bir termometreyi incelemek yeterli olacaktır, bu duruma benzer biçimde görelilikte evrenin özellikleri yani uzay-zaman yapısı hakkındaki bilgi bu evrende tanımlı bir çizgi elemanı (metrik) incelenerek elde

edilebilir. (3.41) ifadesinde yer alan $g_{\mu\nu}$ ifadesi metrik tensör olarak adlandırılır ve şu özelliklere sahiptir:

- a) $g_{\mu\nu}$ konuma bağlı bir fonksiyondur ($g_{\mu\nu}(x)$).
- b) $g_{\mu\nu}$ 'nin determinanı sıfır olamaz.
- c) $g_{\mu\nu}$ simetrik bir tensördür.

Metrik tensör, metriğin tanımlanmasındaki en önemli niceliktir ve koordinatlara (uzay-zamana) bağlı değerler alır. Örneğin, Euclide uzayındaki metrik tensör Kronecker tensöre karşılık gelir ve birim matris ile tanımlanır:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Dolayısıyla, $(x^0, x^1, x^2) = (x, y, z)$ koordinatlı Euclide uzayındaki metrik,

$$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \quad (3.43)$$

biçiminde olur. Minkowski uzay-zamanda ise metrik tensör $\eta_{\mu\nu}$ ile tanımlanır:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Minkowski uzay-zaman metriği,

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (3.45)$$

ile tanımlanır. Ayrıca gezegen ya da kara delik gibi küresel simetrik yapılar etrafındaki uzay-zamanı tanımlayan Schwarzschild metriğine ait metrik tensör

$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi)$ olmak üzere

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & & & \\ & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

şeklinde ve metrik,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)(dx^0)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} (dx^1)^2 + r^2(dx^2)^2 + r^2 \sin^2 \theta (dx^3)^2 \quad (3.47)$$

biçimindedir.

3.2.2. Yardımcı Alanlar ve Türev İşlemi

3.2.2.1. Affine Bağlantı

Kısım 3.1.5. de tensörlerle ilgili kısmi türev işlemini incelerken, 1 ve daha yüksek ranklı tensörler için kısmi türev işleminin tensöriyel olmayan ifadelerle sonuçlandığı görüldü. Bu durum tensörlerle ilgili türev işlemleri konusunda genel anlamda bir sıkıntı doğurmaktadır. Tensörlerle ilgili bu problemin üstesinden gelebilmek için manifold üzerinde bazı yardımcı alanlar ve bu yardımcı alanları kullanarak da farklı türde türev işlemleri türetilmektedir. Burada da bu amaç doğrultusunda (3.24) denklemini yeniden değerlendirilerek ve düzenlenerek

$$t'_{\mu,\nu} - \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^\nu \partial x'^\mu} t_\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \frac{\partial t_\lambda}{\partial x^\kappa} \quad (3.48)$$

ve (3.8) dönüşüm kuralı kullanılarak

$$t'_{\mu,\nu} - \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^\nu \partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} t'_\alpha = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \frac{\partial t_\lambda}{\partial x^\kappa} \quad (3.49)$$

ifadesi yazılabilir. Belirli bir koordinat sisteminde tanımlanan bir tensörün bileşenleri keyfi olarak seçilebilir, buna dayanarak x'^μ koordinatındaki bileşenleri $t_{\mu,\nu}$ biçimindeki türevlerden oluşan $T_{\mu\nu}$ gibi bir tensör olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$T'_{\mu\nu} = t'_{\mu,\nu} - \Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} t'_\alpha \quad (3.50)$$

$$\Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \quad (3.51)$$

olur. Bu sonuç, $t_{\mu,\nu}$ türev işlemi herhangi bir koordinat sistemindeki $T_{\mu\nu}$ gibi bir tensörün bileşeni olarak tanımlanabilmesine karşın genel durum için $\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}$ biçiminde yeni bir koordinata bağımlı nicelik kullanarak tensör elde etmeye çalışmak zorunda olduğumuzu gösterir⁵. Sonuç olarak

$$t_{\mu,\nu} - \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} t_\lambda = T_{\mu\nu} \quad (3.52)$$

ifadesi bir tensördür.

Elde ettiğimiz bu yeni nicelik $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ affine bağlantı olarak adlandırılır. Bu nicelik diferansiyel geometride önemli bir rol oynar ve kovaryant türevin tanımlanmasında kullanılır (yardımcı alan rolü üstlenir). Öncelikle tensör olup olmadığı konusunda yargıya varmak ve özelliklerini incelemek için görelilik kuramında sık sık karşılaştığımız affine bağlantı için koordinat dönüşümünü inceleyelim:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \\
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\beta}} \right) \\
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \left[\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\eta} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\beta}} \right] \\
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\eta} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\beta}} \\
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\eta\beta}^{\alpha} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \delta_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \\
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\eta\beta}^{\alpha} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Son denklemin sağındaki ikinci terim denklemin homojen olma durumunu bozar ve denklemin tensör dönüşüm kuralına uymasına engel olur. Bu durum, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ affine bağlantının tensör olmadığını gösterir. Affine bağlantı aşağıda sıralanan bazı özelliklere sahiptir:

- a) Belirli bir uzayda tanımlı ${}_1\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ ve ${}_2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ gibi iki bağlantı varsa bunların farkı bir tensördür:

$${}_1\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - {}_2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = T_{\mu\nu}^{\lambda}, \quad T_{\mu\nu}^{\lambda} : \text{Tensör.} \tag{3.54}$$

- b) $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ bir bağlantı ise $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ de bir bağlantıdır.
c) Affine bağlantı simetrik ya da anti-simetrik durumlara sahiptir. Bağlantının anti-simetrik olduğu durumda anti-simetrik ifadelerin farkı,

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \tag{3.55}$$

biçiminde bir tensör tanımlar ve bu tensör *burulma tensörü* diye

adlandırılır. Diğer bir deyişle, burulmanın sıfırdan farklı olduğu durumlarda bağlantı anti-simertik, tersi durumda ise simetriktir.

3.2.2.2. Kovaryant Türev

Şimdi (3.52) denkleminde geri dönelim:

$$t_{\mu;\nu} = t_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} t_{\lambda} \quad (3.56)$$

Bu denklem, bir kovaryant tensörün kovaryant türevi olarak adlandırılır. Kovaryant türev noktalı virgül (,) ya da ∇ ile gösterilir. $t_{\mu;\nu}$ ifadesi bir tensördür ve

$$t'_{\mu;\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} t_{\lambda;\kappa} \quad (3.57)$$

tensör dönüşüm kuralına uygun bir biçimde dönüşür. Ayrıca bir kontravaryant tensörün kovaryant türevi $t^{\mu}_{;\nu} = t^{\mu}_{,\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} t^{\lambda}$ biçiminde tanımlanır.

Bu tanımlamalar karma ve yüksek ranklı tensörler için genelleştirilebilir: T^{\dots} biçimindeki bir tensörün x^{ν} ye bağlı kovaryant türevi; T^{\dots} nin x^{ν} ye göre kısmi türevi artı, T^{\dots} deki her bir kontravaryant indis için Γ ile T arasında kontravaryant indis değişimi ile $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ kere T eksi, T^{\dots} deki her bir kovaryant indis için Γ ile T arasında kovaryant indis değişimi ile $\Gamma_{\alpha\nu}^{\kappa}$ kere T biçiminde olur. Örneğin,

$$T^{\mu\nu}_{;\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} T^{\mu\nu}_{\lambda} + \Gamma_{\alpha\kappa}^{\mu} T^{\alpha\nu}_{\lambda} + \Gamma_{\alpha\kappa}^{\nu} T^{\mu\alpha}_{\lambda} - \Gamma_{\lambda\kappa}^{\beta} T^{\mu\nu}_{\beta} \quad (3.58)$$

ya da en genel biçimde

$$T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\kappa\dots\delta} = T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\kappa\dots\delta} + \Gamma_{\alpha\delta}^{\mu} T^{\alpha\nu\dots}_{\lambda\kappa\dots} + \Gamma_{\alpha\delta}^{\nu} T^{\mu\alpha\dots}_{\lambda\kappa\dots} + \dots - \Gamma_{\lambda\delta}^{\beta} T^{\mu\nu\dots}_{\beta\kappa\dots} - \Gamma_{\kappa\delta}^{\beta} T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\beta\dots} - \dots \quad (3.59)$$

olur. Kovaryant türev aşağıda sıralanan bazı özelliklere sahiptir.

- a) Bazı özel durumlarda kovaryant türev özel biçimler alır. Bu özel durumların en basiti bir skalerin kovaryant gradiyentidir. Bir skalerin kovaryant gradiyenti kısmi türevi ile özdeşdir:

$$\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu} \quad (3.60)$$

- b) Bir diğerk özel durum kovaryant rotasyoneldir. Kovaryant türevi ifade eden (3.56) denklemindeki $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ ifade ν ile λ indislerine göre simetrik olduğundan kovaryant rotasyonel işlemler normal rotasyonelerle denk olur:

$$T_{\mu;\nu} - T_{\nu;\mu} = T_{\nu;\mu} - T_{\mu;\nu} . \quad (3.61)$$

- c) Üçüncü özel durum ise bir kontravaryant tensörün kovaryant diverjans işlemidir:

$$T^{\mu}{}_{;\mu} = T^{\mu}{}_{,\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} T^{\nu} . \quad (3.62)$$

Burada,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \{g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}\} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (3.63)$$

biçimindedir. Bu ifadede

$$\text{Tr} \left\{ M^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} M(x) \right\} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ln \text{Det } M(x) \quad (3.64)$$

özdeşliğini kullanarak

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \ln g = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \sqrt{g} \quad (3.65)$$

ifadesini elde ederiz. Dolayısıyla (3.62) denklemleri aşağıdaki biçimde olur:

$$T^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \sqrt{g} T^{\mu} . \quad (3.66)$$

Ayrıca daha yüksek ranklı tensörlerin kovaryant diverjansı,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} T^{\mu\lambda} \quad (3.67)$$

biçiminde olur ve burada (3.65) denklemleri kullanılarak

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} T^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \quad (3.68)$$

ifadesi elde edilir⁶.

- d) Tensörlerin toplamlarının-farklarının ve çarpımlarının kovaryant türevleri kısmi türev için geçerli olan kuralların aynısına uyar:

$$(A^{\dots} B^{\dots})_{;\mu} = A^{\dots}{}_{;\mu} B^{\dots} + A^{\dots} B^{\dots}{}_{;\mu} \quad (3.69)$$

$$(\alpha A^{\mu} + \beta B^{\mu})_{;\lambda} = \alpha A^{\mu}{}_{;\lambda} + \beta B^{\mu}{}_{;\lambda} . \quad (3.70)$$

- e) Büzülmüş bir tensörün kovaryant türevi, kovaryant türevin büzülmesine eşittir:

$$T^{\mu\nu}_{\nu;\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} T^{\mu\nu}_\nu + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} T^{\kappa\nu}_\nu . \quad (3.71)$$

3.2.2.3. Christoffel Sembolleri

Metrik tensörün kısmi türevi $g_{\mu\nu,\lambda}$ ve $g^{\mu\nu}$ ters metrik tensör ile elde edilen ve klasik GG in temelini oluşturan niceliğe Levi-Civita ya da Christoffel bağlantısı denir. Yukarıdaki kısımlarda genel (affine) bağlantı ifadesini inceledik. Buradaki Christoffel bağlantısı ise affine bağlantının Riemannian uzayına ait özel bir durumudur.

Christoffel bağlantısı metrik tensörün kovaryant türevinin sıfır olması durumundan elde edilebilir:

$$0 = g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\kappa\nu} \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} - g_{\kappa\mu} \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} . \quad (3.72)$$

Bu denklemde μ ile λ 'nın ve ν ile λ 'nın yer değişimi ile sırasıyla

$$g_{\lambda\nu,\mu} = g_{\kappa\nu} \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + g_{\kappa\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \quad (3.73)$$

ve

$$g_{\mu\lambda,\nu} = g_{\kappa\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\nu} + g_{\kappa\mu} \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} \quad (3.74)$$

denklemleri elde edilir. (3.72) ve (3.73) denklemlerinin toplamını alıp bu toplamdan (3.74) denklemi çıkarılarak

$$g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} = g_{\kappa\nu} \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + g_{\kappa\mu} \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} + g_{\kappa\nu} \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + g_{\kappa\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\mu} - g_{\kappa\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - g_{\kappa\mu} \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} \quad (3.75)$$

$$g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} = 2g_{\kappa\nu} \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \quad (3.76)$$

denklemi elde edilir (bu noktada $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ve $g_{\mu\nu}$ ifadelerinin μ ile ν 'ye göre simetrik oldukları unutulmamalıdır). (3.76) denklemini $g^{v\beta}$ ile çarparak ve $g^{v\beta} g_{\kappa\nu} = \delta_\kappa^\beta$ özelliğini kullanarak

$$\Gamma^\beta_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{v\beta} \{ g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} \} \quad (3.77)$$

ifadesini elde ederiz. (3.77) denklemiyle tanımlanan Christoffel bağlantısının elemanlarına *Christoffel Sembolleri* denir.

3.2.3. Riemann-Christoffel (Eğrilik) Tensörü

Newton kuramında gravitasyonel alanı tanımlamak için kullanılan kuvvetler ve alanların yerini GG kuramında dört-boyutlu uzay-zaman eğriliği alır. Temelde eylemsizlik ve gravitasyonel kütlelerin denkleğine dayanan GG kuramında artık gravitasyonel kuvvet yoktur. Newton gravite kuramına göre herhangi bir parçacık bir gravitasyonel kuvvetin etkisi altında hareket etmesine karşın GG kuramına göre böyle bir parçacık eğri uzay-zamandaki eğri jeodezik boyunca serbest bir biçimde hareket eder ve dolayısıyla bu kurama ait hareket denklemi

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (3.78)$$

olarak ifade edilen jeodezik denkleme karşılık gelir⁷. Burada, τ öz-zamanı (proper time) tanımlar.

Ashında GG bir yerel kuramdır. Bu kurama göre herhangi bir noktadaki dört-boyutlu uzay-zaman manifolduna ait yerel geometri (eğrilik) o noktadaki madde dağılımı ile belirlenir. Madde dağılımı ile uzay-zaman eğriliği arasındaki ilişki GG'in konusunun merkezini oluşturur ve şu şekilde şematik bir biçime sahiptir⁸:

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{yerel uzay-zaman eğriliğinin} \\ \text{bir ölçüsü} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \text{madde-enerji yoğunluğunun} \\ \text{bir ölçüsü} \end{array} \right\rangle \quad (3.79)$$

Bu ilişki *Einstein denklemi* olarak adlandırılır ve Giriş kısmında da ifade ettiğimiz gibi Einstein denklemi genel anlamda bu temel üzerine kuruludur. Dolayısıyla evrendeki madde dağılımı ile ilgili bilgi edinmek için Einstein denkleminde yer alan uzay-zaman geometrisini tanımlamak yeterli olacaktır ve bu nedenle de buradaki problem uzay-zaman geometrisini tanımlamak olur.

Uzay-zaman geometrisini tanımlamak için kullanılacak birçok nicelik vardır. Bunlar metrik tensör, ters metrik tensör, affine bağlantı (Christoffel sembolleri), Riemann-eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve eğrilik skaleridir. Metrik tensör, ters metrik tensör ve affine bağlantı gibi nicelikleri daha önceki kısımlarda tanımlanmıştı; şimdi, gerekli olan diğer nicelikler tanımlanmaya çalışılacaktır.

Riemann-Christoffel (eğrilik) tensörünü türevlerin komütasyon(sıra değiştirme) özelliklerini kullanarak elde edebiliriz. Bildiğimiz gibi kısmi türev işlemi

$T^{\lambda}_{,\mu\nu} - T^{\lambda}_{,\nu\mu} = 0$ biçiminde komütatif(sıra değiştirebilen) olmasına karşın kovaryant

türev işlemi genelde komütatif değildir $T^{\lambda}_{;\mu;\nu} - T^{\lambda}_{;\nu;\mu} \neq 0$. O halde T^{λ} gibi bir tensör için kovaryant türev komütatörünü hesaplayalım:

$$T^{\lambda}_{;\mu;\nu} = (T^{\lambda}_{;\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu} T^{\kappa})_{;\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} (T^{\alpha}_{;\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu} T^{\kappa}) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} (T^{\lambda}_{;\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\alpha} T^{\kappa}). \quad (3.80)$$

Bu ifadede μ ile ν arasında yer değişimi gerçekleştirerek bu iki ifadenin farkını alalım:

$$\begin{aligned} T^{\lambda}_{;\nu;\mu} - T^{\lambda}_{;\mu;\nu} &= T^{\lambda}_{;\nu,\mu} - T^{\lambda}_{;\mu,\nu} + (\Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} T^{\kappa})_{;\mu} - (\Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu} T^{\kappa})_{;\nu} \\ &+ \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} (T^{\alpha}_{;\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\nu} T^{\kappa}) - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} (T^{\alpha}_{;\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu} T^{\kappa}) \\ &- \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} (T^{\lambda}_{;\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\alpha} T^{\kappa}) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} (T^{\lambda}_{;\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\alpha} T^{\kappa}). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Kısmi türevin komütasyon özelliğine göre ilk iki terim sıfır olur, son iki terim tekrar kovaryant türev formunda düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} T^{\lambda}_{;\nu;\mu} - T^{\lambda}_{;\mu;\nu} &= \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu,\mu} T^{\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu,\nu} T^{\kappa} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} T^{\kappa}_{;\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu} T^{\kappa}_{;\nu} \\ &+ \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} T^{\alpha}_{;\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\nu} T^{\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} T^{\alpha}_{;\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu} T^{\kappa} \\ &+ (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}) T^{\lambda}_{;\alpha} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} T^{\lambda}_{;\nu;\mu} - T^{\lambda}_{;\mu;\nu} &= \{ \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu} \} T^{\kappa} \\ &+ \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} T^{\kappa}_{;\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu} T^{\kappa}_{;\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} T^{\alpha}_{;\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} T^{\alpha}_{;\mu} \\ &+ (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}) T^{\lambda}_{;\alpha} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Eşitliğin son hali,

$$T^{\lambda}_{;\nu;\mu} - T^{\lambda}_{;\mu;\nu} = \{ \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu} \} T^{\kappa} + (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}) T^{\lambda}_{;\alpha} \quad (3.84)$$

biçiminde olur. Denklemin sağındaki ilk parantez terimi

$$R^{\lambda}_{\kappa\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\mu} \quad (3.85)$$

şeklinde tanımlanır ve Riemann-Christoffel (eğrilik) tensörü olarak adlandırılır.

$$T^{\lambda}_{;\nu;\mu} - T^{\lambda}_{;\mu;\nu} = R^{\lambda}_{\kappa\mu\nu} T^{\kappa} + (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}) T^{\lambda}_{;\alpha} \quad (3.86)$$

Riemann uzayında burulma sıfır olduğundan (3.55) denlemine göre (3.86) denklemindeki son terim sıfır olur.

$$T^{\lambda}_{;\nu;\mu} - T^{\lambda}_{;\mu;\nu} = R^{\lambda}_{\kappa\mu\nu} T^{\kappa} \quad (3.87)$$

Riemann-Christoffel tensörü aşağıda sıralanan bazı özelliklere sahiptir(Eğrilik tensörünün özellikleri, tam kovaryant bileşenleri $R_{\mu\nu\lambda\kappa} = g_{\mu\alpha} R_{\nu\lambda\kappa}^{\alpha}$ cinsinden daha açık bir biçimde ifade edilebilir.):

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \right\} + g_{\alpha\beta} \left[\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} \Gamma_{\nu\kappa}^{\beta} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} \right] \quad (3.88)$$

a) $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ tensörü $\mu \leftrightarrow \lambda$ ve $\nu \leftrightarrow \kappa$ indislerine göre simetriktir;

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\mu\nu} \quad (3.89)$$

ve diğer indis durumlarında ise anti-simetriktir;

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -R_{\nu\mu\lambda\kappa} = -R_{\mu\nu\kappa\lambda} = +R_{\nu\mu\kappa\lambda} . \quad (3.90)$$

b) $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ tensörü çevrimsellik özelliğine sahiptir.

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} + R_{\mu\kappa\nu\lambda} + R_{\mu\lambda\kappa\nu} = 0 . \quad (3.91)$$

c) Ayrıca $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ tensörü bazı önemli diferansiyel özdeşlikleri de sağlar.

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa;\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\eta\sigma} \left[\Gamma_{\lambda\mu}^{\eta} \Gamma_{\nu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\eta} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} \right] - \Gamma_{\alpha\mu}^{\tau} R_{\tau\nu\lambda\kappa} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\tau} R_{\tau\mu\lambda\kappa} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\tau} R_{\tau\mu\nu\kappa} - \Gamma_{\alpha\kappa}^{\tau} R_{\tau\mu\nu\lambda} . \quad (3.92)$$

Bu denklemi P gibi bir yerel eylemsiz noktada değerlendirdiğimizi varsayarak denklik ilkesine göre Γ 'ların sıfır olduğu durumu ve kısmi türevin komütasyon özelliğini kullanarak

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa;\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \right\} \quad (3.93)$$

denklemini elde ederiz. Bu ifadenin λ , κ , ve α permütasyonu ile

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa;\alpha} + R_{\mu\nu\alpha\lambda;\kappa} + R_{\mu\nu\kappa\alpha;\lambda} = 0 \quad (3.94)$$

Bianchi Özdeşliği olarak adlandırılan ifade elde edilir.

3.2.4. Ricci Tensörü ve Eğrilik Skaleri

$R_{\mu\kappa\nu}^{\lambda}$ tensörünün birinci ve üçüncü indisleri üzerinden büzülmesi ile elde edilen 2-ranklı $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$ kovaryant tensöre *Ricci tensörü* denir. $R_{\mu\kappa\nu}^{\lambda}$ tensörü ayrıca birinci ile ikinci ya da birinci ile dördüncü indisler üzerinden de büzülebilir, fakat $R_{\lambda\mu\kappa\nu}$ tensörünün λ ile μ ve κ ile ν üzerinden anti-simetrik olması bu tür büzülmelerin sıfır ya da $\pm R_{\mu\nu}$ olarak sonuçlanmasına sebep olur. Dolayısıyla Ricci tensörünün Riemann tensörünün büzülmelerinden elde edilen tek anlamlı tensör olduğu söylenebilir. Ricci tensörü simetrik bir tensördür

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (3.95)$$

ve

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} \quad (3.96)$$

biçiminde tanımlıdır.

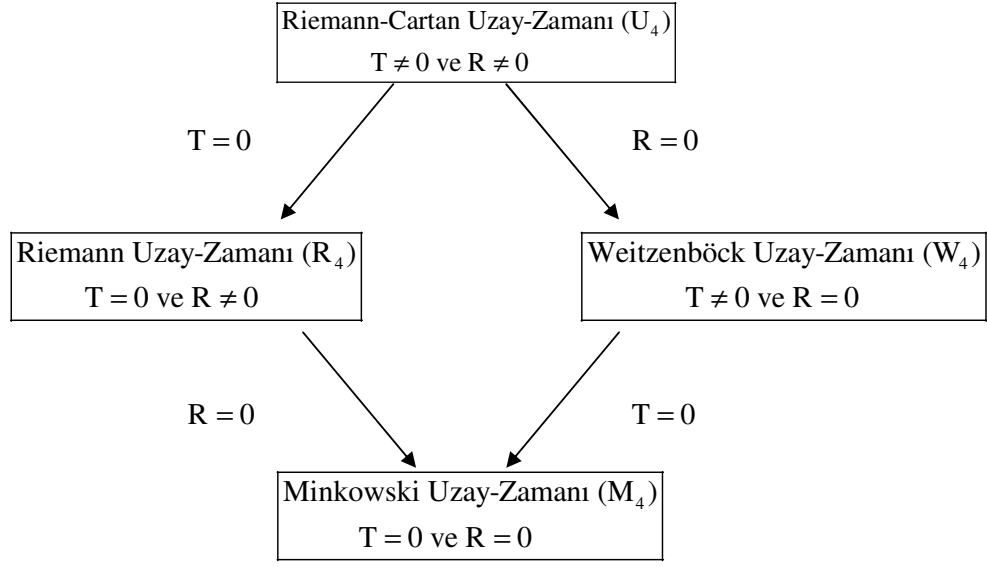
Ricci tensörünün metrik tensörle büzülmesinden elde edilen skalere *Ricci (Eğrilik) skaleri* denir:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu}. \quad (3.97)$$

3.3. TELEPARALEL GRAVİTE: WEITZENBÖCK UZAY-ZAMANI

Genel Görelilik kuramının ortaya çıktığı zamandan bu yana gravitasyonel etkileşmenin tanımı uzay-zaman geometrisiyle bağlantılı olmaktadır. Daha önce de söz ettiğimiz ve Einstein (3.79) ilişkisinden de anlaşılacağı gibi temelde *zayıf denklik ilkesine* dayalı bir kuram olan GG 'ye göre gravitasyonel alanın varlığı uzay-zamanda bir eğrilik üretir. Diğer taraftan, uzun süreden beri kuramsal gelişmeler gravitasyonel alanın tanımlanmasında burulmanın dahil edilmesi olasılığı üzerinde hareket etmektedir, oysa GG kuramında burulma sıfır olarak belirlenir⁹. Bu amaç doğrultusunda burulmanın sıfırdan farklı olarak belirlendiği *Weitzenböck uzay-zamanı* üzerinde *Teleparalel Gravite* kuramı geliştirilmiştir. Fakat bu kuramda uzay-zaman eğriliğinden söz edilemez, yani eğrilik sıfır olur.

Sözü edilen kuramlarda temel olarak alınan uzay-zamanlar ve ÖG 'in temelini oluşturan Minkowski uzay-zamanı, en genel uzay-zaman olan Riemann-Cartan uzay-zamanının farklı durumlara göre indirgenmesiyle elde edilir. Bu ilişki Şekil- 5⁴ 'te açık bir biçimde ifade edilmektedir (T = Burulma ve R = Eğrilik).



Şekil – 5

Gravitasyonel alan etkileşmesini tanımlamak için eğriliğin ve burulmanın her biri uygun bir denklem sağlayabilir, fakat kavramsal farklılıklar ortaya çıkmaktadır¹⁰. GG kuramına göre eğrilik, uzay-zamanın geometrisini belirlemek için kullanılır ve bu sayede gravitasyonel alanı çok başarılı bir biçimde tanımlar. Diğer taraftan teleparalel kurama göre gravitasyonel alan burulmanın bir sonucu olarak ortaya çıkar. Burulma bir kuvvet rolü üstlenerek doğrudan gravitasyonel alana sebep olur, yani etkileşme için uzay-zaman geometrisinde herhangi bir değişiklik meydana getirmez. Bu durum TPG kuramında, GG in aksine jeodeziklerin olmadığını fakat elektrodinamikteki Lorentz kuvvet denklemine benzer bir kuvvet denkleminin var olduğu anlamına gelir¹¹.

TPG deki temel nicelikleri incelemeyen önce GG ‘de yaptığımız gibi kuramın dayandırıldığı temel varsayımları⁴ sıralayalım:

- A'. Kuramın temelindeki uzay-zaman Weitzenböck uzay-zamanıdır ve bu uzay-zamanın temel yapısı (temel bileşeni) tetrad alanıdır. Bu kuramdaki tüm fizik yasaları kovaryant ya da genel koordinat dönüşümü grubu altında invaryant kalan denklemlerle ifade edilir.
- B'. Denklik ilkesi sadece klasik fizikte geçerlidir.
- C'. Gravitasyonel alan denklemleri mikroskopik hareket ilkesinden yola çıkılarak türetilebilir.

D'. Alan denklemleri, değişkenleri ikinci basamaktan daha yüksek olmayan kısmi diferansiyel denklemlerdir.

E'. Gravitasyonel alan tetrad alanı tarafından tam bir biçimde tanımlanabilir. (Tüm fizik yasaları kovaryant ya da *global lorentz* dönüşümü grubu altında invariant kalan denklemlerle ifade edilir.)

3.3.1. Tetrad Alanı

Giriş kısmında da tanımladığımız gibi teleparalel kuram matematiksel anlamda bir koordinat dönüşümü grubunun ayar kuramına karşılık gelmektedir. Bu ifade doğrultusunda ayar kuramına ve dönüşüm grubuna uygun varsayımlarla mevcut uzay-zamanımıza biçim kazandırmak gerekir. Örneğin, herhangi bir uzay-zamana ait geometrik yapının tanjant uzayı yığınlarından oluştuğu ve dolayısıyla bu uzay-zamanın her bir noktasının bir Minkowski tanjant uzay-zamanı ile ilişkili olduğu düşünülebilir. Bu şekilde tanımlanan bir uzay-zaman ayar kuramının kullanımı açısından çok yarar sağlamaktadır, çünkü dönüşüm grubu Minkowski tanjant uzay-zamanında işlev görmektedir¹².

Yukarıdaki ifadelerden de anlaşılacağı gibi GG 'de temel bileşen olan metrik tensörün aksine TPG 'de, tasarlanan bu tanjant uzay-zamanı üzerinde tanımlı bir nicelik elde etmemiz gerekmektedir. Bu amaç doğrultusunda uzay-zamanımızın her bir noktasında $\hat{e}_{(a)}$ ortonormal taban vektörlerinin (dörtlü) bir cümlesi tanımlanır (uzay-zamanda her noktadaki tanjant uzayının taban vektörü o noktadaki koordinatlar cinsinden kısmi türev $\hat{e}_{(a)} = \partial_{(a)}$ ile verildiğinden dolayı). $\hat{e}_{(a)}$ ortonormal taban vektörleri çalıştığımız manifoldun yapısına uygun bir biçimde seçilecektir. Örneğin, metriğimizin doğal biçimini $\eta_{(a)(b)}$ olarak yazarsak taban vektörlerimizin iç çarpımının

$$g(\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}) = \eta_{(a)(b)} \quad (3.98)$$

biçiminde olmasını bekleriz (buradaki $g(,)$ metrik tensördür), yani tanjant uzayında tanımlanan ortonormal taban vektörlerine bağlı olan metrik tensör Minkowski düz uzay-zamanına indirgenir. İşte bu ortonormal tabanlardan oluşan vektör cümlesine *tetrad alanı* denir.

Ortonormal taban vektörleri arasında,

$$\hat{e}_\mu = h_\mu^{(a)} \hat{e}_{(a)} \quad \text{veya} \quad \hat{e}_\mu = h_\mu^{(a)} \partial_{(a)} \quad (3.99)$$

bağıtısına göre dönüşüm gerçekleştirilebilir ve bu sayede bilinen bir taban

vektörünü ($\hat{e}_{(a)}$) kullanarak yeni bir taban vektörü (\hat{e}_μ) elde edebiliriz. Buradaki $h_\mu^{(a)}$ ifadesi *tetrad* olarak adlandırılır ve $n \times n$ 'lik bir matris tanımlar. Tetradlar ters bileşenleri ile birlikte

$$h_{(a)}^\mu h_\nu^{(a)} = \delta_\nu^\mu \quad \text{ve} \quad h_\mu^{(a)} h^\mu_{(b)} = \delta_{(b)}^{(a)} \quad (3.100)$$

bağıntılarını sağlar. Tetradlar,

$$\begin{aligned} \hat{e}_{(a)} &= h_{(a)}^\mu \hat{e}_\mu = h_{(a)}^\mu \partial_\mu, & \hat{e}^{(a)} &= h^{(a)}_\mu dx^\mu \\ \hat{e}_\mu &= h_\mu^{(a)} \hat{e}_{(a)} = h_\mu^{(a)} \partial_{(a)}, & \hat{e}^\mu &= h^\mu_{(a)} dx^{(a)} \end{aligned} \quad (3.101)$$

genel denklemlerde de görüldüğü gibi taban vektörlerin bileşenleridir (taban vektörlerin seri açılımı tetradlar cinsinden gerçekleştirilir). (4.1.1) denklemini tetradlar cinsinden yeniden tanımlarsak

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} h_{(a)}^\mu h_{(b)}^\nu &= \eta_{(a)(b)}, & g^{\mu\nu} h_{(a)\mu} h_{(b)\nu} &= \eta^{(a)(b)} \\ g_{\mu\nu} &= h_{(a)\mu} h_{(b)\nu} \eta_{(a)(b)}, & g^{\mu\nu} &= h_{(a)}^\mu h_{(b)}^\nu \eta^{(a)(b)} \end{aligned} \quad (3.102)$$

buluruz.

Teleparalel kuramdaki ifadelerde çalıştığımız uzay-zamana ait indisler Yunan alfabesi ($\mu, \nu, \lambda, \kappa, \dots = 0, 1, 2, 3, \dots$), tanjant uzay-zamana ait indisler ise paranteze alınmış Latin alfabesi ($a, b, c, d, \dots = 0, 1, 2, 3, \dots$) ile gösterilecektir ve

$$\eta_{(a)(b)} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

metrikli Minkowski uzay-zaman varsayımı kullanılacaktır.

3.3.2. Affine Bağlantı: Weitzenböck Bağlantısı

Tetrad $h_\mu^{(a)}$ in komşu iki nokta arasında paralel taşınması hakkındaki bilgi $h_\mu^{(a)}$ in kovaryant türeviyle elde edilir:

$$\nabla_\nu h_{(a)\mu} = \partial_\nu h_{(a)\mu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda h_{(a)\lambda} \quad (3.104)$$

Weitzenböck uzay-zamanında tetradların paralel olarak taşınması ile ilgili geometrik koşul uygulanarak¹² (3.104) denklemi,

$$\nabla_\nu h_{(a)\mu} = \partial_\nu h_{(a)\mu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda h_{(a)\lambda} = 0 \quad (3.105)$$

biçiminde yazılır. Bu aynı zamanda *mutlak paralelizm* ya da *teleparalelizm* koşuludur. (3.105) denkleminin çözümü,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} h^{(a)}_{\lambda} &= \partial_{\nu} h^{(a)}_{\mu} \\ \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} &= h^{(a)\lambda} \partial_{\nu} h^{(a)}_{\mu}\end{aligned}\quad (3.106)$$

biçiminde ifade edilen ve *Weitzenböck bağlantısı* olarak adlandırılan bir affine bağlantı verir. Mutlak paralelizmin bir sonucu olarak Weitzenböck bağlantısının eğriliği sifıra eşit olur. Weitzenböck bağlantısı simetrik olmayan bir bağlantıdır ve (3.106) denkleminde de görüldüğü gibi sifırdan farklı (anamlı) tetrad alanı ile belirlenir.

3.3.3. Burulma Tensörü

Kısım 3.2.2.1 'de herhangi bir uzay-zamanda tanımlı simetrik olmayan bir affine bağlantının (3.55) denklemine göre o uzayda tanımlı bir burulma tensörü tanımladığı ifade edildi. GG kuramının tanımlandığı Riemann uzay-zamanına ait affine bağlantısı simetrik özelliğe sahip olduğundan bu kuramda burulmanın sifıra eşit olduğu açık bir biçimde görülmektedir. Diğer taraftan teleparalel kuramın tanımlandığı Weitzenböck uzay-zamana ait affin bağlantı simetrik özelliğe sahip olmadığından bu uzay-zamanda,

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda} = h^{(a)\lambda} \partial_{\nu} h^{(a)}_{\mu} - h^{(a)\lambda} \partial_{\mu} h^{(a)}_{\nu} \quad (3.107)$$

biçiminde burulma tensörü tanımlanır.

Eğrilik ve burulma, bağlantıların özelliklerinden elde edilmektedir; dolayısıyla belli bir uzay-zaman üzerinde birçok bağlantı tanımlanabilir¹³. Örneğin, Kısım 3.2.2. 'de Levi-Civita bağlantısı Riemann metriği cinsinden (3.68) denkleminle tanımlıdır. Kısım 3.3.1.'de ise (3.102) denkleminde göre Riemann metriği tetrad cinsinden tanımlanabilir. Bu durumda Levi-Civita ile Weitzenböck bağlantıları arasında,

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \bar{K}_{\mu\nu}^{\lambda} \quad (3.108)$$

biçiminde bir ilişki tanımlanır. Buradaki $\bar{K}_{\mu\nu}^{\lambda}$,

$$\bar{K}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \left[T_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu} + T_{\nu}^{\lambda}{}_{\mu} - T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \right] \quad (3.109)$$

biçiminde tanımlıdır ve *eş-burulma tensörü* diye adlandırılır.

Levi-Civita (Christoffel) ile Weitzenböck bağlantıları arasındaki bu yararlı ilişki kullanılarak GG 'de tanımlı hareket (jeodezik) denklemi, kovaryant türev vb. ifadelerin TPG 'deki biçimleri yazılabilir. Riemann uzay-zamanda (3.78)

denklemlerle ifade edilen hareket denkleminde Levi-Civita bağlantısı (3.108) denklemine göre yeniden yazılarak

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \bar{K}^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (3.110)$$

biçiminde bir kuvvet denklemi elde edilir. Teleparalel kuramda burulma bir kuvvet rolü üstlenerek gravitasyonel alana sebep olduğundan hareket denkleminin GG ‘de bir jeodezik denklemi tanımlamasına karşın TPG ‘de kuvvet denklemi biçiminde oluşu zaten beklenen bir durumdur. Dolayısıyla (3.110) denkleminde burulma cinsinden

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = c^2 h^{(a)}_{\lambda} \mathbf{T}^{\lambda}_{\mu\nu} \quad (3.111)$$

biçiminde tanımlı[96] bir gravitasyonel alan kuvveti tanımlanır. Yine, Riemann uzay-zamanında (3.56) denklemlerle tanımlanan kovaryant türev ifadesinde Levi-Civita bağlantısı (3.108) denklemine göre yeniden yazılarak,

$$\nabla_{\nu} t_{\mu} = \partial_{\nu} t_{\mu} - (\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \bar{K}^{\lambda}_{\mu\nu}) t_{\lambda} \quad (3.112)$$

biçiminde bir teleparalel kovaryant türev elde edilir.

3.4. EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİ

GG kuramında temel nicelik olan $g_{\mu\nu}$ metrik tensörün uzay-zaman geometrisini belirleme açısından metrik, parçacıkların hareketlerini belirleme açısından gravitasyonel görünüme sahip olduğu denklik ve kovaryanslık ilkeleri yardımıyla elde edilebilir. Fakat $g_{\mu\nu}$ ile ilgili olarak “gravitasyonel alanın bulunmadığı duruma karşılık olarak *düz* uzay-zaman, gravitasyonel alanın bulunduğu duruma karşılık olarak ise gelen *eğri* uzay-zaman tanımlar” biçimindeki çok genel bir düşüncenin ötesinde, değerlerinin koordinatlara gerçek bir biçimde bağlılığını içeren herhangi bir ifadeye henüz sahip değiliz. Dolayısıyla, denklik ve kovaryanslık ilkelerine ek olarak GG ‘de metriksel ve gravitasyonel alanın uzay-zaman konumuna bağlılığını veren ve (3.79) ilişkisiyle de ifade edildiği gibi tanımlı herhangi bir madde-enerji dağılımının bulunduğu durumda gravitasyonel etkilerin hesaplanmasına olanak sağlayan kesin bir ifadeye sahip olmalıyız.

Newton Gravite kuramında madde ile gravitasyonel etki arasındaki ilişki,

$$\nabla^2 \psi = 4\pi k \rho \quad (3.113)$$

şeklindeki Poisson denklemi ile tanımlanmaktadır. Bu denkleme göre belirli bir anda

uzayın herhangi bir noktasındaki gravitasyonel etki maddeyi çevreleyen yer ile belirlenir ve bu madde, (3.113) denklemleriyle tanımlı bir gravitasyonel potansiyel (gravitasyonel kuvvet) üretir. Bunun sonucu olarak da herhangi bir parçacık bu gravitasyonel kuvvetin etkisi altında hareket eder. GG kuramında da benzer biçimde yararlı bir denklem elde etmek için Newton Gravite kuramının Poisson denklemi görelilik ilkeleri çerçevesinde genelleştirilebilir.

Bu amaç doğrultusunda ilk olarak metrik tensör ($g_{\mu\nu}$) GG 'de metrik olmanın yanı sıra gravitasyonel potansiyel özelliğe sahip olduğundan Newton kuramındaki gravitasyonel potansiyele karşılık gelir. İkinci olarak, Newton kuramında madde yoğunluğunu tanımlayan ρ 'nun yerini en genel biçimde madde-enerji dağılımını ifade eden ve enerji-momentum tensörü diye adlandırılan $T_{\mu\nu}$ gibi bir nicelik alır. Dolayısıyla buradaki temel problemimiz $T_{\mu\nu}$ ile $g_{\mu\nu}$ 'yü birbirine bağlayan bir denklem elde etmek olacaktır ve elde edilecek bu denklem Newton Gravite kuramının GG kuramı çerçevesinde genelleştirilmiş biçimi olacağından bazı özelliklere sahip olması gerekir. Birincisi, kovaryanslık ilkesiyle uyumluluk; ikincisi, Poisson denklemi Newton potansiyelinin ikinci basamaktan daha yüksek basamaklı türevlerini içermediğinden, $g_{\mu\nu}$ 'nün ikinci basamaktan daha yüksek basamaklı türevlerini içeren bir tensör kullanımının gereksiz olduğunu varsaymak yerinde olacaktır. Son olarak da denklik ilkesiyle uyumluluk¹⁴ gereklidir.

Bu değerlendirmeler ışığında bazı matematiksel yöntemlerin de kullanılmasıyla arzu edilen özelliklere sahip denklemler elde edilebilir. Bu açı doğrultusunda bu bölümde varyasyonlar yaklaşımı (Hamilton ilkesi), eylem ve minimum eylem ilkesi gibi bazı matematiksel yöntemler yardımıyla GG kuramına ait gravitasyonel alan denklemleri elde edilecektir.

3.4.1. Hamilton İlkesi (Minimum Eylem İlkesi)^a

Klasik ve kuantum fiziğinde birçok sisteme ait dinamik denklemler varyasyonlar ilkesinden yola çıkılarak elde edilebilir ve bu sayede sistemin fiziksel anlamı çok daha açık bir biçimde anlaşılabilir. Dahası, dinamik denklemlerin bu şekilde formüle edilmesi hem sisteme ait korunumlu niceliklerin ve simetri ilkelerinin hem de bu iki nicelik arasındaki bağlantının kolayca belirlenmesi açısından büyük yarar sağlar. Bu ifadelerden de anlaşılacağı üzere varyasyonlar

a. Detaylı inceleme için; Bkz: Kaynak 16, Kısım 19.

ilkesi son derece yararlı bir yöntemdir ve gravitasyonel kuramlarını da kapsayan klasik ve kuantum alan kuramlarındaki birçok güncel araştırma için temel sağlamaktadır.

x^a , ($a=1,2,3,\dots$) biçiminde genelleştirilmiş koordinatlar ve t zamanıyla ifade edilen bir mekanik sistem için Hamilton ilkesi; t_1 deki bir konumdan t_2 deki bir diğer konuma doğru yapılan hareket durumunda

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x^a, \frac{dx^a}{dt}, t) dt \quad (3.114)$$

biçiminde yazılan bir integralin olası minimum değeri alacağını ifade eder. L fonksiyonuna ilgili sistemin Lagrangianı ve (3.114) integraline ise “eylem” integrali denir.

Konum uzayındaki yörüngede,

$$x^a(t) \rightarrow x'^a(t) = x^a(t) + \delta x^a(t) \quad (3.115)$$

gibi keyfi bir değişim değerlendirdiğimiz zaman S ‘deki değişim

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x^a + \delta x^a, \dot{x}^a + \delta \dot{x}^a, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(x^a, \dot{x}^a, t) dt \quad (3.116)$$

olur. Bu fark integralinde δx^a ve $\delta \dot{x}^a$ kuvvet seri açılımı yapıldığı zaman esas terimler birinci basamaktan olur ve S ‘deki değişimin minimum ($\delta S = 0$) olması için gerekli koşul bu terimlerin sıfır olmasıdır. Dolayısıyla minimum eylem ilkesi,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x^a, \dot{x}^a, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L(x^a, \dot{x}^a, t)}{\partial x^a} \delta x^a + \frac{\partial L(x^a, \dot{x}^a, t)}{\partial \dot{x}^a} \delta \dot{x}^a \right) dt = 0 \quad (3.117)$$

biçiminde olur. İntegraldaki son terime kısmi integrasyon uygulanmasıyla

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \delta x^a \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) \delta x^a dt = 0 \quad (3.118)$$

elde edilir. t_1 ve t_2 uç noktalarda $\delta x^a(t)$ değişiminin sıfıra eşit olduğu varsayılarak ilk terim sıfıra eşitlenir ve geriye kalan integralden

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = 0 \quad (3.119)$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla, burada kullandığımız sınır koşulları ve

tanımladığımız Lagrangian ile (3.119) denklemiyle tanımlı Euler-Lagrangian denklemi sağlanır.

Varyasyonlar ilkesini uzay-zamandaki bir skaler alan kuramına uygun olarak genelleştirmek için L Lagrangianın, x^μ gibi sürekli koordinatların keyfi bir cümlesi ile parametrize edilebilen dört-boyutlu bir uzay-zamanda $\Phi^a(x^\mu)$ olarak tanımlı alanlar cümlesine bağlı olduğunu ifade etmek yeterli olacaktır. Buna ek olarak, gerçekte keyfi bir manifold (uzay-zaman) ve keyfi koordinatlara bağlı alan kuramları değerlendirildiği zaman alanlar cümlesine metrik tensörün bileşenleri dahil edilmelidir.

Dört-boyutlu uzay-zaman manifoldu üzerinde tanımlı bir alanlar cümlesi için S eyleminin

$$S = \int_{\Omega} L(\Phi^a + \partial_\mu \Phi^a + \partial_\nu \partial_\mu \Phi^a, \dots) \sqrt{-g} d^4x \quad (3.120)$$

biçiminde olması gerekir. Burada, uzay-zaman Ω gibi dört-boyutlu bir bölge üzerinden değerlendirilir. (x^μ gibi herhangi bir koordinat sisteminde invaryant hacim elemanı $dV = \sqrt{-g} d^4x$ biçiminde tanımlanır.)

S 'nin skaler olması için ($\delta S = 0$ olacağından) $L\sqrt{-g}d^4x$ ifadesinin de M 'deki her noktada skaler bir alanı tanımlaması gerekir. $dV = \sqrt{-g}d^4x$ invaryant hacim elemanı zaten skaler bir alan olduğundan dolayı L Lagrangianı da skaler bir alan olmalıdır^{15,16}.

3.4.2. Einstein Alan Denklemi: Boş Uzay

Skaler alan kuramları için varyasyonlar ilkesi ile ilgili ifadeler yardımıyla gravitasyonel alan için bir eylem integrali tanımlanabilir ve bu sayede GG de ihtiyaç duyulan alan denklemleri türetilebilir.

GG 'de bir eylem tanımlayabilmek için genel koordinat dönüşümleri altında invaryant ve metrik tensör $g_{\mu\nu}$ ile türevlerine bağlı olan bir Lagrangian tanımlanabilir:

$$S_G = \int_{\Omega} L_G(g_{\mu\nu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\kappa \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \dots) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.121)$$

Metrik tensör ve türevleriyle tanımlanabilen en temel anlamlı skaler nicelik Ricci skaleridir. Buna göre buradaki Lagrangian

$$L_G(g_{\mu\nu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\kappa \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \dots) = R - 2\Lambda \quad (3.122)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada Λ sabittir. Dolayısıyla aşağıdaki eylemin

$$S_G = \int_\Omega (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x = \int_\Omega (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} - 2\Lambda \sqrt{-g}) d^4x \quad (3.123)$$

sonsuz küçük bir V bölgesi içinde değişimi incelenirse V bölgesinin sınırlarında metrik tensörün ve türevlerinin değişimi sıfıra eşit olur. Bu sayede eylem integralindeki değişim hesaplanabilir ve metriğin keyfi bir değişimi için $\delta S_G = 0$ minimum değişim gerekliliği kullanılabilir. (3.123) ifadesinin değişimi,

$$\delta S_G = \int_\Omega \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta \left[g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right] - 2\Lambda \delta \sqrt{-g} \right) d^4x \quad (3.124)$$

olur. Bu integral içindeki ifadeler ayrı ayrı değerlendirilirse ilk terim için V hacmi içinde Christoffel sembollerinin sıfıra eşit olduğu yerel bir koordinat sistemi tanımlanarak Ricci tensörü

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \quad (3.125)$$

biçimine indirgenir. Dolayısıyla Ricci tensöründeki değişim,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \left(\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right) = \partial_\lambda \left(\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) - \partial_\nu \left(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right) \quad (3.126)$$

olur. Metrik tensörün kısmi türevlerinin V hacminde sıfıra eşit olduğu koşulunu da kullanarak

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu \right) \quad (3.127)$$

ifadesi yazılabilir. Christoffel sembollerinin kovaryant indisleri bir tensör indisi gibi dönüştüğünden

$$A^\lambda = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu \quad (3.128)$$

biçiminde bir vektör tanımlanabilir. Dolayısıyla (3.127) denkleminin yeni hali,

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\mu A^\mu \quad (3.129)$$

olur. Bu durumda da (3.124) integralindeki birinci terim için $\int_V (\nabla_\mu A^\mu) dV$ ifadesi yazılır. Parantez içindeki terim diverjans olduğundan Gauss integral kuramına göre, bu terimin integrali sadece bir sınır terimi olarak katkıda bulunur. Fakat metrik tensör ve türevlerinin değişimi V hacminin sınırlarında sıfıra eşit olduğundan bu integralin sonucu sıfıra eşit olur ve birinci terimden herhangi bir katkı gelmediği anlaşılır.

(3.124) integralindeki üçüncü terim için

$$\delta\sqrt{-g} = \left[\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \right] \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \right] \delta g_{\mu\nu} \quad (3.130)$$

şeklindedir. Burada,

$$g = \sum_{\mu} g_{\mu\nu} \text{cof}^{\mu\nu} = \frac{\text{cof}^{\mu\nu}}{g^{\mu\nu}} \quad (3.131)$$

ve

$$\frac{g}{g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu} \quad , \quad dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} \quad (3.132)$$

olduğundan (3.130) denklemini yeniden

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.133)$$

şeklinde yazılır. ((3.133) denkleminde eşitliklerdeki farklı indisler arasındaki geçiş $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu}$ ifadesindeki değişim hesabıyla ($\delta g_{\lambda\kappa} = -g_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} \delta g^{\mu\nu}$) sağlanır).

Son olarak (3.124) integralindeki ikinci terim için

$$\delta \left[g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right] = \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} \quad (3.134)$$

(3.133) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \delta \left[g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right] &= \sqrt{-g} \left(\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right) \\ &= \sqrt{-g} \left(\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (3.135)$$

ifadeleri elde edilir. Sonuç olarak (3.131) ve (3.135) ifadeleri (3.124) denkleminde yazılırsa

$$\delta S_G = \int_{\Omega} \left\{ R_{\mu\nu} \left[\sqrt{-g} \left(\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \right] - 2\Lambda \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \right\} d^4 x \quad (3.136)$$

$$= \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4 x \quad (3.137)$$

elde edilir.

Minimum değişim ilkesine göre metriktaki herhangi bir değişim için $\delta S_G = 0$ olduğu gerekliliği kullanılarak GG kuramında boşluk alan denklemleri (Einstein Alan denklemleri)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.138)$$

şeklinde ifade edilir. Burada Λ kozmolojik sabit olarak adlandırılır ve çok küçük bir değere sahiptir. Dolayısıyla, tüm evren gibi çok büyük sistemler değerlendirildiği zaman bu terim ihmal edilebilir.

3.4.3. Einstein Alan Denklemi: Madde Bulunduran Uzay

Önceki kısımda boş bir uzay-zaman için (sadece gravitasyonel alanı içeren) alan denklemleri türetilmiştir. Bu kısımda ise gravitasyonel alanın yanı sıra maddenin (madde dağılımı ve diğer alanların) bulunduğu bir uzay-zaman için alan denklemleri elde edilir. Bu amaç doğrultusunda

$$S_T = \frac{1}{2\kappa} S_G + S_M = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2\kappa} L_G + L_M \right) \sqrt{-g} d^4x \quad (3.139)$$

biçiminde yeni bir eylemin tanımlanması gerekir. Burada κ gravitasyonel alan için bağlanma sabitini, L_M maddeye ait Lagrangianı ve S_M maddeye ait eylem integralini temsil eder.

Minimum eylem ilkesine göre

$$\delta \left(\frac{1}{2\kappa} S_G + S_M \right) = \int_{\Omega} \delta \left(\frac{1}{2\kappa} L_G \sqrt{-g} + L_M \sqrt{-g} \right) d^4x = 0 \quad (3.140)$$

olur. Burada sadece maddeye ait kısım incelenirse

$$\delta S_M = \int_{\Omega} \delta \left(L_M \sqrt{-g} \right) d^4x = 0 \quad (3.141)$$

alınır ve integral içindeki ifade için

$$\delta \left(\sqrt{-g} L_M \right) = \frac{\partial \left(\sqrt{-g} L_M \right)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \left(\sqrt{-g} L_M \right)}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} \quad (3.142)$$

yazılabilir. Bu noktada,

$$B^{\lambda} = \frac{\partial \left(\sqrt{-g} L_M \right)}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.143)$$

gibi bir vektör tanımlanır ve bu ifadenin diverjansını alırsak

$$\nabla_{\lambda} B^{\lambda} = \left(\frac{\partial \left(\sqrt{-g} L_M \right)}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \right)_{,\lambda} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \left(\sqrt{-g} L_M \right)}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} \quad (3.144)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade (3.142) denkleminde kullanılırsa

$$\delta\left(\sqrt{-g}L_M\right) = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} - \left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu,\lambda}}\right]_{,\lambda}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda B^\lambda \quad (3.145)$$

biçiminde yeni bir denklem elde edilir. Bu yeni ifade (3.141) integralinde yazıldığı zaman, $\int_\Omega \nabla_\lambda B^\lambda d^4x$ terimi Gauss integral yasasına göre sadece sınır terimi olarak katkı yapar. Fakat sınırdaki değişimlerin sıfıra eşit olduğu koşuluna göre de bu diverjans teriminin integrali sıfıra eşit olur ve son ifade,

$$\delta S_M = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu,\lambda}}\right]_{,\lambda} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (3.146)$$

biçiminde olur. (3.140) denklemine göre

$$\delta\left(\frac{1}{2\kappa}S_G + S_M\right) = \int_\Omega \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) + \frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu,\lambda}}\right]_{,\lambda} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (3.147)$$

elde edilir. Buna göre (3.146) denkleminde

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu,\lambda}}\right]_{,\lambda} \right\} = T_{\mu\nu} \quad (3.148)$$

ifadesi, L_M Lagrangian yoğunluklu bir sistemin enerji-momentum tensörü olarak tanımlı simetrik bir tensör olmak üzere yeniden tanımlanırsa

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_\Omega T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (3.149)$$

ifadesi elde edilir.

Bu tanımlamalar ışığında (3.147) denkleminde (minimum eylem ilkesiyle) GG kuramının tam (*Einstein alan denklemleri*) alan denklemleri

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.150)$$

olarak bulunur. Buradaki bağlanma sabiti κ ,

$$\kappa = \frac{4\pi G}{c^4} \quad (3.151)$$

şeklinde tanımlıdır.

3.5 ENERJİ VE MOMENTUM

3.5.1. Enerji – Momentum Tensörü

E-M tensörü, enerji ile ilişkili kavramları en genel biçimde ifade eden, kütle-enerji-momentum arasında bir ilişki sağlayan ve uzay-zamandaki E-M yoğunluğu ve akı yoğunluğunu belirleyen bir niceliktir. Bu ifadelerden de anlaşılacağı gibi GG de Einstein denklemlerindeki gravitasyonel alanın kaynağı (gravitasyonel alan dışındaki her şey) bu nicelik tarafından temsil edilir. E-M tensörü

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho \rightarrow \text{Enerji Yoğunluğu} \\ T_{0i} &= j_i \rightarrow \text{Enerji Akı Yoğunluğu} \\ T_{i0} &= p_i \rightarrow \text{Momentum Yoğunluğu} \end{aligned}$$

bileşenlerinden oluşur. Enerji ve momentum kavramları korunumlu olduklarından dolayı E-M tensörü de korunumlu bir niceliktir ($\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0$, zaman bileşeni enerjinin korunumunu, uzay bileşenleri ise momentumun korunumunu temsil eder.) Görelilikte yer alan başlıca E-M tensörleri; elektromanyetik alan, mükemmel akışkan ve toz-bulutuna (düzensiz maddeye) ait ifadelerdir.

Manyetik alanın sıfıra eşit olduğu bir bölgede elektromanyetik alanın Lagrangian yoğunluğu

$$L_{EL} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{16\pi} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \quad (3.152)$$

şeklinde tanımlanır^a. Elektromanyetik alanın Lagrangian yoğunluğu, alanın enerji yoğunluğunu temsil eden bir enerji skaleridir (Lorentz skaleri). L_{EL} Lagrangian yoğunluklu bir sistemin E-M tensörü (3.148) denkleminde tanımlı simetrik bir tensör olduğundan elektromanyetik alana ait E-M tensörünü tanımlamak için (3.152) denklemini, (3.148) denkleminde yazmak yeterli olacaktır. (3.152) denkleminin herhangi bir türevini içermediğinden (3.148) denkleminde parantez içindeki ikinci terim düşer ve E-M tensörü

a. Detaylı inceleme için; Bkz: Jackson, J. D. Classical Elektrodynamics, John Wiley&Sons, Inc. Third Edition. 1999. Sayfa 598.

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{EL} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} L_{EL})}{\partial g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\partial L_{EL}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{L_{EL}}{g} \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \\
&= -2 \frac{\partial L_{EL}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} L_{EL}
\end{aligned} \tag{3.153}$$

ve

$$T_{\mu\nu}^{EL} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \tag{3.154}$$

şeklinde elde edilir.((3.153) denklemleri arasındaki geçiş (3.132) özdeşliği ile sağlanır).

(3.154) denklemi kullanılarak, kaynağın bulunmadığı bir bölgede Einstein-Maxwell denklemi olarak adlandırılan tam alan denklemi

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{EM} = -2F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{3.155}$$

şeklinde yazılır.

Görelilik kuramında akışkan kelimesi çok geniş bir anlama sahiptir. Bu kuramda akışkan kelimesi sadece normal akışkanları değil ayrıca gazları, ışınları ve hatta boşluk enerjisini de kapsamaktadır. Makroskopik fiziksel sistemlerin büyük bir çoğunluğu, belki evrenin kendisi bile bu sistemler arasında olmak üzere, yaklaşık olarak mükemmel bir akışkan olarak değerlendirilirler⁶.

Viskozite ve ısı iletimine sahip olmayan bir akışkan mükemmel akışkan diye adlandırılır. Mükemmel akışkan, her noktasında bir \vec{u} hızına sahiptir ve bu hızla hareket eden bir gözlemci çevresindeki akışkanları izotropik olarak görür. Dolayısıyla mükemmel akışkan, biri \vec{u} dört-vektör ve diğer ikisi öz enerji yoğunluğu ρ , izotropik basınç p , sıcaklık T , özgül entropi s ya da özgül entalpi $\omega = \frac{(p + \rho)}{n}$ niceliklerinden ikisi olmak üzere, üç nicelik ile karakterize edilir. Buradaki n baryon sayı yoğunluğudur. Mükemmel bir akışkanın Lagrangian yoğunluğu, enerjiyi temsil eden enerji skalerine eşittir $L_{M\dot{U}} = -\rho$. Bu niceliklere bağlı olarak, mükemmel bir akışkan için E-M tensörü

$$T_{\mu\nu}^{M\dot{U}} = (p + \rho) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu\nu} \tag{3.156}$$

biçiminde tanımlanır ve sürekli bir madde dağılımını temsil eder.

Einstein alan denklemlerindeki (maddeden kaynaklanan) E-M tensörünü tanımlamak için evrenin düzgün bir biçimde dağılımlı mükemmel bir akışkan madde

ile dolu olduğu varsayımı yapılır¹⁷. Dolayısıyla mükemmel bir akışkan için (3.156) denkleminle yazılan E-M tensörünün GG kuramında ve Einstein denklemlerinde evrendeki maddeyi (madde dağılımını) temsil ettiği ifade edilebilir.

Birbirine göre hareketsiz parçacıkların oluşturduğu ve GG kuramında genellikle evrendeki galaksileri modelleyen sistemler toz-bulut (düzensiz madde) diye adlandırılır. Bir toz-bulut sistemi izotropik olmayan bölgelere sahiptir ve dolayısıyla böyle bir yapıda basınçtaki değişim (basıncın gradyeni) önem kazanır. Fakat basıncın kaynağı akışkan içindeki parçacıkların düzensiz hareketleri olduğundan ve toz-bulutundaki parçacıkların hareketleri düzenli olarak tanımlandığından bu sistemde herhangi bir yerde basınç sıfıra eşit olur ($p=0$). Ayrıca çok yavaş hareket eden parçacıklardan oluşan bir gaz sisteminin enerjisi yaklaşık olarak parçacıkların durgun enerjileri ρ 'ya eşittir. Dolayısıyla bir toz-bulut için E-M tensörü, mükemmel akışkana ait E-M tensöründe basıncın sıfıra eşit ve enerji yoğunluğunun sabit olduğu duruma karşılık gelir.

$$T^{DM}_{\mu\nu} = \rho u_{\mu} u_{\nu} . \quad (3.157)$$

3.5.2. Enerji-Momentum Korunumu ve Enerjinin Yerelleşmesi

Newton mekaniğinde bir parçacığın hareketini belirlemek için parçacıklara etki eden kuvvetin tanımlanması gerekir. Fakat bazı durumlarda kuvvet detaylı bir biçimde tanımlanamayabilir ya da sistem bir kütle merkeziyle, yani tek bir parçacık cinsinden tanımlanamayacak kadar karmaşık olabilir. Bu durumlarda oldukça genel varsayımlar altında sağlanan korunum yasalarına ve sistemi bir bütün olarak karakterize eden enerji, momentum, yük vb. korunumlu niceliklere başvurulur¹⁸.

Diğer tüm fiziksel sistemlerde olduğu gibi görelilik kuramında da korunumlu niceliklerden yararlanarak sistemin hareketi ve diğer özellikleri belirlenebilir. ÖG kuramında bu amaç doğrultusunda E-M tensörü kullanılarak korunum yasası,

$$\partial_{\nu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.158)$$

biçiminde sağlanır. Gravitasyonel alanın bulunduğu durumlarda (GG, TPG ve alternatif kuramlarda) ise genel kovaryanslık ilkesinden dolayı korunum yasası artık (3.158) denkleminin sağlanmaz. Bu ilkeye göre (3.158) denklemindeki normal türev ifadesi yerini kovaryant türev almalıdır.

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.159)$$

Görelî gravite kuramlarında E-M korunumu için anlamlı bir ifade olan bu denklemi açık bir biçimde yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} T^{\nu\lambda} g^{\mu\kappa} \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa}} = 0. \quad (3.160)$$

Elde edilen bu denklemde maddeye ait E-M korunumunu veren (eşitliğin sağındaki birinci terim) ifadenin yanı sıra ek bir terimin olduğu görülmektedir. (3.160) denklemde eşitliğin sağ tarafı bir bütün olarak değerlendirildiği zaman bu denklemin madde ile gravitasyonel alan arasında bir (enerji-momentum) dönüşümü ifade ettiği açık bir biçimde anlaşılmaktadır. Dolayısıyla, bu ek terimin gravitasyonel alanın bulunduğu durumda maddeye ait enerji ve momentumun yalnız başına korunumlu olmadığı gerçeğinin bir sonucu olarak ortaya çıktığı düşünülebilir. Yani, gravitasyonel alan durumunda yalnızca $T^{\mu\nu}$ niceliğini kullanarak bir korunum yasasının yazılması mümkün değildir.

Yukarıdaki ifadelerden de anlaşılacağı gibi görelî gravite kuramlarında genel bir biçimde anlamlı bir korunum yasası elde etmek için madde E-M tensörünün yanı sıra gravitasyonel alana ait enerjiyi temsil eden bir niceliğin göz önünde bulundurulması gerekir. Bu amaç doğrultusunda gravitasyonel alana ait E-M dağılımını belirlediği varsayılan ve madde E-M tensörü ile birlikte

$$\partial_{\nu} \tau^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0 \quad (3.161)$$

biçiminde korunumlu olan bir $t^{\mu\nu}$ niceliği tanımlanabilir^{19,20}.

(3.161) denklemi doğrudan görelilik kuramının ilkeleriyle elde edildiğinden dolayı arzu edilen korunum yasasını sağlar ve tüm koordinat sistemlerinde geçerlidir (τ niceliği kovaryanstır). Fakat yukarıda tanımlanan $t^{\mu\nu}$ niceliği bazı problemleri de beraberinde getirmektedir. Öncelikle, (3.160) denklemi incelendiğinde

$$\Theta_{\lambda} = -g_{\lambda\mu} \frac{\partial (\sqrt{-g} T^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \quad (3.162)$$

ve Θ_{λ} ile $t^{\mu\nu}$ birbirleriyle doğrudan ilişkili olduklarından dolayı $t^{\mu\nu}$ nün tam bir tensöriyel nicelik olmadığı açıkça görülmektedir. $t^{\mu\nu}$ tensöriyel dönüşüm özelliklerine sahip değildir (koordinatlara bağlıdır), bir pseudotensördür ve tam olarak fiziksel anlamlı bir nicelik tanımlamaz. İkinci önemli problem ise pseudotensörün koordinatlara bağlı olmasından kaynaklı olarak çok sayıda $t^{\mu\nu}$

niceliğinin tanımlanabilmesidir. Dolayısıyla gravitasyonel alana ait enerji ve momentum kavramları yüksek derecede bir keyfilikle ilişkilidir²¹. Ayrıca, diğer bir problem ise düz uzay-zamanda yarı-kartezyen koordinatlar kullanarak $\int t^{00} d^3x$ biçiminde yazılan bir integralin değerinin sifıra eşit olmamasına karşın bu integral için kartezyen koordinatlardan küresel koordinatlara bir dönüşüm yapılması durumunda integralin değeri sifır olmasıdır²². Bunun da ötesinde Schwarzschild yarıçapının dışındaki her yerde Schwarzschild çözümleri için $t^{\mu\nu}$ değerinin sifıra eşit olduğunu veren bir koordinat sistemi tanımlamak mümkündür²³. Oysa, $t^{\mu\nu}$ 'nin gravitasyonel alan enerjisini temsil etmesi sebebiyle bu yarıçapın dışında da sifırdan farklı bir değere sahip olması umulur. Fakat Einstein tarafından, özellikle son ikisi olmak üzere yukarıda sözü edilen problemlerle ilgili çalışmalarda elde edilen olumsuz sonuçların kullanılan koordinatların keyfi olarak tanımlanmasından kaynaklandığı ve bu koordinatların ilgilenilen fiziksel sistemlerle bağlantılı olmadıkları vurgulandı ve pseudotensör yaklaşımının güvenilir olduğu savunuldu.

İlki 1916 yılında Einstein tarafından tanımlanan bu nicelikler görelî gravite kuramlarında enerjinin yerelleşmesi ile ilgili olarak da ciddi problemler ortaya çıkarmaktadır. Bu problemlerin kökeni GG 'in temel ilkesi olan denklik ilkesine uzanmaktadır. Bu ilkeye göre uygun bir koordinat sisteminin seçilmesiyle yerel olarak gravitasyonel etkiden kurtulmak mümkündür, dolayısıyla bu koordinat sistemindeki özel bir noktada $t^{\mu\nu}$ sifıra eşitlenebilir ve bu durum gravitasyonel alana ait E-M 'un yerel olarak belirlenemeyeceğini, yani yerelleşemeyeceğini gösterir. Diğer bir ifadeyle, bu enerji formunun bir bütün olarak değerlendirilmesi gerektiği açık bir biçimde kanıtlanmaktadır. Enerjinin yerelleşmesi ile ilgili olarak daha sonraki yıllarda yapılan çalışmalarda, enerjinin sadece küresel sistemlerde yerelleşebileceği ifade edildi²¹. Fakat enerjinin küresel veya herhangi bir sistemde yerelleşmesi durumunda diğer tüm koordinat sistemlerinde de yerelleşmesi gerektiği gibi makul bir düşünce²⁴ önceki öngörüğü çürütmektedir. Bu konuyla ilgili diğer bir görüşe göre görelî gravite kuramında tüm enerji formları gravitasyonel alana katkı yaptığından dolayı bu kuramda enerjinin yerelleşmeyen bir formunun kabul edilemez olduğu ve dolayısıyla gravitasyonel alan enerjisi dâhil tüm enerji formlarının yerelleşmesin ilkesel olarak mümkün olduğu söylenmektedir²⁵.

Pseudotensörler, kullanımları ile ilgili kısıtlamalara ve neden oldukları fiziksel olarak anlamsız (olumsuz) sonuçlara rağmen, Einstein tarafından “gravitasyonel dalgalar vardır ve bu dalgalar tanımlı bir enerji taşırlar” ifadesiyle yapılan çok önemli öngörü için bir kanıt ve özellikle gravitasyonel dalga araştırmalarında yapılan hesaplamalar için önemli bir nicelik olarak kalmayı sürdürmektedir.

Enerjinin yerelleşmesi problemi GG kuramının ortaya çıktığı tarihten bu yana süregelen bir tartışma ve birçok araştırmanın da konusu olmaktadır ve de günümüzde bile açık bir problem olarak kalmayı sürdürmektedir. Yerelleşme probleminde pseudotensör yaklaşımının yanı sıra 1980’lerden bu yana yarı-yerel olarak adlandırılan alternatif bir kavramı tanımlama adına çok büyük çaba harcanmaktadır. Yarı-yerel yaklaşımdaki temel düşünce, bir kaynağın etki enerjisini iki-yüzey üzerinden yapılan ölçümlerle belirlemektir. Dolayısıyla pseudotensör yaklaşımında bir yerel yoğunluğun hiper yüzey üzerinden gerçekleştirilen integral işlemi ile elde edilmesine karşın, yarı-yerel yaklaşımda sonuçlar iki-yüzey üzerinden integral işlemi ile elde edilir. Bu yaklaşımın kavramsal olarak daha açık bir biçimde anlaşılabilmesi için Brown ve York²⁶ tarafından yapılan yarı-yerel enerji tanımı incelenebilir. Brown ve York’ a göre üç boyutlu uzaysal bir Σ hiperyüzey Einstein alan denklemlerini sağlayan dört-boyutlu bir uzay-zamanın bir parçasıdır. Sonuç olarak, ilgilendiğimiz enerji bölgesini çevreleyen iki-boyutlu bir Υ sınırı ise üç-boyutlu Σ hiperyüzeyin bir parçası olmaktadır. Dolayısıyla bu ifadelerden de anlaşılacağı gibi gravitasyonel alan enerjisi için daha önce ifade edilen bütünlüğün herhangi bir yolla özel miktarda bir bölge bulmak için bölünmesiyle yerelleşmenin belirlenmesi mümkün olabilir. Yarı-yerel enerji kavramı çok önemli olmasına karşın bu yaklaşımla yapılan çalışmalar ve yerel enerji tanımları hala ciddi zorluklarla karşı karşıya kalmaya devam etmektedir^{27,28,29}.

3.5.3. Enerji-Momentum Pseudokompleksleri

Madde ve gravitasyonel alanların toplamından kaynaklanan ve (3.161) denkleminde $\tau^{\mu\nu}$ olarak gösterilen toplam E-M, dağılımın E-M pseudokompleksi diye adlandırılır. $\tau^{\mu\nu}$ pseudokompleksinin bileşenlerinden olan $t^{\mu\nu}$ pseudotensörü kovaryans olmamasına rağmen $\tau^{\mu\nu}$ niceliği bir bütün olarak kovaryant korunumlu niceliklerin hesaplanmasında kullanılabilir. Dolayısıyla $\tau^{\mu\nu}$ niceliği kullanılarak fiziksel açıdan anlamlı sonuçlar elde etmek mümkündür.

$\tau^{\mu\nu}$ niceliğinin görelî gravite kuramlarında sağladığı yararlar ve daha önce sözü edildiği gibi $t^{\mu\nu}$ niceliğinin koordinata bağımlı olması nedeniyle bir çok E-M pseudokompleksi tanımlanmıştır. Bu çalışma kapsamında tanımlı pseudokomplekslerinin en önemlilerinden dört tanesi incelenmektedir.

3.5.3.1. Einstein

Einstein E-M pseudokompleksine, diğerk bir ifadeyle madde ve gravitasyonel alanı içeren bir sistem için Einstein tarafından tanımlanan korunum yasası Kısım 3.4 de elde edilen gravitasyonel alan denklemlerinden yararlanılarak elde edilebilir. E-M tensörü için (3.148) denklemi ile (3.150) alan denklemi kullanılarak (3.162) denklemi,

$$\Theta_{\mu} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left[\frac{\partial L}{\partial g^{\lambda\nu}} \frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\lambda\nu, \kappa}} \right) \frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} \right] \quad (3.163)$$

biçiminde yazılır. Burada, L Lagrangianı^a

$$L = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\kappa}^{\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa} \right) \quad (3.164)$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca Einstein pseudotensörünün

$$\sqrt{-g} \text{E} t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{16\pi} \left(\delta_{\mu}^{\nu} L - \frac{\partial L}{\partial g^{\lambda\nu, \kappa}} \frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) \quad (3.165)$$

ile temsil edilmesi durumunda (3.163) denklemi

$$\Theta_{\mu} = -\frac{\partial \left(\sqrt{-g} \text{E} t_{\mu}^{\nu} \right)}{\partial x^{\nu}} \quad (3.166)$$

biçimini alır. Sonuç olarak (3.162) ve (3.166) denklemlerinden

$$\frac{\partial \text{E}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[\sqrt{-g} \left(T_{\mu}^{\nu} + \text{E} t_{\mu}^{\nu} \right) \right] = 0 \quad (3.167)$$

biçiminde tanımlı Einstein korunum yasası elde edilir.

Einstein E-M pseudokompleksi ayrıca $H_{\mu}^{\nu\lambda}$ biçiminde anti-simetrik bir “süperpotansiyel” in diverjansı olarak da yazılabilir:

$$\text{E}_{\mu}^{\mu} = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} H_{\mu}^{\nu\lambda} \quad (3.168)$$

a. Detaylı inceleme için; Bkz: Habson, M. P. ve ark. General Relativity: An Introduction for Physicists, Cambridge Univ. Press, New York, 2006, Sayfa 542.

$$H_{\mu}^{\nu\lambda} = {}_F U_{\mu}^{\nu\lambda} = \frac{g_{\mu\kappa}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left[-g \left(g^{\nu\kappa} g^{\lambda\alpha} - g^{\lambda\kappa} g^{\nu\alpha} \right) \right]. \quad (3.169)$$

Burada, ${}_F U_{\mu}^{\nu\lambda}$ ifadesi Freud³⁰ süper potansiyelidir. Einstein toplam E-M pseudokompleksi anti-simetrik bir süperpotansiyelle tanımlandığından ve ayrıca E_{μ}^{ν} ifadesinden herhangi bir indisin indirilmesi veya kaldırılması durumunda simetrik bir nicelik elde edilemediğinden bu temsilde açıl momentum korunumu için bir açıl momentum pseudokompleksi tanımlanamaz.

Burada ilgilendiğimiz sistemin, $g_{\mu\nu}$ metrik tensörün asimtotik bir biçimde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ sabit değerine yakınsadığı $x^{\mu} = (t, x, y, z)$ yarı kartezyen koordinatlar olarak tanımlanması durumunda (pseudotensörün özelliklerinden dolayı) (3.167) denklemini kullanılarak zamandan bağımsız toplam enerji-momentum ifadesi

$${}^E P_{\mu} = \iiint E_{\mu}^0 dx dy dz \quad (3.170)$$

biçiminde tanımlanır ve sadece bir enerji-momentum dört-vektörünün kovaryant bileşenleriyle temsil edilir³¹.

3.5.3.2. Landau-Lifshitz

Metrik tensörün türevinin sıfıra eşit olduğu özel bir noktaya sahip bir koordinat sisteminin seçilmesi durumunda madde ve gravitasyonel alandan oluşan bir sistem için korunumlu toplam dört-momentumu tanımlamak mümkün olur. Bu durumda, bu özel noktada (3.160) denklemindeki ikinci terim sıfıra eşit olur ve (3.160) denklemini (3.158) denklemine indiririz.

(3.158) denklemini sağlayan $T^{\mu\nu}$ nicelikleri ayrıca

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} s^{\mu\nu\lambda} \quad (3.171)$$

biçiminde de yazılabilir. Bu $s^{\mu\nu\lambda}$ niceliği ν ve λ indislerine göre anti-simetriktir $s^{\mu\nu\lambda} = -s^{\mu\lambda\nu}$ ve Einstein alan denklemlerini kullanarak böyle bir niceliği tanımlamak mümkündür. Değerlendirdiğimiz bu özel nokta için Ricci tensörü

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} g^{\nu\alpha} g^{\lambda\beta} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 g_{\kappa\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\beta}} \right\} \quad (3.172)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. (3.150) Einstein alan denklemini ve (3.172) Ricci tensör denklemini kullanılarak $T^{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \frac{1}{16\pi} \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left[-g \left(g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} \right) \right] \right\} \quad (3.173)$$

biçiminde yazılabilir. Süslü parantez içindeki ifade κ ve λ indislerine göre anti-simetriktir ve dolayısıyla (3.171) denkleminde tanımlanan $s^{\mu\nu\lambda}$ ifadesine karşılık gelmektedir. Değerlendirdiğimiz bu özel noktada metrik tensörün birinci türevi sifıra eşit olduğundan dolayı süslü parantez içindeki $1/(-g)$ çarpanı türev işlemi dışına çıkarılabilir ve

$$\ell^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \vartheta^{\mu\nu\lambda\kappa}, \quad \vartheta^{\mu\nu\lambda\kappa} = -g \left(g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} \right) \quad (3.174)$$

ifadesi Landau-Lifshitz süper potansiyeli olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ell^{\mu\nu\lambda} = (-g) T^{\mu\nu} \quad (3.175)$$

şeklinde yazılabilir. $\ell^{\mu\nu\lambda}$ ifadesi, ν ve λ indislerine göre anti-simetriktir. Ayrıca Landau-Lifshitz ile Freud süper potansiyelleri arasında

$$\ell^{\mu\nu\lambda} = \sqrt{-g} g^{\mu\kappa} {}_F U_{\kappa}^{\nu\lambda} \quad (3.176)$$

biçiminde bir ilişki vardır.

(3.174) denklemi $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0$ varsayımı altında elde edilir, fakat keyfi bir

koordinat sistemi seçilmesi durumunda bu ilişki artık geçerli olmaz ve dolayısıyla

$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ell^{\mu\nu\lambda} - (-g) T^{\mu\nu}$ farkı sıfırdan farklı bir değere eşit olur. Bu durumda bu fark

$(-g) {}_{L-L} t^{\mu\nu}$ ile tanımlanarak,

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ell^{\mu\nu\lambda} = L^{\mu\nu} = (-g) \left(T^{\mu\nu} + {}_{L-L} t^{\mu\nu} \right) \quad (3.177)$$

ilişkisi elde edilir. Burada, $L^{\mu\nu}$ L-L enerji-momentum pseudo kompleksidir ve gravitasyonel alana ait E-M pseudo tensörü ${}_{L-L} t^{\mu\nu}$ simetriktir ve bu denklem (3.150)

alan denkleminde göre,

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ell^{\mu\nu\lambda} = (-g) \left[\frac{1}{\kappa} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) + {}_{L-L} t^{\mu\nu} \right] \quad (3.178)$$

biçiminde yazılır. (3.172), (3.173) denklemleri kullanılarak uzunca hesaplamalar sonrasında ${}_{L-L} t^{\mu\nu}$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
{}_{L-L}t^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} & \left[(2\Gamma_{\lambda\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}\Gamma_{\kappa\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\kappa\beta}^{\beta}) (g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}) \right. \\
& + (\Gamma_{\lambda\beta}^{\nu}\Gamma_{\kappa\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\kappa\alpha}^{\nu}\Gamma_{\lambda\beta}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\beta} - \Gamma_{\lambda\kappa}^{\nu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) (g^{\mu\lambda}g^{\kappa\alpha}) \\
& + (\Gamma_{\lambda\beta}^{\mu}\Gamma_{\kappa\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\kappa\alpha}^{\mu}\Gamma_{\lambda\beta}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\beta} - \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) (g^{\nu\lambda}g^{\kappa\alpha}) \\
& \left. + (\Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu}\Gamma_{\kappa\beta}^{\nu} - \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}) (g^{\lambda\kappa}g^{\alpha\beta}) \right]. \quad (3.179)
\end{aligned}$$

${}_{L-L}t^{\mu\nu}$ niceliğinin temel niteliği tam bir tensör tanımlamasıdır. Bu durumun nedeni $\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\ell^{\mu\nu\lambda}$ ifadesinin kısmi türevle tanımlanmasıdır (bir tensörün ancak kovaryant türevi yine bir tensör tanımlar). (3.177) denkleminde göre $(T^{\mu\nu} + {}_{L-L}t^{\mu\nu})$ toplamı için

$$\frac{\partial L^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(-g)(T^{\mu\nu} + {}_{L-L}t^{\mu\nu}) = 0 \quad (3.180)$$

özdeşliği sağlanır ve L-L korunum yasası bu denklemler temsil edilir:

$${}_{L-L}P^{\mu} = \int (-g)(T^{\mu\nu} + {}_{L-L}t^{\mu\nu})d\Omega_{\nu}. \quad (3.181)$$

Gravitasyonel alanın bulunmadığı durumda ve (3.181) integral denklemini sadece maddeden oluşan fiziksel bir sistemin dört-momentumunu tanımlayan integral $\int (-g)(T^{\mu\nu})d\Omega_{\nu}$ biçiminde olur. Dolayısıyla (3.181) denkleminin madde ve gravitasyonel alandan oluşan bir fiziksel sistemin toplam dört-momentumunu tanımladığı açık bir biçimde anlaşılır.

(3.181) denkleminde integrasyon üç boyutlu uzayın tümünü içeren herhangi bir hiperyüzey üzerinden alınabilir. Eğer bu hiperyüzey için $x^0 = t = \text{sabit}$ seçimi yapılırsa bu durumda (3.181) denklemini,

$${}_{L-L}P^{\mu} = \iiint L^{\mu 0} dx dy dz \quad (3.182)$$

biçiminde üç-boyutlu bir yüzey integrali cinsinden yazılabilir.

Landau ve Lifshitz tarafından tanımlanan $L^{\mu\nu}$ E-M pseudokompleksinin temel avantajı simetrik olmasıdır: $L^{\mu\nu} = L^{\nu\mu}$. Bu simetri durumu sayesinde açısal momentum için de bir korunum yasası tanımlanabilir³²:

$${}_{L-L}M^{\mu\nu} = \int (x^{\mu}dP^{\nu} - x^{\nu}dP^{\mu}) = \int (x^{\mu}L^{\lambda\nu} - x^{\nu}L^{\lambda\mu})d\Omega_{\lambda}. \quad (3.183)$$

3.5.3.3. Bergmann-Thomson

Mekanik ve alan kuramlarının tümünde temel korunum yasaları ile fiziksel yasaların evrensel invaryanslık özellikleri arasında yararlı bir ilişki vardır. Bu ilişki görelilik kuramı çerçevesinde incelenirse, GG denklemleri keyfi (eğrisel) koordinat dönüşümleri altında invaryant olduğundan dolayı bu kuramda her bir sonsuz küçük koordinat dönüşümünün korunumlu bir niceliğe karşılık geldiği ifade edilebilir.

Genel kovaryant kuramlarda t_μ^ν pseudotensörü için (Einstein tarafından tanımlanan)

$$\sqrt{-g}t_\mu^\nu = \frac{\partial L}{\partial g^{\lambda\nu}} g^{\lambda\nu}{}_{,\mu} - \delta_\mu^\nu L \quad (3.184)$$

ifadesi alışılmış işlemlerle tanımlanabilir. Fakat benzer işlemlerle diverjansı sıfır olan ve invaryant olma avantajına sahip simetrik bir tensör tanımlamak mümkün değildir (Einstein temsilinden görüldüğü gibi). Bu nedenle, bu problemden sıyrılmak için farklı özelliklere sahip iki nicelikten oluşan yarı-simetrik bir ifade elde edilebilir. Bu iki nicelikten biri sadece gravitasyonel terime bağlıdır ve ne kovaryant ne de simetriktir. Diğeri, madde E-M tensörüdür ve hem kovaryant hem de simetriktir. Dolayısıyla, bu sayede sözde-güçlü korunum yasalarının yardımıyla pseudotensör ile yarı-simetrik ifadeler arasında bir ilişki kurmak mümkün olur.

GG kuramı genel koordinat dönüşümlerine göre kovaryans olduğundan dolayı sözde-korunum yasaları alan denklemlerinden bağımsız olarak sağlanır. Dolayısıyla bu korunum yasaları hem genel Lagrangian L hem de sadece gravitasyonel Lagrangian L_G için sağlanacaktır. Gravitasyonel terim için güçlü korunum yasası,

$$K_{\mu\nu}{}^\nu = 0 \quad (3.185)$$

$$K_{\mu\nu}{}^\nu = \sqrt{-g}t_\mu^\nu - F_\mu^\nu \frac{\partial L}{\partial g} \quad (3.186)$$

olarak yazılır. Burada, pseudotensör t_μ^ν Lagrangianın sadece gravitasyonel teriminden elde edilir. F_μ^ν ise gravitasyonel alan değişkenlerinin dönüşüm özellikleriyle tanımlanır. Alan değişkenlerinin sonsuz küçük bir dönüşümü durumunda

$$\delta g = F_{\mu}{}^{\nu} (\delta x^{\mu})_{,\nu} \quad (3.187)$$

ifadesi yazılabilir. Burada, δx^{μ} koordinatlardaki sonsuz küçük değişimi ifade etmektedir. Buna göre (3.186) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} K_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} &= \sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} - F_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial(G)}{\partial g} \\ &= \sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} + 2g_{\lambda\mu} \frac{\partial(G)}{\partial g_{\lambda\nu}} \\ &= \sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} - \sqrt{-g} G_{\mu}^{\nu} \end{aligned} \quad (3.188)$$

ve

$$K_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = \sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} + \mathfrak{S}_{\mu}^{\nu} \quad (3.189)$$

biçiminde olur. Buradaki G 'ler Einstein tensörü ve \mathfrak{S}_{μ}^{ν} madde E-M tensör yoğunluğudur. $K_{\mu}{}^{\nu}$ ifadesi madde ve gravitasyonel alan için toplam enerji-momentumu temsil eder ve (3.185) denkleminde dolayı süper potansiyel ile

$$K_{\mu}{}^{\nu} = -V^{\nu\lambda\mu}{}_{,\lambda} \quad (3.190)$$

denklemine göre ilişkilidir. Korunum yasası kovaryant indislerle yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} (K^{\mu\nu} + V^{\nu\lambda\mu}{}_{,\lambda})_{,\mu} &= 0 \\ (\mathfrak{S}^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\kappa\mu} t_{\kappa}^{\nu} + g^{\kappa\nu} V_{\kappa}^{\lambda\mu}{}_{,\lambda})_{,\mu} &= 0 \\ (\mathfrak{S}^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu})_{,\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (3.191)$$

elde edilir. $\tau^{\mu\nu}$ kontravaryant E-M ifadesinde gravitasyonel terimleri temsil eder. Dolayısıyla B-T gravitasyonel alan E-M pseudotensörü

$$\tau^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g_{B-T}{}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\kappa\mu} t_{\kappa}^{\nu} + g^{\kappa\nu} V_{\kappa}^{\lambda\mu}{}_{,\lambda} \quad (3.192)$$

biçiminde olur.

Sonuç olarak yerel enerji-momentum korunum yasası

$$\frac{\partial B^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (3.193)$$

şeklinde sağlanır ve B-T enerji-momentum pseudokompleksi,

$$B^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \Pi^{\mu\nu\lambda} \quad (3.194)$$

olur. Burada,

$$\Pi^{\mu\nu\lambda} = g^{\mu\kappa} \Psi_{\kappa}^{\nu\lambda} = g^{\mu\kappa} {}_F U_{\kappa}^{\nu\lambda} \quad (3.195)$$

ve $\Psi_{\kappa}^{\nu\lambda}$ ifadesi (3.169) denklemi ile tanımlı Freud süper potansiyeline (${}_F U_{\kappa}^{\nu\lambda}$) eşittir.

Bergmann-Thomson temsilinde madde ve gravitasyonel alanlardan oluşan fiziksel bir sistemin dört-momentumu,

$${}^{B-T} P^{\mu} = \iiint B^{\mu 0} dx dy dz \quad (3.196)$$

olur. Ayrıca, B-T açısal momentum kompleksi ise ${}^{B-T}_m \mathbf{M}$ maddesel ve ${}^{B-T}_g \mathbf{M}$ gravitasyonel kısımdan oluşur:

$${}^{B-T} \mathbf{M}^{\mu\nu\lambda} = -{}^{B-T} \mathbf{M}^{\nu\lambda\mu} = -{}^{B-T} \mathbf{M}^{\nu\mu\lambda}. \quad (3.197)$$

Burada,

$${}^{B-T}_m \mathbf{M}^{\mu\nu\lambda} = \sqrt{-g} (x^{\mu} T^{\nu\lambda} - x^{\nu} T^{\mu\lambda}) \quad (3.198)$$

ve

$$\begin{aligned} {}^{B-T}_g \mathbf{M}^{\mu\nu\lambda} = & \sqrt{-g} (x^{\mu} {}_{B-T} t^{\nu\lambda} - x^{\nu} {}_{B-T} t^{\mu\lambda}) \\ & + \frac{\alpha}{\sqrt{-g}} \left[-g (g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} - g^{\lambda\mu} g^{\nu\kappa}) \right]_{,\kappa} \end{aligned} \quad (3.199)$$

olarak tanımlıdır^{33,34}.

3.5.3.4. Møller (1958)

Einstein tarafından tanımlanan E-M pseudokompleksi E_{μ}^{ν} kapalı bir sistemin toplam enerji ve momentumu için (3.170) integrali ile oldukça yararlı sonuçlar sağlamasına rağmen fiziksel olarak anlamlı sonuçlar elde etmek için yarı-kartezyen koordinatların kullanımı ile ilgili bir sınırlamanın kullanılması başlı başına bir problemdir. Örneğin, Schrödinger²³ tarafından ifade edildiği gibi Einstein tarafından tanımlanan temsille toplam enerjisi hesaplamak için küresel koordinatları kullanmak mümkün değildir. Bu durum, GG kuramı bakış açısından memnun edici olmamasına karşın kapalı fiziksel sistemler için Einstein temsilinin yararlılığını etkilememektedir. Fakat kapalı olmayan veya kapalı bir sistemin herhangi bir parçası için aynı durum söz konusu değildir. Burada sözü edilen olumsuz durumlar, tamamıyla E_{μ}^{ν} ifadesinin keyfi koordinat dönüşümleri altında bir tensör yoğunluğu gibi davranmamasıyla ilişkilidir. Bu nedenle uğraşılması gereken problem herhangi bir özel koordinat sistemine bağlı olmayan bir enerji momentum ifadesi tanımlamaktır.

Kısım 3.5.3.1’de görüldüğü gibi $E_\mu{}^\nu$ ifadesi doğrudan korunum yasasından yararlanılarak elde edilir ve bu ifadenin diverjansı sifıra eşittir. Bu durum göz önünde bulundurulduğu zaman $E_\mu{}^\nu$ ifadesine uygun biçimde tanımlı ve yine diverjansı sifıra eşit olan yeni bir nicelik eklemenin mümkün olduğu anlaşılır. Sonuç olarak, bu yeni nicelik sayesinde elde edilecek genel ifade (doğal olarak diverjansı sifıra eşit olduğundan) yalnızca korunum yasasını sağlamayacak ayrıca uzaysal dönüşümler durumunda bir tensör gibi dönüşecektir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta bu yeni nicelik tanımlanırken Einstein ‘in memnun edici özelliklerine (ve ilkelerine) bağlı kalmak gerektiğidir. Bu amaç doğrultusunda metrik tensör ve türevlerinden oluşan, tüm çizgisel dönüşümler altında bir tensör davranışı sergileyen ve diverjansı sifıra eşit olan $S_\mu{}^\nu$ gibi bir tensör tanımlanır ve bu niceliğin aşağıda sıralanan ek koşulları sağlaması gerekir:

- a) $S_\mu{}^\nu$ niceliği $S_{\mu,\nu}{}^\nu = 0$ korunum yasasını sağlar. Dolayısıyla bu nicelik 3-ranklı, anti-simetrik bir affine tensör cinsinden yazılabilmelidir:

$$S_\mu{}^\nu = \psi_{\mu,\lambda}{}^{\nu\lambda} \text{ ve } \psi_{\mu}{}^{\nu\lambda} = -\psi_{\mu}{}^{\lambda\nu}.$$

- b) Üç-yüzey üzerinden yazılan $\int S_\mu{}^0 dx dy dz$ integrali en azından yarı-kartezyen koordinatların kullanılması durumunda kapalı bir sistem için sifıra eşit olmalıdır. Çünkü, $M_\mu{}^\nu = E_\mu{}^\nu + S_\mu{}^\nu = \phi_{\mu,\lambda}{}^{\nu\lambda} + \psi_{\mu,\lambda}{}^{\nu\lambda}$ biçiminde yeni bir pseudokompleks tanımlanması durumunda bu koşul sayesinde bu ifadenin integrali ile Einstein temsili ile elde edilen bazı önemli sonuçlara tekrar ulaşılabilir.

$${}^M P_\mu = \int M_\mu{}^0 dx dy dz = \int E_\mu{}^0 dx dy dz \quad (3.200)$$

Örneğin, $P_\mu = \int E_\mu{}^0 dx dy dz$ ifadesi zamana göre sabittir ve P_μ ‘ler çizgisel dönüşümler (Lorentz dönüşümleri) altında bir dört-vektörün kovaryant bileşenleri gibi dönüşür. Dahası, P_μ ‘ler yeni koordinat sisteminin büyük uzaysal mesafelerde birincil sistem ile uyumlu olması koşuluyla keyfi koordinat dönüşümleri altında değişmez kalır.

- c) $M_\mu{}^\nu$ niceliği,

$$x'^{\alpha} = f'^{\alpha}(x^{\beta}), \quad x'^0 \rightarrow x^0 \quad (3.201)$$

biçimindeki tüm dönüşümler altında bir dört-vektör yoğunluğu gibi davranmalıdır. Burada f'^{α} , x^{β} uzaysal koordinatların keyfi fonksiyonlarıdır.

- d) x^{λ} gibi bir uzay-zaman noktasında tanımlı $M_{\mu}^{\nu}(x^{\lambda})$ ifadesi aynı noktada tanımlı metrik tensör ve onun birinci, ikinci türevlerine bağlı bir tensör yoğunluğudur.

Yukarıdaki tüm koşulları sağlayan bir S_{μ}^{ν} niceliği bulmak için E_0^0 ifadesinin (3.201) ile tanımlı keyfi sonsuz küçük bir dönüşümü altında dönüşüm özellikleri araştırılarak E_0^0 ifadesindeki değişimin herhangi bir skaler yoğunluğun değişiminden sapma miktarı belirlenir. Bu işlemler sonunda aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

$$M_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \chi_{\mu}^{\nu\lambda} \quad (3.202)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\mu}^{\nu\lambda} &= 2\phi_{\mu}^{\nu\lambda} - \delta_{\mu}^{\nu} \phi_{\kappa}^{\kappa\lambda} + -\delta_{\mu}^{\lambda} \phi_{\kappa}^{\kappa\nu} \\ &= \sqrt{-g} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \right) g^{\nu\alpha} g^{\lambda\kappa} \end{aligned} \quad (3.203)$$

$\chi_{\mu}^{\nu\lambda}$ ifadesinin anti-simetrik özelliğinden dolayı

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} M_{\mu}^{\nu} = 0 \quad (3.204)$$

korunum yasası ve buna bağlı olarak da (a) koşulu sağlanır. ${}^M P_{\mu} = \iiint M_{\mu}^0 dx dy dz$ ifadesi yarı-kartezyen koordinatlarda kapalı bir sistem için Einstein temsilinin sonuçlarıyla uyum içindedir. Bu durum, (b) koşulunun sağlandığını gösterir. Ayrıca, (3.201) biçimindeki dönüşümler altında M_0^{μ} ifadesi bir dört-vektör gibi dönüşür ve dolayısıyla toplam enerji ve momentum bileşenleri,

$${}^M P^{\mu} = \iiint M_0^{\mu} dx dy dz \quad (3.205)$$

ile ifade edilir.

Sonuç olarak, bu incelemeler sayesinde koordinattan bağımsız bir temsil elde edilir. Møller pseudokompleksi anti-simetrik olduğundan bu temsilde de açısız momentum için korunum yasası tanımlanamamaktadır³⁵.

3.5.4. Teleparalel Gravitede Alan Denklemleri ve Enerji-Momentum Pseudo Komplekslerinin Teleparalel Versiyonları

Önceki kısımlarda da ifade edildiği gibi TPG kuramı bir koordinat dönüşüm grubu için ayar kuramına karşılık gelir. Bildiğimiz gibi elektromanyetik kuramda ayar kuramının temel alanı A_μ ayar potansiyelidir (dört-vektör potansiyel) ve alan kuvveti ise,

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \quad (3.206)$$

biçiminde tanımlı bir anti-simetrik elektromanyetik alan tensörüdür. Dolayısıyla TPG kuramı çerçevesinde, benzer biçimdeki ifadeler tanımlanarak bu kurama ait model elde edilebilir. Bu amaç doğrultusunda TPG temel alanı için,

$$B_\mu = B^{(a)}{}_\mu \partial_{(a)} \quad (3.207)$$

biçiminde bir ayar potansiyeli tanımlanabilir⁹. Bu durumda alan kuvveti bu ayar potansiyelin kovaryant türevlerinden elde edilir:

$$F^{(a)}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^{(a)}{}_\nu - \partial_\nu B^{(a)}{}_\mu. \quad (3.208)$$

Bu modelde, ayar alanlarına ait dinamik denklemler alan kuvveti cinsinden

$$L_{TPG} = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1}{4} F^{(a)}{}_{\mu\nu} F^{(b)}{}_{\lambda\kappa} \eta_{(a)(b)} g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} \right), \quad (3.209)$$

biçiminde tanımlı Lagrangiandan elde edilir. Bu kuramda Tetrad alanlarının varlığından dolayı Yunan indisleri ile Latin indisler birbirlerine dönüştürülebilir ve sonuç olarak Lagrangianda indis çeşitliliği görülür.

$$N_{(a)(b)}{}^{\mu\nu} = \eta_{(a)(b)} g^{\mu\nu} \quad (3.210)$$

ifadesi tüm olası büzülmeleri sağlayan bir tensör olmak üzere

$$N_{(a)(b)}{}^{\mu\nu} = \eta_{(a)(b)} h_\lambda{}^\mu h^{\lambda\nu} + 2h_{(a)}{}^\nu h_{(b)}{}^\mu - 4h_{(a)}{}^\mu h_{(b)}{}^\nu \quad (3.211)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade (3.209) denkleminde yerine yazılarak ve

$$F^{(a)}{}_{\mu\nu} = c^2 h^{(a)}{}_\lambda T^\lambda{}_{\mu\nu}, \quad (3.212)$$

ifadesi kullanılarak (3.209) denklemi

$$\begin{aligned} L_{TPG} &= \frac{hc^4}{16\pi G} \left(\frac{1}{4} T^\lambda{}_{\mu\nu} T^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^\lambda{}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}{}_\lambda - T_{\lambda\mu}{}^\lambda T^\mu{}_\nu \right) \\ &= \frac{hc^4}{16\pi G} Z_\lambda{}^{\mu\nu} T^\lambda{}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.213)$$

biçiminde yeniden yazılır³⁶. Dolayısıyla maddenin bulunmadığı durumda eylem integrali,

$$S_{TPG} = \int L_{TPG} d^4x = \frac{c^4}{16\pi G} \int h Z_{\lambda}^{\mu\nu} T^{\lambda}_{\mu\nu} d^4x \quad (3.214)$$

şeklinde ve $Z_{\lambda}^{\mu\nu}$ tam kontravaryant biçimiyle,

$$Z^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4} T^{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{4} (T^{\mu\lambda\nu} - T^{\nu\lambda\mu}) - \frac{1}{2} (g^{\lambda\nu} T^{\kappa\mu}_{\kappa} - g^{\mu\lambda} T^{\kappa\nu}_{\kappa}) \quad (3.215)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $h^{(a)}_{\mu}$ tetrad, $h = \det |h^{(a)}_{\mu}|$ ve $T^{\mu\nu\lambda}$ ise burulma tensörleridir.

Ayar Lagrangian yoğunluğu L_{TPG} tetradlar $h^{(a)}_{\mu}$ ve türevlerine bağlı olduğundan $B^{(a)}_{\mu}$ cinsinden L_{TPG} 'deki değişimin hesaplanmasıyla boş uzay durumu için gravitasyonel alan denklemlerinin teleparalel versiyonu,

$$\partial_{\lambda} (h Z_{\mu}^{\nu\lambda}) - \frac{4\pi G}{c^4} (h_{TPG} t_{\mu}^{\nu}) = 0 \quad (3.216)$$

elde edilir. Burada t_{μ}^{ν} ,

$$h_{TPG} t_{\mu}^{\nu} = \frac{c^4}{4\pi G} h \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu} Z_{\lambda}^{\kappa\nu} + \delta_{\mu}^{\nu} L_{TPG} \quad (3.217)$$

biçimine sahiptir ve gravitasyonel alanın E-M pseudotensörüdür. Ayrıca,

$$h Z_{\mu}^{\nu\lambda} (= U_{\mu}^{\nu\lambda}) \quad (3.218)$$

terimi Freud süperpotansiyeli diye adlandırılır⁹ ve bu süperpotansiyel ile gravitasyonel alan Lagrangianı,

$$U_{\mu}^{\nu\lambda} = \frac{c^4}{4\pi G} h^{(a)}_{\mu} \frac{\partial L_{TPG}}{\partial (\partial_{\lambda} h^{(a)}_{\nu})} \quad (3.219)$$

biçiminde ilişkilidir.

Madde bulunduran durumda ise ilgili Lagrangian,

$$L = L_{TPG} + L_M \quad (3.220)$$

ve eylem,

$$S = S_{TPG} + S_M = \int L_{TPG} d^4x + \int L_M d^4x \quad (3.221)$$

biçimini alır. Buradaki L_M madde alanının Lagrangian yoğunluğudur. Bu ifadenin $h^{(a)}_{\mu}$ cinsinden $(L_{TPG} + L_M)$ 'deki değişim hesaplanarak ve minimum eylem ilkesi

kullanılarak madde bulunduran durum için gravitasyonel alan denklemlerinin teleparalel versiyonu,

$$\partial_\lambda (hZ_\mu{}^{\nu\lambda}) - \frac{4\pi G}{c^4} (h{}_{TPG}t_\mu^\nu) = \frac{4\pi G}{c^4} (hT_\mu^\nu) \quad (3.222)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade yeniden düzenlenerek,

$$h(T_\mu^\nu + {}_{TPG}t_\mu^\nu) = \frac{c^4}{4\pi G} \partial_\lambda (hZ_\mu{}^{\nu\lambda}) \quad (3.223)$$

biçiminde yazılabilir.

$Z_\mu{}^{\nu\lambda}$ ifadesinin son iki indise göre anti-simetrik oluşunun bir sonucu olarak

$$\partial_\nu [h(T_\mu^\nu + {}_{TPG}t_\mu^\nu)] = 0 \quad (3.224)$$

korunun yasası elde edilir. Sonuçlardan da anlaşılacağı üzere, burada ${}_{TPG}t_\mu^\nu$ ifadesi Einstein tarafından tanımlanan gravitasyonel E-M pseudotensörün Teleparalel versiyonundan başka bir şey değildir. Dolayısıyla GG kuramında tanımlı E-M pseudokomplekslerin teleparalel versiyonları aşağıda ifade edildiği biçimde olur³⁷.

3.5.4.1. Einstein

Einstein enerji-momentum pseudokompleksinin Teleparalel versiyonu,

$$hE_\mu{}^\nu = \frac{1}{4\pi} \partial_\lambda (hZ_\mu{}^{\nu\lambda}) = \partial_\lambda (U_\mu{}^{\nu\lambda}) \quad (3.225)$$

ve toplam enerji-momentum dört-vektörü,

$${}^E P_\mu = \iiint hE_\mu{}^0 dx dy dz \quad (3.226)$$

şeklinde tanımlıdır.

3.5.4.2 Landau-Lifshitz

L-L enerji-momentum pseudokompleksinin Teleparalel versiyonu,

$$hL^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \partial_\lambda (h^2 g^{\mu\kappa} Z_\kappa{}^{\nu\lambda}) = \partial_\lambda (hg^{\mu\kappa} U_\kappa{}^{\nu\lambda}) \quad (3.227)$$

ve toplam enerji-momentum dört-vektörü,

$${}^{L-L} P_\mu = \iiint hL_\mu{}^0 dx dy dz \quad (3.228)$$

biçiminde tanımlıdır.

3.5.4.3. Bergmann-Thomson

B-T enerji-momentum pseudokompleksinin Teleparalel versiyonu,

$$hB^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \partial_\lambda (hg^{\mu\kappa} Z_\kappa^{v\lambda}) = \partial_\lambda (g^{\mu\kappa} U_\kappa^{v\lambda}) \quad (3.229)$$

ve toplam enerji-momentum dört-vektörü,

$${}^{B-T}P_\mu = \iiint hB_\mu^0 dx dy dz \quad (3.230)$$

şeklinde tanımlıdır.

(3.225), (3.227) ve (3.229) denklemlerinden görüldüğü gibi bu temsiller GG kuramındaki tanımlarının aksine TPG kuramında aynı süperpotansiyele bağlıdır.

3.5.5. Møller Gravitasyonel Tetrad Kuramında

E-M Pseudokompleksi (1961)

GG kuramında fiziksel sistemlerin sahip olduğu enerjiyle ilişkili nicelikleri belirleyen ve korunum yasalarını sağlayan E-M temsilleri daha önce ifade edildiği gibi birçok yazar tarafından farklı şekilde tanımlanmıştır. Bunlardan önemli bir tanesi de Møller tarafından önerilen ve Kısım 3.5.3.3. 'de dört temel koşulu sağlayacak biçimde tanımlanan E-M pseudokompleksidir.

Kısım 3.5.3.3. de ifade edilen koşullar M_μ^{ν} Møller temsili için tekrar değerlendirildiğinde bazı problemler ortaya çıkmaktadır. (b) koşulu için örneğin,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)(dt_0)^2 + \left(1 + \frac{2M_0}{r}\right)[(dx_0)^2 + (dy_0)^2 + (dz_0)^2] \quad (3.231)$$

gibi bir metrikle tanımlı bir gravitasyonel sistem merkezinde ${}^M P_\mu = {}^E P_\mu$ olduğundan bu durumda ${}^M P_\mu$ ifadesinin de ayrıca tüm asimtotik biçimde doğrusal olan koordinat sistemlerinde toplam E-M dört-vektörünü temsil ettiği anlamına gelir. Fakat (1.1) Lorentz dönüşüm denklemlerine göre x^μ gibi bir koordinat sistemi için M_μ^{ν} ve ${}^M P_\mu$ nicelikler için yapılan hesaplamalarla elde edilen sonuçlar,

$${}^E P_\mu = {}^M P_\mu = \left\{ \frac{M_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad 0, \quad 0, \quad -\frac{M_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right\} \quad (3.232)$$

$${}^M P'_\mu = \left\{ \frac{5}{3} \frac{M_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad 0, \quad 0, \quad -\frac{M_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \quad (3.233)$$

bu durumun sağlanmadığını gösterir (${}^E P_\mu$ ifadesi eylemsiz bir sistemden x -ekseni boyunca, v hızıyla hareket eden M_0 durgun kütleli bir parçacığın enerji-momentum dört-vektör bileşenleri gibi dönüşmesine karşın ${}^M P_\mu$ 'nin bir dört-vektör gibi dönüşmediğini gösterir).

Bu incelemelerin sonucuna göre Kısım 3.5.3.3. 'deki (b) ve (c) koşullarının eş zamanlı olarak sağlanması mümkün değildir. Gerçekte (a), (b), (d) koşulları (varsayımları) ile sadece Einstein temsiline ulaşılabilir ve bu durumda da Einstein temsili, enerji yerelleşmesi için gerekli (c) koşulunu sağlamamaktadır. Öte yandan, invariant varyasyonlar ilkesi için uygulanan sonsuz küçük dönüşümler yöntemi (a), (c), (d) varsayımları ile birlikte sadece Møller (1958) temsiline ulaşılabilir ve bu durumda da ${}^M P_\mu$ nicelikleri (b) koşulunun özelliklerine sahip değildir. Dolayısıyla, ilk bakışta (b) veya (c) koşullarının birinden vazgeçilmesi gerektiği akla gelir. Fakat görelilik kuramının temel ilkelerine dayanan (b) ve (c) koşullarından vazgeçmektense bu koşulları (özgün durumlarına bağlı kalarak) hafifletmek ve bir minimum gereklilikler cümlesini formüle etmek daha uygun bir çözümdür. Bu amaç doğrultusunda yapılan değerlendirmeler (a), (b), (c) koşullarını sağlayan bir E-M pseudokompleksi $\mathfrak{M}_\mu{}^v$ tanımlamak için ancak ve ancak (d) koşulunun aşağıdaki koşula dönüştürülmesi ile mümkün olabileceği anlaşılır:

d') x^2 gibi bir uzay-zaman noktasında tanımlı $\mathfrak{M}_\mu{}^v(x^2)$ ifadesi aynı noktada tanımlı gravitasyonel alan değişkenleri ve onun birinci, ikinci türevlerine bağlı bir tensör yoğunluğudur.

Gravitasyonel alan değişkenleri genellikle metrik tensörün bileşenleri olarak değerlendirildiğinden ilk bakışta (d) ile (d') koşulları arasında herhangi bir fark yokmuş gibi görülebilir. Fakat metrik tensörün gravitasyonel alanın temel değişkenleri olmadığını gösteren bazı belirtiler vardır. Örneğin, gravitasyonel alanın bulunduğu durumda bir Fermiyon alanı için alan denklemlerinin sadece metrik tensör ve madde-alan değişkeni ψ cinsinden ifade edilemeyeceği, ancak böyle bir durumda gravitasyonel alanı belirlemede tetradların kullanımının elverişli olabileceği bilinmektedir³⁸.

Metrik tensör ve onun türevlerinden oluşan herhangi bir fonksiyon (3.102) denklemleri yardımıyla tetradlar ve onun türevleri cinsinden ifade edilebilir. Özellikle Ricci (eğrilik) skaler yoğunluğu,

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}L_{\mathfrak{M}} + \hat{h} \quad (3.234)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, $L_{\mathfrak{M}}$ tetradların birinci basamaktan türevlerine bağlı ikinci dereceden bir homojen fonksiyon biçimindedir ve \hat{h} normal bir diverjans biçimine sahiptir. Dolayısıyla, gravitasyonel alan denklemlerine ait varyasyonlar ilkesinde \hat{h} terimi (Gauss yasasından dolayı) ihmal edilebilir.

Sonuç olarak tetrad uzayı kullanılarak bir gravitasyonel kuram (ya da diğer adıyla Møller temsilinin Teleparalel versiyonu) oluşturulabilir. Bu kuramda alan değişkenleri 16-bileşenli tetradlardır ve bu kurama ait temel nicelik,

$$\gamma_{\mu\nu\lambda} = h^{(a)}_{\mu} h_{(a)\nu;\lambda} \quad (3.235)$$

tensördür. Burada, noktalı virgöl Christoffel sembolleriyle tanımlı kovaryant türevi temsil etmektedir. Bu kuramda $L_{\mathfrak{M}}$ Lagrangianı $\gamma_{\mu\nu\lambda}$ ve $g_{\mu\nu}$ niceliklerinden oluşan invaryant bir fonksiyon olarak değerlendirilir ve $L_{\mathfrak{M}}$ 'ye ait en temel muhtemel bağımsız ifadeler,

$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{M}}^{(1)} &= \Sigma_{\mu} \Sigma^{\mu} \\ L_{\mathfrak{M}}^{(2)} &= \gamma_{\mu\nu\lambda} \gamma^{\mu\nu\lambda} \\ L_{\mathfrak{M}}^{(3)} &= \gamma_{\mu\nu\lambda} \gamma^{\lambda\nu\mu} \end{aligned} \quad (3.236)$$

biçimindedir. Buradaki Σ_{μ} ,

$$\Sigma_{\mu} = \gamma^{\nu}_{\mu\nu} \quad (3.237)$$

biçiminde tanımlı temel vektördür. Kuramın genel Lagrangianını elde etmek için Møller tarafından en temel durum değerlendirilmiştir. Bu duruma göre genel Lagrangian,

$$L_{\mathfrak{M}} = \alpha_1 L_{\mathfrak{M}}^{(1)} + \alpha_2 L_{\mathfrak{M}}^{(2)} + \alpha_3 L_{\mathfrak{M}}^{(3)} \quad (3.238)$$

biçiminde $L_{\mathfrak{M}}^{(i)}$ 'lerin çizgisel bir birleştirimidir. Buradaki $\alpha_{(i)}$ 'ler keyfi sabitlerdir.

Møller' in hesaplamalarına uygun olarak bu sabitler,

$$\alpha_{(1)} = -1, \quad \alpha_{(2)} = \lambda, \quad \alpha_{(3)} = 1 - 2\lambda, \quad (3.239)$$

olarak seçilebilir. λ , birim basamağında serbest bir boyutsuz parametre olmak üzere,

$\alpha_{(i)}$ 'lerin bu şekilde seçimi sayesinde bu kuram GG kuramındaki zayıf alanların çizgisel yaklaşımıyla uyumlu (Møller tarafından arzu edilen) sonuçlar vermektedir.

$\lambda \neq 0$ durumunda Møller alan denklemleri

$$G_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (3.240)$$

$$F_{\mu\nu} = 0$$

ile verilir. $H_{\mu\nu}$ Møller denklemlerinin Einstein denklemlerinden sapma miktarını temsil eder ve

$$H_{\mu\nu} = \lambda \left[\gamma_{\lambda\kappa\mu} \gamma^{\lambda\kappa}{}_{\nu} + \gamma_{\lambda\kappa\nu} \gamma^{\lambda\kappa}{}_{\mu} + \gamma_{\lambda\kappa\nu} \gamma_{\mu}^{\lambda\kappa} + \dots \right. \\ \left. + g_{\mu\nu} \left(\gamma_{\lambda\kappa\alpha} \gamma^{\alpha\kappa\lambda} - \frac{1}{2} \gamma_{\lambda\kappa\alpha} \gamma^{\lambda\kappa\alpha} \right) \right], \quad (3.241)$$

$F_{\mu\nu}$ niceliği ise

$$F_{\mu\nu} = \lambda \left[\Sigma_{\mu,\nu} - \Sigma_{\nu,\mu} - \Sigma_{\lambda} \left(\gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} \right) + \gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{;\lambda} \right] \quad (3.242)$$

biçiminde tanımlıdır. $\lambda = 0$ durumunda ise Møller alan denklemleri Einstein denklemleriyle örtüşmektedir.

Burada tanımlanan Lagrangian (3.165) denklemindeki Lagrangianın aksine keyfi uzay-zaman dönüşümleri altında bir skaler yoğunluk davranışı sergilediğinden dolayı bu Lagrangian için sonsuz küçük dönüşümler yöntemi³⁹ uygulanabilir. Bu şekilde enerji-momentum pseudokompleksi,

$$\mathfrak{M}_{\mu}{}^{\nu} = \sqrt{-g} \left(T_{\mu}{}^{\nu} + {}^{\mathfrak{M}}t_{\mu}{}^{\nu} \right) \quad (3.243)$$

$${}^{\mathfrak{M}}t_{\mu}{}^{\nu} = \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial L_{\mathfrak{M}}}{\partial h_{(a)}{}^{\lambda}{}_{;\nu}} h_{(a)}{}^{\lambda}{}_{;\mu} - \delta_{\mu}^{\nu} L_{\mathfrak{M}} \right) \quad (3.244)$$

ve toplam enerji-momentum dört-vektörü

$${}^{\mathfrak{M}}P_{\mu} = \int \mathfrak{M}_{\mu}{}^0 dx dy dz \quad (3.245)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu E-M pseudokompleksi,

$$\partial_{\nu} \mathfrak{M}_{\mu}{}^{\nu} = 0 \quad (3.246)$$

biçiminde bir korunum yasasını sağlar ve bir süperpotansiyelin diverjansı biçiminde de yazılabilir:

$$\mathfrak{M}_\mu{}^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \mathfrak{A}_\mu{}^{\nu\lambda}$$

$$\mathfrak{A}_\mu{}^{\nu\lambda} = \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa} \left(\frac{\partial L_{\mathfrak{M}}}{\partial h_{(a)}{}^\mu{}_{,\lambda}} h_{(a)}{}^\nu - \frac{\partial L_{\mathfrak{M}}}{\partial h_{(a)}{}^\mu{}_{,\nu}} h_{(a)}{}^\lambda \right) . \quad (3.247)$$

(3.238) Lagrangian ile süperpotansiyel yeniden yazılırsa

$$\mathfrak{A}_\mu{}^{\nu\lambda} = \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa} (\alpha_{(1)} Q_\mu{}^{\nu\lambda} + \alpha_{(2)} W_\mu{}^{\nu\lambda} + \alpha_{(3)} X_\mu{}^{\nu\lambda}) \quad (3.248)$$

elde edilir. Buradaki $Q_\mu{}^{\nu\lambda}$, $W_\mu{}^{\nu\lambda}$ ve $X_\mu{}^{\nu\lambda}$ ifadeleri sırasıyla $L_{\mathfrak{M}}^{(1)}$, $L_{\mathfrak{M}}^{(2)}$ ve $L_{\mathfrak{M}}^{(3)}$ niceliklere karşılık gelir ve hesaplamalar sonucunda,

$$Q_\mu{}^{\nu\lambda} = \frac{\partial L_{\mathfrak{M}}^{(1)}}{\partial h_{(a)}{}^\mu{}_{,\lambda}} h_{(a)}{}^\nu - \frac{\partial L_{\mathfrak{M}}^{(1)}}{\partial h_{(a)}{}^\mu{}_{,\nu}} h_{(a)}{}^\lambda = -2\Sigma^\alpha g^{\beta\eta} g_{\mu\sigma} \Xi_{\eta\alpha\beta}{}^{\sigma\nu\lambda} \quad (3.249)$$

$$W_\mu{}^{\nu\lambda} = \frac{\partial L_{\mathfrak{M}}^{(2)}}{\partial h_{(a)}{}^\mu{}_{,\lambda}} h_{(a)}{}^\nu - \frac{\partial L_{\mathfrak{M}}^{(2)}}{\partial h_{(a)}{}^\mu{}_{,\nu}} h_{(a)}{}^\lambda = -2\gamma^{\eta\alpha\beta} g_{\mu\sigma} \Xi_{\eta\alpha\beta}{}^{\sigma\nu\lambda} \quad (3.250)$$

$$X_\mu{}^{\nu\lambda} = \frac{\partial L_{\mathfrak{M}}^{(3)}}{\partial h_{(a)}{}^\mu{}_{,\lambda}} h_{(a)}{}^\nu - \frac{\partial L_{\mathfrak{M}}^{(3)}}{\partial h_{(a)}{}^\mu{}_{,\nu}} h_{(a)}{}^\lambda = -2\gamma^{\beta\alpha\eta} g_{\mu\sigma} \Xi_{\eta\alpha\beta}{}^{\sigma\nu\lambda} \quad (3.251)$$

elde edilir. Buradaki nicelikler,

$$\Xi_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa\alpha\beta} = \delta_\lambda^\kappa g_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} + \delta_\mu^\kappa g_{\nu\lambda}{}^{\alpha\beta} - \delta_\nu^\alpha g_{\lambda\mu}{}^{\alpha\beta} \quad (3.252)$$

$$g_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta \quad (3.253)$$

şeklinde tanımlıdır. $Q_\mu{}^{\nu\lambda}$, $W_\mu{}^{\nu\lambda}$, $X_\mu{}^{\nu\lambda}$ ifadeleri ve (3.239) ile belirtilen $\alpha_{(i)}$ parametrelerini (3.248) denkleminde kullanarak Møller teleparalel temsiline ait süperpotansiyel,

$$\mathfrak{A}_\mu{}^{\nu\lambda} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \Xi_{\eta\alpha\beta}{}^{\sigma\nu\lambda} (\Sigma^\alpha g^{\beta\eta} g_{\mu\sigma} - \lambda g_{\sigma\mu} \gamma^{\eta\alpha\beta} - (1-2\lambda) g_{\sigma\mu} \gamma^{\beta\alpha\eta}) \quad (3.254)$$

biçiminde olur.

Diğer temsillerde tanımlanan süperpotansiyelin aksine $\mathfrak{A}_\mu{}^{\nu\lambda}$ ifadesi 3-ranklı gerçek bir tensör yoğunluğudur. Dolayısıyla $\mathfrak{A}_\mu{}^{\nu\lambda}$ niceliği sadece uzaysal dönüşüm grubu (Lorentz dönüşümleri) altında 2-ranklı bir anti-simetrik tensör yoğunluğudur. Sonuç olarak, $\mathfrak{M}^\nu = \mathfrak{A}_0{}^{\nu\lambda}$ ifadeleri bu tip dönüşüm durumlarında bir vektör yoğunluğu gibi davranış sergiler. Dolayısıyla (3.244), (3.246), (3.247) ifadeleri $\mathfrak{M}_\mu{}^\nu$

için (a), (c) ve (d') koşullarını sağlar. Ayrıca hesaplamalarla (3.245) ile tanımlanan ${}^m P_\mu$ niceliklerinin Einstein temsilindeki ${}^E P_\mu$ nicelikleri ile aynı sonucu verdiği görülür. Bunun sonucu olarak (b) koşulu da Einstein temsilinde olduğu gibi tam olarak sağlanmış ve tüm koşulları aynı anda sağlayan bir temsil bulunmuştur
40,41,42,43

KAYNAKLAR

1. d'Inverno, R. A., *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford Univ. Press, New York. **1992**.
2. Schutz, B. F., *A First Course in General Relativity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, **1985**.
3. Joshi, A. W., *Matrices and Tensors in Physics*, Wiley&Sons, New Delhi. **1995**.
4. Hayashi, K; Shirafuji, T. *Phys. Rev.* **1979**, D19, 3524–3553.
5. Papapetrou, A., *Lectures on General Relativity*, D.Reidel Pub. Comp., Boston, **1974**.
6. Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principle and Applications of General Theory of Relativity*, Wiley, New York, **1972**.
7. Carroll, S., *Spacetime and Geometry: AN Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, San Francisco, **2003**.
8. Hartle, J. B., *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley, San Francisco, **2003**.
9. de Andrade, V. C.; Pereira, J. G., *Phys. Rev.*, **1997**, D56, 4689-4695.
10. de Andrade, V. C.; Guillen, L. C. T; Pereira, J. G.; Teleparallel Gravity: An Overview, (24 Kasım 2000), Erişim: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0011087> (5 Ocak 2008).
11. de Andrade, V. C.; Pereira, J. G., *Gen. Relativ. Grav.* **1998**, 28, 263-273.
12. Aldrovandi, R.; Pereira, J. G., An Introduction to Teleparallel Gravity, **2007**.
13. Blagojevic, M., *SFIN*, **2003**, A1, 147-172.
14. Grøn, Ø.; Hervik, S., *Einstein's General Theory of Relativity*, Springer, New York, **2007**.
15. Landau, L. D.; Lifshitz, E. M., *Mechanics*, Butterworth-Heinemann, Oxford, **1976**.
16. Habson, M. P.; Efstathiou, G. P.; Lasenby, A. N., *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge Univ. Press, New York, **2006**.
17. Tolman, R. C., *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **1928**, 14, 348-353.
18. Trautman, A. "Gravitation: An Introduction to Current Research" Witten, L., Edit., Wiley, New York, **1962**.

19. Tolman, R.C. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford Univ. Press, London. **1934**.
20. Eddington, A. S., *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge Uni. Pres, London, **1930**.
21. Misner, C. W.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A., *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, **1973**.
22. Bauer, H., *Physik. Zeits.*, **1918**, 19, 163.
23. Schrödinger, E., *Phys. Zeitschr.*, **1918**, 19, 4.
24. Cooperstock, F. I.; Sarracino, R. S., *J. Phys.*, **1978**, A11, 877.
25. Bondi, H., *Proc. R. Soc.*, **1990**, A427, 249.
26. Brown, J. D.; York, J. W., *Phys. Rev.*, **1993**, D47, 1407.
27. Bergqvist, G., *Class. Quantum Gravit.*, **1992**, 9, 1753.
28. Hayward, S. A., *Phys. Rev.*, **1994**, D49, 831.
29. Bernstein, D. H.; Tod, K. P., *Phys. Rev.*, **1994**, D49, 2808.
30. Van Freud, P., *Ann. Math.*, **1939**, 40, 417.
31. Einstein, A. “*The Foundation of the General Theory of the Relativity*”, Dover Publications, Inc. New York, **1916**.
32. Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley Press. **1987**.
33. Bergmann, P.G.; Thomson, *Phys. Rev.* **1953**, D89, 400–407.
34. Bergmann, P.G., *Phys. Rev.*, **1958**, D112, 287–289.
35. Møller, C. *Ann. Phys.* **1958**, 4, 347–371.
36. Maluf, J. W., *J. Math. Phys.*, **1994**, 35, 335.
37. Vargas, T. *Gen. Rel. Grav.* **2004**, 36, 1255–1264.
38. Dirac, P. A. M., “*Max-Planck-Festschrift*”, Berlin, **1958**.
39. Dirac, P. A. M., *Rev. Mod. Phys.*, **1949**, 21, 392-399.
40. Møller, C. K. *Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **1961**, 10, 1–50.
41. Møller, C. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **1978**, 39, No.13, 1–131.
42. Mikhail, F.I.; Wanas, M.I.; Hindawi, A.; Lashin, E.I. *Int. J. Theo.Phys.* **1993**, 32, 1627–1642.
43. Mikhail, F.I.; Wanas, M.I.; Lashin E.I.; Hindawi, A. *Gen. Rel. Grav.* **1994**, 26, 869–876.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. BIANCHİ-BEHR $VI_{h=-4}$ UZAY-ZAMAN MODELİ

Tarihsel olarak evren modelleme çalışmaları çerçevesinde, kuramsal işlemlerin sadeliğinden dolayı ilk olarak Freidmann-Robertson-Walker (FRW) kozmoloji modelleri değerlendirilmiştir. Bu modeller, eşyönlü biçimde genişleyen ve uzaysal olarak homojen yapıya sahiptir. Aynı zamanda bu uzay-zamanlar kesme (shear), dönme ve ivme niceliklerinin sıfır olduğu bir akışkanla modellenir. Daha sonraki çalışmalarda ise genellikle eşyönsüz biçimde genişleyen, uzaysal olarak homojen olan ve akışkanının ivmeli, kesmeli ve dönerek genişlemesine olanak sağlayan Einstein alan denklemlerinin çözümleri olarak ortaya çıkan modellerin değerlendirilmesine dikkat çekilmiştir. Bu çözümlerin büyük bir çoğunluğu hareketli koordinatlar durumunda sağlanır ve uzay-zamanın her bir noktasında akışkanın dört-hıza sahip olduğu varsayılır¹.

İlk olarak değerlendirilen kozmolojik modellerin FRW olmasının nedeni kuramsal işlemlerdeki basitliğin yanı sıra, mikrodalga ardaalanın yüksek seviyede eşyönlü biçimde gözlenmesinden dolayı, Evrenin bu modele çok yakın bir yapıya sahip olması gerektiği sonucudur. Dolayısıyla genel anlamda, uzaysal homojen kozmoloji modelleri ile ilgili gerçekleştirilen çalışmalar FRW çözümlerini kabul eden modellerin değerlendirilmesi ile sınırlandırılmaktadır².

Mükemmel akışkanla modellenen belirli bir grup uzay-zaman modeli w gibi yalnızca bir keyfi fonksiyon içermektedir. w niceliğinin sabit olması durumunda bu grubun üyeleri uzaysal olarak homojen olurken, w nin sabit olmadığı durumda grubun uzaysal olarak homojen olmadığı açık bir biçimde anlaşılmaktadır. Fakat buna rağmen, gerçekte sabit olmayan w niceliğinin özel seçimi ile bazı uzaysal homojen geometriler tanımlanabilir. Bu geometriler, iki-parametrelili bir aile oluşturur. Bu biçimde homojen özelliğe sahip ve $p = (\gamma - 1)\rho$ durum denklemleri kozmolojik modellere ait bir grubun tam çözümleri Collins³ tarafından keşfedilmiştir. Bu çözümler Bianchi-Behr sınıfında VI_h türündedir. Bianchi- Behr VI_h modelleri keyfi olarak büyük zaman durumlarında tamamıyla eşyönlü değildir ve bu sebeple asimtotik olarak FRW modeliyle yakın bir yapıya sahip olamaz.

Dolayısıyla bu modelin FRW çözümlerini kabul etmediği ve uzaysal homojen kozmoloji modelleri ile ilgili gerçekleştirilen çalışmalar çerçevesinde değerlendirilemeyeceği söylenebilir. Fakat Barrow⁴ tarafından ifade edildiği gibi, VI_h modeli “sonlu bir zaman aralığı üzerinden” keyfi olarak izotropik bir duruma yakın bir yapıda olması mümkün olduğundan dolayı uzaysal homojen kozmoloji modelleri ile ilgili çalışmalarda da değerlendirilmesi mümkün olur.

Yukarıda sözü edildiği gibi w niceliğinin seçimine bağlı olarak elde edilen geometriler iki parametrelili bir aile oluştururlar ve bu ailenin her bir üyesi $h = -4$ değerli Bianchi-Behr VI_h türüne sahip üç-parametrelili bir eşyönlü grubunu kabul eder. Bu modele ait akışkan eğilmez (stiff) durum denkleminde ($p = \rho$) uyar. Bu akışkan dönmeyen, genişleyen, kesmeli (shearing) ve ivmeli yapıya sahiptir ve homojen yüzeylere ait normallerin uygunluğuna göre eğrilir (tilted). Bu ailedeki uzay-zamanların genel davranışları büyük ölçüde içerdiği iki parametreden birinin işaretine bağlıdır. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ geometrilerin genel davranışlarını belirleyen akışkan her zaman içi sonsuz yoğunluklu bir ilk durumdan başlar ($t \rightarrow 0$ iken madde yoğunluğu ρ sonlu bir zaman içinde sonsuz olur). Dolayısıyla bu modeller olası tüm durumlarda bir “büyük patlama (big bang)” tekilliğinde başlar ve bunun sonrasındaki evrim m gibi bir parametrenin değerine bağlı olur⁵ (bazı durumlarda başlangıç anından itibaren belirsiz bir biçimde genişlemesine karşın diğer durumlarda ise sonlu bir zamanda uygun bir tekillik koşuluyla bir sona ulaşır).

Başlama noktasını biçimlendiren uzay-zamanların genel bir grubu $t > 0$ durumlu uygun hareketli koordinatlarda en genel biçimde

$$ds^2 = A^2(t, x)(-dt^2 + dx^2) + B^2(t)dy^2 + 2C(t, x)dydz + D^2(t, x)dz^2 \quad (4.1)$$

metriği ile verilir. İncelenen bu çizgi elemanına ait metrik tensör, ters-metrik tensör, tetrad ve ters-tetrad katsayıları matris formunda sırasıyla

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -A^2(t, x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2(t, x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2(t) & C(t, x) \\ 0 & 0 & C(t, x) & D^2(t, x) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$g = \det |g_{\mu\nu}| = -A^4(t, x) (B^2(t) D^2(t, x) - C^2(t, x)) = -A^4(t, x) \Delta^2(t, x) \quad (4.3)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A^2(t, x)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2(t, x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D^2(t, x)}{\Delta^2(t, x)} & -\frac{C(t, x)}{\Delta^2(t, x)} \\ 0 & 0 & -\frac{C(t, x)}{\Delta^2(t, x)} & \frac{B^2(t)}{\Delta^2(t, x)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$h^{(a)}_{\mu} = \begin{bmatrix} A(t, x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(t, x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B(t) & \frac{C(t, x)}{B(t)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta(t, x)}{B(t)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$h = \det |h^{(a)}_{\mu}| = A^2(t, x) \Delta(t, x) \quad (4.6)$$

$$h_{(a)}^{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A(t, x)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A(t, x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B(t)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C(t, x)}{B(t)\Delta(t, x)} & \frac{B(t)}{\Delta(t, x)} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

biçiminde olur.

4.1.1. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde Einstein E-M Dağılımı

Kısım 3.5.3.1. de tanımlanan ifadeleri kullanılarak Einstein temsilinde E-M dağılımı hesaplanır. Öncelikle (3.169) denkleminle tanımlı potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir.

Çizelge 4.1: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG Einstein temsilinde süperpotansiyel hesapları.

$H_0^{01} = -H_0^{10} =$	$\frac{-A^2(t, x)}{A^2(t, x)\Delta(t, x)} \frac{\partial}{\partial x^1} \left[A^4(t, x)\Delta^2(t, x) \left(-\frac{1}{A^4(t, x)} \right) \right] = 2 \frac{d\Delta(t, x)}{dx}$
$H_1^{01} = -H_1^{10} =$	$2 \frac{d\Delta(t, x)}{dt}$
$H_2^{02} = -H_2^{20} =$	$\frac{2B^2(t)D(t, x)}{\Delta(t, x)A(t, x)} \frac{d[D(t, x)A(t, x)]}{dt} - \frac{1}{\Delta(t, x)A^2(t, x)} \frac{d[C^2(t, x)A^2(t, x)]}{dt}$
$H_2^{03} = -H_2^{30} =$	$\frac{C^2(t, x)}{\Delta(t, x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2(t)}{C(t, x)} \right)$
$H_2^{12} = -H_2^{21} =$	$\frac{2C^2(t, x)}{A(t, x)\Delta(t, x)} \frac{dA(t, x)}{dx} + \frac{C(t, x)}{\Delta(t, x)} \frac{dC(t, x)}{dx} - \frac{2B^2(t)D(t, x)}{A(t, x)\Delta(t, x)} \frac{d[A(t, x)D(t, x)]}{dx}$
$H_2^{13} = -H_2^{31} =$	$\frac{B^2(t)}{\Delta(t, x)} \frac{dC(t, x)}{dx}$
$H_3^{02} = -H_3^{20} =$	$\frac{C^2(t, x)}{\Delta(t, x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{D^2(t, x)}{C(t, x)} \right)$
$H_3^{03} = -H_3^{30} =$	$\frac{2\Delta(t, x)}{A(t, x)} \frac{dA(t, x)}{dt} + \frac{1}{\Delta(t, x)} \left(2B(t)D^2(t, x) \frac{dB(t)}{dt} - C(t, x) \frac{dC(t, x)}{dt} \right)$
$H_3^{12} = -H_3^{21} =$	$\frac{D^4(t, x)}{\Delta(t, x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t, x)}{D^2(t, x)} \right)$
$H_3^{13} = -H_3^{31} =$	$-\frac{2\Delta(t, x)}{A(t, x)} \frac{dA(t, x)}{dx} + \frac{C(t, x)}{\Delta(t, x)} \frac{dC(t, x)}{dx}$

Elde edilen bu ifadeleri (3.168) denkleminde kullanılarak Einstein temsili için enerji- momentum dağılımları,

Çizelge 4.2: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$E_0^0 =$	$\frac{1}{8\pi} \frac{d^2\Delta(t, x)}{dx^2}$
$E_0^1 =$	$-\frac{1}{8\pi} \frac{d^2\Delta(t, x)}{dtdx}$

şeklinde elde edilir.

4.1.2. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ Evren Modelinde Landau-Lifshitz

E-M Dağılımı

Kısım 3.5.3.2.'de tanımlanan ifadeleri kullanılarak Einstein temsilinde E-M dağılımı hesaplanır. Öncelikle (3.174) denkleminle tanımlı potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir.

Çizelge 4.3: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG L-L temsilinde süperpotansiyel hesapları.

$\vartheta^{0011} =$	$-\Delta^2(t, x)$	$\vartheta^{0022} =$	$-A^2(t, x)D^2(t, x)$
$\vartheta^{0023} =$	$A^2(t, x)C(t, x)$	$\vartheta^{0032} =$	$A^2(t, x)C(t, x)$
$\vartheta^{0033} =$	$-A^2(t, x)B^2(t)$	$\vartheta^{0110} =$	$\Delta^2(t, x)$
$\vartheta^{0220} =$	$A^2(t, x)D^2(t, x)$	$\vartheta^{0230} =$	$-A^2(t, x)C(t, x)$
$\vartheta^{0320} =$	$-A^2(t, x)C(t, x)$	$\vartheta^{0330} =$	$A^2(t, x)B^2(t)$
$\vartheta^{1001} =$	$\Delta^2(t, x)$	$\vartheta^{1100} =$	$-\Delta^2(t, x)$
$\vartheta^{1122} =$	$A^2(t, x)D^2(t, x)$	$\vartheta^{1123} =$	$-A^2(t, x)C(t, x)$
$\vartheta^{1132} =$	$-A^2(t, x)C(t, x)$	$\vartheta^{1133} =$	$A^2(t, x)B^2(t)$
$\vartheta^{1221} =$	$-A^2(t, x)D^2(t, x)$	$\vartheta^{1231} =$	$A^2(t, x)C(t, x)$
$\vartheta^{1321} =$	$A^2(t, x)C(t, x)$	$\vartheta^{1331} =$	$-A^2(t, x)B^2(t)$
$\vartheta^{2002} =$	$A^2(t, x)D^2(t, x)$	$\vartheta^{2003} =$	$-A^2(t, x)C(t, x)$
$\vartheta^{2112} =$	$-A^2(t, x)D^2(t, x)$	$\vartheta^{2211} =$	$A^2(t, x)D^2(t, x)$
$\vartheta^{2233} =$	$A^4(t, x)$	$\vartheta^{2300} =$	$A^2(t, x)C(t, x)$
$\vartheta^{2311} =$	$-A^2(t, x)C(t, x)$	$\vartheta^{2332} =$	$-A^4(t, x)$
$\vartheta^{3002} =$	$-A^2(t, x)C(t, x)$	$\vartheta^{3003} =$	$A^2(t, x)B^2(t)$
$\vartheta^{3112} =$	$A^2(t, x)C(t, x)$	$\vartheta^{3113} =$	$-A^2(t, x)B(t)$
$\vartheta^{3200} =$	$A^2(t, x)C(t, x)$	$\vartheta^{3211} =$	$-A^2(t, x)C(t, x)$
$\vartheta^{3223} =$	$-A^4(t, x)$	$\vartheta^{3300} =$	$-A^2(t, x)B^2(t)$
$\vartheta^{3311} =$	$A^2(t, x)B^2(t)$	$\vartheta^{3322} =$	$A^4(t, x)$

Elde edilen bu ifadeleri kullanılarak (3.177) denklemi yardımıyla L-L temsili için enerji- momentum dağılımları

Çizelge 4.4: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG L-L temsilde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$L^{00} =$	$-\frac{1}{8\pi} \left(\frac{d\Delta^2(x,t)}{dx} + \Delta(x,t) \frac{d^2\Delta(x,t)}{dx^2} \right)$
$L^{01} =$	$\frac{1}{8\pi} \left(\frac{d\Delta(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} + \Delta(x,t) \frac{d^2\Delta(x,t)}{dtdx} \right)$

olarak elde edilir.

4.1.3. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ Evren Modelinde Bergmann-Thomson E-M Dağılımı

Kısım 3.5.3.3.'de tanımlanan ifadeleri kullanılarak B-T temsilde E-M dağılımı hesaplanır. Öncelikle (3.195) denklemiyle tanımlı potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir. B-T temsiline ait ilk potansiyel (3.195) denkleminde de ifade edildiği gibi Freud süperpotansiyeline eşit olduğundan dolayı $\Psi_{\kappa}^{\nu\lambda}$ hesaplarıyla elde edilen sonuçlar Çizelge 4.1'de elde edilenlerle özdeş olur. Şimdi bu ifadeler kullanılarak $\Pi^{\mu\nu\lambda}$ nicelikleri elde edilebilir.

Çizelge 4.5: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG B-T temsilde süperpotansiyel hesapları.

$\Pi^{001} = -\Pi^{010} =$	$-\frac{2}{A^2(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$
$\Pi^{101} = -\Pi^{110} =$	$\frac{2}{A^2(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dt}$
$\Pi^{202} = -\Pi^{220} =$	$\frac{2D(t,x)}{\Delta(t,x)A(t,x)} \frac{d[D(t,x)A(t,x)]}{dt}$
$\Pi^{203} = -\Pi^{230} =$	$\frac{1}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d[C(t,x)A^2(t,x)]}{dt}$
$\Pi^{212} = -\Pi^{221} =$	$-\frac{2D(t,x)}{\Delta(t,x)A(t,x)} \frac{d[D(t,x)A(t,x)]}{dx}$

$\Pi^{213} = -\Pi^{231} =$	$\frac{1}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d[C(t,x)A^2(t,x)]}{dx}$
$\Pi^{302} = -\Pi^{320} =$	$-\frac{1}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d[C(t,x)A^2(t,x)]}{dt}$
$\Pi^{303} = -\Pi^{330} =$	$\frac{2B(t)}{A(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d[B(t)A(t,x)]}{dt}$
$\Pi^{312} = -\Pi^{321} =$	$\frac{1}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d[C(t,x)A^2(t,x)]}{dx}$
$\Pi^{313} = -\Pi^{331} =$	$-\frac{2B^2(t)}{A(t,x)\Delta(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx}$

Elde edilen bu ifadeleri kullanılarak (3.194) denklemi yardımıyla L-L temsili için enerji- momentum dağılımları

Çizelge 4.6: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG B-T temsilde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$B^{00} =$	$\frac{1}{8\pi A^3(x,t)} \left(2 \frac{dA(x,t)}{dx} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} - A(x,t) \frac{d^2\Delta(x,t)}{dx^2} \right)$
$B^{01} =$	$-\frac{1}{8\pi A^3(x,t)} \left(2 \frac{dA(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} + A(x,t) \frac{d^2\Delta(x,t)}{dtdx} \right)$

şeklinde elde edilir.

4.1.4. Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ Evren Modelinde Møller E-M Dağılımı

Kısım 3.5.3.4.'de tanımlanan ifadeleri kullanılarak Møller (1958) temsilde E-M dağılımı hesaplanır. Öncelikle (3.203) denklemiyle tanımlı süperpotansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir.

Çizelge 4.7: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için GG Møller temsilde süperpotansiyel hesapları.

$\chi_0^{01} = -\chi_0^{10} =$	$-\frac{2\Delta(t,x)}{A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx}$
--------------------------------	---

$\chi_1^{01} = -\chi_1^{10} =$	$-\frac{2\Delta(t,x)}{A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt}$
$\chi_2^{02} = -\chi_2^{20} =$	$\frac{1}{\Delta(t,x)} \left(2B(t)D^2(t,x) \frac{dB(t)}{dt} + C(t,x) \frac{dC(t,x)}{dt} \right)$
$\chi_2^{03} = -\chi_2^{30} =$	$\frac{C^2(t,x)}{\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2(t)}{C(t,x)} \right)$
$\chi_2^{12} = -\chi_2^{21} =$	$-\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \frac{dC(t,x)}{dx}$
$\chi_2^{13} = -\chi_2^{31} =$	$\frac{B^2(t,x)}{\Delta(t,x)} \frac{dC(t,x)}{dx}$
$\chi_3^{02} = -\chi_3^{20} =$	$\frac{C^2(t,x)}{\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{D^2(t,x)}{C(t,x)} \right)$
$\chi_3^{03} = -\chi_3^{30} =$	$\frac{1}{\Delta(t,x)} \left(C(t,x) \frac{dC(t,x)}{dt} - 2B^2(t)D(t,x) \frac{dD(t,x)}{dt} \right)$
$\chi_3^{12} = -\chi_3^{21} =$	$-\frac{C^2(t,x)}{\Delta(t,x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{D^2(t,x)}{C(t,x)} \right)$
$\chi_3^{13} = -\chi_3^{31} =$	$-\frac{1}{\Delta(t,x)} \left(C(t,x) \frac{dC(t,x)}{dx} - 2B^2(t)D(t,x) \frac{dD(t,x)}{dx} \right)$

Elde edilen bu ifadeleri kullanılarak (3.202) denklemi yardımıyla L-L temsili için enerji- momentum dağılımları,

Çizelge4.8: Bianchi-Behr $VI_{h=4}$ evren modeli için GG Møller temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$M_0^0 =$	$-\frac{1}{4\pi A^2(x,t)} \left[A(x,t) \frac{dA(x,t)}{dx} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} + \Delta(x,t) \left(-\frac{dA^2(x,t)}{dx} + A(x,t) \frac{d^2 A(x,t)}{dx^2} \right) \right]$
$M_0^1 =$	$\frac{1}{4\pi A^2(x,t)} \left[A(x,t) \frac{dA(x,t)}{dx} \frac{d\Delta(x,t)}{dt} + \Delta(x,t) \left(-\frac{dA(x,t)}{dt} \frac{dA(x,t)}{dx} + A(x,t) \frac{dA(x,t)}{dtdx} \right) \right]$

$M_1^0 =$	$-\frac{1}{4\pi A^2(x,t)} \left[A(x,t) \frac{dA(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} + \Delta(x,t) \left(-\frac{dA(x,t)}{dt} \frac{dA(x,t)}{dx} + A(x,t) \frac{dA(x,t)}{dt dx} \right) \right]$
$M_1^1 =$	$\frac{1}{4\pi A^2(x,t)} \left[A(x,t) \frac{dA(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dt} + \Delta(x,t) \left(-\frac{dA^2(x,t)}{dt} + A(x,t) \frac{d^2 A(x,t)}{dt^2} \right) \right]$
$M_2^2 =$	$\frac{1}{8\pi \Delta^2(x,t)} \left\{ 4B(t)D(t,x)\Delta(t,x) \frac{dB(t)}{dt} \frac{dD(t,x)}{dx} + 2D^2(t,x) \left[\Delta(t,x) \left(\frac{dB^2(t)}{dt} + B(t) \frac{d^2 B(t)}{dt^2} \right) - B(t) \frac{dB(t)}{dt} \frac{d\Delta(t,x)}{dt} \right] + C(t,x) \left(-\frac{dC(x,t)}{dx} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} + \frac{dC(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dt} \right) + \Delta(x,t) \left[\frac{dC^2(x,t)}{dx} - \frac{dC^2(x,t)}{dt} + C(x,t) \left(\frac{d^2 C(x,t)}{dx^2} - \frac{d^2 C(x,t)}{dt^2} \right) \right] \right\}$
$M_2^3 =$	$\frac{1}{8\pi \Delta^2(x,t)} \left\{ -2C(t,x) \left[\Delta(t,x) \left(\frac{dB^2(t)}{dt} + B(t) \frac{d^2 B(t)}{dt^2} \right) - B(t) \frac{dB(t)}{dt} \frac{d\Delta(t,x)}{dt} \right] + B^2(t) \left[\frac{dC(t,x)}{dx} \frac{d\Delta(t,x)}{dx} - \frac{dC(t,x)}{dt} \frac{d\Delta(t,x)}{dt} + \Delta(t,x) \left(-\frac{d^2 C(x,t)}{dx^2} + \frac{d^2 C(x,t)}{dt^2} \right) \right] \right\}$
$M_3^2 =$	$\frac{1}{8\pi \Delta^2(x,t)} \left\langle D^2(t,x) \left[\frac{dC(x,t)}{dx} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} - \frac{dC(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dt} + \Delta(t,x) \left(-\frac{d^2 C(x,t)}{dx^2} + \frac{d^2 C(x,t)}{dt^2} \right) \right] + 2C(t,x) \left\{ D(t,x) \left(-\frac{dD(x,t)}{dx} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} + \frac{dD(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dt} \right) + \Delta(t,x) \left[\frac{dD^2(x,t)}{dx} - \frac{dD^2(x,t)}{dt} \left(\frac{d^2 D(x,t)}{dx^2} - \frac{d^2 D(x,t)}{dt^2} \right) \right] \right\} \right\rangle$

$$\begin{aligned}
M_3^3 = & \frac{1}{8\pi\Delta^2(x,t)} \left\langle C(t,x) \left(-\frac{dC(x,t)}{dx} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} + \frac{dC(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dt} \right) \right. \\
& + 2B^2(t)D(t,x) \left(\frac{dD(x,t)}{dx} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} - \frac{dD(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dt} \right) \\
& + \Delta(t,x) \left\{ \frac{dC^2(x,t)}{dx} + C(t,x) \frac{d^2C(x,t)}{dx^2} - \frac{dC^2(x,t)}{dt} \right. \\
& + 4B(t)D(t,x) \frac{dB(t)}{dt} \frac{dD(x,t)}{dt} - C(t,x) \frac{d^2C(x,t)}{dt^2} \\
& - 2B^2(t) \left[\frac{dD^2(x,t)}{dx} - \frac{dD^2(x,t)}{dt} \right. \\
& \left. \left. \left. + D(t,x) \left(\frac{d^2D(x,t)}{dx^2} - \frac{d^2D(x,t)}{dt^2} \right) \right] \right] \right\rangle
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4.1.5. Bianchi-Behr $VI_{h=4}$ Evren Modelinde Teleparalel Einstein,

Landau-Lifshitz ve Bergmann-Thomson E-M Dağılımı

Kısım 3.5.4.'de görüldüğü gibi TPG kuramında farklı temsiller aynı süperpotansiyele bağlı olmaktadır. Dolayısıyla, burada öncelikle (3.55) denklemlerle tanımlı burulma tensörü ve (3.106) denklemlerle tanımlı Weitzenböck bağlantısı ile bunların uygun biçimleri (karma ve tam kontravaryant) hesaplanarak (3.215) ile tanımlı süperpotansiyelin hesabı için gerekli terimler elde edilir.

Çizelge 4.9: Bianchi-Behr $VI_{h=4}$ evren modeline ait Weitzenböck bağlantının bileşenleri.

$\bar{\Gamma}_{00}^0 =$	$\frac{1}{A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt}$
$\bar{\Gamma}_{01}^0 =$	$\frac{1}{A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx}$
$\bar{\Gamma}_{10}^1 =$	$\frac{1}{A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt}$
$\bar{\Gamma}_{11}^1 =$	$\frac{1}{A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt}$

$\bar{\Gamma}_{20}^2 =$	$\frac{1}{B(t)} \frac{dB(t)}{dt}$
$\bar{\Gamma}_{30}^2 =$	$\frac{\Delta(t,x)}{B^2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$\bar{\Gamma}_{31}^2 =$	$\frac{\Delta(t,x)}{B^2(t)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$\bar{\Gamma}_{30}^3 =$	$-\frac{1}{B(t)} \frac{dB(t)}{dt} + \frac{1}{\Delta(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dt}$
$\bar{\Gamma}_{31}^3 =$	$\frac{1}{\Delta(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$

Çizelge 4.9'deki ifadeler (3.55) denkleminde kullanılarak aşağıdaki burulma tensörü bileşenleri elde edilebilir.

Çizelge 4.10: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $T^\lambda_{\mu\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.

$T^0_{01} = -T^0_{10} =$	$-\frac{1}{A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx}$
$T^1_{01} = -T^1_{10} =$	$\frac{1}{A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt}$
$T^2_{02} = -T^2_{20} =$	$\frac{1}{B(t)} \frac{dB(t)}{dt}$
$T^2_{03} = -T^2_{30} =$	$\frac{\Delta(t,x)}{B^2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^2_{13} = -T^2_{31} =$	$\frac{\Delta(t,x)}{B^2(t)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^3_{03} = -T^3_{30} =$	$\frac{1}{B(t)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta(t,x)}{B(t)} \right)$
$T^3_{13} = -T^3_{31} =$	$\frac{1}{\Delta(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$

Çizelge 4.10'daki ifadeler ve ters-metrik tensör bileşenleri kullanılarak $T^{\lambda\mu}_{\nu} = g^{\mu\kappa}T^{\lambda}_{\kappa\nu}$ eşitliği sayesinde aşağıdaki burulma tensörü bileşenleri elde edilebilir.

Çizelge 4.11: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $T^{\lambda\mu}_{\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.

$T^{00}_{1} =$	$\frac{1}{A^3(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx}$
$T^{01}_{0} =$	$\frac{1}{A^3(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx}$
$T^{10}_{1} =$	$-\frac{1}{A^3(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt}$
$T^{11}_{0} =$	$-\frac{1}{A^3(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt}$
$T^{20}_{2} =$	$-\frac{1}{A^2(t,x)B(t)} \frac{dB(t)}{dt}$
$T^{20}_{3} =$	$-\frac{\Delta(t,x)}{A^2(t,x)B^2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{21}_{3} =$	$\frac{\Delta(t,x)}{A^2(t,x)B^2(t)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{22}_{0} =$	$-\frac{1}{B^2(t)\Delta^2(t,x)} \left[B(t)D^2(t,x) \frac{dB(t)}{dt} - C(t,x)\Delta(t,x) \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right) \right]$
$T^{22}_{1} =$	$\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)B^2(t)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{23}_{0} =$	$\frac{C(t,x)}{\Delta^2(t,x)B(t)} \frac{dB(t)}{dt} - \frac{1}{\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{23}_{1} =$	$-\frac{1}{\Delta(t,x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{30}_{3} =$	$-\frac{1}{A^2(t,x)B(t)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta(t,x)}{B(t)} \right)$

$T_{31}^{31} =$	$\frac{1}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$
$T_{00}^{32} =$	$\frac{C(t,x)}{B(t)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B(t)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T_{11}^{32} =$	$\frac{C(t,x)}{\Delta^3(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$
$T_{00}^{33} =$	$\frac{B(t)}{\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B(t)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T_{11}^{33} =$	$-\frac{B^2(t)}{\Delta^3(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$

Çizelge 4.11 (veya Çizelge 4.10)'daki ifadeler ve ters-metrik tensör bileşenleri kullanılarak $T^{\lambda\mu\nu} = g^{v\sigma} T^{\lambda\mu}_{\sigma}$ (veya $T^{\lambda\mu\nu} = g^{\mu\kappa} g^{v\sigma} T^{\lambda}_{\kappa\sigma}$) eşitliği sayesinde aşağıdaki burulma tensörü bileşenleri elde edilebilir.

Çizelge 4.12: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $T^{\lambda\mu\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.

$T^{001} =$	$\frac{1}{A^5(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx}$
$T^{010} =$	$-\frac{1}{A^5(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx}$
$T^{101} =$	$-\frac{1}{A^5(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt}$
$T^{110} =$	$\frac{1}{A^5(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt}$
$T^{202} =$	$-\frac{1}{A^2(t,x)B^2(t)\Delta^2(t,x)} \left[B(t)D^2(t,x) \frac{dB(t)}{dt} - C(t,x)\Delta(t,x) \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right) \right]$
$T^{203} =$	$-\frac{B(t)}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{B(t)\Delta(t,x)} \right)$

$T^{212} =$	$-\frac{C(t,x)}{A^2(t,x)B^2(t)\Delta(t,x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{213} =$	$\frac{1}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{220} =$	$\frac{1}{A^2(t,x)B^2(t)\Delta^2(t,x)} \left[B(t)D^2(t,x) \frac{dB(t)}{dt} - C(t,x)\Delta(t,x) \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right) \right]$
$T^{221} =$	$\frac{C(t,x)}{A^2(t,x)B^2(t)\Delta(t,x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{230} =$	$\frac{B(t)}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{B(t)\Delta(t,x)} \right)$
$T^{231} =$	$-\frac{1}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{302} =$	$\frac{C(t,x)}{A^2(t,x)B(t)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B(t)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{303} =$	$\frac{B(t)}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B(t)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{312} =$	$-\frac{C(t,x)}{A^2(t,x)\Delta^3(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$
$T^{313} =$	$\frac{B^2(t)}{A^2(t,x)\Delta^3(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$
$T^{320} =$	$-\frac{C(t,x)}{A^2(t,x)B(t)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B(t)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{321} =$	$\frac{C(t,x)}{A^2(t,x)\Delta^3(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$
$T^{330} =$	$-\frac{B(t)}{A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B(t)}{\Delta(t,x)} \right)$
$T^{331} =$	$-\frac{B^2(t)}{A^2(t,x)\Delta^3(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$

Yukarıdaki Çizelge 4.11 ve Çizelge 4.12'deki ifadeler (3.215) denkleminde kullanılarak $Z^{\lambda\mu\nu}$ süperpotansiyeline ait bileşenler aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

Çizelge 4.13: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $Z^{\lambda\mu\nu}$ biçimindeki süperpotansiyel bileşenleri.

$Z^{001} = -Z^{010} =$	$-\frac{1}{2A^4(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$
$Z^{023} = -Z^{032} =$	$\frac{C^2(t,x)}{4A^2(t,x)B^2(t)\Delta^2(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2(t)}{C(t,x)} \right)$
$Z^{101} = -Z^{110} =$	$\frac{1}{2A^4(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dt}$
$Z^{123} = -Z^{132} =$	$\frac{1}{4A^2(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{dC(t,x)}{dx}$
$Z^{202} = -Z^{220} =$	$B^3(t)D^2(t,x) \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta(t,x)A(t,x)}{B(t)} \right)$ $+ A(t,x)C(t,x)\Delta^2(t,x) \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$Z^{203} = -Z^{230} =$	$-\frac{1}{4A^4(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{d[A^2(t,x)C(t,x)]}{dt}$
$Z^{212} = -Z^{221} =$	$-\frac{D^2(t,x)}{2A^3(t,x)\Delta^3(t,x)} \frac{d[\Delta(t,x)A(t,x)]}{dx}$ $-\frac{C(t,x)}{2A^2(t,x)B^2(t)\Delta(t,x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right)$
$Z^{213} = -Z^{231} =$	$\frac{1}{4A^4(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{d[A^2(t,x)C(t,x)]}{dx}$
$Z^{302} = -Z^{320} =$	$-\frac{1}{4A^4(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{d[A^2(t,x)C(t,x)]}{dt}$
$Z^{303} = -Z^{330} =$	$\frac{B(t)}{2A^3(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{d[A(t,x)B(t)]}{dt}$
$Z^{312} = -Z^{321} =$	$\frac{1}{4A^4(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{d[A^2(t,x)C(t,x)]}{dx}$

$Z^{313} = -Z^{331} =$	$-\frac{B^2(t)}{2A^3(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx}$
------------------------	---

Çizelge 4.13'deki ifadeler ve metrik tensör bileşenleri kullanılarak $Z_{\lambda}^{\mu\nu} = g_{\lambda\kappa} Z^{\kappa\mu\nu}$ eşitliği sayesinde $Z^{\kappa\mu\nu}$ süperpotansiyeline ait aşağıdaki bileşenler elde edilebilir. Bu sayede $U_{\mu}^{\nu\lambda}$ Freud süperpotansiyeline ulaşmak için gerekli olan terimler elde edilir.

Çizelge 4.14: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $Z_{\lambda}^{\mu\nu}$ biçimindeki süperpotansiyel bileşenleri.

$Z_0^{01} = -Z_0^{10} =$	$\frac{1}{2A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$
$Z_0^{23} = -Z_0^{32} =$	$-\frac{C^2(t,x)}{4B^2(t)\Delta^2(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2(t)}{C(t,x)} \right)$
$Z_1^{01} = -Z_1^{10} =$	$\frac{1}{2A^2(t,x)\Delta(t,x)} \frac{d\Delta(t,x)}{dt}$
$Z_1^{23} = -Z_1^{32} =$	$\frac{1}{4\Delta^2(t,x)} \frac{dC(t,x)}{dx}$
$Z_2^{02} = -Z_2^{20} =$	$\frac{1}{2A^3(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt} + \frac{B^3(t)D^2(t,x)}{2A^2(t,x)\Delta^3(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta(t,x)}{B(t)} \right) + \frac{C(t,x)}{4A^2(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta^2(t,x)} \right)$
$Z_2^{03} = -Z_2^{30} =$	$\frac{C^2(t,x)}{4A^2(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2(t)}{C(t,x)} \right)$
$Z_2^{12} = -Z_2^{21} =$	$-\frac{1}{4A^3(t,x)\Delta^3(t,x)} \left(A(t,x)C(t,x)\Delta(t,x) \frac{dC(t,x)}{dx} + 2\Delta^2(t,x) \frac{d[A(t,x)\Delta(t,x)]}{dx} \right)$
$Z_2^{13} = -Z_2^{31} =$	$\frac{B^2(t)}{4A^2(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{dC(t,x)}{dx}$

$Z_3^{02} = -Z_3^{20} =$	$\frac{C^2(t,x)}{2A^2(t,x)B^2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right) - \frac{C(t,x)D^2(t,x)}{2A^2(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{dB(t)}{dt}$ $- \frac{D^2(t,x)}{4A^2(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta^2(t,x)} \right)$
$Z_3^{03} = -Z_3^{30} =$	$\frac{1}{2A^3(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt} + \frac{1}{4A^2(t,x)\Delta^2(t,x)} \left(2B(t)D^2(t,x) \frac{dB(t)}{dt} \right.$ $\left. - C(t,x) \frac{dC(t,x)}{dt} \right)$
$Z_3^{12} = -Z_3^{21} =$	$\frac{1}{4A^2(t,x)B^2(t)\Delta^2(t,x)} \left[\left(-C^2(t,x) + \Delta^2(t,x) \right) \frac{dC(t,x)}{dx} \right.$ $\left. - 2C(t,x)\Delta(t,x) \frac{d\Delta(t,x)}{dx} \right]$
$Z_3^{13} = -Z_3^{31} =$	$- \frac{1}{2A^3(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx} + \frac{C(t,x)}{4A^2(t,x)\Delta^2(t,x)} \frac{dC(t,x)}{dx}$

Şimdi Çizelge 4.14'daki ifadeler ve (4.6) denklemiyle tanımlı tetrad determinantını kullanılarak $hZ_\lambda^{\mu\nu} = U_\lambda^{\mu\nu}$ eşitliği sayesinde $U_\lambda^{\mu\nu}$ Freud süperpotansiyeline ait bileşenler elde edilebilir,

Çizelge 4.15: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait $U_\lambda^{\mu\nu}$ biçimindeki teleparalel Freud süperpotansiyel bileşenleri.

$U_0^{01} = -U_0^{10} =$	$\frac{1}{2} \frac{d\Delta(t,x)}{dx}$
$U_0^{23} = -U_0^{32} =$	$- \frac{A^2(t,x)C^2(t,x)}{4B^2(t)\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2(t)}{C(t,x)} \right)$
$U_1^{01} = -U_1^{10} =$	$\frac{1}{2} \frac{d\Delta(t,x)}{dt}$
$U_1^{23} = -U_1^{32} =$	$\frac{A^2(t,x)}{4\Delta(t,x)} \frac{dC(t,x)}{dx}$

$U_2^{02} = -U_2^{20} =$	$\frac{\Delta(t,x)}{2A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt} + \frac{B^3(t)D^2(t,x)}{2\Delta^2(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta(t,x)}{B(t)} \right) + \frac{C(t,x)\Delta(t,x)}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta^2(t,x)} \right)$
$U_2^{03} = -U_2^{30} =$	$\frac{C^2(t,x)}{4\Delta(t,x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2(t)}{C(t,x)} \right)$
$U_2^{12} = -U_2^{21} =$	$-\frac{1}{4A(t,x)\Delta^2(t,x)} \left(A(t,x)C(t,x)\Delta(t,x) \frac{dC(t,x)}{dx} + 2\Delta^2(t,x) \frac{d[A(t,x)\Delta(t,x)]}{dx} \right)$
$U_2^{13} = -U_2^{31} =$	$\frac{B^2(t)}{4\Delta(t,x)} \frac{dC(t,x)}{dx}$
$U_3^{02} = -U_3^{20} =$	$\frac{C^2(t,x)\Delta(t,x)}{2B^2(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta(t,x)} \right) - \frac{C(t,x)D^2(t,x)\Delta(t,x)}{2\Delta^2(t,x)} \frac{dB(t)}{dt} - \frac{D^2(t,x)\Delta(t,x)}{4} \frac{d}{dt} \left(\frac{C(t,x)}{\Delta^2(t,x)} \right)$
$U_3^{03} = -U_3^{30} =$	$\frac{\Delta(t,x)}{2A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dt} + \frac{1}{4\Delta(t,x)} \left(2B(t)D^2(t,x) \frac{dB(t)}{dt} - C(t,x) \frac{dC(t,x)}{dt} \right)$
$U_3^{12} = -U_3^{21} =$	$\frac{1}{4B^2(t)\Delta(t,x)} \left[(-C^2(t,x) + \Delta^2(t,x)) \frac{dC(t,x)}{dx} - 2C(t,x)\Delta(t,x) \frac{d\Delta(t,x)}{dx} \right]$
$U_3^{13} = -U_3^{31} =$	$-\frac{\Delta(t,x)}{2A(t,x)} \frac{dA(t,x)}{dx} + \frac{C(t,x)}{4\Delta(t,x)} \frac{dC(t,x)}{dx}$

Sonuç olarak Çizelge 4.15'deki ifadeler kullanılarak Teleparalel Gravite Kuramında Einstein, Landau-Lifshitz ve Bergmann-Thomson E-M dağılımları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Çizelge 4.16: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hE_0^0 =$	$\frac{1}{8\pi} \frac{d^2\Delta(t,x)}{dx^2}$
$hE_0^1 =$	$-\frac{1}{8\pi} \frac{d^2\Delta(t,x)}{dtdx}$

Çizelge 4.17: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hL^{00} =$	$-\frac{1}{8\pi} \left(\frac{d\Delta^2(x,t)}{dx} + \Delta(x,t) \frac{d^2\Delta(x,t)}{dx^2} \right)$
$hL^{01} =$	$\frac{1}{8\pi} \left(\frac{d\Delta(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} + \Delta(x,t) \frac{d^2\Delta(x,t)}{dtdx} \right)$

Çizelge 4.18: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hB^{00} =$	$\frac{1}{8\pi A^3(x,t)} \left(2 \frac{dA(x,t)}{dx} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} - A(x,t) \frac{d^2\Delta(x,t)}{dx^2} \right)$
$hB^{01} =$	$-\frac{1}{8\pi A^3(x,t)} \left(2 \frac{dA(x,t)}{dt} \frac{d\Delta(x,t)}{dx} + A(x,t) \frac{d^2\Delta(x,t)}{dtdx} \right)$

4.2. BİANCHİ $VI_{h=-1/9}$ UZAY-ZAMAN MODELİ

Wainwright A(ii) sınıfındaki ayrılabilir bir metriğin özel bir alt durumuna karşılık gelen (bu sınıfta elde edilebilir tek uzaysal homojen yapıya sahip olan) ve Bianchi $VI_{h=-1/9}$ türü simetri gruplu uzaysal homojen metrik⁶

$$ds^2 = -e^{5t} dt^2 + (1+V^2) e^{5t} dx^2 + 2Ve^{3t-2qx} dx dy + e^{3t+8qx} dy^2 + e^{t-4qx} dz^2 \quad (4.8)$$

biçiminde verilir. Burada $V = \sqrt{6q^2 - 1}$ ve q ifadesi $\frac{3}{8} > q^2 > \frac{1}{6}$ aralığında tanımlı bir sabittir. Bu metrik daha belirgin bir biçimde ilk olarak Wainwright^{7,8} tarafından verilen bir tam kuvvet yasası çözümüdür (the exact power-law solution).

İncelenen bu çizgi elemanına ait metrik tensör, ters-metrik tensör, tetrad ve ters-tetrad katsayıları matris formunda sırasıyla

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+V^2)e^{5t} & 0 & Ve^{3t-2qx} \\ 0 & 0 & e^{3t+8qx} & 0 \\ 0 & Ve^{3t-2qx} & 0 & e^{t-4qx} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$g = \det |g_{\mu\nu}| = -e^{14t+4qx} \quad (4.10)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 & -Ve^{-3t+2qx} \\ 0 & 0 & e^{-3t-8qx} & 0 \\ 0 & Ve^{-3t+2qx} & 0 & (1+V^2)e^{-t+4qx} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$h^{(a)}_{\mu} = \begin{bmatrix} e^{5t/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+V^2)^{1/2} e^{5t/2} & 0 & V \left(\frac{e^{t-4qx}}{1+V^2} \right)^{1/2} \\ 0 & 0 & e^{\frac{3t}{2}+4qx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{e^{t-4qx}}{1+V^2} \right)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$h = \det |h^{(a)}_{\mu}| = e^{7t+2qx} \quad (4.13)$$

$$h_{(a)}^{\mu} = \begin{bmatrix} e^{-5t/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-5t/2}}{(1+V^2)^{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{3t}{2}-4qx} & 0 \\ 0 & -\frac{Ve^{-5t/2}}{(1+V^2)^{1/2}} & 0 & \frac{1}{\left(\frac{e^{t-4qx}}{1+V^2}\right)^{1/2}} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

biçiminde olur.

4.2.1. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Einstein E-M Dağılımı

Kısım 3.5.3.1.'de tanımlanan ifadeleri kullanılarak Einstein temsilinde E-M dağılımı hesaplanır. Öncelikle (3.169) denklemiyle tanımlı potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir.

Çizelge 4.19: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG Einstein temsilinde süperpotansiyel hesapları.

$H_0^{01} = -H_0^{10} =$	$4qe^{2(t+qx)}$
$H_0^{03} = -H_0^{30} =$	$-6qVe^{4(t+qx)}$
$H_1^{01} = -H_1^{10} =$	$-2(V^2 - 2)e^{2(t+qx)}$
$H_1^{03} = -H_1^{30} =$	$2V(V^2 + 1)e^{4(t+qx)}$
$H_1^{13} = -H_1^{31} =$	$-8Vqe^{4(t+qx)}$
$H_2^{02} = -H_2^{20} =$	$6e^{2(t+qx)}$
$H_2^{12} = -H_2^{21} =$	$4qe^{2(t+qx)}$
$H_2^{23} = -H_2^{32} =$	$2Vqe^{4(t+qx)}$
$H_3^{01} = -H_3^{10} =$	$-2V$
$H_3^{03} = -H_3^{30} =$	$2(V^2 + 4)e^{2(t+qx)}$
$H_3^{13} = -H_3^{31} =$	$-8qe^{2(t+qx)}$

Elde edilen bu ifadeleri (3.168) denkleminde kullanılarak Einstein temsili için enerji- momentum dağılımları

Çizelge 4.20: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG Einstein temsiliinde enerji- momentum dağılımı sonuçları.

$E_0^0 =$	$\frac{1}{2\pi} q^2 e^{2(t+qx)}$
$E_0^1 =$	$-\frac{1}{2\pi} q e^{2(t+qx)}$
$E_0^3 =$	$\frac{3}{2\pi} V q e^{4(t+qx)}$

şeklinde elde edilir.

4.2.2. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Landau-Lifshitz

E-M Dağılımı

Kısım 3.5.3.2.'de tanımlanan ifadeleri kullanılarak Einstein temsiliinde E-M dağılımı hesaplanır. Öncelikle (3.174) denkleminle tanımlı potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir.

Çizelge 4.21: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG L-L temsiliinde süperpotansiyel hesapları.

$\vartheta^{0011} =$	$-e^{4(t+qx)}$	$\vartheta^{0013} =$	$V e^{6(t+qx)}$
$\vartheta^{0022} =$	$-e^{6t-4qx}$	$\vartheta^{0031} =$	$V e^{6(t+qx)}$
$\vartheta^{0033} =$	$-(V^2 + 1) e^{8(t+qx)}$	$\vartheta^{0110} =$	$e^{4(t+qx)}$
$\vartheta^{0130} =$	$-V e^{6(t+qx)}$	$\vartheta^{0220} =$	e^{6t-4qx}
$\vartheta^{0310} =$	$-V e^{6(t+qx)}$	$\vartheta^{0330} =$	$(V^2 + 1) e^{8(t+qx)}$
$\vartheta^{1001} =$	$e^{4(t+qx)}$	$\vartheta^{1003} =$	$-V e^{6(t+qx)}$
$\vartheta^{1100} =$	$-e^{4(t+qx)}$	$\vartheta^{1122} =$	e^{6t-4qx}
$\vartheta^{1133} =$	$e^{8(t+qx)}$	$\vartheta^{1221} =$	$-e^{6t-4qx}$
$\vartheta^{1223} =$	$V e^{8t-2qx}$	$\vartheta^{1300} =$	$V e^{6(t+qx)}$
$\vartheta^{1322} =$	$-V e^{8t-2qx}$	$\vartheta^{1331} =$	$-e^{8(t+qx)}$

$\vartheta^{2002} =$	e^{6t-4qx}	$\vartheta^{2112} =$	$-e^{6t-4qx}$
$\vartheta^{2132} =$	Ve^{8t-2qx}	$\vartheta^{2200} =$	$-e^{6t-4qx}$
$\vartheta^{2211} =$	e^{6t-4qx}	$\vartheta^{2213} =$	$-Ve^{8t-2qx}$
$\vartheta^{2231} =$	Ve^{8t-2qx}	$\vartheta^{2233} =$	$(1+V^2)e^{10t}$
$\vartheta^{2312} =$	Ve^{8t-2qx}	$\vartheta^{2332} =$	$-(1+V^2)e^{10t}$
$\vartheta^{3001} =$	$-Ve^{6(t+qx)}$	$\vartheta^{3003} =$	$(V^2+1)e^{8(t+qx)}$
$\vartheta^{3100} =$	$Ve^{6(t+qx)}$	$\vartheta^{3113} =$	$-e^{8(t+qx)}$
$\vartheta^{3122} =$	$-Ve^{8t-2qx}$	$\vartheta^{3221} =$	Ve^{8t-2qx}
$\vartheta^{3223} =$	$-(1+V^2)e^{10t}$	$\vartheta^{3300} =$	$-(V^2+1)e^{8(t+qx)}$
$\vartheta^{3311} =$	$e^{8(t+qx)}$	$\vartheta^{3322} =$	$(1+V^2)e^{10t}$

Elde edilen bu ifadeler kullanılarak (3.177) denklemini yardımıyla L-L temsili için enerji- momentum dağılımları,

Çizelge 4.22: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG L-L temsiliinde enerji- momentum dağılımı sonuçları.

$L^{00} =$	$-\frac{1}{\pi}q^2e^{4(t+qx)}$
$L^{01} =$	$\frac{1}{\pi}qe^{4(t+qx)}$
$L^{03} =$	$-\frac{9}{4\pi}Vqe^{6(t+qx)}$

şeklinde elde edilir.

4.2.3. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Bergmann-Thomson

E-M Dağılımı

Kısım 3.5.3.3.'de tanımlanan ifadeler kullanılarak B-T temsiliinde E-M dağılımı hesaplanır. Öncelikle (3.195) denkleminle tanımlı potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir. B-T temsiline ait ilk potansiyel (3.195) denkleminde de ifade edildiği gibi Freud süperpotansiyeline eşit olduğundan dolayı $\Psi_{\kappa}^{\nu\lambda}$ hesaplarıyla elde

edilen sonuçlar, Çizelge 4.19’da elde edilenlerle özdeş olur. Şimdi bu ifadeler kullanılarak $\Pi^{\mu\nu\lambda}$ nicelikleri elde edilebilir.

Çizelge 4.23: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG B-T temsilinde süperpotansiyel hesapları.

$\Pi^{001} = -\Pi^{010} =$	$-4qe^{-3t+2qx}$
$\Pi^{003} = -\Pi^{030} =$	$6Vqe^{-t+4qx}$
$\Pi^{101} = -\Pi^{110} =$	$4qe^{-3t+2qx}$
$\Pi^{103} = -\Pi^{130} =$	$-6Ve^{-t+4qx}$
$\Pi^{202} = -\Pi^{220} =$	$6e^{-t-6qx}$
$\Pi^{212} = -\Pi^{221} =$	$4qe^{-t-6qx}$
$\Pi^{223} = -\Pi^{232} =$	$2Vqe^{t-4qx}$
$\Pi^{301} = \Pi^{310} =$	$-6Ve^{-t+4qx}$
$\Pi^{303} = -\Pi^{330} =$	$8(V^2 + 1)e^{t+6qx}$
$\Pi^{313} = -\Pi^{331} =$	$-8qe^{t+6qx}$

Elde edilen bu ifadeler kullanılarak (3.194) denklemini yardımıyla L-L temsili için enerji- momentum dağılımları,

Çizelge 4.24: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG B-T temsilinde enerji- momentum dağılımı sonuçları.

$B^{00} =$	$-\frac{1}{2\pi}q^2e^{-3t+2qx}$
$B^{01} =$	$-\frac{4}{3\pi}qe^{-3t+2qx}$
$B^{03} =$	$\frac{3}{8\pi}Vqe^{-t+4qx}$

biçiminde elde edilir.

4.2.4. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Møller E-M Dağılımı

Kısım 3.5.3.4.'de tanımlanan ifadeler kullanılarak Møller (1958) temsilinde E-M dağılımı hesaplanır. Öncelikle (3.203) denklemiyle tanımlı süperpotansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir.

Çizelge 4.25: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG Møller temsilinde süperpotansiyel hesapları.

$\chi_1^{01} = -\chi_1^{10} =$	$-(2V^2 + 5)e^{2(t+qx)}$
$\chi_1^{03} = -\chi_1^{30} =$	$2V(V^2 + 1)e^{4(t+qx)}$
$\chi_1^{13} = -\chi_1^{31} =$	$-2Vqe^{4(t+qx)}$
$\chi_2^{02} = -\chi_2^{20} =$	$-3e^{2(t+qx)}$
$\chi_2^{12} = -\chi_2^{21} =$	$8qe^{2(t+qx)}$
$\chi_2^{23} = -\chi_2^{32} =$	$8Vqe^{4(t+qx)}$
$\chi_3^{01} = -\chi_3^{10} =$	$-2V$
$\chi_3^{03} = -\chi_3^{30} =$	$(2V^2 - 1)e^{2(t+qx)}$
$\chi_3^{13} = -\chi_3^{31} =$	$-4qe^{2(t+qx)}$

Elde edilen bu ifadeleri kullanılarak (3.202) denklemi yardımıyla L-L temsili için enerji- momentum dağılımları,

Çizelge 4.26: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için GG Møller temsilinde enerji- momentum dağılımı sonuçları.

$M_1^0 =$	$-\frac{q}{4\pi}(2V^2 + 5)e^{2(t+qx)}$
$M_1^1 =$	$\frac{1}{4\pi}(2V^2 + 5)e^{2(t+qx)}$
$M_1^3 =$	$-\frac{Vq}{\pi}(V^2 - q^2 + 1)e^{4(t+qx)}$
$M_2^2 =$	$-\frac{1}{4\pi}(8q^2 - 3)e^{2(t+qx)}$
$M_3^3 =$	$\frac{1}{4\pi}(-2V^2 + 4q^2 + 1)e^{2(t+qx)}$

şeklinde elde edilir.

4.2.5. Bianchi $VI_{h=-1/9}$ Evren Modelinde Teleparalel Einstein,

Landau-Lifshitz ve Bergmann-Thomson E-M Dağılımı

Kısım 3.5.4.'de görüldüğü gibi TPG kuramında farklı temsiller aynı süperpotansiyele bağlı olmaktadır. Dolayısıyla, burada öncelikle (3.55) denkleminle tanımlı burulma tensörü ve (3.106) denkleminle tanımlı Weitzenböck bağlantısı ile bunların uygun biçimleri (karma ve tam kontravaryant) hesaplanarak, (3.215) ile tanımlı süperpotansiyelin hesabı için gerekli terimler elde edilir.

Çizelge 4.27: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait Weitzenböck bağlantının bileşenleri.

$\bar{\Gamma}_{00}^0 =$	$\frac{5}{2}$
$\bar{\Gamma}_{10}^1 =$	$\frac{5}{2}$
$\bar{\Gamma}_{20}^2 =$	$\frac{3}{2}$
$\bar{\Gamma}_{21}^2 =$	$4q$
$\bar{\Gamma}_{30}^3 =$	$\frac{1}{2}$
$\bar{\Gamma}_{31}^3 =$	$-2q$

Çizelge 4.27'deki ifadeler (3.55) denkleminde kullanılarak aşağıdaki burulma tensörü bileşenleri elde edilebilir.

Çizelge 4.28: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $T^{\lambda}_{\mu\nu}$ biçimindeki burulma tensörünün bileşenleri.

$T^1_{01} = -T^1_{10} =$	$\frac{5}{2}$
--------------------------	---------------

$T^2_{02} = -T^2_{20} =$	$\frac{3}{2}$
$T^2_{12} = -T^2_{21} =$	$4q$
$T^3_{03} = -T^3_{30} =$	$\frac{1}{2}$
$T^3_{13} = -T^3_{31} =$	$-2q$

Çizelge 4.28'deki ifadeler ve ters-metrik tensör bileşenleri kullanılarak $T^{\lambda\mu}_\nu = g^{\mu\kappa}T^{\lambda}_{\kappa\nu}$ eşitliği sayesinde aşağıdaki burulma tensörü bileşenleri elde edilebilir.

Çizelge 4.29: Bianchi VI_{*h=-1/9*} evren modeline ait $T^{\lambda\mu}_\nu$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.

$T^{10}_1 =$	$-\frac{5}{2}e^{-5t}$
$T^{11}_0 =$	$-\frac{5}{2}e^{-5t}$
$T^{13}_0 =$	$\frac{5}{2}Ve^{-3t+2qx}$
$T^{20}_2 =$	$-\frac{3}{2}e^{-5t}$
$T^{21}_2 =$	$4qe^{-5t}$
$T^{22}_0 =$	$-\frac{3}{2}e^{-3t-8qx}$
$T^{22}_1 =$	$-4qe^{-3t-8qx}$
$T^{23}_2 =$	$-4Vqe^{-3t+2qx}$
$T^{30}_3 =$	$-\frac{1}{2}e^{-5t}$

$T_{0}^{31} =$	$\frac{1}{2}Ve^{-3t+2qx}$
$T_{1}^{31} =$	$-2Vqe^{-3t+2qx}$
$T_{3}^{31} =$	$-2qe^{-5t}$
$T_{0}^{33} =$	$-\frac{1}{2}(V^2 + 1)e^{-t+4qx}$
$T_{1}^{33} =$	$2q(V^2 + 1)e^{-t+4qx}$
$T_{3}^{33} =$	$2Vqe^{-3t+2qx}$

Çizelge 4.29 (veya Çizelge 4.28)'daki ifadeler ve ters-metrik tensör bileşenleri kullanılarak $T^{\lambda\mu\nu} = g^{v\sigma}T^{\lambda\mu}_{\sigma}$ (veya $T^{\lambda\mu\nu} = g^{\mu\kappa}g^{v\sigma}T^{\lambda}_{\kappa\sigma}$) eşitliği sayesinde aşağıdaki burulma tensörü bileşenleri elde edilebilir.

Çizelge 4.30: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $T^{\lambda\mu\nu}$ biçimindeki burulma tensörün bileşenleri.

$T^{101} =$	$-\frac{5}{2}e^{-10t}$
$T^{103} =$	$\frac{5}{2}Ve^{-8t+2qx}$
$T^{110} =$	$\frac{5}{2}e^{-10t}$
$T^{130} =$	$-\frac{5}{2}Ve^{-8t+2qx}$
$T^{202} =$	$-\frac{3}{2}e^{-8(t+qx)}$
$T^{212} =$	$4qe^{-8(t+qx)}$
$T^{220} =$	$\frac{3}{2}e^{-8(t+qx)}$
$T^{221} =$	$-4qe^{-8(t+qx)}$
$T^{223} =$	$4Vqe^{-6(t+qx)}$

$T^{232} =$	$-4Vqe^{-6(t+qx)}$
$T^{301} =$	$\frac{1}{2}Ve^{-8t+2qx}$
$T^{303} =$	$-\frac{1}{2}(V^2 + 1)e^{-6t+4qx}$
$T^{310} =$	$-\frac{1}{2}Ve^{-8t+2qx}$
$T^{313} =$	$-2qe^{-6t+4qx}$
$T^{330} =$	$\frac{1}{2}(V^2 + 1)e^{-6t+4qx}$
$T^{331} =$	$2qe^{-6t+4qx}$

Yukarıdaki Çizelge 4.29 ve Çizelge 4.30'daki ifadeler (3.215) denkleminde kullanılarak $Z^{\lambda\mu\nu}$ süperpotansiyeline ait bileşenler aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

Çizelge 4.31: Bianchi VI_{*h=-1/9*} evren modeline ait $Z^{\lambda\mu\nu}$ biçimindeki süperpotansiyel bileşenleri.

$Z^{001} = -Z^{010} =$	$-qe^{-10t}$
$Z^{003} = -Z^{030} =$	$Vqe^{-8t+2qx}$
$Z^{013} = -Z^{031} =$	$\frac{1}{2}Ve^{-8t+2qx}$
$Z^{101} = -Z^{110} =$	e^{-10t}
$Z^{103} = -Z^{130} =$	$-\frac{3}{2}Ve^{-8t+2qx}$
$Z^{202} = -Z^{220} =$	$\frac{3}{2}e^{-8(t+qx)}$
$Z^{212} = -Z^{221} =$	$qe^{-8(t+qx)}$
$Z^{223} = -Z^{232} =$	$Vqe^{-6(t+qx)}$

$Z_{\lambda}^{301} = -Z_{\lambda}^{310} =$	$-\frac{3}{2}Ve^{-8t+2qx}$
$Z_{\lambda}^{303} = -Z_{\lambda}^{330} =$	$2(V^2 + 1)e^{-6t+4qx}$
$Z_{\lambda}^{313} = -Z_{\lambda}^{331} =$	$-2qe^{-6t+4qx}$

Çizelge 4.31'deki ifadeler ve metrik tensör bileşenleri kullanılarak $Z_{\lambda}^{\mu\nu} = g_{\lambda\kappa}Z^{\kappa\mu\nu}$ eşitliği sayesinde $Z^{\kappa\mu\nu}$ süperpotansiyeline ait aşağıdaki bileşenler elde edilebilir. Bu sayede $U_{\mu}^{\nu\lambda}$ Freud süperpotansiyeline ulaşmak için gerekli olan terimler elde edilir.

Çizelge 4.32: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $Z_{\lambda}^{\mu\nu}$ biçimindeki süperpotansiyel bileşenleri.

$Z_0^{01} = -Z_0^{10} =$	qe^{-5t}
$Z_0^{03} = -Z_0^{30} =$	$-Vqe^{-3t+2qx}$
$Z_0^{13} = -Z_0^{31} =$	$-\frac{1}{2}Ve^{-3t+2qx}$
$Z_1^{01} = -Z_1^{10} =$	$-\frac{1}{2}(V^2 - 2)e^{-5t}$
$Z_1^{03} = -Z_1^{30} =$	$\frac{1}{2}V(V^2 + 1)e^{-3t+2qx}$
$Z_1^{13} = -Z_1^{31} =$	$-2Vqe^{-3t+2qx}$
$Z_2^{02} = -Z_2^{20} =$	$\frac{3}{2}e^{-5t}$
$Z_2^{12} = -Z_2^{21} =$	qe^{-5t}
$Z_2^{23} = -Z_2^{32} =$	$Vqe^{-3t+2qx}$
$Z_3^{01} = -Z_3^{10} =$	$-\frac{1}{2}Ve^{-7t-2qx}$

$Z_3^{03} = -Z_3^{30} =$	$\frac{1}{2}(V^2 + 4)e^{-5t}$
$Z_3^{13} = -Z_3^{31} =$	$-2qe^{-5t}$

Şimdi Çizelge 4.32'deki ifadeler ve (4.6) denklemiyle tanımlı tetrad determinantını kullanılarak, $hZ_\lambda^{\mu\nu} = U_\lambda^{\mu\nu}$ eşitliği sayesinde $U_\lambda^{\mu\nu}$ Freud süperpotansiyeline ait bileşenler elde edilebilir.

Çizelge 4.33: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeline ait $U_\lambda^{\mu\nu}$ biçimindeki teleparalel Freud süperpotansiyel bileşenleri.

$U_0^{01} = -U_0^{10} =$	$qe^{2(t+qx)}$
$U_0^{03} = -U_0^{30} =$	$-Vqe^{4(t+qx)}$
$U_0^{13} = -U_0^{31} =$	$-\frac{1}{2}Ve^{4(t+qx)}$
$U_1^{01} = -U_1^{10} =$	$-\frac{1}{2}(V^2 - 2)e^{2(t+qx)}$
$U_1^{03} = -U_1^{30} =$	$\frac{1}{2}V(V^2 + 1)e^{4(t+qx)}$
$U_1^{13} = -U_1^{31} =$	$-2Vqe^{4(t+qx)}$
$U_2^{02} = -U_2^{20} =$	$\frac{3}{2}e^{2(t+qx)}$
$U_2^{12} = -U_2^{21} =$	$qe^{2(t+qx)}$
$U_2^{23} = -U_2^{32} =$	$Vqe^{4(t+qx)}$
$U_3^{01} = -U_3^{10} =$	$-\frac{V}{2}$
$U_3^{03} = -U_3^{30} =$	$\frac{1}{2}(V^2 + 4)e^{2(t+qx)}$

$U_3^{13} = -U_3^{31} =$	$-2qe^{2(t+qx)}$
--------------------------	------------------

Sonuç olarak Çizelge 4.33'deki ifadeler kullanılarak Teleparalel Gravite Kuramında Einstein, Landau-Lifshitz ve Bergmann-Thomson E-M dağılımları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Çizelge 4.34: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$hE_0^0 =$	$\frac{1}{2\pi} q^2 e^{2(t+qx)}$
$hE_0^1 =$	$-\frac{1}{2\pi} qe^{2(t+qx)}$
$hE_0^3 =$	$\frac{3}{2\pi} Vqe^{4(t+qx)}$

Çizelge 4.35: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modeli için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$hL^{00} =$	$-\frac{1}{\pi} q^2 e^{4(t+qx)}$
$hL^{01} =$	$\frac{1}{\pi} qe^{4(t+qx)}$
$hL^{03} =$	$-\frac{9}{4\pi} Vqe^{6(t+qx)}$

Çizelge 4.36: Bianchi $VI_{h=-1/9}$ evren modelinde teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$hB^{00} =$	$-\frac{1}{2\pi} q^2 e^{-3t+2qx}$
$hB^{01} =$	$-\frac{3}{4\pi} qe^{-3t+2qx}$
$hB^{03} =$	$-\frac{1}{4\pi} Vqe^{-t+4qx}$

4.3. TARTIŞMA

Bu çalışma kapsamında ele alınan modellerden Bianchi- $VI_{h=-1/9}$ uzay-zaman modeline ait metriğin herhangi bir alt duruma sahip olmamasına karşın, Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ uzay-zaman modeline ait genel metrik bazı alt durumlara sahip olmaktadır. Dolayısıyla bu kısımda sadece Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeli için elde edilen genel hesaplar çeşitli alt durumlar kapsamında değerlendirilir ve tam sonuçlar elde edilir.

Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ uzay-zaman modeli için açık ifadelerle en genel metrik

$$ds^2 = t^{2m} e^n (-dt^2 + dx^2) + t^{1/2} dy^2 \dots \quad (4.15)$$

$$\dots + 2t^{1/2} w dy dz + t^{1/2} (w^2 + t) dz^2$$

şeklinde tanımlıdır. Burada m niceliği enerji koşununa göre tayin edilen bir sabittir, w ve n ise $u(=t-x)$ 'in fonksiyonlarıdır ve birbirlerine $n' = w'^2$ ilişkisi ile bağlıdır. (4.15) metriğinin hareketli koordinatlarda tanımlanması gerçeği akışkana dört-hızın $\bar{u} = e^{-k} (\partial/\partial t)$ biçiminde olduğu anlamına gelir ($e^{2k} = t^{2m} e^n$). Bu tür geometriler, kaynağı $p = \rho$ durum denklemleri mükemmel bir akışkan olan Einstein alan denklemlerinin çözümlerini temsil eder.

$$p = \rho = \left(m + \frac{3}{16} \right) t^{-2(m+1)} e^{-n} \quad (4.16)$$

(4.15) metriğinde koordinat seçimindeki serbestlik, sistem ile ilgili koşulları sağlayan herhangi ek *yok etme vektör alanı* ve bunlara bağlı koşullarla

$$n = -2(2m+1) \ln \left\{ -\frac{1}{2(m+1)} [D(u) + E] \right\} \quad (4.17)$$

$$e^n = (-Fu)^{-2(m+1)} \quad (4.18)$$

$$F = \frac{D}{2(m+1)} > 0 \quad (4.19)$$

ve

$$w = 2[-2(m+1)u]^{1/2} \quad (4.20)$$

ifadeleri ile metriğin yeni hali

$$ds^2 = \frac{t^2 m}{(-Fu)^{2(m+1)}} (-dt^2 + dx^2) + t^{1/2} dy^2 \dots \quad (4.21)$$

$$\dots + 2t^{1/2} w dy dz + t^{1/2} (w^2 + t) dz^2$$

biçiminde olur. Burada D ve F birer pozitif sabit, E integrasyon sabiti ve G de bir sabittir.

$$Durum(A) \quad n'' = 0$$

Bu durumda n' ve buna bağlı olarak w' ifadeleri sıfırdan farklı birer sabit olur. $w' = s \neq 0$ ve $n' = s^2$ ifadelerine göre genelliği kaybetmeden $s=1$ ve $n = w = u$ olarak belirlenebilir. Bu durumda metrik

$$ds^2 = t^{2m} e^u (-dt^2 + dx^2) + t^{1/2} dy^2 \dots \quad (4.22)$$

$$\dots + 2t^{1/2} u dy dz + t^{1/2} (u^2 + t) dz^2$$

biçiminde olur. Bu çizgi elemanına ait metrik tensör, ters-metrik tensör, tetrad ve ters-tetrad katsayıları matris formunda sırasıyla,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -t^{2m} e^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{2m} e^u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{1/2} & t^{1/2} u \\ 0 & 0 & t^{1/2} u & t^{1/2} (u^2 + t) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$g = \det |g_{\mu\nu}| = -t^{4m+2} e^{2u} \quad (4.24)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -t^{-2m} e^{-u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-2m} e^{-u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-3/2} (u^2 + t) & -t^{-3/2} u \\ 0 & 0 & -t^{-3/2} u & t^{-3/2} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$h^{(a)}_{\mu} = \begin{bmatrix} t^m e^{u/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^m e^{u/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{1/4} & t^{1/4} u \\ 0 & 0 & 0 & t^{1/4} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$h = \det |h^{(a)}_{\mu}| = t^{2m+1} e^u \quad (4.27)$$

$$h^{(a)}_{\mu} = \begin{bmatrix} t^{-m} e^{-u+u/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-m} e^{-u+u/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1/4} & 0 \\ 0 & 0 & -t^{-3/4} u & t^{-3/4} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

biçiminde olur.

Sonuç olarak (4.1) metriği için elde edilen en genel ifadeler kullanılarak (4.22) metriği için enerji-momentum dağılımı sonuçları aşağıdaki gibi olur.

Çizelge 4.37: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için GG Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$E_0^0 =$	0
$E_0^1 =$	0

Çizelge 4.38: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için GG L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$L^{00} =$	0
$L^{01} =$	0

Çizelge 4.39: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için GG B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$B^{00} =$	0
$B^{01} =$	0

Çizelge 4.40: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için GG Møller temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$M_0^0 =$	$-\frac{t}{8\pi} \frac{d^2 u}{dx^2}$
$M_0^1 =$	$\frac{1}{8\pi} \left(\frac{du}{dx} + t \frac{d^2 u}{dtdx} \right)$

$M_1^0 =$	$-\frac{t}{8\pi} \frac{d^2u}{dt dx}$
$M_1^1 =$	$\frac{1}{8\pi} \left(\frac{du}{dt} + t \frac{d^2u}{dt^2} \right)$
$M_2^2 =$	$\frac{1}{8\pi} \left[\frac{du^2}{dx} - \frac{du^2}{dt} + u \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right]$
$M_2^3 =$	$\frac{1}{8\pi} \left(-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dt^2} \right)$
$M_3^2 =$	$\frac{1}{8\pi} \left[2u \left(\frac{du^2}{dx} - \frac{du^2}{dt} \right) + u^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \right) + t \left(-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right]$
$M_3^3 =$	$\frac{1}{8\pi} \left[-\frac{du^2}{dx} + \frac{du^2}{dt} + u \left(-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right]$

Çizelge 4.41: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hE_0^0 =$	0
$hE_0^1 =$	0

Çizelge 4.42: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hL^{00} =$	0
$hL^{01} =$	0

Çizelge 4.43: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(A)$ için teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hB^{00} =$	0
$hB^{01} =$	0

Durum(B) $n'' \neq 0$

Bu durumda K sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $A = K/n''$ ilişkisi yazılabilir ve n fonksiyonu $\frac{Kn'''}{2n''} = K(m+1) + 1$ koşulu ile birlikte $\left(\frac{n'}{n''}\right)' + 1 = 0$ ilişkisini sağlar. Bu ifadelerden, integrasyon sabitini sıfır yapan koşulların da kullanılmasıyla $n' = w'^2 = -(L/u)$ olduğu sonucuna varılabilir. Buradaki L , $K[L - 2(m+1)] = 2$ ifadesini sağlayan sıfırdan farklı bir sabittir. $w'^2 > 0$ olduğundan dolayı u değişkeni $Lu < 0$ koşuluyla sınırlandırılır. Bir dizi işlemler ve integrasyon hesaplarıyla aşağıdaki iki metrik elde edilir.

(i) $L > 0$

$$ds^2 = \frac{t^{2m}}{(-u)^L} (-dt^2 + dx^2) + t^{1/2} dy^2 \dots \quad (4.29)$$

$$\dots - 4t^{1/2} (-Lu)^{1/2} dydz + t^{1/2} (4(-Lu) + t) dz^2$$

burada $u = t - x < 0$ olarak tanımlıdır.

Bu çizgi elemanına ait metrik tensör, ters-metrik tensör, tetrad ve ters-tetrad katsayıları matris formunda sırasıyla

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -t^{2m} (-u)^{-L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{2m} (-u)^{-L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{1/2} & -2t^{1/2} (-Lu)^{1/2} \\ 0 & 0 & -2t^{1/2} (-Lu)^{1/2} & t^{1/2} [4(-Lu) + t] \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$g = \det |g_{\mu\nu}| = -t^{2+4m} (-u)^{-2L} \quad (4.31)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -t^{-2m} (-u)^L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-2m} (-u)^L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-3/2} (t - 4Lu) & 2t^{-3/2} (-Lu)^{1/2} \\ 0 & 0 & 2t^{-3/2} (-Lu)^{1/2} & t^{-3/2} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$h^{(a)}_{\mu} = \begin{bmatrix} t^m (-u)^{-L/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^m (-u)^{-L/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{1/4} & -2t^{1/4} (-Lu)^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & t^{3/4} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$h = \det |h^{(a)}_{\mu}| = t^{2m+1} (-u)^{-L} \quad (4.34)$$

$$h_{(a)}^{\mu} = \begin{bmatrix} t^{-m} (-u)^{-L/2} (-u)^L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-m} (-u)^{-L/2} (-u)^L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1/4} & 0 \\ 0 & 0 & 2t^{-3/4} (-Lu)^{1/2} & t^{-3/4} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

biçiminde olur.

Sonuç olarak (4.29) metriği için enerji-momentum dağılımı sonuçları aşağıdaki gibi olur.

Çizelge 4.44: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)-(i)$ için GG Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$E_0^0 =$	0
$E_0^1 =$	0

Çizelge 4.45: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)-(i)$ için GG L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$L^{00} =$	0
$L^{01} =$	0

Çizelge 4.46: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)-(i)$ için GG B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$B^{00} =$	0
$B^{01} =$	0

Çizelge 4.47: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)-(i)$ için GG Møller temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$M_0^0 =$	$\frac{(-1)^{-L} L t (-u)^L u^{-2-L}}{8\pi} \left(-\frac{du^2}{dx} + u \frac{d^2u}{dx^2} \right)$
$M_0^1 =$	$-\frac{(-1)^{-L} L (-u)^L u^{-2-L}}{8\pi} \left[-t \frac{du}{dt} \frac{du}{dx} + u \left(\frac{du}{dx} + t \frac{d^2u}{dt dx} \right) \right]$
$M_1^0 =$	$\frac{(-1)^{-L} L t (-u)^L u^{-2-L}}{8\pi} \left(-\frac{du}{dt} \frac{du}{dx} + u \frac{d^2u}{dt dx} \right)$
$M_1^1 =$	$-\frac{(-1)^{-L} L (-u)^L u^{-2-L}}{8\pi} \left[-t \frac{du^2}{dt} + u \left(\frac{du}{dt} + t \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right]$
$M_2^2 =$	$-\frac{(-1)^{-L} L (-u)^L u^{-L}}{4\pi} \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \right)$
$M_2^3 =$	$\frac{(-1)^{-L} (-u)^L u^{-2-L} \sqrt{-Lu}}{16\pi} \left[-\frac{du^2}{dx} + \frac{du^2}{dt} + 2u \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right]$
$M_3^2 =$	$\frac{(-1)^{-L} L (-u)^{-1+L} u^{-L}}{16\pi \sqrt{-Lu}} \left[-(t-4Lu) \frac{du^2}{dx} + t \frac{du^2}{dt} + 8Lu^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \right) + 2u \left(t \frac{d^2u}{dx^2} - 2L \frac{du^2}{dt} - t \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right]$
$M_3^3 =$	$\frac{(-1)^{-L} L (-u)^L u^{-L}}{4\pi} \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \right)$

Çizelge 4.48: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)-(i)$ için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hE_0^0 =$	0
$hE_0^1 =$	0

Çizelge 4.49: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)-(i)$ için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hL^{00} =$	0
$hL^{01} =$	0

Çizelge 4.50: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)-(i)$ için teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hB^{00} =$	0
$hB^{01} =$	0

(ii) $L < 0$

$$ds^2 = \frac{t^{2m}}{u^L} (-dt^2 + dx^2) + t^{1/2} dy^2 \dots \quad (4.36)$$

$$\dots + 4t^{1/2} (-Lu)^{1/2} dydz + t^{1/2} (4(-Lu) + t) dz^2$$

burada $u = t - x > 0$. Bu çizgi elemanına ait metrik tensör, ters-metrik tensör, tetrad ve ters-tetrad katsayıları matris formunda sırasıyla

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -t^{2m} u^{-L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{2m} u^{-L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{1/2} & 2t^{1/2} (-Lu)^{1/2} \\ 0 & 0 & 2t^{1/2} (-Lu)^{1/2} & t^{1/2} [4(-Lu) + t] \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$g = \det |g_{\mu\nu}| = -t^{2+4m} u^{-2L} \quad (4.38)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -t^{-2m} u^L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-2m} u^L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-3/2} (t - 4Lu) & -2t^{-3/2} (-Lu)^{1/2} \\ 0 & 0 & -2t^{-3/2} (-Lu)^{1/2} & t^{-3/2} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$h^{(a)}_{\mu} = \begin{bmatrix} t^m u^{-L/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^m u^{-L/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{1/4} & 2t^{1/4} (-Lu)^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & t^{3/4} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$h = \det |h^{(a)}_{\mu}| = t^{2m+1} u^{-L} \quad (4.41)$$

$$h_{(a)}^{\mu} = \begin{bmatrix} t^{-m} u^{-L/2} u^L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-m} u^{-L/2} u^L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1/4} & 0 \\ 0 & 0 & -2t^{-3/4} (-Lu)^{1/2} & t^{-3/4} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

biçiminde olur.

Sonuç olarak, (4.36) metriği için enerji-momentum dağılımı sonuçları aşağıdaki gibi olur. (K nın sonsuz olduğu limit durumunda, L yaklaşık olarak $2(m+1)$ değerine ulaşır ve (4.29) metriği (4.21) metriğinin $F=1$ değerli özel bir durumuna özdeş olur⁵).

Çizelge 4.51: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde *Durum(B)*-(ii) için GG Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$E_0^0 =$	0
$E_0^1 =$	0

Çizelge 4.52: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde *Durum(B)*-(ii) için GG L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$L^{00} =$	0
$L^{01} =$	0

Çizelge 4.53: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)$ -(ii) için GG B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$B^{00} =$	0
$B^{01} =$	0

Çizelge 4.54: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)$ -(ii) için GG Møller temsilinde enerji-momentum dağılımı sonuçları.

$M_0^0 =$	$\frac{Lt}{8\pi u^2} \left(-\frac{du^2}{dx} + u \frac{d^2u}{dx^2} \right)$
$M_0^1 =$	$-\frac{L}{8\pi u^2} \left[-t \frac{du}{dt} \frac{du}{dx} + u \left(\frac{du}{dx} + t \frac{d^2u}{dt dx} \right) \right]$
$M_1^0 =$	$\frac{Lt}{8\pi u^2} \left(-\frac{du}{dt} \frac{du}{dx} + u \frac{d^2u}{dt dx} \right)$
$M_1^1 =$	$-\frac{L}{8\pi u^2} \left[-t \frac{du^2}{dt} + u \left(\frac{du}{dt} + t \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right]$
$M_2^2 =$	$\frac{L}{4\pi} \left(-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dt^2} \right)$
$M_2^3 =$	$-\frac{L^2}{16\pi (-Lu)^{3/2}} \left[-\frac{du^2}{dx} + \frac{du^2}{dt} + 2u \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right]$
$M_3^2 =$	$-\frac{L^2}{16\pi (-Lu)^{3/2}} \left[-(t-4Lu) \frac{du^2}{dx} + t \frac{du^2}{dt} + 8Lu^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \right) + 2u \left(t \frac{d^2u}{dx^2} - 2L \frac{du^2}{dt} - t \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right]$
$M_3^3 =$	$\frac{L}{4\pi} \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \right)$

Çizelge 4.55: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)$ -(ii) için teleparalel Einstein temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hE_0^0 =$	0
$hE_0^1 =$	0

Çizelge 4.56: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)$ -(ii) için teleparalel L-L temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hL^{00} =$	0
$hL^{01} =$	0

Çizelge 4.57: Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modelinde $Durum(B)$ -(ii) için teleparalel B-T temsilinde enerji-momentum dağılımı hesapları.

$hB^{00} =$	0
$hB^{01} =$	0

KAYNAKLAR

1. Davidson, W. *Adv. Studies Theor. Phys.*, **2007**, 1, 213-235.
2. Wainwright, J.; Anderson, P. J., *Gen. Rel. and Grav.*, **1984**, 16, 609-624.ü
3. Collins, C. B.; *Commun. Math. Phys.*, **1971**, 23, 137.
4. Barrow, J. D., *Q. J. R. Astron. Soc.*, **1982**, 23, 344.
5. Collins, C. B., *Gen. Rel. and Grav.*, **1991**, 23, 321-334.
6. Wils, P., *Class. Quant. Grav.*, **1991**, 8, 361-377.
7. Wainwright, J., *Gen. Rel. and Grav.*, **1984**, 16, 657-674.
8. Wainwright, J.; Hsu, L., *Class. Quant. Grav.*, **1986**, 3, 1105-1124.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Einstein'ın gravitasyonel alan denklemleri ile ilgili araştırmalarının dayandığı en önemli gereksim ilgili sistemler için uygun bir enerji-momentum korunum yasası elde etmektir. Gerçekte de, fizik bilimindeki gelişmelere yön veren temel etken korunum yasalarını elde etmek için yeni enerji biçimlerini tanımlama girişimleridir. Çünkü bilindiği gibi enerji kavramı fiziksel kuramların tümünde temel rolü üstlenmektedir. Fakat görelilikte gravite kuramlarında arzu edilen yeni enerji biçimi tanımlama konusundaki çabalar ciddi zorluklarla karşı karşıya kalmaktadır. Buradaki temel zorluk gravitasyonel alana ait ve fiziksel açıdan tam olarak anlamlı bir enerji ifadesinin tanımlanması ile ilgilidir. Hem bu temel zorluk ve hem de buna bağlı olarak ortaya çıkan enerji yerelleşme problemi, GG kuramının ortaya çıktığı tarihten bu yana süregelen bir tartışma ve birçok araştırmanında konusu olmaktadır ve de günümüzde bile açık bir problem olarak kalmayı sürdürmektedir.

Bu çalışmada, görelilikte gravite kuramında enerji-momentum korunum yasası ve gravitasyonel alana ait bir enerji-momentum ifadesi elde etme adına daha önce gerçekleştirilen çalışmalardan bazıları tekrar gözden geçirildi ve bazı uzay-zamanlar için enerji-momentum problemi ile ilgili bir inceleme gerçekleştirildi. Bu çalışma kapsamında, Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ ve Bianchi $VI_{h=-1/9}$ türü evren modelleri için Einstein, Landau-Lifshitz, Bergmann-Thomson e-m pseudokompleksleri ve bunların teleparalel versiyonları kullanılarak GG ve TPG kuramlarında e-m dağılımları elde edildi. Ayrıca yine bu iki evren modeli için Møller (1958) e-m pseudokompleksi kullanılarak sadece GG kuramında enerji-momentum dağılımları araştırıldı. Hesaplamalar sonunda sıfırdan farklı olarak elde edilen bileşenler Kısım 4. deki çizelgelerde gösterildi.

GG kuramında Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait en genel metrik için elde edilen sonuçların her dört temsilde de birbirinden farklı olduğu, fakat Einstein, Landau-Lifshitz ve Bergmann-Thomson temsilleri ile bunların teleparalel versiyonları kullanılarak elde edilen sonuçların her iki kuramda da eşit olduğu bulundu. Yine bu modele ait alt durumlar için gerçekleştirilen hesaplamalarda Møller dışındaki tüm temsillerin e-m dağılımı için sıfır değerini verdiği gözlemlendi ($E_{\mu}^{\mu} = hE_{\mu}^{\nu} = L^{\mu\nu} = hL^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} = hB^{\mu\nu} = 0 \neq M_{\mu}^{\nu}$). Bianchi-Behr VI_h

evren modelinin asimtotik durumda FRW evren modeline yakın bir yapıya sahip olduğu göz önünde bulundurulduğu zaman, bu sonucun FRW modeli ile ilgili daha önce gerçekleştirilen çalışmalardan dolayı beklenebilen bir sonuç olduğu söylenebilir. Dolayısıyla Møller dışındaki temsillerle elde edilen bu sonuçlar, Tryon tarafından ileri sürülen büyük patlama modelini desteklemektedir ve Bianchi-Behr VI_h modelinin Evren için en az FRW modeli kadar uygun bit yapıda olduğunu göstermektedir.

Bianchi $VI_{h=-1/9}$ modeli için gerçekleştirilen hesaplamalarda da dört farklı temsil için birbirinden farklı e-m dağılımları elde edildi ve yine Einstein, Landau-Lifshitz ve Bergmann-Thomson temsilleri ile bunların teleparalel versiyonlarının her iki kuramda da aynı sonuçları verdiği gözlemlendi. Bu anlamda Bianchi-Behr $VI_{h=-4}$ evren modeline ait en genel metrik ile Bianchi $VI_{h=-1/9}$ modeline ait metrik birlikte değerlendirildiği zaman, bu iki modelde de her farklı temsilin farklı bir e-m dağılımı tanımladığı fakat kendi (Møller hariç) teleparalel versiyonları ile aynı e-m dağılımıyla sonuçlandıkları gözlenmektedir ($E_{\mu}^{\mu} = hE_{\mu}^{\nu} \neq L^{\mu\nu} = hL^{\mu\nu} \neq B^{\mu\nu} = hB^{\mu\nu} \neq M_{\mu}^{\nu}$).

Bu çalışmada, yöntem olarak kullanılan pseudokompleksler, GG kuramının özellikle “denklik ilkesi” olmak üzere, temel ilkelerinin bazı kısıtlamalarından dolayı çeşitli durumlarda fiziksel olarak anlamsız sonuçlara neden olmalarına rağmen, edilen sonuçlardan da görüldüğü gibi gravitasyonel dalgaların varlığı ve bu dalgaların tanımlı bir enerji-momentum taşıdıkları konusunda çok önemli bir kanıt olmaktadır.